Р. Лауэнштейнъ

# МЕХАНИКА

3

# МЕХАНИКА.

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ КУРСЪ

**Р. Лауэнштейна,**

инженера и проф. Строительно-Ремесленной школы въ Карлсруэ

обработанный **К. Аренсомъ,**

профессоромъ Строительно-Ремесленной Школы въ Карлсруэ.

Переводъ съ разрѣшенія автора съ седьмого изданія „Die Mechanik von R. Lauenstein, bearbeitet von C. Ahrens“
**М. П. Новгородскаго.**



**Съ 218 чертежами въ текстѣ.**



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера
Невскій пр. 14.
1908.

Тип. Батсаръ (б. Цоберниръ), Садовая ул. № 35.

# Предисловіе.

Предлагаемый курсъ „Механики", вмѣстѣ съ другими работами автора: „Сопротивленіе матеріаловъ" и „Графическая статика", составляютъ одно цѣлое, почему, при обработкѣ „Механики", упругость твердыхъ тѣлъ и не принималась во вниманіе, интересующихся же этимъ вопросомъ отсылаемъ къ сочиненію того же автора: „Сопротивленіе матеріаловъ".

Порядокъ распредѣленія матеріала — общепринятый; объемъ и выборъ его по возможности согласованъ съ требованіями преподаванія въ среднихъ техническихъ школахъ, при чемъ обращено больше вниманія на практическія приложенія, чѣмъ на чисто-теоретическія изслѣдованія, которыя, какъ показалъ опытъ, вообще мало пригодны для техниковъ, получившихъ образованіе въ ремесленныхъ школахъ или имъ подобныхъ заведеніяхъ.

Для того, чтобы выяснить себѣ приложенія выведенныхъ формулъ на практикѣ и пріобрѣсти потребные, при самостоятельномъ пользованіи ими навыкъ и увѣренность, къ каждому отдѣлу книги приложенъ цѣлый рядъ простыхъ практическихъ задачъ съ рѣшеніями.

Среднія техническія школы, при недостаткѣ времени, необходимаго для прохожденія курса, должны, какъ извѣстно, предъявить чрезвычайно высокія требованія къ прилежанію своихъ учениковъ; поэтому крайне желательны соотвѣтственные учебники, дѣлающіе излишнимъ обыкновенно такъ много отнимающее время диктованіе и разработку лекцій и дающіе такимъ образомъ болѣе свободнаго времени для усваиванія учебнаго матеріала.

Мое искреннее желаніе, чтобы предлагаемый курсъ послужилъ облегченіемъ въ дѣлѣ преподаванія механики, какъ для преподавателей, такъ и для учениковъ.

Р. Лауэнштейнъ.

Карлсруэ. Январь 1904 г.

---

## Предисловіе къ 7-му нѣмецкому изданію.

Охотно согласившись принять на себя дальнѣйшую обработку „Механики", я долженъ сказать, что моя задача будетъ заключаться въ томъ, чтобы вести эту обработку въ духѣ моего, къ сожалѣнію рано умершаго, друга и товарища Рудольфа Лауэнштейна.

Всякія предложенія объ исправленіяхъ и дополненіяхъ означеннаго курса всегда будутъ приняты мною съ благодарностью.

Надѣюсь, что и настоящее изданіе „Механики" встрѣтитъ такое же благосклонное вниманіе, какъ и прежде.

К. Аренсъ.

Карлсруэ, Октябрь 1906 г.

---

# ОГЛАВЛЕНІЕ.

## ГЛАВА I.

# Основныя понятія механики.

### § 1.

### Введеніе.

Механика изучаетъ силы и движенія (или измѣненія движеній), вызываемыя этими силами.

Сами по себѣ силы намъ не извѣстны; мы можемъ воспринимать лишь ихъ дѣйствія на тѣла. Хотя силу и можно опредѣлять какъ причину движенія (или измѣненія движенія), однако этимъ еще не будетъ вполнѣ установлено понятіе о ея существѣ. Источникомъ всякой силы является нѣкоторое тѣло; дѣйствіе же силы мы наблюдаемъ на другомъ тѣлѣ, которое, подъ ея вліяніемъ, начинаетъ двигаться или измѣняетъ свое движеніе. Поэтому по отношенію къ первому тѣлу мы силу будемъ разсматривать какъ дѣйствіе, по отношенію же ко второму—какъ причину движенія. Слѣдовательно, подъ силой разумѣютъ дѣйствіе одного тѣла на движеніе другого.

Если тѣло, находящееся въ покоѣ, подъ дѣйствіемъ силы не приходитъ въ движеніе, то это значитъ, что существуютъ противодѣйствующія силы, или что приложенная сила недостаточно велика для того, чтобы преодолѣть сопротивленія, противодѣйствующія движенію тѣла.

Поэтому, разсматриваемыя тѣла могутъ находиться въ состояніи покоя (въ равновѣсіи) или движенія. Сами по себѣ тѣла могутъ быть твердыми, капельно-жидкими и газообразными, и въ зависимости отъ этого вся механика дѣлится на слѣдующіе отдѣлы:

1. Ученіе о равновѣсіи и движеніи твердыхъ тѣлъ.
2. „ „ „ „ „ жидкихъ „
3. „ „ „ „ „ газообразныхъ „

Вообще ученіе о равновѣсіи носитъ названіе статики (или кинематики), ученіе же о движеніи—динамики (или кинетики).

§ 2.

## Общія свойства тѣлъ.

Нашими внѣшними органами чувствъ мы познаемъ *матерію*, или *вещество*. Количество вещества, существующаго во вселенной,—неизмѣнно.

Ограниченная часть матеріи называется *тѣломъ*; занимаемое имъ пространство—*объемомъ* тѣла, а количество содержащейся въ немъ матеріи—*массою* тѣла.

Тѣламъ присущи слѣдующія общія свойства:

1. *Протяженность* въ длину, ширину и высоту. Мѣрою длины служитъ метръ (одна десятимилліонная часть четверти земного меридіана) и его подраздѣленія (сантиметръ, миллиметръ).
2. *Непроницаемость*, или свойство тѣла занимать опредѣленное пространство, т. е. пространство, занятое однимъ тѣломъ, не можетъ быть одновременно занято другимъ тѣломъ.
3. *Тяжесть*. Тѣла имѣютъ стремленіе, подъ вліяніемъ силы притяженія земли (*силы тяжести*), приближаться къ ея центру; вслѣдствіе этого они производятъ на опору давленіе, которое и называется *вѣсомъ* даннаго тѣла.

   За единицу вѣса принимаютъ килограммъ, т. е. вѣсъ одного кубическаго дециметра чистой дестиллированной воды при 4°С. Направленіе, по которому движется свободно падающее тѣло, называется *отвѣснымъ*, или *вертикальнымъ*, а перпендикулярная къ нему линія или плоскость — *горизонтальной*, или *ватерпасной*.
4. *Дѣлимость*. Каждое тѣло дѣлимо. Наименьшія части, на которыя тѣло можетъ быть механическимъ способомъ разбито, называются *молекулами* (частицами); молекулы же, въ свою очередь, могутъ быть химически разбиты на *атомы*.
5. *Пористость*. Объемъ тѣла не заполненъ веществомъ непрерывно, а всегда въ тѣлѣ между молекулами остаются промежуточныя пространства, или *поры*, которыя у однихъ тѣлъ (какъ, напр., у губки) можно наблюдать простымъ глазомъ, а у другихъ — наоборотъ, можно замѣтить лишь съ помощью микроскопа.

   Непосредственнымъ слѣдствіемъ пористости тѣлъ является ихъ *сжимаемость* и *расширяемость*. Эти свойства яснѣе всего проявляются въ газахъ и менѣе всего—въ капельножидкихъ тѣлахъ.

6. Сцѣпленіемъ называется взаимное притяженіе соприкасающихся между собой отдѣльныхъ частицъ одного и того же тѣла. Сцѣпленіе у твердыхъ тѣлъ проявляется въ сопротивленіи, которое они проявляютъ при разъединеніи или сдвиганіи ихъ частей (прочность); у жидкихъ тѣлъ—въ стремленіи принимать шарообразную форму (какъ, напр., у дождевыхъ капель).
7. Прилипаніемъ называется взаимное притяженіе соприкасающихся между собой отдѣльныхъ частицъ двухъ разныхъ тѣлъ. Прилипаніе можно, напр., наблюдать, если придавить другъ къ другу двѣ тщательно отполированныя металлическія пластинки и затѣмъ стараться ихъ разъединить, или если отвѣсно приподнять опущенную въ воду плоскую пластинку.

   На прилипаніи основаны явленія капиллярности, или волосности. Этимъ свойствомъ обладаютъ тонкія трубочки и каналы, которые, будучи погружены въ жидкость, притягиваютъ послѣднюю вдоль своихъ стѣнокъ и заставляютъ ее подниматься выше уровня жидкости въ сосудѣ.

   Но это явленіе происходитъ только въ тѣхъ жидкостяхъ, у которыхъ сцѣпленіе между отдѣльными частицами слабѣе, чѣмъ прилипаніе между жидкостью и стѣнками погруженной трубки (такъ назыв. смачивающія жидкости въ противоположность несмачивающимъ жидкостямъ): такъ, напр., вода въ стеклянной трубочкѣ будетъ стоять выше уровня воды въ сосудѣ, ртуть же — наоборотъ, ниже внѣшняго уровня ртути.
8. Упругостью называется свойство тѣла, измѣнившаго свою форму подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, принимать первоначальную форму, по прекращеніи дѣйствія этихъ силъ.

   Всѣ тѣла обладаютъ упругостью до извѣстнаго предѣла; совершенно упругихъ тѣлъ не существуетъ въ природѣ такъ же, какъ нѣтъ и абсолютно неупругихъ.

## § 3.

## Геометрическія движенія тѣлъ.

При движеніи тѣла происходитъ перемѣна мѣста и одновременно съ этимъ измѣненіе во времени; поэтому нужно установить соотношеніе (связь) между пройденнымъ пространствомъ и истекшимъ временемъ. При этомъ не будемъ пока принимать во вниманіе причинъ движенія, т. е. силъ.

Движеніе каждаго тѣла состоитъ изъ отличныхъ вообще другъ отъ друга движеній отдѣльныхъ его точекъ. Но такъ какъ во многихъ случаяхъ движенія тѣла дѣло идетъ о перемѣщеніи тѣла, взятаго въ его цѣлости, то для простоты во всѣхъ такихъ случаяхъ движущееся тѣло можно разсматривать какъ матеріальную точку, т. е. какъ геометрическую точку, въ которой сосредоточена масса всего тѣла.

## 1. Простыя движенія.

Различаютъ движенія прямолинейныя и криволинейныя, кромѣ того равномѣрныя и неравномѣрныя.

Равномѣрнымъ движеніемъ (будетъ ли оно прямолинейнымъ или криволинейнымъ) называютъ такое, при которомъ точка въ одинаковые промежутки времени проходитъ одинаковые пути, такъ что пройденные пути относятся между собой, какъ соотвѣтствующіе имъ промежутки времени.

Путь, пройденный тѣломъ въ единицу времени (1 секунду), называется скоростью. Если обозначить скорость черезъ c, время, въ теченіе котораго проходится путь s, — черезъ t, то:

путь, проходимый въ 1 секунду, будетъ $= c$
„ „ „ 2 секунды „ $= 2c$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
вообще „ „ „ t „ „ $= tc$

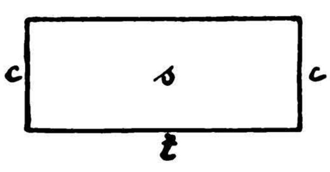
слѣдовательно:

$$s = ct \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

или словами:

**путь = скорости × время.**

Фиг. 1.

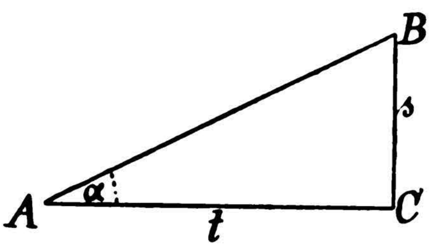



Такъ какъ путь s является произведеніемъ двухъ множителей c и t, то графически его можно выразить прямоугольникомъ, основаніе котораго $= t$, а высота $= c$ (фиг. 1).

Изъ уравненія 1) слѣдуетъ:

$$c = \frac{s}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

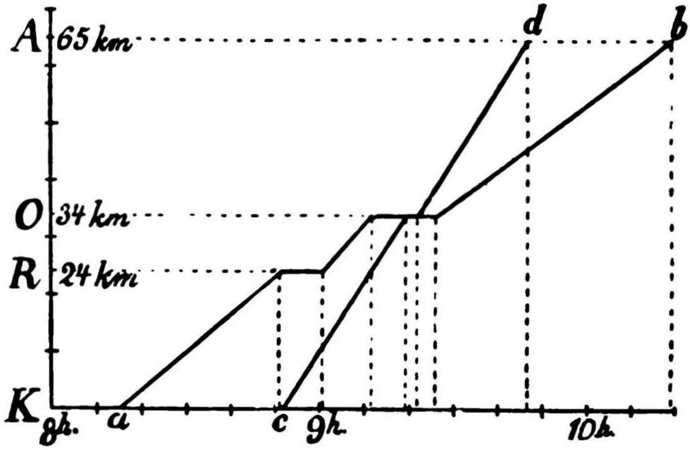
Фиг. 2.




Согласно съ этимъ, если избрать другое графическое изображеніе (фиг. 2), при которомъ время откладывать по горизонтальному направленію, а путь — по вертикальному, то скорость c выразится тангенсомъ угла $\alpha$, составляемаго прямой AB съ линіей времени AC.

По большему или меньшему углу наклоненія прямой AB заключаютъ о большей или меньшей скорости движенія. Круто наклоненная линія указываетъ на болѣе скорое движеніе, полого наклоненная — на болѣе медленное движеніе. Наклоненная внизъ линія указывала бы на движеніе съ отрицательной скоростью, т. е. на движеніе въ обратную сторону. Прямая, параллельная линіи времени (уголъ $\alpha$ = нулю), указываетъ на состояніе покоя.

Фиг. 3.




Такимъ образомъ составляется, напр., графическое расписаніе движенія поѣздовъ по линіи желѣзной дороги. Представленный на фиг. 3 ломанной линіей ab пассажирскій поѣздъ выходитъ въ 8 ч. 15 м. изъ Карлсруэ (K), приходитъ въ 8 ч. 51 м. въ Раштадтъ (R), здѣсь имѣетъ остановку до 9 ч. 01 м., въ 9 ч. 12 м. достигаетъ Ооса (O), гдѣ имѣетъ остановку 14 минутъ, послѣ чего въ 9 ч. 26 м. отправляется въ Аппенвейеръ (A), куда и приходитъ въ 10 ч. 19 м.

Скорый поѣздъ, представленный линіей cd и выходящій изъ Карлсруэ въ 8 ч. 52 м. (большая скорость его ясно видна изъ чертежа по большому углу наклоненія), проходитъ безъ остановки черезъ Раштадтъ и въ 9 ч. 19 м. достигаетъ Ооса, опережаетъ здѣсь пассажирскій поѣздъ и, отправляясь уже въ 9 ч. 22 м. дальше, приходитъ въ 9 ч. 47 м. въ Аппенвейеръ.

Если тѣло совершаетъ прямолинейное поступательное движеніе, то и движеніе всѣхъ его точекъ тоже будетъ прямолинейно. Если же тѣло вращается около неподвижной оси, съ которой оно неизмѣнно связано, то каждая точка тѣла, не лежащая на этой оси, будетъ описывать кругъ, центромъ котораго будетъ точка оси, и плоскость котораго — перпендикулярна къ этой оси. Если вращеніе тѣла, а, слѣдовательно, каждой его точки по своему кругу равномѣрно, и если обозначитъ черезъ n число оборотовъ въ минуту, то, по уравненію 2), скорость точки, находящейся на разстояніи r отъ оси вращенія, равна:

$$c = \frac{s}{t} = \frac{2r\pi n}{60} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

При перемѣнномъ движеніи въ равные промежутки времени точка проходитъ различные пути; поэтому скорость мѣняется въ каждое мгновеніе. Несмотря на это, и при такомъ движеніи можно говорить о скорости въ данный моментъ, при чемъ подъ скоростью въ данный моментъ слѣдуетъ понимать ту скорость, съ какой точка двигалась бы, если бы она, начиная съ данняго момента, стала двигаться равномѣрно.

При перемѣнномъ движеніи измѣненіе скорости можетъ совершаться равномѣрно или неравномѣрно, вслѣдствіе чего различаютъ **равномѣрно-перемѣнныя и неравномѣрно-перемѣнныя движенія**. Въ разсмотрѣніе послѣднихъ мы здѣсь вдаваться не будемъ *).

**Равномѣрно-перемѣннымъ** движеніемъ называется такое, при которомъ скорость въ равные промежутки времени измѣняется на равныя величины.

Приращеніе скорости въ единицу времени (1 секунду) называется **ускореніемъ**, уменьшеніе скорости въ единицу времени — **замедленіемъ**. Замедленіе можно разсматривать какъ отрицательное ускореніе.

Если обозначимъ ускореніе черезъ p, начальную скорость—черезъ c, а полученную по прошествіи t секундъ конечную скорость — черезъ v, то

скорость по истеченіи 1 секунды $= c + p$
„ „ 2 „ $= c + 2p$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
вообще „ „ t „ $= c + pt$

слѣдовательно:

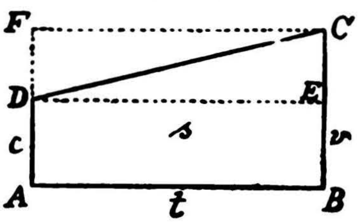
$$v = c + pt.$$

откуда для ускоренія p получимъ слѣдующее выраженіе:

$$p = \frac{v - c}{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

Равномѣрно-ускоренное движеніе, подобно предыдущему (фиг. 1), можно представить и графически, а именно—фиг. 4, гдѣ $AB = t$, $AD = c$, $BC = v$.

Фиг. 4.




При такомъ обозначеніи путь, пройденный тѣломъ за промежутокъ времени t, равнозначенъ площади трапеціи ABCD, т. е.

$$s = \left(\frac{v + c}{2}\right) t \quad \ldots \quad 5)$$

Къ тому же самому выводу 5) мы придемъ, предполагая, что путь, проходимый тѣломъ въ промежутокъ времени t при равномѣрно-ускоренномъ движеніи, долженъ равняться пути, проходимому тѣломъ, если оно движется равномѣрно съ нѣкоторой средней скоростью $\left(\frac{v + c}{2}\right)$.

Если подставить полученное изъ уравненія 4) значеніе:

$$t = \frac{v - c}{p}$$

*) Неравномѣрно-перемѣннымъ движеніемъ, напр., можно считать движеніе поршня или поршневаго кулака (крейцкопфа) (см. фиг. 16).

въ уравненіе 5), то получимъ:

$$s = \left(\frac{v + c}{2}\right) \cdot \left(\frac{v - c}{p}\right) = \frac{v^2 - c^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 6)$$

Можно получить еще и другія значенія пройденнаго пути s, если рѣшить уравненіе 4) относительно v или c и подставить найденныя значенія въ уравненіе 5).

Изъ уравненія 4) имѣемъ:

$$v = c + pt.$$

Подставивъ это выраженіе въ уравненіе 5), получимъ:

$$s = \left(\frac{c + pt + c}{2}\right)t = ct - \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 7)$$

Кромѣ того, изъ уравненія 4):

$$c = v - pt.$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе 5), имѣемъ:

$$s = \left(\frac{v + v - pt}{2}\right)t = vt - \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 8)$$

Оба послѣднія выраженія для s (уравненія 7 и 8) также вытекаютъ изъ геометрическаго разсмотрѣнія фиг. 4, при чемъ трапецію ABCD одинъ разъ можно разсматривать какъ сумму прямоугольника ABED и треугольника CDE, другой разъ—какъ разность между прямоугольникомъ ABCF и треугольникомъ CDF. Дѣйствительно:

$$CE = DF = v - c = pt,$$

слѣдовательно:

$$\triangle CDE = \triangle CDF = pt\,\frac{t}{2} = \frac{pt^2}{2}$$

Если же положить въ уравненіяхъ 4—7 c = 0, то получимъ слѣдующія формулы для равномѣрно-ускореннаго движенія тѣла съ начальной скоростью, равной нулю:

$$p = \frac{v}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 9)$$

$$s = \frac{v}{2}t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 10)$$

$$s = \frac{v^2}{2p} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 11)$$

$$s = \frac{pt^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 12)$$

Графическимъ изображеніемъ движенія въ этомъ случаѣ служитъ треугольникъ ($\triangle CDE$ на фиг. 4).

Задача 1. Какой путь пройдетъ паровозъ въ 24 минуты, если онъ будетъ двигаться равномѣрно со скоростью 12 метровъ въ секунду?

Рѣшеніе. Такъ какъ:

$$c = 12 \text{ метр.}$$

и

$$t = 24 \text{ мин.} = 24 \ . \ 60 = 1440 \text{ сек.}$$

то по ур. 1):

$$s = 12 . 1440 = 17\,280 \text{ метр.}$$

**Задача** 2. Найти среднюю скорость паровоза, проходящаго въ часъ 60 километр.

**Рѣшеніе.** Такъ какъ:

$$t = 60 \ . \ 60 = 3600 \text{ сек.}$$

и

$$s = 60 \text{ километр.} = 60\,000 \text{ метр.},$$

то по ур. 2):

$$c = \frac{60\,000}{3600} = 16^2/_3 \text{ метр.}$$

**Задача** 3. Если принять скорость свѣта въ 40000 миль, разстояніе земли отъ солнца—въ 21 милл. миль, то сколько времени понадобится свѣтовому лучу, чтобы достигнуть отъ солнца до земли?

**Рѣшеніе.** По ур. 1) имѣемъ:

$$t = \frac{s}{c} = \frac{21\,000\,000}{40\,000} = 525 \text{ сек.} = 8 \text{ мин.} \, 45 \text{ сек.}$$

**Задача** 4. Луна совершаетъ свое движеніе вокругъ земли въ 28 дней. Какова должна быть скорость этого движенія, если разстояніе луны отъ земли принять равнымъ 50000 миль?

**Рѣшеніе.**

$$1 \text{ день} = 24 . 60 . 60 = 86\,400 \text{ сек.}$$
$$t = 28 \text{ дней} = 28 . 86\,400 = 2\,419\,200 \text{ сек.}$$

Такъ какъ длина орбиты луны:

$$s = 2r\pi = 2 . 50\,000 \ . \ 3{,}14 = 314\,000 \text{ миль},$$

то по ур. 2):

$$c = \frac{314\,000}{2\,419\,200} = \backsim 0{,}13 \text{ миль.}$$

**Задача** 5. Паровая машина дѣлаетъ $n = 50$ оборотовъ въ минуту; радіусъ кривошипа $r = 0{,}4$ метр. Найти среднюю скорость кривошипа.

**Рѣшеніе.** По ур. 3):

$$c = \frac{2 . 0{,}4 \ . \ 3{,}14 \ . \ 50}{60} = \backsim 2{,}1 \text{ метр.}$$

**Задача** 6. Тѣло, движущееся съ ускореніемъ $p = 1$ метр., имѣетъ начальную скорость $c = 2$ метр. и конечную $v = 10$ метр. Сколько времени продолжалось движеніе, и какова длина пройденнаго пути?

**Рѣшеніе.** По ур. 4):

$$t = \frac{v - c}{p} = \frac{10 - 2}{1} = 8 \text{ сек.}$$

кромѣ того, по ур. 5):

$$s = \frac{10 + 2}{2} \cdot 8 = 48 \text{ метр.}$$

или длину пути $s$ можно вычислить по ур. 7):

$$s = 2 . 8 + \frac{1 . 8^2}{2} = 48 \text{ метр.}$$

Задача 7. Поѣздъ желѣзной дороги въ данный моментъ имѣетъ скорость 15 метр. Затѣмъ начинаютъ его тормазить такъ, что скорость его въ каждую секунду уменьшается на 0,5 метра. Какова будетъ скорость его по истеченіи 24 секундъ, и каковъ будетъ пройденный имъ за это время путь?

Рѣшеніе. Дано:

$$t = 24$$
$$c = 15$$
$$p = -0{,}5$$

слѣдовательно, по ур. 4):

$$v = c + pt = 15 - 0{,}5 \,.\, 24 = 3 \text{ метра.}$$

и по ур. 5):

$$s = \frac{3 + 15}{2} \cdot 24 = 216 \text{ метр.}$$

Задача 8. Тѣло движется со скоростью $c = 6$ метр. отъ точки A прямолинейно и съ ускореніемъ $p = 0{,}2$ метр. къ точкѣ B, куда оно прибываетъ со скоростью $v = 20$ метр. Найти разстояніе между точками A и B?

Рѣшеніе. По ур. 6):

$$s = \frac{20^2 - 6^2}{2 \,.\, 0{,}2} = 910 \text{ метр.}$$

Задача 9. Паровозъ имѣетъ въ данный моментъ скорость 5 метр. и продолжаетъ движеніе въ продолженіе 16 сек. съ ускореніемъ 0,6 метр. Какой путь онъ пройдетъ за это время?

Рѣшеніе. По ур. 7):

$$s = 5 \,.\, 16 + \frac{0{,}6 \,.\, 16^2}{2} = 156{,}8 \text{ метр.}$$

Задача 10. Какое ускореніе получаетъ снарядъ въ каналѣ орудія, длиною 11.2 метр., если онъ у дула имѣетъ скорость $= \backsim 800$ метр., и во сколько времени онъ проходитъ этотъ путь (т. е. каналъ)?

Рѣшеніе. Такъ какъ здѣсь начальная скорость = нулю, то изъ ур. 11) получимъ:

$$p = \frac{v^2}{2s} = \frac{800^2}{2 \,.\, 11{,}2} = \backsim 28\,500 \text{ метр.}$$

Это громадное ускореніе, однако, пріобрѣтается въ теченіе 1 секунды. Въ дѣйствительности же, подъ дѣйствіемъ пороховыхъ газовъ, снарядъ проходитъ каналъ орудія, по ур. 9), лишь въ:

$$t = \frac{v}{p} = \frac{800}{28\,500} = \backsim \frac{1}{36} \text{ сек.}$$

Развиваемая имъ скорость, поэтому, равна $\frac{28\,500}{36} = \backsim 800$ метр.

Задача 11. Камень, брошеный въ шахту, глубиною въ 60 метр., достигаетъ дна ея черезъ 3,5 сек. Какъ велико ускореніе?

Рѣшеніе. По ур. 12) имѣемъ:

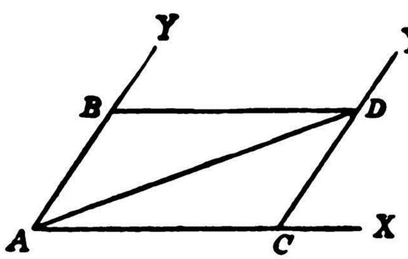
$$p = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \,.\, 60}{3{,}5^2} = \backsim 9{,}8 \text{ метр. (ускореніе силы тяжести).}$$

## 2. Сложныя движенія.

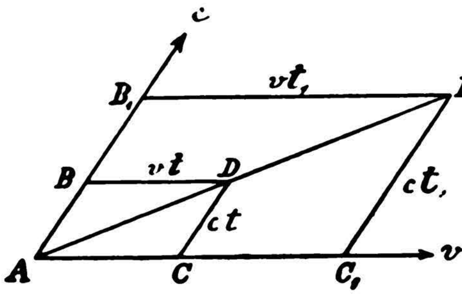
Если матеріальная точка движется по какому-нибудь опредѣленному направленію, въ то время какъ тѣло, на которомъ она находится или съ которымъ оно связано, движется по другому направленію, то дѣйствительное движеніе матеріальной точки сложится изъ этихъ двухъ отдѣльныхъ движеній.

Пусть A (фиг. 5)—начальная точка движенія, AY — направленіе движенія матеріальной точки, AX — направленіе движенія тѣла.

Фиг. 5.




Фиг. 6.




Положимъ, что въ опредѣленный промежутокъ времени t тѣло передвинулось изъ точки A въ точку C; тогда направленіе линіи AY изъ прежняго положенія перейдетъ въ новое CY, параллельное AY. Но одновременно съ этимъ матеріальная точка пройдетъ разстояніе AB, которое поэтому и должно быть отложено на новомъ направленіи CY ($CD = AB$). Тогда конечная точка D и будетъ тѣмъ мѣстомъ, котораго дѣйствительно достигаетъ матеріальная точка по истеченіи t секундъ. Точка D и начальная точка A — двѣ противолежащія вершины параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ AB и AC.

Въ качествѣ примѣра можно привести движеніе человѣка на плавающемъ суднѣ.

Если оба отдѣльныя (составляющія) движенія AB и AC прямолинейны и равномѣрны, то и дѣйствительное движеніе AD (составное или сложное движеніе) тоже будетъ прямолинейнымъ и равномѣрнымъ.

Для доказательства возьмемъ точки D и $D_1$, въ которыя приходитъ матеріальная точка по истеченіи t и $t_1$ секундъ (фиг. 7). Если c и v скорости обоихъ составляющихъ равномѣрныхъ движеній, то точка D будетъ лежать въ противоположной (точкѣ A) вершинѣ параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ $AB = ct$ и $AC = vt$. Точно такъ же точка $D_1$ будетъ противолежащей (тоже точкѣ A) вершиной параллелограмма, построеннаго на отрѣзкахъ $AB_1 = ct_1$ и $AC_1 = vt_1$.

Изъ фиг. 6 слѣдуетъ:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}, \quad \frac{AC_1}{C_1D_1} = \frac{vt_1}{ct_1} = \frac{v}{c};$$

Слѣдовательно:

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AC_1}{C_1D_1} = \frac{v}{c}$$

т. е. точки A, D и $D_1$ лежатъ на одной прямой.

Изъ фиг. 6, кромѣ того, слѣдуетъ:

$$\frac{AD}{AD_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{ct}{ct_1} = \frac{t}{t_1}$$

или словами: при составномъ движеніи пройденные пути относятся между собою, какъ соотвѣтствующіе имъ промежутки времени. Поэтому такъ же и составное движеніе должно быть и прямолинейно и равномѣрно; скорость его w выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на составляющихъ скоростяхъ c и v.

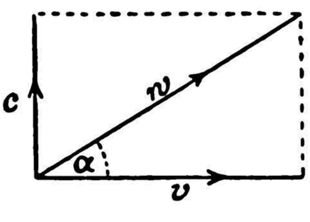
Если направленія составляющихъ движеній лежатъ на одной прямой, то равнодѣйствующая скорость равна суммѣ составляющихъ скоростей, если движенія направлены въ одну сторону; если же движенія имѣютъ прямо противоположное направленіе, то равнодѣйствующая скорость равна разности составляющихъ скоростей. Если составляющія скорости c и v направлены подъ прямымъ угломъ одна къ другой (фиг. 7), то равнодѣйствующая скорость равна:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2}$$

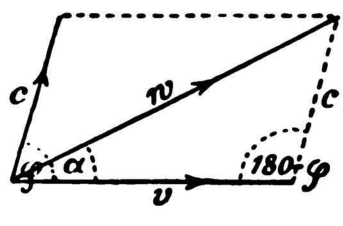
Направленіе равнодѣйствующей скорости w зависитъ отъ выраженія:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{v}$$

Фиг. 7.




Фиг. 8.




Если же составляющія скорости образуютъ между собой какой-нибудь уголъ φ (фиг. 8), то:

$$w^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\;\cos(180 - \varphi),$$

Слѣдовательно:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2 + 2\,c\,v\cos\varphi}$$

Направленіе равнодѣйствующей скорости w, поэтому, въ данномъ случаѣ зависитъ отъ выраженія:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\ (180-\varphi)} = \frac{c}{w}$$

или:

$$\sin\alpha = \frac{c\sin\varphi}{w}$$

Точно такъ же всякую данную скорость можно разсматривать какъ равнодѣйствующую и построеніемъ параллелограмма разложить ее на двѣ составляющія скорости заданнаго направленія.

Точно такимъ же образомъ, какъ равномѣрныя движенія, можно складывать или разлагать и равномѣрно-ускоренныя (или замедленныя) движенія.

Составное (сложное) движеніе, полученное отъ сложенія двухъ равномѣрно-ускоренныхъ отдѣльныхъ движеній, тоже будетъ равномѣрно-ускореннымъ; и ускореніе его выразится діагональю параллелограмма, построеннаго на обоихъ составляющихъ ускореніяхъ.

Складывая равномѣрное движеніе съ равномѣрно-ускореннымъ, если они оба составляютъ между собой нѣкоторый уголъ, получимъ криволинейное (параболическое) движеніе (см. § 21. Движеніе тяжелаго тѣла, брошеннаго въ какомъ-нибудь направленіи).

Задача 12. Судно движется по теченію со скоростью 3 метр. Какова дѣйствительная скорость w человѣка, идущаго со скоростью 1,2 метр. по палубѣ по направленію движенія судна? Какова дѣйствительная скорость его $w_1$, при движеніи въ обратномъ направленіи (противъ теченія)?

Рѣшеніе:

$$w = 3 + 1{,}2 = 4{,}2 \text{ метр.}$$
$$w_1 = 3 - 1{,}2 = 1{,}8 \text{ метр.}$$

Задача 13. Скорость лодки перпендикулярно къ теченію $v = 3$ метр., скорость самого теченія $c = 4$ метр. Какова дѣйствительная скорость w лодки?

Рѣшеніе:

$$w = \sqrt{c^2 + v^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ метр.}$$

Задача 14. Тѣло по одному направленію имѣетъ скорость 6 метр. а по другому, составляющему съ первымъ уголъ въ $60^0$,—3 метра. Найти равнодѣйствующую скорость вычисленіемъ и построеніемъ.

Рѣшеніе. Если данныя составляющія скорости отложить въ извѣстномъ масштабѣ (фиг. 8), то можно будетъ вполнѣ точно измѣрить искомую равнодѣйствующую скорость w.

Вычисленіемъ же получаемъ:

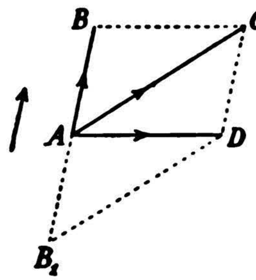
$$w = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2 . 6 . 3 . \cos 60^0} = 7{,}94 \text{ метр.}$$

### 3. Относительное (кажущееся) движенie.

Если пространство, въ которомъ движется тѣло (матерiальная точка), само производитъ поступательное движенie, то, согласно п. 2 этого же параграфа, дѣйствительное или истинное движенie тѣла слагается изъ этихъ двухъ отдѣльныхъ движенiй.

Поэтому, если построимъ (фиг. 9) параллелограмъ на поступательномъ движенiи AB пространства и (относительномъ) движенiи AD тѣла, находящагося въ этомъ пространствѣ, то дiагональ AC представитъ собою дѣйствительное движенiе тѣла.

Фиг. 9.




Движенiе AD тѣла, по отношенiю къ движущемуся въ свою очередь пространству, называется относительнымъ или кажущимся движенiемъ, такъ какъ наблюдателю, находящемуся въ томъ же пространствѣ, будетъ казаться, что совершается только одно движенiе AD. Въ противоположность этому движенiю дѣйствительное движенiе тѣла AC называютъ абсолютнымъ или истиннымъ.

Но часто приходится по абсолютному движенiю тѣла и поступательному движенiю пространства найти относительное движенiе тѣла. Въ такомъ случаѣ (фиг. 9) нужно построить параллелограммъ по дiагонали AC (абсолютное движенiе) и сторонѣ AB (движенiе пространства). Тогда другая сторона AD параллелограмма представитъ собою искомое относительное движенiе тѣла.

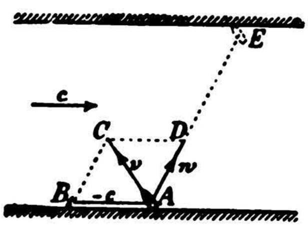
Но можно также линiю AD разсматривать какъ дiагональ параллелограмма $AB_1DC$, сторона котораго AC выражаетъ абсолютное движенiе, а другая сторона $AB_1$—прямопротивоположное поступательному движенiю пространства.

Поэтому, при равномѣрныхъ движенiяхъ съ постоянными скоростями получимъ слѣдующее правило для опредѣленiя относительной скорости тѣла.

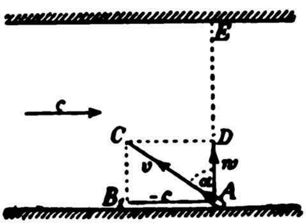
Надо построить параллелограммъ на абсолютной скорости тѣла и на отрицательной (прямопротивоположной) скорости поступательнаго движенiя пространства. Дiагональ этого параллелограмма и представитъ собою искомую относительную скорость тѣла.

Такъ, напр., если лодка переправляется черезъ рѣку, въ которой вода течетъ со скоростью c (фиг. 10), то для того, чтобы изъ точки A попасть въ точку E, лодка должна идти по направленiю AC, которое опредѣлится изъ построенія параллелограмма по дѣйствительной скорости лодки $w = AD$ и скорости теченія воды $c = AB_1 - AB_1CD$.

Фиг. 10.




Фиг. 11.




Если точка E (фиг. 11) лежитъ прямо противъ точки A (т. е. $\sphericalangle B_1AE = 90^0$), то:

$$v = \sqrt{w^2 + c^2}$$

Задача 15. Лодка должна переправиться на другой берегъ перпендикулярно къ теченію рѣки, ширина которой $s = 600$ метр.; скорость теченія $c = 0{,}8$ метр. Переправа должна произойти въ $t=5$ мин. Какова должна быть относительная скорость v и по какому направленію должна идти лодка? (фиг. 11).

Рѣшеніе. Дѣйствительная скорость лодки при переправѣ равна:

$$w = \frac{s}{t} = \frac{600}{5\,.\,60} = 2 \text{ метр.}$$

слѣдовательно:

$$v = \sqrt{w^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}8^2} = 2{,}15 \text{ метр.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{c}{w} = \frac{0{,}8}{2} = 0{,}4$$

$$\alpha = 21^0 50' = \backsim 22^0$$

Если движенія — равномѣрно-ускоренныя, то, для опредѣленія относительнаго движенія, нужно воспользоваться вышеприведеннымъ построеніемъ параллелограмма, только вмѣсто скоростей слѣдуетъ подставить вездѣ ускоренія.

Лучшимъ примѣромъ относительнаго движенія служитъ движеніе воды въ турбинномъ колесѣ. Поступательно движущимся пространствомъ здѣсь служитъ лопастное колесо турбины, имѣющее равномѣрно-вращательное движеніе. Движеніе каждой частицы воды въ колесѣ по отношенію къ лопасти будетъ кажущимся (относительнымъ); истинное же (абсолютное) движеніе водяной частицы въ каждый моментъ слагается изъ двухъ отдѣльныхъ движеній.

## § 4.

## Физическіе законы.

### 1. Законъ инерціи (Галилей 1638 г.).

Всякое тѣло остается въ состояніи покоя или прямолинейнаго равномѣрнаго движенія до тѣхъ поръ, пока не будетъ выведено изъ этого состоянія дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ.

Кратковременное дѣйствіе силы достаточной величины (такъ назыв. мгновенной силы) сообщаетъ тѣлу, находящемуся въ покоѣ, равномѣрное прямолинейное движеніе, которое, согласно закону инерціи, продолжалось бы неизмѣнно, если бы не существовало противодѣйствующихъ силъ (сопротивленій), останавливающихъ, въ концѣ концовъ, движеніе тѣла.

Такъ, напр., если санямъ на льду сообщить толчокъ, то онѣ двигались бы впередъ безконечно, прямолинейно и равномѣрно, если бы треніе и сопротивленіе воздуха, въ концѣ концовъ, не останавливали этого движенія. Но чтобы сразу остановить движеніе саней или отклонить ихъ отъ прямолинейнаго направленія, необходимо всегда употребить какую-нибудь внѣшнюю силу.

Подъ дѣйствіемъ силы, сохраняющей все время свою величину и направленіе (такъ назыв. постоянной силы), тѣло пріобрѣтаетъ прямолинейное равномѣрно-ускоренное движеніе, при чемъ ускореніе тѣмъ больше, чѣмъ больше дѣйствующая сила. Если двѣ силы одна за другой дѣйствуютъ на тѣло одинаковой массы и сообщаютъ ему одно и то же ускореніе, то принимаютъ, что силы равны между собой. Напротивъ, если тѣлу одной и той же массы одна сила сообщаетъ ускореніе въ n разъ больше, чѣмъ другая, то въ этомъ случаѣ считаютъ, что одна сила въ n разъ больше другой.

1. Слѣдовательно, силы относятся между собою, какъ ускоренія, которыя онѣ сообщаютъ тѣлу одной и той же массы.

Двѣ массы считаютъ равными между собой, если онѣ подъ дѣйствіемъ одной и той же силы получаютъ одинаковыя ускоренія. Массу тѣла считаютъ тѣмъ большей, чѣмъ меньше ускореніе, сообщаемое ей опредѣленной силой. Одну массу считаютъ въ n разъ больше другой, если ускореніе, сообщаемое одной и той же силой первой массѣ, въ n разъ меньше, чѣмъ сообщаемое второй массѣ, или если первая масса подъ дѣйствіемъ въ n разъ большей силы получаетъ то же самое ускореніе, какъ и вторая.

2. Слѣдовательно, массы относятся между собою обратно пропорціонально ускореніямъ, сообщаемымъ имъ одинаковыми силами, или:

3. Массы относятся между собою, какъ силы, сообщающія имъ одинаковыя ускоренія.

Чтобы имѣть возможность выражать величины силъ числами, необходимо установить единицу силъ. За наиболѣе употребительную единицу силы принимаютъ вѣсъ тѣла, равный 1 килограмму. За единицу массы принимаютъ массу тѣла, которому единица силы сообщаетъ ускореніе, равное одному метру. Въ m разъ большая масса подъ дѣйствіемъ единицы силы получитъ въ m разъ меньшее ускореніе, т. е. ускореніе, равное $\frac{1}{m}$. А такъ какъ силы относятся между собою, какъ ускоренія, сообщаемыя ими одной и той же массѣ, то сила P сообщитъ массѣ m въ P разъ большее ускореніе, чѣмъ единица силы, т. е. ускореніе, равное $\frac{P}{m}$. Отсюда получаемъ слѣдующее сопоставленіе:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Сила | $= 1$ | сообщитъ | массѣ | $= 1$ | ускореніе | $=$ | $1$ |
| „ | $= 1$ | „ | „ | $= m$ | „ | $=$ | $\frac{1}{m}$ |
| „ | $= P$ | „ | „ | $= m$ | „ | $=$ | $\frac{P}{m}$ |

Если обозначимъ это ускореніе черезъ p, то получимъ:

$$p = \frac{P}{m} \quad \ldots\ldots \quad 13)$$

или словами:

$$\text{ускореніе} = \frac{\text{силѣ}}{\text{массу}}$$

Если сила равна нулю, то и ускореніе равно нулю, т. е. состояніе движенія тѣла остается безъ перемѣны, если никакая сила на него не дѣйствуетъ.

## 2. Законъ тяжести (Ньютонъ 1680 г.).

Вѣса тѣлъ суть силы, которыя сообщаютъ всѣмъ тѣламъ одинаковое ускореніе, а именно:

$$g = 9{,}81 \text{ метр.} \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

Эта величина называется ускореніемъ силы тяжести или ускореніемъ свободно падающаго тѣла.

Строго говоря, ускореніе силы тяжести не постоянно, а зависитъ отъ географической широты мѣста φ и высоты его h надъ уровнемъ моря:

$$g = (9{,}7806 + 0{,}0503 \sin^2\varphi) \, . \, (1 - 0{,}0000032\, h).$$

Такъ, напр., на экваторѣ ($\varphi = 0$) и на высотѣ уровня моря ($h = 0$):

$$g = \backsim 9{,}781 \text{ метр.},$$

на полюсѣ ($\varphi = 90^0$) при $h = 0$:

$$g = \backsim 9{,}831 \text{ метр.}$$

Для Карлсруэ $\varphi = 49^0\ 1'$ и $h = 117$ метр., слѣдовательно:

$$g = 9{,}8089 = \backsim 9{,}81 \text{ метр.}$$

Если обозначить вѣсъ массы $m$ черезъ $G$, то изъ уравненія 13) слѣдуетъ:

$$g = \frac{G}{m}$$

$$m = \frac{G}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

или словами:

$$\text{масса} = \frac{\text{вѣсу}}{\text{ускореніе силы тяжести.}}$$

Уравненіе 15) показываетъ, что для того, чтобы получить числовую величину массы, нужно числовую величину вѣса $G$ раздѣлить на $g = 9{,}81$. Слѣдовательно, если принять (какъ сказано выше) за единицу вѣса (единицу силы) 1 килограммъ, то единицей массы будетъ масса тѣла, вѣсъ котораго равенъ 9,81 килогр.

Для массы $m_1$, вѣсъ которой $G_1$, на основаніи уравненія 15) получимъ:

$$m_1 = \frac{G_1}{g}$$

Раздѣливъ оба послѣднія равенства, имѣемъ:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{G_1}{G},$$

или словами: массы тѣлъ относятся между собой, какъ ихъ вѣса.

Поэтому, чтобы сравнить между собою массы двухъ тѣлъ, достаточно опредѣлить посредствомъ взвѣшиванія вѣса ихъ.

Задача 16. Сила $P = 30$ килогр. сообщаетъ тѣлу ускореніе $p = 1{,}8$ метр. Какъ велико ускореніе $p_1$, сообщаемое тому же самому тѣлу силою $P_1 = 20$ килогр.?

Рѣшеніе. На основаніи положенія 1, стр. 15:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{p_1}{p},$$

слѣдовательно:

$$p_1 = \frac{P_1}{P}\, p = \frac{20}{30}\, 1{,}8 = 1{,}2 \text{ метр.}$$

Задача 17. Тѣло, масса котораго $m$, получаетъ подъ дѣйствіемъ нѣкоторой силы ускореніе $p = 2$ метр., та же сила другому тѣлу, масса котораго $m_1$, сообщаетъ ускоренiе $p_1 = 5$ метр. Какъ относятся между собою массы $m$ и $m_1$?

Рѣшенiе. На основанiи положенiя 2, стр. 16:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{p}{p_1} = \frac{2}{5}, \text{ или: } m_1 = \frac{2}{5} m.$$

Задача 18. Найти величину массы $m_1$ тѣла, при условiи, что ему силою $P_1 = 75$ килогр. сообщается то же самое ускоренiе $p$, какое получаетъ другое тѣло, масса котораго $m = 15$, подъ дѣйствiемъ силы $P = 50$ килогр.

Рѣшенiе. На основанiи положенiя 3, стр. 16:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{P_1}{P}.$$

или:

$$m_1 = \frac{P_1}{P} m = \frac{75}{50} 15 = 22{,}5.$$

Задача 19. Какой величины нужно приложить силу $P$ (пренебрегая тренiемъ и сопротивленiемъ), чтобы сообщить массѣ $m = 20$ ускоренiе $p = 3{,}5$ метр?

Рѣшенiе. По уравненiю 13), стр. 16:

$$P = pm = 3{,}5 . 20 = 70 \text{ килогр.}$$

Задача 20. Опредѣлить величину массы $m$ тѣла, вѣсъ котораго равенъ 35,3 килогр.

Рѣшенiе. На основанiи уравненiя 15), стр. 17:

$$m = \frac{G}{g} = \frac{35{,}3}{9{,}81} = \backsim 3{,}6.$$

Задача 21. Масса $m$ тѣла выражается числомъ 12. Опредѣлить вѣсъ этого тѣла.

Рѣшенiе.

$$G = mg = 12 . 9{,}81 — 117{,}72 \text{ килогр.}$$

## 3. Законъ противодѣйствiя (законъ реакцiи).

Опытъ учитъ, что силы въ природѣ не проявляются совершенно отдѣльно, но каждая сила вызываетъ противодѣйствующую ей силу. Дѣйствующая и противодѣйствующая силы всегда направлены по одной прямой линiи, равны по величинѣ, но прямо противоположны по направленiю.

Ясно всего этотъ законъ можно изучить на отдѣльныхъ примѣрахъ.

Давленiе тѣла A на тѣло B всегда вызываетъ равное, но прямо-противоположное давленiе тѣла B на тѣло A.

Если человѣкъ будетъ тянуть грузъ, то и грузъ, въ свою очередь, съ равной силой будетъ тянуть человѣка.

Горизонтальная балка (фиг. 82), лежащая на двухъ опорахъ и подверженная дѣйствію вертикальныхъ силъ, производитъ на каждую точку опоры давленіе, направленное вертикально внизъ, или, такъ называемое, опорное давленіе; съ другой стороны, балка со стороны опорныхъ точекъ тоже испытываетъ давленія, равныя, но прямопротивоположныя, т. е. направленныя вертикально вверхъ (опорныя сопротивленія).

Такъ же и въ другихъ случаяхъ непосредственнымъ наблюденіемъ можно удостовѣриться въ существованіи закона противодѣйствія: такъ, напр., сила, съ которой земля притягивается солнцемъ, равна по величинѣ и прямопротивоположна по направленію силѣ, съ которой солнце, въ свою очередь, притягивается землей.

Итакъ, вездѣ въ природѣ давленіе и сопротивленіе давленію, притяженіе и сопротивленіе притяженію равны по величинѣ, но прямопротивоположны по направленію.

## 4. Законъ параллелограмма.

Если одновременно дѣйствуютъ на тѣло нѣсколько силъ, то движеніе его явится результатомъ всѣхъ тѣхъ движеній, которыя получило бы тѣло, подъ дѣйствіемъ каждой изъ силъ въ отдѣльности.

На этомъ общемъ законѣ основана теорема параллелограмма силъ, которая читается такъ:

Если двѣ силы дѣйствуютъ на тѣло, то ихъ равнодѣйствующая по величинѣ и направленію выразится діагональю параллелограмма, построеннаго на обѣихъ силахъ.

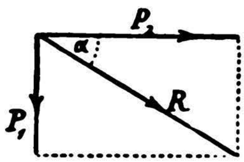
Обратно, можно каждую силу разсматривать какъ равнодѣйствующую и, при помощи построенія параллелограмма, разложить ее на двѣ составляющія по даннымъ направленіямъ.

Сложеніе данныхъ силъ въ одну равнодѣйствующую, или разложеніе одной данной силы на двѣ составляющія по даннымъ направленіямъ производится по тѣмъ же правиламъ, какъ и сложеніе и разложеніе скоростей (§ 3, стр. 10). При этомъ каждая сила выражается прямою линіей, имѣющей столько единицъ длины, сколько единицъ силы заключается въ разсматриваемой силѣ.

Если составляющія силы дѣйствуютъ по одной прямой и по одному и тому же направленію, то равнодѣйствующая равна суммѣ ихъ.

Если двѣ составляющія силы дѣйствуютъ по одной прямой, но въ противоположныя стороны, то равнодѣйствующая равна разности ихъ и направлена въ сторону большей изъ нихъ. Если при этомъ обѣ составляющія равны между собою, то равнодѣйствующая ихъ равна нулю, сами же онѣ находятся въ равновѣсіи.

Фиг. 12.




Если по одной и той же прямой, но въ разныя стороны дѣйствуютъ больше двухъ силъ, то этотъ случай можно привести къ предыдущему, сложивъ всѣ силы, дѣйствующія по одному направленію въ одну равнодѣйствующую, а дѣйствующія по противоположному — въ другую.

Если направленія двухъ силъ $P_1$ и $P_2$ составляютъ между собою прямой уголъ, то величина равнодѣйствующей R (фиг. 12) въ этомъ случаѣ равна:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \,.$$

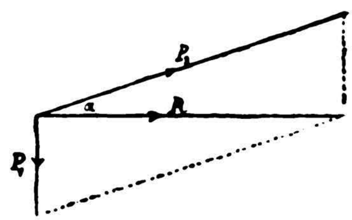
Направленіе силы R опредѣляется изъ формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_1}{P_2} \,.$$

Если же требуется данную силу R разложить на двѣ составляющія $P_1$ и $P_2$ такъ, чтобы направленія послѣднихъ составляли прямой уголъ, и если уголъ между $P_2$ и $R = \alpha$ (фиг. 12), то:

$$P_1 = R \sin \alpha$$
$$P_2 = R \cos \alpha \,.$$

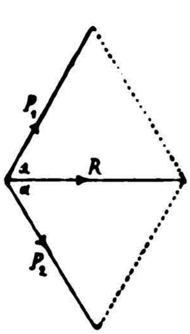
Фиг. 13.




Если же, при разложеніи силъ, направленіе одной изъ составляющихъ $P_1$ перпендикулярно къ R, а направленіе другой $P_2$ составляетъ съ R уголъ α (фиг. 13), то:

$$P_1 = R \operatorname{tg} \alpha$$
$$P_2 = \frac{R}{\cos \alpha} .$$

Фиг. 14.




Если же обѣ составляющія силы образуютъ съ равнодѣйствующей R равные углы α (этотъ случай, напр., встрѣчается въ колѣнчато-рычажномъ прессѣ), то онѣ равны между собою. Въ такомъ случаѣ имѣемъ (фиг. 14):

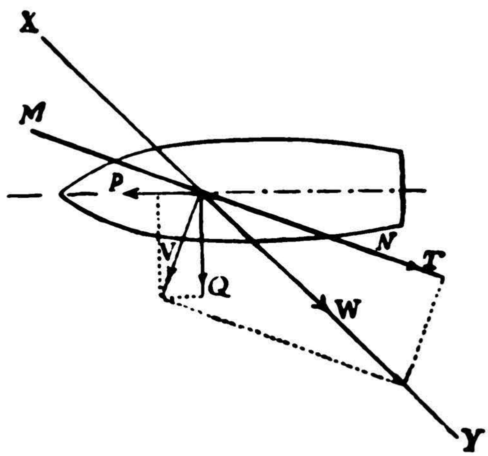
$$P_1 = P_2 = \frac{R}{2 \cos \alpha} .$$

Если требуется найти равнодѣйствующую нѣсколькихъ силъ $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . . . , дѣйствующихъ въ одной плоскости на одну и ту же точку, то сначала нужно, помощью параллелограмма силъ, сложить двѣ изъ нихъ, напр., $P_1$ и $P_2$, въ равнодѣйствующую $R_1$, затѣмъ $R_1$ и $P_3$ — въ равнодѣйствующую $R_2$, далѣе $R_2$ и $P_4$ — въ равнодѣйствующую $R_3$ и т. д.

Задача о разложеніи силы R болѣе чѣмъ на двѣ составляющія данныхъ направленій неопредѣленная, такъ какъ можно получить сколько угодно рѣшеній.

Примѣромъ разложенія силъ можетъ служить лавирующее судно (фиг. 15). Если XY — направленіе вѣтра и MN — направленіе паруса,

Фиг. 15.




то сила вѣтра W разложится сначала на составляющія: T — по направленію паруса и V—перпендикулярно къ нему, при чемъ эта послѣдняя сила V можетъ произвести дѣйствіе на парусъ.

Если, далѣе, эту силу V опять разложить на составляющія: P — по направленію судна и Q — перпендикулярно къ нему, то сила P и будетъ именно та сила, благодаря которой судно движется впередъ, въ то время какъ сила Q вызываетъ боковое движеніе его (незначительное вслѣдствіе большого сопротивленія воды), такъ называемый дрейфъ.

**Задача 22.** По одной прямой линіи и по одному и тому же направленію дѣйствуютъ силы $P_1 = 20$ килогр., $P_2 = 35$ килогр., $P_3 = 42$ килогр. Найти величину равнодѣйствующей R.

Рѣшеніе.

$$R = 20 + 35 + 42 = 97 \text{ килогр.}$$

**Задача 23.** По той же самой прямой дѣйствуютъ въ правую сторону силы въ 48, 30, 16 килогр., а въ противоположную — силы въ 15, 13, 8 килогр. Опредѣлить величину равнодѣйствующей R.

Рѣшеніе.

$$R = 48 + 30 + 16 - (15 + 13 + 8) = 58 \text{ килогр.}$$

Сила R будетъ направлена направо, такъ какъ сумма силъ, дѣйствующихъ въ этомъ направленіи, больше.

Задача 24. Двѣ взаимно перпендикулярныя силы $P_1 = 30$ килогр. и $P_2 = 60$ килогр. (фиг. 12) дѣйствуютъ на тѣло, вѣсъ котораго $G = 20$ килогр. Найти: величину равнодѣйствующей R, уголъ $\alpha$, составляемый послѣдней съ силою $P_1$, и величину ускоренія p, получаемаго тѣломъ подъ дѣйствіемъ силы R.

Рѣшеніе. Если начертить силы $P_1$ и $P_2$ въ видѣ прямыхъ линій въ соотвѣтствующемъ масштабѣ (напр., 1 килогр. = 1 миллим.), то измѣреніемъ на чертежѣ или вычисленіемъ найдемъ:

$$R = 67{,}1 \text{ килогр.}$$

Такъ какъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{30}{60} = 0{,}5,$$

то:

$$\alpha = 26^0 30'.$$

Искомое ускореніе по уравненію 13), стр. 16:

$$p = \frac{R}{m} = \frac{Rg}{G} = \frac{67{,}1 \,.\, 9{,}81}{20} = 32{,}9 \text{ метр.}$$

Задача 25. Найти построеніемъ равнодѣйствующую R двухъ силъ $P_1 = 50$ килогр. и $P_2 = 40$ килогр., дѣйствующихъ подъ угломъ $\varphi = 60^0$ другъ къ другу.

Рѣшеніе.

$$R = 78{,}1 \text{ килогр.}$$

Тотъ же самый результатъ получимъ и вычисленіемъ изъ слѣдующаго равенства:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1 \,.\, P_2 \,.\, \cos \varphi} = \sqrt{50^2 + 40^2 + 2 \,.\, 50 \,.\, 40 \,.\, \cos 60^0}\,.$$

Задача 26. Стропильная нога висячей фермы наклонена подъ угломъ въ $40^0$ къ горизонту. Опредѣлить вычисленіемъ вертикальную составляющую V и горизонтальную H давленія на подкосъ $P = 5000$ килогр.

Рѣшеніе.

$$V = 5000 \,.\, \sin 40^0 = 5000 \,.\, 0{,}643 = 3215 \text{ килогр.}$$

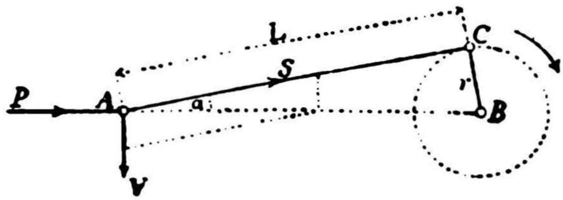
$$H = 5000 \,.\, \cos 40^0 = 5000 \,.\, 0{,}766 = 3830 \text{ килогр.}$$

Задача 27. У паровой машины длина мотыля $r = 40$ сентим., длина шатуна $L = 5 \,.\, 40 = 200$ сентим. и давленіе, производимое поршневымъ штокомъ на крейцкопфъ, $P = 6280$ килогр. Опредѣлить величину давленія S, которому подвергается шатунъ, и величину давленія V, въ силу котораго крейцкопфъ прижимается къ направляющимъ въ тотъ моментъ, когда мотыль перпендикуляренъ къ шатуну (фиг. 16). Найти наибольшія значенія давленій S и V.

**Рѣшеніе.** Разложеніемъ силы P по направленію AC и по направленію, перпендикулярному къ AB, получимъ:

$$V = P \, . \, tg\,\alpha; \quad S = \frac{P}{\cos \alpha}.$$

Фиг. 16.




Силы V и S не постоянны, а мѣняются въ каждый данный моментъ Для положенія мотыля, представленнаго на фиг. 16, имѣемъ:

$$tg\,\alpha = \frac{r}{L} = \frac{40}{200} = 0{,}2;$$

или:

$$\alpha = 11^0\,20'.$$

Слѣдовательно:

$$V = 6280 \, . \, 0{,}2 = 1256 \text{ килогр.}$$

$$S = \frac{6280}{0{,}981} = \backsim 6402 \text{ килогр.}$$

Н а и м е н ь ш і я значенія давленій V и S получаются при $\alpha = 0$ (для, такъ называемой, м е р т в о й т о ч к и мотыля), а именно;

$$V = 0\,;\ S = P.$$

Н а и б о л ь ш і я значенія, напротивъ, получаются при положеніи мотыля, перпендикулярномъ къ линіи AB, т. е. при углѣ $\alpha_{max}$. Давленія V и S въ этомъ случаѣ опредѣлятся изъ слѣдующихъ равенствъ:

$$\sin \alpha_{max} = \frac{r}{L} = 0{,}2,$$

или:

$$\alpha = \backsim 11^0\,30'.$$

Отсюда:

$$V_{max} = 6280 \, . \, 0{,}203 = \backsim 1275 \text{ килогр.}$$

$$S_{max} = \frac{6280}{0{,}980} = \backsim 6408 \text{ килогр.}$$

## § 5.

## Механическая работа силъ.

Чтобы судить о механической работѣ силы, необходимо знать, кромѣ величины ея (и н т е н с и в н о с т и), еще величину пути, пройденнаго точкою приложенія ея въ опредѣленный промежутокъ времени.

Такъ, напр., если изъ двухъ равныхъ силъ одна подымаетъ какой-нибудь грузъ въ опредѣленный промежутокъ времени на вдвое большую высоту, чѣмъ другая, то механическая работа первой силы вдвое больше механической работы второй силы.

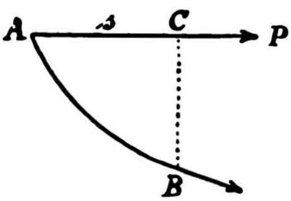
Вообще **механической работой** силы называютъ произведеніе изъ величины силы на величину пути, пройденнаго тѣломъ по направленію дѣйствія силы, или короче:

**механическая работа = силѣ × путь.**

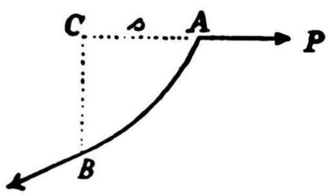
Такъ какъ сила выражается въ килограммахъ, а путь — въ метрахъ, то механическая работа выразится въ килограммометрахъ.

Если тѣло подвергается дѣйствію нѣсколькихъ силъ, то вообще оно придетъ въ движеніе, направленіе котораго можетъ существенно отличаться отъ направленія какой-нибудь силы, дѣйствующей на него. Если же, несмотря на это, рѣчь идетъ о механической работѣ именно такой силы, то подъ этой работой разумѣютъ произведеніе изъ величины силы на величину пути, считая его по направленію дѣйствія силы отъ начальной точки движенія тѣла до основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ конечной точки движенія на направленіе дѣйствія силы.

Фиг. 17.




Фиг. 18.




Такъ, напр., если тѣло подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ силъ движется отъ A къ B (фиг. 17) и P — одна изъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, то, полагая, что $BC \perp AC$, механическая работа силы P за время этого движенія выразится такъ:

$$A = P \cdot \overline{AC} = P \cdot s$$

На фиг. 18, гдѣ во время движенія отъ точки A къ точкѣ B путь s имѣетъ направленіе, противоположное направленію дѣйствія силы, слѣдовательно, долженъ быть внесенъ въ формулу съ отрицательнымъ знакомъ,—механическая работа силы P будетъ:

$$A = -P \cdot s$$

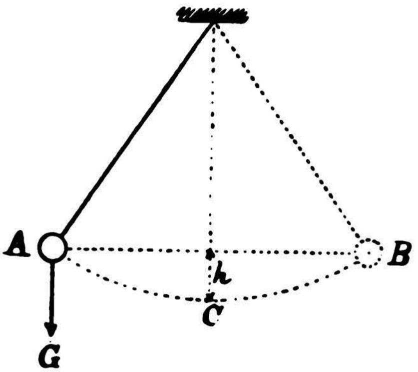
Напр., механическая работа силы тяжести въ математическомъ маятникѣ, если обозначить черезъ G вѣсъ груза (собственно маятника; фиг. 19), будетъ равна:

за время движенія AC: $A_1 = G \cdot h$
„ „ „ CB: $A_2 = - G \cdot h$

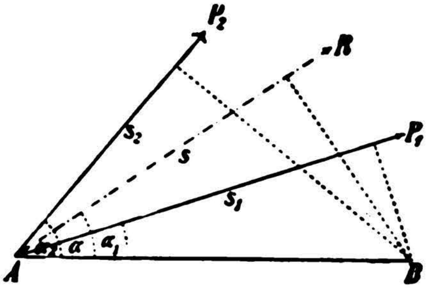
а за время полнаго качанія маятника AB (такъ какъ точки A и B лежатъ на одной высотѣ) механическая работа равна:

$$A = A_1 + A_2 = \text{нулю}.$$

Фиг. 19.




Фиг. 20.




Если сила все время дѣйствуетъ по перпендикуляру къ направленію движенія, то путь, проходимый тѣломъ по направленію дѣйствія силы, равенъ нулю; поэтому сила въ этомъ случаѣ не производитъ никакой механической работы. (Примѣръ: центробѣжный маятникъ, у котораго механическая работа силы тяжести равна нулю, фиг. 172).

Пусть R—равнодѣйствующая нѣсколькихъ силъ $P_1, P_2 \ldots$, дѣйствующихъ на тѣло, и AB—направленіе движенія тѣла (фиг. 20).

При разложеніи всѣхъ этихъ силъ по произвольнымъ направленіямъ, составляющая силы R, по какому-нибудь опредѣленному направленію, должна быть равна суммѣ составляющихъ силъ $P_1, P_2 \ldots$ по тому же направленію. Такъ, для направленія AB получимъ:

$$R \cos \alpha = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots$$

На фиг. 20 имѣемъ:

$$\cos \alpha = \frac{s}{AB}; \quad \cos \alpha_1 = \frac{s_1}{AB}; \quad \cos \alpha_2 = \frac{s_2}{AB} \quad \ldots$$

Подставляя эти значенія въ предыдущее равенство, получимъ:

$$Rs = P_1 s_1 + P_2 s_2 + \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

Каждый изъ членовъ послѣдняго равенства представляетъ механическую работу каждой изъ данныхъ силъ, произведенную при движеніи тѣла отъ A до B. Равенство это читается такъ:

Механическая работа равнодѣйствующей равна суммѣ механическихъ работъ составляющихъ силъ.

Опредѣленная механическая работа можетъ быть произведена силою только въ опредѣленный, болѣе или менѣе короткій или долгій промежутокъ времени; поэтому, для сужденія о полной работѣ силы необходимо еще указать величину затраченнаго на эту работу времени или опредѣлить, какъ велика механическая работа, производимая въ единицу времени (1 секунду).

Механическую работу силы, произведенную въ 1 секунду, называютъ производительностью (величиною работы, мощностью, или эффектомъ) силы; такъ какъ механическая работа = силѣ × путь, а путь, проходимый въ 1 секунду, есть скорость, то короче можно сказать такъ:

**эффектъ = силѣ × скорость,**

или, если обозначить эффектъ черезъ E, силу — черезъ P, скорость — черезъ v, получимъ:

$$E = Pv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

Для того, чтобы при болѣе или менѣе значительныхъ силахъ и скоростяхъ не получать большихъ числовыхъ величинъ, ввели понятіе о лошадиной силѣ, или о работѣ въ одну паровую лошадь.

Подъ лошадиною силою разумѣютъ или механическую работу, равную 75 килограммометрамъ въ 1 секунду, или производительность въ 75 килограммометровъ,

Если число лошадиныхъ силъ обозначитъ черезъ N, то:

$$N = \frac{E}{75} = \frac{Pv}{75} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

При равномѣрномъ круговомъ (вращательномъ) движеніи (по уравненію 3), стр. 5):

$$v = \frac{2R\pi n}{60}$$

Если радіусъ R выраженъ въ сентиметрахъ, то по уравненію 18):

$$N = \frac{P\,.\,2R\pi\,.\,n}{75\,.\,60\,.\,100} = \frac{n}{71\,620} \cdot P \cdot R$$

или:

$$P\,.\,R = 71\,620\,.\,\frac{N}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Для правильной ежедневной механической работы живыхъ двигателей существуетъ формула:

$$L = Pvt$$

въ которую подставляютъ:

| | | для человѣка | для лошади |
|---|---|---|---|
| среднюю силу . . . | $P =$ | 10 килогр. | 70 килогр. |
| „ скорость . . | $v =$ | 0,8 метр. | 1,25 метр. |

среднее время . . $t = 8$ час. $= \underbrace{8 \cdot 60 \cdot 60 = 28\,800}$ секундъ.

На основанiи этого, ежедневная механическая работа человѣка будетъ:

$$L = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 28\,800 = 230\,400 \text{ килограммометровъ},$$

а ежедневная механическая работа лошади:

$$L = 70 \cdot 1{,}25 \cdot 28\,800 = 2\,520\,000 \text{ килограммометровъ}.$$

Но очень часто ни человѣкъ, ни лошадь не въ состоянiи производить работу съ опредѣленной средней скоростью и опредѣленное время; въ такомъ случаѣ, производимая ими ежедневная механическая работа меньше. Если черезъ $v_1$ назовемъ отступающую отъ средней нормы скорость, черезъ $t_1$—новое время, то по формулѣ Герстнера *) получимъ слѣдующую величину дѣйствующей силы $P_1$:

$$P_1 = P\left(2 - \frac{v_1}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) \quad \ldots\ldots \quad 20)$$

Если на тѣло съ массою $m$, при прохожденiи пути $s$, дѣйствуетъ постоянная сила $P$, то, согласно стр. 24, механическая работа будетъ $Ps$. Но постоянная сила, согласно стр. 15, сообщаетъ тѣлу всегда равномѣрно-ускоренное движенiе, — слѣдовательно, обозначивъ черезъ $c$ начальную скорость тѣла, черезъ $v$—конечную и черезъ $p$—ускоренiе, получаемое тѣломъ подъ дѣйствiемъ силы $P$, по уравненiю 6) (стр. 7) получимъ:

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2p}.$$

Но по уравненiю 13) (стр. 16):

$$P = mp$$

Перемноживъ почленно оба выраженiя, находимъ:

$$Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} \quad \ldots\ldots \quad 21)$$

Выраженiе $\frac{mv^2}{2}$ или $\frac{mc^2}{2}$, т. е. произведенiе изъ половины

---

*) Существуетъ еще другая формула (Машека):

$$P_1 = P\left(3 - \frac{v_1}{v} - \frac{t_1}{t}\right)$$

Вообще, однако, слѣдуетъ предпочесть формулу Герстнера.

массы тѣла на квадратъ ея скорости, называютъ живою силою или энергіей *), которою тѣло обладаетъ въ тотъ моментъ, когда скорость = v или c.

Поэтому, въ уравненіи 21) $\frac{mv^2}{2}$ — живая сила тѣла въ концѣ движенія, а $\frac{mc^2}{2}$ — живая сила тѣла въ началѣ движенія, разность же:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

слѣдовательно, представляетъ собою приращеніе живой силы, пріобрѣтаемое тѣломъ за время движенія.

Такимъ образомъ уравненіе 21) заключаетъ въ себѣ слѣдующую важное положеніе:

**Механическая работа, производимая дѣйствующей на тѣло силою, равна приращенію живой силы, или короче:**

**механическая работа = приращенію живой силы.**

Если начальная скорость тѣла равна нулю, то уравненіе 21) принимаетъ такой видъ:

$$Ps = \frac{mv^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 22)$$

т. е. живая сила, которую тѣло имѣетъ въ концѣ движенія, равна механической работѣ, произведенной силою за время движенія.

Если сила P дѣйствуетъ по направленію, обратному движенію тѣла, т. е. является сопротивленіемъ, то движеніе тѣла становится равномѣрно-замедленнымъ.

Въ этомъ случаѣ уравненіе 21) (такъ какъ путь s будетъ величиной отрицательной) приметъ такой видъ:

$$-Ps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}$$

или:

$$Ps = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 23)$$

Въ данномъ случаѣ разность:

$$\frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

показываетъ убываніе живой силы въ тѣлѣ за время его движенія или расходуемую за время движенія живую силу, и уравненіе 23) можно выразить словами такъ:

**сопротивленіе × путь = расходуемой живой силѣ.**

---

*) Кинетическая энергія; видимая энергія тѣла.

При помощи особыхъ приборовъ, такъ называемыхъ динамометровъ, или силомѣровъ, можно измѣрить силу, необходимую для преодолѣнія сопротивленія (напримѣръ, пружиннымъ динамометромъ Ренье).

Задача 28. Какъ велика механическая работа, необходимая для поднятія груза въ 800 килогр. на высоту 6 метр.?

Рѣшеніе.

$$Ps = 800 \,.\, 6 = 4800 \text{ килограммометр.}$$

Задача 29. Если паровая лебедка въ теченіе 8 секундъ поднимаетъ грузъ $P = 1000$ килогр. на высоту 12 метр., то какова производительность (эффектъ) этой лебедки?

Рѣшеніе. Скорость при подъемѣ равна:

$$v = \frac{12}{8} = 1{,}5 \text{ метр.},$$

слѣдовательно:

$$E = 1000 \,.\, 1{,}5 = 1500 \text{ килограммометр.},$$

или въ лошадиныхъ силахъ, по уравненію 18), работа выразится слѣдующимъ образомъ:

$$N = \frac{1500}{75} = 20$$

Задача 30. Паровой молотъ, вѣсомъ въ 500 килогр., въ теченіе 1 минуты дѣлаетъ 50 ударовъ; высота подъема = 75 сантим. Найти производительность (эффектъ) молота.

Рѣшеніе. Молотъ въ теченіе 1 секунды дѣлаетъ $\frac{50}{60} = {}^5/_6$ удара; слѣдовательно, скорость его:

$$v = {}^5/_6 \,.\, 0{,}75 = 0{,}625 \text{ метр.}$$

и:

$$E = 500 \,.\, 0{,}625 = 312{,}5 \text{ килограммометр.}$$

Задача 31. Какой грузъ $P_1$ долженъ переносить рабочій со скоростью $v = 1$ метру при $t_1 = 10$ рабочихъ часахъ, не чувствуя переутомленія, и какъ велика въ этомъ случаѣ будетъ его ежедневная механическая работа?

Рѣшеніе. На основаніи уравненія 20):

$$P_1 = 10\left(2 - \frac{1}{0{,}8}\right) \cdot \left(2 - \frac{10}{8}\right) = \backsim 5{,}6 \text{ килогр.}$$

Ежедневная же механическая работа его равна:

$$L = P_1 \,.\, v_1 \,.\, t_1 = 5{,}6 \,.\, 1 \,.\, 36\,000 = 201\,600 \text{ килограммометр.}$$

Задача 32. Принимая для человѣка, при постоянной работѣ на кривошипѣ, слѣдующія значенія величинъ:

$$P = 10 \text{ килогр.};\ v = 0{,}8 \text{ метр.};\ t = 8 \text{ час.},$$

опредѣлить, какую силу онъ можетъ употребить при той же самой скорости кривошипа $v = 0{,}8$ метра, если работа производится очень короткое время и если въ болѣе или менѣе продолжительные промежутки между работой онъ можетъ отдыхать?

Рѣшеніе. Такъ какъ здѣсь можно принять $t = 0$, то по уравненію 20):

$$P_1 = 10\left(2 - \frac{0{,}8}{0{,}8}\right)\cdot\left(2 - 0\right) = 20 \text{ килогр.}$$

Задача 33. Принимая для лошади приведенныя на стр. 27 значенія величинъ:

$$P = 70 \text{ килогр.};\ v = 1{,}25 \text{ метр.};\ t = 8 \text{ час.},$$

опредѣлить, сколько рабочихъ часовъ слѣдуетъ отъ нея требовать въ томъ случаѣ, если при той же самой скорости она должна употребить силу 84 килогр.

Рѣшеніе. Изъ равенства:

$$84 = 70\left(2 - \frac{1{,}25}{1{,}25}\right)\cdot\left(2 - \frac{t_1}{8}\right)$$

найдемъ:

$$t_1 = 6{,}4 \text{ час.}$$

Задача 34. Количество воды, притекающей къ тюрбинѣ въ 1 секунду, $Q = 2$ куб. метр.; высота напора (паденіе) 4—5 метр. Найти величину работы въ теоретическихъ лошадиныхъ силахъ, которою можно располагать въ данной тюрбинѣ.

Рѣшеніе. Такъ какъ 1 куб. метръ воды вѣситъ 1000 килогр., то механическая работа притекающей воды въ 1 секунду или эффектъ (производительность) ея:

$$E = 1000\, QH,$$

слѣдовательно:

$$N = \frac{1000\, QH}{75} = \frac{1000 \,.\, 2 \,.\, 5}{75} = \backsim 133\,^{*})$$

Задача 35. У паровой машины:

| | |
|---|---|
| Діаметръ поршня . . . . . | $D = 40$ сентим. |
| Діаметръ поршневаго штока. | $d = 6{,}5$ сентим. |
| Ходъ поршня. . . . . . . | $h = 0{,}8$ метр. |
| Среднее давленіе пара . . | $p = 1{,}8$ атм. (1,8 килогр./см.$^2$). |
| Число оборотовъ . . . . . | $n = 70$ въ 1 минуту. |

Опредѣлить число лошадиныхъ силъ данной паровой машины, не принимая во вниманіе тренія (такъ называемую индикаторную работу машины).

---

*) Дѣйствительная работа тюрбины значительно меньше. При коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія, равномъ 0,7, имѣемъ:

$$N = 0{,}7 \,.\, 133 = \backsim 93.$$

Рѣшеніе. Поперечное сѣченіе поршня:

$$\frac{D^2\pi}{4} = \frac{40^2 . 3,14}{4} = 1256 \text{ сентим.}^2$$

Поперечное сѣченіе поршневаго штока:

$$\frac{d^2\pi}{4} = \frac{6,5^2 \pi}{4} = 33 \text{ сентим.}^2$$

Слѣдовательно, дѣйствительное поперечное сѣченіе поршня:

$$1256 - 33 = 1223 \text{ сентим.}^2$$

Полное давленіе, поэтому, на поршень;

$$P = 1,8 . 1223 = \backsim 2200 \text{ килогр.}$$

При каждомъ оборотѣ машины поршень совершаетъ ходъ впередъ и назадъ, слѣдовательно, путь равенъ 2h; при n оборотахъ—пройденный путь = 2hn. Путь же, проходимый въ 1 секунду, или средняя скорость поршня, будетъ:

$$v = \frac{2hn}{60} = \frac{2 . 0,8 . 70}{60} = 1,87 \text{ метр.}$$

Поэтому:

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{2200 . 1,87}{75} = \backsim 55.$$

Задача 36. Снарядъ, вѣсомъ въ 270 килогр., имѣетъ скорость у дула орудія $v = \backsim 800$ метр. (см. задачу 10, стр. 9)*). Опредѣлить величину живой силы снаряда.

Рѣшеніе.

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{G}{g} . \frac{v^2}{2} = \frac{270}{9,81} . \frac{800^2}{2} = \backsim 8\,800\,000 \text{ килограммометровъ} =$$
$$= 8800 \text{ метротоннъ.}$$

Задача 37. При помощи ремня передается N = 20 лошадиныхъ силъ. Радіусъ ременнаго шкива R = 50 сентим., число оборотовъ его n = 150 въ 1 минуту.

Опредѣлить: силу на окружности шкива P и скорость ремня v.

Рѣшеніе. По уравненію 19), стр. 00:

$$P = \frac{71620}{50} . \frac{20}{150} = 191 \text{ килогр.}$$

$$v = \frac{2 . 0,50 . 3,14 . 150}{60} = 7,85 \text{ метр.}$$

Задача 38. Какова механическая работа маховика, радіусомъ въ 2 метра и вѣсомъ въ 6000 килогр., при переходѣ съ числа оборотовъ n = 10 къ числу $n_1 = 4$ оборотамъ?

Рѣшеніе. Масса маховика будетъ:

$$m = \frac{6000}{9,81} = \backsim 612$$

*) 28-ми-сантиметровыя морскія пушки.

Скорость на окружности вначалѣ;

$$c = \frac{2R\pi n}{60} = \frac{2.2.3{,}14.10}{60} = 2{,}1 \text{ метр.}$$

въ концѣ:

$$v = \frac{2R\pi n_1}{60} = \frac{2.2.3{,}14.4}{60} = 0{,}84 \text{ метр.},$$

слѣдовательно, по уравненію 23), стр. 28:

$$P_s = \frac{612.2{,}1^2}{2} - \frac{612.0{,}84^2}{2} = 1134 \text{ килограммометр.}$$

---

## ГЛАВА II.

# Ученіе о равновѣсіи силъ, дѣйствующихъ на твердое тѣло (статика твердыхъ тѣлъ).

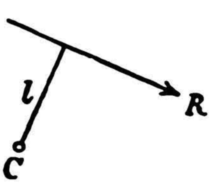
## § 6.

### Статическій моментъ.

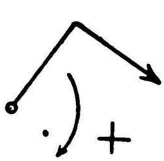
Если сила дѣйствуетъ на тѣло, могущее вращаться около неподвижной оси, и если при этомъ направленіе силы проходитъ внѣ этой оси,—то тѣло придетъ въ овращеніе. Стремленіе привести тѣло во вращеніе будетъ тѣмъ больше, чѣмъ больше сила и чѣмъ дальше она отстоитъ отъ оси. Чтобы имѣть возможность измѣрить величину этого стремленія числомъ, установили понятіе о статическомъ моментѣ.

Подъ статическимъ моментомъ силы R (фиг. 21) относительно оси вращенія C, расположенной внѣ направленія силы и перпендику-

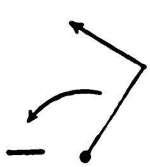
Фиг. 21.




Фиг. 22.




Фиг. 23.




лярной къ плоскости, въ которой лежитъ эта сила, разумѣютъ произведеніе изъ силы на разстояніе ея отъ оси. Это разстояніе l называется плечомъ силы, — поэтому короче можно выразиться такъ:

**моментъ = силѣ × плечо,**

или:

$$M = Rl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24)$$

Что касается знака передъ моментомъ, то совершенно безразлично, какое изъ направленій вращенія, вправо или влѣво, принять за положительное. Но если какое-нибудь опредѣленное направленіе вращенія примемъ за положительную величину, то обратное ему слѣдуетъ разсматривать за отрицательную. Условились принимать за положительный тотъ моментъ силы, когда сила вращаетъ вправо, т. е. стремится вращать по направленію часовой стрѣлки (фиг. 22); тогда моментъ силы, вращающей въ обратномъ направленіи, будетъ отрицательнымъ (фиг. 23).

Если принять силу R, съ точкой приложенія A (фиг. 24), за равнодѣйствующую и разложить ее на двѣ составляющія Q и P, изъ которыхъ одна Q совпадаетъ съ направленіемъ AC, тогда какъ другая P перпендикулярна къ нему, то вращеніе произведетъ только сила P, такъ какъ дѣйствіе силы Q уничтожается сопротивленіемъ неподвижной оси.

Изъ подобія двухъ треугольниковъ ABD и CAE слѣдуетъ:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CA}{CE},$$

т. е.:

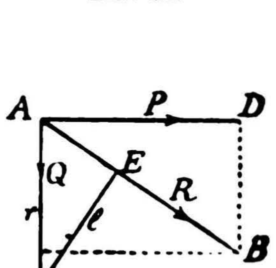
$$\frac{R}{P} = \frac{r}{l},$$

слѣдовательно:

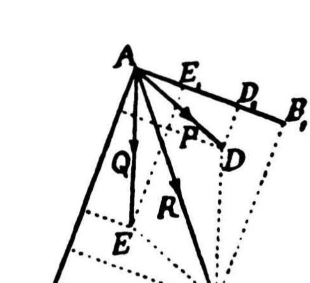
$$Rl = Pr,$$

т. е. словами: статическій моментъ равнодѣйствующей равенъ статическому моменту той изъ составляющихъ, которая направлена перпендикулярно къ линіи, соединяющей точку приложенія силы съ осью вращенія (т. е. на фиг. 24 перпендикулярно къ AC).

Фиг. 24.




Фиг. 25.




Если составляющія P и Q силы R (фиг. 25) направлены такъ, что ни одна изъ нихъ не совпадаетъ съ направленіемъ AC, то каждую изъ трехъ силъ R, P, Q можно разложить на составляющія по направленіямъ AC и перпендикулярно къ нему.

На фиг. 25 составляющими, направленными перпендикулярно къ AC, будутъ:

$$\begin{aligned} &\text{для силы } R: = AB_1 \\ &\quad „ \quad „ \quad P: = AD_1 \\ &\quad „ \quad „ \quad Q: = AE_1 \end{aligned}$$

Если разстояніе AC обозначить черезъ r, то, по предыдущему, статическій моментъ:

$$\begin{aligned} &\text{силы } R : M = AB_1 \,.\, r \\ &\quad „ \quad P : M_1 = AD_1 \,.\, r \\ &\quad „ \quad Q : M_2 = AE_1 \,.\, r \end{aligned}$$

А такъ какъ на фиг. 25:

$$AB_1 = AD_1 + D_1B_1$$

и кромѣ того:

$$D_1B_1 = AE_1$$

т. е.:

$$AB_1 = AD_1 + AE_1.$$

то:

$$M = M_1 + M_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 25)$$

или словами: статическій моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ статическихъ моментовъ ея составляющихъ относительно одной и той же данной оси.

Если дано нѣсколько силъ $P_1$, $P_2$, . . . . $P_n$, лежащихъ въ одной плоскости, и R — ихъ общая равнодѣйствующая, то сначала складываютъ силы $P_1$ и $P_2$ въ одну равнодѣйствующую $R_{1-2}$.

Моментъ этой послѣдней относительно оси вращенія, перпендикулярной къ плоскости дѣйствія силъ, по предыдущему, равенъ суммѣ моментовъ силъ $P_1$ и $P_2$. Затѣмъ складываются силы $R_{1-2}$ и $P_3$ въ равнодѣйствующую $R_{1-3}$, и моментъ силы $R_{1-3}$ равенъ суммѣ моментовъ силъ $R_{1-2}$ и $P_3$—слѣдовательно, такъ же равенъ суммѣ моментовъ силъ $P_1$, $P_2$ и $P_3$. Продолжая точно такимъ же образомъ дальше, въ концѣ концовъ, получимъ слѣдующее положеніе:

Статическій моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ отдѣльныхъ составляющихъ силъ относительно одной и той же данной оси.

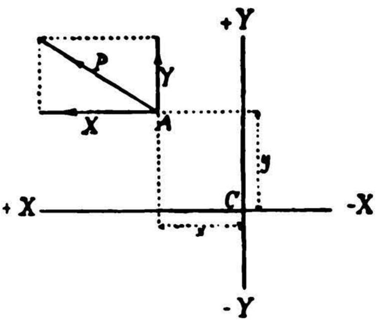
Вышеупомянутое геометрическое доказательство этого положенія хотя и наглядно, но не въ достаточной степени строго, такъ какъ знакъ момента всегда приходится брать по чертежу. Вполнѣ строго только аналитическое доказательство, какъ, напр., слѣдующее (по Л. Геннебергу).

Черезъ точку вращенія C проведемъ прямоугольныя оси координатъ такъ, чтобы проведенная влѣво отъ C положительная ось X при поворотѣ ея на 90° по положительному направленію вращенія (по часовой стрѣлкѣ) дала намъ положительную ось Y (фиг. 26).

Пусть сначала дана только одна сила P въ плоскости координатныхъ осей, съ точкой приложенія A. Составляющія силы P по направленію координатныхъ осей будутъ X и Y, при чемъ X и Y положительны, если онѣ имѣютъ то же направленіе, что и положительныя координатныя оси; въ противномъ случаѣ онѣ отрицательны. Если обозначимъ координаты точки A черезъ x и y, то моментъ составляющихъ силъ относительно точки вращенія C будетъ:

$$M = xY \pm yX$$

Фиг. 26.




Это выраженіе будетъ положительно или отрицательно, въ зависимости отъ того, какое значеніе (положительное или отрицательное) придадимъ направленію вращенія силы P; слѣдовательно, вообще моментъ всегда разсматривается вмѣстѣ со знакомъ.

Пусть къ точкѣ A приложено нѣсколько силъ $P_1$, $P_2$, $P_3$. . . . , лежащихъ въ плоскости координатныхъ осей, и R—равнодѣйствующая. Разложимъ всѣ силы на составляющія по направленію координатныхъ осей, а именно:

силу $P_1$ на составляющія $X_1$ $Y_1$
„ $P_2$ „ „ $X_2$ $Y_2$
. . . . . . . . . . . . . .

Тогда составляющія силы R равны:

$$R_x = \Sigma\,(X).$$
$$R_y = \Sigma\,(Y)$$

Отсюда получаемъ моментъ:

$$M = x\,\Sigma\,(Y) \pm y\,\Sigma\,(X)$$

Теперь моментъ

силы $P_1$: $M_1 = xY_1 \pm yX_1$
„ $P_2$: $M_2 = xY_2 \pm yX_2$
. . . . . . . . . . . .

Вслѣдствіе этого сумма моментовъ всѣхъ силъ P:

$$M = \Sigma\,(xY \pm yX) = x\,\Sigma\,(Y) \pm y\,\Sigma\,(X)$$

т. е. равна моменту равнодѣйствующей.

## § 7.

## Условія равновѣсія твердаго тѣла.

Тѣло находится въ равновѣсіи, если оно подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ не измѣняетъ своего положенія, будетъ ли то состояніе покоя или прямолинейнаго равномѣрнаго движенія.

Силы, приложенныя къ тѣлу, находятся въ равновѣсіи, если ихъ дѣйствія на тѣло взаимно уничтожаются.

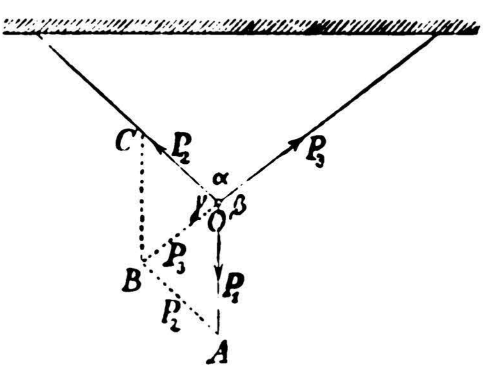
Такъ какъ каждая отдѣльная сила сама по себѣ непремѣнно измѣнила бы движеніе тѣла, то тѣло можетъ находиться въ равновѣсіи только въ томъ случаѣ, если равнодѣйствующая всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на него, равна нулю.

Дѣйствіе двухъ силъ взаимно уничтожается, если онѣ имѣютъ одинаковую величину, направлены по одной и той же прямой, но въ прямо противоположныя стороны (такія силы называются **равнозначными** или **эквивалентными**).

Поэтому нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на тѣло, только въ томъ случаѣ могутъ находиться въ равновѣсіи, если каждая изъ нихъ имѣетъ одинаковую величину съ равнодѣйствующей всѣхъ остальныхъ силъ и направленіе, прямо противоположное послѣдней.

Если, напр., на тѣло дѣйствуютъ три силы, находящіяся въ равновѣсіи, то каждая изъ нихъ должна имѣть одинаковую величину съ равнодѣйствующей двухъ другихъ силъ и прямопротивоположное ей направленіе. Въ этомъ случаѣ всѣ три силы пересѣкаются въ одной точкѣ. Напр., равнодѣйствующая силъ $P_1$ и $P_2$ (фиг. 27), выражающаяся діагональю OB параллелограмма OABC, построеннаго на силахъ $P_1$ и $P_2$, должна быть равна по величинѣ и прямопротивоположна по направленію силѣ $P_3$.

Фиг. 27.




Если α, β, γ — углы между тремя направленіями силъ, то въ треугольникѣ ABO:

$$\sphericalangle ABO = 180^0 - \alpha$$
$$\sphericalangle AOB = 180^0 - \beta$$
$$\sphericalangle OAB = 180^0 - \gamma$$

а такъ какъ стороны треугольника относятся между собою, какъ синусы противолежащихъ угловъ, то:

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin(180^0 - \alpha) : \sin(180^0 - \beta) : \sin(180^0 - \gamma)$$

или, такъ какъ:

$$\sin(180^0 - x) = \sin x$$

$$P_1 : P_2 : P_3 = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Если всѣ силы лежатъ на одной и той же прямой, то для такого случая равновѣсія необходимо, чтобы сумма силъ, дѣйствующихъ на тѣло по одному направленію, равнялась суммѣ силъ, дѣйствующихъ на тѣло по прямо противоположному направленію. Если, при этомъ, тѣло совершаетъ равномѣрное поступательное движеніе, то силы, направленныя прямопротивоположно направленію движенія, называются сопротивленіемъ; силы же, дѣйствующія по направленію движенія, движущими силами. Состояніе равновѣсія въ этомъ случаѣ можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ:

**сила = сопротивленію**

Если тѣло находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ произвольно направленныхъ силъ, лежащихъ въ одной плоскости, то въ одномъ какомъ-нибудь направленіи (произвольно выбранномъ) должно дѣйствовать столько же силъ, сколько въ прямопротивоположномъ направленіи; ни въ одномъ направленіи не должно быть излишка силы. Поэтому, если разложить силы по опредѣленнымъ направленіямъ осей, то алгебраическая сумма (т. е. сумма, взятая въ зависимости отъ знаковъ отдѣльныхъ членовъ) всѣхъ составляющихъ, совпадающихъ съ направленіемъ какой-нибудь изъ выбранныхъ осей, должна равняться нулю.

Но если даже послѣднее условіе соблюдено, то изъ него еще нельзя заключить, что тѣло находится въ равновѣсіи. Для равновѣсія необходимо, чтобы тѣло, подъ дѣйствіемъ силъ, не совершало никакого вращательнаго движенія. Стремленіе однѣхъ силъ вращать тѣло въ одномъ какомъ-нибудь направленіи должно быть уничтожено равновеликимъ ему стремленіемъ остальныхъ силъ вращать тѣло въ противоположномъ направленіи, или, иначе говоря, сумма статическихъ моментовъ силъ, вращающихъ тѣло въ одномъ направленіи, должна быть равна суммѣ статическихъ моментовъ силъ, вращающихъ тѣло въ прямопротивоположномъ направленіи, относительно какой-нибудь опредѣленной оси.

Для случая, когда всѣ силы лежатъ въ одной плоскости и когда онѣ разложены на горизонтальныя и вертикальныя составляющія и когда при этомъ ось вращенія перпендикулярна къ плоскости силъ, имѣемъ слѣдующія условія равновѣсія твердаго тѣла:

1. Алгебраическая сумма проекцій всѣхъ силъ на горизонтальную ось должна равняться нулю.

2. Алгебраическая сумма проекцій всѣхъ силъ на вертикальную ось должна равняться нулю.

3. Алгебраическая сумма статическихъ моментовъ должна равняться нулю.

§ 8.

## Сложеніе нѣсколькихъ силъ. дѣйствующихъ въ одной плоскости, съ различными точками приложенія.

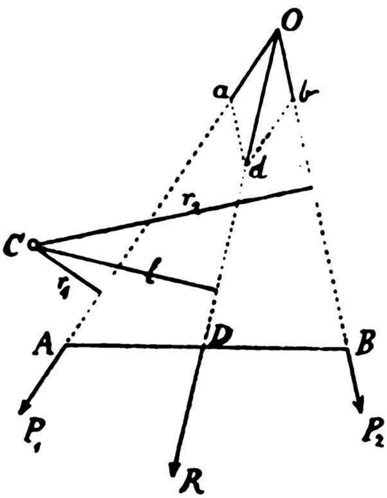
Правила сложенія двухъ силъ, имѣющихъ одну общую точку приложенія, въ одну равнодѣйствующую, уже были изложены въ п. 4 § 4 (стр. 19, 20 и 21).

Для сложенія двухъ силъ, дѣйствующихъ въ одной плоскости, съ различными точками приложенія, служитъ слѣдующее правило:

Надо продолжить направленія обѣихъ силъ до ихъ пересѣченія и при этой точкѣ построить параллелограммъ силъ, такъ какъ:

точку приложенія силы можно произвольно перенести по направленію дѣйствія силы, если только новая точка приложенія неизмѣнно связана съ первой. (Примѣръ: канатъ, къ которому приложена тянущая сила).

Фиг. 28.




Пусть, напр., точки A и B, принадлежащія твердому тѣлу и неизмѣнно связанныя между собою, будутъ точками приложенія силъ $P_1$ и $P_2$, продолженныя направленія которыхъ пересѣкаются въ точкѣ O (фиг. 28). Если перенести точки приложенія A и B силъ въ точку O и разсматривать послѣднюю, какъ общую точку приложенія силъ $P_1$ и $P_2$, а затѣмъ построить параллелограммъ Oadb со сторонами $Oa = P_1$ и $Ob = P_2$, то діагональ Od будетъ равна искомой величинѣ равнодѣйствующей R. Точку приложенія послѣдней опять можно произвольно перенести по направленію дѣйствія силы, напр., въ точку D, лежащую на линіи, соединяющей точки A и B.

На основаніи теоремы, что статическій моментъ равнодѣйствующей силы равенъ суммѣ статическихъ моментовъ составляющихъ силъ, равнодѣйствующая R можетъ быть опредѣлена и въ томъ случаѣ, если точка пересѣченія O силъ $P_1$ и $P_2$ лежитъ внѣ плоскости чертежа.

Относительно произвольно выбранной точки вращенія C (фиг. 28) будемъ имѣть:

$$Rl = P_1r_1 + P_2r_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26)$$

Положеніе равнодѣйствующей R опредѣлится въ этомъ случаѣ изъ условія, что она должна находиться отъ точки вращенія C на разстояніи:

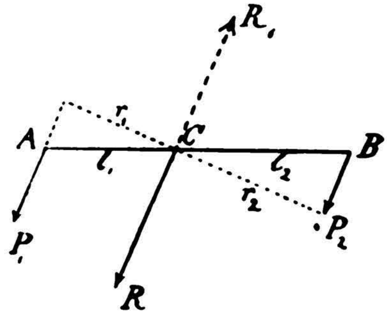
$$l = \frac{P_1r_1 + P_2r_2}{R}$$

по перпендикуляру къ направленію ея дѣйствія. Величина и направленіе силы R опредѣляется діагональю параллелограмма, построеннаго въ произвольномъ мѣстѣ на силахъ $P_1$ и $P_2$.

Слѣдуетъ упомянуть еще о случаѣ, когда силы $P_1$ и $P_2$ параллельны между собою (фиг. 29). Здѣсь параллелограммъ изъ силъ $P_1$ и $P_2$ обращается въ одну прямую линію. Изъ этого слѣдуетъ, что равнодѣйствующая R имѣетъ то же направленіе, какъ и силы $P_1$ и $P_2$, и равна суммѣ ихъ, слѣдовательно:

$$R = P_1 + P_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27)$$

Фиг. 29.




Такъ какъ при составленіи уравненія статическихъ моментовъ положеніе оси вращенія выбиралось произвольно, то въ данномъ случаѣ можно принять за ось вращенія ось, проходящую черезъ точку пересѣченія C равнодѣйствующей R съ прямой, соединяющей точки приложенія A и B (фиг. 29).

Если замѣнить равнодѣйствующую R равной по величинѣ, но противоположной по направленію силою $R_1$, то силы $P_1$, $P_2$ и $R_1$ будутъ находиться въ равновѣсіи, и поэтому къ нимъ можно будетъ приложить общіе законы равновѣсіи. Согласно закону 3 (§ 7, стр. 38), найдемъ:

$$-P_1r_1 + P_2r_2 = 0$$

или:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

а такъ какъ:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{l_2}{l_1}$$

то:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28)$$

т. е. равнодѣйствующая R дѣлитъ линію AB, соединяющую точки приложенія силъ A и B, въ обратномъ отношеніи къ величинамъ составляющихъ силъ. Этимъ и опредѣляется положеніе точки C.

Если дано нѣсколько параллельныхъ силъ, то, для нахожденія равнодѣйствующей ихъ, можно воспользоваться только-что указаннымъ методомъ слѣдующимъ образомъ: для равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ и третей силы найти новую равнодѣйствующую, затѣмъ эту послѣднюю сложить съ четвертой изъ данныхъ силъ и т. д.

Для произвольно большого числа параллельныхъ силъ, дѣйствующихъ въ одной или въ различныхъ плоскостяхъ, будетъ справедлива слѣдующая теорема:

Равнодѣйствующая параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону, равна суммѣ ихъ и имѣетъ одинаковое съ ними направленіе.

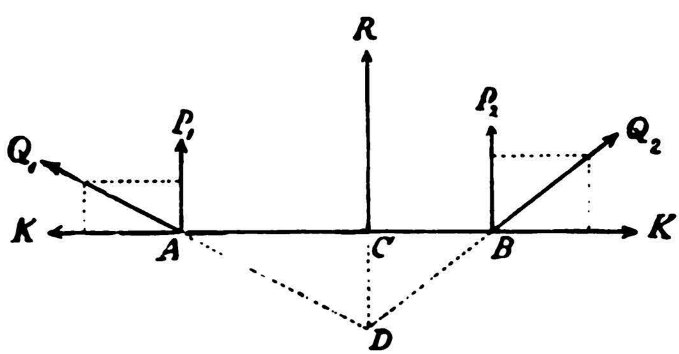
Если R — равнодѣйствующая параллельныхъ силъ $P_1$, $P_2$, $P_3 \ldots$, разстоянія точекъ приложенія которыхъ до произвольно выбранной плоскости суть $x_1$, $x_2$, $x_3 \ldots\ldots$, а $x_0$ — разстояніе точки приложенія равнодѣйствующей R отъ той же плоскости, то по теоремѣ статическихъ моментовъ (стр. 34):

$$Rx_0 = P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \ldots\ldots \qquad 29)$$

т. е. статическій моментъ равнодѣйствующей параллельныхъ силъ относительно параллельной плоскости равенъ суммѣ статическихъ моментовъ всѣхъ отдѣльныхъ составляющихъ силъ относительно той же самой плоскости.

Положеніе равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ можно также опредѣлить, если къ точкамъ приложенія A и B силъ $P_1$ и $P_2$

Фиг. 30.

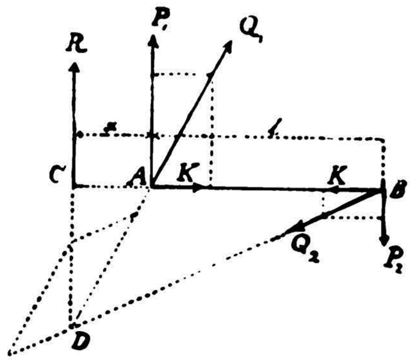



по направленію линіи AB приложить еще двѣ произвольныя по величинѣ, но равныя между собою и прямопротивоположныя по направленію, слѣдовательно, взаимно уничтожающіяся силы K (фиг. 30).

Если силы K сложить съ силами $P_1$ и $P_2$ въ равнодѣйствующія $Q_1$ и $Q_2$ и продолжить направленія этихъ послѣднихъ до пересѣченія въ точкѣ D, то получимъ ту точку, черезъ которую должна пройти равнодѣйствующая R силъ $P_1$ и $P_2$.

Тѣмъ же методомъ можно воспользоваться для нахожденія равнодѣйствующей R двухъ параллельныхъ силъ $P_1$ и $P_2$, неравныхъ по величинѣ и направленныхъ въ противоположныя стороны (фиг. 31).

Фиг. 31.




Равнодѣйствующая въ этомъ случаѣ равна:

$$R = P_1 - P_2 \quad \quad 30)$$

Если принять направленіе силы $P_1$ за положительное и кромѣ того $P_1 > P_2$, то и R — положительна, слѣдовательно, направлена въ сторону силы $P_1$. Напротивъ, при $P_2 > P_1$ R — отрицательна и, слѣдовательно, направлена въ сторону силы $P_2$.

Итакъ: *равнодѣйствующая двухъ параллельныхъ силъ, неравныхъ по величинѣ и направленныхъ въ противоположныя стороны, равна разности ихъ и направлена въ сторону большей силы.*

Положеніе равнодѣйствующей R опредѣляется изъ уравненія моментовъ относительно какой-нибудь произвольно взятой точки вращенія C:

$$- P_1 x + P_2 (l + x) = 0,$$

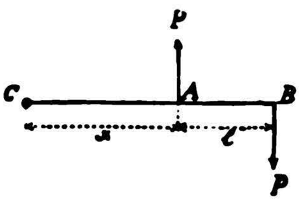
откуда слѣдуетъ:

$$x = \frac{P_2}{P_1 - P_2} l \quad \quad 31)$$

Если параллельныя силы, направленныя въ противоположныя стороны, равны между собою ($P_1 = P_2 = P$), то равнодѣйствующая ихъ (какъ разность двухъ равныхъ по величинѣ силъ P) равна нулю и, на основаніи послѣдняго уравненія, $x = \infty$. Отсюда слѣдуетъ:

**Двѣ равныя по величинѣ, но направленныя въ противоположныя стороны, параллельныя силы не слагаются въ одну равнодѣйствующую, а составляютъ пару силъ съ неизмѣннымъ моментомъ.**

Фиг. 32.



Если $AB \perp P$ (фиг. 32) (чего всегда можно достигнуть перенесеніемъ точки приложенія одной изъ силъ P по направленію ея дѣйствія) и если уравненіе статическихъ моментовъ взять относительно точки вращенія C, лежащей на продолженіи линіи AB на произвольномъ разстояніи x отъ точки A, то получимъ:

$$M = -Px + P(l + x),$$

или:

$$M = Pl \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32)$$

Слѣдовательно, моментъ пары силъ не зависитъ отъ x и имѣетъ неизмѣнную величину, равную произведенію изъ силы на кратчайшее разстояніе между обѣими силами, или, если это разстояніе, по предыдущему, назвать **плечомъ** пары силъ,

**моментъ = силѣ × плечо.**

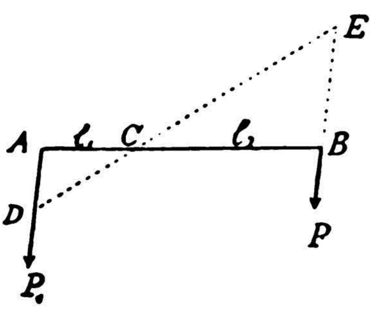
Относительно дѣйствующихъ въ одной и той же плоскости паръ силъ слѣдуетъ отмѣтить слѣдующія теоремы:

**Дѣйствія двухъ паръ силъ съ равными моментами и одинаковымъ направленіемъ вращенія равны между собою.**

**Двѣ пары силъ съ равными моментами, но съ противоположными направленіями вращенія, находятся въ равновѣсіи.**

**Нѣсколько паръ силъ можно замѣнить одной парой, моментъ которой равенъ алгебраической суммѣ моментовъ данныхъ паръ силъ.**

Фиг. 33.



Поэтому нѣсколько паръ силъ будутъ находиться въ равновѣсіи, если алгебраическая сумма ихъ моментовъ равна нулю, т. е. если сумма моментовъ паръ силъ, вращающихъ тѣло въ одномъ направленіи, равна суммѣ моментовъ паръ силъ, вращающихъ его въ прямопротивоположномъ направленіи.

Задача 39. Найти построеніемъ положеніе равнодѣйствующей двухъ параллельныхъ силъ $P_1$ и $P_2$, направленныхъ въ одну сторону.

Рѣшеніе. Соединивъ точки приложенія A и B силъ $P_1$ и $P_2$ прямой AB (фиг. 33), отложимъ $AD = P_2$ и $BE = P_1$ и проведемъ прямую DE, которая пересѣчетъ линію AB въ точкѣ C. По уравненію 28), стр. 39, C будетъ точкой, лежащей на направленіи равнодѣйствующей силъ $P_1$ и $P_2$, такъ какъ изъ подобія треугольниковъ BCE и ACD слѣдуетъ:

$$\frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC},$$

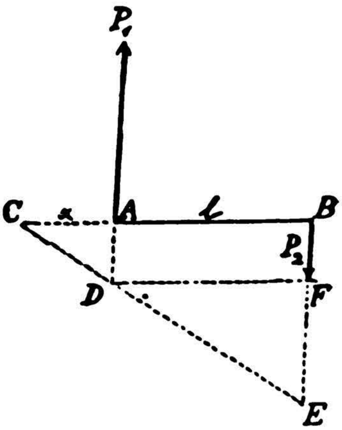
или:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Задача 40. Найти построеніемъ положеніе равнодѣйствующей R двухъ параллельныхъ силъ $P_1$ и $P_2$, неравныхъ по величинѣ и направленныхъ въ противоположныя стороны.

Рѣшеніе (фиг. 34). Проведя прямую AB и отложивъ $AD = P_2$ и $BE = P_1$, проводятъ прямую ED, которая пересѣчетъ продолженіе линіи AB въ точкѣ C. Положеніе параллельной равнодѣйствующей R силъ $P_1$ и $P_2$ опредѣлится отъ условія, что она должна пройти черезъ точку C.

Фиг. 34.




Для доказательства слѣдуетъ провести на фиг. 34 вспомогательную линію DF ∥ AB и примѣнить уравненіе 31), стр. 41.

Задача 41. Двѣ параллельныя и направленныя въ одну сторону силы $P_1 = 20$ килогр. и $P_2 = 50$ килогр. дѣйствуютъ на двѣ неизмѣнно связанныя между собою точки A и B, находящіяся на разстояніи 2,1 метр. Найти величину равнодѣйствующей R и отрѣзки $l_1$ и $l_2$, на которые она дѣлитъ линію AB.

Рѣшеніе.

$$R = P_1 + P_2 = 20 + 50 = 70 \text{ килогр.}$$

По уравненію 28), стр. 39:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{20}{50} = 0{,}4,$$

или:

$$l_2 = 0{,}4\ l.$$

Кромѣ того:

$$l_1 + l_2 = 2{,}1 \text{ метр.},$$

послѣ подстановки:

$$l_1 + 0{,}4\ l_1 = 2{,}1 \text{ метр.},$$

откуда:

$$l_1 = \frac{2{,}1}{1{,}4} = 1{,}5 \text{ метр.},$$

а:

$$l_2 = 2{,}1 - l_1 = 2{,}1 - 1{,}5 = 0{,}6 \text{ метр.}$$

**Задача 42.** Сила $P = 16$ килогр. дѣйствуетъ на плечо $l = 1{,}2$ метр. Найти величину силы $P_1$, которая, дѣйствуя на плечо $l_1 = 0{,}8$ метр., имѣетъ тотъ же самый моментъ вращенія.

Рѣшеніе:

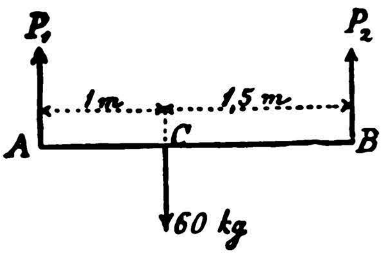
$$M = P_1 l_1 = Pl,$$

слѣдовательно:

$$P_1 = \frac{Pl}{l_1} = \frac{16 \,.\, 1{,}2}{0{,}8} = 24 \text{ килогр.}$$

**Задача 43.** Горизонтальный брусъ AB, къ точкѣ C котораго приложенъ грузъ $Q = 60$ килогр., опирается своими концами на опоры. Найти величину давленій $P_1$ и $P_2$ въ точкахъ A и B, если $AC = 1$ метру, $CB = 1{,}5$ метр., и если предположить брусъ невѣсомымъ.

Фиг. 35.




Рѣшеніе (фиг. 35). Если составить уравненіе моментовъ относительно точки вращенія B, то сила $P_2$ не войдетъ, такъ какъ плечо ея будетъ равно нулю. Въ такомъ случаѣ:

$$P_1 \,.\, 2{,}5 - 60 \,.\, 1{,}5 = 0,$$

откуда:

$$P_1 = \frac{60 \,.\, 1{,}5}{2{,}5} = 36 \text{ килогр.}$$

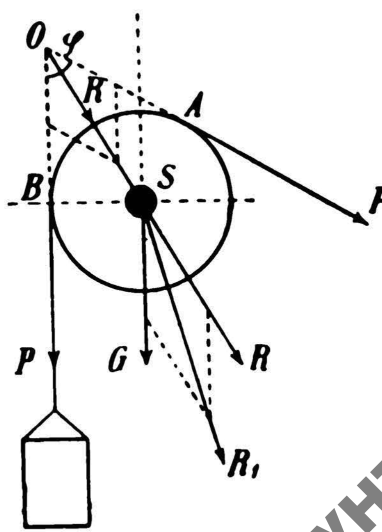
Уравненіе моментовъ относительно точки вращенія A дастъ:

$$60 \,.\, 1 - P_2 \,.\, 2{,}5 - 0,$$

откуда:

$$P_2 - \frac{60 \,.\, 1}{2{,}5} = 24 \text{ килогр.}$$

Фиг. 36.




**Задача 44.** Направленіе тяги у барабана подъемнаго каната образуетъ уголъ $\varphi = 60^0$ (фиг. 36). Поднимаемый грузъ (вмѣстѣ съ клѣтью и вѣсомъ каната) $P = 4000$ килогр. Найти величину равнодѣйствующей R, изгибающей ось канатнаго барабана*).

Рѣшеніе. Обѣ силы P, приложенныя въ точкахъ A и B по правилу, приведенному на стр. 38, сложатся въ точкѣ O.

Тогда:

$$R^2 = P^2 + P^2 - 2P^2 \cos{(180 - \varphi)}$$

*) Относительно расчета осей на изгибъ см. «Лауэнштейнъ. Сопротивленіе матеріаловъ». Задача 49.

или:

$$R = P \,.\, \sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)} =$$

$$= 4000 \,.\, \sqrt{2\,(1 + 0{,}5)} = 6928 \text{ килогр.}$$

Принявъ во вниманіе собственный вѣсъ G барабана и оси, придется равнодѣйствующую R въ центрѣ тяжести S сложить еще съ силой G въ равнодѣйствующую $R_1$.

## § 9.

## Центръ тяжести.

Каждое тѣло можно разсматривать какъ состоящее изъ отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ или частицъ массы, совокупность которыхъ и образуетъ всю массу тѣла. Вѣса отдѣльныхъ матеріальныхъ частицъ суть силы, направленныя къ центру земли; но эти силы вслѣдствіе незначительной величины разсматриваемыхъ вообще тѣлъ въ сравненіи съ величиною земного радіуса (въ среднемъ = 6 370 000 м.), могутъ быть приняты за параллельныя силы, направленныя по вертикали внизъ. Равнодѣйствующая вѣса всѣхъ матеріальныхъ частицъ, поэтому, выразится равнодѣйствующей параллельныхъ силъ (*силъ тяжести*), направленныхъ въ одну и ту же сторону, и будетъ равна суммѣ ихъ, т. е. вѣсу всего тѣла. Какое бы положеніе тѣло ни занимало, эта равнодѣйствующая всегда пройдетъ черезъ одну и ту же точку, называемую *центромъ тяжести*.

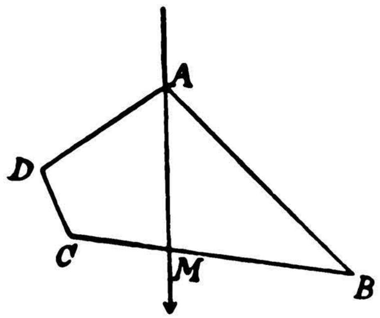
Слѣдовательно, *центромъ тяжести* называется такая точка, въ которой можно себѣ представить сосредоточенной всю массу тѣла, и если эту точку подпереть (или подвѣсить), то тѣло въ любомъ положеніи будетъ въ состояніи равновѣсія.

Если тѣло укрѣпить въ другой точкѣ, то равновѣсіе будетъ имѣть мѣсто только въ томъ случаѣ, если точка опоры съ центромъ тяжести будетъ лежать на одной вертикали. Если тѣло вывести изъ этого положенія и предоставить самому себѣ, то тѣло будетъ вращаться около точки опоры до тѣхъ поръ, пока центръ тяжести снова не будетъ лежать на вертикали и ниже точки точки опоры.

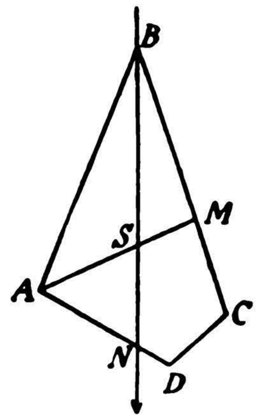
На этомъ основано опытное опредѣленіе центра тяжести тѣлъ неопредѣленной формы или такихъ тѣлъ, которыя состоятъ изъ массы неодинаковой плотности. Подвергаемое опыту тѣло, напр. тонкую пластинку ABCD, подвѣшиваютъ на нити за какую-нибудь точку A (фиг. 37). Центръ тяжести S, послѣ того какъ тѣло придетъ въ состояніе покоя, будетъ лежать на вертикали AM, проведенной черезъ точку A, т. е. на продолженіи нити.

Если затѣмъ подвѣсить тѣло за другую точку B (фиг. 38), то центръ тяжести тоже будетъ находиться на вертикали BN, проведенной черезъ точку B, такъ что дѣйствительное его мѣсто будетъ находиться въ точкѣ пересѣченія S прямыхъ AM и BN.

Фиг. 37.




Фиг. 38.




Линіи, на которыхъ находится центръ тяжести, какъ, напр., прямая AM или BN, называются **линіями центра тяжести.**

Для опредѣленія центра тяжести тѣла вычисленіемъ можно пользоваться уравненіемъ 29) (стр. 40), подставивъ вмѣсто R — вѣсъ всего тѣла, вмѣсто $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . — вѣса отдѣльныхъ матеріальныхъ частицъ его. Обозначивъ черезъ $m_1$, $m_2$, $m_3$ . . . массы элементовъ тѣла, черезъ M — сумму ихъ, черезъ $x_1$, $x_2$, $x_3$ . . . — кратчайшія разстоянія до какой-нибудь плоскости, черезъ $x_0$—кратчайшее разстояніе центра тяжести до той же плоскости, согласно уравненію 15) (стр. 17), найдемъ:

$$R = Mg$$
$$P_1 = m_1 g$$
$$P_2 = m_2 g$$
$$P_3 = m_3 g$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

тогда уравненіе 29) приметъ такой видъ:

$$Mgx_0 = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \ldots$$

или:

$$Mx_0 = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \quad \ldots \ldots \quad 33)$$

Вообще произведеніе mx, т. е. произведеніе изъ массы элемента на кратчайшее разстояніе его до какой-нибудь плоскости, можно назвать **статическимъ моментомъ** матеріальной частицы относительно этой плоскости. Если сумму всѣхъ этихъ произведеній обозначить черезъ $\Sigma(mx)$, то изъ уравненія 33) слѣдуетъ:

$$x_0 = \frac{\Sigma(mx)}{M} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 34)$$

т. е. **разстояніе центра тяжести тѣла отъ какой-нибудь плоскости равно суммѣ статическихъ моментовъ отдѣльныхъ матеріальныхъ частицъ его, дѣленной на массу всего тѣла.**

У однороднаго (т. е. одинаковой плотности) тѣла части объемовъ относятся между собою, какъ соотвѣтствующія частицы массъ. Поэтому если $V$—объемъ всего тѣла, $v_1$, $v_2$, $v_3$ . . . —объемы отдѣльныхъ его частицъ, то для однороднаго тѣла, на основаніи уравненія 33), можно написать:

$$Vx_0 = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 + \ldots$$

Если однородное тѣло, у котораго части объемовъ относятся, какъ части соотвѣтствующихъ площадей, имѣетъ форму пластинки одинаковой толщины, то, называя черезъ $F$—площадь всего тѣла, черезъ $f_1$, $f_2$, $f_3$ . . . площади отдѣльныхъ его частей, изъ послѣдняго равенства получаемъ:

$$Fx_0 = f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \quad \ldots\ldots \quad 35)$$

Хотя раньше мы установили понятіе о статическомъ моментѣ, какъ о произведеніи изъ *силы на плечо*, однако можно также ввести понятіе о *статическомъ моментѣ площади*, если площадь разсматривать содержащей равномѣрно распредѣленную массу, а вѣсъ ея—приложеннымъ къ центру тяжести,—въ такомъ случаѣ уравненіе 35) можно прочитать такъ:

*Статическій моментъ всей площади равенъ алгебраической суммѣ статическихъ моментовъ отдѣльныхъ площадокъ относительно данной оси.*

Уравненіемъ 35) можно пользоваться для опредѣленія положенія центра тяжести плоской фигуры, если представить ее состоящей изъ отдѣльныхъ частей съ извѣстными центрами тяжести.

Если данная ось проходитъ черезъ центръ тяжести, то $x_0 = 0$; слѣдовательно, по уравненію 35):

$$f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots = 0 \quad \ldots\ldots \quad 36)$$

т. е. *алгебраическая сумма статическихъ моментовъ отдѣльныхъ площадокъ относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести, равна нулю.*

Поэтому, если тѣло имѣетъ ось симметріи или плоскость симметріи, то центръ тяжести тѣла всегда находится на этой оси или плоскости.

Если тѣло, центръ тяжести котораго надо найти, представляетъ собою линію, то подъ этимъ разумѣютъ безпрерывный рядъ матеріальныхъ точекъ или линію съ равномѣрно распредѣленною по всей длинѣ массою (такой, напр., случай представляетъ тонкая проволока).

## § 10.

# Опредѣленіе центра тяжести линій, площадей, объемовъ.

## 1. Центры тяжести линій.

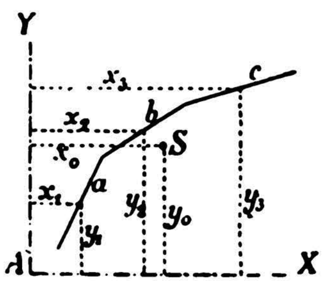
Прямая линія.

Центръ тяжести (матеріальной) прямой линіи лежитъ въ точкѣ, дѣлящей ее пополамъ.

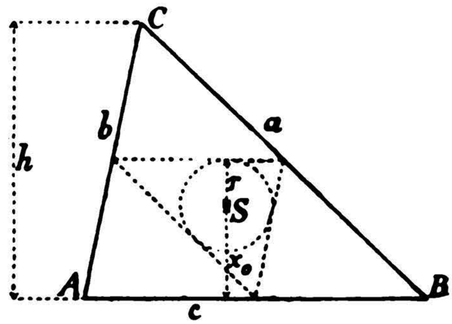
Ломаная линія (фиг. 39).

Пусть отдѣльныя части ломаной линіи будутъ a, b, c; разстоянія ихъ центровъ тяжести отъ оси AY — $x_1, x_2, x_3$; отъ оси AX — $y_1, y_2, y_3$.

Фиг. 39.




Фиг. 40.




Если обозначить разстоянія искомаго центра тяжести S отъ тѣхъ же осей черезъ $x_0, y_0$, то, пользуясь уравненіемъ 35), можно написать:

$$(a + b + c)\, x_0 = a x_1 + b x_2 + c x_3$$
$$(a + b + c)\, y_0 = a y_1 + b y_2 + c y_3$$

отсюда:

$$x_0 = \frac{a x_1 + b x_2 + c x_3}{a + b + c}$$
$$y_0 = \frac{a y_1 + b y_2 + c y_3}{a + b + c}$$

Периметръ треугольника (фиг. 40).

Пусть стороны треугольника ABC будутъ a, b и c, высота же его — h. Если обозначимъ разстояніе искомаго центра тяжести S отъ оси AB черезъ $x_0$, то, по отношенію къ этой оси, найдемъ:

$$(a + b + c)\, x_0 = a \cdot \frac{h}{2} + b \cdot \frac{h}{2}$$

слѣдовательно:

$$x_0 = \frac{a + b}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2}$$

Разстоянiе r центра тяжести S отъ линiи, соединяющей центры тяжести сторонъ треугольника a и b, будетъ равно:

$$r = \frac{h}{2} - x_0 = \frac{h}{2}\left(1 - \frac{a+b}{a+b+c}\right)$$

или:

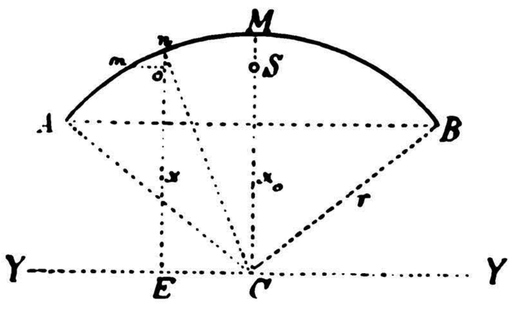
$$r = \frac{hc}{2} \cdot \frac{1}{a+b+c}$$

Слѣдовательно, разстоянiе r равно площади треугольника ABC, дѣленной на периметръ его.

Относительно осей AC и BC получимъ для r тѣ же значенiя, — откуда слѣдуетъ, что центръ тяжести периметра треугольника лежитъ въ центрѣ круга, вписаннаго въ треугольникъ, составленный изъ линiй, соединяющихъ центры тяжести отдѣльныхъ сторонъ треугольника ABC.

Поэтому, для нахожденiя центра тяжести периметра треугольника ABC, надо соединить средины его сторонъ a, b и c прямыми линiями и раздѣлить полученные углы внутренняго треугольника пополамъ. Точка пересѣченiя линiй, дѣлящихъ углы внутренняго треугольника пополамъ (по извѣстной геометрической теоремѣ), будетъ центромъ вписаннаго въ него круга и одновременно съ этимъ центромъ тяжести S периметра треугольника ABC.

Фиг. 41.




## Дуга круга (фиг. 41).

Центръ тяжести S дуги круга AB лежитъ на радiусѣ CM = r, дѣлящемъ дугу пополамъ, и на разстоянiи $x_0$ отъ центра круга C, которое можетъ быть найдено слѣдующимъ образомъ:

Если вообразить дугу AB раздѣленной на очень большое число очень малыхъ частей и статическiе моменты ихъ отнести къ прямой YY, проведенной черезъ точку C параллельно хордѣ AB, то, по уравненiю 35), сумма всѣхъ этихъ статическихъ моментовъ должна равняться статическому моменту всей дуги.

Если mn (фиг. 41) такая очень малая часть дуги и En = x — ея разстоянiе отъ YY, то статическiй моментъ ея будетъ равенъ mn . x, а сумма статическихъ моментовъ всѣхъ частей дуги $= \Sigma$ (mn . x). Если проведемъ mo ∥ AB и линiю Cn, то изъ подобiя треугольниковъ mno и CnE можно написать:

$$\frac{mn}{mo} = \frac{Cn}{En} = \frac{r}{x}$$

слѣдовательно:

$$mn \cdot x = mo \cdot r$$

Такая же зависимость существуетъ для каждой другой малой части дуги; поэтому:

$$\Sigma\,(mn \cdot x) = \Sigma\,(mo \cdot r) = r\,\Sigma\,(mo)$$

а такъ какъ:

$$\Sigma\,(mo) = \overline{AB}$$

то:

$$\Sigma\,(mn \cdot x) = r \cdot \overline{AB}$$

Такъ какъ статическій моментъ всей дуги равенъ $\widehat{AB} \cdot x_0$, то:

$$\widehat{AB} \cdot x_0 = r \cdot \overline{AB}$$

откуда слѣдуетъ, если обозначить длину дуги $\widehat{AB}$ черезъ b, а длину хорды $\overline{AB}$ черезъ s, что:

$$x_0 = \frac{rs}{b} \qquad \ldots \quad 37)$$

Для полукруга $s = 2r$ и $b = r\pi$; поэтому:

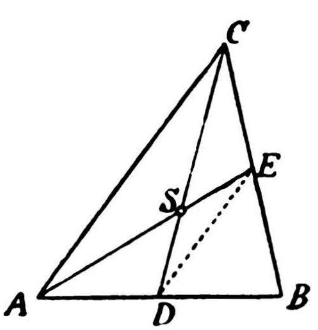
$$x_0 = \frac{2r}{\pi} \qquad \ldots \quad 38)$$

## 2. Центры тяжести площадей.

Треугольникъ.

Центръ тяжести площади треугольника ABC (фиг. 42) лежитъ на прямой CD, соединяющей вершину C треугольника съ срединой D противолежащей стороны AB.

Фиг. 42.




Если представимъ треугольникъ ABC раздѣленнымъ на очень узкія полосы линіями, параллельными основанію AB, то центры тяжести этихъ полосъ будутъ лежать на средней линіи CD.

На томъ же основаніи центръ тяжести упомянутаго треугольника будетъ лежать и на линіи AE, соединяющей вершину A съ серединою стороны BC, — слѣдовательно, онъ долженъ находиться въ точкѣ пересѣченія S двухъ линій AE и CD.

Изъ подобія треугольниковъ DES и ACS слѣдуетъ:

$$DS : SC = DE : AC$$

**А такъ какъ:**

$$DE = \frac{1}{2} AC$$

**то:**

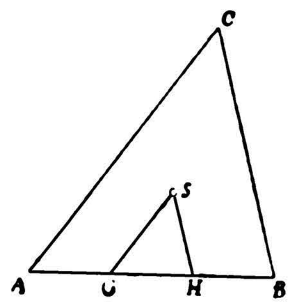
$$DS = \frac{1}{2} SC = \frac{1}{3} DC$$

**Итакъ, центръ тяжести площади треугольника лежитъ на $^1/_3$ линіи, соединяющей вершину съ срединой противоположной стороны, ближе къ основанію.**

**На основаніи вышеприведеннаго доказательства центръ тяжести треугольника можно также найти, какъ точку пересѣченія линій, параллельныхъ сторонамъ треугольника и проведенныхъ на высотѣ нижней трети. А такъ какъ послѣднія линіи дѣлятъ стороны треугольника на три равныя части, то изъ этого вытекаетъ слѣдующая теорема:**

**Линіи, проведенныя изъ точекъ дѣленія любой изъ сторонъ треугольника на три части параллельно двумъ другимъ сторонамъ, пересѣкутся въ центрѣ тяжести треугольника S (фиг. 43).**

**Фиг. 43.**



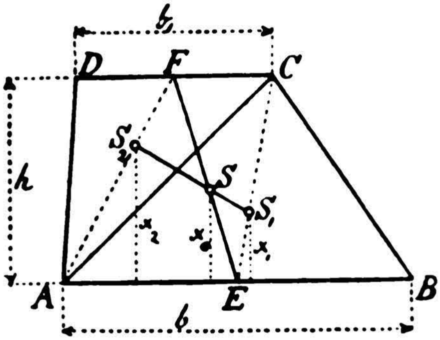

Параллелограммъ.

**Діагонали параллелограмма представляютъ собою линіи центровъ тяжести, такъ какъ каждая изъ нихъ дѣлитъ параллелограммъ на два равныхъ треугольника. Центръ тяжести параллелограмма совпадаетъ съ точкой пересѣченія діагоналей.**

Трапеція.

**Центръ тяжести трапеціи ABCD (фиг. 44) лежитъ на прямой EF, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ AB и CD. Другую линію центра тяжести получимъ, соединивъ центры тяжести $S_1$ и $S_2$ двухъ треугольниковъ ABC и ACD, на которые дѣлитъ трапецію діагональ AC. Центръ тяжести трапеціи S лежитъ въ точкѣ пересѣченія линій центровъ тяжести $S_1S_2$ и EF.**

**Фиг. 44.**




**Если обозначимъ площадь треугольника ABC черезъ $F_1$, треугольника ACD — черезъ $F_2$, а черезъ**

$x_0$, $x_1$ и $x_2$—кратчайшія разстоянія центровъ тяжести S, $S_1$ и $S_2$ отъ оси AB, то, по уравненію 35) (стр. 47), получимъ:

$$x_0 (F_1 + F_2) = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

Если сюда подставить значенія для:

$$F_1 = \frac{bh}{2} \qquad F_2 = \frac{b_1 h}{2}$$

$$x_1 = {}^1\!/_3\, h \qquad x_2 = {}^2\!/_3\, h$$

то:

$$y_c = \frac{h}{3} \cdot \frac{b + 2b_1}{b + b_1}$$

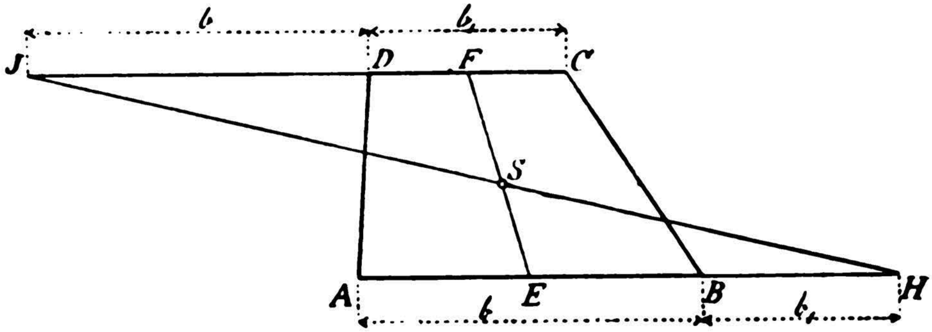
или:

$$\frac{x_0}{h} = \frac{ES}{EF} = \frac{b + 2b_1}{3 (b + b_1)} \quad . \qquad 39)$$

Отсюда вытекаетъ второй (болѣе простой) способъ построенія центра тяжести S.

Продолжимъ (фиг. 45) каждую изъ параллельныхъ сторонъ AB и CD параллелограмма въ различныя стороны на длину другой стороны,

Фиг. 45.




т. е. откладываемъ BH = $b_1$ и DJ = b. Тогда точка пересѣченія S средней линіи EF съ линіей, соединяющей точки J и H, и будетъ центромъ тяжести трапеціи. Дѣйствительно:

$$\frac{ES}{FS} = \frac{EH}{FJ} = \frac{\frac{b}{2} + b_1}{\frac{b_1}{2} + b}$$

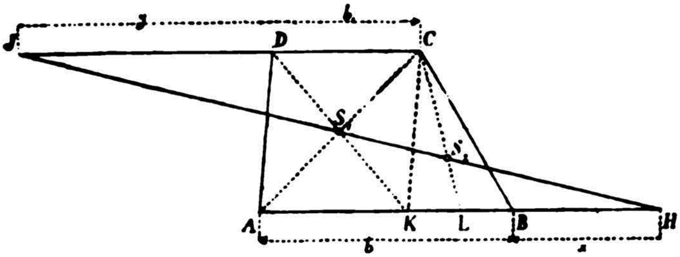
откуда, сравнивая съ уравненіемъ 39), найдемъ:

$$\frac{ES}{EF} = \frac{ES}{ES + FS} = \frac{\frac{b}{2} + b_1}{\frac{b}{2} + b_1 + \frac{b_1}{2} + b} = \frac{b + 2b_1}{3 (b + b_1)}$$

Построеніе фиг. 45 можно доказать еще иначе слѣдующимъ образомъ:

Раздѣлимъ трапецію ABCD (фиг. 46) прямой CK ‖ AD на параллелограммъ AKCD и треугольникъ KCB. Найдя центры тяжести $S_1$ и $S_2$ этихъ фигуръ извѣстнымъ путемъ, получимъ, что центръ тяжести трапеціи долженъ лежать на линіи $S_1 S_2$, соединяющей эти точки. Продолжимъ прямую $S_1S_2$ въ обѣ стороны до точекъ J и H пересѣченія съ продолженіями параллельныхъ сторонъ трапеціи AB и CD.

Фиг. 46.




Пусть полученные неизвѣстные отрѣзки будутъ:

$$BH = x$$
$$DJ = y$$

Изъ подобія треугольниковъ $LHS_2$ и $CJS_2$, стороны которыхъ $LS_2$ и $CS_2$, относятся между собою какъ $1:2$ (такъ какъ $LS_2 = {}^1/_3\,LC$) слѣдуетъ:

$$CJ = 2\,HL$$

или:

$$b_1 + y = 2\left(\frac{b - b_1}{2} + x\right)$$

Но вслѣдствіе равенстра треугольниковъ $AHS_1$ и $CJS_1$ имѣемъ:

$$b + x = b_1 + y$$

слѣдовательно:

$$b + x = 2\left(\frac{b - b_1}{2} + x\right)$$

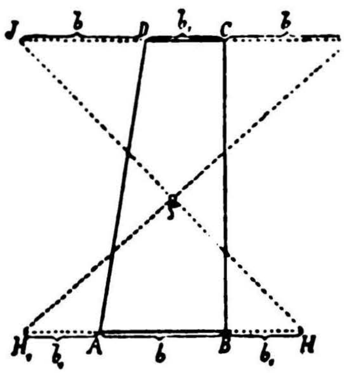
откуда:

$$x = b_1 \text{ и } y = b \text{ (какъ на фиг. 45)}.$$

Въ относительно высокихъ и узкихъ трапеціяхъ пересѣченіе средней линіи EF съ прямой HJ (фиг. 45) даетъ слишкомъ острый уголъ, что невыгодно отражается на точности нахожденія центра тяжести. Въ такихъ случаяхъ является болѣе соотвѣтственнымъ построеніе, приведенное на фиг. 47, гдѣ прямыя HJ и $H_1J_1$ пересѣкаются подъ болѣе тупымъ угломъ. Само собою разумѣется, что проводить среднюю линію здѣсь нѣтъ необходимости.

Приведемъ еще другіе простые способы нахожденія центра тяжести трапеціи, предлагаемые проф. Робертомъ Ландъ *), которые имѣютъ то преимущество предъ фиг. 45 и 47, что не занимаютъ такъ много мѣста.

Фиг. 47.




1. Проведемъ (фиг. 48) діагональ AC и изъ точки D линію DG ∥ AC до пересѣченія въ точкѣ G съ продолженіемъ средней линіи EF, а затѣмъ отложимъ $ES = \frac{1}{3} EG$. Точка S и будетъ искомый центръ тяжести.

Доказательство.

Если $S_1$ и $S_2$ (фиг. 49) центры тяжести треугольниковъ ABD и BCD, то вслѣдствіе того, что $MS_1 = \frac{1}{3}$ MA и $MS_2 = \frac{1}{3}$ MC, имѣемъ:

$$S_1S_2 \parallel AC$$

слѣдовательно:

$$S_1S \parallel AC \parallel DG$$

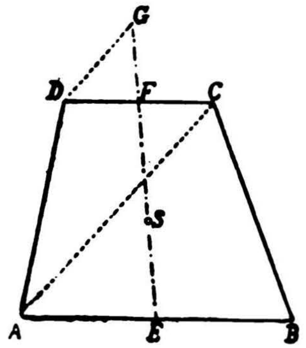
А такъ какъ:

$$ES_1 = \frac{1}{3} ED$$

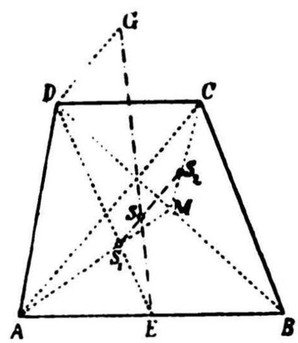
то:

$$ES = \frac{1}{3} EG$$

Фиг. 48.




Фиг. 49.




2. Такъ какъ только что было показано, что $S_1S_2 \parallel AC$, то продолженіе $S_1 S_2$ въ обѣ стороны отсѣчетъ отъ параллельныхъ сторонъ трапеціи (фиг. 50) отъ точекъ A и C равные отрѣзки:

$$x = AH = CJ$$

*) Zentralbl. d. Bauverw. 1894. Стр. 192 и 458.

а такъ какъ:

$$S_1D \parallel 2S_1E$$

то слѣдовательно:

$$DJ = 2\,EH$$

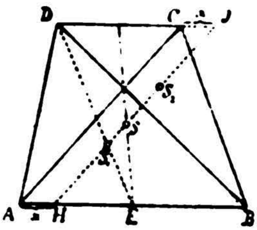
или:

$$b_1 + x = 2\left(\frac{b}{2} - x\right) = b - 2x$$

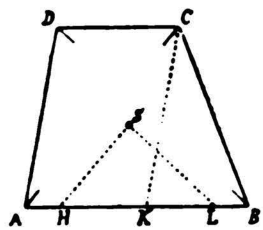
откуда получимъ, что:

$$x = {}^1\!/_3\,(b - b_1)$$

Фиг. 50.




Фиг. 51.




Линія HJ, проведенная на разстояніи x отъ угла A параллельно діагонали AC, пройдетъ черезъ центръ тяжести трапеціи. А такъ какъ такую же линію можно провести параллельно другой діагонали BD, отсюда слѣдуетъ теорема:

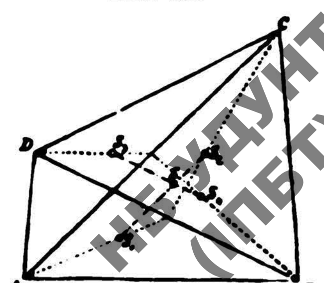
Линіи, проведенныя на разстояніи $x = {}^1\!/_3\,(b - b_1)$ отъ концовъ большей изъ параллельныхъ сторонъ трапеціи параллельно діагоналямъ трапеціи, пересѣкутся въ центрѣ тяжести ея S.

Для построенія (фиг. 51) проводимъ CK ∥ AD, откладываемъ $AH = BL = {}^1\!/_3\,BK$ и проводимъ черезъ точки H и L линіи, параллельныя діагоналямъ AC и BD.

Пересѣченія ихъ укажетъ мѣсто центра тяжести трапеціи. (При этомъ нѣтъ необходимости проводить цѣликомъ діагоналей; достаточно показать ихъ направленія при вершинахъ трапеціи).

## Неправильный четыреугольникъ.

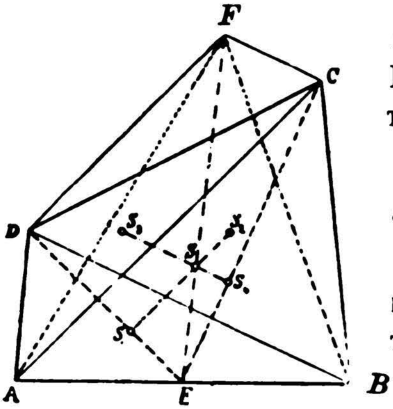
Фиг. 52.




Дѣлимъ четыреугольникъ ABCD (фиг. 52) діагональю BD на два треугольника ABD и BCD и опредѣляемъ ихъ центры тяжести $S_1$ и $S_2$. Линія $S_1$ $S_2$, соединяющая эти центры тяжести, будетъ въ этомъ случаѣ одной изъ линій, проходящихъ черезъ центръ тяжести четыреугольника. Вторую линію, проходящую черезъ центръ тяжести четыреугольника, получимъ, если діагональю AC раздѣлимъ еще разъ четыреугольникъ на треугольники ACD и ABC и соединимъ центры тяжести ихъ $S_3$ и $S_4$ между собою линіею $S_3S_4$. Точка пересѣченія линій $S_1S_2$ и $S_3S_4$ и укажетъ мѣсто центра тяжести S четыреугольника ABCD.

Если проведемъ (фиг. 53):

Фиг. 53.




$$DF \parallel AC \text{ и } CF \parallel BD$$

и соединимъ точку пересѣченія этихъ линій F въ срединою E стороны AB, то вслѣдствіе того, что:

$$ES_1 = \tfrac{1}{3}\, ED \text{ и } ES_4 = \tfrac{1}{3}\, EC$$

а также:

$$S_1S_2 \parallel DF \text{ и } S_3S_4 \parallel CF$$

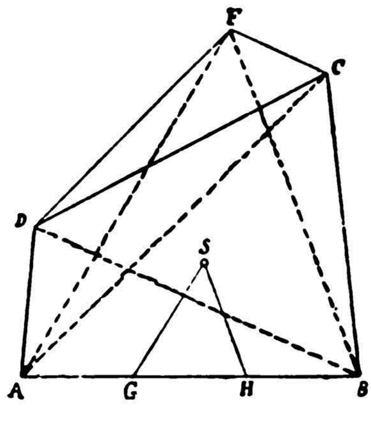
прямая EF пройдетъ черезъ точку S, и кромѣ того получимъ:

$$ES = \tfrac{1}{3}\, EF$$

Поэтому точка S одновременно будетъ центромъ тяжести и для треугольника AFB.

На этомъ основанъ способъ нахожденія центра тяжести S четыреугольника, данный проф. P. Ландъ *). Раздѣливъ сторону AB (фиг. 54) на три равныя части, проводимъ $CF \parallel BD$ и $DF \parallel AC$, затѣмъ $GS \parallel AF$ и $HS \parallel BF$.

Фиг. 54.




Само собою разумѣется, что нѣтъ надобности проводить, линіи, показанныя на фиг. 54 пунктиромъ, а достаточно указать только ихъ направленія изъ вершинъ четыреугольника.

Другой часто употребляемый способъ нахожденія центра тяжести четыреугольника состоитъ въ слѣдующемъ:

Раздѣлимъ четыреугольникъ ABCD (фиг. 55) діагональю AC на треугольники ACD и ABC и опредѣлимъ центры тяжести $S_1$ и $S_2$. Пусть точка пересѣченія діагонали AC съ линіей $S_1S_2$ будетъ E. Если затѣмъ положимъ $S_2S = S_1E$, то S и будетъ центромъ тяжести четыреугольника.

Для доказательства необходимо, чтобы отрѣзки $S_1S$ и $S_2S$ были обратно пропорціональны площадямъ соотвѣтствующихъ треугольниковъ.

---

*) Zeitschrift des Hannoverschen Arch.- und Ing.-Vereins. 1895 г. Стр. 451.

Согласно принятому нами предположенію, имѣемъ:

$$S_1S : S_2S = S_2E : S_1E.$$

Если проведемъ вспомогательную линію BD (которая будетъ параллельна $S_1S_2$, такъ какъ $MS_1 = {}^1/_3$ MD, а $MS_2 = {}^1/_3$ MB) и продолжимъ MS до точки пересѣченія F съ линіей DB, то:

$$S_2E : S_1E = BH : DH$$

А такъ какъ:

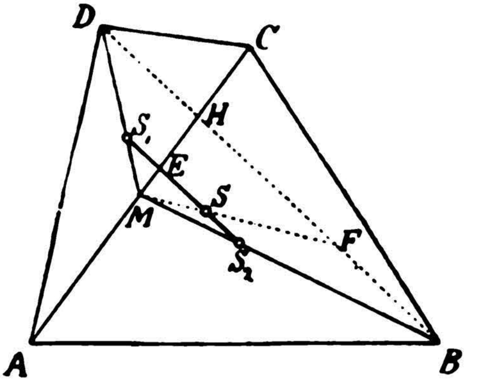
$$BH : DH = \triangle\, ABC : \triangle\, ACD$$

то и:

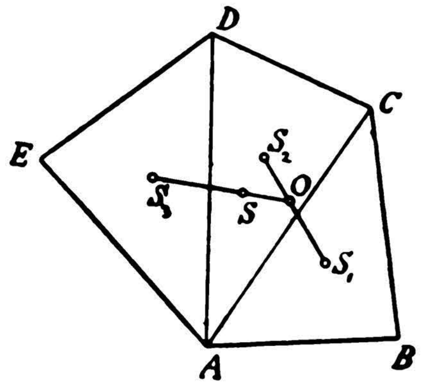
$$S_1S : S_2S = \triangle\, ABC : \triangle\, ACD$$

что и требовалось доказать.

Фиг. 55.




Фиг. 56.




Многоугольникъ.

Чтобы найти центръ тяжести произвольнаго неправильнаго многоугольника, надо разбить его на отдѣльные треугольники, въ центрахъ тяжести которыхъ можемъ вообразить приложенными, какъ силы, величины площадей ихъ, пропорціональныя ихъ вѣсамъ. Точка приложенія равнодѣйствующихъ этихъ силъ и будетъ центромъ тяжести многоугольника.

Если, напримѣръ, $S_1$, $S_2$ и $S_3$ центры тяжести треугольниковъ ABC, ACD, ADE, на которые разбивается пятиугольникъ ABCDE (фиг. 56), то соединяемъ точки $S_1$ и $S_2$ линіею $S_1\,S_2$ и дѣлимъ эту линію въ O такъ, чтобы:

$$S_1O : S_2O = \triangle\, ACD : \triangle\, ABC$$

Далѣе, соединяя O и $S_3$ линіею $OS_3$, дѣлимъ и эту послѣднюю въ точкѣ S въ отношеніи:

$$OS : S_3S = \triangle\, ADE : (\triangle\, ABC + \triangle\, ACD)$$

Тогда S и будетъ искомый центръ тяжести пятиугольника.

Центръ тяжести правильнаго многоугольника совпадаетъ съ центромъ вписаннаго или описаннаго круга.

Круговой секторъ.

Центръ тяжести лежитъ на линіи, дѣлящій центральный уголъ ACB пополамъ (фиг. 57).

Если вообразимъ секторъ, радіуса r, раздѣленнымъ помощью радіальныхъ линій на очень большое число малыхъ частей, то эти части можно разсматривать какъ треугольники, центры тяжести которыхъ лежатъ на $^2/_3$r отъ центра круга C. Центръ тяжести S кругового сектора совпадаетъ поэтому съ центромъ тяжести дуги круга $A_1B_1$, описанной радіусомъ $= {}^2/_3$ r.

А такъ какъ:

$$\overset{\frown}{A_1B_1} = {}^2/_3\ \overset{\frown}{AB} = {}^2/_3\ b$$

и

$$\overline{A_1B_1} = {}^2/_3\ \overline{AB} = {}^2/_3\ s$$

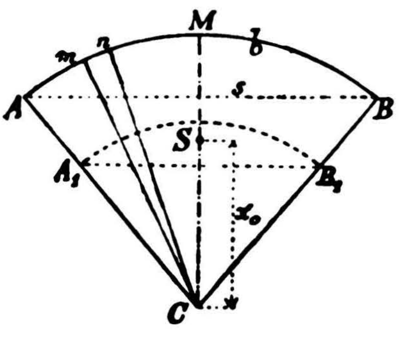
то, по уравненію 37) (стр. 50):

$$x_0 = \frac{{}^2/_3\,r\ .\ {}^2/_3\,s}{{}^2/_3\ b} = \frac{2}{3}\frac{rs}{b} \quad \ldots\ldots\ 40)$$

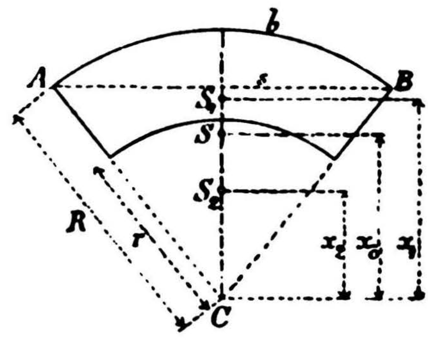
Для полукруга s = 2r и b = rπ, слѣдовательно:

$$x_0 = \frac{4\,r}{3\,\pi} \quad \ldots\ldots\ 41)$$

Фиг. 57.




Фиг. 58.




Часть кругового кольца (фиг. 58).

Обозначимъ черезъ:

F площ. полн. кругового сектора радіуса R
$F_2$ „ „ „ „ „ r
$F_1$ „ части „ кольца;

Если $x_0$, $x_2$ и $x_1$ суть соотвѣтствующія разстоянія центровъ тяжести S, $S_2$ и $S_1$ отъ центра круга C, то по уравненію 35) (стр. 47):

$$Fx_0 = F_1x_1 + F_2x_2$$

откуда:

$$x_1 = \frac{Fx_0 - F_2x_2}{F_1}$$

Теперь имѣемъ:

$$F = \frac{bR}{2}\ ;\ F_2 = \frac{br^2}{2R}\ ;\ F_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R}$$

и по уравненію 40):

$$x_0 = \frac{2}{3}\ \frac{Rs}{b}\ ;\ x_2 = \frac{2}{3}\ \frac{rs}{b}$$

Подставляя эти значенія, найдемъ искомое разстояніе центра тяжести отъ центра круга C:

$$x_1 = \frac{\frac{bR}{2} \cdot \frac{2}{3}\ \frac{Rs}{b} - \frac{br^2}{2R} \cdot \frac{2}{3}\ \frac{rs}{b}}{\frac{b}{2} \cdot \frac{R^2 - r^2}{R}}$$

или:

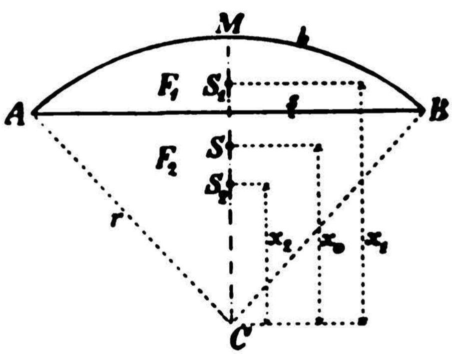
$$x_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b}\ \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ \ 42)$$

Для половины кругового кольца, при $s = 2R$ и $b = R\pi$, получимъ:

$$x_1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \qquad 43)$$

Круговой сегментъ.

Фиг. 59.




Если раздѣлимъ круговой секторъ $CAMB = F$ (фиг. 59) хордой $AB = s$ на сегментъ $AMB = F_1$ и треугольникъ $ABC = F_2$, то разстояніе центра тяжести $x_1$ сегмента AMB отъ точки C точно такъ же опредѣлится изъ уравненія 35) (стр. 47):

$$Fx_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

слѣдовательно:

$$x_1 = \frac{Fx_0 - F_2x_2}{F_1}$$

Подставляя въ это равенство значенія величинъ:

$$F = \frac{br}{2}\ ; \qquad F_2 = \frac{s}{2}\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$x_0 = \frac{2}{3}\ \frac{rs}{b}\ ; \qquad x_2 = \frac{2}{3}\sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

гдѣ b выражаетъ длину дуги AB, найдемъ:

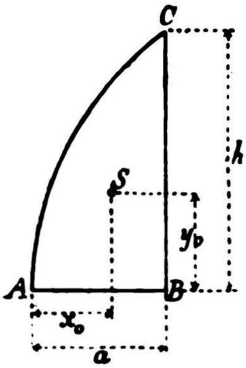
$$x_1 = \frac{s^3}{12F_1} \quad . \quad . \quad . \qquad 44)$$

Для полукруга $s = 2r$ и $F_1 = \frac{r^2\pi}{2}$. Подставляя эти значенія, найдемъ выраженіе, одинаковое съ уравненіемъ 41):

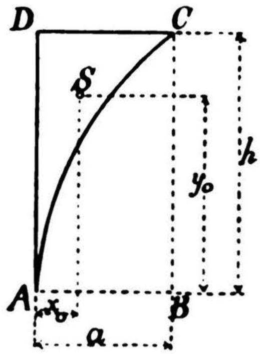
$$x_1 = \frac{4r}{3\pi}$$

Площадь параболы.

Фиг. 60.




Фиг. 61.




Для центра тяжести площади параболы ABC съ вершиною въ A, согласно обозначеніямъ на фиг. 60, имѣемъ:

$$x_0 = {}^3/_5\, a \quad . \quad . \qquad 45)$$

$$y_0 = {}^3/_8\, h \quad . \quad . \qquad 46)$$

Для центра тяжести фигуры ACD, дополняющей площадь парабола ABC до прямоугольника ABCD (фиг. 61), имѣемъ:

$$x_0 = {}^3/_{10}\, a \quad . \quad . \qquad 47)$$

$$y_0 = {}^3/_4\, h \quad . \quad . \qquad 48)$$

Поверхность шарового слоя или шарового сегмента.

Центръ тяжести лежитъ на серединѣ высоты.

Боковая поверхность пирамиды и конуса.

Центръ тяжести лежитъ на линіи, соединяющей центръ тяжести площади основанія съ вершиною и на $^1/_3$ высоты (отъ основанія).

## 3. Центры тяжести объемовъ.

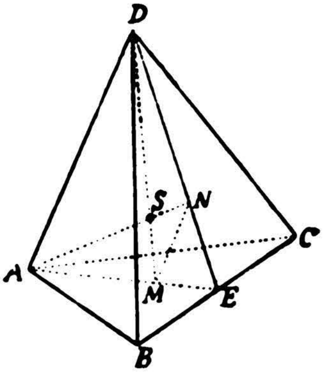
Призма и цилиндръ.

Центръ тяжести лежитъ въ срединѣ линіи, соединяющей центры тяжести основаній.

Пирамида.

Если представимъ себѣ трехгранную пирамиду (фиг. 62) раздѣленной плоскостями, параллельными площади основанія, на очень тонкіе слои, то центры тяжести всѣхъ этихъ слоевъ будутъ лежать на прямой линіи DM, соединяющей центръ тяжести M площади основанія ABC съ вершиною пирамиды D, — слѣдовательно на этой же линіи DM будетъ лежать и центръ тяжести всей пирамиды. Если затѣмъ принять за площадь основанія BCD и за вершину пирамиды A, то, если N представляетъ собою центръ тяжести треугольника BCD, центръ тяжести пирамиды будетъ лежать на линіи AN; слѣдовательно, центръ тяжести пирамиды совпадаетъ съ точкою пересѣченія S прямыхъ DM и AN, лежащихъ въ плоскости ADE.

Фиг. 62.




Проведя вспомогательную линію MN и зная, что:

$$EM = \frac{1}{3} AE$$

и:

$$EN = \frac{1}{3} DE$$

найдемъ, что линія MN параллельна AD, а, слѣдовательно, $\triangle SNM \sim \triangle SAD$.

Отсюда слѣдуетъ:

$$MN = \frac{1}{3} AD$$

а также:

$$MS = \frac{1}{3} SD = \frac{1}{4} MD$$

**Многогранную** пирамиду можно раздѣлить плоскостями, проходящими черезъ вершину и ребра пирамиды, на трехгранныя пирамиды, центры тяжести которыхъ лежатъ на $^1/_4$ высоты, слѣдовательно въ плоскости, параллельной площади основанія. Въ той же самой плоскости лежитъ, стало быть, и центръ тяжести всей пирамиды; слѣдовательно, вообще:

**Центръ тяжести пирамиды лежитъ на прямой, соединяющей центръ тяжести площади основанія съ противолежащей вершиною, и на $^1/_4$ высоты отъ основанія.**

## Конусъ.

Центръ тяжести конуса лежитъ на прямой, соединяющей центръ круга основанія съ вершиною и на $^1/_4$ высоты отъ основанія, какъ у пирамиды.

## Шаровой секторъ.

Разсматривая шаровой секторъ состоящимъ изъ очень большого числа маленькихъ пирамидъ, всѣ вершины которыхъ находятся въ центрѣ шара, а площади основанія — на поверхности шара, можно опредѣлить центръ тяжести шарового сектора, исходя изъ точно такихъ же соображеній, какими мы пользовались при нахожденіи центра тяжести кругового сектора (фиг. 57).

Тогда найдемъ слѣдующее значеніе для разстоянія центра тяжести отъ центра шара:

$$x_0 = {}^3/_8\,(2r - h) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 49)$$

гдѣ r — радіусъ шара, h — высота шарового сектора.

Для полушара $h = r$, слѣдовательно:

$$x_0 = {}^3/_8\, r \quad . \; . \quad 50)$$

Шаровой сегментъ.

Разстояніе центра тяжести $x_0$ отъ центра шара опредѣляется такимъ же способомъ, какъ и разстояніе центра тяжести кругового сегмента (фиг. 59), при чемъ шаровой сегментъ разсматриваютъ какъ разность между шаровымъ секторомъ и конусомъ.

Если $r$ = радіусу шара, $h$ = высотѣ шарового сегмента, то:

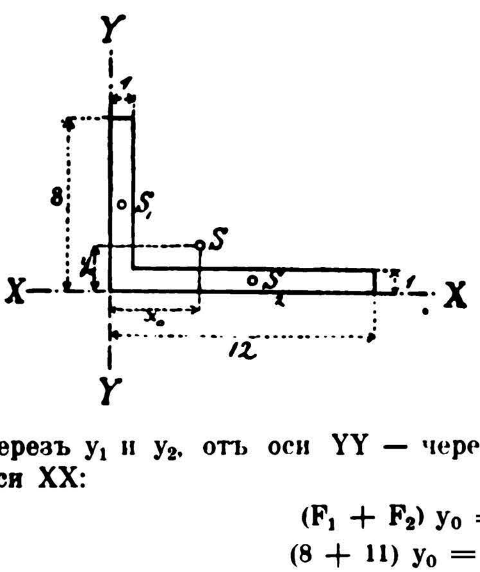
$$x_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 51)$$

Для полушара, гдѣ $h = r$, получаемъ, какъ и въ уравненіи 50):

$$x_0 = {}^3/_8\, r$$

Задача 45. Найти центръ тяжести поперечнаго сѣченія неравнобокаго углового желѣза, представленнаго на фиг. 63.

Фиг. 63.




Рѣшеніе. Угловое желѣзо состоитъ изъ двухъ прямоугольниковъ:

$$F_1 = 8 \,.\, 1 = 8 \text{ сантим.}^2$$

и

$$F_2 = (12 - 1) \,.\, 1 = 11 \text{ сантим.}^2$$

Примѣнимъ сюда теорему, что статическій моментъ цѣлаго угольника равенъ суммѣ статическихъ моментовъ отдѣльныхъ его частей (уравненіе 35, стр. 47).

Обозначивъ разстоянія центровъ тяжести $S_1$ и $S_2$ отъ оси XX черезъ $y_1$ и $y_2$, отъ оси YY — черезъ $x_1$ и $x_2$, получимъ относительно оси XX:

$$(F_1 + F_2)\, y_0 = F_1 y_1 + F_2 y_2$$
$$(8 + 11)\, y_0 = 8 \,.\, 4 + 11 \,.\, 0{,}5$$
$$y_0 = 1{,}97$$

Относительно оси YY имѣемъ:

$$(F_1 + F_2)\, x_0 = F_1 x_1 + F_2 x_2$$

$$(8 + 11)\, x_0 = 8 \,.\, 0{,}5 + 11 \,.\, 6{,}5$$

$$x_0 = 3{,}97$$

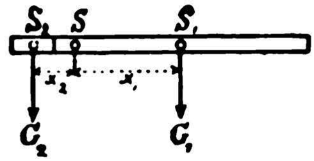
Въ дѣйствительности же значенія для $x_0$ и $y_0$ таковы:

$x_0 = 3{,}92$ сентим. $y_0 = 1{,}95$ сентим. *).

**Задача 46.** Цилиндрическій деревянный стержень, длиною 1,2 метра, соединенъ на концѣ съ цилиндрическимъ желѣзнымъ стержнемъ такого же діаметра и длиною въ 0,2 метра (по одной прямой). Вѣсъ деревяннаго стержня $G_1 = 1{,}4$ килогр., вѣсъ желѣзнаго стержня $G_2 = 3{,}1$ килогр. Гдѣ лежитъ центръ тяжести всего стержня?

**Рѣшеніе.** Статическій моментъ деревянной части стержня относительно оси, проходящей черезъ центръ тяжести, по уравненію 36) (стр. 47), равенъ статическому моменту желѣзной части. Слѣдовательно, по фиг. 64:

Фиг. 64.




$$G_1 x_1 = G_2 x_2$$

Такъ какъ $x_1 + x_3$ = разстоянію между центрами тяжести $S_1$ и $S_2$, лежащими въ серединѣ деревянной и желѣзной частей, то:

$$x_1 + x_2 = \frac{1{,}2 + 0{,}2}{2} = 0{,}7$$

или:

$$x_2 = 0{,}7 - x_1$$

слѣдовательно:

$$G_1 x_1 = G_2\,(0{,}7 - x_1)$$

Рѣшая относительно $x_1$ это уравненіе, найдемъ:

$$x_1 = \frac{0{,}7 \,.\, G_2}{G_1 + G_2} = \frac{0{,}7 \,.\, 3{,}1}{1{,}4 + 3{,}1} = 0{,}48 \text{ метра.}$$

---

## § 11.

## Поверхности вращенія и тѣла вращенія.

### (Правило Гюльдена).

Если плоская кривая AB (фиг. 65) вращается около лежащей въ ея плоскости оси Y, то она образуетъ поверхность вращенія.

Представимъ себѣ, что кривая AB раздѣлена на очень большое число маленькихъ частей. Одна изъ такихъ частей mn, разстояніе которой отъ оси Y равно x, при своемъ вращеніи образуетъ поверхность:

$$f = mn \,.\, 2x\pi$$

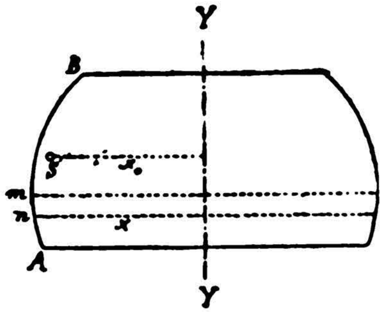
---

*) См. Лауэнштейнъ, Festigkeitslehre, 9 изд. Табл., стр. 34.

Поэтому, величина поверхности, получаемой отъ вращенія всей кривой, будетъ:

$$F = \Sigma(mn \,.\, 2x\pi) = 2\pi\Sigma(mn \,.\, x)$$

Фиг. 65.




и такъ какъ, если $x_0$ — разстояніе центра тяжести кривой отъ оси Y, можно, согласно сказанному на стр. 49, въ предыдущемъ равенствѣ произвести слѣдующую замѣну:

$$\Sigma(mn \,.\, x) = \widehat{AB} \,.\, x_0$$

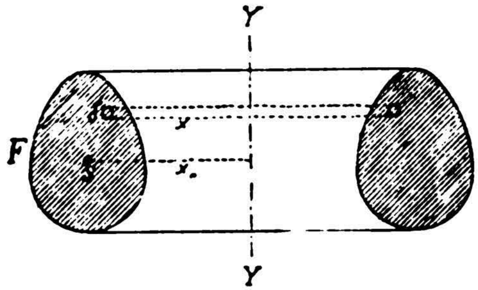
то:

$$F = \widehat{AB} \,.\, 2x_0\pi \quad . \quad . \quad . \qquad 52)$$

т. е. поверхность, образуемая вращеніемъ плоской кривой вокругъ оси, лежащей въ той же самой плоскости, равна произведенію изъ длины кривой на путь, пройденный ея центромъ тяжести.

Если площадь F (фиг. 66) вращается вокругъ оси Y, лежащей въ одной съ нею плоскости, то получится тѣло вращенія.

Фиг. 66.




Представимъ себѣ, что вся площадь F состоитъ изъ очень большого числа маленькихъ площадокъ. Такая отдѣльная площадка f, лежащая на разстояніи x отъ оси Y, при своемъ вращеніи образуетъ кольцеобразное тѣло съ объемомъ:

$$v = f \,.\, 2x\pi$$

Отсюда объемъ тѣла, получаемаго отъ вращенія всей площади, равенъ:

$$V = \Sigma(f \,.\, 2x\pi) = 2\pi\Sigma(fx)$$

И если сюда подставить, согласно уравненію 35), стр. 47:

$$\Sigma(fx) = Fx_0,$$

гдѣ $x_0$ — разстояніе центра тяжести площади F отъ оси Y, то получимъ:

$$V = F \,.\, 2x_0\pi \quad . \;.\;.\;.\qquad .\;.\;.\; 53)$$

т. е. объемъ тѣла, получаемаго при вращеніи плоской фигуры около оси, лежащей съ нею въ одной плоскости, равенъ произведенію изъ площади этой фигуры на путь, пройденный ея центромъ тяжести.

Примѣрами могутъ служить слѣдующіе случаи:

Дуга полукруга радіуса r, діаметръ котораго параллеленъ оси Y и отстоитъ отъ нея на разстояніи a (фиг. 67), образуетъ при вращеніи, согласно уравненію 52), поверхность, равную:

$$F = r\pi \,.\, 2\, x_0\pi$$

а такъ какъ здѣсь по уравненію 38), стр. 50:

$$x_0 = a + \frac{2r}{\pi},$$

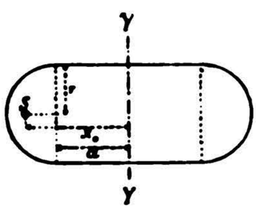
то имѣемъ:

$$F = r\pi \;.\; 2\left(a + \frac{2r}{\pi}\right)\pi = 2\,ar\pi^2 + 4r^2\pi$$

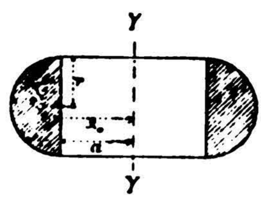
При $a = 0$, получимъ поверхность шара:

$$F = 4r^2\pi.$$

Фиг. 67.




Фиг. 68.




Если, вмѣсто дуги полукруга, вращается около оси Y полная площадь полукруга (фиг. 68), то, по уравненію 53), объемъ получаемаго отъ этого вращенія тѣла равенъ:

$$V = \frac{r^2\pi}{2}\, 2x_0\pi.$$

Согласно уравненію 41), стр. 58:

$$x_0 = a + \frac{4\,r}{3\,\pi},$$

слѣдовательно:

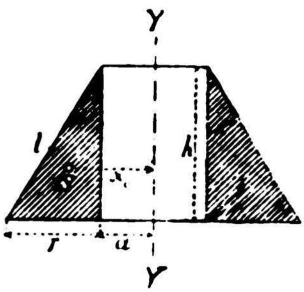
$$V = \frac{r^2\pi}{2}\, 2\left(a + \frac{4r}{3\pi}\right)\pi = ar^2\pi^2 + {}^4\!/_3\, r^3\pi.$$

При $a = 0$, изъ этого выраженія опредѣляется объемъ шара, равный:

$$V = {}^4/_3\, r^3 \pi.$$

Площадь прямоугольнаго треугольника (фиг. 69), съ основаніемъ $r$ и высотою $h$ при вращеніи своемъ около оси $Y$ образуетъ объемъ, который получается изъ уравненія 53), если подставить слѣдующія значенія величинъ, входящихъ въ составъ его:

Фиг. 69.




$$F = \frac{rh}{2} \text{ и } x_0 = a + \frac{r}{3}$$

Послѣ подстановки имѣемъ:

$$V = \frac{rh}{2}\, 2\left(a + \frac{r}{3}\right)\pi = ahr\pi + r^2\pi\,\frac{h}{3}$$

При $a = 0$ получаемъ объемъ конуса:

$$V = r^2\pi\,\frac{h}{3}.$$

При вращеніи гипотенузы $l$ около оси $Y$ получается боковая поверхность усѣченнаго конуса. Величину этой поверхности мы получимъ, если подставимъ

$$x_0 = a + \frac{r}{2}$$

въ уравненіе 52):

$$F = 2l\left(a + \frac{r}{2}\right)\pi = 2al\pi + r\pi l$$

При $a = 0$ получаемъ боковую поверхность конуса:

$$F = r\pi l.$$

---

## § 12.

## Сопротивленіе неподвижныхъ опоръ.

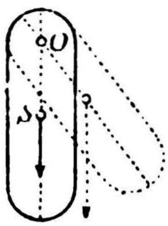
### 1. Одна опорная точка.

Если на тѣло, подпертое въ одной точкѣ O, дѣйствуетъ только сила, въ видѣ собственнаго вѣса, приложеннаго къ центру тяжести S, то тѣло будетъ въ равновѣсіи, если точки O и S лежатъ на одной вертикали.

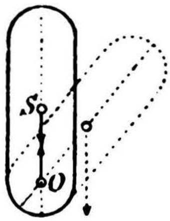
Если тѣло будетъ выведено изъ положенія равновѣсія, то, такъ какъ въ этомъ случаѣ точка опоры O уже не будетъ лежать на вертикали, проходящей черезъ центръ тяжести, получится статическій моментъ, который сообщитъ тѣлу вращеніе около точки O. Въ зависимости отъ того, стремится ли при вращеніи статическій моментъ вѣса тѣла вернуть его въ прежнее положеніе равновѣсія или нѣтъ, первоначальное состояніе равновѣсія тѣла называютъ **устойчивымъ** или **неустойчивымъ**.

При **устойчивомъ** равновѣсіи центръ тяжести S лежитъ на вертикали **ниже** точки закрѣпленія (фиг. 70); при **неустойчивомъ** равновѣсіи—на вертикали **выше** точки закрѣпленія (фиг. 71).

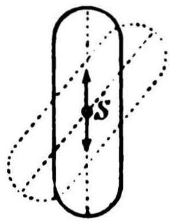
Фиг. 70.




Фиг. 71.




Фиг. 72.

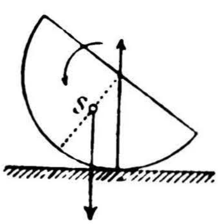



**Безразличнымъ** начальное состояніе равновѣсія называется въ томъ случаѣ, если тѣло, при всякомъ измѣненіи положенія, будетъ находится въ покоѣ (въ состояніи равновѣсія); этотъ случай бываетъ, когда центръ тяжести совпадаетъ съ точкой закрѣпленія (фиг. 72).

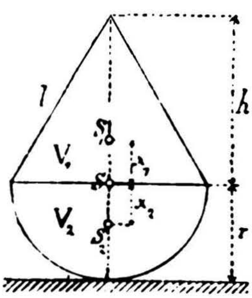
У тѣла, опирающагося шарообразною **поверхностью** на горизонтальную плоскость, центръ тяжести всегда лежитъ выше точки опоры. Такъ какъ для такого тѣла нормальное сопротивленіе опорной плоскости всегда проходитъ черезъ центръ шара, то это тѣло будетъ находиться въ устойчивомъ, неустойчивомъ или безразличномъ состояніи равновѣсія въ зависимости отъ того, будетъ ли центръ тяжести его лежать ниже или выше центра шара или совпадать съ нимъ.

Однородный полушаръ на горизонтальной плоскости будетъ всегда находиться въ устойчивомъ равновѣсіи (фиг. 73).

Фиг. 73.




Фиг. 74




У однороднаго тѣла, состоящаго изъ полушара и конуса (фиг. 74), при безразличномъ равновѣсіи необходимо, чтобы центръ тяжести S совпадалъ съ центромъ шара. Для этого необходимо, чтобы:

$$V_1 x_1 = V_2 x_2 ,$$

или:

$$r^2\pi \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{4} = \frac{2}{3} \pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r$$

откуда:

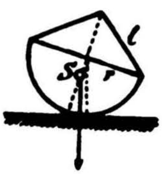
$$h^2 = 3r^2$$

Поэтому образующая конуса должна быть равна:

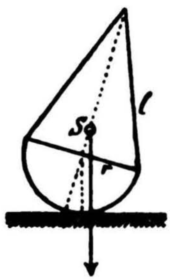
$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r$$

При $l < 2r$ равновѣсіе устойчивое (фиг. 75)
" $l > 2r$ " неустойчивое (фиг. 76)
" $l = 2r$ " безразличное (фиг. 77)

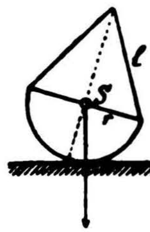
Фиг. 75.



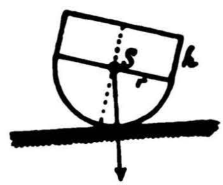

Фиг. 76.




Фиг. 77.




Фиг. 78.




Подобнымъ же образомъ найдемъ, что однородное тѣло, состоящее изъ полушара и цилиндра (фиг. 78), будетъ въ состояніи безразличнаго равновѣсія, если высота цилиндрической части равна:

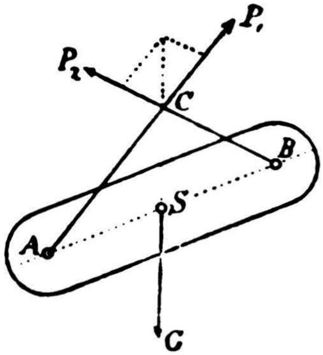
$$h = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot$$

## 2. Двѣ опорныя точки.

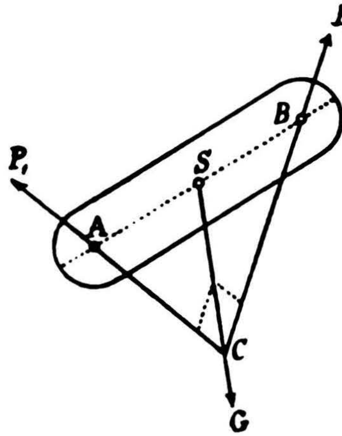
Если тѣло имѣетъ опору въ двухъ точкахъ A и B, то въ общемъ случаѣ невозможно опредѣлить распредѣленіе давленія на опорныя точки. Въ этомъ случаѣ условіе равновѣсія заключается въ томъ, чтобы равнодѣйствующая двухъ противодавленій (сопротивленій) $P_1$ и $P_2$ была равна по величинѣ, но прямопротивоположна по направленію вѣсу G самого тѣла. (См. фиг. 27, стр. 36). Условіе это можетъ быть выполнено безконечнымъ числомъ различныхъ способовъ, какъ можно, напр., видѣть на фиг. 79 и 80, такъ какъ положеніе точки C, въ которой пересѣкаются три силы $P_1$, $P_2$ и G, не дано.

Неопредѣленность исчезаетъ, какъ только извѣстно направленіе одного изъ опорныхъ сопротивленій $P_1$ или $P_2$, такъ какъ въ этомъ случаѣ точка C, въ которой пересѣкаются $P_1$, $P_2$ и G, а также и направленіе прочихъ опорныхъ давленій опредѣляются сами собою.

Фиг. 79.




Фиг. 80.




Если, напр., тѣло AB (фиг. 81) свободно покоится на опорѣ A, то противодавленіе $P_1$, дѣйствующее въ этой точкѣ, должно быть направлено перпендикулярно къ AB, и для опредѣленія величины этого противодавленія имѣемъ слѣдующее уравненіе (относительно точки вращенія B):

$$P_1 \cdot \overline{AB} - G \cdot \overline{BD} = 0$$

или:

$$P_1 = G \cdot \frac{BD}{AF}$$

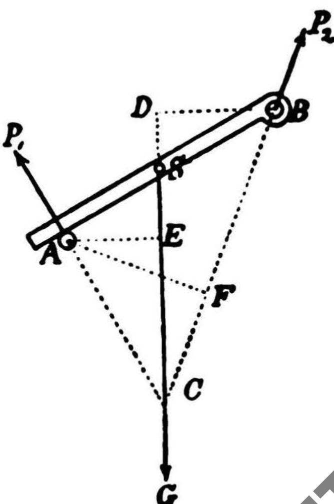
Противодавленіе же $P_2$ найдется изъ уравненія статическихъ моментовъ относительно точки вращенія A:

$$G \cdot \overline{AE} - P_2 \cdot \overline{AF} = 0$$

или:

$$P_2 = G \cdot \frac{AE}{AF}$$

Фиг. 81.

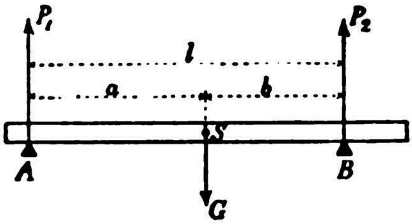



Если тѣло AB лежитъ горизонтально и совершенно свободно на двухъ опорахъ (фиг. 82), то оба противодавленія направлены по вертикали, слѣдовательно, всѣ силы параллельны. Если l — разстояніе между опорными точками A и B, то, принимая обозначенія фиг. 82 и составляя уравненіе статическихъ моментовъ то относительно точки B, то относительно точки A, найдемъ слѣдующія значенія противодавленій:

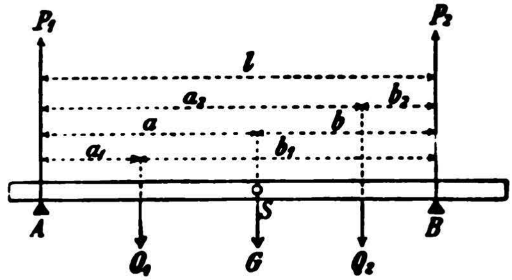
$$P_1 l - Gb = 0 \text{ или } P_1 = G\,\frac{b}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

$$Ga - P_2 l = 0 \text{ или } P_2 = G\,\frac{a}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 55)$$

Фиг. 82.




Фиг. 83.




Если же свободнолежащее на опорахъ A и B тѣло подвержено еще дѣйствію силъ $Q_1$ и $Q_2$ (фиг. 83), то подобнымъ же образомъ получимъ:

$$P_1 l - Q_1 h_1 - Gb - Q_2 b_2 = 0$$

или:

$$P_1 = Q_1\,\frac{b_1}{l} + G\,\frac{b}{l} + Q_2\,\frac{b_2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 56)$$

и:

$$Q_1 a_1 + Ga + Q_2 a_2 - P_2 l = 0$$

или:

$$P_2 = Q_1\,\frac{a_1}{l} + G\,\frac{a}{l} + Q_2\,\frac{a_2}{l} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 57)$$

Одинаковый составъ членовъ правыхъ частей уравненій 56) и 57) показываетъ, что прибавка отъ каждой отдѣльной силы къ величинамъ опорныхъ сопротивленій опредѣляется точно такимъ же образомъ, какъ если бы эта сила была единственной нагрузкой, дѣйствующей на тѣло AB.

### 3. Устойчивость (сопротивленіе опрокидыванію) тѣлъ.

Тѣло, опирающееся въ трехъ точкахъ на горизонтальную опорную плоскость будетъ устойчиво въ томъ случаѣ, если вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести тѣла, упадетъ внутри треугольника, образуемаго прямыми, соединяющими точки опоры. (Примѣръ: столъ на трехъ ножкахъ).

Если вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести, упадетъ на сторону треугольника, то равновѣсіе будетъ неустойчивое;

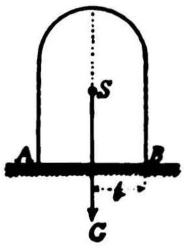
если же она упадетъ внѣ треугольника, то тѣло повернется около одной изъ сторонъ треугольника и опрокинется. Указанная сторона треугольника называется ребромъ (осью) опрокидыванія.

Распредѣлить давленія на опорныя точки у тѣла, опирающагося на горизонтальную опорную плоскость болѣе, чѣмъ тремя точками, невозможно; однако устойчивость его будетъ обезпечена, если вертикальная линія, проходящая черезъ центръ тяжести, упадетъ внутри контура, т.-е. тѣхъ прямыхъ, которыя соединяютъ внѣшнія опорныя точки.

Если тѣло съ плоскимъ основаніемъ покоится на горизонтальной опорной плоскости, то его разсматриваютъ, какъ тѣло съ безконечно большимъ числомъ опорныхъ точекъ.

Статическій моментъ вѣса тѣла относительно оси (ребра) опрокидыванія называется моментомъ устойчивости тѣла. Послѣдній тѣмъ больше, а слѣдовательно, тѣло тѣмъ болѣе обезпечено отъ опрокидыванія, чѣмъ больше кратчайшее разстояніе вертикальной линіи, проходящей черезъ центръ тяжести, отъ оси опрокидыванія.

Фиг. 84.

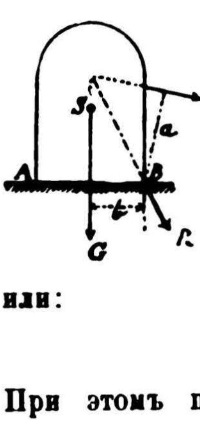



Если черезъ M обозначимъ моментъ устойчивости тѣла, то, по фиг. 84, относительно оси B найдемъ:

$$M = Gb \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 58)$$

Если на тѣло, кромѣ вѣса G (фиг. 85), дѣйствуетъ еще лежащая въ той же плоскости сила P, которая сама по себѣ произвела бы вращеніе тѣла около оси B (принимаемой за неподвижную), то тѣло до тѣхъ поръ не опрокинется, пока моментъ силы P (такъ называемый опрокидывающій моментъ) меньше момента устойчивости тѣла относительно оси опрокидыванія B, т.-е. пока равнодѣйствующая R силъ P и G еще остается внутри, за осью B. Но если сила P имѣетъ такую величину, что равнодѣйствующая R перейдетъ черезъ ось опрокидыванія, то тѣло начинаетъ вращаться около этой оси. Этому случаю соотвѣтствуетъ:

Фиг. 85.



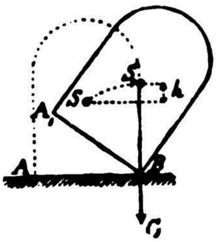

$$Pa = Gb$$

или:

$$P = G \cdot \frac{b}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 59)$$

При этомъ центръ тяжести S начнетъ постепенно подниматься до тѣхъ поръ, пока онъ не займетъ своего наивысшаго положенія и вертикаль его не пройдетъ черезъ ось опрокидыванія; въ этотъ моментъ тѣло будетъ находиться въ неустойчивомъ равновѣсіи (фиг. 86). Въ данномъ случаѣ не требуется никакого дальнѣйшаго усилія, чтобы опрокинуть тѣло.

Фиг. 86.



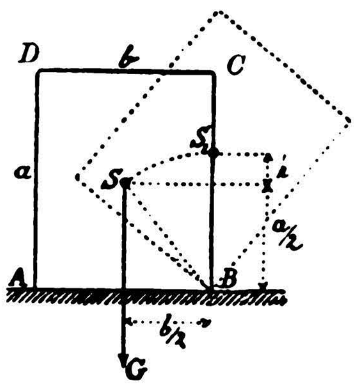

Механическую работу A, которую должна израсходовать сила P для того, чтобы привести тѣло изъ состоянія покоя (фиг. 85) въ состояніе неустойчиваго равновѣсія (фиг. 86), называютъ **динамической устойчивостью**.

Если h — высота, на которую при этомъ подымается центръ тяжести S (фиг. 86), то:

$$A = Gh \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 60)$$

Задача 47. Гранитная глыба ABCD (фиг. 87) имѣетъ высоту $a = 1$ метр., ширину $b = 0{,}8$ метр. и толщину $l = 2$ метр. Найти устойчивость глыбы и механическую работу, необходимую для опрокидыванія глыбы, если вѣсъ 1 куб. метра ея $\gamma = 2400$ килогр.

Фиг. 87.




Рѣшеніе. Вѣсъ гранитной глыбы равенъ:

$$G = \gamma . abl = 2400 \ . \ 1 \ . \ 0{,}8 \ . \ 2 = 3840 \text{ килогр.}$$

Поэтому моментъ устойчивости относительно оси опрокидыванія A или B будетъ:

$$M = G \cdot \frac{b}{2} = 3840 \ . \ \frac{0{,}8}{2} =$$
$$= 1536 \text{ килограммометр.}$$

Высота h, на которую поднимается при опрокидываніи центръ тяжести S, равна:

$$h = BS_1 - \frac{a}{2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}$$

$$h = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{0{,}8}{2}\right)^2} - \frac{1}{2} = 0{,}14 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 60):

$$A = 3840 \ . \ 0{,}14 = 537{,}6 \text{ килограммометр.}$$

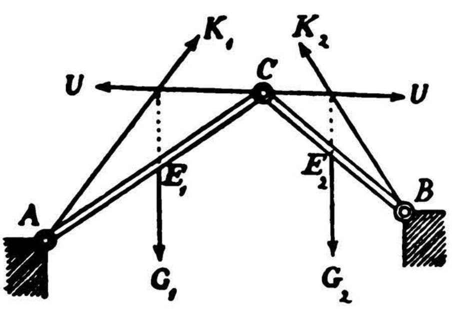
## § 13.

## Равновѣсіе двухъ опирающихся другъ на друга нагруженныхъ стержней.

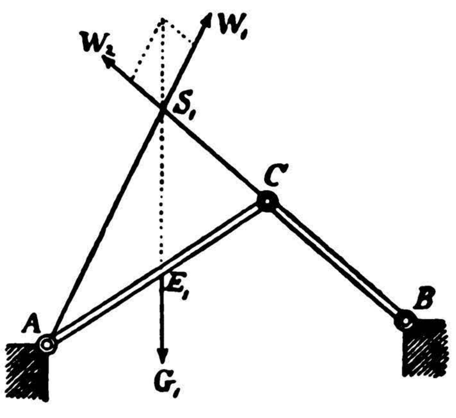
Пусть AC и BC (фиг. 88) два стержня, находящіеся въ одной плоскости неподвижно закрѣпленные въ точкахъ A и B, опираются другъ на друга въ точкѣ C и нагружены въ точкахъ $E_1$ и $E_2$ силами (напр., собственнымъ вѣсомъ) $G_1$ и $G_2$. Положимъ, что A, B и C — шарнирныя точки, допускающія вращеніе стержней AC и BC въ плоскости силъ.

Для опредѣленія противодавленій $K_1$ и $K_2$, существующихъ въ точкахъ A и B, предположимъ сначала, что на стержень AC дѣйствуетъ одна только сила $G_1$; стержень же BC, напротивъ, будемъ считать ненагруженнымъ и невѣсомымъ (фиг. 89). Сила $G_1$ вызываетъ въ точкѣ C противодѣйствующую силу $W_2$, направленіе которой должно совпадать съ направленіемъ ненагруженнаго стержня BC, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, послѣдній повернулся бы около конечной точки B. Если $S_1$—точка пересѣченія $G_1$ и $W_2$, то направленіе противодавленія $W_1$, существующаго въ точкѣ A, можно найти изъ условія, что всѣ три силы $G_1$, $W_1$ и $W_2$ должны пересѣкаться въ одной точкѣ $S_1$; поэтому $W_1$ направлено по $AS_1$. Величины $W_1$ и $W_2$ находятся изъ изображеннаго на фиг. 89 параллелограмма силъ, діагональ котораго равна $G_1$.

Фиг. 88.




Фиг. 89.



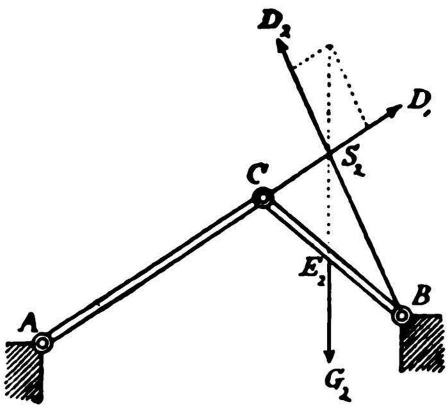

Если теперь представимъ себѣ нагруженнымъ силою $G_2$ только стержень BC, а стержень AC, напротивъ, ненагруженнымъ и невѣсомымъ (фиг. 90), то подобнымъ же образомъ найдемъ противодавленія $D_1$ и $D_2$, вызываемыя одною силою $G_2$, изъ которыхъ $D_1$ совпадаетъ съ направленіемъ ненагруженнаго стержня AC.

Одновременное дѣйствіе силъ $G_1$ и $G_2$ вызываетъ въ точкахъ A и B противодавленія, которыя слагаются изъ противодавленій, вызываемыхъ силою $G_1$ или $G_2$, каждою въ отдѣльности. Отсюда $K_1$ будетъ равнодѣйствующей $W_1$ и $D_1$; а $K_2$ — равнодѣйствующей $W_2$ и $D_2$ (фиг. 91).

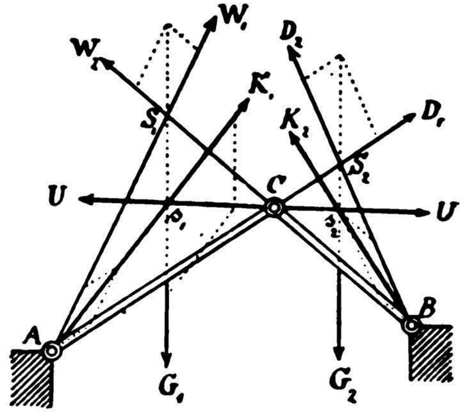
Если обозначить точки пересѣченія $K_1$ и $G_1$ черезъ $s_1$, $K_2$ и $G_2$— черезъ $s_2$, то прямая $s_1s_2$, проходящая черезъ точку C, укажетъ собою направленіе противодавленія U, которое взаимно вызываютъ оба стержня въ точкѣ C. Величина U выражается діагональю параллелограмма, построеннаго на силахъ $K_1$ и $G_1$ или $K_2$ и $G_2$.

Если стержни подвержены дѣйствію нѣсколькихъ силъ, то опредѣленіе противодавленій производится точно такимъ же образомъ. Въ этомъ случаѣ $G_1$ выразитъ равнодѣйствующую всѣхъ отдѣльныхъ силъ, дѣйствующихъ на стержень AC, а $G_2$—равнодѣйствующую всѣхъ отдѣльныхъ силъ, дѣйствующихъ на стержень BC. При этомъ вѣсъ самого стержня разсматривается какъ грузъ равной величины съ вѣсомъ стержня, приложенный въ центрѣ тяжести стержня (принимаемаго уже за невѣсомый).

Фиг. 90.

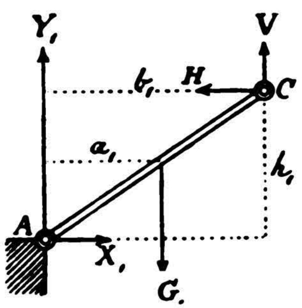



Фиг. 91.

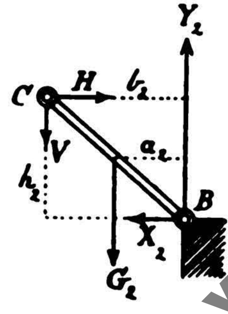



Чтобы опредѣлить противодавленіе U путемъ вычисленія, полагаемъ, что оно разложено на составляющія H и V по горизонтальному и вертикальному направленіямъ (фиг. 92 и 93), и для каждаго изъ этихъ стержней напишемъ уравненіе статическихъ моментовъ, относя ихъ каждый разъ къ неподвижной опорной точкѣ стержня, какъ къ точкѣ вращенія.

Фиг. 92.




Фиг. 93.




Для фиг. 92 и 93 получимъ слѣдующія уравненія:

$$G_1 a_1 - Hh_1 - Vb_1 = 0$$
$$- G_2 a_2 + Hh_2 - Vb_2 = 0.$$

Изъ обоихъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$H = \frac{G_1 a_1 b_2 + G_2 a_2 b_1}{b_1 h_2 + b_2 h_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 61)$$

$$V = \frac{G_1 a_1 h_2 - G_2 a_2 h_1}{b_1 h_2 + b_2 h_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 62)$$

Если здѣсь сила V отрицательна, то она будетъ имѣть направленіе, обратное изображенному на фиг. 92 и 93, т.-е. эта сила на фиг. 92 будетъ дѣйствовать вертикально внизъ, а на фиг. 93—вертикально вверхъ.

Если противодавленіе $K_1$, вызываемое въ точкѣ A, разложимъ на составляющія $X_1$ и $Y_1$, то, по 1 и 2 условіямъ равновѣсія (стр. 37 и 38), имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= H \\ Y_1 &= G_1 - V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 63)$$

Такимъ же путемъ для составляющихъ противодавленія $K_2$, вызываемаго въ точкѣ B, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= H \\ Y_2 &= G_2 + V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 64)$$

Если $\gamma$ — уголъ, составляемый противодавленіемъ U, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$— углы, составляемые противодавленіями $K_1$ и $K_2$ съ горизонтальной линіей, то направленія силъ U, $K_1$, $K_2$ найдутся изъ выраженій:

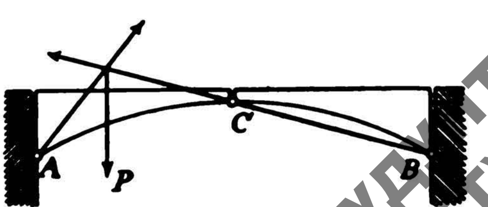
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{V}{H}; \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{Y_1}{X_1}; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{Y_2}{X_2} \quad \ldots\ldots \quad 65)$$

Величины этихъ же силъ получимъ изъ уравненій:

$$U = \sqrt{H^2 + V^2}; \quad K_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}; \quad K_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \quad \ldots\ldots \quad 66)$$

Оба взаимно опирающіеся стержня для простоты мы все время считали прямолинейными, однако это вовсе не необходимо, и все вышесказанное относится также и къ криволинейнымъ стержнямъ. Вообще на способъ опредѣленія противодавленій не имѣетъ никакого вліянія видъ взаимно опирающихся тѣлъ. Такъ, напр., вышеприведеннымъ методомъ можно опредѣлить противодавленія въ трехшарнирномъ арочномъ мостѣ или добавочныя сопротивленія, вызываемыя отдѣльной нагрузкой P (фиг. 94).

Фиг. 94.



Подобнымъ же образомъ опредѣляются при статическомъ изслѣдованіи давленія въ пятахъ свода съ односторонней нагрузкой *).

Задача 48. Пусть въ изображенномъ на фиг. 95 соединеніи стержней:

$$G_1 = 500 \text{ килогр.} \qquad G_2 = 400 \text{ килогр.}$$
$$a_1 = 1{,}4 \text{ метра.} \qquad a_2 = 0{,}4 \text{ метра.}$$
$$b_1 = 2{,}0 \text{ метра.} \qquad b_2 = 0{,}9 \text{ метра.}$$
$$h_1 = 1{,}0 \text{ метра.} \qquad h_2 = 0{,}8 \text{ метра.}$$

Найти по величинѣ и направленію путемъ вычисленія и построеніемъ противодавленія $K_1$, $K_2$ и $U$, вызываемыя въ точкахъ A, B и C.

Рѣшеніе. Путемъ вычисленія, на основаніи уравненій 61) и 62), найдемъ:

$$H = \frac{500 \,.\, 1{,}4 \,.\, 0{,}9 + 400 \,.\, 0{,}4 \,.\, 2}{2 \,.\, 0{,}8 + 0{,}9 \,.\, 1} = 380 \text{ килогр.}$$

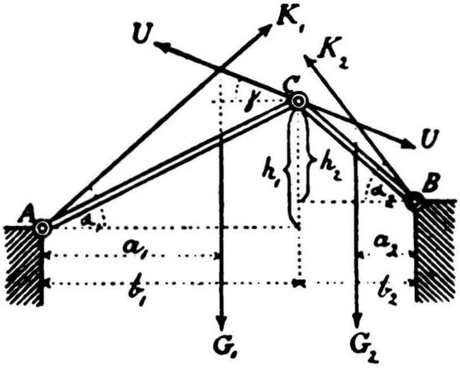
$$V = \frac{500 \,.\, 1{,}4 \,.\, 0{,}8 - 400 \,.\, 0{,}4 \,.\, 1}{2 \,.\, 0{,}8 + 0{,}9 \,.\, 1} = 160 \text{ килогр.}$$

а изъ уравненій 63) и 64):

$X_1 = 380$ килогр. $\qquad X_2 = 380$ килогр.

$Y_1 = 500 - 160 = 340$ килогр. $\qquad Y_2 = 400 + 160 = 560$ килогр.

Фиг. 95.




По уравненію 65) найдемъ слѣдующія значенія для тангенсовъ угловъ $\gamma$, $\alpha_1$, $\alpha_2$;

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{160}{380} = 0{,}421; \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{340}{380} = 0{,}895; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{560}{380} = 1{,}473.$$

Этимъ значеніямъ соотвѣтствуютъ углы:

$$\gamma = 22^0\ 50'; \quad \alpha_1 = 41^0\ 50'; \quad \alpha_2 = 55^0\ 50'.$$

*) См. Лауэнштейнъ, Графическая статика, 9 изданіе, § 22.

Величины противодавленій получаются изъ уравненій 66):

$$U = \sqrt{380^2 + 160^2} = 412{,}3 \text{ килогр.}$$
$$K_1 = \sqrt{380^2 + 340^2} = 509{,}9 \quad ,,$$
$$K_2 = \sqrt{380^2 + 560^2} = 676{,}8 \quad ,,$$

Построеніемъ (масштабъ 1 : 10; масштабъ силъ 100 килогр. = 1 сентим.) находимъ:

$\gamma = 23^0$ $\qquad$ $U = 410$ килогр.
$\alpha_1 = 42^0$ $\qquad$ $K_1 = 510$ ,,
$\alpha_2 = 56^0$ $\qquad$ $K_2 = 680$ ,,

---

§ 14.

## Равновѣсіе силъ въ простыхъ машинахъ.

Подъ машиною вообще разумѣютъ такое механическое приспособленіе, при помощи котораго можно заставить силы природы дѣйствовать при извѣстныхъ условіяхъ. Истинное назначеніе машины — это передать извѣстную механическую работу, т.-е. при помощи сообщенной машинѣ механической работы произвести другую механическую работу, отличную отъ первой. Совершаемая машиною работа заключается въ томъ, чтобы преодолѣть сопротивленіе, которое, въ противоположность силѣ, на это употребляемой, обыкновенно выражается въ видѣ груза. Если грузъ движется равномѣрно, то въ любой моментъ сила и грузъ въ машинѣ находятся въ равновѣсіи; машина въ этомъ случаѣ находится въ такомъ состояніи, при которомъ дѣйствующія силы равны сопротивленію вмѣстѣ съ треніемъ машины и работа двигателя равна работѣ сопротивленія.

Полная работа сопротивленія состоитъ изъ полезной работы, т.-е. той работы, совершеніе которой и составляетъ дѣйствительное назначеніе машины, и вредной работы (преодолѣніе тренія, сопротивленія воздуха, выдѣленіе тепла и т. д.), поэтому затрачиваемая въ машинѣ работа (полная работа) всегда больше полезной работы. Отношеніе полезной работы къ полной называется коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія, или полезнымъ дѣйствіемъ машины; слѣдовательно:

$$\frac{\text{полезная работа}}{\text{полная работа}} = \text{коэффиціенту полезнаго дѣйствія.}$$

При послѣдующемъ разсмотрѣніи условій, при которыхъ въ машинѣ существуетъ равновѣсіе между силою и грузомъ, пока не будемъ принимать во вниманіе вредную работу.

Машина можетъ быть построена или такимъ образомъ, чтобы производить движеніе груза, несогласное съ движеніемъ точки приложенія силы, или такъ, чтобы при помощи малой силы можно было преодолѣть болѣе или менѣе значительное сопротивленіе или поднять большой грузъ. Но такъ какъ всегда при состояніи равновѣсія работа силы равна работѣ груза, то сила въ одно и то же время должна проходить во столько разъ большій путь, чѣмъ грузъ, во сколько по величинѣ сила меньше груза. Отсюда слѣдуетъ слѣдующая важная теорема:

Что выигрывается въ силѣ, то теряется въ скорости (слѣдовательно, и во времени).

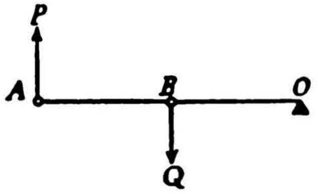
Всякая машина вообще состоитъ изъ отдѣльныхъ частей, изъ такъ называемыхъ простыхъ машинъ (элементарныхъ машинъ), которыя, по роду ихъ движенія, раздѣляются на два основные типа, а именно: на рычагъ — для вращательнаго движенія, и на наклонную плоскость — для поступательнаго движенія. Видоизмѣненіями рычага служатъ воротъ и блокъ; видоизмѣненіями наклонной плоскости = винтъ и клинъ.

## 1. Рычагъ.

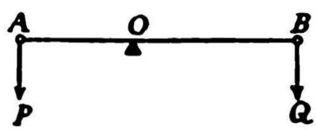
Рычагомъ называется всякое негибкое тѣло, подпертое въ одной точкѣ и подверженное дѣйствію силъ, которыя стремятся его повернуть около точки опоры или точки вращенія.

Если точка опоры лежитъ на концѣ, то рычагъ называется одноконечнымъ, или рычагомъ 2-го рода (фиг. 96), если же она лежитъ между точками приложенія силъ, то рычагъ называется двуконечнымъ, или рычагомъ 1-го рода (фиг. 97).

Фиг. 96



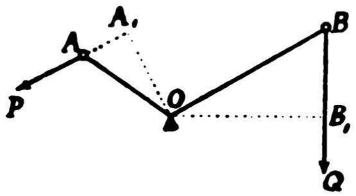

Фиг. 97.



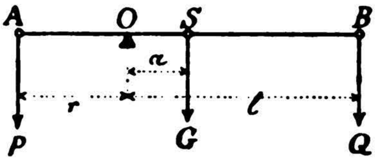

Въ большинствѣ случаевъ тѣло имѣетъ видъ прямой или же плоской ломаной линіи, съ точкой вращенія въ точкѣ перелома (фиг. 98: колѣнчатый рычагъ).

Если точка опоры совпадаетъ съ центромъ тяжести, то рычагъ можно разсматривать какъ невѣсомый (математическій). Рычагъ, центръ тяжести котораго не совпадаетъ съ точкою опоры, называется физическимъ рычагомъ. Такой рычагъ можно разсматривать тоже какъ математическій, если вычисленный вѣсъ его принятъ за отдѣльную силу G, направленную вертикально внизъ и приложенную къ центру тяжести (фиг. 99).

Фиг. 98.




Фиг. 99.




Къ математическому рычагу можно приложить условія равновѣсія, приведенныя въ § 7 (стр. 37 и 38). Для фиг. 99, наприм., по 2-му условію равновѣсія, давленіе на точку опоры O:

$$D = P + G + Q$$

а по 3-му условію равновѣсія:

$$Pr = Ga + Ql \qquad \ldots\ldots \qquad 67)$$

Для прямолинейнаго рычага, на который дѣйствуютъ косо направленныя, но параллельныя силы, можно внести въ условіе равновѣсія вмѣсто перпендикулярныхъ разстояній силъ отъ точки вращенія непосредственно самые отрѣзки рычага. Такъ, для фиг. 100:

$$P \cdot \overline{A_1O} = Q \cdot \overline{B_1O},$$

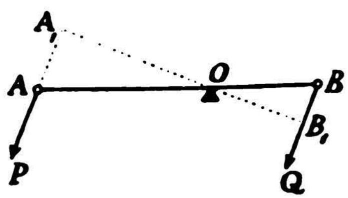
или:

$$\frac{P}{Q} = \frac{B_1O}{A_1O} = \frac{BO}{AO},$$

слѣдовательно:

$$P \cdot \overline{AO} = Q \cdot \overline{BO}.$$

Фиг. 100.




При ломаномъ рычагѣ и такомъ прямолинейномъ на который дѣйствуютъ непараллельныя силы, напротивъ, необходимо за плечи рычага всегда брать перпендикулярныя разстоянія силъ отъ точки опоры; слѣдовательно, напр., для фиг. 98:

$$P \cdot \overline{A_1O} = Q \cdot \overline{B_1O}$$

На законахъ рычага основано примѣненіе **вѣсовъ**. Хорошіе **равноплечные вѣсы** (**обыкновенные простые вѣсы съ коромысломъ**) должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

а) Они должны быть **вѣрны**, т.-е. при одинаковой нагрузкѣ обѣихъ чашекъ коромысло вѣсовъ должно быть горизонтально.

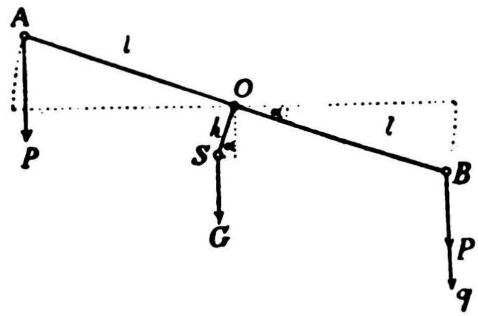
Это будетъ въ томъ случаѣ, когда оба плеча коромысла совершенно одинаковой длины и симметричнаго вида, а чашки вѣсовъ одинаковаго вѣса. Кромѣ того, точки привѣса чашекъ должны лежать на одной прямой линіи съ точкой вращенія коромысла.

b) Они постоянно должны находиться въ устойчивомъ равновѣсіи. Это условіе будетъ выполнено, если центръ тяжести ихъ при горизонтальномъ равновѣсномъ положеніи коромысла лежитъ на вертикали ниже точки опоры.

c) Они должны быть чувствительны, т.-е. при любой нагрузкѣ должны давать перевѣсъ нагруженной чашки, а также замѣтный наклонъ коромысла, стоящій въ прямой зависимости отъ этого перевѣса.

Въ вѣсахъ, представленныхъ на фиг. 101, равные грузы P не оказываютъ никакого вліянія на равновѣсное положеніе коромысла;

Фиг. 101.




напротивъ, прибавленный на одну сторону перевѣсъ q вызоветъ уголъ наклона $\alpha$. Если G — собственный вѣсъ вѣсовъ, h — разстояніе центра тяжести S отъ точки вращенія O и l — длина плеча, то для фиг. 101 имѣемъ:

$$G \,.\, h \sin\alpha = q \,.\, l\cos\alpha,$$

или:

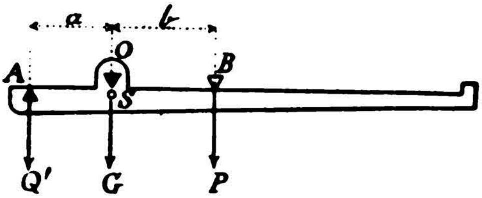
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{q}{G} \cdot \frac{l}{h}$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что при опредѣленномъ перевѣсѣ q уголъ $\alpha$ тѣмъ больше, слѣдовательно вѣсы тѣмъ чувствительнѣе, чѣмъ меньше собственный вѣсъ G ихъ, чѣмъ меньше разстояніе между центромъ тяжести и точкою вращенія и чѣмъ больше длина плеча l.

Чувствительность вѣсовъ обыкновенно выражается дробью, у которой числитель представляетъ наименьшій вѣсъ, дающій замѣтный наклонъ коромысла, а знаменатель наибольшую, допускаемую вѣсами нагрузку. Хорошіе вѣсы должны имѣть чувствительность, равную, по крайней мѣрѣ, 1:60000. Такъ, напр., если 30 килогр. — наибольшая допускаемая для вѣсовъ нагрузка, то, если каждая чашка нагружена 15 килогр., перевѣсъ въ 0,5 гр. долженъ давать замѣтный наклонъ коромысла.

Безмѣнъ представляетъ собою неравноплечный рычагъ, по болѣе длинному плечу котораго передвигается опредѣленный грузъ (подвижная гиря) P, тогда какъ къ концу короткаго плеча прикрѣплена чашка или крюкъ для взвѣшиванія груза Q (фиг. 102 и 103).

Фиг. 102.

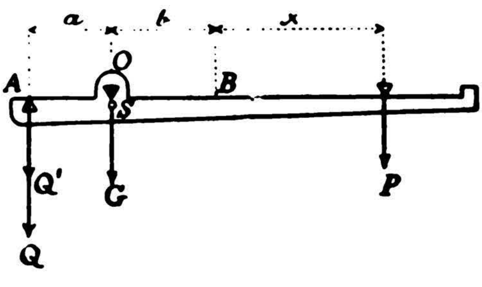



Если Q' — вѣсъ чашки или крюка, то для ненагруженныхъ вѣсовъ (фиг. 102) равновѣсіе будетъ существовать лишь въ томъ случаѣ, если выполнено условіе:

$$Pb = Q'a.$$

Отсюда легко найти длину b и, слѣдовательно, опредѣлить положеніе точки B, какъ нулевой точки (дѣленія) вѣсовъ.

Фиг. 103.




Если затѣмъ въ точкѣ A привѣсить грузъ Q, то равновѣсіе можно снова возстановить, передвинувъ грузъ P на разстояніе x внаружу (фиг. 103). Въ этомъ случаѣ условіе равновѣсія будетъ:

$$P(b + x) = (Q + Q')\,a.$$

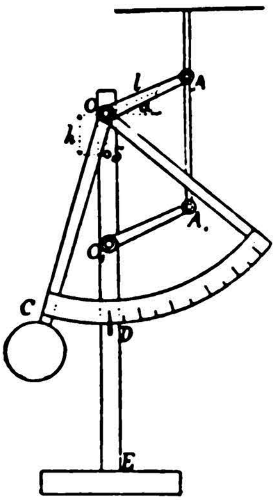
Вычитая изъ послѣдняго равенства предыдущее, получимъ:

$$Px = Qa, \text{ или: } Q = \frac{Px}{a}$$

Измѣривъ длину x или прочитавъ дѣленіе, нанесенное на длинномъ плечѣ можно легко найти неизвѣстный вѣсъ нагрузки Q.

Вѣсы со стрѣлкой (фиг. 104), часто употребляемые въ качествѣ, такъ называемыхъ, вѣсовъ для взвѣшиванія писемъ, состоятъ главнымъ образомъ изъ колѣнчатаго рычага AOC съ точкой вращенія O. Положимъ, въ положеніи равновѣсія ненагруженныхъ вѣсовъ колѣно OA составляетъ съ горизонтальной линіей уголъ $\alpha$. При этомъ указатель D, прикрѣпленный къ стойкѣ OE, покажетъ нулевое дѣленіе части дуги (соединенной неразрывно съ колѣнчатымъ рычагомъ). Центръ тяжести подвижныхъ частей вѣсовъ лежитъ на разстояніи h по вертикальному направленію внизъ отъ точки вращенія O.

Фиг. 104.




Подъ дѣйствіемъ груза Q весь рычагъ AOC повернется на уголъ $\varphi$. Если обозначить собственный вѣсъ вѣсовъ (за исключеніемъ стойки и подножки) черезъ S, то (фиг. 105):

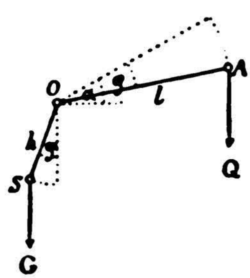
$$Q \cdot l \cos(\alpha - \varphi) = G \cdot h \sin\varphi,$$

или:

$$Q = G \cdot \frac{h}{l} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos(\alpha - \varphi)}$$

Слѣдовательно, опредѣленіе вѣса здѣсь производится измѣреніемъ угла, такъ какъ множитель $G \cdot \frac{h}{l}$ для данныхъ вѣсовъ является величиной постоянной. На части же дуги наносятся не грусныя измѣренія угловъ, а непосредственно соотвѣтствующія имъ вѣса.

Фиг. 105.

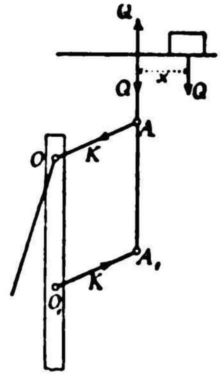



Обыкновенно устраиваютъ эти вѣсы такъ, что рычагъ OA находится въ горизонтальномъ положеніи при дѣйствіи груза, равнаго половинѣ наибольшей нагрузки, допускаемой этими вѣсами. Вслѣдствіе этого получается, что дѣленія части дуги уменьшаются по величинѣ отъ средины въ обѣ стороны *), между тѣмъ какъ, если бы колѣно AO было горизонтально при ненагруженныхъ вѣсахъ, то дѣленія отъ нуля все время постепенно уменьшались бы, а вслѣдствіе этого вѣсъ болѣе тяжелыхъ грузовъ опредѣлялся бы уже не съ тою точностью, какъ вѣсъ болѣе легкихъ.

*) Углы возрастаютъ не въ томъ отношеніи, какъ соотвѣтствующія имъ тригонометрическія функціи.

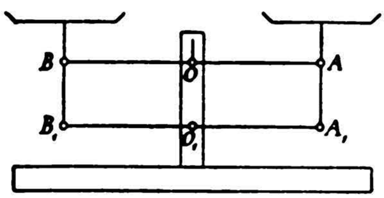
При (правильно выполненной) параллелограммной конструкціи $OAA_1O_1$ грузъ Q можно положить въ любомъ мѣстѣ тарелки, потому что, если по направленію оси $AA_1$ приложить двѣ взаимно уравновѣшивающіяся силы Q (фиг. 106), то одна изъ нихъ (направленная вертикально внизъ) будетъ давить на рычаги OA и $O_1A_1$ непосредственно внизъ. Существующій, кромѣ того, моментъ Qx удерживается въ равновѣсіи другимъ, вращающимъ въ противоположную сторону, моментомъ силъ K, появляющихся въ направленіи колѣнъ OA и $O_1A_1$ и воспринимаемыхъ точками вращенія O и $O_1$.

Фиг. 106.




Продоливъ колѣна рычаговъ AO и $A_1O_1$ за точки O и $O_1$ въ другую сторону на равныя разстоянія OB и $O_1B_1$, т. е. построивъ такой же параллелограммъ по другую сторону отъ точекъ вращенія и одновременно съ этимъ отнимая колѣно OC, получимъ показанные на рис. 107, такъ называемые, столовые вѣсы, или вѣсы Робервaля.

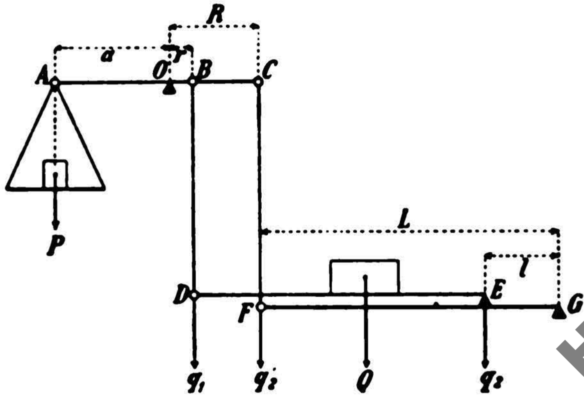
Фиг. 107.




Десятичные вѣсы Квинтенца (Страссбургъ, 1821 г.) главнымъ образомъ состоятъ изъ 3 рычаговъ и 2 тягъ, а именно (фиг. 108): изъ двуплечнаго рычага AC (съ точкой опоры O), къ которому въ точкѣ A привѣшена чашка вѣсовъ, а точки B и C при помощи тягъ BD и CF соединены съ концами одноплечныхъ рычаговъ DE и FG. Точка опоры E рычага DE лежитъ на рычагѣ FG и имѣетъ такое положеніе, что для рычаговъ FG и OC существуетъ одинаковое отношеніе плечъ, т. е. по фиг. 108:

$$l : L = r : R.$$

Фиг. 108.



Если на платформу, опирающуюся на рычагъ DE, положить грузъ Q, то совершенно безразлично, въ какомъ бы мѣстѣ платформы этотъ грузъ не находился, послѣднiй будетъ дѣйствовать на рычагъ OC всегда одинаково, какъ если бы этотъ грузъ былъ непосредственно привѣшенъ къ точкѣ B.

Если черезъ $q_1$ и $q_2$ назвать давленiя, производимыя грузомъ Q на точки D и E, то статическiй моментъ $q_1$ относительно точки вращенiя O будетъ:

$$M_1 = q_1 r$$

Сила же $q_2$ разлагается на два давленiя, изъ которыхъ одно уничтожается противодавленiемъ неподвижной точки G, а другое, приложенное къ точкѣ F, будетъ равно:

$$q_2' = q_2 \frac{l}{L} = q_2 \frac{r}{R}$$

При чемъ послѣдняя сила будетъ дѣйствовать на плечо рычага R; слѣдовательно, статическiй моментъ ея относительно точки вращенiя O будетъ:

$$M_2 = q_2 \frac{r}{R} R = q_2 r$$

Сумма статическихъ моментовъ силъ, дѣйствующихъ въ точкахъ B и C, равна:

$$M = M_1 + M_2 = q_1 r + q_2 r,$$

а такъ какъ:

$$q_1 + q_2 = Q,$$

то:

$$M = Qr$$

Обыкновенно $r = 0{,}1a$, и потому, зная, что для состоянiя равновѣсiя необходимо:

$$Pa = Qr,$$

лежащiй на чашкѣ вѣсовъ грузъ $P = Q \cdot \frac{r}{a} = 0{,}1\,Q$ (поэтому эти вѣсы и называются десятичными).

Задача 49. Положимъ для двуплечнаго рычага (фиг. 99, стр. 79):

$$G = 6 \text{ килогр.}; \; Q = 20 \text{ килогр.}$$
$$l = 1 \text{ м.}; \quad r = 0{,}4 \text{ м.}; \quad a = 0{,}1 \text{ м.}$$

Какъ велико должно быть P, чтобы рычагъ находился въ равновѣсiи?

Рѣшенiе. Изъ уравненiя 67) имѣемъ:

$$P = \frac{Ga + Ql}{r} = \frac{6 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 1}{0{,}4} = 51{,}5 \text{ килогр.}$$

Давленіе на точку опоры будетъ:

$$D = P + G + Q = 51{,}5 + 6 + 20 = 77{,}5 \text{ килогр.}$$

**Задача** 50. На одноплечный рычагъ, съ точкой вращенія O, дѣйствуетъ вертикально направленная вверхъ сила въ 200 килогр., приложенная къ плечу этого рычага на разстояніи 12 сентим. Какъ великъ долженъ быть грузъ P, приложенный, для сохраненія равновѣсія, на разстояніи 80 сентим. отъ точки вращенія O, если центръ тяжести плеча, вѣсящаго 5 килогр., отстоитъ отъ точки O на 32 сентим.?

**Рѣшеніе**. Изъ:

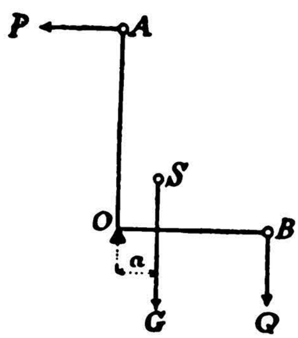
$$P \,.\, 80 + 5 \,.\, 32 = 200 \,.\, 12$$

слѣдуетъ:

$$P = \frac{200 \,.\, 12 - 5 \,.\, 32}{80} = 28 \text{ килогр.}$$

**Задача** 51. Къ колѣнчатому рычагу AOB (фиг. 109), вѣсящему 8 килогр., съ плечами $OA = 80$ сентим. и $OB = 60$ сентим., въ точкѣ B приложенъ грузъ $Q = 30$ килогр., дѣйствующій вертикально внизъ. Опредѣлить величину приложенной въ точкѣ A горизонтальной силы P, удерживающей въ равновѣсіи грузъ Q и вѣсъ рычага G, дѣйствующій на плечо $a = 15$ сентим. Кромѣ того опредѣлить давленіе D на точку опоры O.

Фиг. 109.




**Рѣшеніе**. Изъ:

$$P \,.\, 80 = 8 \,.\, 15 + 30 \,.\, 60$$

слѣдуетъ:

$$P = 24 \text{ килогр.}$$

D опредѣляется какъ діагональ параллелограмма, построеннаго на силахъ P и $Q + G$:

$$D = \sqrt{(Q + G)^2 + P^2} = \sqrt{38^2 + 24^2} = \backsim 45 \text{ килогр.}$$

**Задача** 52. Къ призматическому стержню AB, длиною 120 сентим. и вѣсомъ 6,6 килогр., приложенъ въ точкѣ A грузъ $P = 35$ килогр., а въ точкѣ B грузъ $Q = 20$ килогр. Гдѣ должна находиться точка опоры стержня, чтобы послѣдній сохранилъ равновѣсіе?

**Рѣшеніе**. Если обозначимъ неизвѣстное разстояніе AO (сравн. фиг. 99, стр. 79) черезъ r, то:

$$OS = a = 60 - r$$
$$OB = l = 120 - r$$

и по уравненю 67):

$$35 \,.\, r = 6{,}6\,(60 - r) + 20\,(120 - r),$$

откуда:

$$r = 45{,}4 \text{ сентим.}$$

**Задача 53.** Тѣло вѣситъ на одной чашкѣ (невѣрныхъ) обыкновенныхъ лавочныхъ вѣсовъ 3 килогр., а на другой—3,4 килогр. Опредѣлить дѣйствительный вѣсъ тѣла.

**Рѣшенiе.** Если обозначимъ длины обоихъ плечъ коромысла черезъ $l_1$ и $l_2$, то имѣемъ:

изъ перваго взвѣшиванія: $Q \cdot l_1 = 3 \cdot l_2$

„ второго „ $Q \cdot l_2 = 3{,}4 \cdot l_1$

слѣдовательно $Q^2 = 3 \cdot 3{,}4$

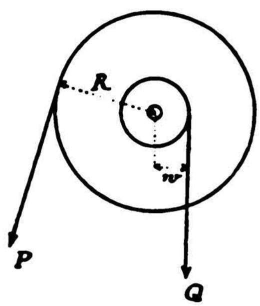
откуда:

$$Q = \sqrt{3 \cdot 3{,}4} = 3{,}194 \text{ килогр.}$$

## 2. Воротъ.

**Воротъ** состоитъ въ простѣйшемъ случаѣ (фиг. 110) изъ колеса, соединеннаго неподвижно съ цилиндрическимъ валомъ такъ, что оба имѣютъ одну и ту же геометрическую ось. Концы вала снабжены цапфами, опирающимися на подшипники, въ которыхъ онѣ и могутъ вращаться.

Фиг. 110.




Валъ можетъ быть расположенъ горизонтально и вертикально, а колесо можетъ быть замѣнено канатнымъ блокомъ, ременнымъ шкивомъ или зубчатымъ колесомъ, а также рукоятью или спицами.

Назначеніе ворота состоитъ въ томъ, чтобы при помощи силы P, приложенной къ окружности колеса, удерживать въ равновѣсіи или равномѣрно поднимать грузъ Q, дѣйствующій на окружности вала.

Условіе равновѣсія будетъ то же, что и для двуплечнаго рычага, при чемъ радіусъ колеса принимается за плечо силы, а радіусъ вала — за плечо груза.

Если R—радіусъ колеса, w—радіусъ вала, то:

$$PR = Qw$$

или:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \quad \dots\dots\dots \quad 68)$$

т. е. **сила относится къ поднимаемому грузу, какъ радіусъ вала къ радіусу колеса.**

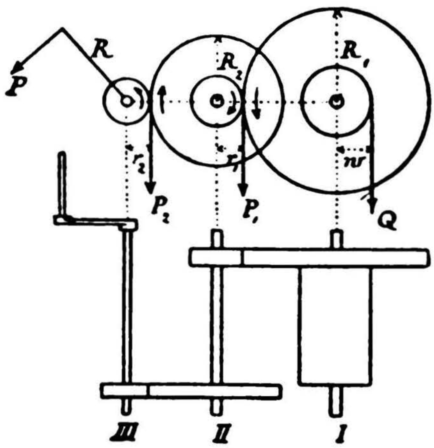
Вмѣсто того, чтобы дѣйствовать на окружность вала, грузъ Q можетъ дѣйствовать на окружность **барабана**, скрѣпленнаго съ этимъ валомъ. Далѣе, сила на окружности колеса можетъ одновременно служить грузомъ для вала другого ворота, связаннаго съ первымъ такимъ образомъ, что колесо перваго вала передаетъ силу, дѣйствующую на его окружности второму валу или колесу, на немъ насаженному. Такимъ образомъ придемъ къ системѣ зубчатыхъ колесъ, представленной на фиг. 111 схематически. Пользуясь обозначеніями фиг. 111 получимъ условія равновѣсія:

для перваго вала: I: $Qw = P_1R_1$, или $P_1 = \frac{Qw}{R_1}$

„ второго „ II: $P_1r_1 = P_2R_2$, „ $P_2 = \frac{P_1r_1}{R_2}$

„ третьяго „ III: $P_2r_2 = PR$, „ $P = \frac{P_2r_2}{R}$

Фиг. 111.




Подставляя въ послѣднее равенство значенія для $P_2$ и $P_1$ изъ предыдущихъ равенствъ, получимъ:

$$P = P_1 \frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R} = Q \frac{w}{R_1} \frac{r}{R_2} \frac{r_2}{R},$$

или:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 69)$$

Такъ какъ радіусы колесъ относятся, какъ ихъ окружности, а у зубчатыхъ колесъ радіусы относятся, какъ числа зубцовъ (такъ какъ колесо, окружность котораго, напр., вдвое болѣе окружности другого, имѣетъ и вдвое больше зубцовъ, чѣмъ второе), то вмѣсто отношеній $\frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R_1}$ въ уравненіе 69) для зубчатыхъ колесъ можно подставить отношенія числа зубцовъ $\frac{z_1}{Z_1}$, $\frac{z_2}{Z_2}$, и тогда получимъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \cdot \frac{z_1}{Z_1} \cdot \frac{z_2}{Z_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 70)$$

**На основаніи теоремы, помѣщенной на стр. 77:**

**работа силы = работа груза,**

**если обозначить черезъ v скорость силы, а черезъ c — скорость груза, можно написать:**

$$Pv = Qc \text{: или: } c = \frac{P}{Q}\, v \quad \dots\dots\dots \quad 71)$$

**Задача 54.** Какъ велика сила P, удерживающая въ равновѣсіи на воротѣ грузъ $Q = 500$ килогр., если радіусъ колеса $R = 75$ сент., а радіусъ вала $w = 15$ сент.?

**Рѣшеніе.** Изъ уравненія 68) имѣемъ:

$$P = Q\, \frac{w}{R} = 500 \cdot \frac{15}{75} = 100 \text{ килогр.}$$

**Задача 55.** На валъ, на концѣ котораго имѣется рукоять, длиною 40 сентим., намотанъ канатъ, удерживающій грузъ въ 200 килогр.

Какъ великъ долженъ быть радіусъ вала w, чтобы сила въ 32 клгр. приложенная къ рукояти, была въ состояніи равномѣрно поднимать данный грузъ?

**Рѣшеніе.** Изъ уравненія 68) имѣемъ:

$$\frac{PR}{Q} = \frac{32 \cdot 40}{200} = 6{,}4 \text{ сентим.}$$

**Задача 56.** Рукоять ворота имѣетъ длину 40 сентим., колесо на валу съ рукоятью имѣетъ радіусъ 10 сентим., радіусъ колеса барабана 60 сентим. Какой грузъ можно поднять этимъ воротомъ (теоретически), если будутъ работать 3 работника, изъ которыхъ каждый развиваетъ силу въ 15 килогр., и если радіусъ барабана = 10 сентим.?

**Рѣшеніе.** Согласно уравненію 69) имѣемъ:

$$\frac{P}{Q} = \frac{w}{R} \cdot \frac{r_1}{R_1}$$

Подставимъ сюда:

$$P = 4 \cdot 15 = 60 \text{ килогр.}$$
$$w = 10; \quad R = 40$$
$$r_1 = 10; \quad R_1 = 60$$

слѣдовательно:

$$Q = P \cdot \frac{R}{w} \cdot \frac{R_1}{r_1} = 60 \cdot \frac{40}{10} \cdot \frac{60}{10} = 1440 \text{ килогр.}$$

**Задача 57.** Требуется построить воротъ съ двумя парами колесъ (двойной передачей), при помощи котораго 4 рабочихъ могли бы поднимать грузъ $Q = 3000$ килогр. При этомъ дано: сила одного рабочаго при рукояти = 15 килогр., длина рукояти $R = 40$ сентим.; радіусъ барабана (+ половина толщины каната) $w = 20$ сентим. Какъ должны относиться между собою радіусы колесъ? (См. фиг. 111.)

**Рѣшеніе.** Сила у рукояти:

$$P = 4 \cdot 15 = 60 \text{ килогр.}$$

Слѣдовательно:

$$PR = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ килогр.сентим.}$$

Моментъ груза равенъ:

$$Qw = 3000 \cdot 20 = 60\,000 \text{ килогр.сентим.}$$

откуда:

$$\frac{PR}{Qw} = \frac{2400}{60\,000} = \frac{1}{25}$$

А такъ какъ по уравненію 69):

$$\frac{PR}{Qw} = \frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_2}{R_2}$$

то:

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r^2}{R_2} = \frac{1}{25}.$$

Теоретически совершенно безразлично, какъ представить отношеніе $\frac{1}{25}$ въ видѣ 2 множителей, практически же желательно имѣть эти множители по возможности равными; такъ, напримѣръ:

$$\frac{1}{25} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \quad \text{или} \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6.25}$$

Если принять скорость силы у рукояти $v = 0{,}8$ м., то скорость груза или скорость поднятія будетъ, по уравненію 71), равна:

$$c = \frac{60}{3000} \cdot 0{,}8 = 0{,}016 \text{ метр.}$$

## 3. Блокъ.

**Блокъ** представляетъ собою круглую шайбу, которая вращается на оси, проходящей черезъ ея центръ и перпендикулярной къ ея плоскости, и которая имѣетъ на окружности желобкообразное углубленіе для помѣщенія каната или цѣпи. Ось блока своими концами закрѣплена въ **обоймѣ**.

Различаютъ **неподвижные** и **подвижные** блоки.

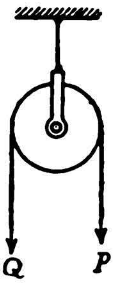
**Неподвижнымъ** блокомъ называется такой блокъ, обойма котораго прикрѣплена къ неподвижной точкѣ, такъ что блокъ можетъ совершать только вращательное движеніе вокругъ своей оси, а не поступательное (фиг. 112).

Къ одному концу каната приложена сила, на другомъ прикрѣпленъ грузъ, а такъ какъ сила и грузъ имѣютъ одинаковое разстояніе отъ оси вращенія, то въ этомъ случаѣ сила должна быть равна грузу, слѣдовательно: $P = Q$.

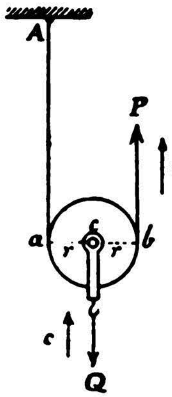
Поэтому въ неподвижномъ блокѣ ничего не выигрывается въ силѣ, и онъ служитъ только для того, чтобы дать силѣ желаемое направленіе (направляющій блокъ, передаточный шкивъ).

Подвижный, или свободный блокъ совершаетъ, кромѣ вращательнаго, еще и поступательное движеніе. Грузъ Q привѣшенъ здѣсь къ крюку обоймы и поддерживается канатомъ, одинъ конецъ котораго прикрѣпленъ къ неподвижной точкѣ A, а къ другому—приложена сила P или непосредственно (фиг. 113), или при помощи другого, неподвижнаго блока, черезъ который перекинутъ незакрѣпленный конецъ веревки (фиг. 114).

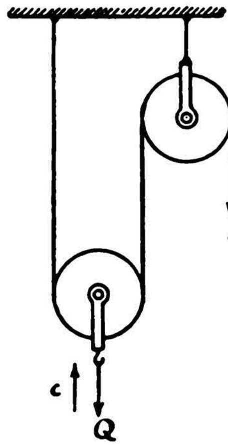
Фиг. 112.




Фиг. 113.




Фиг. 114.




Если оба каната параллельны, то равновѣсіе будетъ существовать при силѣ, равной половинѣ величины груза. При этомъ вѣсъ подвижнаго блока вмѣстѣ съ обоймой надо причислить къ грузу; а такъ какъ большей частью вѣсъ блока очень незначителенъ въ сравненіи съ грузомъ, то его можно вовсе не принимать во вниманіе.

Дѣйствіе подвижнаго блока можно привести къ дѣйствію одноплечнаго рычага, а именно: если вообразимъ, что закрѣпленный въ неподвижной точкѣ A конецъ каната (фиг. 113) перенесенъ въ точку a на окружности блока, то точку a можно разсматривать какъ опорную точку рычага ab. Тогда b будетъ точка приложенія силы P, а c—точка приложенія груза Q; обозначивъ же радіусъ блока черезъ r, найдемъ, что для равновѣсія необходимо, чтобы:

$$P \cdot 2r = Qr$$

или:

$$P = \tfrac{1}{2} Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 72)$$

Здѣсь такъ же (какъ всегда) работа силы равна работѣ груза.

Если обозначить скорость силы черезъ v, скорость груза — черезъ c, то:

$$Pv = Qc; \text{ или } \tfrac{1}{2}Qv = Qc$$

слѣдовательно:

$$c = \tfrac{1}{2}v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 73)$$

т. е. сила въ одно и то же время проходитъ вдвое большій путь, чѣмъ грузъ.

Если соединить неподвижный блокъ съ нѣсколькими подвижными блоками такъ, какъ показано на фиг. 115, то такое приспособленіе называется полиспастомъ. Нижній блокъ несетъ грузъ Q, сила P приложена къ канату, перекинутому черезъ верхній неподвижный блокъ. Натяженіе каната, перекинутаго черезъ нижній блокъ, будетъ, по уравненію 72):

$$K_1 = \frac{Q}{2}.$$

Одновременно съ этимъ $K_1$ представляетъ грузъ, привѣшенный ко второму блоку; слѣдовательно, натяженіе каната, перекинутаго черезъ второй блокъ, будетъ:

$$K_2 = \frac{K_1}{2} = \frac{Q}{4} = \frac{Q}{2^2}$$

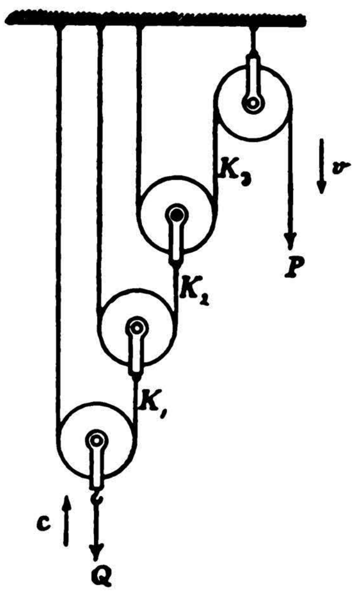
Такимъ же образомъ найдемъ:

$$K_3 = \frac{Q}{8} = \frac{Q}{2^3} = P$$

и вообще, при n подвижныхъ блокахъ:

$$P = \frac{Q}{2^n} \quad \ldots\ldots \quad 74)$$

Фиг. 115.




или: сила P равна грузу Q, дѣленному на ту степень двухъ, сколько подвижныхъ блоковъ въ полиспастѣ.

При 4 подвижныхъ блокахъ, напримѣръ, можно силою P поднять грузъ Q, который въ $2^4 = 16$ разъ больше силы P; при 5 подвижныхъ блокахъ:

$$Q = 2^5 P = 32 P$$

и т. д.

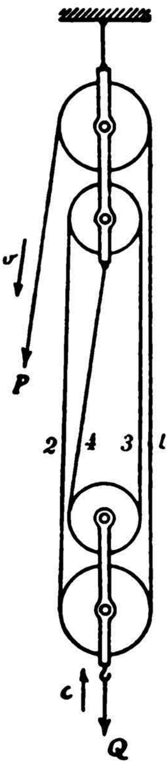
Изъ равенства же $Pv = Qc$ опредѣлится скорость c груза:

$$c = \frac{P}{Q} v = \frac{v}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 75)$$

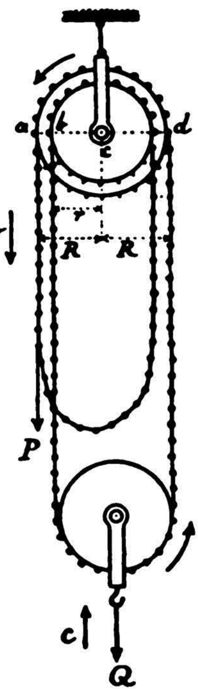
Хотя при такого рода полиспастѣ малой силой можно поднять относительно большій грузъ, но все-таки онъ не имѣетъ большого примѣненія.

Другое сочетаніе блоковъ (практически болѣе важное), служащее для подъема тяжестей, носитъ названіе тали (фиг. 116) или полиспаста 2-го рода, при которомъ нѣсколько блоковъ заключены въ общую обойму (коробку) и помѣщены или одинъ надъ другимъ, или рядомъ. На фиг. 116 для ясности блоки изображены одинъ надъ другимъ.

Фиг. 116.




Фиг. 117.




Тали состоятъ изъ верхней неподвижной и нижней подвижной коробокъ; къ послѣдней привѣшенъ грузъ Q. Канатъ прикрѣпленъ къ верхней коробкѣ и послѣдовательно огибаетъ всѣ блоки нижней и верхней коробокъ; на послѣдній свободный конецъ дѣйствуетъ сила P.

Если въ нижней коробкѣ n блоковъ, то грузъ поддерживается 2n канатами, изъ которыхъ каждый натянутъ силою P. Не принимая во вниманіе тренія и сопротивленій, которыя вообще здѣсь достаточно значительны (см. § 16), получимъ слѣдующее условіе равновѣсія;

$$Q = 2nP; \text{ или: } P = \frac{Q}{2n} \quad \ldots \ldots \quad 76)$$

Сила равна грузу, дѣленному на двойное число подвижныхъ блоковъ.

Изъ $Pv = Qc$ снова опредѣляемъ скорость груза:

$$c = \frac{P}{Q} \cdot v = \frac{v}{2n} \qquad \text{77)}$$

Дифференціальный блокъ состоитъ изъ двухъ вмѣстѣ связанныхъ (большею частью даже отлитыхъ изъ одного куска) неподвижныхъ блоковъ различныхъ радіусовъ, вращающихся на общей оси, и изъ одного свободнаго блока, къ крюку котораго привѣшенъ грузъ (фиг. 117). Неподвижные блоки снабжены выступами, которые входятъ въ звенья цѣпей и не позволяютъ этимъ послѣднимъ скользить по окружностямъ блоковъ.

При подъемѣ тяжести безконечная цѣпь съ одной стороны сматывается съ маленькаго блока и одновременно съ этимъ съ другой стороны наматывается на большой блокъ. Натяженіе каждой цѣпи равно $^1/_2\, Q$ (такъ какъ обѣ вѣтви цѣпи должны поднять грузъ $Q$); слѣдовательно, если принять $abcd$ за двуплечный рычагъ съ точкою вращенія $c$, то условіе равновѣсія будетъ:

$$P \cdot \overline{ac} + {}^1/_2\, Q \cdot \overline{bc} = {}^1/_2\, Q \cdot \overline{cd}$$

или, обозначивъ радіусы блоковъ черезъ $R$ и $r$:

$$PR + {}^1/_2\, Qr = {}^1/_2\, QR$$

откуда вытекаетъ:

$$P = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad \text{78)}$$

Изъ условія:

$$Pv = Qc$$

получается выраженіе для скорости груза:

$$c = \frac{v}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right) \qquad \text{79)}$$

Существенная выгода дифференціальнаго блока состоитъ еще въ томъ, что если разница въ радіусѣ блоковъ $R$ и $r$ не очень велика, то самостоятельное опусканіе груза назадъ (послѣ подъема), благодаря присутствію однихъ сопротивленій, устраняется, т. е. для удержанія груза на произвольной высотѣ не требуется дальнѣйшаго приложенія силы. Большею частью у имѣющихся въ продажѣ дифференціальныхъ блоковъ:

$$\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$$

Задача 58. Какъ велика должна быть сила, чтобы поднять грузъ въ 200 килогр. при помощи одного подвижнаго блока, вѣсящаго 6 килогр.?

Рѣшеніе:

$$P = \frac{Q + G}{2} = \frac{200 + 6}{2} = 103 \text{ килогр.}$$

Задача 59. Грузъ въ 400 килогр. требуется поднять полиспастомъ съ тремя подвижными блоками. Какъ велика должна быть потребная для этого сила, если не принимать во вниманіе вѣса блоковъ?

Рѣшеніе. Изъ уравненія 74) имѣемъ:

$$P = \frac{Q}{2^3} = \frac{400}{8} = 50 \text{ килогр.}$$

Задача 60. Если въ предыдущей задачѣ вѣсъ каждаго блока будетъ 6 килогр., то какова тогда будетъ сила, необходимая для подъема груза?

Рѣшеніе. Вообще для подъема блоковъ необходима слѣдующая сила:

$$P_1 = \frac{G}{2} + \frac{G}{2^2} + \frac{G}{2^3} = \frac{G}{2^3}(1 + 2 + 2^2)$$

слѣдовательно здѣсь:

$$P = \frac{Q}{2^3} + P_1 = \frac{Q + 7G}{8} = \frac{400 + 7 \cdot 6}{8} = 55{,}25 \text{ килогр. *)}.$$

Задача 61. Двое рабочихъ, изъ которыхъ каждый вѣситъ 75 кгр., повисли на свободный конецъ каната тали, имѣющаго 4 подвижныхъ блока. Какой грузъ могутъ они поднять, если принять вѣсъ коробки въ 10 килогр., и какъ относятся между собою пути, пройденные силой и грузомъ?

Рѣшеніе. На основаніи уравненія 76):

$$Q = 8P - G = 8 \cdot 150 - 10 = 1190 \text{ килогр.}$$

На основаніи уравненія 77), путь, пройденный силой, въ 8 разъ больше пути груза.

Задача 62. Какой грузъ можно поднять дифференціальнымъ блокомъ, если $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ и сила $P = 50$ килогр.?

Рѣшеніе. Изъ уравненія 78) имѣемъ:

$$Q = \frac{2P}{1 - \frac{r}{R}} = \frac{2 \cdot 50}{1 - \frac{11}{12}} = 1200 \text{ килогр.}$$

---

*) Общее выраженіе для P при n свободныхъ блокахъ слѣдующее:

$$P = \frac{Q + (2^n - 1) \cdot G}{2^n}$$

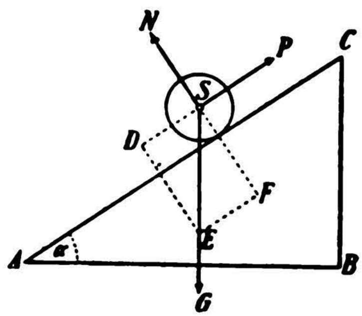
## 4. Наклонная плоскость.

Подъ наклонной плоскостью разумѣютъ плоскость, составляющую съ горизонтальной плоскостью какой-нибудь уголъ $\alpha$ (фиг. 118). Если опустить изъ какой-нибудь точки C этой плоскости перпендикуляръ CB на горизонтальную плоскость, то:

AC = l — называютъ длиною наклонной плоскости,
AB = b „ основаніемъ „ „
BC = h „ высотою „ „

Пусть на наклонной плоскости находится тѣло; если вѣсъ тѣла G, приложенный къ его центру тяжести S, разложить на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна SD параллельна направленію AC, а другая SF перпендикулярна къ нему, то послѣдняя уравновѣсится сопротивленіямъ N наклонной плоскости.

Фиг. 118.




$$N = SF = DE.$$

Подъ дѣйствіемъ составляющей SD тѣло (не принимая во вниманіе тренія) пришло бы въ равномѣрно-ускоренное движеніе. Чтобы удержать тѣло въ равновѣсіи, необходимо приложить къ нему силу P, равную, но прямопротивоположную по направленію составляющей SD:

$$P = SD.$$

Изъ подобія треугольниковъ SDE и ABC слѣдуетъ:

$$DE : SE = AB : AC$$

или:

$$N : G = b : l.$$

**Нормальное давленіе относится къ вѣсу тѣла, какъ основаніе наклонной плоскости къ ея длинѣ.**

Изъ послѣдняго равенства нормальное давленіе равно:

$$N = G\,\frac{b}{l} = G \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

Далѣе, изъ тѣхъ же треугольниковъ SDE и ABC слѣдуетъ:

$$SD : SE = BC : AC$$

или:

$$P : G = h : l.$$

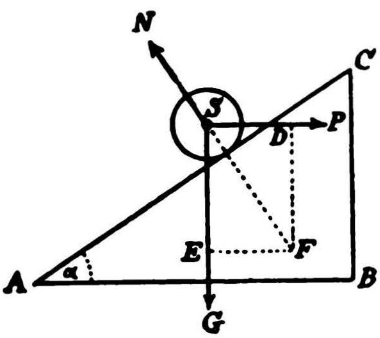
**Сила относится къ грузу (вѣсу тѣла), какъ высота наклонной плоскости къ ея длинѣ.**

Отсюда сила P равна:

$$P = G\frac{h}{l} = G.\sin\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 81)$$

Если сила P, необходимая для того, чтобы удержать тѣло въ равновѣсіи, параллельна основанію AB (фиг. 119) наклонной плоскости, то равнодѣйствующая G и P должна быть направлена по перпендикуляру къ AC. Поэтому, если построимъ параллелограммъ SEFD, въ которомъ сторона SE равна вѣсу тѣла G, то сторона SD (= EF) дастъ величину силы P, а діагональ SF ($\perp$ AC) — величину равнодѣйствующей G и P, равную нормальному сопротивленію N.

Фиг. 119.




Изъ подобія треугольниковъ SEF и ABC слѣдуетъ:

$$SF : SE = AC : AB$$

или:

$$N : G = l : b.$$

Нормальное давленіе относится къ грузу, какъ длина наклонной плоскости къ ея основанію.

Слѣдовательно, нормальное давленіе равно:

$$N = G\frac{l}{b} = \frac{G}{\cos\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 82)$$

Далѣе, изъ тѣхъ же треугольниковъ слѣдуетъ:

$$EF : SE = BC : AB$$

или:

$$P : G = h : b.$$

Горизонтальная сила P относится къ грузу, какъ высота наклонной плоскости къ ея основанію.

Отсюда:

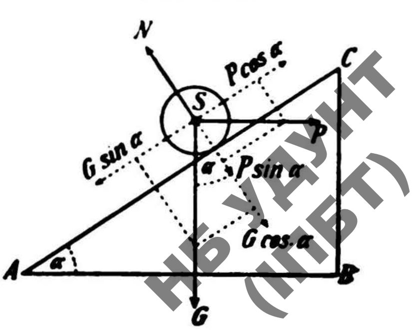
$$P = G\frac{h}{b} = G\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad . \; . \qquad 83)$$

Тѣ же самыя значенія для P и N мы получимъ, если, согласно фиг. 120, силы G и P будутъ разложены на ихъ составляющія параллельно AC и перпендикулярно къ AC.

Въ такомъ случаѣ:

$$P\cos\alpha = G\sin\alpha; \text{ или : } P = G\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Фиг. 120.



и:

$$X = P \sin\alpha + G \cos\alpha$$

или, подставляя для P вышенайденное значеніе:

$$N = G \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha + G\cos\alpha$$

$$N = G\,\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha + G\cos\alpha$$

а если помножить и раздѣлить второй членъ правой части на знаменатель $\cos\alpha$, то:

$$N = G\,\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{G}{\cos\alpha}$$

Задача 63. На наклонной плоскости, съ основаніемъ $b = 4$ м. и высотою $h = 3$ м., находится грузъ $G = 200$ килогр. Какъ велика должна быть сила P, удерживающая этотъ грузъ въ равновѣсіи, и какъ велико нормальное сопротивленіе N,

a) если сила P параллельна наклонной плоскости?

b) „ „ P „ основанію?

Рѣшеніе. Такъ какъ длина наклонной плоскости:

$$l = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ метр.}$$

то:

для a) по уравненію 80): $N = 200 \cdot \frac{4}{5} = 160$ килогр.

„ „ 81): $P = 200 \cdot \frac{3}{5} = 120$ „

для b) по уравненію 82): $N = 200 \cdot \frac{5}{4} = 250$ „

„ „ 83): $P = 200 \cdot \frac{3}{4} = 150$ „

Задача 64. Какъ велика должна быть горизонтальная сила P, которая будетъ въ состояніи воспрепятствовать сбѣганію товарнаго вагона, въ 8000 килогр. вѣсомъ, на участкѣ дороги съ подъемомъ въ 1 : 100 (т. е. на 100 м. длины 1 м. подъема)?

Рѣшеніе. Изъ уравненія 83) слѣдуетъ:

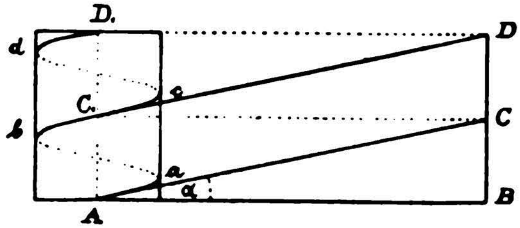
$$P = 8000 \cdot \frac{1}{100} = 80 \text{ килогр.}$$

## 5. Винтъ.

Если наклонную плоскость съ угломъ $\alpha = BAC$ (фиг. 221) обернемъ вокругъ прямого (кругового) цилиндра такъ, что одна сторона угла AB будетъ перпендикулярна къ оси цилиндра, то другая сторона AC опишетъ на цилиндрѣ винтовую линію.

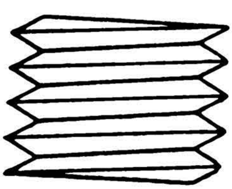
Если длина AB равна окружности цилиндра, то послѣ обертыванія точка B совпадетъ съ A, а точка C займетъ положеніе $C_1$ по перпендикуляру надъ точкой A. Разстояніе $AC_1$ между двумя витками винта по образующей цилиндра называется высотою хода винта; уголъ $\alpha$ называется угломъ подъема винта. Часть винтовой линіи $AabC_1$ между точками A и $C_1$ называется длиною хода винта. Если еще разъ, начиная отъ точки $C_1$, обернуть вокругъ цилиндра треугольникъ $C_1CD$, равный треугольнику ABC, то сторона $C_1D$ опишетъ вторую винтовую линію $C_1cdD_1$ и т. д.

Фиг. 121

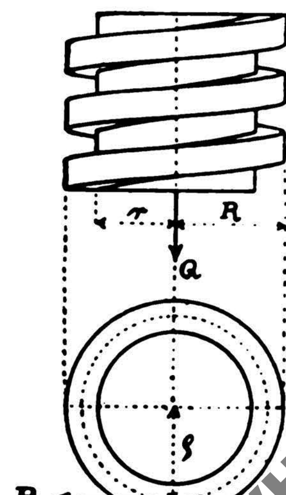



Если по всей длинѣ винтовой линіи на боковой поверхности цилиндра будетъ двигаться равнобедренный треугольникъ, то получимъ винтъ съ треугольной нарѣзкой (фиг. 122); если вмѣсто треугольника возьмемъ прямоугольникъ или квадратъ, то получимъ, такъ назыв., винтъ съ прямоугольной нарѣзкой (фиг. 123).

Фиг. 122.



Фиг. 123.




Винтъ, собственно говоря, состоитъ изъ двухъ частей. Одна часть снабженная выдающейся нарѣзкой, образуетъ собственно самый винтъ, или стержень винта: другая — снабженная углубленной нарѣзкой, которая получится, если на внутренней поверхности цилиндра по длинѣ винтовой линіи вырѣзать такое вогнутое пространство, чтобы винтъ какъ разъ вошелъ въ него, называется гайкой.

Винты съ треугольной нарѣзкой примѣняются, главнымъ образомъ, для скрѣпленій, винты же съ прямоугольной нарѣзкой употребляются для преобразованія вращательнаго движенія въ поступательное (напр., нажимной винтъ (фиг. 153), ходовой винтъ токарнаго станка).

При этомъ или винтъ вращается въ гайкѣ, или гайка вращается вокругъ винта, а въ зависимости отъ этого,—или винтъ или гайка совершаютъ поступательное движенie.

Винтъ можно разсматривать какъ наклонную плоскость, обернутую вокругъ цилиндра, основанie которой равно окружности цилиндра, а высота равна высотѣ хода винта. Сила P (фиг. 123) дѣйствуетъ по касательной къ окружности винта и параллельно основанiю AB наклонной плоскости, грузъ Q — перпендикулярно къ AB; условie равновѣсiя для винта согласуется вполнѣ съ условieмъ равновѣсiя для наклонной плоскости (уравненie 83), стр. 96.

Если среднiй радiусъ винта равенъ $\rho = \frac{R + r}{2}$, слѣдовательно окружность винта $2\rho\pi$, то изъ уравненiя 83) слѣдуетъ:

$$P = Q\frac{h}{2\rho\pi} = Q\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \ldots \quad 84)$$

Къ тому же самому выводу (уравненie 84) можно придти и изъ того соображенiя, что во время одного оборота путь силы $= 2\rho\pi$, а путь груза $= h$, т. е:

$$P \cdot 2\rho\pi = Qh$$

откуда получимъ для P вышеприведенное его значенie.

Помножая обѣ части уравненiя 84) на $\rho$, найдемъ:

$$P\rho = Q\rho\frac{h}{2\rho\pi}$$

Здѣсь моментъ силы $P\rho$ можно замѣнить какимъ-нибудь другимъ равновеликимъ моментомъ Kl, гдѣ l — длина одноплечнаго рычага, на концѣ котораго приложена сила K. Тогда:

$$Kl = Q\rho\frac{h}{2\rho\pi} = Q\rho\operatorname{tg}\alpha \quad \ldots \ldots \quad 85)$$

**Задача 65.** При помощи винта, съ наружнымъ дiаметромъ = 5 сент. и внутреннимъ = 4 сентим. и высотою хода = 1 сентим., необходимо развить давленie въ 5000 килогр. Какая требуется для этого сила,

a) если она приложена къ окружности средняго радiуса винта?

b) если она дѣйствуетъ на плечо $l = 50$ сентим.?

**Рѣшенie.** При $R = 2{,}5$ сентим. и $r = 2$ сентим. среднiй радiусъ равенъ:

$$\rho = \frac{2{,}5 + 2}{2} = 2{,}25 \text{ сентим.}$$

окружность винта:

$$2\rho\pi = 14{,}137 \text{ сентим.}$$

и тогда для a) по уравненiю 84):

$$P = 5000 \cdot \frac{1}{14{,}137} = \backsim 354 \text{ килогр.}$$

для б) по уравненію 85):

$$K = \frac{5000}{50} \cdot 2{,}25 \cdot \frac{1}{14{,}137} = \backsim 16 \text{ килогр.}$$

Уголъ подъема винта $\alpha$ опредѣлится изъ:

$$tg\alpha = \frac{1}{14{,}137} = 0{,}0707$$

а именно:

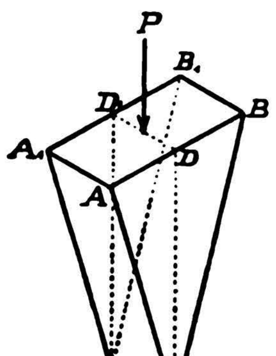
$$\alpha = \backsim 4^0.$$

### 6. Клинъ.

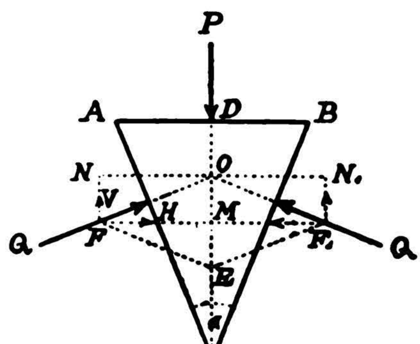
Клинъ (фиг. 124) есть треугольная призма, основаніе которой по большей части представляетъ равнобедренный или прямоугольный треугольникъ (двусторонній и односторонній клинъ) и которую можно разсматривать какъ подвижную двойную наклонную плоскость.

Плоскости $AA_1C_1C$ и $BB_1C_1C$ называются сторонами, плоскость $AA_1B_1B$ — головкой клина, а средняя линія CD — высотою клина. Односторонній клинъ представляетъ призма $AA_1C_1CDD_1$.

Фиг. 124.




Фиг. 125.




Назначеніе клина, служащаго или для закрѣпленія, или раздѣленія двухъ плоскостей (напримѣръ, при раскалываніи бревна), состоитъ въ томъ, чтобы преодолѣть сопротивленія или грузы Q, приложенные къ его сторонамъ, при помощи силы P, дѣйствующей на головку клина.

Если грузы Q дѣйствуютъ по перпендикуляру къ сторонамъ AC и BC клина (фиг. 125) и если разложить силу P = OE по нормалямъ къ AC и BC на составляющія OF и $OF_1$, то для равновѣсія необходимо, чтобы каждая изъ составляющихъ силы P была равна по величинѣ и прямопротивоположна по направленію грузамъ Q, а потому:

$$P : Q = OE : OF$$

А такъ какъ изъ подобія треугольниковъ OEF и ABC имѣемъ:

$$OE : OF = AB : AC$$

то:

$$P : Q = AB : AC \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 86)$$

т. е.: сила относится къ грузу, какъ головка клина въ его сторонѣ.

Если уголъ при вершинѣ C обозначимъ черезъ $\alpha$, то:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{1}{2}P}{Q}$$

откуда слѣдуетъ:

$$P = 2Q\sin\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 87)$$

Если разложить грузы Q на составляющіе H ($\perp$ CD) и V ($\parallel$ CD), то изъ подобія треугольниковъ OFM и ACD найдемъ:

$$Q : H = AC : CD$$

Перемножая это уравненіе съ уравненіемъ 86), получимъ:

$$P : H = AB : CD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 88)$$

тригонометрически же:

$$P = 2\,H\,tg\frac{\alpha}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 89)$$

**Задача 66.** У двусторонняго клина (фиг. 125) AB = 4 сентим., AC = BC = 32 сентим. На обѣ стороны клина по нормалямъ къ нимъ дѣйствуютъ грузы Q = 500 килогр. При какой силѣ P грузы Q будутъ находиться въ равновѣсіи?

**Рѣшеніе.** Изъ уравненія 86) получаемъ:

$$P = Q \cdot \frac{AB}{AC} = 500 \cdot \frac{4}{32} = 62{,}5 \text{ килогр.}$$

или:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$$

слѣдовательно, и по уравненію 87):

$$P = \frac{2 \cdot 500}{16} = 62{,}5 \text{ килогр.}$$

## § 15.

## Сопротивленія тренія.

По закону инерціи (§ 4, стр. 15) тѣло, двигающееся прямолинейно и равномѣрно и не подвергающееся вновь дѣйствію силъ, будетъ продолжать свое движеніе вѣчно и неизмѣнно. Опытъ учитъ насъ, что этого въ дѣйствительности не происходитъ, а, напротивъ, скорость тѣла все время мало по-малу уменьшается и, въ концѣ концовъ, обращается въ нуль, такъ что тѣло приходитъ въ состояніе покоя. Это явленіе объясняется существованіемъ сопротивленій, препятствующихъ движенію и требующихъ затраты силы на ихъ преодолѣніе.

Сопротивленія эти, по существу своему, бываютъ двухъ родовъ, а именно:

a) Сопротивленіе среды, т. е. сопротивленіе жидкостей или газовъ, въ которыхъ тѣло совершаетъ свое движеніе.

b) Сопротивленіе тренія, всегда проявляющееся, если одно тѣло движется по другому. Такъ какъ поверхности тѣлъ, даже при самой тщательной обработкѣ, никогда не бываютъ абсолютно гладкими, то, при малѣйшемъ взаимномъ давленіи тѣлъ, возвышенія одного тѣла погружаются въ углубленія другого, выступающія частицы обоихъ тѣлъ должны при движеніи одного тѣла по другому или отрываться, или сдвигаться.

Различаютъ треніе при скольженіи, къ которому причисляется особый родъ тренія шиповъ въ подшипникахъ, и треніе при перекатываніи.

Сопротивленіе звеньевъ цѣпей и сопротивленіе жесткости канатовъ также сводятся треніемъ, такъ какъ сопотивленіе сгибанію въ цѣпяхъ выражается треніемъ отдѣльныхъ звеньевъ, а въ канатахъ—треніемъ отдѣльныхъ прядей или проволокъ.

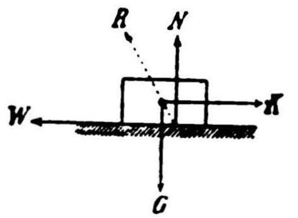
Сопротивленіе среды будетъ изложено въ главѣ VII.

### 1. Треніе при скольженіи (треніе 1-го рода).

Если тѣло движется по твердой поверхности, то между плоскостями соприкосновенія всегда проявляется треніе, какъ сила, направленная противоположно движенію, и если только скорость тѣла должна оставаться постоянной, то для преодолѣнія тренія должна существовать другая сила, дѣйствующая по направленію движенія.

Если поверхность, по которой движется тѣло, горизонтальна, то нормальное сопротивленіе N, равное вѣсу тѣла G, направлено вертикально вверхъ. Поэтому, чтобы удержать тѣло въ равновѣсіи, необходимо для преодолѣнія силы тренія W прибавить еще особую силу R (фиг. 126), которая должна быть тѣмъ больше, чѣмъ больше W. Согласно опыту, сила тренія W находится въ зависимости отъ нормальнаго давленія N, а именно:

Фиг. 126.




$$W = f N \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad 90)$$

гдѣ $f = \frac{W}{N}$ называется коэффиціентомъ тренія; уравненіе 90) читается такъ:

**сила тренія = коэффиціенту тренія × нормальное давленіе.**

Коэффиціентъ тренія зависитъ:

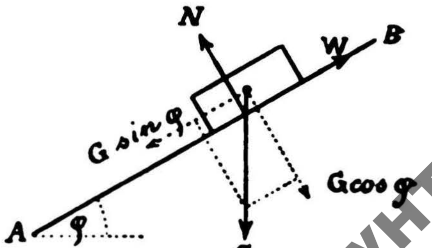
a) отъ матеріала скользящихъ другъ по другу тѣлъ. Чѣмъ тверже матеріалъ, тѣмъ вообще меньше треніе. При этомъ между неоднородными тѣлами треніе меньше, чѣмъ (при одинаковыхъ условіяхъ) между однородными.

b) отъ свойства трущихся поверхностей. Чѣмъ глаже обработаны поверхности тѣлъ, чѣмъ тщательнѣе онѣ смазаны, тѣмъ менѣе коэффиціентъ тренія.

c) отъ скорости скольженія. Чѣмъ меньше скорость, тѣмъ больше коэффиціентъ тренія f. При скорости, равной нулю, т. е. при переходѣ отъ покоя къ движенію, или наоборотъ, f достигаетъ наибольшей величины и называется тогда коэффиціентомъ тренія при покоѣ (см. Приложеніе, табл. I).

Коэффиціентъ тренія можно опредѣлить при помощи наклонной плоскости AB (фиг. 127), уголъ наклона которой $\varphi$ къ горизонтальной плоскости имѣетъ такую величину, что тѣло, положенное на эту наклонную плоскость, будетъ двигаться внизъ съ постоянной скоростью.

Фиг. 127.




Если разложимъ вѣсъ G тѣла на составляющія $G \sin \varphi$ ($\parallel$ AB) и $G \cos \varphi$ ($\perp$ AB), то послѣдняя уравновѣшивается нормальнымъ сопротивленіемъ N, т. е.:

$$N = G \cos \varphi$$

Составляющая $G \sin \varphi$ сама по себѣ сообщила бы тѣлу ускоренное движеніе (внизъ), но этому движенію мѣшаетъ сопротивленіе тренія:

$$W = f N = f G \cos \varphi;$$

и для существованія равновѣсія получимъ условіе:

$$f\ G \cos \varphi = G \sin \varphi$$

или:

$$f = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{. . . . . . . . . . .} \quad 91)$$

Уголъ $\varphi$ называется угломъ тренія. Изъ уравненія 91) слѣдуетъ, что коэффиціентъ тренія равенъ тангенсу угла тренія.

Если скорость движенія тѣла обозначить черезъ v, то эффектъ E, производимый силою тренія, равенъ:

$$E = Wv = fNv \quad \text{. . . . . . . . . .} \quad 92)$$

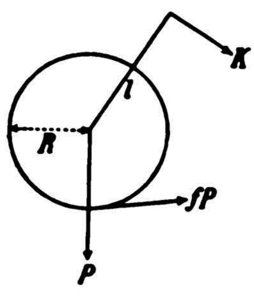
## 2. Треніе въ подшипникахъ и подпятникахъ.

При вращеніи цилиндрической цапфы горизонтальнаго вала, находящейся подъ давленіемъ P, въ подшипникѣ на окружности цапфы появляется сила тренія, противоположная направленію вращенія и равная:

$$W = fP \quad \text{. . . . . . . . . . .} \quad 93)$$

Моментъ ея будетъ (фиг. 128):

Фиг. 128.




$$M = fPR \quad \text{. . . . .} \quad 94)$$

и для уравновѣшиванія этого момента необходимъ моментъ Kl, вращающій въ противоположную сторону.

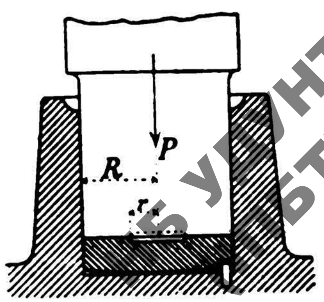
Если обозначимъ черезъ v скорость на окружности цапфы, то, согласно уравненію 92), работа, затрачиваемая на треніе цапфы въ 1 секунду, или потеря эффекта равна:

$$E = Wv = fPv \quad \text{. . . .} \quad 95)$$

или потеря работы, выраженная въ лошадиныхъ силахъ, будетъ:

$$N = \frac{fPv}{75} \quad \text{. . . .} \quad 96)$$

Фиг. 129.




Для пяты (цапфы) вертикальнаго вала, давленіе на которую P дѣйствуетъ по направленію оси ея, а опорная плоскость представляетъ кольцо (фиг. 129), моментъ силы тренія заключается въ предѣлахъ между fPR и fPr и вообще выражается такъ:

$$M = fP\rho \quad \text{. . . .} \quad 97)$$

гдѣ $\rho$ представляетъ нѣкоторый радіусъ цапфы, зависящій отъ распредѣленія давленія, меньшій, чѣмъ R, и большій, чѣмъ r.

Для новыхъ цапфъ, которыя опираются на подпятникъ всей своей нижней кольцевой поверхностью, можно принять давленіе равномѣрно распредѣленнымъ, такъ что у кольцевого вырѣза центръ давленія будетъ совпадать съ центромъ тяжести вырѣза.

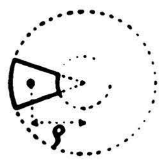
Разстояніе центра тяжести отъ центра круга, по уравненію 42) (стр. 59), равно:

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \cdot \frac{s}{b}$$

Для очень узкаго кольцевого вырѣза (фиг. 130) можно съ достаточной точностью принять дугу b равной хордѣ s, и тогда:

$$\rho = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$$

Фиг. 130.



слѣдовательно, по уравненію 97) моментъ силы тренія равенъ:

$$M = \frac{2}{3} f P \cdot \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \quad \ldots\ldots \quad 98)$$

При $r = 0$, т. е. когда опорная плоскость цапфы представляетъ полный кругъ:

$$M = \frac{2}{3} f P R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 99)$$

У приработавшихся уже цапфъ давленіе не распространяется такъ равномѣрно. Вслѣдствіе большей скорости на окружности наружныхъ частицъ поверхности, изнашиваніе здѣсь больше, чѣмъ у частицъ, лежащихъ ближе во внутрь, такъ что за короткій промежутокъ времени давленіе на единицу поверхности начинаетъ уменьшаться изнутри внаружу. Это будетъ продолжаться до тѣхъ поръ, пока вездѣ не будетъ одинаковаго изнашиванія, т. е. пока цапфа, какъ говорятъ, вполнѣ не приработается. Тогда уже болѣе не наблюдается дальнѣйшаго измѣненія въ распредѣленіи давленія.

У приработавшейся цапфы давленіе на единицу поверхности обратно пропорціонально скорости, а слѣдовательно, и обратно пропорціонально разстоянію отъ центра цапфы.

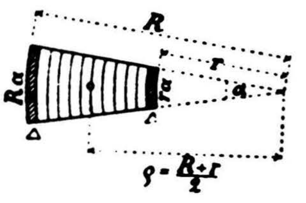
Если обозначимъ давленіе на внѣшней окружности кольцевой поверхности (радіуса R) черезъ $p_a$, а на внутренней (радіуса r) черезъ $p_i$, то, на основаніи только что сказаннаго:

$$\frac{p_a}{p_i} = \frac{r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 100)$$

Если вообразить себѣ очень узкій вырѣзъ изъ кольца (фиг. 131) раздѣленнымъ концентрическими кругами на отдѣльные кольцевые отрѣзки равной (весьма малой) ширины $\Delta$, то давленіе на внѣшнюю часть кольца $= p_a R \alpha \Delta$, а на внутреннюю $= p_i r \alpha \Delta$. А такъ какъ по уравненію 100):

$$p_a R = p_i r.$$

Фиг. 131.




то оба кольцевыхъ отрѣзка испытываютъ одинаковое давленіе. Тому же давленію подвергаются и всѣ промежуточные кольцевые отрѣзки, откуда слѣдуетъ, что равнодѣйствующая всѣхъ давленій отдѣльныхъ частей лежитъ какъ разъ по срединѣ, т. е. на разстояніи:

$$\rho = \frac{R + r}{2}$$

отъ центра цапфы.

Отсюда найдемъ слѣдующее значеніе момента силы тренія, по уравненію 97), для приработавшейся цапфы:

$$M = f P \cdot \frac{R + r}{2} \quad \dots\dots\dots \quad 101)$$

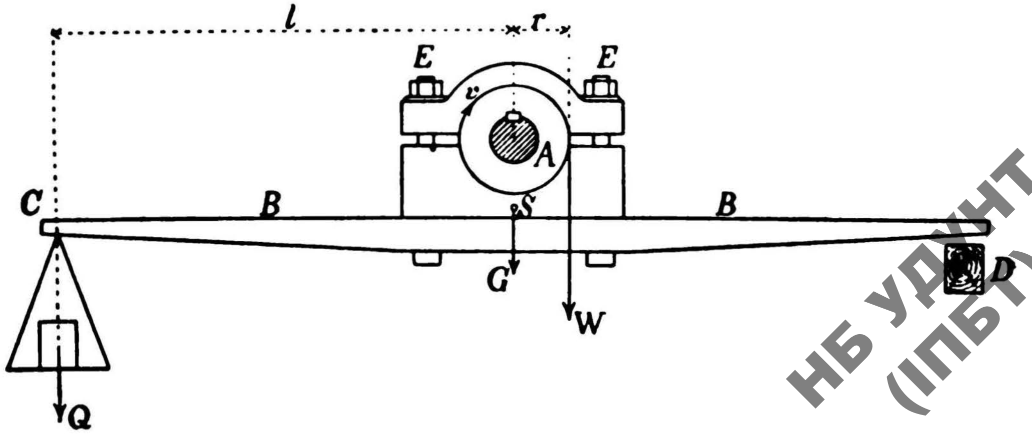
Если цапфа опирается не кольцомъ, а полной площадью круга ($r = 0$), то:

$$M = \tfrac{1}{2} f P R \quad \dots\dots\dots \quad 102)$$

Итакъ, моментъ силы тренія у пяты равенъ половинѣ момента силы тренія у шипа того же діаметра, для котораго давленіе P перпендикулярно къ оси.

Треніемъ въ цапфахъ можно воспользоваться для измѣренія эффекта машины, при помощи особаго приспособленія, называемаго **тормазнымъ динамометромъ** или **динамометромъ Прони** и представленнаго на фиг. 132.

Фиг. 132.



Валъ двигателя снабженъ заклиненнымъ наглухо тормазнымъ дискомъ, на который насажены зажимы, состоящіе изъ двухъ полукруглыхъ деревянныхъ щекъ. Съ нижней щекой неизмѣнно связанъ двуплечій рычагъ B, на одномъ концѣ котораго прикрѣплена чашка вѣсовъ для принятія груза *).

Для примѣненія динамометра Прони необходимо прежде всего разобщить валъ двигателя съ рабочей машиной или передачей, затѣмъ насадить динамометръ, винты котораго лишь слабо притянуты. Если затѣмъ двигатель пустить въ ходъ, то по окружности тормазного диска появится треніе, благодаря которому валъ будетъ стремиться повернуть вмѣстѣ съ собою въ ту же сторону и динамометръ. Однако этому воспрепятствуетъ то обстоятельство, что рычагъ B лежитъ на брусѣ D. Постепеннымъ притягиваніемъ винтовъ E можно достигнуть того, что двигатель будетъ дѣлать то же число оборотовъ, какъ и прежде, т. е. когда онъ былъ сцѣпленъ съ рабочей машиной. При этомъ треніе тормазного диска будетъ поглощать ту работу, какая прежде передавалась отъ вала двигателя рабочей машинѣ. Чашка вѣсовъ, находящаяся по лѣвую сторону, будетъ такъ сильно нагружена, что рычагъ B отодвинется вправо отъ бруса D и приметъ горизонтальное положеніе. Тогда моментъ груза Q (положенный грузъ вмѣстѣ съ вѣсомъ чашки) равенъ моменту силы тренія W, дѣйствующей по окружности тормазного диска слѣдовательно:

$$Wr = Ql; \text{ или } W = Q\,\frac{l}{r}$$

Если черезъ v обозначить скорость на окружности тормазного диска, соотвѣтствующую извѣстному числу оборотовъ n, то, на основаніи уравненія 92), эффектъ:

$$E = Wv = Q\,\frac{l}{r}\,v \quad \ldots\ldots\ldots \quad 103)$$

Такъ какъ:

$$v = \frac{2r\pi n}{60},$$

то искомая работа машины въ лошадиныхъ силахъ:

$$N = Ql\,\frac{n\pi}{30\cdot 75} = 0{,}0014\,Q\,l\,n \quad \ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

Слѣдуетъ еще замѣтить, что если устанавливать валъ на различныя числа оборотовъ, то легко найти, при какомъ числѣ оборотовъ машина развиваетъ наибольшую работу.

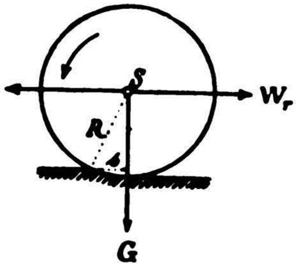
---

*) Все это приспособленіе можетъ быть непосредственно расположено на валу (безъ тормазного диска).

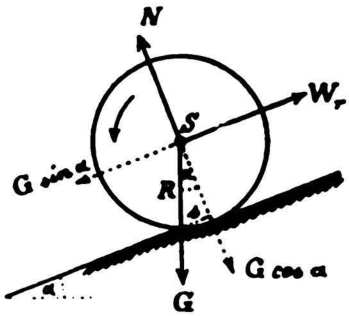
## 3. Тренiе тѣлъ катящихся или тренiе 2-го рода.

Тренiе тѣлъ катящихся проявляется въ томъ случаѣ, если цилиндрическое тѣло катится по поверхности. Такъ какъ никакое вещество не можетъ быть абсолютно твердымъ, то оно сдавливается въ мѣстѣ соприкосновенiя, такъ что въ дѣйствительности имѣетъ не точку, а цѣлую плоскость соприкосновенiя шириною s. Для того, чтобы перекатить тѣло, необходимо приложить опредѣленную силу; слѣдовательно, сдавливанiе вещества производитъ такое же дѣйствiе, какъ сила Wr, приложенная къ центру тяжести тѣла и направленная противоположно движенiю (фиг. 133).

Фиг. 133.




Фиг. 134.




Если α уголъ наклона наклонной плоскости, по которой равномѣрно скатывается тѣло, то по фиг. 134:

$$W_r = G \sin\alpha = G\,\frac{s}{R} \quad . \;.\;.\;.\;.\;.\;. \qquad 105)$$

Величину s можно опредѣлить при помощи угла α.

Для желѣза по желѣзу, такъ же, какъ и для твердаго дерева по твердому дереву въ среднемъ:

$$s = 0{,}05 \text{ сентим.}$$

Для дерева по дереву (не очень твердому):

$$s = 0{,}1 \text{ сентим.}$$

Для камня по камню (на хорошо вымощенныхъ или шоссейныхъ дорогахъ):

$$s = 0{,}15 \text{ сентим.}$$

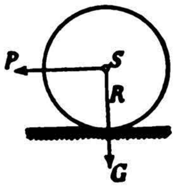
Изъ уравненiя 105) слѣдуетъ: тренiе тѣлъ катящихся прямо пропорцiонально давленiю и обратно пропорцiонально радiусу катящагося цилиндра или колеса. Поэтому, чѣмъ больше колеса повозки, тѣмъ меньше тренiя при передвиженiи.

Для перекатыванія цилиндра или колеса необходимъ, по уравненію 105), моментъ:

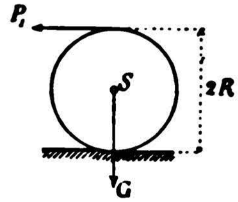
$$M = W_r R = G s \quad \ldots\ldots\ldots \quad 106)$$

Если моментъ M будетъ выраженъ силою P, приложенною къ центру тяжести S (фиг. 135), то:

Фиг. 135.




Фиг. 136.



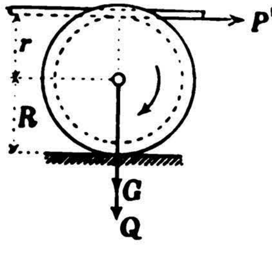

$$P R = G s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 107)$$

Напротивъ, если сила $P_1$ приложена на окружности въ точкѣ, противоположной точкѣ опоры (фиг. 136), то, такъ какъ въ этомъ случаѣ плечо силы $= 2R$:

$$2 P_1 R = G\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 108)$$

Если перекатываніе производится помощью зубчатой рейки, зацѣпляющейся за зубчатое колесо радіуса r, насаженное на оси колеса (фиг. 137), и нагрузка $= G + Q$ (вѣсу колеса + посторонній грузъ), то, если точка зацѣпленія лежитъ какъ разъ противъ точки опоры, давленіе на зубецъ:

Фиг. 137.




$$P' = \frac{(G + Q) s}{R + r} \quad \ldots\ldots \quad 109)$$

Если передача находится въ сцѣпленіи съ зубчатымъ колесомъ, насаженнымъ на оси, то различаютъ, производится ли вращеніе отъ постоянной точки (фиг. 138), или отъ двигающейся впередъ телѣжки (какъ, напр., воротъ подъемнаго края съ механически передвигаемой телѣжкой).

Въ первомъ случаѣ (фиг. 138) примѣнимо то же самое уравненіе 109, если точка зацѣпленія лежитъ противъ точки опоры, между тѣмъ какъ во второмъ (фиг. 139) можно опредѣлить только моментъ силы $P'r$, такъ что относительно тренія въ подшипникахъ (діаметръ цапфы $= d$) получаютъ:

$$P' r = (G + Q) \cdot \left(s + f \frac{d}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

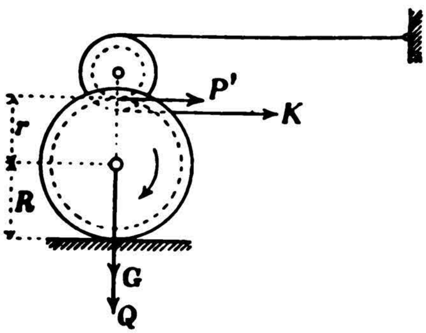
Изъ фиг. 139 слѣдуетъ:

$$Kl = P'r_1$$

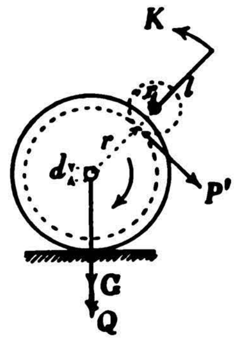
Слѣдовательно, уравненіе 110) приметъ видъ:

$$Kl \cdot \frac{r}{r_1} = (G + Q) \cdot \left(s + f\frac{d}{2}\right)$$

Фиг. 138.




Фиг. 139.

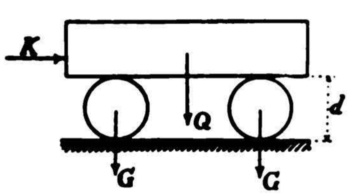



Отсюда отношеніе передачи зубчатыхъ колесъ:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{(G + Q) \cdot \left(s + f\frac{d}{2}\right)}{Kl} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 111)$$

Если грузъ Q перекатывается на двухъ каткахъ, діаметромъ d и вѣсомъ G (для каждаго катка; фиг. 140), то требуемая для этого перекатыванія сила равна:

Фиг. 140.




$$K = \frac{(Q + 2G)s + Qs_1}{d}$$

при чемъ s (внизу) и $s_1$ (вверху) — величины, зависящія отъ матеріала.

Вообще при числѣ катковъ n:

$$K = \frac{(Q + nG)s + Qs_1}{d} \quad . \; . \quad 112)$$

Большею частью вѣсомъ самихъ катковъ, какъ соотвѣтственно малой величиной, можно пренебречь и тогда:

$$K = \frac{Q(s + s_1)}{d}$$

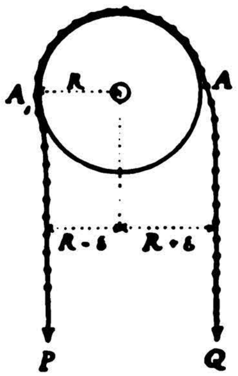
Если опора (путь) состоитъ изъ того же матеріала, какъ и перекатываемый грузъ, то $s = s_1$; слѣдовательно:

$$K = \frac{2Qs}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 113)$$

## 4. Сопротивленіе сгибанію цѣпей и канатовъ.

Это сопротивленіе проявляется въ тѣхъ случаяхъ, когда цѣпь или канатъ навиваются на блокъ или барабанъ или свиваются съ нихъ. У цѣпи, представленной на фиг. 141, гдѣ блокъ вращается равномѣрно силою P, направленной внизъ и одновременно съ этимъ поднимается грузъ Q, въ мѣстахъ A и $A_1$, гдѣ цѣпь изъ прямолинейнаго направленія переходитъ въ криволинейное и обратно, проявляется треніе между отдѣльными звеньями цѣпи. Это треніе дѣйствуетъ, какъ сопротивленіе, прямопротивоположно движенію цѣпи и имѣетъ своимъ слѣдствіемъ то, что цѣпь въ мѣстѣ входа A на блокъ не сейчасъ же прилегаетъ къ окружности блока, а въ мѣстѣ схода $A_1$ не сейчасъ же выпрямляется. Вслѣдствіе этого плечо груза увеличивается на нѣкоторую опредѣленную величину $\varepsilon$, а плечо силы уменьшается на ту же величину $\varepsilon$, въ сравненіи съ радіусомъ блока R.

Фиг. 141.




Поэтому изъ условія равновѣсія

$$P(R - \varepsilon) = Q(R + \varepsilon)$$

слѣдуетъ, что сила P должна быть всегда больше груза Q.

Для канатовъ, гдѣ треніе проявляется между отдѣльными прядями и проволоками, плечи силы и груза измѣняются подобнымъ же образомъ.

Для простоты сопротивленіе канатовъ и цѣпей вводятъ слѣдующимъ образомъ: принимаютъ, что сила и грузъ дѣйствуютъ на одинаковыхъ плечахъ R; но только вмѣсто дѣйствующаго груза Q силою P поднимается грузъ, увеличенный на величину сопротивленія сгибанію. Если черезъ $q_1$ обозначить ту величину, на которую сила P должна быть больше прежней двигающей силы, которая могла удерживать въ равновѣсіи грузъ Q безъ присутствія сопротивленія сгибанію, то:

$$P = Q + q_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 114)$$

Для цѣпей приблизительно:

$$q_1 = f\,\frac{\delta}{R}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots \quad 115)$$

гдѣ $\delta$ — діаметръ звеньевъ, f — коэффиціентъ тренія (въ среднемъ $f = 0{,}25$).

**Для канатовъ** (діаметръ $= \delta$) изъ опытовъ найдено слѣдующее среднее значеніе:

$$q_1 = 0{,}13 \, \frac{\delta^2}{R} \, Q \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 116)$$

**Задача 67.** Золотникъ паровой машины, работающей при 6 атмосферахъ (6 килогр./сентим.$^2$), безъ конденсаціи, имѣетъ въ длину 26 сентим., въ ширину 25 сентим. Опредѣлить силу, необходимую для его передвиженія, если коэффиціентъ тренія $f = 0{,}1$.

**Рѣшеніе.** Полное давленіе, съ которымъ золотникъ прижимается къ поверхности скольженія, будетъ:

$$N = 6 \cdot 26 \cdot 25 = 3900 \text{ килогр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 90), стр. 103:

$$W = 0{,}1 \cdot 3900 = 390 \text{ килогр.}$$

**Задача 68.** Какъ велика работа тренія въ предыдущей задачѣ, если длина хода золотника 9 сентим., а машина дѣлаетъ 50 оборотовъ въ минуту?

**Рѣшеніе:** Во время одного оборота машины золотникъ совершаетъ движеніе взадъ и впередъ, слѣдовательно проходитъ путь: $2 \cdot 9 = 18$ сентим. Путь, проходимый имъ въ 1 секунду, или скорость его будетъ:

$$v = \frac{50 \cdot 18}{60} = 15 \text{ сентим.} = 0{,}15 \text{ метр.}$$

Поэтому, по уравненію 92), стр. 104:

$$E = 390 \cdot 0{,}15 = 58{,}5 \text{ килограммометр.},$$

или работа тренія въ лошадиныхъ силахъ:

$$N = \frac{58{,}5}{75} = 0{,}78$$

**Задача 69.** Какъ велика потеря работы отъ тренія въ поршневомъ штокѣ кривошипнаго механизма (см. фиг. 16, стр. 23).

**Рѣшеніе.** Нормальное давленіе $V$ на поршневый штокъ не постоянно. Вообще, по задачѣ 27, стр. 23:

$$V = P \operatorname{tg} \alpha$$

для мертвой точки кривошипа ($\alpha = 0$):

$$V = 0$$

для $\alpha_{max}$ получаемъ:

$$V_{max} = P \operatorname{tg} \alpha_{max}$$

Такъ какъ здѣсь идетъ рѣчь объ относительно маломъ углѣ, то можно положить:

$$V_{max} = \backsim P \cdot \frac{r}{L}$$

Среднее значеніе за одинъ полный ходъ поршня 2r можно приблизительно получить, какъ ариөметическое среднее, изъ $V = 0$ и $V_{max}$; слѣдовательно:

$$V_m = \backsim P \cdot \frac{1}{2} P \cdot \frac{r}{L}\text{*)}$$

По уравненію 90, стр. 103:

$$W = f V$$

Для преодолѣнія этого тренія придется за время одного хода поршня произвести работу:

$$A_1 = W \cdot 2r = fP \cdot \frac{r^2}{L}$$

Если P — средняя сила поршня, то за время одного хода общая работа машины будетъ:

$$A = P \cdot 2r$$

Поэтому:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{fP \cdot \frac{r^2}{L}}{P \cdot 2r} = \frac{f}{2} \cdot \frac{r}{L}$$

Принимая:

$$f = 0{,}06; \ \frac{r}{L} = \frac{1}{5}$$

имѣемъ:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{0{,}06}{2 \cdot 5} = 0{,}006 = \backsim 0{,}01$$

т. е. потеря работы отъ тренія въ поршневомъ штокѣ достигаетъ $\backsim$ 1% общей работы.

Задача 70. Какая работа затрачивается на треніе цапфъ вододѣйствующаго колеса, если вѣсъ послѣдняго вмѣстѣ съ наполняющей его водой достигаетъ 18 000 килогр., радіусъ цапфъ $r = 8$ сентим., и колесо дѣлаетъ $n = 8$ оборотовъ въ минуту? ($f = 0{,}08$).

Рѣшеніе. Для вычисленія величины тренія цапфъ совершенно безразлично, какъ распредѣляется давленіе на обѣ цапфы; поэтому можно принять, что весь грузъ должна нести одна цапфа.

По уравненію 93, стр. 104:

$$W = 0{,}08 \cdot 18000 = 1440 \text{ килогр.}$$

---

*) Точное значеніе $V_m$ равно:

$$V_m = \frac{\pi}{2} P \cdot \frac{r}{L}$$

Поэтому:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} fP \cdot \frac{r^2}{L}$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\pi f}{4} \cdot \frac{r}{L} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}06}{4 \cdot 5} = 0{,}009 = \backsim 0{,}01 = 1\%$$

Скорость на окружности цапфы:

$$v = \frac{2 r \pi n}{60} = \frac{2 \cdot 0{,}08 \cdot 3.14 \cdot 8}{60} = \backsim 0{,}07 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 96, стр. 104, потеря работы въ лошадиныхъ силахъ равна:

$$N = \frac{1440 \cdot 0{,}07}{75} = 1{,}34.$$

Задача 71. Цапфа (пята) съ нижней полной круговой площадью, діаметромъ 12 сентим., нагружена по направленію оси силою P = 7200 килогр. Какую силу K необходимо приложить къ плечу, длиною l = 60 сентим., чтобы преодолѣть треніе цапфы? (f = 0,07).

Рѣшеніе. По уравненію 102, стр. 106:

$$M = \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}07 \cdot 7200 \cdot 6 = 1512 \text{ килогр.сентим.}$$

слѣдовательно:

$$K = \frac{M}{l} = \frac{1512}{60} = 25{,}2 \text{ килогр.}$$

Задача 72. Валъ подвергается дѣйствію динамометра Прони такъ, что можетъ дѣлать 80 оборотовъ въ минуту. Грузъ Q, включая вѣсъ чашки вѣсовъ, достигая 450 килогр., удерживаетъ рычагъ длиною l = 2 метр. въ горизонтальномъ положеніи. Сколько лошадиныхъ силъ передаетъ валъ?

Рѣшеніе. По уравненію 104, стр. 107:

$$N = 0{,}0014 \cdot 450 \cdot 2 \cdot 80 = \backsim 100.$$

Задача 73. Положимъ, что радіусъ колеса желѣзнодорожнаго вагона R = 50 сентим., радіусъ конца оси (цапфы) r = 4,5 сентим., общій вѣсъ вагона вмѣстѣ съ нагрузкой P = 15000 килогр., вѣсъ комплекта осей и колесъ p = 2000 килогр. Какъ велико треніе при перекатываніи: какъ велико треніе цапфъ (при f = 0,02), и какая необходима сила тяги Z для преодолѣнія сопротивленій тренія?

Рѣшеніе. По уравненію 105, стр. 108, треніе при перекатываніи:

$$W_r = P \frac{s}{R} = 15\,000 \cdot \frac{0{,}05}{50} = 15 \text{ килогр.}$$

На цапфу оси приходится грузъ:

$$P - p = 15\,000 - 2000 = 13\,000 \text{ килогр.}$$

Поэтому величина тренія цапфъ по уравненію 93, стр. 104:

$$W = f(P - p) = 0{,}02 \cdot 13\,000 = 260 \text{ килогр.,}$$

или, перенося эту силу къ окружности колесъ:

$$W \frac{r}{R} = 260 \cdot \frac{4{,}5}{50} = 23{,}4 \text{ килогр.}$$

Отсюда необходимая сила тяги для преодолѣнія сопротивленій тренія равна:

$$Z = 15 + 23{,}4 = 38{,}4 \text{ килогр.},$$

или:

$$\frac{38{,}4}{15\,000} = \backsim \frac{1}{390} \text{ полнаго вѣса вагона.}$$

Задача 74. Найти величину сопротивленія движенію, а также силу, необходимую для поворота, у поворотнаго круга желѣзнодорожнаго вагона, діаметромъ $D = 4{,}3$ м. При этомъ дано:

| | |
|---|---|
| вѣсъ груженнаго вагона: | $Q = 15\,000$ килогр. |
| вѣсъ поворотнаго круга: | $G = 3\,000$ килогр. |
| радіусъ направляющихъ катковъ: | $r = 20$ сентим. |
| радіусъ пути катковъ: | $R = 180$ сентим. |

Катки заключены въ особую раму, свободно движущуюся вокругъ направляющей оси и независимую отъ тѣла поворотнаго круга, такъ что въ данномъ случаѣ проявляется только треніе при перекатываніи, треніе же цапфъ (катковъ) совершенно отсутствуетъ.

Рѣшеніе. Принимая, что весь грузъ передается на направляющіе катки, что, слѣдовательно, центральная часть поворотнаго круга служитъ только для направленія (центрированія), необходима слѣдующая сила, приложенная на окружности катковъ (въ точкѣ, прямопротивоположной точкѣ опоры), согласно уравненію 113, стр. 110:

$$P_1 = \frac{Q + G}{2r} \cdot 2s = \frac{18\,000}{2 \cdot 20} \cdot 2 \cdot 0{,}05 = 45 \text{ килогр.}$$

Эта сила дѣйствуетъ на разстояніи $R = 180$ сентим. отъ центра поворотнаго круга и даетъ моментъ:

$$M = P_1R = 45 \cdot 180 = 8100 \text{ килогр.сентим.}$$

Поэтому сила P, дѣйствующая на окружности поворотнаго круга, должна имѣть величину:

$$P = \frac{M}{0{,}5D} = \frac{8\,100}{0{,}5\ .\ 430} = \backsim 38 \text{ килогр.}$$

Задача 75. Требуется найти необходимую для вращенія паровознаго поворотнаго круга зубчатую передачу, въ предположеніи, что три четверти полной нагрузки принимаетъ центральная цапфа (пята) и одна четверть передается на неподвижно закрѣпленные направляющіе катки.

Дано: діаметръ поворотнаго круга: $D = 13$ метр.
вѣсъ паровоза и тендера: $Q = 70\,000$ килогр.
вѣсъ поворотнаго круга: $G = 17\,000$ килогр.
радіусъ направляющихъ катковъ: $r = 40$ сентим.
радіусъ (большей) цапфы оси катковъ: $\rho = 5$ сентим.
радіусъ пути катковъ: $R = 600$ сентим.
діаметръ средней цапфы: $d = 12$ сентим.
коэффиціентъ тренія цапфъ: $f = 0{,}1$.
коэффиціентъ тренія при перекатываніи: $s = 0{,}05$.

**Рѣшеніе.** По заданію, нагрузка направляющихъ катковъ:

$$Q_1 = {}^1/_4 (70\,000 + 17\,000) = 21\,750 \text{ килогр.}$$

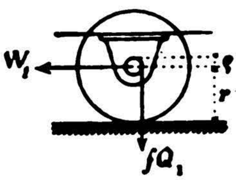
и нагрузка средней цапфы:

$$Q_2 = {}^3/_4 (70\,000 + 17\,000) = 65\,250 \text{ килогр.}$$

По уравненію 94, стр. 104, моментъ силы тренія цапфъ катковъ:

$$M_1 = fQ_1 \rho.$$

Фиг. 142.




Для преодолѣнія сопротивленія перекатыванію необходимъ, по уравненію 106, стр. 109, моментъ:

$$M_2 = Q_1 s.$$

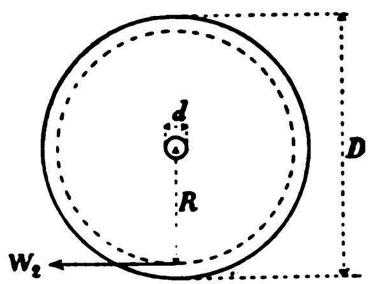
Для преодолѣнія полнаго сопротивленія катковъ сила $W_1$, приложенная къ центрамъ тяжести послѣднихъ, должна имѣть величину (фиг. 142):

$$W_1 = \frac{1}{r}(M_1 + M_2) = \frac{Q_1}{r}(f\rho + s)$$

Величина момента силы тренія средней цапфы, нагруженной $Q_2$, по уравненію 99, стр. 105, будетъ:

$$M' = {}^2/_3 f Q_2 \frac{d}{2} = Q_2 f \frac{d}{3}$$

Фиг. 143.




и этотъ моментъ (фиг. 143) преодолѣвается моментомъ $W_2 R$; слѣдовательно:

$$W_2 = \frac{Q_2}{R} f \frac{d}{3}$$

Поэтому для преодолѣнія всѣхъ сопротивленій тренія необходима сила, приложенная на разстояніи R въ центрѣ тяжести катковъ и имѣющая величину:

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q_1}{r}(f\rho + s) + \frac{Q_2}{R} f \frac{d}{3}$$

Подставляя сюда численныя значенія, получимъ:

$$W = \frac{21\,750}{40}(0{,}1 \cdot 5 + 0{,}05) + \frac{65\,250}{600} \cdot 0{,}1 \cdot \frac{12}{3} = 343 \text{ килогр.}$$

Эту силу нужно развить при помощи насаженнаго на ось катка зубчатаго колеса радіуса $r_1 = 36$ сентим., отстоящаго отъ центра поворотнаго круга на разстояніи $R = 580$ сентим. Если P — давленіе на зубецъ, то величина необходимаго момента равна:

$$Pr_1 = Wr \cdot \frac{R}{R_1} = 343 \cdot 40 \cdot \frac{600}{580} = 14\,184$$

Если къ рукояткѣ приставимъ 4 рабочихъ, изъ которыхъ каждый прилагаетъ силу $K = 16$ килогр., то, при длинѣ рукоятки $l = 40$ сентим., моментъ силы равенъ:

$$Kl = 4 \cdot 16 \cdot 40 = 2560$$

Моментъ груза:

$$Pr_1 = 14\,184$$

Слѣдовательно, отношеніе передачи:

$$i = \frac{Pr_1}{Kl} = \frac{14\,184}{2560} = 5{,}54.$$

Слѣдуетъ упомянуть, что кромѣ принятыхъ сопротивленій движенію проявляются еще и другія (напр., треніе зубцовъ и т. д.) и что, въ силу этого, а также вслѣдствіе не вполнѣ точной выдѣлки, на практикѣ берутъ величину передачи нѣсколько большую, чѣмъ получаемая по предыдущимъ вычисленіямъ ($i = \backsim 6$).

**Задача 76.** На канатъ, перекинутый черезъ блокъ, дѣйствуетъ съ одной стороны грузъ Q, а съ другой — направленная вертикально внизъ сила P. Какъ велика должна быть сила P въ сравненіи съ Q, если толщина каната $\delta = 3$ сентим., діаметръ цапфы блока $d = 3$ сентим. и радіусъ блока $R = 12$ сентим.?

**Рѣшеніе.** По уравненію 116, стр. 112, сопротивленіе сгибанію каната

$$q_1 = 0{,}13 \cdot \frac{3^2}{12} \cdot Q = 0{,}098 \,.\, Q$$

На цапфы дѣйствуетъ грузъ $P + Q$, но съ достаточной точностью можно положить $2\,Q$. Тогда треніе на окружности цапфы блока ($f = 0{,}08$) будетъ:

$$W = 0{,}08 \cdot 2Q = 0{,}16 \cdot Q$$

или, перенося на окружность блока:

$$q_2 = W \cdot \frac{\frac{1}{2}d}{R} = 0{,}16\,Q \cdot \frac{1{,}5}{12} = 0{,}02\,Q$$

А такъ какъ сила P, чтобы удержать грузъ Q въ равновѣсіи, должна быть больше упомянутаго груза на величину суммы всѣхъ сопротивленій, то:

$$P = Q + q_1 + q_2 = (1 + 0{,}098 + 0{,}02)\,Q = 1{,}118\,Q.$$

Число, на которое нужно помножить величину груза, чтобы получить величину требуемой силы, называется **коэффиціентомъ сопротивленія** и обозначается черезъ $\mu$. Обратная величина $\mu$ — называется коэффиціентомъ полезнаго дѣйствія $\eta$. Поэтому вообще при **одномъ** неподвижномъ блокѣ:

$$P = \mu Q = \frac{Q}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 117)$$

Для **пеньковаго** каната, въ среднемъ:

$$\mu = 1{,}12;\ \eta = \frac{1}{1{,}12} = 0{,}89 \quad \ldots\ldots \quad 118)$$

Для **цѣпи**, въ среднемъ:

$$\mu = 1{,}05;\ \eta = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}95 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 119)$$

§ 16.

## Простыя машины въ связи съ явленіями тренія.

### 1. Рычагъ.

Условіе равновѣсія для двуплечаго рычага (фиг. 99, стр. 79) при дѣйствіи силы P, необходимой для равномѣрнаго подъема груза Q, если радіусъ цапфы точки вращенія обозначить черезъ $\rho$, можно написать такъ:

$$Pr = Ql + Ga + (P + Q + G)\, f\rho$$

Слѣдовательно:

$$P = \frac{Ql + Ga + (G + Q)\, f\rho}{r - f\rho} \quad \dots\dots \quad 120)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ величину силы $P_1$, удерживающій грузъ Q отъ опусканія:

$$P_1 = \frac{Ql + Ga - (G + Q)\, f\rho}{r + f\rho} \quad \dots\dots \quad 121)$$

### 2. Воротъ (фиг. 110, стр. 86).

Сила P (которая представляетъ собой давленіе на зубецъ, если, напр., колесо ворота радіуса R предположимъ зубчатымъ), при подъемѣ груза Q, должна преодолѣть какъ треніе цапфъ, такъ и сопротивленіе сгибанію каната. Такъ какъ въ данномъ случаѣ происходитъ только навиваніе каната на валъ или на укрѣпленный на валу барабанъ, разматыванія же каната совершенно нѣтъ, то для сопротивленія сгибанію каната нужно принимать только половину значенія сопротивленія, приведеннаго въ уравненіи 116, стр. 112. Если G—вѣсъ ворота, $\delta$—толщина каната, $\rho$ — радіусъ цапфы, то для случая, когда $P \parallel Q$, получимъ слѣдующее условіе равновѣсія:

$$PR = Qw + (P + G + Q)\, f\rho + \tfrac{1}{2}\left(0{,}13\, \frac{\delta^2}{w}\, Q\right) w$$

или:

$$P = \frac{Qw + (G + Q)\, f\rho + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}13\, \delta^2 Q}{R - f\rho} \quad \dots\dots \quad 122)$$

Сила $P_1$, удерживающая грузъ отъ опусканія, равна:

$$P_1 = \frac{Qw - (G + Q)\, f\rho - \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}13\, \delta^2 Q}{R + f\rho} \quad \dots\dots \quad 123)$$

## 3. Блокъ.

**а) Неподвижный блокъ.** Если на фиг. 141, стр. 111, діаметръ цапфы блока обозначить черезъ d, то треніе цапфы будетъ:

$$W = f\,(P + Q) = \backsim f \cdot 2\,Q$$

Условіе равновѣсія при равномѣрномъ поднятіи груза Q выразится такъ:

$$P \cdot R = f \cdot 2Q \cdot \frac{d}{2} + (Q + q_1) \cdot R$$

Отсюда необходимая двигающая сила:

$$P = \frac{f \cdot Q \cdot d + (Q + q_1) \cdot R}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; 124)$$

или вообще, согласно уравненію 117, стр. 117:

$$P = \mu Q = \frac{Q}{\eta}$$

У блоковъ для пеньковыхъ канатовъ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія или полезная работа зависитъ отъ діаметра каната $\mathfrak{d}$. Если въ уравненіе 124 значеніе для $q_1$ подставить изъ уравненія 116, стр. 112, то получимъ:

$$\eta = \frac{Q}{P} = \frac{1}{1 + f \cdot \frac{d}{R} + 0{,}13 \cdot \frac{\mathfrak{d}}{R} \cdot \mathfrak{d}}$$

Если принять общеупотребительныя среднія значенія для блоковъ съ пеньковыми канатами:

$$R = 4\mathfrak{d};\ d = 0{,}8\,\mathfrak{d};\ R = 5\,d$$

то, при f = 0,08, изъ предыдущаго выраженія получимъ:

$$\eta = \frac{1}{1{,}016 + 0{,}0325\,\mathfrak{d}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; 125)$$

Пользуясь этимъ уравненіемъ, получаемъ слѣдующія значенія для коэффиціента $\eta$ при различномъ діаметрѣ каната:

| | | |
|---|---|---|
| для $\mathfrak{d}$ = 1,6 сент. | : $\eta$ = 0,936 | Отсюда получаемъ среднее значеніе: $\eta = 0{,}886 = \backsim 0{,}89$ (которое уже было выведено въ уравненіи 118, стр. 117). |
| „ „ = 2,6 „ | : „ = 0,909 | |
| „ „ = 3,6 „ | : „ = 0,883 | |
| „ „ = 4,6 „ | : „ = 0,858 | |
| „ „ = 5,2 „ | : „ = 0,844 | |

Если принять общеупотребительныя среднія значенія для цѣпныхъ блоковъ:

$$R = 10\,\mathfrak{d};\ d = 3\,\mathfrak{d};\ R = \frac{10}{3}\,d$$

то изъ уравненій 124 и 115 получимъ:

$$\eta = \frac{Q}{P} = \frac{1}{1 + 0{,}08 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}01} = \backsim 0{,}95$$

(то же, что и въ уравненіи 119, стр. 117).

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія для проволочно-канатныхъ блоковъ почти тотъ же самый, что и для цѣпныхъ блоковъ.

b) Передвижной блокъ (фиг. 113, стр. 90). Сила P, приложенная къ свободному концу каната, по уравненію 117 должна быть въ $\mu$ разъ больше, чѣмъ натяженіе неподвижно закрѣпленнаго конца каната; поэтому натяженіе это $= \frac{P}{\mu}$. Изъ условія равновѣсія:

$$P + \frac{P}{\mu} = Q$$

слѣдуетъ:

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}} \qquad 126)$$

Если на фиг. 113 v и c—скорости силы и груза, то въ данномъ случаѣ коэффиціентъ полезнаго дѣйствія или полезная работа равна:

$$\eta = \frac{Q \cdot c}{P \cdot v}$$

Такъ какъ по уравненію 73, стр. 91, $c = \frac{v}{2}$, то:

$$\eta = \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 127)$$

Значеніе величины $\frac{1}{\mu}$ здѣсь то же самое, что и у неподвижнаго блока. Поэтому, на основаніи уравненія 127, въ среднемъ имѣемъ:

для пеньковыхъ канатовъ: $\eta = \frac{1 + 0{,}89}{2} = 0{,}945$

для цѣпей: $\eta = \frac{1 + 0{,}95}{2} = 0{,}975$

Слѣдовательно, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія передвижного блока больше, чѣмъ неподвижнаго.

Точно такимъ же образомъ находимъ болѣе точныя значенія для пеньковыхъ канатовъ:

при $\delta = 1{,}6$ сентим. : $\eta = 0{,}968$
„ „ $= 2{,}6$ „ : „ $= 0{,}954$
„ „ $= 3{,}6$ „ : „ $= 0{,}941$
„ „ $= 4{,}6$ „ : „ $= 0{,}929$
„ „ $= 5{,}2$ „ : „ $= 0{,}922$

c) **Неподвижный и передвижной блокъ** (фиг. 114, стр. 90). Разсматриваемыя натяженія каната въ данномъ случаѣ равны: $\frac{P}{\mu}$ и $\frac{P}{\mu^2}$. Поэтому условіе равновѣсія для нижняго, передвижного блока будетъ:

$$\frac{P}{\mu} + \frac{P}{\mu^2} = Q,$$

или:

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}$$

**Для полиспаста съ n передвижными и однимъ неподвижнымъ блокомъ** (фиг. 115, стр. 91) имѣемъ:

$$P = \frac{Q}{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 128)$$

По уравненію 74, стр. 91, если не принимать во вниманіе сопротивленій:

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

Отсюда коэффиціентъ полезнаго дѣйствія:

$$\eta = \frac{P \text{ безъ сопротивл.}}{P \text{ съ сопротивл.}} = \frac{\frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^n}{2^n}$$

Если коэффиціентъ полезнаго дѣйствія **неподвижнаго** блока $\frac{1}{\mu}$ обозначить черезъ $\eta_1$, а передвижного $\frac{1 + \frac{1}{\mu}}{2}$ — черезъ $\eta_2$, то **полный коэффиціентъ полезнаго дѣйствія** будетъ:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2^n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 129)$$

Если принять **среднія значенія** $\eta_1 = 0{,}89$ и $\eta_2 = \backsim 0{,}95$, то, на основаніи уравненія 129, получимъ **слѣдующія среднія значенія** для коэффиціента полезнаго дѣйствія $\eta$ **полиспаста съ пеньковыми канатами**:

| | | |
|---|---|---|
| при 1 подвижномъ блокѣ | : | $\eta = 0{,}845$ |
| „ 2 подвижныхъ блокахъ | : | „ $= 0{,}801$ |
| „ 3 „ „ | : | „ $= 0{,}763$ |
| „ 4 „ „ | : | „ $= 0{,}721$ |

**Болѣе точныя значенія** для различныхъ діаметровъ $\delta$ каната вычисляются, напр., слѣдующимъ образомъ:

При $\delta = 1{,}6$ сентим. и $n = 3$ подвижнымъ блокамъ:
по стр. 119: $\eta_1 = 0{,}936$; по стр. 120: $\eta_2 = 0{,}968$.

**Слѣдовательно, по уравненію 129:**

$$\eta = 0{,}936 \cdot 0{,}968^3 = 0{,}936 \cdot 0{,}907 = \mathbf{0{,}849}$$

**При $\delta$ = 5,2 сентим. и n = 3 подвижнымъ блокамъ:**

по стр. 119: $\eta_1 = 0{,}844$; по стр. 120: $\eta_2 = 0{,}922$

**Слѣдовательно, по уравненію 129):**

$$\eta = 0{,}844 \cdot 0{,}922^3 = 0{,}844 \cdot 0{,}784 = \mathbf{0{,}662}$$

**d) Въ обыкновенныхъ тали** (фиг. 116, стр. 92) **натяженія канатовъ** 1, 2, 3, 4 соотвѣтственно будутъ: $\frac{P}{\mu}$, $\frac{P}{\mu^2}$, $\frac{P}{\mu^3}$, $\frac{P}{\mu^4}$. Слѣдовательно:

$$P\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\mu^3} + \frac{1}{\mu^4}\right) = Q,$$

или:

$$P\,\frac{1}{\mu^4}\left(1 + \mu + \mu^2 + \mu^3\right) = Q.$$

Полагая:

$$1 + \mu + \mu^2 + \mu^3 = s,$$

получимъ:

$$\mu + \mu^2 + \mu^3 + \mu^4 = \mu s$$

Вычитая верхнее равенство изъ нижняго, имѣемъ:

$$\mu^4 - 1 = (\mu - 1)\,s$$

или:

$$s = \frac{\mu^4 - 1}{\mu - 1}$$

Подставляя это значеніе вмѣсто ряда $1 + \mu + \mu^2 + \mu^3$, получимъ:

$$P\,\frac{1}{\mu^4}\left(\frac{\mu^4 - 1}{\mu - 1}\right) = Q,$$

слѣдовательно:

$$P = Q\,\frac{\mu^5 - \mu^4}{\mu^4 - 1}$$

Вообще для n **подвижныхъ блоковъ:**

$$P = Q\,\frac{\mu^{2n+1} - \mu^{2n}}{\mu^{2n} - 1} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad 130)$$

Такъ какъ, по уравненію 76, стр. 92, не разсматривая сопротивленія, мы получили:

$$P = \frac{Q}{2n},$$

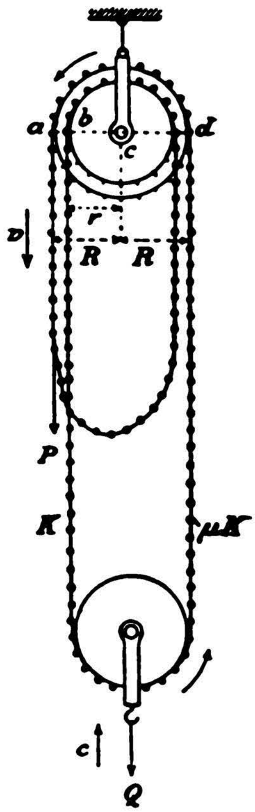
то коэффиціентъ полезнаго дѣйствія будетъ:

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2n(\mu^{2n+1} - \mu^{2n})} = \frac{1}{2n\mu^{2n}} \cdot \frac{\mu^{2n} - 1}{\mu - 1} \quad \ldots \quad 131)$$

Если принять за среднія значенія: $\mu = 1{,}12$ для канатовъ и $\mu = 1{,}05$ для цѣпей, то, по уравненію 131, получимъ слѣдующую таблицу:

| Количество подвижныхъ блоковъ. | Для пеньковыхъ канатовъ $\eta$ = | Для цѣпей. $\eta$ = |
|---|---|---|
| n = 1 | 0,844 | 0,927 |
| „ = 2 | 0,759 | 0,880 |
| „ = 3 | 0,685 | 0,848 |
| „ = 4 | 0,620 | 0,805 |

Фиг. 144.




Болѣе точныя значенія для $\eta$, въ зависимости отъ діаметра каната, вычисляются слѣдующимъ образомъ:

Напр., при $\delta = 3{,}6$ сентим. по стр. 119:

$$\mu = \frac{1}{0{,}883} = 1{,}13$$

Тогда для тали съ n = 3 подвижными блоками, по уравненію 131, получимъ слѣдующее точное значеніе для коэффиціента полезнаго дѣйствія:

$$\eta = \frac{1}{6 \cdot 1{,}13^6} \cdot \frac{1{,}13^6 - 1}{1{,}13 - 1} = \mathbf{0{,}666}$$

e) У дифференціальнаго блока Вестона (фиг. 144) условіе равновѣсія для нижняго блока напишется такъ:

$$K + \mu K = Q,$$

откуда слѣдуетъ:

$$K = \frac{Q}{1 + \mu}$$

Для верхнихъ блоковъ моментъ силы $= PR + Kr$, моментъ груза $= \mu KR$.

А такъ какъ моментъ силы долженъ быть въ $\mu$ разъ больше момента груза, то:

$$PR + Kr = \mu(\mu KR)$$

или:

$$P = K \cdot \frac{\mu^2 R - r}{R} = K\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)$$

а если подставить сюда вышенайденное для K значеніе, то:

$$P = Q\,\frac{\mu^2 - \frac{r}{R}}{1 + \mu} \quad \ldots\ldots \quad 132)$$

Раньше, не принимая во вниманіе тренія, мы имѣли уравненіе 78, стр. 98:

$$P = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Слѣдовательно, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія равенъ:

$$\eta = \frac{(1+\mu)\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{2\left(\mu^2 - \frac{r}{R}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 133)$$

При $\mu = 1{,}05$ и $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$, имѣемъ:

$$\eta = \backsim 0{,}46.$$

## 4. Наклонная плоскость.

Если тѣло равномѣрно движется вверхъ по наклонной плоскости подъ дѣйствіемъ силы P, направленной параллельно длинѣ наклонной плоскости (фиг. 145), то эта сила должна преодолѣть кромѣ составляющей силы тяжести $G \sin \alpha$ вѣса тѣла G, направленной внизъ, тоже параллельно пути, еще и силу тренія, какъ сопротивленіе движенію:

$$W = f\,N = f\,G\cos\alpha.$$

Поэтому:

$$P = G \sin\alpha + f\,G \cos\alpha \; ^{*)}$$

или, если, согласно уравненію 91, стр. 104, подставить для f значеніе $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$:

$$P = G\left(\sin\alpha + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$

$$P = G\left(\frac{\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)$$

$$P = G\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi}$$

Если тѣло движется равномѣрно внизъ по наклонной плоскости, то треніе дѣйствуетъ въ сторону силы $P_1$ (фиг. 146); слѣдовательно:

$$P_1 = G \sin\alpha - f\,G\cos\alpha$$

---

*) Вышеприведенное равенство:

$$P = G \sin\alpha + f\,G\cos\alpha$$

можно написать иначе:

$$P = G\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + f),$$

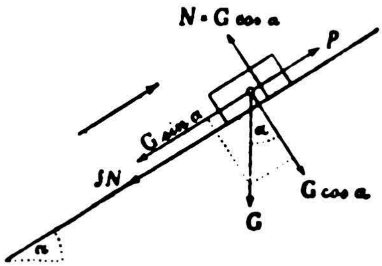
при чемъ, при очень маломъ углѣ $\alpha$, можно съ достаточной точностью принять:

$$P = G(\operatorname{tg}\alpha + f)$$

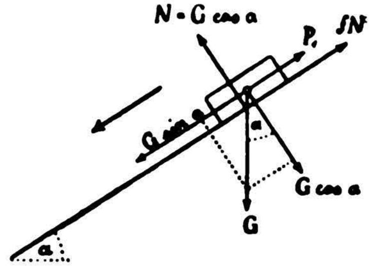
или:

$$P_1 = G\,\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$$

Фиг. 145.




Фиг. 146.




Если сила P дѣйствуетъ горизонтально (фиг. 147), то получимъ слѣдующее условіе для равномѣрнаго движенія вверхъ:

$$P\cos\alpha = G\sin\alpha + fN = G\sin\alpha + f\,(P\sin\alpha + G\cos\alpha)$$

или:

$$P = G\,\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha}$$

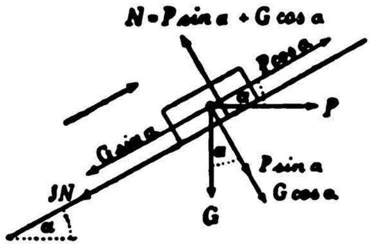
Если въ этомъ выраженіи раздѣлить числитель и знаменатель на $\cos\alpha$ и вмѣсто $f$ опять подставить его значеніе $\operatorname{tg}\varphi$, то получимъ;

$$P = G\,\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi}$$

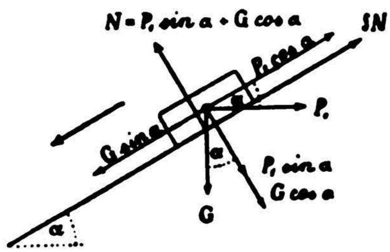
или:

$$P = G\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 134)$$

Фиг. 147.




Фиг. 148.




Подобнымъ же образомъ найдемъ условіе для равномѣрнаго движенія внизъ (фиг. 148):

$$P_1 = G\operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 135)$$

Подъ дѣйствіемъ силы, большей, чѣмъ $P_1$, и меньшей, чѣмъ $P$, тѣло не произведетъ никакого движенія ни вверхъ, ни внизъ по наклонной плоскости.

## 5. Винтъ.

Такъ какъ винтъ, по 5, § 14, стр. 97 и сл., можно разсматривать какъ наклонную плоскость, обернутую вокругъ цилиндра, то уравненія 134 и 135 можно непосредственно примѣнить какъ условія равновѣсія для винта съ прямоугольной нарѣзкой, если подставить вмѣсто G преодолѣваемый грузъ Q. Слѣдовательно:

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha \pm \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 136)$$

Умножая обѣ части этого равенства на средній радіусъ винта $\rho$ и замѣняя моментъ $P\rho$ равнымъ ему моментомъ Kl, получимъ:

$$Kl = Q \rho \operatorname{tg} (\alpha \pm \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 137)$$

Знакъ $+$ берется въ томъ случаѣ, если грузъ Q направленъ прямопротивоположно направленію равномѣрно-поступательнаго движенія винта; знакъ — въ обратномъ случаѣ, т. е. когда направленіе поступательнаго движенія винта совпадаетъ съ направленіемъ груза Q.

По уравненію 85, стр. 99, не принимая во вниманіе тренія, мы имѣли:

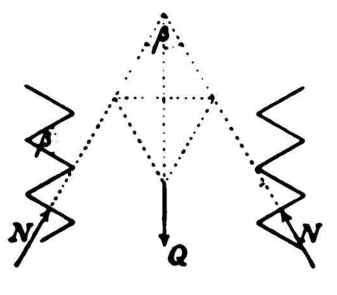
$$Kl = Q \rho \operatorname{tg} \alpha$$

Слѣдовательно, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія винта:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 138)$$

У винта съ треугольной нарѣзкой (фиг. 149) грузъ Q вызываетъ сопротивленія (противодавленія), направленныя нормально къ нижней поверхности витковъ и распредѣляющіяся равномѣрно по всей длинѣ винтовой линіи (по всей окружности). Пусть равнодѣйствующая противодавленій, приходящихся на половину хода винта, будетъ N; тогда силы N (соотвѣтствующія двумъ прилегающимъ другъ къ другу половинамъ хода винта) и сила Q лежатъ въ одной плоскости и находятся въ равновѣсіи. Если уголъ при вершинѣ винтовой нарѣзки обозначить черезъ $\beta$, то, такъ какъ силы N взаимно образуютъ тотъ же самый уголъ $\beta$, по фиг. 149:

Фиг. 149.




$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{1}{2} Q}{N}$$

или:

$$N = \frac{Q}{2 \cos \beta/_2}$$

При движенія винта необходимо преодолѣть еще сопротивленіе тренія:

$$W = 2 f N = \frac{fQ}{\cos \beta/_2},$$

и если положить:

$$\frac{f}{\cos \beta/_2} = f_1 = \operatorname{tg} \phi \qquad 139)$$

то:

$$W = f_1 Q = Q \operatorname{tg} \phi$$

У винтовъ съ прямоугольной нарѣзкой, у которыхъ противодавленія N параллельны Q:

$$W = f Q = Q \operatorname{tg} \varphi$$

Поэтому уравненіе 137, выведенное для винта съ прямоугольной нарѣзкой, можно непосредственно приложить къ винту съ треугольной нарѣзкой, замѣнивъ въ немъ $\operatorname{tg} \varphi$ большимъ значеніемъ $\operatorname{tg} \phi$. Тогда получимъ:

$$Kl = Q\rho \operatorname{tg} (\alpha \pm \phi) = Q\rho \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \phi}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \phi}$$

Для винтовъ Витворта $\beta = 55^0$; слѣдовательно:

$$\cos \beta/_2 = \cos 27^1/_2{}^0 = 0{,}887$$

Слѣдовательно, по уравненію 139:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{f}{0{,}887} = 1{,}13 \, f = 1{,}13 \operatorname{tg} \varphi$$

Подставивъ эти значенія, получимъ для винта съ треугольной нарѣзкой:

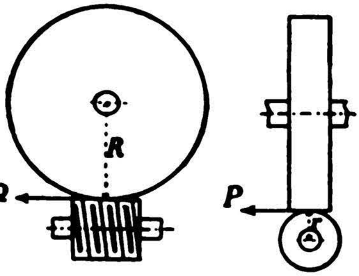
$$Kl = Q\rho \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm 1{,}13 \operatorname{tg} \varphi}{1 \mp 1{,}13 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \qquad 140)$$

Треніе въ винтахъ съ треугольной нарѣзкой гораздо значительнѣе, чѣмъ въ винтахъ съ прямоугольной нарѣзкой; поэтому они менѣе употребительны для производства движенія.

Такъ называемая передача движенія посредствомъ безконечнаго винта, часто употребляемая въ качествѣ приспособленія для подъема (винтъ съ винтовымъ колесомъ, червякъ съ винтовымъ колесомъ, или безконечный винтъ), можетъ быть также непосредственно сведена къ винту.

Если представить себѣ, что изъ гайки (достаточной глины) вырѣзана полоса, параллельная оси гайки, и гладкой стороной (т. е. нарѣзкой наружу) намотана на цилиндрическій шкивъ, то получится винтовое колесо (фиг. 150).

Фиг. 150.




Если винтъ и винтовое колесо будутъ выполнены однимъ изъ различныхъ употребляемыхъ способовъ сцѣпленія зубчатыхъ колесъ съ зубчатыми рейками (винтъ получаетъ профиль рейки), то величина, обозначающая у одноходового винта ходъ шагъ) винта (высоту нитки по оси винта) (ср. стр. 98) въ данномъ случаѣ называется шагомъ зацѣпленія t.

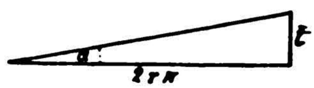
Не принимая во вниманіе сопротивленій тренія, имѣемъ, по уравненію 84, стр. 99:

$$P_0 = Q \operatorname{tg} \alpha$$

или, по фиг. 151:

$$P_0 = Q \frac{t}{2 r \pi}$$

Фиг. 151.




или, умножая числителя и знаменателя на R:

$$P = Q \frac{tR}{2 r \pi R} = \frac{QR}{r} \cdot \frac{t}{2 R \pi}$$

А такъ какъ $\frac{2 R \pi}{t}$ $\left(\text{т. е. } \frac{\text{окружность}}{\text{шагъ}}\right)$ = числу зубцовъ z колеса, то:

$$z = \frac{QR}{P_0 r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 141)$$

Принимая же въ расчетъ сопротивленія тренія, по уравненію 136, стр. 126, получимъ:

$$P = Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

Тогда коэффиціентъ полезнаго дѣйствія будетъ:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} (\alpha + \varphi)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 142)$$

Если въ уравненіе 141 вмѣсто $P_0$ подставить его значеніе изъ уравненія 142 $\eta$ P, то получимъ практическую формулу для числа зубцовъ винтового колеса:

$$z = \frac{1}{\eta} \cdot \frac{QR}{Pr} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 143)$$

Уравненіе 142 можно написать и иначе:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \varphi}$$

или при $\operatorname{tg} \varphi = f$:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \, (1 - f \operatorname{tg} \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + f}$$

Если средній радіусъ r одноходового винта принять равнымъ:

$$r = 1{,}6\ t$$

то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{2 r \pi} = \frac{1}{2 \cdot 1{,}6 \cdot 3{,}14} = 0{,}1.$$

Величина коэффиціента тренія f зависитъ отъ исполненія зубчатаго привода (хорошо обработанные зубцы или необработанные) и прежде всего отъ смазыванія его.

У аппаратовъ, стоящихъ на воздухѣ (какъ, напримѣръ, у орудійныхъ затворовъ), не особенно тщательно и безпрерывно смазываемыхъ, коэффиціентъ тренія f надо принимать относительно большимъ. Въ данномъ случаѣ можно положить $f = 0{,}16$.

При этихъ значеніяхъ ($\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$ и $f = 0{,}16$) коэффиціентъ полезнаго дѣйствія будетъ:

$$\eta = \frac{0{,}1\ (1 - 0{,}16 \cdot 0{,}1)}{0{,}1 + 0{,}16} = \mathbf{0{,}38}$$

Если, кромѣ того, принято въ расчетъ треніе въ подшипникахъ (происходящее главнымъ образомъ отъ давленія по направленію оси винта), то полный коэффиціентъ полезнаго дѣйствія всего зубчатаго привода будетъ:

$$\eta = \backsim \mathbf{0{,}25}$$

Если передача посредствомъ безконечнаго винта, употребляемая въ качествѣ приспособленія для подъема, должна быть использована какъ средство для автоматической остановки, т. е. если опусканію поднятаго груза должно препятствовать сопротивленіе, то, по уравненію 136, стр. 126, должно быть:

$$0 = Q \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)$$

слѣдовательно:

$$\operatorname{tg} \alpha \stackrel{=}{<} \operatorname{tg} \varphi \stackrel{=}{<} f.$$

Если за нормальное отношеніе принять $f = 0{,}1$, то:

$$\operatorname{tg} \alpha \stackrel{=}{<} \frac{1}{10}$$

или уголъ подъема одноходового винта:

$$\alpha \stackrel{=}{<} 5^0\,40' \stackrel{=}{<} \backsim 6^0$$

При $\operatorname{tg}\alpha = \frac{t}{2r\pi} \leqq \frac{1}{10}$ также получаемъ, какъ условіе для *автоматической* остановки:

$$r \geqq \frac{10}{2\pi} \cdot t \geqq 1{,}6\ t.$$

У винтовъ съ *многократной* нарѣзкой (у *n-ходовыхъ* винтовъ):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{n t}{2 r \pi}$$

Число зубцовъ колеса здѣсь опредѣляется тѣмъ же самымъ способомъ, какъ и у одноходовыхъ винтовъ:

$$z = \frac{n}{\eta} \cdot \frac{Q R}{P r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 144)$$

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія $\eta$ (уравненіе 142) здѣсь значительно больше, чѣмъ у одноходовыхъ винтовъ, отчасти вслѣдствіе большаго угла подъема $\alpha$, отчасти потому, что при употребленіи винтовъ съ *многократной нарѣзкой* смазка обыкновенно очень тщательная, и поэтому коэффиціентъ тренія $f = \operatorname{tg}\varphi$ можетъ быть *значительно* меньше 0,1.

Напр., при $\alpha = 20^0$ и $f = \sim 0{,}05$, соотвѣтствующемъ $\varphi = \sim 3^0$, по уравненію 142, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія (безъ тренія въ подшипникахъ) равенъ:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} 20^0}{\operatorname{tg} 23^0} = \frac{0{,}364}{0{,}424} = \sim \mathbf{0{,}86}$$

При передачѣ безконечнымъ винтомъ, постоянно бѣгущимъ въ маслѣ (какъ, напр., при электрическихъ передачахъ), въ зависимости отъ обстоятельствъ, $f$ можетъ понизиться до 0,01.

## 6. Клинъ.

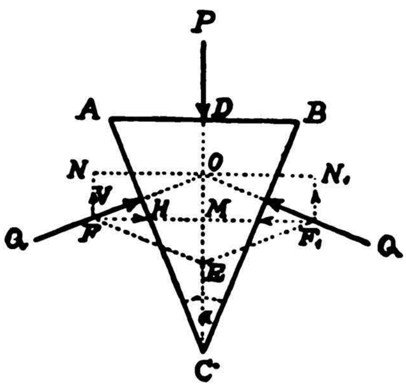
Не принимая во вниманіе тренія, для $Q \perp AC$ или $BC$, согласно уравненію 87, стр. 101, имѣемъ:

$$P = 2\, Q \sin\frac{\alpha}{2}$$

Но при вбиваніи клина проявляется съ обѣихъ сторонъ сопротивленіе тренія $fQ$ (фиг. 152), которое прямопротивоположно направленію движенія клина. Равнодѣйствующая $Q$ и $fQ$ отклоняется отъ нормали къ $AC$ или $BC$ на величину угла тренія $\varphi$.

Поэтому необходимую для вбиванія клина силу $P$ получимъ, если въ уравненіе 87 вмѣсто $\frac{\alpha}{2}$ подставимъ значеніе $\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right)$. Тогда, принявъ во вниманіе и треніе, получимъ:

Фиг. 152.




$$P = 2\,Q \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right). \quad 145)$$

Послѣ прекращенія дѣйствія силы P, клинъ имѣетъ стремленіе двинуться обратно. Тогда сила тренія дѣйствуетъ въ обратномъ направленіи и для того, чтобы воспрепятствовать идти клину обратно, необходима сила $P_1$, равная:

$$P_1 = 2\,Q \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \varphi\right). \quad 146)$$

Если $\varphi > \frac{\alpha}{2}$, то $P_1$ — отрицательно, т. е. клинъ самостоятельно не выдвинется, и въ этомъ случаѣ, чтобы вытащить клинъ, нужно приложить силу:

$$P_2 = -P_1 = 2\,Q \sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 147)$$

направленную прямопротивоположно силѣ P.

Задача 77. Пусть у рычага, приведеннаго въ задачѣ 49, стр. 84, радіусъ опорной цапфы $\rho = 0{,}6$ сантим. Опредѣлить P и $P_1$, принявъ во вниманіе и треніе цапфъ ($f = 0{,}1$).

Рѣшеніе. По уравненію 120, стр. 118:

$$P = \frac{20 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + (6 + 20) \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6}{40 - 0{,}1 \cdot 0{,}6} = 51{,}62 \text{ килогр.}$$

По уравненію 121:

$$P_1 = \frac{20 \cdot 100 + 6 \cdot 10 - (6 + 20) \cdot 9{,}1 \cdot 0{,}6}{40 + 0{,}1 \cdot 0{,}6} = 51{,}38 \text{ килогр.}$$

Задача 78. Опредѣлить P и $P_1$ у одноплечаго рычага, приведеннаго въ задачѣ 50, стр. 85, если $\rho = 1$ сантим. и $f = 0{,}1$.

Рѣшеніе.

$$P = \frac{200 \cdot 12 - 5 \cdot 32 + (5 + 200) \cdot 0{,}1 \cdot 1}{80 - 0{,}1 \cdot 1} = 28{,}29 \text{ килогр.}$$

$$P_1 = \frac{200 \cdot 12 - 5 \cdot 32 + (5 + 200) \cdot 0{,}1 \cdot 1}{80 + 0{,}1 \cdot 1} = 27{,}78 \text{ кило гр.}$$

Задача 79. Если въ задачѣ 54, стр. 88, примемъ діаметръ каната $\delta = 2{,}8$ сантим., радіусъ цапфы $\rho = 1{,}8$ сантим. и вѣсъ колеса (включая барабанъ) $G = 200$ килогр., то какъ велика въ этомъ случаѣ, при $f = 0{,}1$, будетъ сила P, необходимая для подъема груза, а также сила $P_1$, удерживающая грузъ отъ опусканія?

**Рѣшеніе.** По уравненіямъ 122 и 123, стр. 118:

$$P = 105{,}3 \text{ килогр.}, \quad P_1 = 94{,}7 \text{ килогр.}$$

**Задача 80.** Рѣшить предыдущія задачи 58—62, стр. 93 и 94, принявъ во вниманіе сопротивленіе тренія.

**Рѣшеніе.**

1. Для задачи 58, по уравненіямъ 126 и 127, стр. 120, необходимая сила тяги равна:

$$P = \frac{Q}{2\,\eta}$$

Если для пеньковаго каната коэффиціентъ полезнаго дѣйствія передвижного блока, согласно стр. 120: $\eta = 0{,}945$, то:

$$P = \frac{200 + 6}{2 \cdot 0{,}945} = 109 \text{ килогр.}$$

2. Для полиспаста съ неподвижнымъ блокомъ въ задачахъ 59 и 60, по уравненіямъ 128 и 129, стр. 121, вообще можно написать:

$$P = \frac{Q}{2^n \cdot \eta}$$

Принимая же во вниманіе вѣсъ блока G, согласно примѣчанія на стр. 94, можно положить:

$$P = \frac{Q + (2^n - 1)\,G}{2^n\,\eta}$$

При $n = 3$ подвижнымъ блокамъ и $\eta = 0{,}763$, какъ средними значеніями для пеньковыхъ канатовъ, согласно стр. 121, получимъ:

$$P = \frac{400 + 7 \cdot 6}{8 \cdot 0{,}763} = \backsim 72{,}5 \text{ килогр.}$$

3. Для тали, приведенномъ въ задачѣ 61. согласно уравненіямъ 130 и 131, стр. 122, вообще можно написать:

$$P = \frac{Q}{2\,n\,\eta} \text{ или: } P = \frac{Q + G}{2\,n\,\eta}$$

изъ этого слѣдуетъ:

$$Q = 2\,n\,\eta \cdot P - G$$

При $P = 2 \cdot 75 = 150$ килогр., $G = 10$ килогр., $n = 4$ и $\eta = 0{,}62$ по таблицѣ, приведенной на стр. 123, получимъ:

$$Q = 2 \cdot 4 \cdot 0{,}62 \cdot 150 - 10 = 744 - 110 = 734 \text{ килогр.}$$

4. Для дифференціальнаго блока Вестона, приведеннаго въ задачѣ 62, согласно уравненіямъ 132 и 133, стр. 123 и 124 принимая во вниманіе вѣсъ блока G, вообще можно написать:

$$P = \frac{Q + G}{2\,\eta} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

или:

$$Q = \frac{2\eta \cdot P}{1 - \frac{r}{R}} - G$$

При $P = 50$ килогр., $G = 6$ килогр., $\frac{r}{R} = \frac{11}{12}$ и $\eta = 0{,}46$ согласно стр. 124, имѣемъ:

$$Q = 552 - 6 = 546 \text{ килогр.}$$

**Задача 81.** На винтъ, со среднимъ радіусомъ $\rho = 2{,}4$ сентим. и высотою хода $h = 1$ сентим., насаженъ одноплечій рычагъ, длиною 40 сент.; на концѣ послѣдняго приложена сила $K = 32$ килогр. Какой грузъ $Q$ можно поднять, если онъ дѣйствуетъ по направленію оси винта?

**Рѣшеніе:** Изъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\rho\pi} = \frac{1}{15{,}08} = 0{,}066$$

имѣемъ:

$$\alpha = \backsim 3^0\,50'$$

При $f = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}08$ (слѣдовательно, $\varphi = 4^0\,30'$):

$$\alpha + \varphi = 8^0\,20'$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}146$$

и по уравненію 137, стр. 126:

$$32 \cdot 40 = Q\, 2{,}4 \cdot 0{,}146$$

откуда:

$$Q = \frac{32 \cdot 40}{2{,}4 \cdot 0{,}146} = \backsim 3650 \text{ килогр.}$$

Безъ тренія имѣли бы, согласно уравненію 85, стр. 99:

$$32 \cdot 40 = Q \cdot 2{,}4 \cdot 0{,}066$$

или:

$$Q = \frac{32 \cdot 40}{2{,}4 \cdot 0{,}066} = \backsim 8080 \text{ килогр.}$$

Поэтому коэффиціентъ полезнаго дѣйствія:

$$\eta = \frac{3650}{8080} = 0{,}45$$

**Задача 82.** При помощи винтового пресса (фиг. 153) требуется произвести давленіе $Q = 12\,000$ килогр.

Дано: наружный радіусъ винта: $r = 4$ сентим.
внутренній радіусъ винта: $r_1 = 3{,}2$ сентим.
высота хода винта: $h = 1{,}6$ сентим.

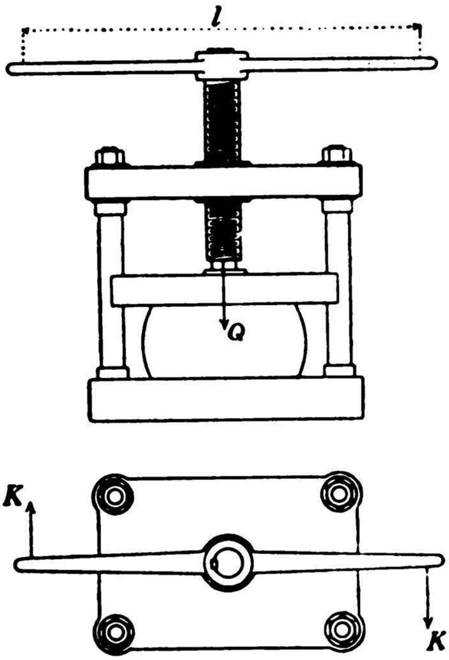
Средній радіусъ винта равенъ:

$$\rho = \frac{r + r_1}{2} = \frac{4 + 3{,}2}{2} = 3{,}6 \text{ сентим.}$$

Радіусъ нижней цапфы $\rho_1 = 3$ сентим.

Вращеніе винта производится при помощи насаженнаго сверху на винтъ двуплечаго рычага, длиною $l = 2$ миллим., на концахъ котораго дѣйствуютъ силы K. Опредѣлить величину силъ K.

Фиг. 153.




**Рѣшеніе.** При завинчиваніи шпинделя съ плоской рѣзьбой у цапфы, опирающейся на нажимную доску съ силою Q, проявляется, согласно уравненію 102, стр. 106, моментъ силы тренія:

$$M = \tfrac{1}{2} f_1 Q \rho_1$$

Его нужно преодолѣть моментомъ Kl; поэтому, согласно уравненію 137, стр. 126, получимъ:

$$K l = Q\,[\rho \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) + \tfrac{1}{2} f_1 \rho_1]$$

Уголъ $\alpha$ найдется изъ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\rho\pi} = \frac{1{,}6}{22{,}62} = 0{,}07$$

$$\alpha = 4^0$$

При $f = \operatorname{tg}\varphi = 0{,}1$, уголъ $\varphi = \backsim 6^0$

слѣдовательно:

$$\alpha + \varphi = 10^0$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 0{,}176$$

Если коэффиціентъ тренія цапфы $f_1 = 0{,}15$, то имѣемъ:

$$Kl = 12\,000\,(3{,}6 \cdot 0{,}176 + \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 3) = \backsim 10\,300 \text{ килогр.}$$

Слѣдовательно:

$$K = \frac{10\,300}{200} = 51{,}5 \text{ килогр.}$$

Безъ тренія, согласно уравненію 85, стр. 99, имѣли бы:

$$K = \frac{Q\,\rho \operatorname{tg}\alpha}{l} = \frac{12\,000 \cdot 3{,}6 \cdot 0{,}07}{200} = 15{,}1 \text{ килогр.}$$

Слѣдовательно, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія равенъ

$$\eta = \frac{15{,}1}{51{,}5} = 0{,}29$$

Коэффиціентъ полезнаго дѣйствія можно также получить изъ отношенія работы груза къ работѣ силы. При одномъ оборотѣ винта грузъ Q проходитъ путь h (= высотѣ хода), а сила 2 K — путь $l\pi$; слѣдовательно:

$$\eta = \frac{Q\,h}{2\,K l \pi} = \frac{12\,000 \cdot 1{,}6}{2 \cdot 51{,}5 \cdot 200 \cdot 3{,}14} = 0{,}29 \text{ (какъ выше).}$$

Строго говоря, еще проявляется сопротивленіе тренія между нажимной доской и направляющими столбами, но оно такъ незначительно, что его можно совсѣмъ не принимать во вниманіе.

**Задача 83.** Требуется поднять грузъ G = 1200 килогр. (напр. у щитового затвора) при помощи приспособленія, состоящаго изъ зубчатой рейки и безконечнаго винта, т. е. винта съ винтовымъ колесомъ (фиг. 154).

Дано: радіусъ передачи: $w = 7{,}5$ сентим.
радіусъ рукоятки у винтового вала: $l = 40$ сентим.
сила, приложенная къ рукояткѣ: $K = 20$ килогр.

Опредѣлить число зубцовъ $z$ винтового колеса.

**Рѣшеніе.** Если принять коэффиціентъ полезнаго дѣйствія всей передачи посредствомъ безконечнаго винта равнымъ $\eta = 0{,}25$, то, по уравненію 143, стр. 128:

$$z = 4 \frac{Q\,R}{P\,r}$$

Изъ фиг. 154:

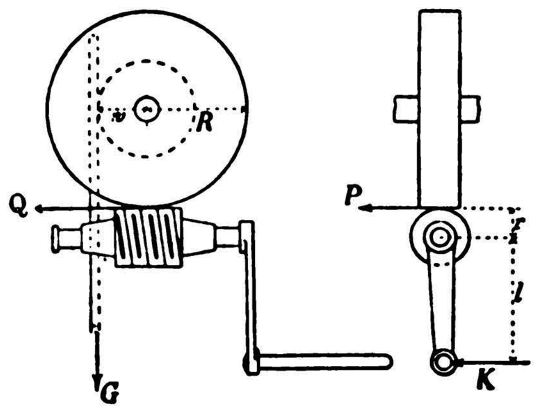
$$Q\,R = G\,w = 1200 \cdot 7{,}5 = 9000 \text{ килогр.сентим.}$$

$$P\,r = K\,l = 20 \cdot 40 = 800 \text{ килогр.сентим.}$$

Слѣдовательно:

$$z = \frac{4 \cdot 9000}{800} = 45 \text{ зубцовъ.}$$

Фиг. 154.




**Задача 84.** Если у клина, приведеннаго въ задачѣ 66, стр. 101, принять во вниманіе треніе и положить коэффиціентъ тренія $f = 0{,}15$, то какова въ этомъ случаѣ будетъ сила P ?

**Рѣшеніе.** Изъ:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{32} = 0{,}0625$$

слѣдуетъ:

$$\frac{\alpha}{2} = \backsim 3^0\,30'$$

Кромѣ того, изъ:

$$f = \operatorname{tg} \varphi = 0{,}15$$

слѣдуетъ:

$$\varphi = 8^0\,30'$$

Поэтому:

$$\frac{\alpha}{2} + \varphi = 12^0 ; \varphi - \frac{\alpha}{2} = 5^0$$

Тогда, согласно уравненію 145, стр. 131, будетъ:

$$P = 2 \cdot 500 \cdot \sin 12^0 = 2 \cdot 500 \cdot 0{,}2079 = \backsim 208 \text{ килогр.}$$

Для вытаскиванія клина, согласно уравненію 147, необходима сила:

$$P_2 = 2 \cdot 500 \cdot \sin 5^0 = 2 \cdot 500 \cdot 0{,}0871 = \backsim 87 \text{ килогр.}$$

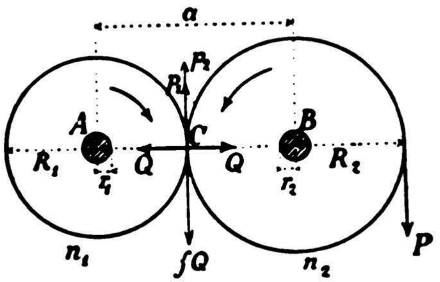
---

## § 17.

## Трущіяся (фрикціонныя) колеса.

Вращеніе одного вала A можетъ быть передано на другой валъ B при помощи насаженныхъ на нихъ шкивовъ или колесъ (фиг. 155), соприкасающихся между собою въ точкѣ C и производящихъ другъ на друга давленіе Q. Происходящее при этомъ треніе гладкихъ поверхностей колесъ и служитъ для передачи силы.

Фиг. 155.




Чтобы вполнѣ обезпечить передачу вращенія, необходимо устранить скольженіе по окружностямъ шкивовъ, а потому скорости на окружностяхъ обоихъ колесъ должны быть равны. Слѣдовательно:

$$v = \frac{2 R_1 \pi n_1}{60} = \frac{2 R_2 \pi n_2}{60}$$

Отсюда отношеніе передаточныхъ колесъ:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 148)$$

Если даны разстояніе между осями валовъ a и отношеніе передачи i, то радіусы колесъ можно вычислить слѣдующимъ образомъ:

$$R_1 + R_2 = a$$
$$R_2 = i R_1$$

откуда:

$$R_1 = \frac{a}{i+1} ; R_2 = \frac{i a}{i+1} \text{*)} \quad \ldots\ldots \quad 149)$$

---

*) Тѣ же результаты получатся и для зубчатыхъ колесъ (съ наружнымъ зацѣпленіемъ).

Если P — преодолѣваемое сопротивленіе, проявляющееся на окружности колеса B (ведомаго), тогда треніе, являющееся результатомъ давленія Q, должно быть по крайней мѣрѣ = P; слѣдовательно:

$$fQ \overset{=}{>} P$$

или:

$$Q \overset{=}{>} \frac{P}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 150)$$

Сюда можно подставить:

$f = 0{,}10 - 0{,}15$ для чугуна по чугуну.
$f = 0{,}15 - 0{,}20$ „ бумаги „ „
$f = 0{,}20 - 0{,}25$ „ кожи „ „
$f = 0{,}25 - 0{,}30$ „ дерева „ „

Меньшія значенія при этомъ относятся къ гладкимъ, покрытымъ жиромъ или саломъ, поверхностямъ тренія.

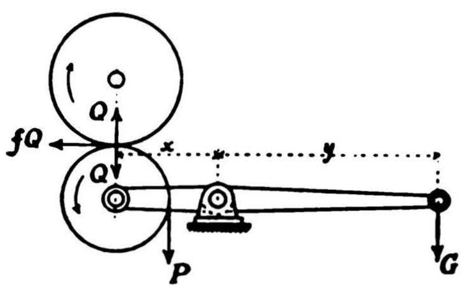
Силу Q можно опредѣлить при помощи особаго пружиннаго приспособленія или при помощи противовѣса G (фиг. 156). Необходимая величина ея опредѣлится изъ:

$$G \cdot y = Q \cdot x$$

откуда:

$$G = Q\,\frac{x}{y}$$

Фиг. 156.




Если колеса сильно прижаты другъ къ другу, то появится значительное треніе въ цапфахъ. Моменты ихъ, если радіусы валовъ обозначить черезъ $r_1$, $r_2$ и коэффиціентъ тренія цапфъ — черезъ $f_1$, согласно уравненію 94, стр. 104, будутъ равны:

$$M_1 = f_1\,Q\,r_1\,; \quad M_2 = f_1\,Q\,r_2$$

Для ихъ преодолѣнія къ окружностямъ колесъ должны быть приложены силы:

$$p_1 = \frac{f_1\,Q\,r_1}{R_1}\,; \quad p_2 = \frac{f_1\,Q\,r_2}{R_2}$$

слѣдовательно, въ суммѣ имѣемъ:

$$p_1 + p_2 = f_1\,Q\left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 151)$$

Эта величина представляетъ потерю въ работѣ отъ тренія цапфъ, выраженную по отношенію къ окружности колесъ. Отношеніе этой потери къ силѣ P будетъ:

$$\frac{p_1 + p_2}{P} = \frac{f_1\,Q}{P}\left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right)$$

или, при $Q = \frac{P}{f}$:

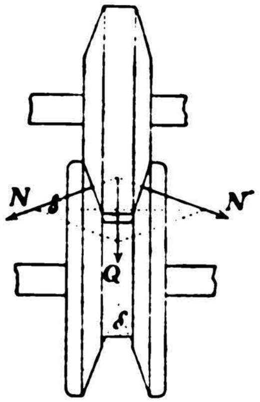
$$\frac{p_1 + p_2}{p} = \frac{f_1}{f}\left(\frac{r_1}{R_1} = \frac{r_2}{R_2}\right) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 152)$$

Если вмѣсто P даны число лошадиныхъ силъ и число оборотовъ обоихъ валовъ, то, по уравненію 19, стр. 26, найдемъ:

$$P = 71\,620 \, \frac{1}{R} \cdot \frac{N}{n}$$

Причемъ значенія R (въ сентиметрахъ) и n надо подставить или для ведущаго, или для рабочаго вала.

Фиг. 157.




Чтобы получить возможно меньшее давленіе Q, часто дѣлаютъ трущіяся колеса (желѣзо по желѣзу) съ углубленіями (гнѣздами) (фиг. 157). Тогда:

$$\frac{Q}{2} = N \sin \frac{\delta}{2}$$

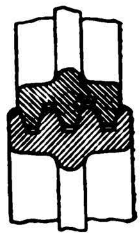
или:

$$N = \frac{Q}{2 \sin \frac{\delta}{2}}$$

Отсюда сила тренія:

$$2\,fN = \frac{Qf}{\sin \frac{\delta}{2}}$$

Фиг. 158.



которая опять должна быть по меньшей мѣрѣ $= P$, откуда слѣдуетъ:

$$Q \overset{=}{>} \frac{P}{f} \sin \frac{\delta}{2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad 153)$$

Уголъ $\delta$ обыкновенно $= 30^0$; слѣдовательно:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin 15^0 = 0{,}26$$

Тогда необходимое давленіе Q у колесъ съ углубленіями имѣетъ величину, равную $^1/_4$ того, которое необходимо при цилиндрическихъ колесахъ. Однако это достоинство представляетъ въ то же время громадное неудобство въ томъ отношеніи, что происходитъ сильное изнашиваніе углубленій. Чтобы изнашиваніе было не такъ велико, дѣлаютъ нѣсколько углубленій (до 6), съ глубиной зацѣпленія около 1—1,2 сентим. (фиг. 158).

Задача 85. Требуется передать N = 4 лош. силы съ вала A на валъ B при помощи фрикціонныхъ колесъ. Опредѣлить необходимое давленіе Q.

Дано: разстояніе между осями валовъ $a = 60$ сентим.
" ведущій валъ A дѣлаетъ $n_1 = 120$ оборотовъ въ минуту
" рабочій " B " $n_2 = 80$ " " "

Слѣдовательно:

$$i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{120}{80} = \frac{3}{2}$$

Рѣшеніе. По уравненію 149 радіусы колесъ равны:

$$R_1 = \frac{60}{{}^3/_2 + 1} = 24 \text{ сентим.}$$

$$R_2 = \frac{{}^3/_2 \cdot 60}{{}^3/_2 + 1} = 36 \text{ сентим.}$$

Подставляя въ уравненіе 19, стр. 26, $R_2 = 36$ и $n_2 = 80$ (для рабочаго вала), получаемъ:

$$P = 71\,620 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{4}{80} = \backsim 100 \text{ килогр.}$$

То же самое получимъ послѣ подстановки $R_1 = 24$ и $n_1 = 120$ (для ведущаго колеса).

Для преодолѣнія тренія цапфъ, при $r_1 = r_2 = 3$ сентим., $f = 0{,}125$ (среднее значеніе для желѣза по желѣзу) и $f_1 = 0{,}08$, по уравненію 152, необходимо:

$$p_1 + p_2 = 100 \cdot \frac{0{,}08}{0{,}125} \cdot \left(\frac{3}{24} + \frac{3}{36}\right) = \backsim 14 \text{ килогр.},$$

такъ что полное сопротивленіе на окружности колесъ достигаетъ:

$$P_1 = P + (p_1 + p_2) = 100 + 14 = 114 \text{ килогр.}$$

Для гладкихъ фрикціонныхъ колесъ по уравненію 150:

$$Q = \frac{P_1}{f} = \frac{114}{0{,}125} = 912 \text{ килогр.}$$

Для колесъ съ углубленіями, при $\delta = 30^0$ $\left(\sin\frac{\delta}{2} = 0{,}26\right)$, по уравненію 153, необходимо лишь:

$$Q = 0{,}26 \cdot 912 = \backsim 237 \text{ килогр.}$$

Эти давленія Q вполнѣ достаточны, чтобы воспрепятствовать скольженію по окружности колесъ; поэтому они принимаются за нижній предѣлъ и должны для безопасности на практикѣ повышаться (такъ какъ скольженія ни въ коемъ случаѣ нельзя допускать).

---

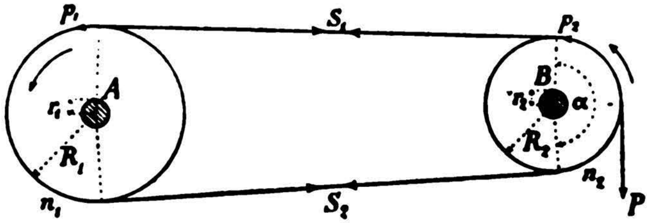
## § 18.

## Ременные шкивы.

Ременные шкивы имѣютъ цѣлью передавать вращеніе одного вала A на другой, главный, большею частью параллельный, валъ B, если разстояніе между ними настолько велико, что не позволяетъ употребить колеса, непосредственно соприкасающіяся (фрикціонныя или зубчатыя колеса). При этомъ для передачи силы съ одного вала на другой служитъ ремень, облегающій съ извѣстнымъ натяженіемъ шкивы и тѣмъ самымъ производящій необходимое треніе по окружности шкивовъ.

Пусть (фиг. 159) A — ведущій шкивъ, B—ведомый, P — преодолѣваемое сопротивленіе на окружности ведомаго шкива.

Фиг. 159.




**Ведущій** ремень тотъ, который набѣгаетъ на ведущій шкивъ, **ведомый** ремень тотъ, который сбѣгаетъ съ ведущаго шкива.

Для натяженій ремня примемъ слѣдующія обозначенія:

$S_1$ — натяженіе ведущаго ремня
$S_2$ — „ ведомаго „
$S_0$ — „ ремня въ покоѣ.

Принимается, что натяженіе $S_0$ ремня въ покоѣ почти согласуется съ ариѳметическимъ среднимъ изъ натяженій $S_1$ и $S_2$ движущагося ремня; слѣдовательно:

$$S_1 + S_2 = 2\,S_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 154)$$

Условіе равновѣсія для ведомаго шкива во время движенія будетъ:

$$S_1 - S_2 = P \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 155)$$

Изъ обоихъ этихъ уравненій слѣдуетъ:

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = S_0 + \tfrac{1}{2} P \\ S_2 = S_0 - \tfrac{1}{2} P \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 156)$$

Натяженіе $S_0$ должно приниматься по величинѣ такимъ, чтобы при движеніи, когда уже дѣйствуютъ натяженія $S_1$ и $S_2$, никакого скольженія ремня не было. Для этого существуетъ условіе:

$$S_2 \cdot e^{f\alpha} \geqq S_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 157)$$

гдѣ $e$ — основаніе натуральныхъ логарифмовъ ($e = 2{,}71828 \ldots$), $f$ — коэффиціентъ тренія между ремнемъ и шкивомъ и $\alpha$ — уголъ обхваченной канатомъ дуги малаго шкива.

Изъ уравненія 157 слѣдуетъ:

$$S_2 e^{f\alpha} - S_2 \geqq S_1 - S_2$$

или, такъ какъ $S_1 - S_2 = P$:

$$S_2(e^{f\alpha} - 1) \geqq P$$

такъ что для натяженія $S_2$ получимъ:

$$S_2 \geqq P \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 158)$$

Тогда по уравненію 155 имѣемъ:

$$S_1 > P \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 159)$$

и по уравненію 154:

$$S_0 \geqq \frac{P}{2} \cdot \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 160)$$

При равныхъ шкивахъ (отношеніе передачи $i = 1$) $\alpha = \pi = 3{,}14$. Для кожаныхъ приводныхъ ремней на желѣзныхъ шкивахъ ($f = 0{,}28$) имѣемъ:

$$e^{f\alpha} = 2{,}718 \ldots ^{0{,}28\,.\,3{,}14\,\ldots} = 2{,}4$$

Слѣдовательно:

$$S_0 \geqq \frac{P}{2} \cdot \frac{2{,}4 + 1}{2{,}4 - 1} \geqq 1{,}215\ P \quad \ldots\ldots \quad 161)$$

На практикѣ при небольшихъ скоростяхъ ремня ($v < 10$ м.) для кожаныхъ ремней на желѣзныхъ шкивахъ принимаютъ:

$$S_0 = 1{,}5\ P$$

Слѣдовательно, по уравненію 156:

$$S_1 = 2P; \qquad S_2 = P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 162)$$

Для кожаныхъ ремней на деревянныхъ шкивахъ (при $f = 0{,}47$ и $e^{f\alpha} = 4{,}38$):

$$S_0 \gtreqqless 0{,}8\ P$$

На практикѣ принимаютъ:

$$S_0 = P$$

Слѣдовательно, по уравненію 156:

$$S_1 = 1{,}5\ P; \qquad S_2 = 0{,}5\ P \quad \ldots\ldots \quad 163)$$

Для передачи движенія проволочными канатами:

$$S_1 = 2\ P; \qquad S_2 = P \quad \ldots\ldots \quad 164)$$

Для передачи движенія пеньковыми канатами:

$$S_1 = {}^5/_3\ P; \qquad S_2 = {}^2/_3\ P \quad \ldots\ldots \quad 165)$$

Валы получаютъ давленіе $S_1 + S_2 = 2\,S_0$. Потеря силы вслѣдствіе тренія цапфъ здѣсь расчитывается точно такъ же, какъ и у фрикціонныхъ колесъ (§ 17).

Отношеніе этой потери къ силѣ P (ср. уравненіе 150, стр. 137), будетъ:

$$\frac{p_1 + p_2}{P} = f_1\,\frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \cdot \left(\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad 166)$$

Задача 86. При помощи ремня требуется съ вала A на валъ B передать N = 3 лошад. силы, при $i = 1$; слѣдовательно, $\alpha = \pi = 3{,}14$.

Дано:

$$R_1 = R_2 = 36 \text{ сентим.},$$
$$r_1 = r_2 = 2{,}5 \text{ сентим.},$$
$$n_1 = n_2 = 80$$

Принято: $f = 0{,}28$ (для кожанаго ремня на чугунномъ шкивѣ) и коэффиціентъ тренія цапфъ $f_1 = 0{,}08$.

Требуется найти натяженія ремня.

Рѣшеніе. По уравненію 19, стр. 26:

$$P = 71\,620 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{3}{80} = \backsim 75 \text{ килогр.}$$

Для преодолѣнія тренія цапфъ при $e^{f\alpha} = 2{,}4$, по уравненію 166, необходимо:

$$p_1 + p_2 = 75 \cdot 0{,}08 \cdot \frac{2{,}4 + 1}{2{,}4 - 1}\left(\frac{2{,}5}{36} + \frac{2{,}5}{36}\right) = \backsim 2 \text{ килогр.}$$

Поэтому полное сопротивленіе по окружности шкивовъ будетъ:

$$P_1 = P + (p_1 + p_2) = 75 + 2 = 77 \text{ килогр.}$$

Тогда, по уравненію 160, нижній предѣлъ для натяженія ремня находящагося въ покоѣ:

$$S_0 = \frac{77}{2} \cdot \frac{2{,}4 + 1}{2{,}4 - 1} = 93{,}5 \text{ килогр.}$$

Наименьшія значенія натяженій ведущаго и ведомаго ремней по уравненіямъ 159 и 158 будутъ:

$$S_1 = 77 \cdot \frac{2{,}4}{2{,}4 - 1} = 132 \text{ килогр.}$$

$$S_2 = 77 \cdot \frac{1}{2{,}4 - 1} = 55 \text{ килогр.}$$

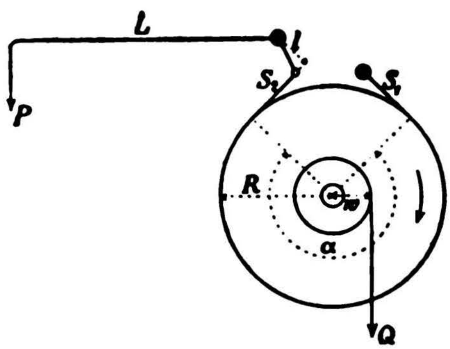
§ 19.

## Тормаза съ тормазною полосой (ленточные тормаза).

Въ каждой подъемной машинѣ (воротъ, кранъ и т. д.) должно быть тормазное приспособленіе, служащее для того, чтобы послѣ разобщенія передачи, находящейся на валу рукоятки, медленно и съ равномѣрной скоростью опустить поднятый грузъ.

На барабанный валъ (или на валъ передаточнаго зубчатаго привода у лебедокъ, подымающихъ тяжелые грузы) надѣваютъ гладко обточенный съ наружной стороны шкивъ, вокругъ котораго обертываютъ тонкую ленту изъ кованнаго желѣза. Если затѣмъ, при помощи рычажного приспособленія, стянуть концы этой ленты, то она вызоветъ на стянутой окружности шкива нормальныя давленія. Вслѣдствіе этого появятся сопротивленія тренія, противодѣйствующія вращенію шкива и могущія при достаточной величинѣ уравновѣсить моментъ груза.

Фиг. 160.




Если $S_1$ и $S_2$ (фиг. 160) — натяженія обоихъ концовъ тормазной полосы, то сумма сопротивленій тренія $= S_1 - S_2$.

Слѣдовательно, для равновѣсія должно быть:

$$(S_1 - S_2) R = Qw \quad \ldots\ldots \quad 167)$$

По уравненію 157, стр. 140:

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}$$

Слѣдовательно:

$$S_1 - S_2 = S_2 (e^{f\alpha} - 1)$$

или уравненіе 167 принимаетъ видъ:

$$S_2 (e^{f\alpha} - 1) R = Qw \quad \ldots\ldots \quad 168)$$

Относительно колѣнчатаго рычага будемъ имѣть:

$$PL = S_2 l$$

или:

$$P = S_2 \frac{l}{L}$$

Если сюда подставить вмѣсто $S_2$ его значеніе изъ уравненія 168, то получимъ:

$$P = \frac{Qw}{R} \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 169)$$

P представляетъ силу рабочаго, каковую можно принять равной приблизительно 30 килогр. Моментъ груза Qw—данъ; радіусъ R тормазного шкива берутъ обыкновенно нѣсколько меньшимъ, чѣмъ радіусъ зубчатаго колеса, сидящаго на томъ же валу. Длину колѣна рычага l дѣлаютъ настолько малой, насколько практически это возможно (около 6 сентим.), такъ что неизвѣстной величиной въ уравненіи 169 остается только длина другого колѣна рычага L. Для опредѣленія ея получимъ:

$$L = \frac{Qw}{P} \cdot \frac{l}{R} \cdot \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 170)$$

Коэффиціентъ тренія между тормазной лентой и шкивомъ (кованное желѣзо по чугуну) можно принять:

$$f = 0{,}18 \text{ безъ смазки,}$$
$$f = 0{,}1 \quad \text{со смазкой}$$

Уголъ, образуемый стянутой тормазной лентой, составляетъ приблизительно:

$$\alpha = {}^3/_4 \,.\, 2\pi = {}^3/_2 \,.\, 3{,}14 = 4{,}7$$

Для этихъ значеній будемъ имѣть:

$$e^{f\alpha} = 2{,}33; \text{ слѣдовательно: } \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} = 0{,}75 \text{ безъ смазки,}$$

$$e^{f\alpha} = 1{,}6; \quad \text{слѣдовательно: } \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} = 1{,}67 \text{ со смазкой.}$$

Задача 87. Дано, напр.: Q w = 12 000 килогр.сентим.; P = 30 килогр.; R = 25 сентим.; l = 6 сентим.;

$$\frac{1}{e^{f\alpha} - 1} = 0{,}75.$$

Найти длину колѣна L.

Рѣшеніе. Согласно уравненію 170:

$$L = \frac{12\,000 \,.\, 6}{30 \,.\, 25} = 0{,}75 = 72 \text{ сентим.}$$

## ГЛАВА III.

# Ученіе о движеніи твердыхъ тѣлъ, въ связи съ разсмотрѣніемъ его причинъ (динамика твердыхъ тѣлъ).

## § 20.

### Движеніе по наклонной плоскости.

Если тѣло, масса котораго m, находится на плоскости $AC = l$ (фиг. 161), наклоненной къ горизонтальной линіи подъ угломъ $\alpha$, то вѣсъ этого тѣла $G = mg$ разлагается на составляющія $N \perp AC$ и $P \parallel AC$, изъ которыхъ первая уничтожается противодавленіемъ наклонной плоскости, а вторая, не принимая во вниманіе могущихъ появиться сопротивленій (тренія, сопротивленіе воздуха), сообщитъ тѣлу равномѣрно-ускоренное движеніе. Величину ускоренія получимъ изъ уравненія 13, стр. 16:

$$p = \frac{P}{m}$$

Изъ подобія треугольниковъ DES и ABC слѣдуетъ:

$$\frac{SD}{SE} = \frac{BC}{AC} \text{ или: } \frac{P}{mg} = \frac{h}{l}$$

поэтому:

$$P = mg\,\frac{h}{l}$$

Для **ускоренія** же найдемъ значеніе:

$$\mathbf{p = g\,\frac{h}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 171)$$

Уравненіе 171 можно написать и иначе:

$$p : g = h : l$$

или словами:

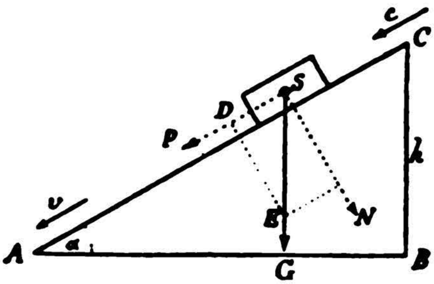
**Ускореніе тѣла, движущагося по наклонной плоскости, такъ относится къ ускоренію силы тяжести, какъ высота наклонной плоскости къ ея длинѣ.**

Сила N, направленная перпендикулярно къ AC, производитъ механическую работу, равную нулю. Механическая же работа, произведенная силою P за время движенія отъ C до A будетъ:

$$A = Pl = mg\frac{h}{l}\,l = mgh$$

Такую же механическую работу совершила бы сила $G = mg$, если бы тѣло свободно падало съ высоты $= h$ отъ точки C до B.

Фиг. 161.




Такъ какъ по § 5, стр. 28, механическая работа равна приращенію живой силы, то, называя скорости тѣла въ началѣ и концѣ движенія (въ точкахъ C и A) черезъ c и v, найдемъ:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = mgh$$

Отсюда величина скорости равна:

$$v = \sqrt{c^2 + 2gh} \quad . \quad . \quad 172)$$

Для случая, когда начальная скорость $c =$ нулю, имѣемъ:

$$v = \sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 173)$$

Если бы тѣло свободно падало изъ C въ B, то оно достигло бы точки B, имѣя **ту же самую** скорость v.

Задача 88. Желѣзнодорожный вагонъ движется съ начальной скоростью, равной нулю, по уклону пути въ 1 : 80. Какъ велико (безъ принятія во вниманіе сопротивленій) его ускореніе p; какъ великъ путь, пройденный въ 30 сек.; и какъ велика окончательная скорость v?

Рѣшеніе. Изъ уравненія 171) найдемъ:

$$p = 9{,}81 \cdot \frac{1}{80} = 0{,}123$$

Изъ уравненія 12, стр. 7:

$$s = \frac{pt^2}{2} = 0{,}123 \cdot \frac{30^2}{2} = 55{,}1 \text{ метр.}$$

Конечный пунктъ движенія лежитъ на:

$$h = \frac{55{,}17}{80} = 0{,}69 \text{ метр.}$$

ниже начальнаго пункта; слѣдовательно, по уравненію 173)

$$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}69} = 3{,}68 \text{ метр.}\,^{*})$$

---

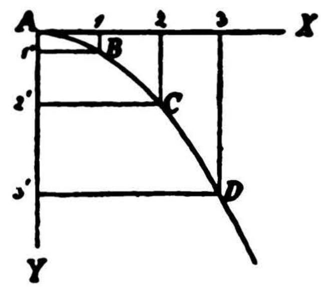
*) См. Приложеніе, таблица III b.

## § 21.

## Движеніе брошеннаго тѣла.

Если тѣло брошено по горизонтальному направленію AX (фиг. 162) изъ точки A со скоростью c, то, не подвергаясь дѣйствію другихъ силъ, по закону инерціи оно двигалось бы дальше по тому же направленію съ неизмѣнной скоростью; т. е.

Фиг. 162.




$$A1 = 12 = 23 = \ldots . = c$$

и тѣло въ концѣ первой секунды пришло бы въ точку 1, въ концѣ второй—въ точку 2 и т. д. Подъ вліяніемъ же силы тяжести тѣло одновременно будетъ падать съ ускореніемъ $g = 9{,}81$ метр. вертикально внизъ, и пути, имъ проходимые (при начальной скорости = нулю), будутъ, по уравненію 12, стр. 7, получаться изъ формулы:

$$s = g\,\frac{t^2}{2}$$

Если сюда подставить для t значенія 1, 2, 3 . . . то получимъ:

$$A1' = \frac{g}{2} \cdot 1$$

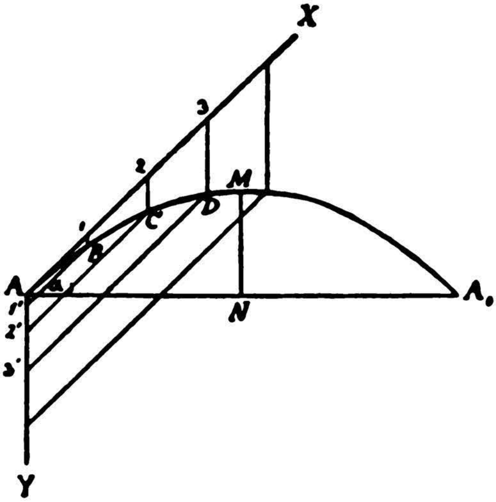
$$A2' = \frac{g}{2} \cdot 2^2 = \frac{g}{2} \cdot 4$$

$$A3' = \frac{g}{2} \cdot 3^2 = \frac{g}{2} \cdot 9$$

Если построимъ на пройденныхъ въ одно и то же время по горизонтальному и вертикальному направленію путяхъ параллелограммы, то вершины ихъ, противоположныя (по діагонали) точкѣ A, укажутъ на дѣйствительное положеніе тѣла по истеченіи указанныхъ промежутковъ времени. Поэтому по истеченіи 1, 2, 3 . . . . секундъ тѣло будетъ находиться въ точкахъ B, C, D . . . . Если проведемъ черезъ точку A, B, C, D . . . . неразрывную кривую, то она и представитъ собою путь брошеннаго тѣла (линію полета). Этотъ путь есть парабола, вершина которой расположена въ A, а ось совпадаетъ съ прямой AY. Такъ, напримѣръ, по параболѣ же ниспадаетъ струя воды, пущенная изъ отверстія по горизонтальному направленію съ опредѣленной скоростью (см. фиг. 198).

Подобнымъ же образомъ получимъ линію полета (траекторію) ABCD (фиг. 163) тѣла, брошеннаго по направленію AX, подъ угломъ къ вертикали, складывая два движенія, изъ которыхъ одно равномѣрное по направленію AX, а другое равномѣрно-ускоренное (съ ускореніемъ $g$) по вертикальному направленію AY.

Фиг. 163.




Уголъ $\alpha$, образуемый прямой AX съ горизонтальной линіей, называется угломъ подъема, (элеваціонный уголъ, или уголъ подъема орудія для достиженія наибольшей дальности полета снаряда), высота $MN = h$ (M — вершина параболы) высотою подъема, горизонтальное разстояніе $AA_1 = l$ — дальностью полета.

Если разложимъ начальную скорость $c$ тѣла по горизонтальному и вертикальному направленіямъ, то:

скорость по горизонтальному направленію $= c \cos \alpha$,

скорость по вертикальному направленію $= c \sin \alpha - gt$ (ср. уравненіе 9, стр. 7).

Такъ какъ въ наивысшей точкѣ M пути скорость по вертикальному направленію = нулю, то слѣдовательно:

$$t = \frac{c \sin \alpha}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 174)$$

Чтобы отъ точки M дойти до точки A, тѣло должно употребить то же время $t$; отсюда для полнаго времени полета найдемъ:

$$T = \frac{2c \sin \alpha}{g} \quad 175)$$

Дальность полета:

$$l = c \cos \alpha \, T = c \cos \alpha \, \frac{2c \sin \alpha}{g}$$

или (такъ какъ $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$):

$$l = \frac{c^3 \sin 2\alpha}{g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 176)$$

Высота поднятія для времени $t$ (по уравненію 8, стр. 7):

$$h = c \sin \alpha \, t - \frac{gt^2}{2}$$

если же сюда подставить значенiе t изъ уравненiя 174, то:

$$h = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 177)$$

Изъ уравненiя 176 получимъ наибольшую дальность полета при:

$$\sin 2\alpha = 1, \text{ или } \alpha = 45^0;$$

а именно:

$$l_{max} = \frac{c^2}{g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 178)$$

Для двухъ угловъ, равно отличающихся отъ 45° въ обѣ стороны, дальность полета одинакова.

Всѣ вышеприведенныя равенства справедливы только тогда, когда движенiе совершается въ безвоздушномъ пространствѣ. Подъ влiянiемъ же сопротивленiя воздуха дѣйствительная линiя полета (траекторiя) при большихъ скоростяхъ сильно отличается отъ симметрической параболической формы.

Задача 89. Граната выпущена изъ орудiя подъ угломъ подъема въ 30°. Какъ велики время и дальность полета и высота подъема, если начальная скорость c = 500 метр.?

Рѣшенiе. При $\alpha = 30^0$; $\sin \alpha = 0{,}5$; $\sin 2\alpha = 0{,}866$.

Слѣдовательно, по уравненiю 175:

$$T = \frac{2 \,.\, 500 \,.\, 0{,}5}{9{,}81} = 51 \text{ сек.}$$

по уравненiю 176:

$$l = \frac{500^2 \,.\, 0{,}866}{9{,}81} = \backsim 22\,000 \text{ метр.}$$

по уравненiю 177:

$$h = \frac{500^2 \,.\, 0{,}5^2}{2 \,.\, 9{,}81} = \backsim 3200 \text{ метр.}$$

При $\alpha = 45^0$ наибольшая дальность полета по уравненiю 178:

$$l_{max} = \frac{500^2}{9{,}81} = \backsim 25\,000 \text{ метр.}$$

---

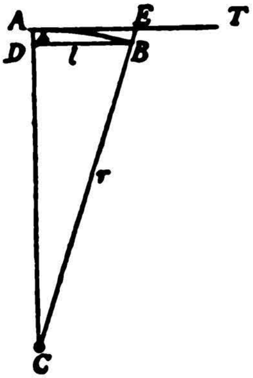
## § 22.

## Равномѣрное вращательное движенiе (центростремительная сила).

Если тѣло производитъ равномѣрное вращательное движенiе, то отклоненiе его отъ прямолинейнаго движенiя совершается подъ дѣйствiемъ т. н. центростремительной силы, которая всегда стремится притянуть тѣла къ центру круга.

Пусть A (фиг. 164) положеніе тѣла въ данный моментъ и AB путь на дугѣ круга, пройденный даннымъ тѣломъ со скоростью v въ безконечно малый промежутокъ времени t. Подъ вліяніемъ инерціи тѣло имѣетъ стремленіе двигаться изъ точки A по направленію касательной AT, и, не подвергаясь вліянію центростремительной силы, оно по истеченіи t сек. пришло бы не въ B, а въ точку E, т. е. удалилось бы отъ центра C круга на величину BE.

Фиг. 164.




Если провести BD ‖ AT, то AD = s будетъ путь, который тѣло въ то же самое время t проходитъ единственно только подъ дѣйствіемъ центростремительной силы.

Слѣдовательно, равномѣрное вращательное движеніе можно разсматривать какъ слагающееся изъ двухъ движеній, изъ которыхъ одно равномѣрное и въ любой точкѣ круга направлено по касательной къ нему, а другое (производимое центростремительной силой) равномѣрно-ускоренное и направлено къ центру круга.

Если черезъ v назовемъ скорость вращательнаго движенія, то дуга AB = vt. А такъ какъ t было принято безконечно малымъ, то можно дугу AB замѣнить хордой DB = l и тогда найдемъ:

$$l = vt$$

Если ускореніе, сообщаемое тѣлу центростремительной силой, назовемъ черезъ p, то на основаніи уравненія 12, стр. 7:

$$s = \frac{pt^2}{2}$$

Изъ фиг. 164:

$$BD^2 = BC^2 - CD^2$$

или:

$$l^2 = r^2 - (r - s)^2 = 2rs - s^2$$

Такъ какъ s въ сравненіи съ r очень мало, то съ полнымъ правомъ можно написать:

$$l^2 = 2rs$$

А если для l и s подставимъ выше найденныя значенія, то:

$$v^2t^2 = 2r \cdot \frac{pt^2}{2}$$

откуда для ускоренія p найдемъ значеніе:

$$p = \frac{v^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 179)$$

Для центростремительной силы С получимъ величину:

$$C = \frac{mv^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 180)$$

По закону противодѣйствія силъ (§ 4, стр. 18) центростремительной силѣ соотвѣтствуетъ другая сила, равная ей по величинѣ, но противоположная по направленію, т. е. дѣйствующая по направленію радіуса внаружу отъ центра С вращательнаго движенія. Эта сила называется центробѣжной. Она не производитъ дѣйствія на тѣло непосредственно потому, что иначе центростремительная и центробѣжная сила находились бы въ равновѣсіи, и тѣло не совершало бы никакого вращательнаго движенія, а двигалось бы прямолинейно и поступательно; эта сила дѣйствуетъ на центръ вращенія С и стремится вывести его изъ занимаемаго имъ положенія. Такъ, напримѣръ, если тѣломъ, совершающимъ вращательное движеніе, является шарикъ, соединенный съ центромъ вращенія помощью нити, то центробѣжная сила проявляется въ натяженіи нити и переносится при помощи нея на центръ вращенія С.

Выраженію центробѣжной силы можно придать другую форму, если вмѣсто скорости по окружности ввести угловую скорость. Подъ угловой скоростью разумѣютъ уголъ, на который поворачивается при вращательномъ движеніи радіусъ за промежутокъ времени въ одну секунду.

Если за единицу угла примемъ уголъ, величина дуги котораго равна радіусу, то на основаніи фиг. 165:

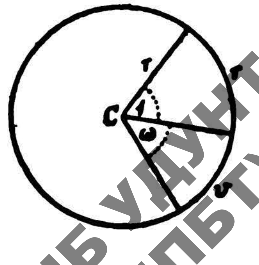
$$\frac{\sphericalangle 1}{360^0} = \frac{r}{2r\pi}$$

или

$$\sphericalangle 1 = \frac{360}{2 \cdot 3{,}14} = 57^0\ 17'\ 45'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 181)$$

Далѣе, обозначивъ скорость по окружности (какъ часть дуги) черезъ v, а соотвѣтствующую угловую скорость черезъ ω (фиг. 165), найдемъ:

Фиг. 165.




$$\frac{v}{r} = \frac{\omega}{1}$$

или:

$$v = r\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 182)$$

т. е.

дуга = радіусу × уголъ.

Подставляя значенія v въ уравненіе 180, найдемъ для центростремительной силы выраженіе:

$$C = mr\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 183)$$

**Задача 90.** Одинъ конецъ вытянутой нити, длиною 3 метра, прикрѣпленъ къ неподвижной точкѣ C, другой—къ шару, вѣсомъ въ 4 килогрм. Какъ велика центростремительная сила, дѣйствующая на шаръ, скорость движенія котораго по направленію, перпендикулярному къ нити, составляетъ $v = 8$ метр.?

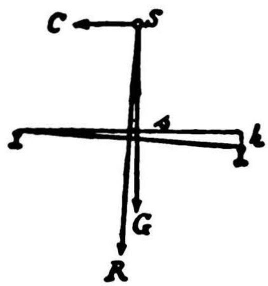
**Рѣшеніе.** По уравненію 180:

$$C = \frac{mv^2}{r} = \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{r} = \frac{4}{9{,}81}\cdot\frac{8^2}{3} = 8{,}7 \text{ килогр.}$$

**Задача 91.** Насколько выше долженъ быть расположенъ наружный рельсъ противъ внутреннихъ на закругленіи желѣзнодорожнаго пути съ радіусомъ r, чтобы колеса вагона, движущагося по кривой со скоростью v, не прижимались къ наружному рельсу?

**Рѣшеніе.** Пусть S (фиг. 166) центръ тяжести вагона. Равнодѣйствующая R вѣса вагона G и центробѣжной силы C должна быть перпендикулярна къ плоскости верхней части рельсовъ, откуда принявъ обозначенія фиг. 166, найдемъ:

Фиг. 166.




$$\frac{h}{s} = \frac{C}{G}; \text{ или: } h = \frac{C}{G}\,s$$

Подставивъ сюда для C значеніе его изъ уравненія 180:

$$C = \frac{mv^2}{r} = \frac{G}{g}\cdot\frac{v^2}{r},$$

получимъ:

$$h = \frac{G}{g}\,\frac{v^2}{r}\,\frac{s}{G} = \frac{sv^2}{gr}$$

Для $g = \backsim 10$ и $s = \backsim 1{,}5$ метр. найдемъ необходимое превышеніе наружнаго рельса:

$$h = 0{,}15\,\frac{v^2}{r}\;^{*)}$$

---

*) У баденскихъ правительственныхъ желѣзныхъ дорогъ это превышеніе достигаетъ:

$$h = \frac{45}{r} \text{ для главныхъ дорогъ (съ } r = 300 - 1000 \text{ метр.)}$$

$$h = \frac{24}{r} \text{ для мѣстныхъ (съ } r = 180 - 700 \text{ метр.)}$$

Эти значенія соотвѣтствуютъ средней скорости поѣздовъ v:

для главныхъ дорогъ: $h = 0{,}15\,\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{45}{r}$

$$v = \sqrt{\frac{45}{0{,}15}} = \backsim 17{,}3 \text{ метр.}$$

для мѣстныхъ: $h = 0{,}15\,\dfrac{v^2}{r} = \dfrac{24}{r}$

$$v = \sqrt{\frac{24}{0{,}15}} = \backsim 12{,}6 \text{ метр.}$$

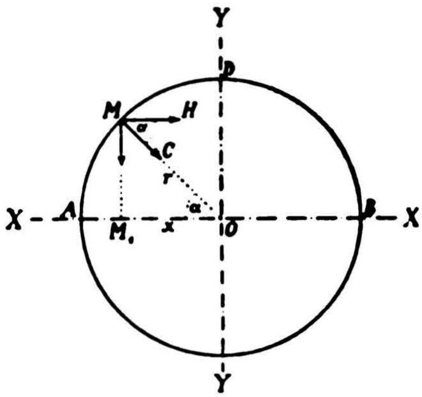
## § 23.

## Прямолинейное качаніе.

Равномѣрное вращательное движеніе можно также разсматривать какъ составное при двухъ взаимно перпендикулярныхъ составляющихъ движеній по направленіямъ XX YY (фиг. 167).

Если разсматривать одно изъ этихъ движеній, напримѣръ, горизонтальное составляющее движеніе, то тѣло пройдетъ прямолинейное разстояніе AB въ тотъ же промежутокъ времени t, въ какой оно прошло бы при вращательномъ движеніи равномѣрно со скоростью v полукругъ ADB.

Фиг. 167.




Отсюда:

$$t = \frac{r\pi}{v}$$

Подставивъ сюда для v значеніе его изъ равенства 180:

$$v = \sqrt{\frac{C\,r}{m}},$$

найдемъ:

$$t = r\pi\sqrt{\frac{m}{C\,r}} = \pi\sqrt{\frac{m\,r}{C}}$$

или:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{C}{r}\;\frac{1}{m}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 184)$$

Если M та точка, въ которой тѣло находится при равномѣрномъ вращательномъ движеніи въ опредѣленный моментъ, то при прямолинейномъ составляющемъ движеніи въ тотъ же моментъ тѣло будетъ въ положеніи $M_1$ (по вертикали внизу M), а сила, дѣйствующая на него въ этотъ моментъ, будетъ горизонтальная составляющая H центростремительной силы C, производящей вращательное движеніе. На фиг. 167:

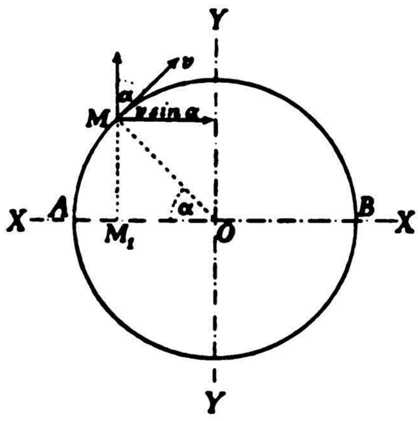
$$H = C\cos\alpha = C\,\frac{x}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 185)$$

А такъ какъ въ этомъ выраженіи C и r величины постоянныя, то, слѣдовательно, движущая сила пропорціональна разстоянію x. Она достигаетъ наибольшей величины $H_{max} = \pm C$ при $x = \pm r$, слѣдовательно, въ точкахъ A и B, и равна нулю при $x = 0$, т. е. въ точкѣ O. Для $x = 1$, найдемъ:

$$H_1 = \frac{C}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 186)$$

Если разложимъ (фиг. 168) въ точкѣ M скорость на окружности v по направленіямъ XX и YY на составляющія скорости, то v sin α (XX) будетъ та скорость, которую тѣло имѣетъ въ своемъ составляющемъ движеніи въ точкѣ M. Эта скорость въ точкѣ A равна нулю, затѣмъ постепенно увеличивается и достигаетъ своей наибольшей величины v въ точкѣ O, откуда вновь уменьшается до B, гдѣ она снова обращается въ нуль. Затѣмъ скорость становится отрицательной, т. е. тѣло совершаетъ обратное движеніе отъ B къ A.

Фиг. 168.




Такое прямолинейное движеніе взадъ и впередъ называется прямолинейнымъ качаніемъ, точка O называется центромъ качанія, разстояніе OA = OB = r — амплитудою.

Если подставимъ полученное изъ уравненія 185 выраженіе:

$$\frac{C}{r} = \frac{H}{x}$$

въ уравненіе 183, то найдемъ:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{H}{x}\ \frac{1}{m}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{H}{m}\ \frac{1}{x}}}$$

Частное дроби $\frac{H}{m}$ $\left(\text{т. е. } \frac{\text{сила}}{\text{масса}}\right)$ есть ускореніе сообщаемое тѣлу движущей силой къ точкѣ $M_1$. Обозначая это ускореніе черезъ p, найдемъ:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{p}{x}}} \quad \dots\dots\dots \quad 187)$$

Для $x = 1$:

$$t = \frac{\pi}{\sqrt{p_1}} \quad \dots\dots\dots \quad 188)$$

гдѣ $p_1$ — ускореніе качательнаго движенія на разстояніи 1 отъ центра качанія.

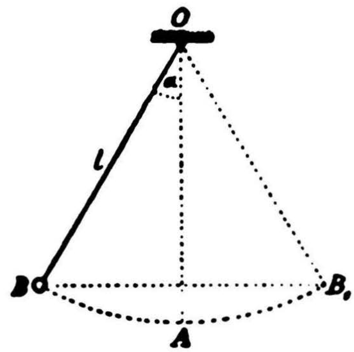
## § 24.

## Маятникъ.

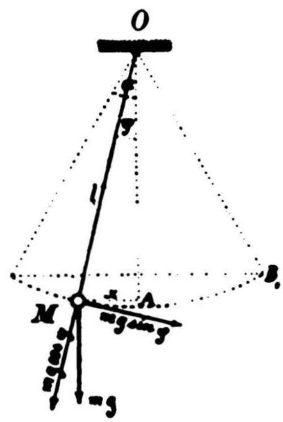
Подъ **физическимъ** или **сложнымъ маятникомъ** разумѣютъ всякое твердое тѣло, вращающееся вокругъ оси, не проходящей черезъ его центръ тяжести; подъ **простымъ** же или **математическимъ маятникомъ** подразумѣваютъ невѣсомую и нерастяжимую нить, неподвижно закрѣпленную однимъ концомъ, тогда какъ къ другому прикрѣплена тяжелая точка.

Приблизительно можно принять за математическій маятникъ тонкую нить, съ подвѣшеннымъ внизу маленькимъ металлическимъ шарикомъ. Если такой маятникъ (фиг. 169) вывести изъ положенія равновѣсія OA въ положеніе OB и потомъ предоставить его дѣйствію силы тяжести, то онъ ускореннымъ движеніемъ возвратится къ положенію равновѣсія, но благодаря пріобрѣтенной скорости не остановится въ этомъ положеніи въ покоѣ, а за медленнымъ движеніемъ будетъ продолжать передвигаться далѣе вверхъ, до точки $B_1$.

Фиг. 169.




Фиг. 170.




Придя въ эту точку со скоростью, равной уже нулю, маятникъ начнетъ возвращаться, достигнетъ вновь точекъ A и B и такимъ образомъ будетъ продолжать свои движенія взадъ и впередъ около положенія равновѣсія OA.

Движеніе маятника изъ положенія OB въ положеніе $OB_1$ или обратно называютъ **размахомъ** или **качаніемъ**; время, затраченное на качаніе — **продолжительностью одного качанія**, а уголъ $\alpha$ — **угломъ отклоненія**, равнымъ половинѣ **угла качанія** ($= 2\,\alpha$).

Если въ тотъ моментъ, когда уголъ отклоненія $= \varphi$ (фиг. 170), разложить вѣсъ шарика G на двѣ составляющія по направленію MO и перпендикулярному къ нему (т. е. касательному), то первая изъ нихъ поглотиться сопротивленіемъ неподвижной оси вращенія, а вторая представитъ единственную силу, движущую шарикъ. Эта сила имѣетъ величину:

$$K = G \sin\varphi = mg \sin\varphi,$$

Если подставимъ сюда значеніе $\sin\varphi$ изъ фиг. 170:

$$\sin\varphi = \frac{x}{l}$$

то:

$$K = mg\,\frac{x}{l} = \frac{mg}{l}\,x$$

т. е. движущая сила пропорціональна горизонтальному разстоянію $x$ до положенія равновѣсія OA.

Касательное ускореніе, на основаніи послѣдняго равенства, будетъ:

$$p = \frac{K}{m} = \frac{g}{l}\,x$$

которое при $x = 1$ обращается въ

$$p_1 = \frac{g}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 189)$$

При очень малыхъ углахъ отклоненія можно съ достаточною точностью вмѣсто дѣйствительно пройденной шарикомъ дуги MA принять проекцію ея на горизонтальное направленіе $x$, а тогда все выведенное въ § 28 безъ дальнѣйшихъ подробностей можно приложить къ настоящему случаю.

Подставивъ найденное изъ уравненія 189 значеніе $p_1$ въ уравненіе 188, получимъ для очень малыхъ угловъ отклоненія время качанія маятника приблизительно равнымъ *):

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 190)$$

гдѣ $l$ — длина маятника отъ точки привѣса нити до центра тяжести шарика.

Принявъ очень малые углы отклоненія (до $5^0$), по уравненію 190) можно считать время качанія маятника независящимъ отъ угла отклоненія. Поэтому маятникъ при углѣ отклоненія, напр., въ $2^0$ въ опредѣленное время совершитъ столько же качаній, какъ и при углѣ отклоненія въ $4^0$. Такимъ образомъ время качанія $t$ маятника находитъ

---

*) Точная формула при углѣ отклоненія $\varphi$ будетъ:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \sin^6\frac{\varphi}{2} + \ldots\right]$$

путемъ опыта, наблюдая за числомъ качаній при малыхъ углахъ отклоненія въ довольно большой промежутокъ времени:

$$t = \frac{T}{n}$$

Такъ, напр., если маятникъ въ 5 мин. дѣлаетъ 450 размаховъ, то время одного качанія:

$$t = \frac{5 \cdot 60}{450} = \frac{2}{3} \text{ сек.}$$

Изъ уравненія 190 слѣдуетъ, что время качанія маятника не зависитъ отъ вѣса шарика.

Такъ, напр., два маятника равной длины, одинъ со свинцовымъ шарикомъ, двугой съ деревяннымъ, совершаютъ въ одно и то же время одинаковое число качаній.

Предположимъ, что имѣемъ два маятника, одинъ длиною $l_1$, другой — $l_2$, тогда, по уравненію 190, время качанія:

для перваго маятника: $t_1 = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}}$

" второго " : $t_2 = \pi \sqrt{\frac{l_2}{g}}$

Дѣля оба равенства одно на другое, найдемъ:

$$t_1 : t_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2} \text{ или: } l_1 : l_2 = t_1^2 : t_2^2 \quad \ldots\ldots \quad 191)$$

Отсюда: времена качаній двухъ маятниковъ относятся между собой, какъ корни квадратные изъ ихъ длинъ, или: длины маятниковъ относятся, какъ квадраты временъ качаній.

Подставляя въ уравненіе 190 $t = 1$, найдемъ длину секунднаго маятника:

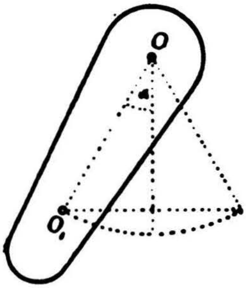
$$l_s = \frac{g}{\pi^2} = \frac{9{,}81}{3{,}14^2} = 0{,}994 \text{ метр.} \quad \ldots\ldots \quad 192)$$

Уравненіе 190 можно также съ пользой примѣнять для опредѣленія величины ускоренія тяжести въ различныхъ точкахъ земной поверхности, — стоитъ только у маятника данной длины l непосредственно наблюдать время качанія. Тогда:

$$g = l \frac{\pi^2}{t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 193)$$

Такъ какъ физическій маятникъ (фиг. 171), какъ тяжелое тѣло, представляетъ собою цѣлую группу безконечно большого числа неизмѣнно связанныхъ между собою матеріальныхъ точекъ, то его надо разсматривать состоящимъ изъ безконечно большого числа простыхъ маятниковъ различныхъ длинъ. Точки, расположенныя ближе къ оси вращенія, имѣютъ стремленіе качаться скорѣе, чѣмъ болѣе удаленныя. А такъ какъ отдѣльныя точки благодаря ихъ общей связи должны качаться одновременно, то точки, расположенныя ближе, будутъ замедляться въ своемъ движеніи наиболѣе удаленными, въ то время какъ, наоборотъ, и наиболѣе удаленныя — ускоряться въ своемъ движеніи ближе расположеными. Поэтому между ними должна существовать какая-нибудь точка $O_1$, не получающая ни ускоренія, ни замедленія и качающаяся какъ разъ такъ, какъ если бы она представляла единственную тяжелую точку маятника, т. е. какъ разъ такъ, какъ математическій маятникъ, длиною $OO_1$.

Фиг. 171.




Такую точку $O_1$ называютъ центромъ качанія, длину $OO_1$ — длиной качанія физическаго маятника.

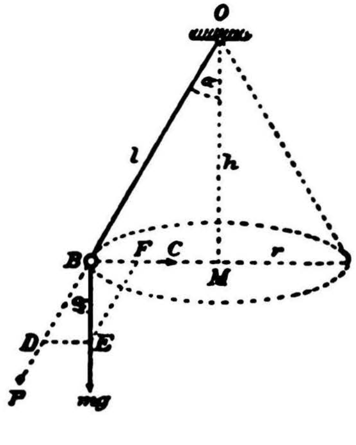
Центръ качанія обладаетъ тѣмъ важнымъ свойствомъ, что, при перенесеніи точки вращенія въ центръ качанія, время качанія не измѣнится. Этимъ свойствомъ можно воспользоваться для опредѣленія путемъ опыта длины $OO_1$, при чемъ у маятника съ одной неподвижной и другой подвижной осью вращенія, послѣднюю перемѣщаютъ до тѣхъ поръ, пока маятникъ, привѣшенный къ подвижной оси, не дастъ въ опредѣленное время такого же числа качаній, какое даетъ маятникъ, подвѣшенный къ неподвижной оси.

Устроенный такимъ образомъ маятникъ носитъ названіе оборотнаго маятника.

Длина качанія физическаго маятника можетъ быть также приблизительно опредѣлена при помощи наблюденія его времени качанія t и вычисленія длины математическаго маятника съ равнымъ временемъ качанія по уравненію 190. Тогда:

$$OO_1 = l = \frac{gt^2}{\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad 194)$$

Фиг. 172.




Если простому маятнику не давать качаться въ вертикальной плоскости, а сообщить ему послѣ приведенія въ положеніе OB (изъ положенія равновѣсія) (фиг. 172) по направленію, перпендикулярному къ плоскости BOM, такую скорость v, чтобы шарикъ описалъ равномѣрнымъ движеніемъ кругъ (въ горизонтальной плоскости) радiуса r, а нить — поверхность конуса, то такой **маятникъ** будетъ называться **центробѣжнымъ** или **коническимъ**.

Сила тяжести mg, дѣйствующая на шаръ массы m, разлагается на составляющiя P = BD и C = BF (= DE). Первая проявляется въ натяженiи нити и поглощается сопротивленiемъ точки привѣса O, а вторая сила C производитъ вращательное движенiе шарика, и проходитъ такимъ образомъ черезъ центръ круга M, при чемъ величина ея, по уравненiю 180, равна:

$$C = \frac{mv^2}{r}$$

Изъ подобiя треугольниковъ BDE и OBM слѣдуетъ:

$$DE : BE = BM : OM$$

или:

$$\frac{mv^2}{r} : mg = r : h$$

Отсюда для v получается величина:

$$v = r\sqrt{\frac{g}{h}} \quad \text{195)}$$

Время одного оборота:

$$t = \frac{2r\pi}{v}$$

а подставляя для v его значенiе изъ предыдущаго уравненiя 195, получимъ:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \text{. . . . . . . . 196)}$$

Для натяженiя P нити найдемъ выраженiе:

$$P = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2} = mg\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{rg}\right)^2} \quad \text{. . . . 197)}$$

Какъ видно изъ уравненiй 195 и 196, величины v и t не зависятъ отъ вѣса шара, но зависятъ отъ h; чѣмъ меньше h, тѣмъ больше скорость v и тѣмъ меньше время оборота t. При h = 0, v будетъ = ∞, а t = 0, т. е. описываемая нитью поверхность конуса никогда не превращается въ плоскость.

Для **очень малаго угла отклоненiя** $\alpha$ можно, съ достаточною степенью точности, h замѣнить l — длиною нити, и тогда вмѣсто уравненiя 196 получимъ:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Для этого случая (малыхъ угловъ отклоненiя) время оборота коническаго маятника вдвое больше времени качанiя простого маятника, качающагося въ вертикальной плоскости и имѣющаго равную съ коническимъ длину.

Задача 93. Какъ велико время качанія маятника, длиною 80 сентим.? ($g = 9{,}81$ метр.)

Рѣшеніе. Изъ уравненія 190):

$$t = \pi\sqrt{\frac{0{,}8}{9{,}81}} = 0{,}9 \text{ сек.}$$

Задача 94. Маятникъ, длиною въ 1,5 метр., совершаетъ въ опредѣленномъ мѣстѣ въ 5 мин. 244 качанія. Какъ велико ускореніе силы тяжести въ этомъ мѣстѣ?

Рѣшеніе. Время одного качанія:

$$t = \frac{5 \,.\, 60}{244} = 1{,}23 \text{ сек.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 193:

$$g = \frac{1{,}5 \,.\, 3{,}14^2}{1{,}23^2} = 9{,}79 \text{ метр.}$$

Задача 95. Какъ велика длина качанія физическаго маятника, время качанія котораго $= 0{,}5$ сек.?

Рѣшеніе. Изъ уравненія 194:

$$l = \frac{9{,}81 \,.\, 0{,}5^2}{3{,}14^2} = 0{,}248 \text{ метр.}$$

Задача 96. У коническаго маятника (фиг. 172) $h = 4$ м.; $r = 2$ м.; вѣсъ шара $G = mg = 8$ килогр. Вычислить величины $v$, $t$, $P$.

Рѣшеніе. Изъ уравненія 195:

$$v = 2\sqrt{\frac{9{,}81}{4}} = 3{,}132 \text{ метр.}$$

Изъ уравненія 196:

$$t = 2 \,.\, 3{,}14\sqrt{\frac{4}{9{,}81}} = 4 \text{ сек.}$$

Изъ уравненія 197:

$$P = 8\sqrt{1 + \left(\frac{3{,}132^2}{2 \,.\, 9{,}81}\right)^2} = 8{,}94 \text{ килогр.}$$

---

§ 25.

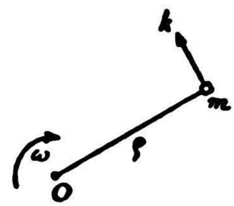
## О моментѣ инерціи.

У тѣла, совершающаго поступательное движеніе, всѣ его отдѣльныя точки имѣютъ равныя скорости. Если же тѣло совершаетъ вращательное движеніе около неизмѣнно связанной съ нимъ оси O, то скорости отдѣльныхъ его точекъ вообще различны и зависятъ отъ разстоянія до оси вращенія.

Вращающееся тѣло по закону инерціи продолжало бы свое движеніе неизмѣнно; поэтому, чтобы привести тѣло въ состояніе покоя, необходимо имѣть дѣйствующій въ направленіи, противоположномъ вращенію, моментъ силы, дѣйствіе котораго продолжалось бы опредѣленный промежутокъ времени t. Подъ вліяніемъ этого момента тѣло въ промежутокъ времени t будетъ двигаться равномѣрно замедленно.

Если обозначимъ угловую скорость вращенія черезъ $\omega$, то матеріальная частица, расположенная на разстояніи $\rho$ отъ оси вращенія, въ началѣ промежутка времени t будетъ имѣть, согласно уравненію 182 (фиг. 173), скорость:

Фиг. 173.




$$v = \rho\omega$$

Замедленіе этой скорости за время t будетъ, по уравненію 9:

$$p = \frac{\rho\omega}{t}$$

Слѣдовательно, по уравненію 13, сила, дѣйствующая на матеріальную частицу (замедляющая), будетъ:

$$k = \frac{m\rho\omega}{t}$$

Статическій моментъ этой силы относительно оси O (фиг. 173):

$$k\rho = \frac{m\rho^2\omega}{t}$$

Ту же величину будетъ имѣть сила $k_1$, дѣйствующая на плечѣ = 1 и сообщающая матеріальной частицѣ то же замедленіе, какъ и сила k съ плечомъ $\rho$; поэтому:

$$k_1 = \frac{m\rho^2\omega}{t}$$

А такъ какъ это справедливо для всѣхъ остальныхъ матеріальныхъ точекъ тѣла, то въ суммѣ получимъ:

$$K_1 = \Sigma\left(\frac{m\rho^2\omega}{t}\right)$$

или, вынося за знакъ суммы $\frac{\omega}{t}$, какъ величину постоянную, общую для всѣхъ точекъ, имѣемъ:

$$K_1 = \frac{\omega}{t}\,\Sigma\,(m\rho^2)$$

Эта сумма представитъ величину такой силы $K_1$, которая, дѣйствуя на плечѣ $= 1$, привела бы тѣло, вращающееся съ угловою скоростью $\omega$, за промежутокъ времени $t$ къ состоянію покоя.

Величина $\frac{\omega}{t}$ въ послѣднемъ равенствѣ есть замедленіе матеріальной точки, лежащей на разстояніи $= 1$ отъ оси вращенія.

Сумма же $\Sigma\,(m\,\rho^2)$ представляетъ величину массы, которая, будучи сосредоточена въ тонкомъ кольцѣ съ радіусомъ $= 1$, потребовала бы на прекращеніе своего движенія въ промежутокъ времени $t$ такую же силу $K_1$, какъ и масса даннаго тѣла.

Выраженіе $\Sigma\,(m\,\rho^2)$, т.е. сумма всѣхъ матеріальныхъ частицъ тѣла, умноженная на квадратъ ихъ разстояній до оси вращенія, называется моментомъ инерціи тѣла относительно оси вращенія и обозначается вообще буквою $J$; слѣдовательно:

$$J = \Sigma\,(m\rho^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 198)$$

На основаніи вышеприведеннаго вывода, моментъ инерціи можно трактовать, какъ массу тѣла, приведенную къ плечу $= 1$, хотя на самомъ дѣлѣ моментъ инерціи вовсе не масса, а только названіе выраженія $\Sigma\,(m\,\rho^2)$.

Если отдѣльныя матеріальныя частицы тѣла отстоятъ отъ оси вращенія на одну и ту же величину, то $\rho^2$, какъ общій постоянный множитель, можно вывести за знакъ суммы и тогда:

$$J = \rho^2\,\Sigma\,(m)$$

а если $\Sigma\,(m)$, какъ полную массу тѣла, обозначимъ черезъ $\mu$, то:

$$J = \rho^2\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 199)$$

Поэтому, моментъ инерціи тѣла можетъ быть выраженъ моментомъ инерціи кольца или полаго цилиндра съ очень тонкими стѣнками, центръ котораго представляетъ ось вращенія тѣла, радіусъ котораго $= \rho$, а масса $= \mu$.

$\mu$ называется массою, отнесенною къ радіусу $\rho$. Такъ какъ для опредѣленнаго тѣла и опредѣленной оси вращенія моментъ инерціи $J$ — величина постоянная, то, на основаніи уравненія 199, $\mu$ тѣмъ болѣе, чѣмъ меньше $\rho$ и наоборотъ. То значеніе $\rho$, при которомъ воображаемая масса $\mu$ равна величинѣ дѣйствительной массы тѣла, называется радіусомъ инерціи.

Понятіе о моментѣ инерціи можно распространить и на площади, при чемъ площадь разсматриваютъ какъ бы равномѣрно заполненной массой, т. е. какъ безконечно тонкую пластинку. Если поэтому въ уравненіи 198 подставить вмѣсто частицъ массы $m$ пропорціональныя имъ частицы площади (поверхности) $f$ и обозначить разстояніе каждой отдѣльной частицы площади отъ оси черезъ у, то получимъ для момента инерціи площади выраженіе:

$$J = \Sigma\,(fy^2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 200)$$

т. е. моментъ инерціи площади относительно опредѣленной оси равенъ суммѣ всѣхъ частицъ площади, умноженной на квадраты разстояній ихъ отъ этой оси.

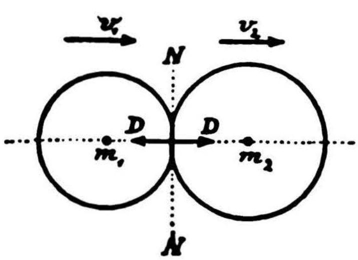
Моменты инерціи наиболѣе важныхъ площадей поперечнаго сѣченія приведены въ § 5 „Курса сопротивленія матеріаловъ" (Лауэнштейнъ).

## § 26.

## Объ ударѣ тѣлъ.

Если движущееся тѣло столкнется съ какимъ-нибудь другимъ движущимся или покоющимся тѣломъ, то произойдетъ ударъ. Если центры тяжести тѣлъ, считаемыхъ однородными, движутся по одной прямой линіи, перпендикулярной къ плоскости соприкосновенія тѣлъ NN (фиг. 174) и проходящей черезъ центръ тяжести площади соприкосновенія, то ударъ называется прямымъ и центральнымъ въ противоположность косому и эксцентричному удару.

Фиг. 174.



При прямомъ, центральномъ ударѣ происходитъ лишь перемѣна въ поступательномъ движеніи тѣлъ, но они все-таки и послѣ удара движутся по той же прямой, что и до удара; при косомъ же ударѣ, напротивъ, рядомъ съ измѣненіемъ скоростей, происходитъ и измѣненіе направленій, а при эксцентричномъ ударѣ является еще, какъ слѣдствіе, вращательное движеніе.

Мы ограничимся разсмотрѣніемъ центральнаго удара для совершенно неупругихъ и вполнѣ упругихъ тѣлъ. Хотя на самомъ дѣлѣ въ природѣ такихъ тѣлъ не существуетъ, тѣмъ не менѣе встрѣчается много очень упругихъ тѣлъ (слоновая кость) и очень неупругихъ (сырая глина).

### 1. Прямой, центральный ударъ совершенно неупругихъ тѣлъ.

Пусть $m_1$ и $m_2$—массы двухъ тѣлъ, двигающихся по одному и тому же направленію со скоростями $v_1$ и $v_2$. Если скорость $v_2$ впереди идущей массы $m_2$ менѣе скорости $v_1$ слѣдующей за ней массы $m_1$, то оба тѣла въ какой-нибудь моментъ столкнутся.

Въ силу этого въ мѣстѣ соприкосновенія появятся два прямо-противоположныхъ давленія D (фиг. 174), благодаря которымъ скорость массы $m_1$ уменьшится, а массы $m_2$ увеличится до тѣхъ поръ, пока обѣ массы не будутъ двигаться съ одной и тоїі же скоростью u. Полученное вслѣдствіе удара приращеніе скорости массы $m_2$ будетъ $u - v_2$, а потеря скорости массы $m_1 = v_1 - u$.

Если обозначить черезъ t продолжительность удара, то $\frac{v_1 - u}{t}$ и $\frac{u - v_2}{t}$ будутъ ускоренія массъ $m_1$ и $m_2$, сообщенныя равными силами D и направленныя въ стороны дѣйствія силъ.

А такъ какъ, по § 4, стр. 16, массы обратно пропорціональны ускореніямъ, сообщаемымъ имъ равными силами, то:

$$m_1 : m_2 = \frac{u - v_2}{t} : \frac{v_1 - u}{t}$$

или:

$$m_1 (v_1 - u) = m_2 (u - v_2)$$

Отсюда для скорости u послѣ удара получимъ слѣдующее значеніе:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 201)$$

Если же тѣла двигаются не одно за другимъ, а **навстрѣчу другъ другу**, то $v_2$ мѣняетъ знакъ, и тогда:

$$u = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 202)$$

Общая работа, производимая до удара (живая сила обѣихъ массъ), будетъ:

$$A = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 203)$$

Величина работы послѣ удара, когда обѣ массы движутся съ общей скоростью u, будетъ:

$$A_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot u^2$$

или, подставивъ сюда для u значеніе его изъ уравненій 201 и 202:

$$A_1 = \frac{(m_1 v_1 \pm m_2 v_2)^2}{2 (m_1 + m_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 204)$$

Разность $A_2 = A - A_1$ обозначаетъ ту величину работы, которая теряется для поступательнаго движенія и расходуется на сдавливаніе (деформацію) тѣла. Вычитая уравненіе 203 изъ 204, получимъ:

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 \mp v_2)^2 \quad \ldots\ldots \quad 205)$$

Верхніе знаки въ уравненіяхъ 204 и 205 относятся къ одинаковому, нижніе къ прямопротивоположному направленію движенія тѣлъ.

Если масса $m_2$ передъ ударомъ находится въ покоѣ, т. е. $v_2 = 0$, и если скорость ударяющей массы обозначимъ черезъ v, то изъ уравненія 207 и 205 получимъ:

Для скорости послѣ удара:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \quad \dots\dots\dots \quad 206)$$

Для общей работы до удара:

$$A = \frac{m_1 v^2}{2} \quad \dots\dots\dots \quad 207)$$

Для работы движенія послѣ удара:

$$A_1 = \frac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \left( \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right) \quad \dots\dots \quad 208)$$

Для работы, затрачиваемой на измѣненіе формы тѣла:

$$A_2 = \frac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 v^2}{2} \left( \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \quad \dots\dots \quad 209)$$

Во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, гдѣ ударъ примѣняется для производства движенія, такъ, напр., при забивкѣ свай, при вбиваніи гвоздя, клина и т. д., полезная работа, получаемая изъ уравненія 208), будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше отношеніе $\frac{m_2}{m_1}$, т. е. чѣмъ меньше масса, воспринимающая ударъ, въ сравненіи съ массой ударяющей.

Слѣдовательно, въ этомъ случаѣ выгодно имѣть массу ударяющаго тѣла возможно бóльшую, а ударяемаго—возможно меньшую.

Наоборотъ, могутъ представиться случаи, гдѣ работа, затрачиваемая на измѣненіе формы тѣла, будетъ полезной работой, какъ, напр., при ковкѣ; въ этомъ случаѣ, чтобы получить наивозможно большую полезную работу, нужно выбрать, по уравненію 209, ударяющую массу (молотъ) небольшую, а принимающую ударъ (наковальню) —значительную.

## 2. Прямой, центральный ударъ вполнѣ упругихъ тѣлъ.

Ударъ упругихъ тѣлъ происходитъ въ два промежутка времени. Въ первый промежутокъ происходитъ сдавливаніе (деформація) тѣлъ, какъ при ударѣ неупругихъ тѣлъ, во второй промежутокъ—тѣла, благодаря своей упругости, принимаютъ первоначальную форму.

Если въ концѣ перваго промежутка времени $u$ — общая скорость массъ $m_1$ и $m_2$, двигающихся одна за другой со скоростью $v_1$ и $v_2$, то $(v_1 - u)$—потеря скорости массы $m_1$, идущей сзади, а $(u - v_2)$— приращеніе скорости идущей впереди массы $m_2$ за первый промежутокъ времени удара. Вслѣдствіе этого получимъ, какъ и для неупругихъ тѣлъ (уравненіе 201):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} .$$

Въ концѣ перваго промежутка времени проявляется наибольшее сдавливаніе обѣихъ массъ, и тогда сжатыя части начинаютъ возвращаться къ первоначальному виду. При этомъ масса $m_1$ теряетъ еще разъ скорость $(v_1 - u)$ въ то время, какъ скорость массы $m_2$ увеличивается еще разъ на величину $(u—v_2)$. Полная потеря скорости массою $m_1$ будетъ $= 2(v_1—u)$, и полное приращеніе скорости массы $m_2 = 2(u—v_2)$.

Если скорости массъ $m_1$ и $m_2$ въ концѣ удара обозначить черезъ $c_1$ и $c_2$, то:

$$c_1 = v_1 - 2(v_1 - u) = 2u - v_1$$
$$c_2 = v_2 + 2(u - v_2) = 2u - v_2$$

или, если подставить для $u$ вышенайденное значеніе:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ c_2 &= \frac{2 m_1 v_1 - v_2 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 210)$$

Если тѣла до удара движутся навстрѣчу другъ другу, то въ уравненіе 210 надо вставить $-v_2$ вмѣсто $v_2$.

При $m_1 = m_2$ изъ уравненія 210 получимъ:

$$c_1 = v_2 \text{ и } c_2 = v_1,$$

т. е. **равныя массы при ударѣ мѣняются скоростями.** И если тѣла двигались въ **одномъ направленіи** до удара, то они сохраняютъ это направленіе и послѣ удара. Если же до удара тѣла двигались навстрѣчу другъ другу, т. е. въ **противоположныя стороны**, то и послѣ удара они будутъ двигаться въ противоположныя стороны; каждое изъ тѣлъ отъ мѣста удара будетъ возвращаться съ тою скоростью, которою обладало до удара другое тѣло.

Если ударяемая масса была въ покоѣ, то изъ уравненія 210, подставивъ $v_2 = 0$ и $v_1 = v$, найдемъ:

$$c_1 = \frac{v(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}; \qquad c_2 = \frac{2 m_1 v}{m_1 + m_2} \quad . \; . \; . \; . \qquad 211)$$

При $m_1 = m_2$:

$$c_1 = 0; \qquad c_2 = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 212)$$

т. е. если масса со скоростью v ударитъ въ равную ей массу, находящуюся въ покоѣ, то ударяющая масса придетъ въ состоянiе покоя (остановится), а получившая ударъ прiобрѣтаетъ скорость, бывшую до удара у ударяюшей массы.

Если отношенiе $\frac{m_1}{m_2} = 0$, т. е. если весьма малая масса со скоростью v ударяетъ въ весьма большую покоющуюся массу (напр., въ твердую стѣну), то по уравненiю 211:

$$c_1 = -v \qquad c_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 213)$$

т. е. ударившая масса отскочитъ отъ принявшей ударъ массы со скоростью v, а принявшая ударъ масса останется въ покоѣ.

У вполнѣ упругихъ тѣлъ при ударѣ не происходитъ никакой потери въ работѣ, такъ какъ суммы живыхъ силъ тѣла до и послѣ удара равны между собой. Слѣдовательно:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2}$$

въ чемъ легко убѣдиться, подставивъ сюда вмѣсто $c_1$ и $c_2$ значенiя ихъ изъ уравненiя 210.

Въ первой половинѣ удара, напротивъ, происходитъ для движенiя потеря въ живой силѣ, затрачиваемая на сжатiе ударяющихся тѣлъ или присоединенныхъ къ нимъ особыхъ аппаратовъ для смягченiя ударовъ, напр., буферовъ у желѣзнодорожныхъ вагоновъ.

Эта потеря въ работѣ равна работѣ, затрачиваемой на измѣненiе формы тѣлъ при неупругомъ ударѣ; слѣдовательно, если принимающая ударъ масса $m_2$ прежде находилась въ покоѣ, то, по уравненiю 209, эта потеря выразится величиною:

$$A_2 = \frac{m_1 v^2}{2} \left( \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right) \quad \ldots\ldots \quad 214)$$

Если массы равны между собой ($m_1 = m_2 = m$), то:

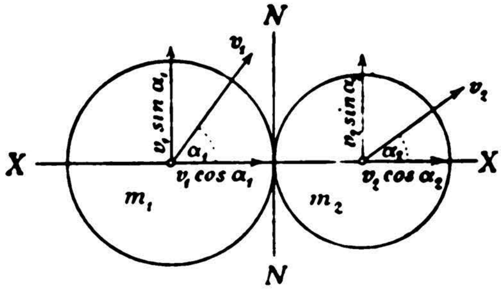
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m v^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 215)$$

### 3. Косой центральный ударъ.

Если центры тяжести двухъ тѣлъ до удара движутся не по прямой XX, перпендикулярной къ плоскости ихъ касанiя NN, а направленiя ихъ движенiй составляютъ съ прямой XX углы $\alpha_1$ и $\alpha_2$ (фиг. 175), то разложимъ скорость одного тѣла $v_1$ на составляющiя скорости $v_1 \sin \alpha_1$ и $v_1 \cos \alpha_1$, а скорость другого — $v_2$ на $v_2 \sin \alpha_2$ и $v_2 \cos \alpha_2$.

Составляющія скорости $v_1 \sin \alpha_1$ и $v_2 \sin \alpha_2$, направленныя параллельно плоскости касанія NN, не измѣняются подъ вліяніемъ удара, если не принимать во вниманіе тренія.

Фиг. 175.




Составляющія же скорости $v_1 \cos \alpha_1$ и $v_2 \cos \alpha_2$, идущія по направленію XX, измѣняются по правиламъ прямого центральнаго удара.

Для вполнѣ **неупругихъ** тѣлъ величина общей скорости $u$ послѣ удара въ направленіи XX опредѣлится изъ уравненій 201 и 202:

$$u = \frac{m_1 v_1 \cos \alpha_1 \pm m_2 v_2 \cos \alpha_2}{m_1 + m_2}$$

Складывая $u$ со скоростями $v \sin \alpha_1$ или $v_2 \sin \alpha_2$, получимъ **дѣйствительныя** скорости тѣлъ послѣ удара.

Для вполнѣ **упругихъ** тѣлъ скорости послѣ удара въ направленіи XX, по уравненію 210, будутъ:

$$c_1 = \frac{\pm 2 m_2 v_2 \cos \alpha_2 + v_1 \cos \alpha_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$c_2 = \frac{2 m_1 v_1 \cos \alpha_1 \mp v_2 \cos \alpha_2 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Чтобы получить дѣйствительныя скорости послѣ удара, нужно точно такъ же, какъ раньше, эти скорости сложить со скоростями $v_1 \sin \alpha_1$ или $v_2 \sin \alpha_2$.

**Задача 97.** Неупругое тѣло, вѣсящее 2,94 килогр., движется со скоростью $v_2 = 4$ метр. и получаетъ ударъ отъ другого неупругаго тѣла, вѣсящаго 1,96 килогр. и движущагося по тому же направленію со скоростью $v_1 = 9$ метр. Найти величину общей скорости $u$ послѣ удара.

**Рѣшеніе.** Массы обоихъ тѣлъ будутъ:

$$m_2 = \frac{2,94}{9,81} = 0,3; \qquad m_1 = \frac{1,96}{9,81} = 0,2$$

Слѣдовательно, по уравненію 201:

$$u = \frac{0,2 \cdot 9 + 0,3 \cdot 4}{0,2 + 0,3} = 6 \text{ метр.}$$

**Задача 98.** Опредѣлить величину скорости $u$ при движеніи тѣхъ же самыхъ тѣлъ навстрѣчу другъ другу.

**Рѣшеніе.** По уравненію 202:

$$u = \frac{0{,}2 \cdot 9 - 0{,}3 \cdot 4}{0{,}2 + 0{,}3} = 1{,}2 \text{ метр.}$$

Движеніе продолжается въ ту сторону, куда двигалось тѣло массы $m_1$ до удара, такъ какъ $\frac{m_1 v_1^2}{2}$ больше, чѣмъ $\frac{m_2 v_2^2}{2}$.

**Задача 99.** Если въ задачѣ 97 первое тѣло до удара находилось въ покоѣ, то какъ велика общая скорость послѣ удара?

**Рѣшеніе.** По уравненію 206):

$$u = \frac{0{,}2}{0{,}2 + 0{,}3} \cdot 9 = 3{,}6 \text{ метр.}$$

**Задача 100.** Два упругихъ тѣла, съ массами $m_1 = 5$ и $m_2 = 3$, ударяются со скоростями $v_1 = 5$ метр. и $v_2 = 4$ метр. Опредѣлить величины ихъ скоростей послѣ удара:

a) при движеніи въ одну и ту же сторону до удара,

b) при движеніи навстрѣчу другъ другу до удара.

**Рѣшеніе:** Для a), по уравненію 210), имѣемъ:

$$c_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 + 5(5 - 3)}{5 + 3} = 4{,}25 \text{ метр.}$$

$$c_2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5 - 4(5 - 3)}{5 + 3} = 5{,}25 \text{ метр.}$$

для b):

$$c_1 = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 4 + 5(5 - 3)}{5 + 3} = -1{,}75 \text{ метр.}$$

$$c_2 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 5 + 4(5 - 3)}{5 + 3} = 7{,}25 \text{ метр.}$$

Съ этими скоростями оба тѣла снова будутъ удаляться другъ отъ друга.

**Задача 101.** Раскаленный кусокъ желѣза расковывается на наковальнѣ при помощи молота, вѣсомъ въ 1000 килогр. Высота подъема молота $h = 1{,}6$ метр.; вѣсъ наковальни вмѣстѣ съ лежащимъ на ней кускомъ желѣза $= 9200$ килогр. Какъ велика полезная работа и какъ велика (вредная) работа, затраченная на вбиваніе наковальни, на сотрясеніе фундамента и т. д.?

**Рѣшеніе.** Изъ высоты подъема молота, по уравненію 173), стр. 146, получимъ конечную скорость $v$:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}6} = 5{,}6 \text{ метр.}$$

Живая сила молота непосредственно до удара, по уравненію 207, стр. 165, будетъ:

$$A = \frac{1000}{9,81} \cdot \frac{5,6^2}{2} = \backsim 1600 \text{ килогр.метр.}$$

А такъ какъ массы пропорціональны вѣсамъ, по уравненію 208, получимъ работу движенія (вредную работу):

$$A = 1600 \left(\frac{1}{1 + \frac{9200}{1000}}\right) = 1600 \,.\, 0,098 = 157 \text{ килогр.метр.}$$

а по уравненію 209 — работу, затрачиваемую на измѣненіе формы тѣла (полезную работу):

$$A_2 = 1600 \left(\frac{1}{1 + \frac{1000}{9200}}\right) = 1600 \,.\, 0,902 = 1443 \text{ килогр.метр.}$$

Слѣдовательно, потеря работы достигаетъ $\backsim$ 10%.

**Задача** 102. Копровая баба (машиннаго копра) вѣситъ 1000 килогр.; высота подъема ея = 160 сентим. Если углубленіе s сваи, вѣсомъ въ 250 килогр., при послѣднемъ ударѣ бабы будетъ = 0,8 сентим., то какъ велико сопротивленіе W, оказываемое грунтомъ на углубленіе сваи или прочность сваи?

**Рѣшеніе**. Механическая работа сопротивленія грунта = Ws. Она равна, по уравненію 22, стр. 28, части живой силы бабы, затрачиваемой на работу движенія (уравненіе 208). Кромѣ того, для преодолѣнія сопротивленія W затрачивается послѣ удара механическая работа вѣса $G_1$ бабы и вѣса $G_2$ сваи, въ суммѣ равная $(G_1 + G_2)s$. Поэтому:

$$Ws = \frac{m_1 v^2}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right) + (G_1 + G_2)s$$

$$Ws = \frac{G_1}{g} \frac{2gh}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{G_2}{G_1}}\right) + (G_1 + G_2)s$$

$$Ws = \frac{G_1 h}{1 + \frac{G_2}{G_1}} + (G_1 + G_2)s$$

Послѣ подстановки численныхъ значеній, получимъ:

$$W \,.\, 0,8 = \frac{1000 \,.\, 160}{1 + \frac{250}{1000}} + (1000 + 250)\, 0,8$$

или:

$$W = 160\,000 + 1250 = 161\,250 \text{ килогр.}$$

Однако, для запаса прочности, берутъ нагрузку сваи лишь около 1/8 вычисленной величины, т. е.:

$$W = \frac{161\,250}{8} = \backsim 20\,000 \text{ килогр.}$$

## ГЛАВА IV.

# Ученіе о равновѣсіи (статика) капельно-жидкихъ тѣлъ.

## § 27.

### Разница между твердыми и жидкими, капельно-жидкими и газообразными тѣлами.

Жидкія тѣла отличаются отъ твердыхъ главнымъ образомъ тѣмъ, что не обладаютъ ни сопротивленіемъ разрыву ни сопротивленіемъ срѣзыванію, и что коэффиціентъ тренія въ покоѣ у нихъ равенъ нулю. Главное свойство жидкостей — *удобоподвижность* отдѣльныхъ частицъ ихъ. Въ то время, какъ *капельно-жидкія тѣла* имѣютъ опредѣленную степень сцѣпленія, что выражается въ стремленіи образовать капли, *газообразныя жидкости*, напротивъ, обладаютъ стремленіемъ все болѣе и болѣе расширяться. Отталкивательныя силы между отдѣльными матеріальными частицами у *газообразныхъ* жидкостей никогда не бываютъ равны нулю, и такія тѣла только тогда находятся въ равновѣсіи, когда они заключены въ какомъ-нибудь сосудѣ.

Другое, менѣе существенное различіе между капельно-жидкими и газообразными тѣлами состоитъ въ томъ, что послѣднія относительно легко сжимаются до небольшого объема, тогда какъ первыя—*весьма трудно*. Такъ, напр., если взять нѣкоторый объемъ воды и производить на него со всѣхъ сторонъ давленія въ 1 килогр. на квадратный сантиметръ, то объемъ уменьшится всего только на $^1/_{20000}$. Такого незначительнаго уменьшенія объема для техническихъ цѣлей можно не принимать во вниманіе; поэтому капельно-жидкія тѣла разсматриваютъ какъ тѣла, не измѣняющія своего объема.

---

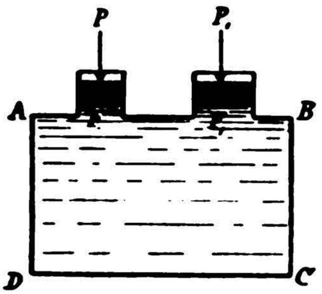
## § 28.

### Давленіе воды безъ разсмотрѣнія силъ тяжести (Гидростатическое давленіе).

Вслѣдствіе удобоподвижности частицъ жидкости, давленіе, производимое на какую-нибудь часть поверхности заключенной въ сосудъ жидкости, распространяется равномѣрно чрезъ посредство всей массы этой жидкости, такъ что давленіе во всѣхъ точкахъ, какъ на поверхности, такъ и внутри жидкости и повсѣмъ направленіямъ, имѣетъ одну и ту же величину (законъ гидростатическаго давленія) *).

Пусть ABCD (фиг. 176)—сосудъ, въ который заключена опредѣленная масса воды. Если замѣнить часть одной изъ стѣнокъ этого сосуда подвижнымъ цилиндрическимъ поршнемъ съ площадью поперечнаго сѣченія F и дѣйствовать на поршень снаружи съ силою P, то эта сила вызоветъ давленіе p, которое распространится на всю поверхность стѣнокъ сосуда и для каждой единицы поверхности будетъ имѣть величину:

Фиг. 176.




$$p = \frac{P}{F}$$

Въ силу этого (не принимая въ расчетъ вѣса воды), всякая часть стѣнки сосуда, равная F, испытываетъ такое же давленіе $P = pF$; поверхности, большія или меньшія, испытываютъ, въ отношеніи ихъ величины, большія или меньшія давленія. Поэтому, если въ другомъ мѣстѣ сосуда будетъ находиться второй подвижной цилиндрическій поршень съ площадью поперечнаго сѣченія $F_1$, то онъ будетъ испытывать давленіе $= pF_1$. Чтобы удержать второй поршень отъ выталкиванія, надо снаружи приложить къ нему силу $P_1$, равную по величинѣ:

$$P_1 = pF_1 = P\frac{F_1}{F}$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{F}{F_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 216)$$

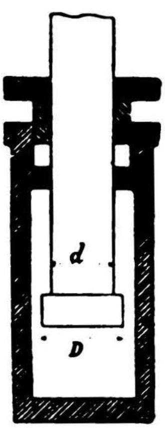
Отношеніе обѣихъ силъ P и $P_1$ равно отношенію соотвѣтствующихъ площадей поршней. Уравненіе 216 справедливо и тогда, когда нижнія поверхности поршней будутъ имѣть произвольное криволинейное очертаніе; но въ послѣднемъ случаѣ подъ F и $F_1$ надо понимать площади поперечнаго сѣченія отверстій, перпендикулярныхъ къ направленіямъ движеній поршней. Точно также внутреннее утолщеніе поршня (фиг. 177) не оказываетъ никакого вліянія, такъ какъ давленія на площади колецъ $\frac{(D^2 - d^2)\pi}{4}$ взаимно уничтожаются.

На законѣ гидростатическаго давленія основано дѣйствіе пресса, работающаго напоромъ воды, или т. н. гидравлическаго

*) Такъ называемый законъ Паскаля (1653 г.). *Прим. пер.*

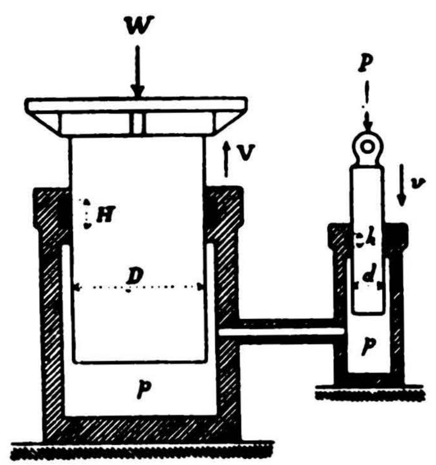
пресса (фиг. 178). Онъ состоитъ, главнымъ образомъ, изъ двухъ цилиндровъ, наполненныхъ водою (или масломъ), соединенныхъ между собой трубкой и снабженныхъ сверху плотно движущимися поршнями, изъ которыхъ одинъ больше, другой—меньше.

Фиг. 177.




Назначеніе гидравлическаго пресса состоитъ въ томъ, чтобы, при помощи дѣйствующаго снаружи на маленькій поршень давленія P, преодолѣвать сопротивленіе W, приложенное къ большому поршню.

Фиг. 178.




Если D и d — діаметры обоихъ поршней и p — давленіе на единицу площади, производимое внутри жидкости внѣшними силами W и P, то, не принимая во вниманіе сопротивленія, найдемъ для равновѣсія:

$$W = \frac{D^2\pi}{4} p$$

$$P = \frac{d^2\pi}{4} p$$

Слѣдовательно:

$$\frac{W}{P} = \frac{D^2}{d^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 217)$$

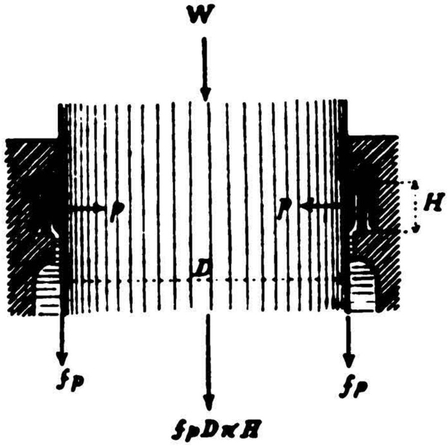
Такъ какъ изъ малаго цилиндра, благодаря дѣйствію поршней, вытекаетъ какъ разъ столько же воды, сколько поступаетъ въ большой, то отношеніе скоростей поршней V и v равно обратному отношенію поперечныхъ сѣченій самихъ поршней; поэтому:

$$\frac{V}{v} = \frac{d^2}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 218)$$

Плотность соединенія между поршнемъ и цилиндромъ обыкновенно достигается кожанымъ манжетомъ (набивкой), который, подъ давленіемъ воды, одной стороной прижимается къ поршню, а другой—къ внутренней стѣнкѣ цилиндра (фиг. 179).

Принимая во вниманіе сопротивленіе тренія, появляющееся у набивки, и обозначая коэффиціентъ тренія черезъ f, высоты манжетъ—черезъ H и h, получимъ:

Фиг. 179.




$$W = \frac{D^2 \pi}{4}\, p - fpD\pi H$$

$$P = \frac{d^2 \pi}{4}\, p + fpd\pi h$$

Слѣдовательно:

$$\frac{W}{P} = \frac{D^2}{d^2}\left(\frac{1 - 4f\,\frac{H}{D}}{1 + 4f\,\frac{h}{d}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 219)$$

Изъ уравненій 218 и 219 получимъ и коэффиціентъ полезнаго дѣйствія:

$$\eta = \frac{1 - 4f\,\frac{H}{D}}{1 + 4f\,\frac{h}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 220)$$

Задача 103. У гидравлическаго пресса:

$$d = 2 \text{ сентим.};\ D = 40 \text{ сентим.};\ f = 0{,}12;\ \frac{H}{D} = \frac{h}{d} = 0{,}2$$

Какое сопротивленіе W можно преодолѣть силою P = 100 килогр., приложенною къ малому поршню?

Рѣшеніе. По уравненію 220, коэффиціентъ полезнаго дѣйствія будетъ:

$$\eta = \frac{1 - 4 \,.\, 0{,}12 \,.\, 0{,}2}{1 + 4 \,.\, 0{,}12 \,.\, 0{,}2} = 0{,}825$$

А такъ какъ:

$$\frac{D^2}{d^2} = \frac{40^2}{2^2} = 400$$

то, по уравненію 219,

$$W = 100 \,.\, 400 \,.\, 0{,}825 = 33\,000 \text{ килогр.}$$

Безъ тренія было бы, согласно уравненію 217:

$$W = 100 \,.\, 400 = 40\,000 \text{ килогр.}$$

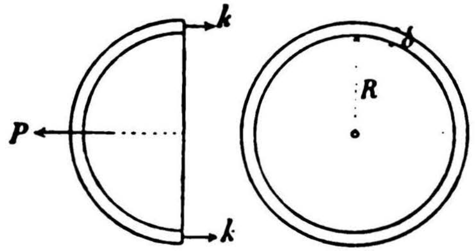
## § 29.

## Толщина стѣнокъ, сосудовъ и трубъ.

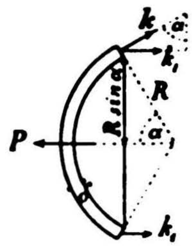
Внутри полаго шарообразнаго сосуда, съ радіусомъ R и толщиною стѣнокъ $\delta$ (фиг. 180), существуетъ давленіе p на 1 сентим. Если представимъ себѣ полый шаръ раздѣленнымъ плоскостью, проходящей черезъ центръ, на двѣ равныя части, то, по предыдущему параграфу, полное давленіе на каждую половину полаго шара будетъ:

$$P = R^2 \pi p$$

Фиг. 180.




Фиг. 181.




Это давленіе уравновѣшивается силами упругости (напряженіями), появляющимися въ кольцеобразной площади сѣченія. Если $\delta$ по отношенію къ R—мало, то съ достаточной точностью можно площадь сѣченія положить равной $2 R \pi \delta$. Принимая, что напряженіе k распредѣлено равномѣрно по всей толщинѣ стѣнки $\delta$, получимъ *):

$$R^2 \pi p = 2 R \pi \delta k$$

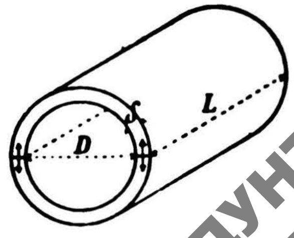
Слѣдовательно:

$$\delta = \frac{R}{2} \frac{p}{k} \;\text{**)} \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad 221)$$

Для отрѣзка полаго шара съ половиннымъ центральнымъ угломъ $\alpha$ (фиг. 181) подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$(R \sin \alpha)^2 \pi p = 2 (R \sin \alpha) \pi \delta k_1$$

Фиг. 182.




а такъ какъ $k_1 = k \sin \alpha$, то отсюда для $\delta$ получимъ то же самое значеніе, что и въ уравненіи 221.

Цилиндрическая труба, длиною L, съ внутреннимъ діаметромъ D и толщиною стѣнки $\delta$ (фиг. 182), концы которой какимъ-нибудь способомъ закрыты, можетъ отъ внутренняго давленія p разо-

---

*) См. Лауэнштейнъ. Сопротивленіе матеріаловъ.

**) Это уравненіе относится также къ прочности цилиндрическихъ трубъ радіуса R въ направленіи поперечнаго сѣченія.

рваться по плоскости, проходящей черезъ продольную ось. Полное давленіе въ этомъ случаѣ $= DLp$, а соотвѣтствующая площадь поперечнаго сѣченія $= 2L\delta$: слѣдовательно:

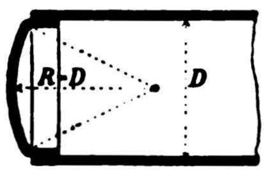
$$DLp = 2L\delta k$$

Откуда толщина стѣнки:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 222)$$

Уравненія 221 и 222 показываютъ, что, при одномъ и томъ же давленіи p и при одинаковой прочности k, толщины стѣнокъ $\delta$ будутъ равны, если радіусъ R полаго шара равенъ діаметру D цилиндрической трубы. Поэтому, если труба должна быть замкнута шарообразнымъ дномъ (какъ, напр., бываетъ въ простыхъ цилиндрическихъ паровыхъ и водяныхъ котлахъ), то для того, чтобы имѣть одинаковый запасъ прочности противъ разрыва, радіусъ дна долженъ быть равенъ діаметру трубы (фиг. 183).

Фиг. 183.




Уравненіе 221 одинаково примѣнимо и для опредѣленія прочности цилиндрическихъ трубъ въ направленіи поперечнаго сѣченія. Поэтому изъ обоихъ уравненій слѣдуетъ, что $\left(\text{такъ какъ } R = \frac{D}{2}\right)$ прочность трубы въ направленіи поперечнаго сѣченія въ половину меньше прочности въ продольномъ направленіи. Поэтому, напр., склепанныя цилиндрическія части парового котла въ поперечномъ швѣ могутъ имѣть болѣе слабое соединеніе заклепками.

Полученная въ уравненіи 222 толщина стѣнки трубы — величина теоретическая; на практикѣ же она не достаточна, такъ какъ въ дѣйствительности напряженіе распредѣляется не вполнѣ равномѣрно по поперечному сѣченію (въ направленіи радіуса), да и матеріалъ не вездѣ одинаково хорошъ. Кромѣ того, особенно при малыхъ значеніяхъ p и D, ноздреватость (пористость) матеріала и способъ изготовленія играютъ важную роль. Поэтому къ теоретически вычисленной толщинѣ стѣнки трубы прибавляютъ величину C, зависящую отъ матеріала и полученную изъ опыта и полагаютъ:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p}{k} + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad 223)$$

Для чугунныхъ трубъ, испытывающихъ рабочее давленіе $p = 8$ атм. (8 килогр./сентим.$^2$), можно принять:

$k = 200$ килогр.; $C = 0{,}9$ сентим. для горизонтально отлитыхъ трубъ
$k = 240$ „ ; $C = 0{,}7$ „ „ вертикально „ „

Тогда, по уравненію 223, получимъ требуемую толщину стѣнки для горизонтально отлитыхъ трубъ:

$$\delta = \frac{D}{50} + 0{,}9 \text{ сентим.}$$

для вертикально отлитыхъ трубъ: . . . . . 224)

$$\delta = \frac{D}{60} + 0{,}7 \text{ сентим.}$$

Въ нормальныхъ таблицахъ паровыхъ трубопроводовъ высокаго напряженія (составленныхъ „Verein Deutscher Ingenieure" *) при p до 8 атм. чугунъ считается допустимымъ для трубъ всѣхъ діаметровъ; при p = 8—13 атм.—лишь допустимымъ для трубъ, діаметромъ не больше 15 сентим.; при $p > 13$ атм.—чугунъ вообще для трубъ не допустимъ.

Для другихъ матеріаловъ можно принять слѣдующія значенія:

k = 350; C = 0,1 для полосового желѣза (сварочнаго и литого желѣза)
k = 200; C = 0,15 „ мѣди (тянутой)
k = 200; C = 0,6 „ латуни (литой)
k = 200; C = 0,2 „ латуни (тянутой)
k = 50; C = 0,1 „ свинца

При очень значительной толщинѣ стѣнокъ по отношенію къ внутреннему діаметру трубы D, распредѣленіе напряженій нельзя уже принимать равномѣрнымъ, и такія трубы (какъ, напр., стволы орудій) нельзя разсчитывать по уравненію 223. Напряженіе внутреннихъ частей стѣнокъ у такихъ трубъ всегда значительно больше, чѣмъ наружныхъ, а потому, предполагая матеріалъ стѣнокъ однороднымъ, вслѣдствіе чрезмѣрнаго напряженія могли бы получить трещины прежде всего на внутренней сторонѣ трубы. Эти недостатки можно устранить, составляя стволы орудій изъ отдѣльныхъ частей и нагоняя на внутреннюю сквозную трубу въ горячемъ состояніи особыя кольца, такъ что они послѣ охлажденія производятъ на внутреннюю трубу давленіе, направленное снаружи во внутрь. (Эта мысль лежитъ въ основаніи способа изготовленія, напр., крупповскихъ орудій, скрѣпленныхъ кольцами).

## § 30.

## Вліяніе силъ тяжести. Давленіе на стѣнки сосуда.

Вслѣдствіе тяжести и удобоподвижности частицъ поверхность жидкости, находящейся въ открытомъ сосудѣ, представляетъ горизонтальную плоскость, такъ какъ у наклоненной къ

*) Zeitschr. d. V. d. Ing. 1900. Стр. 1481. (Нормальныя таблицы доведены до 20 сентим. добавочнаго давленія).

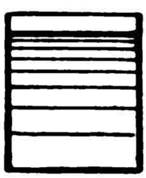
горизонтальной плоскости поверхности жидкости верхнія ея частицы тотчасъ же соскользнули бы по нижнимъ, какъ по наклонной плоскости.

Давленіе жидкости, производимое ея вѣсомъ, увеличивается по вертикальному направленію, пропорціонально глубинѣ. Слѣдовательно, въ каждой плоскости, параллельной верхней горизонтальной поверхности воды, давленіе распредѣлено равномѣрно по всей плоскости. Что касается жидкостей различныхъ удѣльныхъ вѣсовъ, то онѣ всегда располагаются въ сосудѣ такъ, что болѣе легкая жидкость находится выше болѣе тяжелой (напр., масло расположится выше воды).

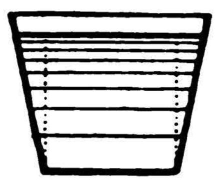
Давленіе жидкости, производимое ея вѣсомъ на горизонтальное дно сосуда, равно вѣсу вертикальнаго столба ея, основаніе котораго равно площади дна, а высота—разстоянію дна отъ поверхности жидкости *).

При этомъ совершенно безразлично, будетъ ли поперечное сѣченіе сосуда снизу до верху одно и то же (фиг. 184), или оно будетъ увеличиваться (фиг. 185), или уменьшаться (фиг. 186). На фиг. 184 вѣсъ жидкости равенъ давленію на дно сосуда; на фиг. 185 — больше, на фиг. 186—меньше давленія на дно сосуда.

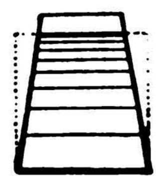
Фиг. 184.



Фиг. 185.



Фиг. 186.



Если F — площадь дна, h — глубина ея подъ поверхностью жидкости (высота напора или давленія) и $\gamma$—вѣсъ кубической единицы жидкости, то давленіе на дно сосуда будетъ:

$$D = \gamma F h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 225)$$

Какъ на дно, такъ и на боковыя стѣнки сосуда жидкость производитъ нормальное давленіе. Это давленіе увеличивается съ глубиною и для каждой отдѣльной площадки f стѣнки равно вѣсу столба жидкости, основаніе котораго равно величинѣ площадки, а высота—вертикальному разстоянію ея отъ верхней поверхности жидкости (уровня).

Если обозначить разстояніе это черезъ x, то давленіе на площадку будетъ $= f x \gamma$.

*) Паскаль. (1653) *Прим. перев.*

Поэтому полное давленіе на всю площадь будетъ:

$$D = \Sigma\,(fx\,\gamma) = \gamma\,\Sigma\,(fx)$$

По уравненію 35, стр. 47:

$$f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots = \Sigma(fx) = Fx_0$$

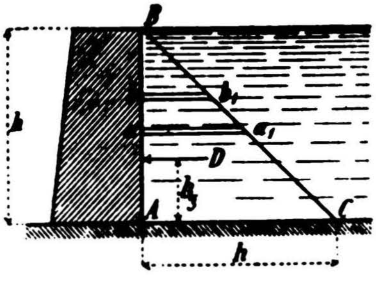
гдѣ $x_0$ — разстояніе центра тяжести подверженной давленію площади отъ уровня жидкости; слѣдовательно:

$$D = \gamma\,Fx_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 226)$$

т. е. давленіе жидкости, производимое ея вѣсомъ на какую-нибудь площадь, равно вѣсу столба жидкости, основаніе котораго равно подверженной давленію площади, а высота — разстоянію центра тяжести этой площади отъ уровня жидкости.

Точка приложенія силы D (т. е. равнодѣйствующей всѣхъ силъ давленія, дѣйствующихъ на отдѣльныя площадки) называется центромъ давленія. Онъ лежитъ всегда ниже центра тяжести подверженной давленію площади, такъ какъ силы давленія увеличиваются вмѣстѣ съ глубиною.

Фиг. 187.




Если представить себѣ, что вертикальная стѣна AB = h (фиг. 187), подверженная давленію воды, раздѣлена на отдѣльныя, очень тонкія, горизонтальныя полоски a, b, . . . ., и перпендикулярно къ стѣнѣ отложены призмы воды $aa_1$, $bb_1$, . . . . , высота которыхъ равна разстоянію полосокъ отъ уровня воды, то вѣса этихъ призмъ представляютъ собой давленія на соотвѣтствующія полоски площади (стѣны). Концы $a_1$, $b_1$ . . . . всѣхъ этихъ призмъ воды лежатъ въ одной плоскости BC, и ABC $\left(= \frac{h^2}{2}\right)$ можно разсматривать какъ поперечное сѣченіе призмы воды, представляющей полное давленіе на всю стѣну AB.

Для части стѣны, шириною $b = 1$, получимъ изъ уравненія 226, если подставимъ $F = bh = h$ и $x_0 = \frac{h}{2}$:

$$D = \frac{\gamma\,h^2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 227)$$

Центръ давленія лежитъ на одной высотѣ съ центромъ тяжести треугольника ABC; слѣдовательно, на $^2/_3$ h отъ верхняго края B.

**Задача 104. Найти величину давленія D на дно сосуда, наполненнаго водой, если площадь основанія (дна) его $F = 3{,}2$ метр.$^2$ и глубина воды (высота уровня) $h = 1{,}5$ метр.**

**Рѣшеніе. Такъ какъ 1 метр.$^3$ воды вѣситъ $\gamma = 1000$ килогр., то, по уравненію 225:**

$$D = 3{,}2 \,.\, 1{,}5 \,.\, 1000 = 4800 \text{ килогр.}$$

**Задача 105. Какова величина давленія на стѣну воды, высотою 4 метра и шириною 1 метръ, если уровень воды лежитъ на одной высотѣ съ верхнимъ краемъ стѣны?**

**Рѣшеніе.** По уравненію 227:

$$D = 1000 \,.\, \frac{4^2}{2} = 8000 \text{ килогр.}$$

**Задача 106.** Шлюзныя ворота снабжены прямоугольнымъ затворомъ, высота котораго $= 0{,}8$ метр., а ширина $= 0{,}6$ метр. Верхній край затвора лежитъ на глубинѣ 1,2 метра подъ уровнемъ воды. Опредѣлить величину давленія воды на затворъ.

**Рѣшеніе.** Площадь затвора будетъ:

$$F = 0{,}8 \,.\, 0{,}6 = 0{,}48 \text{ метр.}^2$$

Разстояніе центра тяжести этой площади отъ уровня воды:

$$x_0 = 1{,}2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 = 1{,}6 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 226:

$$D = 1000 \,.\, 0{,}48 \,.\, 1{,}6 = 768 \text{ килогр.}$$

---

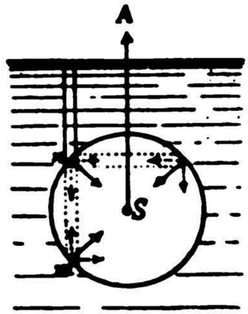
§ 31.

## Давленіе снизу вверхъ на тѣло, погруженное въ жидкость (подъемная сила). Дѣйствительный, удѣльный и относительный вѣсъ.

Если твердое тѣло погружено въ жидкость, то каждая часть его поверхности испытываетъ нормальное давленіе. Это давленіе, по § 30, равно вѣсу столба жидкости, основаніе котораго равно взятой части поверхности, а высота — вертикальному разстоянію этой части отъ верхней поверхности жидкости. Если разложимъ давленія на отдѣльныя частицы поверхности тѣла на горизонтальныя и вертикальныя составляющія давленія, то первыя взаимно уравновѣсятся, а послѣднія — нѣтъ. Если m и n (фиг. 188)—двѣ лежащія на одной вертикали одна надъ другой площадки, то давленіе, направленное вверхъ, которое испытываетъ площадка m, больше давленія на площадку n, направленнаго внизъ, на величину вѣса столба жидкости mn. Поэтому равнодѣйствующая всѣхъ давленій, направленныхъ вверхъ, больше равнодѣйствующей давленій, направленныхъ внизъ, на величину вѣса всей массы жидкости, имѣющей равный объемъ съ погруженнымъ тѣломъ.

Эта разность давленій, т. е. алгебраическая сумма вертикальныхъ составляющихъ давленій, даетъ силу, направленную вверхъ и стремящуюся поднять погруженное тѣло. Эта сила называется подъемной силой жидкости (давленіемъ снизу вверхъ на тѣло, погруженное въ жидкость). По величинѣ это давленіе равно вѣсу вытѣсняемой погруженнымъ тѣломъ жидкости; точка приложенія этого давленія есть центръ тяжести S вытѣсненной массы воды.

Фиг. 188.




Такъ какъ давленіе снизу вверхъ представляетъ собой силу, направленную прямопротивоположно собственному вѣсу тѣла, то изъ предыдущаго слѣдуетъ, что твердое тѣло, погруженное въ жидкость теряетъ въ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ вытѣсненная имъ жидкость *).

У совершенно погруженнаго тѣла, если $\gamma$—вѣсъ кубической единицы жидкости и $V$—объемъ погруженнаго тѣла, давленіе снизу вверхъ имѣетъ величину:

$$A = \gamma V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 228)$$

Если $\gamma_1$—вѣсъ кубической единицы однороднаго тѣла, то дѣйствительный вѣсъ его:

$$G = \gamma_1 V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 229)$$

Отношеніе:

$$\frac{G}{A} = \frac{\gamma_1}{\gamma} = s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 230)$$

называется удѣльнымъ вѣсомъ тѣла относительно жидкости, въ которую оно погружено. Вообще за такую жидкость принимаютъ воду при $4^0$ С., и тогда удѣльный вѣсъ тѣла есть число, показывающее, во сколько разъ тѣло тяжелѣе равнаго по величинѣ объема воды при $4^0$.

Поэтому удѣльный вѣсъ воды = 1.

Такъ какъ 1 куб. дециметръ воды вѣситъ 1 килогр., то удѣльный вѣсъ какого-нибудь тѣла равенъ дѣйствительному вѣсу 1 куб. дециметра его въ килогр. или вѣсу 1 куб. сантиметра—въ граммахъ.

Изъ уравненія 230 имѣемъ:

$$G = As$$

---

*) Законъ Архимеда. *Прим. перев.*

Подставляя сюда для A его значеніе изъ уравненія 228, получимъ:

$$G = \gamma V s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 231)$$

т. е. дѣйствительный вѣсъ тѣла равенъ вѣсу массы воды того же объема, умноженному на удѣльный вѣсъ тѣла.

Если удѣльный вѣсъ погруженнаго тѣла равенъ удѣльному вѣсу воды (= 1), то дѣйствительный вѣсъ его равенъ давленію снизу вверхъ, и тѣло будетъ находиться въ равновѣсіи на любой глубинѣ.

Если удѣльный вѣсъ тѣла меньше 1, то оно будетъ погружаться въ воду лишь до тѣхъ поръ, пока вѣсъ воды, вытѣсненной погруженной частью тѣла, не будетъ равенъ дѣйствительному вѣсу тѣла, т. е. тѣло будетъ плавать.

Если у плавающаго тѣла объемъ погруженной части назовемъ черезъ $V_1$, то:

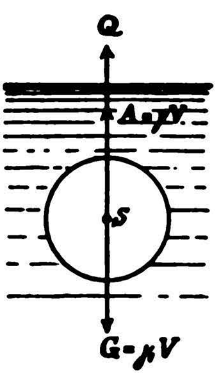
$$G = \gamma V_1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 232)$$

Тогда изъ уравненій 231 и 232 слѣдуетъ:

$$s = \frac{V_1}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 233)$$

Если тѣло тяжелѣе воды, то, чтобы удержать его въ равновѣсіи, необходимо приложить къ нему еще силу Q, направленную вертикально вверхъ (фиг. 189). Эта сила, которую называютъ кажущимся или относительнымъ вѣсомъ тѣла, имѣетъ величину:

Фиг. 189.




$$Q = G - A$$

или, если вмѣсто A и G подставить ихъ значенія изъ уравненій 228 и 231:

$$Q = \gamma V (s - 1) \quad \ldots \ldots \quad 234)$$

Взвѣшиваніемъ тѣла внѣ воды и въ водѣ можно опредѣлить удѣльный вѣсъ его. Вычитая уравненіе 234 изъ уравненія 231, найдемъ:

$$G - Q = \gamma V$$

а раздѣливъ уравненіе 231 на послѣднее выраженіе, получимъ:

$$s = \frac{G}{G - Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 235)$$

т. е. удѣльный вѣсъ тѣла равенъ дѣйствительному его вѣсу, дѣленному на разность между дѣйствительнымъ вѣсомъ и относительнымъ.

Если тѣло представляетъ собой смѣсь двухъ веществъ съ различными, но извѣстными удѣльными вѣсами, то путемъ взвѣшиванія его внѣ воды и въ водѣ можно опредѣлить объемъ каждаго изъ обоихъ веществъ въ тѣлѣ.

Если $V_1$ — объемъ и $s_1$ — удѣльный вѣсъ одного вещества,
„ $V_2$ „ „ „ $s_2$ „ „ „ другого „
то, соотвѣтственно уравненіямъ 231 и 234, получимъ:

$$G = \gamma V_1 s_1 + \gamma V_2 s_2$$
$$Q = \gamma V_1 (s_1 - 1) + \gamma V_2 (s_2 - 1)$$

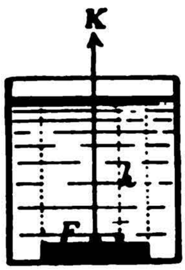
Рѣшая эти уравненія относительно $V_1$ и $V_2$, найдемъ:

$$V_1 = \frac{Q - \left(1 - \frac{1}{s_2}\right) G}{\left(\frac{s_1}{s_2} - 1\right) \gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 236)$$

$$V_2 = \frac{Q - \left(1 - \frac{1}{s_1}\right) G}{\left(\frac{s_2}{s_1} - 1\right) \gamma} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 237)$$

Если тѣло, напр., гладкая пластинка, площадь которой $= F$ и вѣсъ $= G$, такъ плотно прилегаетъ ко дну наполненнаго водой сосуда, что подъ нее не можетъ проникнуть вода (фиг. 190), то никакого давленія снизу вверхъ не существуетъ, и сила, необходимая для поднятія пластинки, въ такомъ случаѣ имѣетъ величину:

Фиг. 190.




$$K = G + \gamma F h \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 238)$$

Задача 107. Объемъ чугунной болванки 0,65 метр.³. Сколько она вѣситъ, если удѣльный вѣсъ чугуна 7,25?

Рѣшеніе. По уравненію 231:

$$G = 1000 \,.\, 0{,}65 \,.\, 7{,}25 = 4712{,}5 \text{ килогр.}$$

Задача 108. Призматическая деревянная балка, длиною 3 метр., шириною 15 сентим. и толщиною 16 сентим., была положена въ воду своей широкой стороной и погрузилась настолько, что верхній край ея выдавался надъ уровнемъ воды на 5 сентим. Найти удѣльный вѣсъ дерева.

Рѣшеніе. По уравненію 233:

$$s = \frac{V_1}{V} = \frac{3 \,.\, 0{,}25 \,.\, (0{,}16 - 0{,}05)}{3 \,.\, 0{,}25 \,.\, 0{,}16} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

Задача 109. Кусокъ свинца внѣ воды вѣситъ 10 килогр. Найти относительный вѣсъ его, если удѣльный вѣсъ свинца равенъ 11,4.

Рѣшеніе. По уравненію 235:

$$Q = G\left(1 - \frac{1}{s}\right) = 10\left(1 - \frac{1}{11{,}4}\right) = 9{,}123 \text{ килогр.}$$

**Задача 110.** Машинная часть изъ латуни (сплавъ мѣди и цинка) вѣситъ въ воздухѣ $G = 100$ килогр., въ водѣ $Q = 87{,}8$ килогр. Сколько въ этой части мѣди (удѣльный вѣсъ $s_1 = 8{,}8$) и сколько цинка (удѣльный вѣсъ $s_2 = 7$)?

**Рѣшеніе.** Изъ уравненій 236 и 237:

$$V_1 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{7}\right) 100}{\left(\frac{8{,}8}{7} - 1\right) 1000} = 0{,}0081$$

$$V_2 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{8{,}8}\right) 100}{\left(\frac{7}{8{,}8} - 1\right) 1000} = 0{,}0041$$

Вѣса же ихъ опредѣлятся по уравненію 231:

$G_1 = 1000 \;.\; 0{,}0081 \;.\; 8{,}8 = 71{,}3$ килогр. мѣди.

$G_2 = 1000 \;.\; 0{,}0041 \;.\; 7 = 28{,}7$ килогр. цинка.

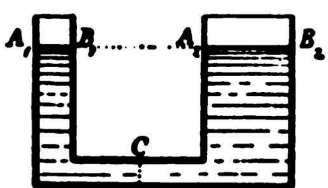
---

§ 32.

## Сообщающіеся сосуды.

Два сосуда, соединенные другъ съ другомъ такъ, что жидкости свободно могутъ проникать изъ одного въ другой, называются **сообщающимися сосудами**. При этомъ сосуды могутъ быть расположены рядомъ и соединены другъ съ другомъ особой трубкой (фиг. 191 и 193), или болѣе широкій сосудъ можетъ охватывать болѣе узкій (фиг. 192).

Фиг. 191.




Если въ сообщающихся сосудахъ заключена одна и та же жидкость (напр., вода), то она въ обоихъ колѣнахъ стоитъ на одинаковой высотѣ; поверхности $A_1B_1$ и $A_2B_2$ (фиг. 191) лежатъ въ одной горизонтальной плоскости. Само собою разумѣется, что жидкость только тогда можетъ быть въ равновѣсіи, если въ произвольномъ сѣченіи CD соединительной трубки съ обѣихъ сторонъ будетъ одинаковое давленіе. Это происходитъ тогда, когда уровень жидкости въ обоихъ колѣнахъ стоитъ на одной высотѣ надъ центромъ тяжести поперечнаго сѣченія CD.

Если въ сообщающихся сосудахъ находятся разнородныя жидкости съ различными удѣльными вѣсами, то въ положеніи равновѣсія болѣе легкая жидкость въ одномъ колѣнѣ будетъ стоять выше, чѣмъ болѣе тяжелая въ другомъ колѣнѣ.

Если $s_1$ и $s_2$ — удѣльные вѣса жидкостей, $h_1$ и $h_2$ — высоты уровней жидкостей до раздѣляющей ихъ плоскости $MN = F$ (фиг. 192 и и 193), то, по уравненію 231, стр. 182, такъ какъ эта плоскость должна испытывать съ обѣихъ сторонъ одинаковое давленіе, получимъ:

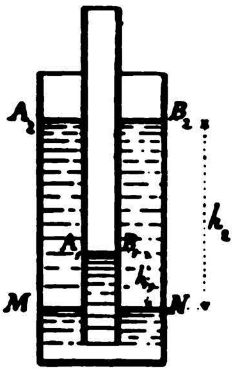
$$\gamma F h_1 s_1 = \gamma F h_2 s_2$$

или:

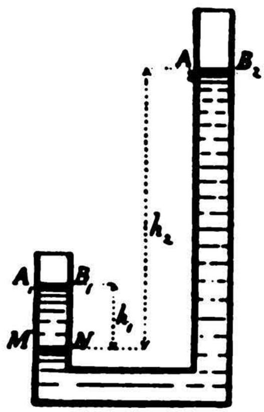
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{s_2}{s_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 239)$$

т. е. высоты уровней жидкостей надъ раздѣляющей ихъ плоскостью обратно пропорціональны удѣльнымъ вѣсамъ жидкостей.

Фиг. 192




Фиг. 193.




Однако этотъ законъ не приложимъ для очень узкихъ трубокъ, такъ называемыхъ волосныхъ трубокъ (см. стр. 3).

Сообщающіеся трубки примѣняются, между прочимъ, въ нивеллирныхъ инструментахъ.

---

ГЛАВА V.

# Ученіе о движеніи (динамика) капельно-жидкихъ тѣлъ.

## § 33.

### Истеченіе воды изъ сосудовъ.

Для свободно падающей воды примѣняются тѣ же законы, какъ и для свободно падающихъ твердыхъ тѣлъ.

Если Q — количество воды, притекающей въ секунду въ кубическихъ метрахъ (слѣдовательно, 1000 Q — вѣсъ ея въ килогр.;

$\frac{1000\,Q}{g}$ — масса ея), h — высота паденія и v — скорость, съ которой вода достигаетъ нижней точки (фиг. 194), то, по уравненію 22, стр. 28:

$$1000\,Qh = \frac{1000\,Q}{g}\,\frac{v^2}{2}$$

Слѣдовательно:

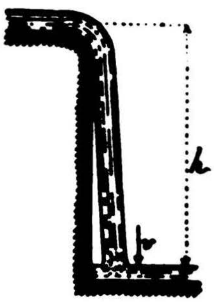
$$h = \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 240)$$

или:

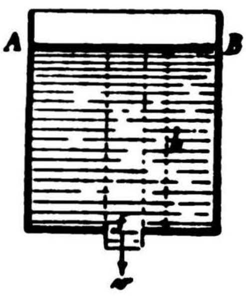
$$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 241)$$

Выраженіе $\frac{v^2}{2g}$ называютъ **высотой, соотвѣтствующей скорости** (свободно-падающаго тѣла).

Фиг. 194.




Фиг. 195.




Если вода заключена въ цилиндрическій сосудъ (фиг. 195), и дно этого сосуда сразу отнять, то вся масса воды начнетъ свободно ниспадать, и верхній слой воды AB придетъ внизъ со скоростью $v = \sqrt{2gh}$.

Напротивъ, если сразу отнять не все дно, а только часть его съ поперечнымъ сѣченіемъ f, то свободно упадетъ только столбъ, находящійся надъ отверстіемъ, и тѣ частицы этого столба, которыя раньше находились на поверхности, придутъ внизъ со скоростью v. Если, при помощи притока со стороны, будемъ поддерживать **одну и ту же** высоту напора h, то приходящія внизъ частицы воды все время истеченія будутъ проходить высоту h; поэтому **теоретическая скорость** истеченія $v = \sqrt{2gh}$, а теоретическое количество воды, вытекающее въ секунду черезъ поперечное сѣченіе f:

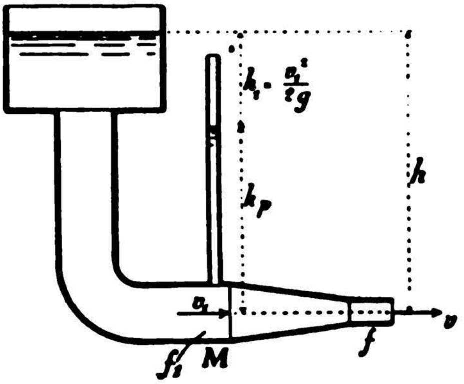
$$Q = f\sqrt{2gh} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 242)$$

Пусть сосудъ снабженъ снизу трубою (фиг. 196), согнутою на опредѣленной высотѣ и затѣмъ идущей горизонтально. Эта труба въ M имѣетъ поперечное сѣченіе $f_1$, затѣмъ постепенно суживается и оканчивается насадкой съ меньшимъ поперечнымъ сѣченіемъ f.

Скорость у выпускного отверстія здѣсь также соотвѣтствуетъ полной высотѣ паденія h и имѣетъ величину:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Фиг. 196.




Слѣдовательно, количество воды, вытекающей въ секунду, по уравненію 242:

$$Q = fv = f\sqrt{2gh}$$

Такъ какъ то же количество воды должно пройти въ 1 секунду въ каждомъ другомъ поперечномъ сѣченіи трубы, то для сѣченія M, лежащаго на одной высотѣ съ выпускнымъ отверстіемъ, будемъ имѣть:

$$f_1 v^1 = fv$$

Слѣдовательно:

$$v_1 = \frac{f}{f_1} v = \frac{f}{f_1}\sqrt{2gh}$$

и (такъ какъ $f_1 > f$) будетъ меньше v, т. е. меньше той скорости, которая соотвѣтствуетъ полной высотѣ напора.

Но высота напора, соотвѣтствующая сторости $v_1$, по уравненію 240, будетъ:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}$$

Слѣдовательно, для поперечнаго сѣченія M (фиг. 196) будемъ имѣть высоту напора:

$$h_p = h - h_1 = h - \frac{v_1^2}{2g}$$

не израсходованную на пріобрѣтеніе скорости и такъ называемую высоту давленія *). Въ открытой сверху трубкѣ, вставленной въ этомъ

*) На этомъ основано устройство реактивныхъ турбинъ.

мѣстѣ (піезометрической трубкѣ), вода поднялась бы на высоту $h_p$.

Если выпускное отверстіе находится не въ днѣ, а въ стѣнкѣ сосуда (фиг. 197), то высоты напора, а также и скорости истеченія частицъ воды для различныхъ точекъ отверстія различны.

Фиг. 197.


Если высота бокового отверстія относительно мала, то скорости отличаются одна отъ другой на незначительную величину, и для вычисленія количества воды, вытекающей въ 1 секунду, по уравненію 242, можно съ достаточной точностью разстояніе центра тяжести отверстія истеченія отъ уровня воды принять за постоянную высоту напора h (какъ, наприм., сдѣлано на фиг. 196).

При болѣе значительной высотѣ бокового отверстія можно представить себѣ, что вся площадь поперечнаго сѣченія выходящей струи раздѣлена на очень большое число горизонтальныхъ полосъ съ очень малою высотою $\Delta$ (фиг. 198). Для полосы, находящейся на глубинѣ y отъ уровня воды, скорость истеченія будетъ:

$$v = \sqrt{2gy}$$

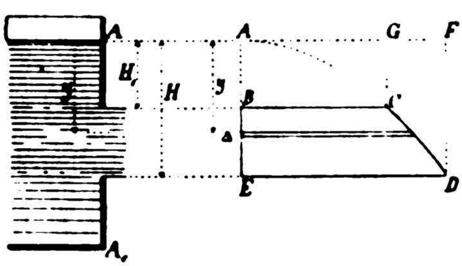
и если предположить, что отверстіе шириною b, прямоугольно, то расходъ воды черезъ такую полоску поперечнаго сѣченія будетъ:

$$q = b\,\Delta\sqrt{2gy} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 243)$$

Поэтому расходъ воды, вытекающей изъ всего отверстія, равенъ:

$$Q = \Sigma(b\,\Delta\sqrt{2gy}) = b\,\Sigma(\Delta\sqrt{2gy}) \quad . \; . \; . \; . \quad 244)$$

Фиг. 198.




Если разсматривать количества воды q, вытекающія чрезъ отдѣльныя полосы поперечнаго сѣченія, какъ горизонтальныя призмы, одни концы которыхъ лежатъ на одной вертикали (одинъ надъ другимъ), то другіе концы этихъ призмъ расположатся по параболѣ съ вершиною въ точкѣ A (фиг. 198), такъ какъ, по уравненію 243, отдѣльные (элементарные) расходы воды относятся между собою, какъ корни квадратные изъ соотвѣтствующихъ высотъ напора.

Полный расходъ воды Q поэтому равенъ призмѣ съ площадью поперечнаго сѣченія BCDE.

На фиг. 198:

$$BCDE = ADE - ACB$$

а такъ какъ извѣстно, что площадь параболы = $^2/_3$ площади прямоугольника, построеннаго на хордѣ и высотѣ, то:

$$BCDE = {}^2/_3\ AFDE - {}^2/_3\ AGCB$$

или:

$$\Sigma\,(\Delta\sqrt{2gy}) = {}^2/_3\, H\sqrt{2gH} - {}^2/_3\, H_1\sqrt{2gH_1}$$

Слѣдовательно, по уравненію 244, полный расходъ воды будетъ:

$$Q = {}^2/_3\, b\sqrt{2g}\,(H^{3/2} - H_1^{\ 3/2}) \quad \ldots\ldots \quad 245)$$

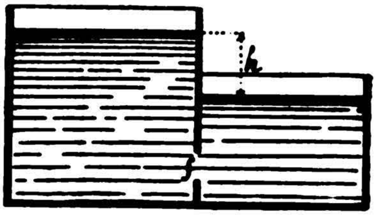
гдѣ b—ширина выпускного отверстія, H—глубина нижняго края его, $H_1$—глубина верхняго края отъ уровня воды.

Для $H_1 = 0$, т. е. если верхній край выпускного отверстія совпадаетъ съ уровнемъ воды, изъ уравненія 245 получимъ:

$$Q = {}^2/_3\, bH\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 246)$$

Если выпускное отверстіе находится подъ водой (фиг 199), то для вычисленія Q за высоту напора въ уравненіи 242 надо принять вертикальное разстояніе h между уровнями воды въ обоихъ соприкасающихся сосудахъ.

Фиг. 199.




Дѣйствительный расходъ воды болѣе или менѣе отличается отъ теоретическаго. Это происходитъ отъ того, что, съ одной стороны, скорость истеченія уменьшается, вслѣдствіе того, что ближайшія къ стѣнкамъ частицы воды для выхода въ отверстіе должны рѣзко измѣнить направленіе своего движенія, а съ другой — не все поперечное сѣченіе отверстія занято вытекающей струей воды, такъ какъ послѣдняя сжимается.

Чтобы получить дѣйствительно вытекающее количество воды, нужно значенія его, полученныя въ уравненіяхъ 242, 245 и 246, умножить еще на такъ называемый коэффиціентъ истеченія воды μ, который имѣетъ различную величину, въ зависимости отъ того, будетъ ли сжатіе струи полнымъ или неполнымъ.

Полное сжатіе струи бываетъ въ томъ случаѣ, когда выпускное отверстіе по всему периметру имѣетъ заостренные края снаружи и вмѣстѣ съ тѣмъ ширина отверстія незначительна сравнительно съ разстояніемъ его отъ близлежащаго края сосуда и высотою напора. Для этого случая, на основаніи опытовъ можно принять коэффиціентъ истеченія равнымъ:

$$\mu = 0{,}62 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 247)$$

Неполное сжатіе струи происходитъ тогда, когда одна или нѣсколько сторонъ выпускного отверстія являются продолженіемъ стѣнокъ сосуда. Если коэффиціентъ истеченія при неполномъ сжатіи струи обозначить черезъ $\mu_1$, полный периметръ выпускного отверстія—черезъ U, а черезъ nU — ту его часть, у которой не происходитъ никакого сжатія, то:

для прямоугольныхъ отверстій: $\mu_1 = (1 + 0{,}15\,n)\,\mu$ . . . 248)

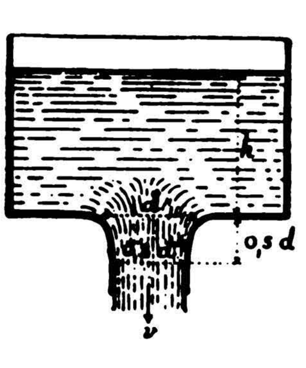
„ круглыхъ „ $\mu_1 = (1 + 0{,}13\,n)\,\mu$ . . . 249)

На основаніи этого составлена слѣдующая таблица:

| для n = | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\mu_1$ = | 0,643 | 0,667 | 0,690 | для прямоугольныхъ отверстій |
| $\mu_1$ = | 0,640 | 0,660 | 0,680 | „ круглыхъ „ |

Примѣняя короткую коническую выпускную трубу съ хорошо закругленными краями, верхній діаметръ которой d постепенно суживается книзу и на разстояніи 0,5 d отъ дна сосуда принимаетъ величину 0,8 d (фиг. 200), можно достигнуть того, что никакого дальнѣйшаго сжатія струи вытекающей воды не произойдетъ. Въ этомъ случаѣ коэффиціентъ истеченія имѣетъ величину:

Фиг. 200.




$$\mu = 0{,}96 \quad \ldots\ldots \quad 250)$$

Если площадь поперечнаго сѣченія трубы, соотвѣтствующаго діаметру 0,8 d, обозначить черезъ f, то дѣйствительно вытекающее количество воды въ 1 секунду будетъ равно:

$$Q = 0{,}96 f \sqrt{2\,g\,h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 251)$$

**Задача** 111. Какое количество воды Q вытекаетъ въ минуту изъ отверстія въ днѣ сосуда, съ площадью поперечнаго сѣченія f = 8 сантим.² при неизмѣнной высотѣ напора h = 2,5 метр., если предположить полное сжатіе струи?

**Рѣшеніе.** Теоретическій расходъ воды по уравненію 242:

$$Q = 60 \ . \ 0{,}0008 \sqrt{2 \ . \ 9{,}81 \ . \ 2{,}5} = 0{,}336 \text{ метр.}^3$$

Слѣдовательно, при $\mu = 0{,}62$ (уравненіе 247), дѣйствительный расходъ воды будетъ:

$$\mu Q = 0{,}62 \ . \ 0{,}336 = 0{,}20832 \text{ метр.}^3 = \backsim 208 \text{ литровъ.}$$

**Задача 112.** Нижній край шлюзнаго затвора, шириною 1,4 метра, отстоитъ отъ дна шлюзнаго канала на разстояніи 1,16 метр. Найти количество протекающей въ 1 секунду воды, если высота уровня воды надъ дномъ шлюзнаго канала равна 1,2 метр.?

**Рѣшеніе.** Полный периметръ пропускного отверстія:

$$U = 2 \ . \ 0{,}16 + 2 \ . \ 1{,}4 = 3{,}12 \text{ метр.}$$

Съ обѣихъ сторонъ и у дна никакого сжатія струи не происходитъ: слѣдовательно:

$$nU = 2 \ . \ 0{,}16 + 1{,}4 = 1{,}72 \text{ метр.}$$

Отсюда:

$$n = \frac{nU}{U} = \frac{1{,}72}{3{,}12} = 0{,}55$$

При $\mu = 0{,}62$, по уравненію 248, получимъ:

$$\mu_1 = (1 + 0{,}15 \ . \ 0{,}55)\, 0{,}62 = 0{,}67$$

Подставивъ въ уравненіе 245, стр. 189, значенія: $b = 1{,}4$ метра; $H = 1{,}2$ метра; $H_1 = 1{,}2 - 0{,}16 = 1{,}04$ метра, получимъ теоретическій расходъ воды:

$$Q = {}^2/_3 \ . \ 1{,}4 \ . \sqrt{2 \ . \ 9{,}81}\, (1{,}2^{3/2} - 1{,}04^{3/2}) = 1{,}075 \text{ метр.}^3$$

Слѣдовательно, дѣйствительный расходъ воды будетъ:

$$\mu_1 Q = 0{,}67 \ . \ 1{,}075 = 0{,}720 \text{ метр.}^3 = 720 \text{ литровъ}$$

По приблизительному вычисленію (уравненіе 242) получили бы (ср. фиг. 197, стр. 188):

$$\mu_1 Q = 0{,}67 \ . \ 0{,}16 \ . \ 1{,}4 \sqrt{2 \ . \ 9{,}81\, (1{,}2 - {}^1/_2 \ . \ 0{,}16)}$$
$$\mu_1 Q = 0{,}67 \ . \ 0{,}224 \ . \ 4{,}69 = 0{,}704 \text{ метр.}^3 = 704 \text{ литра.}$$

---

## § 34.

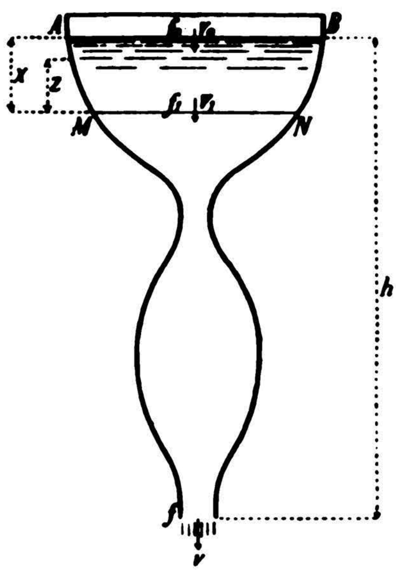
## Гидравлическое давленіе.

Въ то время какъ гидростатичскимъ давленіемъ называютъ давленіе, производимое водой въ состояніи покоя (§ 28, стр. 171), подъ гидравлическимъ давленіемъ разумѣютъ давленіе, производимое водой, находящейся въ движеніи и заключенной въ стѣнкахъ какого-нибудь сосуда.

Для одного и того же мѣста внутри сосуда, въ зависимости отъ обстоятельствъ, гидравлическое давленіе можетъ сильно разниться отъ гидростатическаго.

Пусть представленный на фиг. 201 сосудъ наполненъ водой и сначала снизу закрытъ, такъ что вода находится въ покоѣ. Въ такомъ случаѣ для поперечнаго сѣченія MN, находящагося на разстояніи x отъ поверхности воды въ сосудѣ, по § 30, стр. 177 гидростатическое давленіе p на единицу поверхности равно вѣсу столба воды, высотою x; слѣдовательно, обозначивъ черезъ $\gamma$ — вѣсъ кубической единицы воды, получимъ:

Фиг. 201.




$$p = \gamma x, \text{ или: } x = \frac{p}{\gamma}$$

При открытіи нижняго отверстія въ сосудѣ, вода придетъ въ движеніе и вмѣстѣ съ этимъ произойдетъ перемѣна въ давленіи. Пусть z — высота столба воды, вѣсъ котораго представитъ гидравлическое давленіе p, проявляющееся въ сѣченіи MN; тогда:

$$p = \gamma z, \text{ или: } z = \frac{p}{\gamma}$$

Прежде всего слѣдуетъ точнѣе опредѣлить высоту гидравлическаго давленія z.

Согласно фиг. 201, примемъ слѣдующія обозначенія для поперечныхъ сѣченій и соотвѣтствующихъ скоростей воды:

$f_0$ и $v_0$ для верхняго уровня воды AB
$f$ „ $v$ „ нижняго выпускного отверстія
$f_1$ „ $v_1$ „ сѣченія MN

h—обозначаетъ полную высоту паденія.

Если будемъ разсматривать всю массу воды между верхнимъ уровнемъ и нижнимъ выпускнымъ отверстіемъ, то по уравненію 21, стр. 27, замѣняя P черезъ mg и s—черезъ h, найдемъ:

$$mgh = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

Для массы воды между сѣченіемъ MN и нижнимъ выпускнымъ отверстіемъ дѣйствительная высота паденія = h — x + z; поэтому по уравненію 21:

$$mg\,(h - x + z) = \frac{m v^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2}$$

Вычитая оба послѣднія равенства одно изъ другого, получимъ:

$$mg\,(z-x) = -\frac{m\,v_1^2}{2} + \frac{m\,v_0^2}{2}$$

или:

$$z = x - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}\right) \quad \ldots\ldots \quad 252)$$

т. е. высота гидравлическаго давленія для опредѣленнаго сѣченія равна высотѣ гидростатическаго давленія, уменьшенной на разность между высотами, соотвѣтствующими скоростямъ въ выбранномъ мѣстѣ и у верхняго уровня воды въ сосудѣ.

Уравненіе 252 можно написать и иначе:

$$z = x - \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right)$$

А такъ какъ:

$$f_0 v_0 = f_1 v_1$$

или:

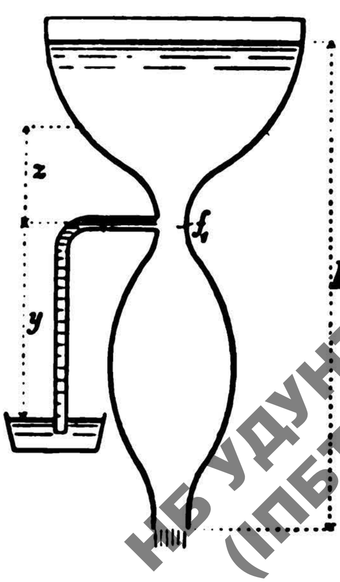
$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{f_1}{f_0}$$

то, подставляя въ уравненіе 252 вмѣсто $\frac{v_0}{v_1}$ только что найденное его значеніе, получимъ:

$$z = x - \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{f_1^2}{f_0^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad 253)$$

Поэтому, при $f_1 < f_0$ высота гидравлическаго давленія меньше высоты гидростатическаго давленія. Слѣдовательно, при истеченіи воды во всѣхъ сѣченіяхъ, которыя меньше сѣченія у верхняго уровня, давленіе на стѣнки сосуда меньше давленія воды въ состояніи покоя (т. е. въ закрытомъ снизу сосудѣ).

Фиг. 202.




Мѣстнымъ, достаточнымъ по величинѣ, суженіемъ сосуда можно даже достигнуть того, что черезъ отверстіе въ суженномъ мѣстѣ вода не польется, а, напротивъ, будетъ всасываться воздухъ. Если въ этомъ мѣстѣ къ сосуду присоединить трубку съ загнутымъ внизъ колѣномъ, нижній конецъ котораго будетъ погруженъ въ открытый резервуаръ съ водой (фиг. 202), то вода изъ него будетъ подниматься по трубкѣ и вливаться въ главный сосудъ до тѣхъ поръ, пока $y + z < 10{,}33$ метр. (ср. § 39).

Примѣръ гидравлическаго давленія былъ уже представленъ на фиг. 196, стр. 187. Дѣйствительно, если считать (какъ уже было указано) верхній уровень воды неизмѣннымъ, такъ что $v_0 =$ нулю, то уравненіе 252 для $x = h$ приметъ видъ:

$$z = h - \frac{v_1^2}{2g}$$

Высота гидравлическаго давленія $z$ въ этомъ случаѣ совпадаетъ съ высотой давленія, обозначенной на стр. 187 черезъ $h_p$.

---

§ 35.

## Движеніе воды по трубамъ.

Если вода протекаетъ по длинному водопроводу, то она теряетъ въ скорости вслѣдствіе тренія о стѣнки трубы. Поэтому часть $h_1$ полной высоты напора $h$ теряется для скорости и затрачивается на преодолѣніе тренія; разность $(h - h_1)$ идетъ на образованіе скорости $v$. Вслѣдствіе этого:

$$h - h_1 = \frac{v^2}{2g}$$

или:

$$h = \frac{v^2}{2g} + h_1 \qquad 254)$$

$h_1$—тѣмъ больше, чѣмъ длиннѣе труба и чѣмъ меньше ея діаметръ, и возрастаетъ, какъ показалъ опытъ, пропорціонально квадрату скорости. Если обозначить длину черезъ $l$, діаметръ — черезъ $d$, то для новыхъ чугунныхъ трубъ при среднихъ скоростяхъ можно принять*):

---

*) Вообще:

$h_1 = k \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ ($k =$ коэффиціенту тренія между водой и стѣнкой трубы) куда, по Вейсбаху, производившему свои опыты съ новыми гладкими трубами, слѣдуетъ подставить:

$$k = 0{,}01439 + \frac{0{,}00947}{\sqrt{v}}$$

Для $v = 1$ метр.:

$$k = 0{,}02386$$

или, округляя, какъ въ уравненіи 255:

$$k = 0{,}024$$

По опытамъ Ланга, для гладкихъ чугунныхъ трубъ:

$$k = 0{,}02 + \frac{0{,}004}{\sqrt{v}}$$

для $v = 1$ метр. получимъ тоже:

$$k = 0{,}024$$

$$h_1 = 0{,}024 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 255)$$

Подставляя это выраженіе въ уравненіе 254, получимъ:

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + 0{,}024 \frac{l}{d}\right)$$

или:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}024 \frac{l}{d}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 256)$$

Для старыхъ трубъ, принимая во вниманіе ржавчину и образованіе вслѣдствіе этого значительныхъ осадковъ для запаса прочности, (по Дюпюи) слѣдуетъ брать:

$$h_1 = 0{,}03 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 257)$$

откуда:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 0{,}03 \frac{l}{d}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 258)$$

Существуетъ еще другое, особое сопротивленіе въ трубопроводахъ, а именно при протеканіи воды въ колѣнахъ (колѣнчатыхъ трубахъ) и въ изогнутыхъ частяхъ, на преодолѣніе котораго теряется для скорости еще часть $h_2$ полной высоты напора $h$. Вода не сразу принимаетъ новое сильное направленіе и потому не заполняетъ въ колѣнѣ или сильномъ закругленіи всего сѣченія трубы (фиг. 203 и 204).

Фиг. 203.


Фиг. 204.


По опытамъ Вейсбаха принимаютъ:

а) для колѣнъ съ угломъ $\delta$ (фиг. 203),

$$h_2 = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 259)$$

гдѣ

$$\zeta = 0{,}9457 \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) + 2{,}047 \sin^4\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad 260)$$

| для $\delta$ = | 20⁰ | 30⁰ | 40⁰ | 50⁰ | 60⁰ | 70⁰ | 80⁰ | 90⁰ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta$ = | 0,046 | 0,073 | 0,139 | 0,234 | 0,364 | 0,533 | 0,740 | 0,984 |

b) для изогнутыхъ частей трубопровода съ центральнымъ угломъ $\delta$ и среднимъ радіусомъ закругленія R (фиг. 204):

$$h_2 = \zeta' \frac{\delta^0}{90} \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 261)$$

гдѣ:

$$\zeta' = 0{,}131 + 0{,}163 \left(\frac{d}{R}\right)^{3,5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 262)$$

| для $\frac{d}{R}$ = | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\zeta'$ = | 0,138 | 0,145 | 0,158 | 0,206 | 0,294 | 0,487 |

Для опредѣленія сопротивленій, встрѣчающихся при протокѣ воды черезъ клапаны, краны, золотники, паровыпускные клапаны, были произведены опыты Вейсбахомъ, Бахомъ и Лангомъ, результаты которыхъ собраны, напр., въ „Des Ingenieurs Taschenbuch Hütte", 1905 г., I ч., стр. 254 *).

Задача 113. Изъ большого резервуара проведена вода при помощи трубопровода, длиною 6 километр., къ точкѣ, лежащей на 16 метр. ниже уровня воды въ резервуарѣ. Найти величину скорости истеченія v, при діаметрѣ трубы 20 сантим., и количество протекающей воды въ минуту.

Рѣшеніе. По уравненію 256 для новыхъ трубъ:

$$v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 16}{1 + 0{,}024 \dfrac{6000}{0{,}2}}} = 0{,}66 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно:

$$Q = 60 \,.\, \frac{d^2\pi}{4} \,.\, v = 60 \,.\, \frac{0{,}2^2 \,.\, 3{,}14}{4} \,.\, 0{,}66 = 1{,}244 \text{ метр.}^3$$

По уравненію 258 для старыхъ (бывшихъ въ долгомъ употребленіи( трубъ:

$$v = \sqrt{\frac{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 16}{1 + 0{,}03 \dfrac{6000}{0{,}2}}} = 0{,}59 \text{ метр.}$$

и:

$$Q = 60 \,.\, \frac{0{,}2^2 \,.\, 3{,}14}{4} \,.\, 0{,}59 = 1{,}112 \text{ метр.}^3$$

Не принимая во вниманіе сопротивленія тренія, имѣли бы:

$$v = \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 16} = 17{,}72 \text{ метр.}^{**)} \qquad Q = 33{,}4 \text{ метр.}^3$$

---

*) Въ русскомъ пер. «Hütte». Справочная книга. 1902 г. Ч. I, стр. 256—257. Прим. пер.

**) См. Приложеніе. Таблица III b.

## § 36.

## Движеніе воды въ каналахъ.

Каналамъ въ большинствѣ случаевъ придаютъ паденіе, т. е. дно канала дѣлаютъ наклоннымъ къ горизонтальной плоскости; образуется, слѣдовательно, наклонная плоскость, по которой движеніе воды, если не принимать во вниманіе тренія, было бы ускореннымъ. Вслѣдствіе же тренія о дно и боковыя стѣнки канала, появляется сопротивленіе, замедляющее движеніе воды и возрастающее пропорціонально квадрату скорости, такъ что, при постоянномъ уклонѣ и неизмѣнномъ сѣченіи канала, движеніе, при опредѣленной скорости, становится равномѣрнымъ.

Если F — поперечное сѣченіе воды въ каналѣ, v — средняя скорость, то количество протекающей въ 1 секунду воды будетъ:

$$Q = Fv \quad \ldots \ldots \quad 263)$$

Но скорость не во всѣхъ точкахъ одного и того же сѣченія одинакова: наибольшей величины она достигаетъ въ срединѣ канала, немного ниже поверхности воды, и отсюда уменьшается къ стѣнкамъ и дну. На практикѣ самымъ точнымъ образомъ скорость теченія измѣряется вертушкой Вольтмана; проще, но менѣе точно, — поплавками. Для теоретическаго опредѣленія средней скорости v существуютъ различныя формулы, изъ которыхъ самой употребительной считается формула Базена. Она имѣетъ слѣдующій видъ:

$$v = c\sqrt{RJ} \quad \ldots \ldots \quad 264)$$

Въ ней приняты слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{array}{l}\text{l — длина канала}\\ \text{h — высота паденія канала}\end{array}\right\} J = \frac{h}{l} \begin{array}{l}\text{уклонъ канала}\\ \text{(паденіе уровня)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{F — поперечное сѣченіе воды въ каналѣ}\\ \text{U — омываемый водой периметръ попереч-}\\ \text{\quad\quad наго профиля канала}\end{array}\right\} R = \frac{F}{U} \begin{array}{c}\text{(такъ называемый}\\ \text{гидравлическій}\\ \text{радіусъ)}\end{array}$$

c — коэффиціентъ, полученный изъ опытовъ, который по Базену равенъ:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\alpha + \frac{\beta}{R}}} \quad \ldots \ldots \quad 265)$$

Для $\alpha$ и $\beta$ надо подставлять различныя значенія, зависящія отъ матеріала, изъ котораго сооруженъ каналъ:

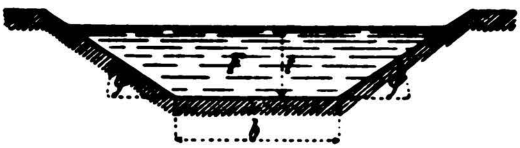
$\alpha = 0{,}00015$; $\beta = 0{,}0000045$ для строганнаго дерева и цемента,

$\alpha = 0{,}00019$; $\beta = 0{,}0000133$ „ плитняка (тесоваго камня), кирпича и нестроганнаго дерева,

$\alpha = 0{,}00024$ ; $\beta = 0{,}00006$ для бутовой кладки,
$\alpha = 0{,}00028$ ; $\beta = 0{,}00035$ „ земли,
$\alpha = 0{,}0004$ ; $\beta = 0{,}0007$ „ гальки.

Поперечное сѣченіе канала должно быть устроено такъ, чтобы потеря напора была возможно меньшая. А такъ какъ потеря зависитъ отъ сопротивленій тренія, которыя, въ свою очередь, пропорціональны омываемому периметру, то однимъ изъ условій раціональнаго устройства канала будетъ то, чтобы омываемый периметръ U былъ возможно меньше.

Фиг. 205.



Это условіе будетъ выполнено, если будемъ имѣть (фиг. 205):

$$t = \sqrt{\frac{F \sin \phi}{2 - \cos \phi}} \; ; \qquad b = 2t \, . \, tg\phi$$

Тогда отыскиваемый периметръ будетъ:

$$U = b + \frac{2t}{\sin \phi}$$

На основаніи этого для различныхъ угловъ откоса $\varphi$ вычислена слѣдующая таблица:

| Уголъ откоса $\varphi$ = | Глубина воды $t$ = | Ширина для канала $b$ = | Омываемый периметръ $U$ = | |
|---|---|---|---|---|
| $90^0$ | $0{,}707 \sqrt{F}$ | $1{,}414 \sqrt{F}$ | $2{,}828 \sqrt{F}$ | для дерева |
| $60^0$ | $0{,}76 \sqrt{F}$ | $0{,}877 \sqrt{F}$ | $2{,}632 \sqrt{F}$ | „ каменной одежды |
| $45^0$ | $0{,}74 \sqrt{F}$ | $0{,}613 \sqrt{F}$ | $2{,}704 \sqrt{F}$ | „ земли съ обдѣлкой и укрѣпленіемъ откосовъ |
| $30^0$ | $0{,}664 \sqrt{F}$ | $0{,}536 \sqrt{F}$ | $3{,}012 \sqrt{F}$ | „ земли безъ обдѣлки и укрѣпленія откосовъ |

Задача 114. Каналъ вырытъ въ землѣ съ паденіемъ $J = \frac{h}{l} = \frac{1}{1500}$.
Ширина дна канала = 3 метр., уголъ откоса $\varphi = 30^0$ и глубина воды въ каналѣ $t = 1$ метр. Найти скорость $v$ и количество протекающей въ 1 секунду воды.

**Рѣшеніе.** По фиг. 206:

$$AD = BC = \frac{1}{\sin 30^0} = 2 \text{ метр.}$$

$$AD_1 = BC_1 = \sqrt{2^2 - 1} = 1{,}732 \text{ метр.}$$

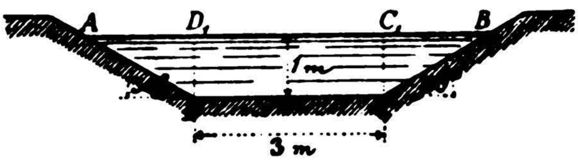
**Отсюда:**

$$F = (3 + 1{,}732) \cdot 1 = 4{,}732 \text{ метр.}^2$$

$$U = AD + DC + CB = 2 + 3 + 2 = 7 \text{ метр.}$$

$$\text{Слѣдовательно: } R = \frac{F}{U} = \frac{4{,}732}{7} = 0{,}676$$

Фиг. 206.




Подставляя въ уравненіе 265 это значеніе, и кромѣ того, $\alpha = 0{,}00028$ и $\beta = 0{,}00035$ (для земли), получимъ:

$$c = \sqrt{\frac{1}{0{,}00028 + \frac{0{,}00035}{0{,}676}}} = 35{,}4$$

а по уравненію 264:

$$v = 35{,}4\sqrt{\frac{0{,}676}{1500}} = 0{,}752 \text{ метр.}$$

Количество воды, протекающей въ 1 секунду, по уравненію 263 будетъ:

$$Q = 4{,}732 \cdot 0{,}752 = \backsim 3{,}5 \text{ метр.}^3$$

**Задача 115.** Требуется устроить каналъ, длиною 2000 метр. изъ бутовой кладки, который былъ бы въ состояніи давать въ секунду воды $Q = 4{,}8$ метр.$^3$ при скорости $v = 1{,}2$ метр. Найти поперечное сѣченіе канала и необходимое паденіе.

**Рѣшеніе.** Поперечное сѣченіе воды въ каналѣ, по уравненію 263, стр. 197, равно:

$$F = \frac{Q}{v} = \frac{4{,}8}{1{,}2} = 4 \text{ метр.}^2$$

По таблицѣ, на стр. 198, для $\varphi = 60^0$:

$$\text{глубина воды: } t = 0{,}76\sqrt{4} = 1{,}52 \text{ метр.}$$

$$\text{ширина дна канала: } b = 0{,}877\sqrt{4} = 1{,}754 \text{ метр.}$$

$$\text{омываемый периметръ: } U = 2{,}632\sqrt{4} = 5{,}264 \text{ метр.}$$

$$\text{Слѣдовательно: } R = \frac{4}{5{,}264} = 0{,}76$$

Подставляя это значеніе и кромѣ того $\alpha = 0{,}00024$; $\beta = 0{,}00006$ (для бутовой кладки) въ уравненіе 265, получимъ:

$$c = \sqrt{\frac{1}{0{,}00024 + \frac{0{,}00006}{0{,}76}}} = 55{,}9$$

Тогда по уравненію 264, стр. 197:

$$J = \frac{h}{l} = \frac{v^2}{c^2 R} = \frac{1{,}44}{3125 \,.\, 0{,}76} = \frac{1}{1650}$$

Отсюда полная высота паденія канала:

$$h = \frac{2000}{1650} = \backsim 1{,}2 \text{ метр.}$$

---

## § 37.

## Ударъ воды.

Подъ ударомъ водяной струи разумѣютъ гидравлическое давленіе ея на перпендикулярную или наклонную подъ угломъ къ ея движенію плоскость, при чемъ вода теряетъ часть своей скорости. Подверженная удару плоскость при этомъ можетъ находиться въ покоѣ или сама совершать какое-нибудь движеніе.

Ударъ, вслѣдствіе несжимаемости воды, будетъ абсолютно неупругій.

Если обозначить черезъ $m_1$—массу ударяющей частицы воды, $M_2$—массу перпендикулярной къ движенію воды, подверженной удару плоскости, то, при одинаковыхъ скоростяхъ $v_1$ и $v_2$, потеря въ работѣ, которую претерпѣваетъ частица воды вслѣдствіе удара, по уравненію 205, стр. 164, будетъ:

$$a_2 = \frac{1}{2} \; \frac{m_1 M_2}{m_1 + M_2} \; (v_1 - v_2)^2$$

Въ виду незначительности $m_1$ по сравненію съ ударяемой массой $M_2$, можно знаменатель $(m_1 + M_2)$ принять равнымъ $M_2$. Тогда:

$$a_2 = {}^1/_2 \, m_1 (v_1 - v_2)^2$$

Потеря работы для всей ударяющей массы равна суммѣ потерь работы отдѣльныхъ частицъ воды и равна, если подставить $\Sigma m_1 = M_1$,

$$A_2 = {}^1/_2 \, M_1 \, (v_1 - v_2)^2$$

Чтобы получить работу L, передаваемую ударяемой плоскости, надо изъ разности живыхъ силъ воды до и послѣ удара вычесть величину полной потери работы. Поэтому полезное дѣйствіе удара будетъ:

$$L = \frac{M_1 v_1^2}{2} - \frac{M_1 v_2^2}{2} - \frac{1}{2} M_1 \, (v_1 - v_2)^2 = M_1 v_2 \, (v_1 - v_2)$$

или, если обозначить расходъ ударяющей воды въ секунду черезъ Q, а вѣсъ кубическаго метра воды—черезъ $\gamma$ (= 1000 килогр.), то:

$$L = \gamma \frac{Q}{g} v_2 (v_1 - v_2) \quad \ldots\ldots \quad 266)$$

Давленіе P, производимое водой на плоскость, найдется по уравненію 21, стр. 27, изъ зависимости между механической работой и живой силой:

$$Pv_2 = L = \gamma \frac{Q}{g} v_2 (v_1 - v_2)$$

откуда:

$$P = \gamma \frac{Q}{g} (v_1 - v_2) \quad \ldots\ldots \quad 267)$$

Для случая, когда ударяемая плоскость находится въ покоѣ ($v_2$ = нулю), получимъ:

$$P = v \frac{Q}{g} v_1 \quad \ldots\ldots \quad 268)$$

Если F — площадь ударяемой плоскости, то послѣ подстановки:

$$Q = Fv_1$$

уравненіе 268 приметъ видъ:

$$P = 2\gamma F \frac{v_1^2}{2g} = 2\gamma F h \quad \ldots\ldots \quad 269)$$

Полезное дѣйствіе удара, по уравненію 266, будетъ maximum при:

$$v_2 = v_1 - v_2$$

или:

$$v_2 = \frac{v_1}{2} \quad \ldots\ldots \quad 270)$$

и тогда:

$$L_{max} = \gamma \frac{Q}{2} \frac{v_1^2}{2g} = \gamma \frac{Qh}{2} \quad \ldots\ldots \quad 271)$$

Если ударъ производится не замкнутой струей воды, а открытой, неограниченной массой воды, то давленіе P на плоскость F будетъ меньше приведеннаго въ уравненіи 269. Оно тогда будетъ:

$$P = k\gamma F \frac{v_1^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad 272)$$

гдѣ k—коэффиціентъ получаемый изъ опыта.

Для тонкой, неподвижной пластинки, перпендикулярной къ направленію теченія: $k = 1,86$.

Если же, наоборотъ, пластинка движется въ покоящейся водѣ со скоростью $v_1$, то: $k = 1,25$.

Для призмы или цилиндра значительной длины, движущихся въ направленіи оси . . . . . . . . . . . . . . . . $k = {}^4/_3$

для цилиндра, движущагося въ поперечномъ направленіи . $k = {}^2/_3$

для шара . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $k = 0,55$

ГЛАВА VI.

# Ученіе о равновѣсіи газообразныхъ тѣлъ. (Аэростатика.)

§ 38.

## Общіе законы.

Законы, приведенные относительно равновѣсія капельно-жидкихъ тѣлъ, а именно:

1. Давленіе, произведенное на жидкость, распространяется равномѣрно по всѣмъ направленіямъ (§ 28, стр. 171);
2. Давленіе жидкости, производимое ея собственнымъ вѣсомъ на какую-нибудь площадь, равно вѣсу столба жидкости, покоящагося на этой площади (§ 30, стр. 177);
3. Тѣло, погруженное въ жидкость, теряетъ въ своемъ вѣсѣ столько, сколько вѣситъ объемъ вытѣсненной имъ жидкости (§ 31, стр. 180);
4. Высоты двухъ столбовъ жидкостей надъ плоскостью ихъ соприкосновенія въ колѣнахъ сообщающихся сосудовъ (трубъ) обратно пропорціональны удѣльнымъ вѣсамъ жидкостей (§ 32, стр. 184);

относятся и къ газообразнымъ или такъ называемымъ упругимъ жидкостямъ. Благодаря же способности газообразныхъ тѣлъ относительно легко сжиматься, они кромѣ того производятъ цѣлый рядъ явленій, отличающихся отъ происходящихъ съ капельно-жидкими тѣлами.

Вслѣдствіе стремленія газообразныхъ тѣлъ все болѣе и болѣе расширяться, масса газообразнаго тѣла производитъ на стѣнки сосуда, въ которомъ она заключена, давленіе, называемое упругостью или силою расширенія. Въ сравненіи съ этою силою, давленіе, которое газъ производитъ на стѣнки сосуда вслѣдствіе своего вѣса, такъ ничтожно, что его можно совсѣмъ не принимать во вниманіе.

---

§ 39.

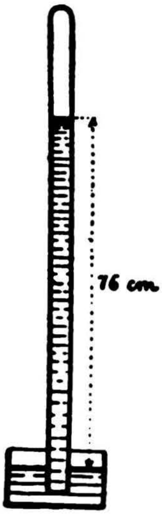
## Давленіе атмосфернаго воздуха. Барометръ. Манометръ.



Величину упругости газа выражаютъ или вѣсомъ, производящимъ на единицу площади такое давленіе, какъ и газъ, или высотою столба жидкости (ртути или воды), которая въ закрытомъ сверху колѣнѣ сообщающихся трубокъ уравновѣшиваетъ давленіе газа на поверхность жидкости въ другомъ колѣнѣ.

Если наполнить ртутью (фиг. 207) запаянную съ одного конца стеклянную трубку произвольной длины, но болѣе 76 сентим., и открытый конецъ ея закрыть, напр. пальцемъ, а затѣмъ перевернуть трубку, погрузить концомъ, закрытымъ пальцемъ, въ сосудъ со ртутью и потомъ уже отнять палецъ, то столбикъ ртути въ стеклянной трубкѣ остановится на высотѣ около 76 сентим. надъ поверхностью ртути въ сосудѣ, а надъ столбикомъ ртути въ трубкѣ останется безвоздушное пространство (опытъ Торичелли).

Фиг. 207.




Такой приборъ, снабженный дѣленіями, по которымъ можно отсчитать высоту ртутнаго столба, называется барометромъ, а высота столба ртути – барометрической высотой (показаніемъ барометра).

Ртутный столбъ, высотою около 76 сентим., уравновѣшивается давленіемъ атмосфернаго воздуха на свободную поверхность ртути въ сосудѣ. А такъ какъ удѣльный вѣсъ ртути $= 13{,}59$, то давленіе атмосферы (воздуха) на квадратный сентиметръ имѣетъ величину.

$$p_0 = 76 \cdot 13{,}59 = 1033 \text{ гр.}$$

или:

$$p_0 = 1{,}033 \text{ килогр.}$$

Эта величина мѣняется въ зависимости отъ высоты мѣста, кромѣ того, она еще зависитъ отъ географической широты, температуры и влажности воздуха, но въ механикѣ она считается постоянной и, подъ названіемъ атмосферы, принимается за единицу при опредѣленіи давленія.

Такъ какъ столбъ ртути, высотою 0,76 метр., уравновѣшивается столбомъ воды высотою $0{,}76 \cdot 13{,}59 = 10{,}33$ метр., то атмосферное давленіе можно выразить:

**давленіемъ столба ртути, высотою 0,76 метр.**

или:

**давленіемъ столба воды, высотою 10,33 метр.**

Вмѣсто такъ называемой физической атмосферы при вычисленіяхъ, встрѣчающихся въ технической механикѣ, за единицу принимаютъ техническую или метрическую атмосферу, при чемъ подъ этимъ разумѣютъ:

**давленіе 1 килогр. на 1 сентим.$^2$**

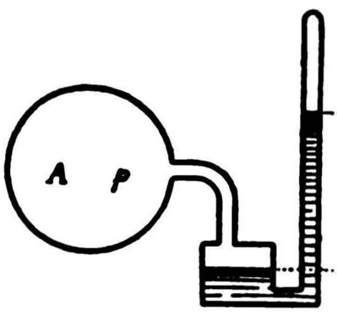
Поэтому получается слѣдующее сопоставленіе:

$$\left.\begin{aligned}\textbf{1 физическая (старая) атмосфера } p_0 &= 1{,}033 \text{ клгр./сентим.}^2\\ &= 76 \text{ сентим. ртутнаго столба (при } 0^0)\\ &= 10{,}33 \text{ метр. водяного столба (при } 4^0)\end{aligned}\right\} \quad . . \; 273)$$

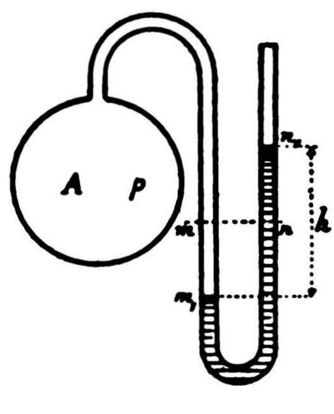
$$\left.\begin{aligned}\textbf{1 техническая (новая) атмосфера } p_0 &= 1 \text{ клгр./сентим.}^2\\ &= 73{,}55 \text{ сентим. ртутнаго столба (при } 0^0)\\ &= 10 \text{ метр. водяного столба (при } 4^0)\end{aligned}\right\} \quad . . \; 274)$$

**Манометръ**, служащій для измѣренія давленія газовъ и паровъ, отличается отъ барометра главнымъ образомъ тѣмъ, что на поверх-

Фиг. 208.




Фиг. 209.




ность ртути въ сосудѣ дѣйствуетъ не давленіе свободной атмосферы, а упругость p газа или пара, заключеннаго въ резервуарѣ A (фиг. 208).

**Сифонный манометръ** (фиг. 209) состоитъ изъ изогнутой трубки, частью заполненной ртутью; одно колѣно этой трубки вверху открыто, а другое—соединено съ газовымъ резервуаромъ A.

Если давленіе въ резервуарѣ A равно давленію наружнаго воздуха, то поверхность ртути въ обоихъ колѣнахъ трубки будетъ лежать въ одной горизонтальной плоскости mn. Если же упругость газа въ резервуарѣ увеличится, то ртуть въ одномъ колѣнѣ трубки опустится на величину $mm_1$ и одновременно съ этимъ поднимется въ другомъ—на величину $nn_1$.

**Превышеніе давленія** газа надъ давленіемъ наружнаго атмосфернаго воздуха измѣряется поэтому высотою ртутнаго столба h:

$$h = mm_1 + nn_1$$

Однако, при болѣе значительныхъ давленіяхъ, ртутные манометры должны быть очень высокими; въ такихъ случаяхъ употребляютъ металлическіе манометры.

Задача 116. Какъ велико давленіе (въ физическихъ атмосферахъ) на поршень насоса, подъ которымъ имѣется столбъ воды, высотою 50 метр.?

Рѣшеніе.

$$p = \frac{50}{10,33} = 4,84 \text{ атм. } (= 5 \text{ килогр./сентим.}^2)$$

Задача 117. Поршень аккумулятора, діаметромъ 25 сентим., нагруженъ 200 000 килогр. Сколькимъ (техническимъ) атмосферамъ равняется давленіе, производимое этимъ грузомъ?

Рѣшеніе. Площадь поршня равна:

$$F = \frac{d^2 \pi}{4} = \frac{25^2 . 3,14}{4} = 491 \text{ сентим.}^2$$

Слѣдовательно:

$$p = \frac{200\,000}{491} = \backsim 407 \text{ атм. } (= 407 \text{ килогр./сентим.}^2)$$

Задача 118. Какова должна быть высота столба виннаго спирта (уд. вѣсъ = 0,8), чтобы уравновѣсить столбъ ртути, высотою 0,76 метр. (уд. вѣсъ = 13,59)?

Рѣшеніе.

$$h = 0,76 \cdot \frac{13,59}{0,8} = 12,91 \text{ метр.}$$

Задача 119. Къ газовому резервуару A прикрѣпленъ ртутный сифонный манометръ (фиг. 209), на которомъ измѣрено h = 45,6 сентим. Какъ велико давленіе газа p въ резервуарѣ. (Превышеніе давленія въ техническихъ атмосферахъ)?

Рѣшеніе.

$$p = \frac{45,6}{73,55} = 0,62 \text{ атм. превышенія давленія } (= 0,62 \text{ килогр./сентим.}^2)$$

---

## § 40.

## Законъ Маріотта и Гей-Люссака.

При одинаковой температурѣ объемы газа обратно пропорціональны давленіямъ, производимымъ имъ на стѣнки сосуда (законъ Маріотта).

Пусть V—объемъ и p—давленіе опредѣленной массы газа. Если предположимъ данную массу газа сжатой до объема $V_1$ и давленіе, соотвѣтствующее этому меньшему объему, обозначимъ черезъ $p_1$, то, по вышеприведенному закону:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 275)$$

При постоянномъ давленіи увеличеніе объема газа пропорціонально повышенію температуры (законъ Гей-Люссака).

Пусть $V_0$—объемъ массы газа, соотвѣтствующій температурѣ, равной нулю, и p—давленіе газа. Если затѣмъ, при неизмѣнномъ давленіи, повысить температуру до $t^0$, то объемъ $V_0$ увеличится до V, и тогда:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \alpha t$$

или:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 276)$$

гдѣ для коэффиціента расширенія $\alpha$ нужно подставить его значеніе:

$$\alpha = 0{,}00367 = \frac{1}{273}\ ^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 277)$$

Если ту же массу газа, при томъ же давленіи p, доведемъ въ другой разъ до температуры $t^0{}_1$, то объемъ ея будетъ:

$$V_1 = V_0(1 + \alpha t_1)$$

Дѣля найденныя выраженія для V и $V_1$ одно на другое, получимъ:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 278)$$

Соединяя законы Маріотта и Гей-Люссака, найдемъ зависимость между объемомъ, давленіемъ и температурой двухъ одинаковыхъ массъ газа при различныхъ давленіяхъ и температурахъ. Если сравнить обѣ эти массы газа съ третьей, имѣющей съ первой равное давленіе, а со второй — одну и ту же температуру, то получимъ слѣдующее сопоставленіе:

| | Объемъ. | Температура. | Давленіе. |
|---|---|---|---|
| Массы газа 1. | $V$ | $t$ | $p$ |
| „ „ 2. | $V_1$ | $t_1$ | $p_1$ |
| „ „ 3. | $V_2$ | $t_1$ | $p$ |

Для массъ газа 1 и 3, по закону Гей-Люссака (уравненіе 278), получимъ:

$$\frac{V}{V_2} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

Для массъ газа 2 и 3, по закону Маріотта (уравненіе 275), получимъ:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p}$$

---

*) Коэффиціентъ расширенія для различныхъ газовъ (строго говоря) не постояненъ; вышеприведенное значеніе $\alpha = \frac{1}{273}$ относится къ воздуху, но можетъ быть принято также, какъ среднее значеніе, вообще для газа.

Перемножая оба выраженія между собой, найдемъ:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \, \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

или, если числитель и знаменатель раздѣлить на $\alpha$ и подставить вмѣсто $\alpha$ найденное его значеніе изъ уравненія 277 $\alpha = \frac{1}{273}$, то:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \, \frac{273 + t}{273 + t_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 279)$$

А такъ какъ массы газа предполагались равными, то и вѣса ихъ тоже равны, слѣдовательно:

$$V\gamma = V_1 \gamma_1, \text{ или } \frac{V}{V_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma}$$

гдѣ $\gamma$ и $\gamma_1$—вѣса кубической единицы. Поэтому уравненію 279 можно придать видъ:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{p_1}{p} \, \frac{273 + t}{273 + t_1}$$

или:

$$\frac{p}{\gamma(273 + t)} = \frac{p_1}{\gamma_1(273 + t_1)} \quad \ldots\ldots \quad 280)$$

Уравненіемъ 280 можно пользоваться для сравненія различныхъ по величинѣ массъ газа, такъ какъ сюда не входятъ зависящіе отъ массъ объемы.

Выраженія: $273 + t$ и $273 + t_1$ обозначаются черезъ $T$ и $T_1$ и называются абсолютными температурами. Поэтому уравненія 278—280 можно написать въ такомъ видѣ:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 278\,a)$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{p_1}{p} \, \frac{T}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 279\,a)$$

$$\frac{p}{\gamma T} = \frac{p_1}{\gamma_1 T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 280\,a)$$

Если объемъ, занимаемый 1 килогр. какого-нибудь газа, при давленіи $p_0$ и температурѣ $0^0$, обозначить черезъ $V_0$, то изъ уравненія 279, получимъ:

$$pV = p_0 V_0 \cdot \frac{273 + t}{273}$$

Выраженіе: $\frac{p_0 V_0}{273}$ — для всякаго газа величина постоянная и обозначается черезъ R (такъ называемый постоянный газъ); слѣдовательно:

$$pV = R(273 + t)$$

или, введя въ это уравненіе абсолютную температуру T, получимъ общее уравненіе состоянія газа.

$$pV = RT \quad \ldots\ldots\ldots \quad 281)$$

Пользуясь уравненiемъ 281, при извѣстныхъ p, V и T, можно найти и R.

Напр., давленiе атмосфернаго воздуха на уровнѣ моря, при средней высотѣ барометра и при температурѣ $t_0$ = нулю (слѣдовательно $T_0 = 273$), на площадь въ 1 квадратный метръ будетъ имѣть величину (ср. уравненiе 273, стр. 204):

$$p_0 = 10\,333 \text{ килогр.}$$

вѣсъ же кубическаго метра атмосфернаго воздуха:

$$\gamma_0 = \frac{1}{V_0} = 1{,}293 \text{ килогр.} \quad \ldots \ldots \quad 282)$$

Подставляя эти значенiя въ уравненiе 281, получимъ для атмосфернаго воздуха:

$$R = \frac{p_0\, V_0}{T_0} = \frac{10\,333}{1{,}293 . 273} = 29{,}27 \quad \ldots \ldots \quad 283)$$

Задача 120. Поршень паровой машины только на 1/5 хода (20% наполненiя) получаетъ свѣжiй паръ съ давленiемъ p и затѣмъ, благодаря упругости этого пара, движется дальше. Найти величину упругости пара $p_1$ въ концѣ хода поршня, если предположить, что температура пара остается неизмѣнной?

Рѣшенiе. Если ходъ поршня обозначить черезъ h, дiаметръ цилиндра—черезъ D, то давленiямъ p и $p_1$ будутъ соотвѣтствовать объемы

$$V = \frac{D^2 \pi}{4}\ \frac{h}{5} \text{ и } V_1 = \frac{D^2 \pi}{4}\ h$$

Слѣдовательно:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{1}{5}$$

По уравненiю 275 имѣемъ:

$$p_1 = p\ \frac{V}{V_1} = \frac{1}{5}\ p$$

Напр., при начальномъ давленiи пара p = 6 атм. рабочаго = 7 атм. абсолютнаго давленiя, конечное давленiе будетъ:

$$p_1 = \frac{7}{5} = 1{,}4 \text{ атм. или } = 0{,}4 \text{ атм. рабочихъ.}$$

Задача 121. У доменной печи холодный воздухопроводъ (труба, проводящая воздухъ изъ воздуходувки въ приборъ, нагрѣвающiй воздухъ) имѣетъ дiаметръ $D_1$; горячiй воздухопроводъ (труба, проводящая воздухъ изъ нагрѣвающаго его прибора въ доменную печь) имѣетъ дiаметръ D. Въ какомъ отношенiи должны находиться дiаметры D и $D_1$ другъ къ другу, если температура холоднаго воздуха = 15°, а горячаго = 700° и если скорости воздуха въ обоихъ трубопроводахъ одинаковы?

Рѣшенiе. При скорости v, объемъ воздуха, протекающаго въ 1 секунду, равенъ:

$$\text{по холодному воздухопроводу: } V_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4} v$$

$$\text{по горячему воздухопроводу: } V = \frac{D^2 \pi}{4} v$$

Слѣдовательно:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{D^2}{D_1^{\,2}}$$

или по уравненію 278 или 278 a:

$$\frac{D}{D_1} = \sqrt{\frac{273 + 700}{273 + 15}} = 1{,}84$$

Слѣдовательно, діаметръ горячаго воздухопровода долженъ быть въ 1,84 разъ больше діаметра холоднаго воздухопровода.

Задача 122. Сколько вѣситъ кубическій метръ атмосфернаго воздуха при температурѣ 80° и при нормальномъ давленіи воздуха?

Рѣшеніе. Подставляя въ уравненіе 283: $T = 273 + 80$ и $p = 10\,333$, получимъ:

$$V = \frac{1}{\gamma} = \frac{R \cdot T}{p} = \frac{29{,}27 \cdot 353}{10\,333} = 1$$

Слѣдовательно: $\gamma = 1$ килогр.

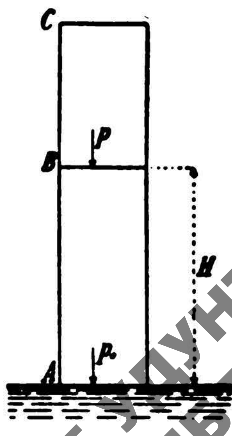
---

§ 41.

## Измѣреніе высотъ съ помощью барометра.

Давленіе воздуха въ атмосферѣ уменьшается съ высотою, такъ какъ на нижніе слои давятъ болѣе высокіе столбы воздуха, чѣмъ на верхніе. Если будемъ разсматривать воздушный цилиндръ съ поперечнымъ сѣченіемъ 1 и длиною отъ уровня моря до границъ (конца) атмосферы (фиг. 210), то давленіе $p_0$ на уровнѣ моря равно вѣсу всего столба AC, а давленіе p, на высотѣ H, равно вѣсу столба BC.

Фиг. 210.




А такъ какъ давленіе на ртуть барометра производится вѣсомъ стоящаго надъ поверхностью ртути воздушнаго столба, то показанія (высоты поднятія ртути) барометра относятся между собою, какъ давленія воздуха. Поэтому высота поднятія ртути въ барометрѣ зависитъ отъ высоты мѣста надъ уровнемъ моря, и оно тѣмъ меньше, чѣмъ выше лежитъ мѣсто. Благодаря этому получается возможность при помощи барометра опредѣлять разность высотъ двухъ мѣстъ.

На уровнѣ моря и при температурѣ 0° 1 куб. метръ ртути вѣситъ 13 590 килогр., 1 куб. метръ воздуха—1,293 килогр.; слѣдовательно, воздухъ въ $\frac{13\,590}{1,293} = \backsim 10\,500$ разъ легче ртути. Поэтому столбъ ртути высотою въ 1 мм. уравновѣшивается столбомъ воздуха высотою 10,500 мм. = 10,5 метра. Слѣдовательно, барометръ, показывающій на уровнѣ моря 760 мм., на высотѣ 10,5 метр. покажетъ уже 759 мм.

Но такъ какъ плотность воздуха уменьшается съ высотою, то паденіе барометра, при восхожденіи на равные промежутки, по высотѣ не одинаково. Кромѣ того, температура тоже оказываетъ свое вліяніе. При точныхъ опредѣленіяхъ высотъ, надо вводить еще особыя поправки на влажность воздуха, на уменьшеніе силы тяжести съ высотою, на различіе въ величинѣ силы тяжести на различныхъ градусахъ широты. Для среднихъ величинъ (въ Германіи) можно пользоваться приблизительной формулой:

$$H = 18\,400\,(\log B - \log b) \quad \ldots\ldots \quad 284)$$

гдѣ H — превышеніе въ метрахъ одной станціи надъ другой, B и b — высоты поднятія ртути въ барометрѣ внизу и вверху.

Задача 123. На двухъ станціяхъ одновременно наблюдены барометрическія высоты: B = 740 мм. и b = 640 мм. Найти величину превышенія одной станціи надъ другой.

Рѣшеніе.

$$\log B = 2,86923$$
$$\log b = 2,80618$$
$$\log B - \log b = 0,06305$$

Слѣдовательно, по уравненію 284:

$$H = 18\,400 \,.\, 0,06305 = 1160 \text{ метр.}$$

---

## § 42.

## Подъемная сила воздуха. Подъемная сила и высота поднятія аэростата (воздушнаго шара).

Каждое тѣло, находящееся въ воздухѣ, вытѣсняетъ массу воздуха, по объему равную объему тѣла, и вслѣдствіе этого оно испытываетъ вверхъ давленіе снизу, величина котораго равна вѣсу вытѣсненнаго воздуха. Слѣдовательно, давленіе производимое тѣломъ на свою подставку (чашку вѣсовъ), не будетъ дѣйствительнымъ вѣсомъ его, а только избыткомъ дѣйствительнаго вѣса надъ давленіемъ снизу вверхъ атмосфернаго воздуха.

Если G — дѣйствительный вѣсъ тѣла, P — кажущійся, кромѣ того V — объемъ тѣла и $V_1$ — объемъ гири, то при равноплечихъ вѣсахъ (фиг. 211), если $\gamma$ — вѣсъ 1 куб. метра воздуха, найдемъ:

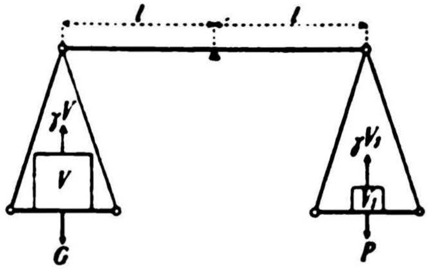
$$G - \gamma V = P - \gamma V_1$$

или:

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} + \gamma (\mathbf{V} - \mathbf{V}_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 285)$$

Дѣйствительный вѣсъ тѣла только тогда равенъ кажущемуся, когда тѣло и гиря имѣютъ одинаковый объемъ.

Фиг. 211.



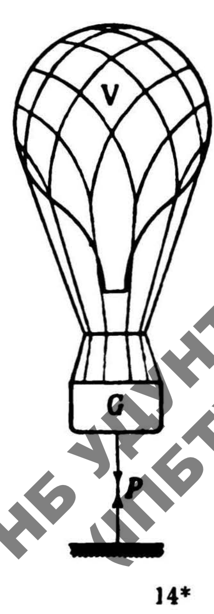

Тѣло, вѣсъ котораго меньше давленія снизу вверхъ атмосфернаго воздуха, поднимается вверхъ подъ дѣйствіемъ силы P, равной избытку давленія снизу вверхъ A надъ вѣсомъ G тѣла; слѣдовательно:

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} - \mathbf{G} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 286)$$

На основаніи этого можно, напр., вычислить подъемную силу аэростата (воздушнаго шара) (фиг. 212). Если V — объемъ шара, $\gamma$ — вѣсъ 1 куб. метра воздуха у поверхности земли, $\gamma'$ — вѣсъ 1 куб. метра газа, которымъ наполненъ шаръ, G — вѣсъ оболочки шара вмѣстѣ съ принадлежностями и грузомъ, то изъ уравненія 286 подъемная сила шара у поверхности земли:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} (\gamma - \gamma') - \mathbf{G} \quad \ldots\ldots \quad 287)$$

Фиг. 212.




Шаръ будетъ до тѣхъ поръ подниматься вверхъ, пока не достигнетъ слоя воздуха съ такимъ малымъ вѣсомъ ($\gamma_1$ — для одного куб. метра), что вытѣсняемая шаромъ масса воздуха не будетъ болѣе превосходить полнаго вѣса шара; слѣдовательно P = нулю. Тогда изъ уравненія 287 слѣдуетъ:

$$0 = V (\gamma_1 - \gamma') - G$$

или:

$$\gamma_1 = \gamma' + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{V}} \quad \ldots\ldots \quad 288)$$

А такъ какъ вѣса $\gamma$ и $\gamma_1$ одного куб. метра относятся между собой, какъ давленія воздуха, а послѣднія, по § 41, въ свою очередь, какъ барометрическія высоты, то изъ уравненія 284, стр. 210, получимъ высоту поднятія шара:

$$H = 18\,400 (\log \gamma - \log \gamma_1) \quad \ldots \ldots \quad 289)$$

Задача 124. Кусокъ пробки, объемъ котораго $V = 0{,}42$ куб. метр., уравновѣшивается на равноплечихъ вѣсахъ чугунной гирей $P = 100$ килогр. Найти величину дѣйствительнаго вѣса пробки.

Рѣшеніе. Если принять удѣльный вѣсъ чугуна $= 7{,}25$, то (такъ какъ 1 куб. метр. чугуна вѣситъ 7250 килогр.) объемъ гири равенъ:

$$V_1 = \frac{100}{7250} = \backsim 0{,}014 \text{ метр.}^3$$

Слѣдовательно:

$$V - V_1 = 0{,}42 - 0{,}014 = 0{,}406 \text{ метр.}^3$$

Если будемъ считать, по уравненію 281, стр. 207, что 1 куб. метръ воздуха вѣситъ около 1,3 килогр., то, по уравненію 285, получимъ:

$$G = 100 + 1{,}3 \,.\, 0{,}406 = 100{,}53 \text{ килогр.}$$

Задача 125. Пусть объемъ воздушнаго шара, наполненнаго свѣтильнымъ газомъ, $V = 1800$ метр.$^3$, вѣсъ его вмѣстѣ съ принадлежностями и грузомъ $G = 800$ килогр. Найти подъемную силу $P$ шара у поверхности земли и высоту поднятія $H$ ($\gamma = 1{,}3$ для воздуха; $\gamma' = 0{,}52$ для свѣтильнаго газа).

Рѣшеніе. По уравненію 287, подъемная сила:

$$P = 1800 (1{,}3 - 0{,}52) - 800 = \backsim 600 \text{ килогр.}$$

1 куб. метръ воздуха при концѣ поднятія вѣситъ, по уравненію 288:

$$\gamma_1 = 0{,}52 + \frac{800}{1800} = 0{,}96 \text{ килогр.}$$

Слѣдовательно, высота поднятія по уравненію 289:

$$H = 18\,400 (\log 1{,}3 - \log 0{,}96) = \backsim 2423 \text{ метра.}$$

---

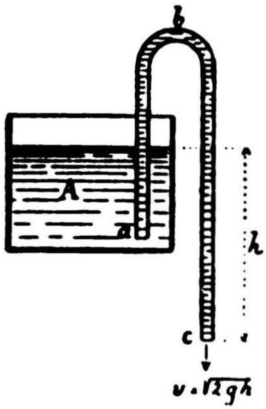
## § 43.

## Примѣненія давленія воздуха.

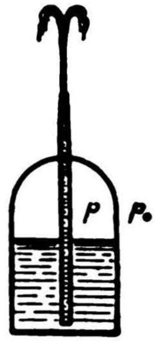
1. Сифонъ (фиг. 213).

Если изогнутую трубку abc (такъ называемый сифонъ), изъ которой предварительно вытянутъ воздухъ, болѣе короткимъ колѣномъ погрузить въ наполненный водой сосудъ A, а конецъ C другого болѣе длиннаго колѣна держать закрытымъ, то, вслѣдствіе атмосфернаго давленія, вода въ короткомъ колѣнѣ поднимется до высоты $h_0 = 10{,}33$ метр. надъ уровнемъ воды въ сосудѣ или перельется въ болѣе длинное колѣно, если наивысшая точка b сифона отстоитъ отъ уровня воды въ сосудѣ менѣе, чѣмъ на 10,33 метра. Если затѣмъ въ точкѣ с трубку открыть, то вода будетъ выливаться и съ тѣмъ большей скоростью, чѣмъ ниже подъ поверхностью воды находится точка с. Подобнымъ образомъ можно перелить всю воду изъ сосуда А, если только конецъ а трубки погрузить до дна сосуда.

Фиг. 213.




Фиг. 214.




## 2. Героновъ шаръ (фиг. 214).

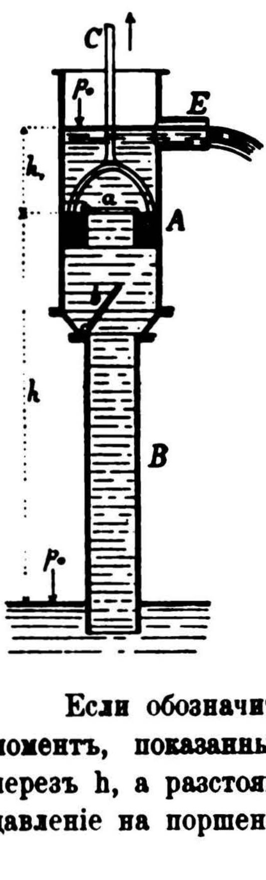
Героновъ шаръ состоитъ изъ герметически закрытаго сосуда, въ которомъ находится трубка, доходящая почти до дна сосуда и снабженная на верху суживающимся наконечникомъ. Если сосудъ наполнить водою до произвольной высоты и сжать какимъ-нибудь способомъ (напр., вдуваніемъ) находящійся надъ водою внутри сосуда воздухъ, то, вслѣдствіе превышенія давленія сжатаго внутри воздуха надъ наружнымъ, вода начнетъ подниматься по трубкѣ и брызгать черезъ наконечникъ сжатой струей (фонтаномъ).

(Героновъ шаръ имѣетъ многочисленныя примѣненія подъ именемъ воздушной камеры).

## 3. Всасывающій насосъ (подъемный насосъ, фиг. 215).

Всасывающій насосъ состоитъ изъ цилиндра (стакана) насоса А, въ которомъ движется вверхъ и внизъ, при помощи штока С, плотно прилегающій къ стѣнкамъ стакана поршень, снабженный клапаномъ а, и изъ всасывающей трубы В, спускающейся немного ниже поверхности поднимаемой воды. Между цилиндромъ и всасывающей трубой находится второй, такъ называемый всасывающій клапанъ b; оба клапана открываются только кверху. Если поднимать поршень изъ низкаго положенія, то подъ нимъ образуется безвоздушное пространство; вслѣдствіе этого открывается клапанъ b, тогда какъ клапанъ a, на который сверху дѣйствуетъ давленіе воздуха, остается закрытымъ. При этомъ воздухъ въ цилиндрѣ и въ всасывающей трубѣ разрѣжается, и вода вслѣдствіе этого немного поднимется въ всасывающей трубѣ. При опусканіи поршня, клапанъ b закроется, а клапанъ a откроется; поэтому воздухъ въ всасывающей трубѣ остается разрѣженнымъ, и при слѣдующемъ поднятіи поршня, когда b опять откроется, а a закроется, воздухъ разрѣдится еще больше, и вода поднимется выше.

Фиг. 215.




Чѣмъ больше будетъ разрѣжаться воздухъ въ всасывающей трубѣ при попеременномъ подниманіи и опусканіи поршня, тѣмъ выше будетъ подниматься вода по трубѣ подъ давленіемъ наружнаго воздуха; наконецъ, она достигнетъ стакана насоса и тогда, при дальнѣйшемъ опусканіи поршня, пройдетъ черезъ клапанъ a, такъ что, при послѣдующемъ поднятіи поршня, вода дойдетъ до водоотводной трубы E и начнетъ стекать.

Такъ какъ атмосферное давленіе уравновѣшиваетъ столбъ воды высотою $h_0 = 10{,}33$ метр., то насосъ можетъ только тогда дѣйствовать, когда высота клапана a въ самомъ высокомъ положеніи поршня надъ нижнимъ уровнемъ воды меньше 10,33 метр. На практикѣ она едва превышаетъ 7—8 метровъ.

Если обозначить площадь поршня черезъ F, высоту клапана a въ моментъ, показанный на фиг. 215, надъ уровнемъ воды въ водоемѣ черезъ h, а разстояніе клапана a до водоотводной трубы черезъ $h_1$, то давленіе на поршень сверху внизъ равно:

$$P_1 = p_0 F + \gamma h_1 F$$

Давленіе же на поршень снизу вверхъ будетъ:

$$P_2 = p_0 F - \gamma h F$$

Слѣдовательно, сила, необходимая для поднятія поршня (если не принимать во вниманіе сопротивленія движенію):

$$P = P_1 - P_2 = p_0 F + \gamma h_1 F - p_0 F + \gamma h F$$

или:

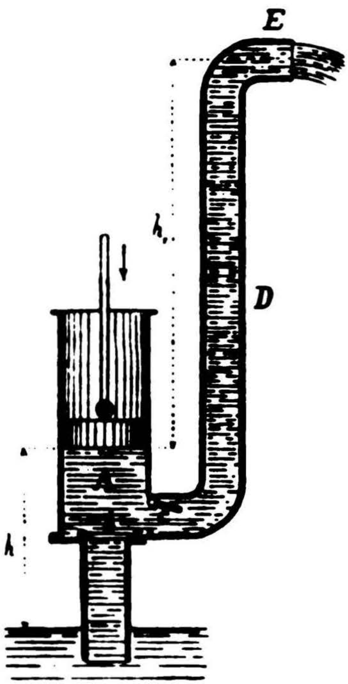
$$P = \gamma F (h + h_1) = \gamma F H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 290)$$

если H — полная высота поднятія воды, т. е. разстояніе отъ нижняго уровня воды въ водоемѣ до верхняго уровня — въ стаканѣ насоса.

4. Нагнетательный насосъ (фиг. 216).

Нагнетательный насосъ отличается отъ всасывающаго тѣмъ, что поршень не имѣетъ никакого клапана; вмѣсто этого клапаномъ снабжена водоподъемная (нагнетательная) труба D, присоединенная внизу къ стакану насоса A. Клапанъ b — называютъ всасывающимъ, а c — нагнетательнымъ клапаномъ.

Фиг. 216.




Послѣ того, какъ вода черезъ всасывающій клапанъ b вступитъ въ стаканъ, она при опусканіи поршня, когда b закрытъ, а c — открытъ, начнетъ подниматься по нагнетательной трубѣ D до выпускной трубы E.

Сила, необходимая для поднятія поршня, найдется такъ же, какъ въ п. 3, если опять черезъ F обозначить площадь поршня, по фиг. 216:

$$P = \gamma F h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 291)$$

При опусканіи поршня поднимается столбъ воды высотою $h_1$; для этого необходима сила:

$$P' = \gamma F h_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 292)$$

Длина всасывающей трубы, включая ходъ поршня, теоретически не должна превышать 10,33 метр. Длину же нагнетательной трубы можно брать произвольной; при этомъ только нужно имѣть въ виду, что сила P', необходимая для поднятія столба воды, прямо пропорціональна его высотѣ.

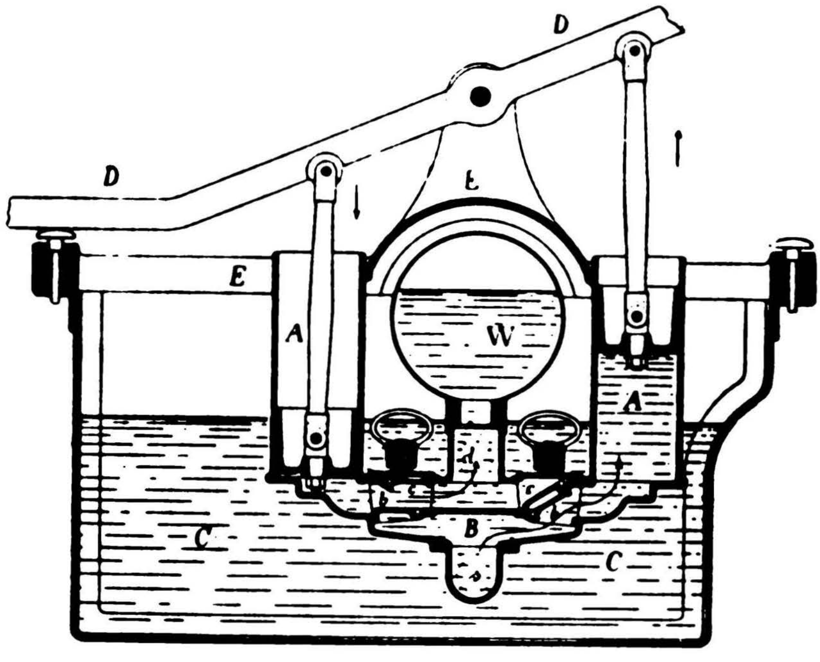
Кромѣ описаннаго нагнетательнаго насоса простого дѣйствія, который доставляетъ воду только при опусканіи поршня, существуютъ еще насосы двойного дѣйствія (съ 4 клапанами); они доставляютъ воду, какъ при опусканіи поршня, такъ и при поднятіи его. Несмотря на это, на практикѣ часто предпочитаютъ насосу двойного дѣйствія два соединенныхъ насоса простого дѣйствія.

5. Пожарная труба (пожарный насосъ, фиг. 217).

Пожарный насосъ состоитъ изъ двухъ нагнетательныхъ насосовъ A простого дѣйствія, соединенныхъ между собой клапанной коробкой

B, при чемъ поршни насосовъ движутся попеременно: когда одинъ поршень поднимается, другой—одновременно опускается. При поднятіи одного поршня (фиг. 217 направо), вода устремляется изъ всасывающей трубы s черезъ открытый клапанъ b въ стаканъ A насоса, въ то время какъ другой клапанъ c—закрытъ. При опусканіи поршня (фиг. 217 налѣво), клапанъ b закрывается, и вода черезъ открытый клапанъ c поступаетъ въ нагнетательную трубу d или въ воздушную камеру W.

Фиг. 217.




Оба насоса съ приспособленіями находятся внутри резервуара (бака) C и, при помощи винтовъ, подвѣшены къ упорному брусу E, находящемуся надъ резервуаромъ. На этотъ же брусъ опирается рычагъ D.

При помощи этихъ насосовъ вода устремляется въ наружный пожарный рукавъ, прикрѣпленной къ нагнетательной трубѣ d, и выбрасывается сильной струей изъ наконечника. Одновременно съ этимъ вода вступаетъ въ воздушную камеру, вслѣдствіе чего находящійся въ ней воздухъ сильно сжимается.

Выгода воздушной камеры состоитъ въ томъ, что вода, при каждомъ опусканіи того или другого поршня, выбрасывается не толчками, а сплошной постоянной струей, такъ какъ сжатый воздухъ въ воздушной камерѣ производитъ равномѣрное давленіе на воду. Обыкновенно объемъ воздушной камеры дѣлается равнымъ четыремъ или пяти объемамъ стакана насосовъ.

Величины, задаваемыя для пожарнаго насоса суть: высота струи H, расходъ воды въ 1 секунду Q и высота подъема s, а также скорость C точки приложенія рабочей силы на рычагъ.

Если бы выходящая со скоростью v изъ наконечника струя воды подымалась въ безвоздушномъ пространствѣ, то теоретическая высота поднятія струи была бы:

$$H' = \frac{v^2}{2g}$$

Вслѣдствіе же сопротивленія воздуха, дѣйствительная высота подъема струи H въ среднемъ равна лишь $^4/_5$ теоретической, т. е. $H' = {^5/_4} H$. Изъ послѣдняго равенства поэтому получимъ для v:

$$v = \sqrt{2g \cdot {^5/_4} H} = 4{,}95 \sqrt{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 293)$$

Діаметръ d наконечника тогда опредѣлится изъ равенства:

$$\frac{d^2 \pi}{4} v = \frac{d^2 \pi}{4} 4{,}95 \sqrt{H} = Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 294)$$

При отношеніи плечъ рычага = m, скорость поршня насосовъ:

$$c = \frac{C}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 295)$$

и высота подъема поршня:

$$h = \frac{s}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 296)$$

Діаметръ поршня D получится изъ условія:

$$\frac{D^2 \pi}{4} c = \frac{d^2 \pi}{4} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 297)$$

$$D = d \sqrt{\frac{v}{c}}$$

Если силу, прилагаемую къ рычагу, обозначимъ черезъ P, то работа, производимая въ секунду, будетъ:

$$A = PC$$

Работа, необходимая для поднятія количества воды Q на (теоретическую) высоту $H' = {^5/_4} H$, будетъ:

$$A_1 = 1000 Q \, {^5/_4} H$$

Слѣдовательно, при коэффиціентѣ полезнаго дѣйствія $\eta$:

$$A = \frac{1}{\eta} \cdot A_1$$

или:

$$PC = \frac{1}{\eta} 1000 Q \, {^5/_4} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 298)$$

Откуда легко вычислить необходимую силу P.

При употребленіи пожарнаго рукава, необходимо принимать во вниманіе и сопротивленіе стѣнокъ трубъ, которое можно вычислить, по уравненію 255, стр. 195, подставивъ вмѣсто коэффиціента 0,024 другой = 0,04. Если l — длина, $d_1$ — діаметръ рукава и $v_1$ — скорость воды въ немъ, то гидростатическое сопротивленіе (высота сопротивленія):

$$h_1 = 0{,}04 \frac{l}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} \qquad 299)$$

и вмѣсто уравненія 298 получимъ:

$$PC = \frac{1}{\eta} 1000\, Q\, (5/4\, H + h_1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 300)$$

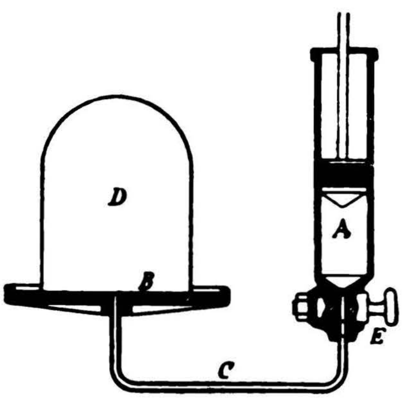
Давленіе въ воздушномъ котлѣ, выраженное въ атмосферахъ или въ килогр./сентим.², будетъ:

$$p = \frac{5/4\, H + h_1}{h_0} = \frac{5/4\, H + h_1}{10} \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 301)$$

6. Воздушный насосъ (фиг. 218).

Воздушный насосъ употребляется, главнымъ образомъ, для разрѣженія воздуха, но можно также употреблять его и для сжатія воздуха. Главнѣйшія его части слѣдующія: 1) цилиндръ A, въ которомъ движется вверхъ и внизъ плотноприлегающій къ стѣнкамъ цилиндра поршень, 2) тщательно отполированная пластинка B (тарелка), соединенная съ цилиндромъ трубкою C, 3) колоколъ D, большею частью стеклянный, въ которомъ, послѣ того какъ онъ будетъ плотно пригнанъ къ тарелкѣ, и разрѣжается воздухъ, 4) кранъ E, служащій для того, чтобы соединять или разъединять цилиндръ съ колоколомъ.

Фиг. 218.




Фиг. 218 а.

Кранъ снабженъ двумя каналами; если поднять поршень, то кранъ приметъ положеніе, показанное на рис. 218. Воздухъ, находящійся въ колоколѣ D и въ трубкѣ C, при этомъ расширится на величину объема цилиндра и вслѣдствіе этого сдѣлается рѣже. При опусканіи поршня, кранъ повертывается на $90^0$ и принимаетъ положеніе, показанное на фиг. 218 а, вслѣдствіе чего воздухъ въ C и D — разобщается, а цилиндръ A соединяется съ наружнымъ воздухомъ, такъ что воздухъ, находящійся въ цилиндрѣ, можетъ быть вытѣсненъ наружу. Продолжая далѣе подниманія и опусканія поршня и мѣняя соотвѣтственно положеніе крана, можно все болѣе и болѣе разрѣжать воздухъ.

Если обозначить объемъ цилиндра черезъ V, объемъ колокола съ трубкой—черезъ $V_1$, то разрѣженіе воздуха будетъ:

послѣ перваго хода (подъема) поршня $= \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)$

„ втораго „ „ „ $= \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)^2$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

вообще „ n-аго „ „ „ $= \left(1 + \frac{V}{V_1}\right)^n$

Если, напр., $V_1 = 2V$, то послѣ третьяго хода поршня разрѣженіе воздуха будетъ:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$$

т. е. вѣсъ 1 куб. метр. разрѣженнаго воздуха равнялся бы $^8/_{27}$ обыкновеннаго атмосфернаго воздуха.

Если воздушный насосъ употребляется для сжатія воздуха, то крану надо придавать какъ разъ обратныя положенія, чѣмъ при разрѣженіи воздуха. Положеніе крана, показанное на фиг. 218, будетъ соотвѣтствовать тогда опусканію поршня. Въ этомъ случаѣ на конецъ трубы C вмѣсто тарелки B навинчивается соотвѣтственнымъ образомъ измѣненный колоколъ D.

Задача 126. Найти размѣры и необходимую производительную силу пожарнаго насоса, который въ состояніи выбрасывать въ секунду 0,007 куб. метр. воды на высоту N = 20 метр. При этомъ дано:

| | | | |
|---|---|---|---|
| высота подъема рычага | $s =$ | 1,25 | метр. |
| скорость конца рычага | $C =$ | 1,4 | „ |
| скорость поршня насосовъ | $c =$ | 0,28 | „ |
| коэффиціентъ полезнаго дѣйствія насоса | $\eta =$ | 0,75 | „ |
| діаметръ рукава | $d_1 =$ | 0,05 | „ |
| длина рукава | $l =$ | 20 | „ |

Рѣшеніе. По уравненію 293, стр. 217, найдемъ:

$$v = 4{,}95\sqrt{20} = 22{,}14 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 294:

$$\frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{0{,}007}{22{,}14} = 0{,}000316 \text{ метр.}^2 = 3{,}16 \text{ сентим.}^2$$

или діаметръ наконечника:

$$d = \backsim 2 \text{ сентим.}$$

Отношеніе плечъ, по уравненію 295:

$$m = \frac{C}{c} = \frac{1,4}{0,28} = 5$$

Слѣдовательно, по уравненію 296, высота подъема поршня:

$$h = \frac{1,25}{5} = 0,25 \text{ метр.}$$

и по уравненію 297:

$$\frac{D^2 \pi}{4} = \frac{3,14 \,.\, 22,14}{0,28} = 248 \text{ сентим.}^2$$

или діаметръ поршня:

$$D = \backsim 18 \text{ сентим.}$$

Безъ рукава имѣли бы, по уравненію 298:

$$P = \frac{1}{0,75} \cdot \frac{1000 \,.\, 0,007 \,.\, {}^5\!/\!_4 \,.\, 20}{1,4} = \backsim 167 \text{ килогр.}$$

Скорость $v_1$ воды въ рукавѣ опредѣлится изъ равенства:

$$\frac{d_1{}^2 \pi}{4} v_1 = \frac{d^2 \pi}{4} v$$

$$v_1 = v \frac{d^2}{d_1{}^2} = 22,14 \,.\, \frac{4}{25} = 3,54 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, по уравненію 299):

$$h_1 = 0,04 \,.\, \frac{20}{0,05} \cdot \frac{3,54^2}{2 \,.\, 9,81} = 10,2 \text{ метр.}$$

и, по уравненію 300), сила, расходуемая на рычагѣ:

$$P = \frac{1}{0,75} \cdot \frac{1000 \,.\, 0,007 \,({}^5\!/\!_4 \,.\, 20 + 10,2)}{1,4} = \backsim 235 \text{ килогр.}$$

Такъ какъ одинъ человѣкъ можетъ работать съ силою 15 килогр., то пожарный насосъ требуетъ для своего дѣйствія 16 человѣкъ. Давленіе въ воздушной камерѣ, по уравненію 301, будетъ:

$$p = \frac{{}^5\!/\!_4 \,.\, 20 + 10,2}{10} = \backsim 3,5 \text{ атм.} = 3,5 \text{ килогр./сентим.}^2.$$

ГЛАВА VII.

# Ученіе о движеніи газообразныхъ тѣлъ. (Аэродинамика.)

§ 44.

## Истеченіе воздуха.

Найденное въ § 33 выраженіе для скорости истеченія воды (уравненіе 241, стр. 186):

$$v = \sqrt{2g\,h}$$

можетъ служить и для опредѣленія скорости истеченія воздуха, если замѣнить въ немъ столбъ воды, съ высотою h, столбомъ воздуха одинаковаго съ нимъ вѣса.

Такъ какъ вѣса воды и атмосфернаго воздуха относятся между собой, какъ 1000 : 1,293 *), то высота воздушнаго столба, уравновѣшивающаго столбъ воды, высотою h, будетъ $= \frac{1000}{1,293}\,h$. Отсюда получимъ для скорости воздуха, съ болѣе высокимъ давленіемъ, вытекающаго изъ отверстія сосуда въ наружную атмосферу, выраженіе:

$$v = \sqrt{2g\,\frac{1000}{1,293}\,h} = 27,8\sqrt{2gh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 302)$$

гдѣ h — высота водяного столба, которой измѣряется разность давленій.

При выводѣ уравненія 302, разность давленій принималась постоянной; равнымъ образомъ измѣненіе температуры, претерпѣваемое воздухомъ при истеченіи чрезъ отверстіе, также не принималось во вниманіе; но то и другое допустимо только для очень малыхъ разностей давленія, и только въ этомъ случаѣ уравненіе 302 даетъ пригодныя значенія.

Если обозначить поперечное сѣченіе отверстія черезъ f, то, если истеченіе воздуха совершается безъ сжатія, количество вытекающаго воздуха будетъ:

$$Q = f\,v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 303)$$

Въ дѣйствительности же всегда происходитъ сжатіе струи воздуха, и чтобы получить дѣйствительный расходъ воздуха, нужно, какъ и при вытеканіи воды (стр. 189), значеніе, полученное изъ уравненія 303, помножить еще на коэффиціентъ истеченія $\mu$.



*) 1 куб. метръ воздуха вѣситъ 1,293 килогр. (ср. стр. 208).

**При полномъ сжатіи (у отверстія въ тонкой стѣнкѣ):**

$$\mu = 0{,}62$$

**При употребленіи короткой конической посадки съ хорошо закругленными внутренними краями (фиг. 200, стр. 190), можно взять:**

$$\mu = 0{,}9$$

**Задача 127.** Въ большомъ сосудѣ заключенъ воздухъ упругостью въ 1,2 атмосферы, вытекающій черезъ отверстіе, съ поперечнымъ сѣченіемъ 0,002 метр.$^2$, въ наружную атмосферу. Найти скорость $v$ и количество воздуха $Q$, вытекающаго въ 1 секунду.

**Рѣшеніе.** Разность давленій равна $1{,}2 - 1 = 0{,}2$ атмосф.; ей соотвѣтствуетъ столбъ воды высотою:

$$h = 0{,}2 \,.\, 10{,}33 = 2{,}066 \text{ метр.}$$

Слѣдовательно, изъ уравненія 302:

$$v = 27{,}8 \sqrt{2 \,.\, 9{,}81 \,.\, 2{,}066} = 177 \text{ метр.}$$

Теоретическій расходъ воздуха, по уравненію 303:

$$Q = 0{,}002 \,.\, 177 = 0{,}354 \text{ метр.}^3$$

При хорошо исполненной посадкѣ ($\mu = 0{,}9$) дѣйствительный расходъ воздуха:

$$Q = 0{,}9 \,.\, 0{,}354 = \backsim 0{,}32 \text{ метр.}^3$$

---

## § 45.

## Движеніе газовъ по трубопроводамъ.

Если газъ съ опредѣленной скоростью движется по трубѣ, то, вслѣдствіе тренія о стѣнки трубъ, проявляется сопротивленіе этому движенію подобно тому, какъ это бываетъ у капельно-жидкихъ тѣлъ. Чтобы опредѣлить необходимую высоту напора для преодолѣнія этого сопротивленія, можно воспользоваться уравненіемъ 255, стр. 195, замѣнивъ предварительно водяной столбъ высотою $h_1$ газовымъ столбомъ того же вѣса. Если $\gamma$ — вѣсъ 1 куб. метра газа, то высота этого газоваго столба будетъ $= \frac{1000}{\gamma} h_1$.

| | |
|---|---|
| для атмосфернаго воздуха: | $\gamma = 1{,}293$ |
| „ свѣтильнаго газа: | $\gamma = 0{,}52$ *) |

---

*) Ср. Приложеніе. Табл. II (удѣльные вѣса).

Потерю въ высотѣ напора въ метрахъ водяного столба получимъ послѣ подстановки этихъ значенiй въ уравненiе 255:

для атмосфернаго воздуха: $$h_1 = 0{,}000031 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad 304)$$

„ свѣтильнаго газа: $$h_1 + 0{,}0000125 \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad 305)$$

Если принимать во вниманiе давленiе и температуру газа, то вѣсъ 1 куб. метра газа тогда, по уравненiю 281, стр. 207, будетъ:

$$\gamma = \frac{1}{V} = \frac{p}{RT}$$

Тогда, по уравненiю 255, потеря напора $h_1$ водяного столба:

$$h_1 = 0{,}000024 \cdot \frac{p}{RT} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad 306)$$

или, если абсолютное давленiе p (въ килогр./сентим.$^2$) взять въ атм. (килогр./сентим.$^2$), то

$$h_1 = 0{,}24 \cdot \frac{p}{RT} \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad \ldots\ldots \quad 307)$$

**Задача 128.** По трубопроводу, длиною 1000 метр. и дiаметромъ 15 сентим., движется свѣтильный газъ со скоростью 3 метр. Если разность давленiй въ началѣ трубопровода достигаетъ 0,13 метр. водяного столба, то какова она будетъ въ концѣ трубопровода?

**Рѣшенiе.** Потеря напора, по уравненiю 305:

$$h_1 - 0{,}0000125 \frac{1000}{0{,}15} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}038 \text{ метр.}$$

Разность давленiй въ концѣ трубопровода поэтому:

$$0{,}13 - 0{,}038 = 0{,}092 \text{ метра водяного столба.}$$

**Задача 129.** Найти давленiе въ горизонтальномъ газопроводѣ, дiаметромъ 25 сентим. и длиною 1 километръ, если дано:

Разность давленiй (превышенiе давленiя) = 5 атм. = 5 килогр./см.$^2$ слѣдовательно:

$$p = 6 \text{ атм.}$$

Средняя температура = $20^0$; слѣдовательно, $T = 273 + 20 = 293^0$.

Скорость воздуха $v = 6$ метр.

**Рѣшенiе.** По уравненiю 283, стр. 208, для воздуха имѣемъ:

$$R = 29{,}27$$

Слѣдовательно, потеря напора, по уравненiю 307:

$$h_1 = \frac{0{,}24 \cdot 6}{29{,}27 \cdot 293} \cdot \frac{1000}{0{,}25} \cdot \frac{6^2}{2 \cdot 9{,}81} = 1{,}23 \text{ метра водяного столба.}$$

или въ атмосферахъ:

$$h_1 = 0{,}123 = \backsim 0{,}1 \text{ атм.}$$

Въ концѣ газопровода разность давленiй будетъ еще = $\backsim$ 4,9 атм.

§ 46.

## Сопротивленіе жидкостей (воды и воздуха) при движеніи въ нихъ твердыхъ тѣлъ.

Если тѣло движется въ жидкости, находящейся въ покоѣ (при чемъ представителемъ капельныхъ жидкостей можно принять воду, а газообразныхъ жидкостей — воздухъ), то оно встрѣчаетъ сопротивленіе своему движенію. Это сопротивленіе появляется потому, что тѣло при движеніи должно вытѣснять частицы воды или воздуха изъ занимаемаго ими объема, вслѣдствіе чего скорость движенія тѣла уменьшается.

На основаніи опыта выведено, что сопротивленіе, при незначительныхъ скоростяхъ, пропорціонально квадрату скорости движущагося тѣла; кромѣ того, сопротивленіе тѣмъ больше, чѣмъ плотнѣе жидкость (среда), т. е. чѣмъ больше вѣсъ единицы ея объема; далѣе, оно тѣмъ больше, чѣмъ больше поверхность тѣла, подвергающаяся дѣйствію среды. Эту величину поверхности можно замѣнить проекціей тѣла на плоскость, перпендикулярную къ направленію движенія. Кромѣ того, большое вліяніе оказываетъ и форма тѣла; такъ, напр., заостренное спереди тѣло (какъ, напр., судно) движется легче въ жидкости, чѣмъ тѣло съ тупымъ или вогнутымъ концомъ спереди.

Для величины сопротивленія подойдетъ уже приведенное въ § 37, стр. 201 (уравненіе 272), выраженіе:

$$W = k \gamma F \frac{v^2}{2g} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 308)$$

гдѣ $\gamma$—вѣсъ единицы объема жидкости, F—площадь проекціи тѣла, v—скорость и k—опытный коэффиціентъ, зависящій отъ формы тѣла.

Значенія для k, относящіяся къ сопротивленію воды движемуся въ ней тѣлу, уже приведены на стр. 201.

Для вычисленія сопротивленія воздуха движемуся въ немъ тѣлу можетъ служить также уравненіе 308, въ которомъ коэффиціентъ k, по опытамъ Франка *), для движенія тѣла въ продольномъ направленіи, можно, напр., въ среднемъ принять:

Для цилиндра:

| | |
|---|---|
| съ конечной плоскостью, перпендикулярной къ оси: | $k = 1{,}106$ |
| „ впереди лежащимъ конусомъ: | $k = 0{,}720$ |
| „ тангенціально примыкающимъ полушаромъ: | $k = 0{,}565$ |
| „ „ „ эллипсоидомъ: | $k = 0{,}462$ |

*) Zeitschrift. d. V. d. Ing. 1906. Стр. 593.

для тѣла съ квадратнымъ поперечнымъ сѣченіемъ и:

съ конечной плоскостью, перпендикулярной къ оси: $k = 1{,}164$
„ впереди лежащей плоскостью клина: $k = 0{,}810$
„ „ „ пирамидой: $k = 0{,}720$

При движеніи тѣла противъ теченія воздуха, имѣющаго скорость $v_1$, по уравненію 308, сопротивленіе равно:

$$W = k \gamma F \frac{(v + v_1)^2}{2g} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 309)$$

Редтенбахеръ даетъ слѣдующую формулу для сопротивленія воздуха при движеніи желѣзнодорожнаго поѣзда:

$$W = 0{,}0704 \left(F + \frac{1}{4} fn\right) v^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 310)$$

гдѣ F—передняя площадь паровоза; f—передняя площадь каждаго изъ прицѣпленныхъ вагоновъ, n—число вагоновъ, v—скорость поѣзда.

Относительно величины давленія воздуха (давленіе вѣтра) на неподвижныя тѣла (напр., крыши) см. Лауэнштейнъ, „Графическая статика“, 9 изданіе § 16, стр. 134.

Задача 130. Найти сопротивленіе воздуха для тѣла, передняя площадь котораго = 4 метр.$^3$ и которое движется со скоростью $v = 20$ метр.

Рѣшеніе. По уравненію 308 при $\gamma = \backsim 1{,}3$ килогр. и $k = \backsim 1{,}2$:

$$W = 1{,}2 \,.\, 1{,}3 \,.\, 4 \,.\, \frac{20^2}{2 \,.\, 9{,}81} = \backsim 127 \text{ килогр.}$$

Если воздухъ самъ обладаетъ скоростью $v_1 = 10$ метр. (незначительный вѣтеръ по международной скалѣ для сопротивленій), то, по уравненію 309, сопротивленіе воздуха будетъ:

$$W = 1{,}2 \,.\, 1{,}3 \,.\, 4 \,.\, \frac{30^2}{2 \,.\, 9{,}81} = \backsim 286 \text{ килогр.}$$

Задача 131. Какъ велико сопротивленіе воздуха для желѣзнодорожнаго поѣзда, состоящаго изъ 6 вагоновъ и движущагося со скоростью 20 метровъ въ секунду?

Рѣшеніе. Принимая: $F = 7$ метр.$^2$; $f = 4$ метр.$^2$, по уравненію 310 получимъ:

$$W = 0{,}0704\,(7 + {}^1/_4 \,.\, 4 \,.\, 6)\; 20^2 = 366 \text{ килогр.}$$

# ПРИЛОЖЕНІЯ.

## ТАБЛИЦА I.

### Коэффиціенты тренія.

а) Коэффиціенты тренія при скольженіи.

| Трущіяся тѣла. | Состояніе поверхностей. | Коэффиціентъ тренія f при покоѣ | при движеніи. |
|---|---|---|---|
| **Чугунъ** | | | |
| по чугуну или бронзѣ | слабо смазанныя | 0,16 | 0,15 |
| **Сварочное желѣзо** | | | |
| по сварочному желѣзу | сухія | — | 0,44 |
| | слабо смазанныя | 0,13 | — |
| по чугуну или бронзѣ | сухія | 0,19 | 0,18 |
| **Сталь** | | | |
| по стали | сухія | 0,15 | — |
| **Бронза** | | | |
| по бронзѣ | сухія | — | 0,2 |
| по чугуну | сухія | — | 0,22 |
| по сварочному желѣзу | слабо смазанныя | — | 0,16 |
| **Дубъ** | | | |
| по дубу: волокна параллельны движенію | сухія | 0,62 | 0,48 |
| | смазанн. мыломъ | 0,44 | 0,16 |
| по дубу: волокна перпендикулярны движенію | сухія | 0,54 | 0,34 |
| | смоченныя водой | 0,71 | 0,25 |
| **Кожанный ремень** | | | |
| по дубу | слабо смазанныя | 0,47 | — |
| чугуну | сухія | — | 0,27 |
| | слабо смазанныя | 0,28 | — |
| кожа въ поршняхъ: тверд. кожа | смазанныя | 0,12 | 0,1 |
| кожа въ поршняхъ: мягк. кожа | смазанныя | 0,07 | 0,03 |

### b) Коэффиціенты тренія цапфъ.

| Трущіяся тѣла. | Коэффиціентъ тренія f при движеніи смазыванія. обыкновенное. | Коэффиціентъ тренія f при движеніи смазыванія. непрерывное. |
|---|---|---|
| **Чугунъ** | | |
| по чугуну | 0,075 | 0,054 |
| по бронзѣ | 0,075 | 0,05 |
| по бакауту | 0,1 | 0,09 (0,28 съ водой) |
| **Сварочное желѣзо** *) | | |
| по чугуну или бронзѣ | 0,07 | 0,03 до 0,05 |
| по бакауту | 0,11 | — |

## ТАБЛИЦА II.

### Удѣльные вѣса.

#### а) Твердыя тѣла

(относительно воды при 4° С. и подъ давленіемъ ртутнаго столба высотою 760 мм.).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Аллюминій | 2,5 — 2,7 | Земля | 1,4 — 2,0 |
| Антрацитъ | 1,4 — 1,7 | Золото | 18,6 — 19,3 |
| Азбестъ | 2,1 — 2,8 | Известь негашенная | 2,3 — 3,1 |
| Асфальтъ чистый | 1,1 — 1,5 | Известнякъ | 2,6 — 2,8 |
| „ трамбованный съ гравіемъ | 1,8 — 2,0 | Известковый растворъ | 1,6 — 1,8 |
| Базальтъ | 2,7 — 3,2 | Каменный уголь | 1,2 — 1,5 |
| Бетонъ | 1,8 — 2,45 | Каучукъ | 0,92 — 0,96 |
| Бронза | 7,4 — 8,9 | Кварцъ | 2,5 — 2,8 |
| „ колокольная | 8,8 | Киноварь | 8,1 |
| Валунъ | 2,3 — 2,7 | Кирпичъ | 1,4 — 2,2 |
| Воскъ | 0,95 — 0,98 | Кладка: | |
| Глиноземъ | 1,8 — 2,63 | Бутовая | 2,4 — 2,46 |
| Гравій | 1,8 — 2,0 | Кирпичная | 1,47 — 1,7 |
| Гранитъ | 2,5 — 3,0 | Изъ песчаника | 2,05 — 2,12 |
| Графитъ | 1,9 — 2,3 | Коксъ | 0,3 — 0,5 |
| Гипсъ литой | 0,97 — 1,1 | Ледъ | 0,88 — 0,92 |
| Глина сухая | 1,52 | Латунь | 8,4 — 8,7 |
| „ свѣже вырытая | 1,7 — 2,8 | Мраморъ | 2,5 — 2,8 |
| Деготь | 1,1 въ сред. | Мѣдь | 8,6 — 9 |
| Желѣзная руда | 3,4 — 5,0 | Олово | 7,2 — 7,5 |
| Желѣзо литое | 7,85 | Песокъ сухой | 1,4 — 1,6 |
| „ сварочное | 7,8 | „ сырой | 1,9 — 2,0 |
| „ химически чистое | 7,88 | Песчаникъ | 1,9 — 2,7 |
| | | Платина | 21,15 — 21,45 |

*) Кирхвегеръ нашелъ для хорошо пригнанныхъ и хорошо смазываемыхъ вагонныхъ осей изъ литой стали $f = 0{,}01$.

*Примѣчаніе.* Коэффиціентъ тренія цапфъ при покоѣ приблизительно въ 10 разъ больше, чѣмъ при движеніи.

| | на корн. | сухое | | |
|---|---|---|---|---|
| Породы деревьевъ: | | | Смола . . . . . . . . | 1,07— 1,1 |
| Бакаутъ . . . . . | — | 1,33 | Снѣгъ . . . . . . . . | 0,125 |
| Береза . . . . . | 0,9 | 9,7 | Сталь . . . . . . . . | 7,8 — 8,0 |
| Букъ . . . . . . | 0,98 | 0,72 | „ литая. . . . . | 7,86 |
| Буксовое дерево. . | 1,00 | 0,97 | „ сварочная . . . | 7,86 |
| Дубъ . . . . . . | 1,00 | 0,6 —0,85 | Стекло оконное . . . | 2,4 — 2,6 |
| Ель . . . . . . . | 0,89 | 0,6 | „ флинтгласъ. . | 3,2 — 3,9 |
| Кленъ . . . . . . | 0,9 | 0,7 | Сѣра. . . . . . . . | 1,96— 2,05 |
| Пихта . . . . . . | 0,9 | 0,43 | Сюрьма . . . . . . | 6,6 — 6,7 |
| Пробка . . . . . | — | 0,24 | Уголь дубовый . . . | 0,57 |
| Сосна . . . . . . | 0,9 | 0,6 | „ хвойный . . . | 0,28— 0,44 |
| Тополь. . . . . . | 0,86 | 0,4 – 0,5 | Фарфоръ . . . . . | 2,3 — 2,5 |
| Ясень . . . . . . | 0,85 | 0,65 | Цементъ . . . . . . | 2,7 — 3,1 |
| Сахаръ. . . . . . | 1,6 | | Цинкъ . . . . . . . | 6,8 — 7,2 |
| Серебро . . . . . | 10,1 —10,6 | | Чугунъ . . . . . . | 7,25 |
| Свинецъ . . . . . | 11,3 —11,4 | | Шиферъ . . . . . . | 2,6 — 2,7 |
| Слоновая кость . . . | 1,8 — 1,9 | | Шпатъ тяжелый. . . | 4,47 |

## b) Жидкія тѣла

(относительно воды при 4° С. и при давленіи 760 мм.).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Алкоголь (чистый) . . | 0,79 | Нефть . . . . . . . | 0,79—0,82 |
| Азотная кислота. . . | 1,50 | Повареная соль (насыщенный растворъ). | 1,21 |
| Вода дистиллированная . . . . . . . | 1,00 | Пиво . . . . , . . | 1,02—1,04 |
| Вода морская . . . . | 1,02 —1,03 | Ртуть . . . . . . . | 13,59 |
| Глицеринъ (чистый) . | 1,26 | Скипидаръ . . . . . | 0,87 |
| Деготь. . . . . . . | 1,195 | Соляная кислота. . . | 1,19 |
| Молоко. . . . . . . | 1,03 | Сѣрная кислота . . . | 0,73 |
| Масла: деревянное . . | 0,92 | Сѣрная англійская. . | 1,84 |
| льняное . . . | 0,94 | Сѣрная нордгаузенская. . . . . . . | 1,90 |
| сурѣпное. . . | 0,91 —0,92 | | |

## c) Газообразныя тѣла

(относительно атмосфернаго воздуха при 0° и при давленіи 760 мм.).

| | | 1 куб. м. вѣсятъ | | | 1 куб. м. вѣсятъ |
|---|---|---|---|---|---|
| Азотъ . . . . . | 0,9714 | 1,256 клгр. | Кислородъ . . . | 1,1056 | 1,430 клгр. |
| Атмосферн. возд. | 1,000 | 1,293 „ | Окись углерода . | 0,9673 | 1,251 „ |
| Водородъ. . . . | 0,0693 | 0,0896 „ | Свѣтильный газъ | 0,4 | 0,52 „ |
| Водян. паръ при 100°. | 0,4656 | 0,602 „ | Углекислота . . | 1,5291 | 1,977 „ |

## ТАБЛИЦА III а.

### Высоты паденія для окончательныхъ скоростей отъ 0 до 30 м.

v = круглое число; $h = \frac{v^2}{2g}$

| v = | h = | v = | h = | v = | h = | v = | h = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00000 | 1,45 | 0,10716 | 3,3 | 0,5550 | 11,0 | 6,1672 |
| 0,05 | 0,00013 | 1,50 | 0,11468 | 3,4 | 0,5892 | 11,5 | 6,7406 |
| 0,10 | 0,00051 | 1,55 | 0,12245 | 3,5 | 0,6244 | 12,0 | 7,3394 |
| 0,15 | 0,00115 | 1,60 | 0,13048 | 3,6 | 0,6606 | 12,5 | 7,9638 |
| 0,20 | 0,00204 | 1,65 | 0,13876 | 3,7 | 0,6978 | 13,0 | 8,6137 |
| 0,25 | 0,00319 | 1,70 | 0,14730 | 3,8 | 0,7360 | 13,5 | 9,2890 |
| 0,30 | 0,00459 | 1,75 | 0,15609 | 3,9 | 0,7752 | 14,0 | 9,9898 |
| 0,35 | 0,00624 | 1,80 | 0,16514 | 4,0 | 0,8155 | 14,5 | 10,7161 |
| 0,40 | 0,00816 | 1,85 | 0,17444 | 4,1 | 0,8568 | 15,0 | 11,4679 |
| 0,45 | 0,01032 | 1,90 | 0,18400 | 4,2 | 0,8991 | 15,5 | 12,2452 |
| 0,50 | 0,01274 | 1,95 | 0,19381 | 4,3 | 0,9424 | 16,0 | 13,0479 |
| 0,55 | 0,01542 | 2,00 | 0,20387 | 4,4 | 0,9868 | 16,5 | 13,8761 |
| 0,60 | 0,01835 | 2,05 | 0,21419 | 4,5 | 1,0321 | 17,0 | 14,7299 |
| 0,65 | 0,02153 | 2,10 | 0,22477 | 4,6 | 1,0785 | 17,5 | 15,6091 |
| 0,70 | 0,02498 | 2,15 | 0,23560 | 4,7 | 1,1259 | 18,0 | 16,5138 |
| 0,75 | 0,02867 | 2,20 | 0,24669 | 4,8 | 1,1743 | 18,5 | 17,4439 |
| 0,80 | 0,03262 | 2,25 | 0,25803 | 4,9 | 1,2238 | 19,0 | 18,3996 |
| 0,85 | 0,03683 | 2,30 | 0,26962 | 5,0 | 1,2742 | 19,5 | 19,3807 |
| 0,90 | 0,04128 | 2,35 | 0,28147 | 5,5 | 1,5418 | 20 | 20,3874 |
| 0,95 | 0,04600 | 2,40 | 0,29358 | 6,0 | 1,8349 | 21 | 22,4771 |
| 1,00 | 0,05097 | 2,45 | 0,30594 | 6,5 | 2,1534 | 22 | 24,6687 |
| 1,05 | 0,05619 | 2,50 | 0,31855 | 7,0 | 2,4975 | 23 | 26,9623 |
| 1,10 | 0,06167 | 2,6 | 0,34455 | 7,5 | 2,8670 | 24 | 29,3578 |
| 1,15 | 0,06741 | 2,7 | 0,37156 | 8,0 | 3,2620 | 25 | 31,8552 |
| 1,20 | 0,07339 | 2,8 | 0,39959 | 8,5 | 3,6825 | 26 | 34,4546 |
| 1,25 | 0,07964 | 2,9 | 0,42864 | 9,0 | 4,1284 | 27 | 37,1560 |
| 1,30 | 0,08614 | 3,0 | 0,45872 | 9,5 | 4,5999 | 28 | 39,9592 |
| 1,35 | 0,09289 | 3,1 | 0,48981 | 10,0 | 5,0968 | 29 | 42,8644 |
| 1,40 | 0,09990 | 3,2 | 0,52192 | 10,5 | 5,6193 | 30 | 45,8716 |

## ТАБЛИЦА III b.

### Окончательныя скорости для высотъ паденія отъ 0 до 38 м.

h = круглое число; $v = \sqrt{2gh}$

| h = | v = | h = | v = | h = | v = | h = | v = |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0000 | 2,0 | 6,2642 | 5,0 | 9,9045 | 12,5 | 15,660 |
| 0,05 | 0,9905 | 2,1 | 6,4189 | 5.2 | 10,101 | 13,0 | 15,971 |
| 0,10 | 1,4007 | 2,2 | 6,5699 | 5,4 | 10,293 | 13,5 | 16,275 |
| 0,15 | 1,7155 | 2,3 | 6,7176 | 5,6 | 10,482 | 14,0 | 16,573 |
| 0,20 | 1,9809 | 2,4 | 6,8621 | 5,8 | 10,668 | 14,5 | 16,867 |
| 0.25 | 2,2147 | 2,5 | 7,0036 | 6,0 | 10,850 | 15,0 | 17,155 |
| 0,30 | 2,4261 | 2,6 | 7,1423 | 6,2 | 11,029 | 15,5 | 17,439 |
| 0.35 | 2,6205 | 2,7 | 7,2783 | 6,4 | 11.206 | 16,0 | 17,718 |
| 0,40 | 2,8014 | 2,8 | 7.4119 | 6,6 | 11.380 | 16,5 | 17,990 |
| 0,45 | 2,9714 | 2,9 | 7,5431 | 6,8 | 11.551 | 17,0 | 18,263 |
| 0,50 | 3,1321 | 3,0 | 7,6720 | 7,0 | 11.719 | 17,5 | 18,530 |
| 0,55 | 3,2850 | 3,1 | 7,7988 | 7,2 | 11,886 | 18,0 | 18,793 |
| 0,60 | 3,4311 | 3,2 | 7,9236 | 7,4 | 12,049 | 18,5 | 19,052 |
| 0,65 | 3,5711 | 3,3 | 8,0465 | 7,6 | 12.211 | 19,0 | 19,308 |
| 0,70 | 3,7059 | 3,4 | 8,1675 | 7,8 | 12,371 | 19,5 | 19,560 |
| 0,75 | 3,8360 | 3,5 | 8,2867 | 8,0 | 12,528 | 20 | 19,809 |
| 0,80 | 3,9618 | 3,6 | 8,4043 | 8,2 | 12 684 | 21 | 20,298 |
| 0.85 | 4,0838 | 3,7 | 8,5202 | 8,4 | 12,838 | 22 | 20,776 |
| 0,90 | 4,2021 | 3,8 | 8,6346 | 8.6 | 12,990 | 23 | 21,243 |
| 0,95 | 4,3173 | 3,9 | 8,7475 | 8,8 | 13,140 | 24 | 21,670 |
| 1,0 | 4.4295 | 4,0 | 8,8589 | 9,0 | 13,288 | 25 | 22,147 |
| 1,1 | 4,6456 | 4,1 | 8,9690 | 9,2 | 13.435 | 26 | 22,586 |
| 1,2 | 4,8522 | 4,2 | 9,0777 | 9,4 | 13,580 | 27 | 23,016 |
| 1,3 | 5,0504 | 4,3 | 9,1851 | 9,6 | 13,724 | 28 | 23,438 |
| 1,4 | 5,2410 | 4,4 | 9,2913 | 9,8 | 13,866 | 29 | 23,854 |
| 1,5 | 5,4249 | 4,5 | 9,3963 | 10,0 | 14,007 | 30 | 24,261 |
| 1,6 | 5,6028 | 4,6 | 9,5001 | 10,5 | 14.353 | 32 | 25,057 |
| 1,7 | 5,7753 | 4,7 | 9,6028 | 11,0 | 14,691 | 34 | 25,828 |
| 1,8 | 5,9427 | 4,8 | 9,7044 | 11,5 | 15,021 | 36 | 26,577 |
| 1,9 | 6,1056 | 4,9 | 9,8050 | 12,0 | 15,344 | 38 | 27.305 |

## ТАБЛИЦА IV.

### Тригонометрическія величины.

| Град. | Sinus | | | | | | | Град. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0' | 10' | 20' | 30' | 40' | 50' | 60' | |
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01454 | 0,01745 | 89 |
| 1 | 0,01745 | 0,02036 | 0,02327 | 0,02618 | 0,02908 | 0,03199 | 0,03490 | 88 |
| 2 | 0,03490 | 0,03781 | 0,04071 | 0,04362 | 0,04653 | 0,04943 | 0,05234 | 87 |
| 3 | 0,05234 | 0,05524 | 0,05814 | 0,06105 | 0,06395 | 0,06685 | 0,06976 | 86 |
| 4 | 0,06976 | 0,07266 | 0,07556 | 0,07846 | 0,08136 | 0,08426 | 0,08716 | 85 |
| 5 | 0,08716 | 0,09005 | 0,09295 | 0,09585 | 0,09874 | 0,10164 | 0,10453 | 84 |
| 6 | 0,10453 | 0,10742 | 0,11031 | 0,11320 | 0,11609 | 0,11898 | 0,12187 | 83 |
| 7 | 0,12187 | 0,12476 | 0,12764 | 0,13053 | 0,13341 | 0,13629 | 0,13917 | 82 |
| 8 | 0,13917 | 0,14205 | 0,14493 | 0,14781 | 0,15069 | 0,15356 | 0,15643 | 81 |
| 9 | 0,15643 | 0,15931 | 0,16218 | 0,16505 | 0,16792 | 0,17078 | 0,17365 | 80 |
| 10 | 0,17365 | 0,17651 | 0,17937 | 0,18224 | 0,18509 | 0,18795 | 0,19081 | 79 |
| 11 | 0,19081 | 0,19366 | 0,19625 | 0,19937 | 0,20222 | 0,20507 | 0,20791 | 78 |
| 12 | 0,20791 | 0,21076 | 0,21360 | 0,21644 | 0,21928 | 0,22212 | 0,22495 | 77 |
| 13 | 0,22495 | 0,22778 | 0,23062 | 0,23345 | 0,23627 | 0,23910 | 0,24192 | 76 |
| 14 | 0,24192 | 0,24474 | 0,24756 | 0,25038 | 0,25320 | 0,25601 | 0,25882 | 75 |
| 15 | 0,25882 | 0,26163 | 0,26443 | 0,26724 | 0,27004 | 0,27284 | 0,27564 | 74 |
| 16 | 0,27564 | 0,27843 | 0,28123 | 0,28402 | 0,28680 | 0,28959 | 0,29237 | 73 |
| 17 | 0,29237 | 0,29515 | 0 29793 | 0,30071 | 0,30348 | 0,30625 | 0,30902 | 72 |
| 18 | 0,30902 | 0,31178 | 0,31454 | 0,31730 | 0,32006 | 0,32282 | 0,32557 | 71 |
| 19 | 0,32557 | 0,32832 | 0,33106 | 0,33381 | 0,33655 | 0,33929 | 0,34202 | 70 |
| 20 | 0,34202 | 0,34475 | 0,34748 | 0,35021 | 0,35293 | 0,35565 | 0,35837 | 69 |
| 21 | 0,35837 | 0,36108 | 0,36379 | 0,36650 | 0,36921 | 0,37191 | 0,37461 | 68 |
| 22 | 0,37461 | 0,37730 | 0,37999 | 0,38268 | 0,38537 | 0,38805 | 0,39073 | 67 |
| 23 | 0,39073 | 0,39341 | 0,39608 | 0,39875 | 0,40141 | 0,40408 | 0,40674 | 66 |
| 24 | 0,40674 | 0,40939 | 0,41204 | 0,41469 | 0,41734 | 0,41998 | 0,42262 | 65 |
| 25 | 0,42262 | 0,42525 | 0,42788 | 0,43051 | 0,43313 | 0,43575 | 0,43837 | 64 |
| 26 | 0,43837 | 0,44098 | 0,44359 | 0,44620 | 0,44880 | 0,45140 | 0,45399 | 63 |
| 27 | 0,45399 | 0,45658 | 0,45917 | 0,46175 | 0,46433 | 0,46690 | 0,46947 | 62 |
| 28 | 0,46947 | 0,47204 | 0,47460 | 0,47716 | 0,47971 | 0,48226 | 0,48481 | 61 |
| 29 | 0,48481 | 0,48735 | 0,48989 | 0,49242 | 0,49495 | 0,49748 | 0,50000 | 60 |
| 30 | 0,50000 | 0,50252 | 0,50503 | 0,50754 | 0,51004 | 0,51254 | 0,51504 | 59 |
| 31 | 0,51504 | 0,51753 | 0,52002 | 0,52250 | 0,52498 | 0,52745 | 0,52992 | 58 |
| 32 | 0,52992 | 0,53238 | 0,53484 | 0,53730 | 0,53975 | 0,54220 | 0,54464 | 57 |
| 33 | 0,54464 | 0,54708 | 0,54951 | 0,55194 | 0,55436 | 0,55678 | 0,55919 | 56 |
| 34 | 0,55919 | 0,56160 | 0,56401 | 0,56641 | 0,56880 | 0 57119 | 0,57358 | 55 |
| 35 | 0,57358 | 0,57596 | 0,57833 | 0,58070 | 0,58307 | 0,58543 | 0,58779 | 54 |
| 36 | 0,58779 | 0,59014 | 0,59248 | 0,59482 | 0,59716 | 0,59949 | 0,60182 | 53 |
| 37 | 0,60182 | 0,60414 | 0,60645 | 0,60876 | 0,61107 | 0,61337 | 0,61566 | 52 |
| 38 | 0,61566 | 0,61795 | 0,62024 | 0,62251 | 0,62479 | 0,62706 | 0,62932 | 51 |
| 39 | 0,62932 | 0,63158 | 0,63383 | 0,63608 | 0,63832 | 0,64056 | 0,64279 | 50 |
| 40 | 0,64279 | 0,64501 | 0,64723 | 0,64945 | 0,65166 | 0,65386 | 0,65606 | 49 |
| 41 | 0,65606 | 0,65825 | 0,66044 | 0,66262 | 0,66480 | 0,66697 | 0,66913 | 48 |
| 42 | 0,66913 | 0,67129 | 0,67344 | 0,67559 | 0,67773 | 0,67987 | 0,68200 | 47 |
| 43 | 0,68200 | 0,68412 | 0,68624 | 0,68835 | 0,69046 | 0,69256 | 0,69466 | 46 |
| 44 | 0,69466 | 0,69675 | 0,69883 | 0,70091 | 0,70298 | 0,70505 | 0,70711 | 45 |
| | 60' | 50' | 40' | 30' | 20' | 10' | 0' | |
| | Cosinus | | | | | | | |

| Град. | Cosinus 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | Град. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00000 | 1,00000 | 0,99998 | 0,99996 | 0,99993 | 0,99989 | 0,99985 | 89 |
| 1 | 0,99985 | 0,99979 | 0,99973 | 0,99966 | 0,99958 | 0,99949 | 0,99939 | 88 |
| 2 | 0,99939 | 0,99929 | 0,99917 | 0,99905 | 0,99892 | 0,99878 | 0,99863 | 87 |
| 3 | 0,99863 | 0,99847 | 0,99831 | 0,99813 | 0,99795 | 0,99776 | 0,99756 | 86 |
| 4 | 0,99756 | 0,99736 | 0,99714 | 0,99692 | 0,99668 | 0,99644 | 0,99619 | 85 |
| 5 | 0,99619 | 0,99594 | 0,99567 | 0,99540 | 0,99511 | 0,99482 | 0,99452 | 84 |
| 6 | 0,99452 | 0,99421 | 0,99390 | 0,99357 | 0,99324 | 0,99290 | 0,99255 | 83 |
| 7 | 0,99255 | 0,99219 | 0,99182 | 0,99144 | 0,99106 | 0,99067 | 0,99027 | 82 |
| 8 | 0,99027 | 0,98986 | 0,98944 | 0,98902 | 0,98858 | 0,98814 | 0,98769 | 81 |
| 9 | 0,98769 | 0,98723 | 0,98676 | 0,98629 | 0,98580 | 0,98531 | 0,98481 | 80 |
| 10 | 0,98481 | 0,98430 | 0,98378 | 0,98325 | 0,98272 | 0,98218 | 0,98163 | 79 |
| 11 | 0,98163 | 0,98107 | 0,98050 | 0,97992 | 0,97934 | 0,97875 | 0,97815 | 78 |
| 12 | 0,97815 | 0,97754 | 0,97692 | 0,97630 | 0,97566 | 0,97502 | 0,97437 | 77 |
| 13 | 0,97437 | 0,97371 | 0,97304 | 0,97237 | 0,97169 | 0,97100 | 0,97030 | 76 |
| 14 | 0,97030 | 0,96959 | 0,96887 | 0,96815 | 0,96742 | 0,96667 | 0,96593 | 75 |
| 15 | 0,96593 | 0,96517 | 0,96440 | 0,96363 | 0,96285 | 0,96206 | 0,96126 | 74 |
| 16 | 0,96126 | 0,96046 | 0,95964 | 0,95882 | 0,95799 | 0,95715 | 0,95630 | 73 |
| 17 | 0,95630 | 0,95545 | 0,95459 | 0,95372 | 0,95284 | 0,95195 | 0,95106 | 72 |
| 18 | 0,95106 | 0,95015 | 0,94924 | 0,94832 | 0,94740 | 0,94646 | 0,94552 | 71 |
| 19 | 0,94552 | 0,94457 | 0,94361 | 0,94264 | 0,94167 | 0,94068 | 0,93969 | 70 |
| 20 | 0,93969 | 0,93869 | 0,93769 | 0,93667 | 0,93565 | 0,93462 | 0,93358 | 69 |
| 21 | 0,93358 | 0,93253 | 0,93148 | 0,93042 | 0,92935 | 0,92827 | 0,92718 | 68 |
| 22 | 0,92718 | 0,92609 | 0,92499 | 0,92388 | 0,92276 | 0,92164 | 0,92050 | 67 |
| 23 | 0,92050 | 0,91936 | 0,91822 | 0,91706 | 0,91590 | 0,91472 | 0,91355 | 66 |
| 24 | 0,91355 | 0,91236 | 0,91116 | 0,90996 | 0,90875 | 0,90753 | 0,90631 | 65 |
| 25 | 0,90631 | 0,90507 | 0,90383 | 0,90259 | 0,90133 | 0,90007 | 0,89879 | 64 |
| 26 | 0,89879 | 0,89752 | 0,89623 | 0,89493 | 0,89363 | 0,89232 | 0,89101 | 63 |
| 27 | 0,89101 | 0,88968 | 0,88835 | 0,88701 | 0,88566 | 0,88431 | 0,88295 | 62 |
| 28 | 0,88295 | 0,88158 | 0,88020 | 0,87882 | 0,87743 | 0,87603 | 0,87462 | 61 |
| 29 | 0,87462 | 0,87321 | 0,87178 | 0,87036 | 0,86892 | 0,86748 | 0,86603 | 60 |
| 30 | 0,86603 | 0,86457 | 0,86310 | 0,86163 | 0,86015 | 0,85866 | 0,85717 | 59 |
| 31 | 0,85717 | 0,85567 | 0,85416 | 0,85264 | 0,85112 | 0,84959 | 0,84805 | 58 |
| 32 | 0,84805 | 0,84650 | 0,84495 | 0,84339 | 0,84182 | 0,84025 | 0,83867 | 57 |
| 33 | 0,83867 | 0,83708 | 0,83549 | 0,83389 | 0,83228 | 0,83066 | 0,82904 | 56 |
| 34 | 0,82904 | 0,82741 | 0,82577 | 0,82413 | 0,82248 | 0,82082 | 0,81915 | 55 |
| 35 | 0,81915 | 0,81748 | 0,81580 | 0,81412 | 0,81242 | 0,81072 | 0,80902 | 54 |
| 36 | 0,80902 | 0,80730 | 0,80558 | 0,80386 | 0,80212 | 0,80038 | 0,79864 | 53 |
| 37 | 0,79864 | 0,79688 | 0,79512 | 0,79335 | 0,79158 | 0,78980 | 0,78801 | 52 |
| 38 | 0,78801 | 0,78622 | 0,78442 | 0,78261 | 0,78079 | 0,77897 | 0,77715 | 51 |
| 39 | 0,77715 | 0,77531 | 0,77347 | 0,77162 | 0,76977 | 0,76791 | 0,76604 | 50 |
| 40 | 0,76604 | 0,76417 | 0,76229 | 0,76041 | 0,75851 | 0,75661 | 0,75471 | 49 |
| 41 | 0,75471 | 0,75280 | 0,75088 | 0,74896 | 0,74703 | 0,74509 | 0,74314 | 48 |
| 42 | 0,74314 | 0,74120 | 0,73924 | 0,73728 | 0,73531 | 0,73333 | 0,73135 | 47 |
| 43 | 0,73135 | 0,72937 | 0,72737 | 0,72537 | 0,72337 | 0,72136 | 0,71934 | 46 |
| 44 | 0,71934 | 0,71732 | 0,71529 | 0,71325 | 0,71121 | 0,70916 | 0,70711 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | |

Sinus

| Град. | Tangens | | | | | | | Град. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0' | 10' | 20' | 30' | 40' | 50' | 60' | |
| 0 | 0,00000 | 0,00291 | 0,00582 | 0,00873 | 0,01164 | 0,01455 | 0,01746 | 89 |
| 1 | 0,01746 | 0,02036 | 0,02328 | 0,02619 | 0,02910 | 0,03201 | 0,03492 | 88 |
| 2 | 0,03492 | 0,03783 | 0,04075 | 0,04366 | 0,04658 | 0,04949 | 0,05241 | 87 |
| 3 | 0,05241 | 0,05533 | 0,05824 | 0,06116 | 0,06408 | 0,06700 | 0,06993 | 86 |
| 4 | 0,06993 | 0,07285 | 0,07578 | 0,07870 | 0,08163 | 0,08456 | 0,08749 | 85 |
| 5 | 0,08749 | 0,09042 | 0,09335 | 0,09629 | 0,09923 | 0,10216 | 0,10510 | 84 |
| 6 | 0,10510 | 0,10805 | 0,11099 | 0,11394 | 0,11688 | 0,11983 | 0,12278 | 83 |
| 7 | 0,12278 | 0,12574 | 0,12869 | 0,13165 | 0,13461 | 0,13758 | 0,14054 | 82 |
| 8 | 0,14054 | 0,14351 | 0,14648 | 0,14945 | 0,15243 | 0,15540 | 0,15838 | 81 |
| 9 | 0,15838 | 0,16137 | 0,16435 | 0,16734 | 0,17033 | 0,17333 | 0,17633 | 80 |
| 10 | 0,17633 | 0,17933 | 0,18233 | 0,18534 | 0,18835 | 0,19136 | 0,19438 | 79 |
| 11 | 0,19438 | 0,19740 | 0,20042 | 0,20345 | 0,20648 | 0,20952 | 0,21256 | 78 |
| 12 | 0,21256 | 0,21560 | 0,21864 | 0,22169 | 0,22475 | 0,22781 | 0,23087 | 77 |
| 13 | 0,23087 | 0,23393 | 0,23700 | 0,24008 | 0,24316 | 0,24624 | 0,24933 | 76 |
| 14 | 0,24933 | 0,25242 | 0,25552 | 0,25862 | 0,26172 | 0,26483 | 0,26795 | 75 |
| 15 | 0,26795 | 0,27107 | 0,27419 | 0,27732 | 0,28046 | 0,28360 | 0,28675 | 74 |
| 16 | 0,28675 | 0,28990 | 0,29305 | 0,29621 | 0,29938 | 0,30255 | 0,30573 | 73 |
| 17 | 0,30573 | 0,30891 | 0,31210 | 0,31530 | 0,31850 | 0,32171 | 0,32492 | 72 |
| 18 | 0,32492 | 0,32814 | 0,33136 | 0,33460 | 0,33783 | 0,34108 | 0,34433 | 71 |
| 19 | 0,34433 | 0,34758 | 0,35085 | 0,35412 | 0,35740 | 0,36068 | 0,36397 | 70 |
| 20 | 0,36397 | 0,36727 | 0,37057 | 0,37388 | 0,37720 | 0,38053 | 0,38386 | 69 |
| 21 | 0,38386 | 0,38721 | 0,39055 | 0,39391 | 0,39727 | 0,40065 | 0,40403 | 68 |
| 22 | 0,40403 | 0,40741 | 0,41081 | 0,41421 | 0,41763 | 0,42105 | 0,42447 | 67 |
| 23 | 0,42447 | 0,42791 | 0,43136 | 0,43481 | 0,43828 | 0,44175 | 0,44523 | 66 |
| 24 | 0,44523 | 0,44872 | 0,45222 | 0,45573 | 0,45924 | 0,46277 | 0,46631 | 65 |
| 25 | 0,46631 | 0,46985 | 0,47341 | 0,47698 | 0,48055 | 0,48414 | 0,48773 | 64 |
| 26 | 0,48773 | 0,49134 | 0,49495 | 0,49858 | 0,50222 | 0,50587 | 0,50953 | 63 |
| 27 | 0,50953 | 0,51319 | 0,51688 | 0,52057 | 0,52427 | 0,52798 | 0,53171 | 62 |
| 28 | 0,53171 | 0,53545 | 0,53920 | 0,54296 | 0,54673 | 0,55051 | 0,55431 | 61 |
| 29 | 0,55431 | 0,55812 | 0,56194 | 0,56577 | 0,56962 | 0,57348 | 0,57735 | 60 |
| 30 | 0,57735 | 0,58124 | 0,58513 | 0,58905 | 0,59297 | 0,59691 | 0,60086 | 59 |
| 31 | 0,60086 | 0,60483 | 0,60881 | 0,61280 | 0,61681 | 0,62083 | 0,62487 | 58 |
| 32 | 0,62487 | 0,62892 | 0,63299 | 0,63707 | 0,64117 | 0,64528 | 0,64941 | 57 |
| 33 | 0,64941 | 0,65355 | 0,65771 | 0,66189 | 0,66608 | 0,67028 | 0,67451 | 56 |
| 34 | 0,67451 | 0,67875 | 0,68301 | 0,68728 | 0,69157 | 0,69588 | 0,70021 | 55 |
| 35 | 0,70021 | 0,70455 | 0,70891 | 0,71329 | 0,71769 | 0,72211 | 0,72654 | 54 |
| 36 | 0,72654 | 0,73100 | 0,73547 | 0,73996 | 0,74447 | 0,74900 | 0,75355 | 53 |
| 37 | 0,75355 | 0,75812 | 0,76272 | 0,76733 | 0,77196 | 0,77661 | 0,78129 | 52 |
| 38 | 0,78129 | 0,78598 | 0,79070 | 0,79544 | 0,80020 | 0,80498 | 0,80978 | 51 |
| 39 | 0,80978 | 0,81461 | 0,81946 | 0,82434 | 0,82923 | 0,83415 | 0,83910 | 50 |
| 40 | 0,83910 | 0,84407 | 0,84906 | 0,85408 | 0,85912 | 0,86419 | 0,86929 | 49 |
| 41 | 0,86929 | 0,87441 | 0,87955 | 0,88473 | 0,88992 | 0,89515 | 0,90040 | 48 |
| 42 | 0,90040 | 0,90569 | 0,91099 | 0,91633 | 0,92170 | 0,92709 | 0,93252 | 47 |
| 43 | 0,93252 | 0,93797 | 0,94345 | 0,94896 | 0,95451 | 0,96008 | 0,96569 | 46 |
| 44 | 0,96569 | 0.97133 | 0,97700 | 0,98270 | 0,98843 | 0,99420 | 1,00000 | 45 |
| | 60' | 50 | 40' | 30' | 20' | 10' | 0' | |
| | Cotangens | | | | | | | |

| Град. | Cotangens 0′ | 10′ | 20′ | 30′ | 40′ | 50′ | 60′ | Град. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ∞ | 343,77371 | 171,88540 | 114 58865 | 85,93979 | 68,75009 | 57,28996 | 89 |
| 1 | 57,28996 | 49,10388 | 42,96408 | 38,18846 | 34,36777 | 31,24158 | 28,63625 | 88 |
| 2 | 28,63625 | 26,43160 | 24,54176 | 22,90377 | 21,47040 | 20,20555 | 19,08114 | 87 |
| 3 | 19,08114 | 18,07498 | 17,16934 | 16,34986 | 15,60478 | 14,92442 | 14,30067 | 86 |
| 4 | 14,30067 | 13,72674 | 13,19688 | 12,70621 | 12,25051 | 11,82617 | 11,43005 | 85 |
| 5 | 11,43005 | 11,05943 | 10,71191 | 10,38540 | 10,07803 | 9,78817 | 9,51436 | 84 |
| 6 | 9,51436 | 9,25530 | 9,00983 | 8,77689 | 8,55555 | 8,34496 | 8,14435 | 83 |
| 7 | 8,14435 | 7,95302 | 7,77035 | 7,59575 | 7,42871 | 7,26873 | 7,11537 | 82 |
| 8 | 7,11537 | 6,96823 | 6,82694 | 6,69116 | 6,56055 | 6,43484 | 6,31375 | 81 |
| 9 | 6,31375 | 6,19703 | 6,08444 | 5,97576 | 5,87080 | 5,76937 | 5,67128 | 80 |
| 10 | 5,67128 | 5,57638 | 5,48451 | 5,39552 | 5,30928 | 5,22566 | 5,14455 | 79 |
| 11 | 5,14455 | 5,06584 | 4,98940 | 4,91516 | 4,84300 | 4,77286 | 4,70463 | 78 |
| 12 | 4,70463 | 4,63825 | 4,57363 | 4,51071 | 4,44942 | 4,38969 | 4,33148 | 77 |
| 13 | 4,33148 | 4,27471 | 4,21933 | 4,16530 | 4,11256 | 4,06107 | 4,01078 | 76 |
| 14 | 4,01078 | 3,96165 | 3,91364 | 3,86671 | 3,82083 | 3,77595 | 3,73205 | 75 |
| 15 | 3,73205 | 3,68909 | 3,64705 | 3,60588 | 3,56557 | 3,52609 | 3,48741 | 74 |
| 16 | 3,48741 | 3,44951 | 3,41236 | 3,37594 | 3,34023 | 3,30521 | 3,27085 | 73 |
| 17 | 3,27085 | 3,23714 | 3,20406 | 3,17159 | 3,13972 | 3,10842 | 3,07768 | 72 |
| 18 | 3,07768 | 3,04749 | 3,01783 | 2,98869 | 2,96004 | 2,93189 | 2,90421 | 71 |
| 19 | 2,90421 | 2,87700 | 2,85023 | 2,82391 | 2,79802 | 2,77254 | 2,74748 | 70 |
| 20 | 2,74748 | 2,72281 | 2,69853 | 2,67462 | 2,65109 | 2,62791 | 2,60509 | 69 |
| 21 | 2,60509 | 2,58261 | 2,56046 | 2,53865 | 2,51715 | 2,49597 | 2,47509 | 68 |
| 22 | 2,47509 | 2,45451 | 2,43422 | 2,41421 | 2,39449 | 2,37504 | 2,35585 | 67 |
| 23 | 2,35585 | 2,33693 | 2,31826 | 2,29984 | 2,28167 | 2,26374 | 2,24604 | 66 |
| 24 | 2,24604 | 2,22857 | 2,21132 | 2,19430 | 2,17749 | 2,16090 | 2,14451 | 65 |
| 25 | 2,14451 | 2,12832 | 2,11233 | 2,09654 | 2,08094 | 2,06553 | 2,05030 | 64 |
| 26 | 2,05030 | 2,03526 | 2,02039 | 2,00569 | 1,99116 | 1,97680 | 1,96261 | 63 |
| 27 | 1,96261 | 1,94858 | 1,93470 | 1,92098 | 1,90741 | 1,89400 | 1,88073 | 62 |
| 28 | 1,88073 | 1,86760 | 1,85462 | 1,84177 | 1,82906 | 1,81649 | 1,80405 | 61 |
| 29 | 1,80405 | 1,79174 | 1,77955 | 1,76749 | 1,75556 | 1,74375 | 1,73205 | 60 |
| 30 | 1,73205 | 1,72047 | 1,70901 | 1,69766 | 1,68643 | 1,67530 | 1,66428 | 59 |
| 31 | 1,66428 | 1,65337 | 1,64256 | 1,63185 | 1,62125 | 1,61074 | 1,60033 | 58 |
| 32 | 1,60033 | 1,59002 | 1,57981 | 1,56969 | 1,55966 | 1,54972 | 1,53987 | 57 |
| 33 | 1,53987 | 1,53010 | 1,52043 | 1,51084 | 1,50133 | 1,49190 | 1,48256 | 56 |
| 34 | 1,48256 | 1,47330 | 1,46411 | 1,45501 | 1,44598 | 1,43703 | 1,42815 | 55 |
| 35 | 1,42815 | 1,41934 | 1,41061 | 1,40195 | 1,39336 | 1,38484 | 1,37638 | 54 |
| 36 | 1,37638 | 1,36800 | 1,35968 | 1,35142 | 1,34323 | 1,33511 | 1,32704 | 53 |
| 37 | 1,32704 | 1,31904 | 1,31110 | 1,30323 | 1,29541 | 1,28764 | 1,27994 | 52 |
| 38 | 1,27994 | 1,27230 | 1,26471 | 1,25717 | 1,24969 | 1,24227 | 1,23490 | 51 |
| 39 | 1,23490 | 1,22758 | 1,22031 | 1,21310 | 1,20593 | 1,19882 | 1,19175 | 50 |
| 40 | 1,19175 | 1,18474 | 1,17777 | 1,17085 | 1,16398 | 1,15715 | 1,15037 | 49 |
| 41 | 1,15037 | 1,14363 | 1,13694 | 1,13029 | 1,12369 | 1,11713 | 1,11061 | 48 |
| 42 | 1,11061 | 1,10414 | 1,09770 | 1,09131 | 1,08496 | 1,07864 | 1,07237 | 47 |
| 43 | 1,07237 | 1,06613 | 1,05994 | 1,05378 | 1,04766 | 1,04158 | 1,03553 | 46 |
| 44 | 1,03553 | 1,02952 | 1,02355 | 1,01761 | 1,01170 | 1,00583 | 1,00000 | 45 |
| | 60′ | 50′ | 40′ | 30′ | 20′ | 10′ | 0′ | |
| | Tangens. | | | | | | | |

## ТАБЛИЦА V.

## Логариѳмы чиселъ отъ 1 до 1200.

| Числа. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 00000 | 04139 | 07918 | 11394 | 14613 | 17609 | 20412 | 23045 | 25527 | 27875 | 2228 |
| 2 | 30103 | 32222 | 34242 | 36173 | 38021 | 39794 | 41497 | 43136 | 44716 | 46240 | 1472 |
| 3 | 47712 | 49136 | 50515 | 51851 | 53148 | 54407 | 55630 | 56820 | 57978 | 59106 | 1100 |
| 4 | 60206 | 61278 | 62325 | 63347 | 64345 | 65321 | 66276 | 67210 | 68124 | 69020 | 877 |
| 5 | 69897 | 70757 | 71600 | 72428 | 73239 | 74036 | 74819 | 75587 | 76343 | 77085 | 730 |
| 6 | 77815 | 78533 | 79239 | 79934 | 80618 | 81291 | 81954 | 82607 | 83251 | 83885 | 625 |
| 7 | 84510 | 85126 | 85733 | 86332 | 86923 | 87506 | 88081 | 88649 | 80209 | 89763 | 546 |
| 8 | 90309 | 90849 | 91381 | 91908 | 92428 | 92942 | 93450 | 93952 | 94448 | 94939 | 485 |
| 9 | 95424 | 95904 | 96379 | 96848 | 97313 | 97772 | 98227 | 98677 | 99123 | 99564 | 436 |
| 10 | 00000 | 00432 | 00860 | 01284 | 01703 | 02119 | 02531 | 02938 | 03342 | 03743 | 396 |
| 11 | 04139 | 04532 | 04922 | 05308 | 05690 | 06070 | 06446 | 06819 | 07188 | 07555 | 363 |
| 12 | 07918 | 08279 | 08636 | 08991 | 09342 | 09691 | 10037 | 10380 | 10721 | 11059 | 335 |
| 13 | 11394 | 11727 | 12057 | 12385 | 12710 | 13033 | 13354 | 13672 | 13988 | 14301 | 312 |
| 14 | 14613 | 14922 | 15229 | 15534 | 15836 | 16137 | 16435 | 16732 | 17026 | 17319 | 290 |
| 15 | 17609 | 17898 | 18184 | 18469 | 18752 | 19033 | 19312 | 19590 | 19866 | 20140 | 272 |
| 16 | 20412 | 20683 | 20952 | 21219 | 21484 | 21748 | 22011 | 22272 | 22531 | 22789 | 256 |
| 17 | 23045 | 23300 | 23553 | 23805 | 24055 | 24304 | 24551 | 24797 | 25042 | 25285 | 242 |
| 18 | 25527 | 25768 | 26007 | 26245 | 26482 | 26717 | 26951 | 27184 | 27416 | 27646 | 229 |
| 19 | 27875 | 28103 | 28330 | 28556 | 28780 | 29003 | 29226 | 29447 | 29667 | 29885 | 218 |
| 20 | 30103 | 30320 | 30535 | 30750 | 30963 | 31175 | 31387 | 31597 | 31806 | 32015 | 207 |
| 21 | 32222 | 32428 | 32634 | 32838 | 33041 | 33244 | 33445 | 33646 | 33846 | 34044 | 198 |
| 22 | 34242 | 34439 | 34635 | 34830 | 35025 | 35218 | 35411 | 35603 | 35793 | 35984 | 189 |
| 23 | 36173 | 36361 | 36549 | 36736 | 36922 | 37107 | 37291 | 37475 | 37658 | 37840 | 181 |
| 24 | 38021 | 38202 | 38382 | 38561 | 38739 | 38917 | 39094 | 39270 | 39445 | 39620 | 174 |
| 25 | 39794 | 39967 | 40140 | 40312 | 40483 | 40654 | 40824 | 40993 | 41162 | 41330 | 167 |
| 26 | 41497 | 41664 | 41830 | 41996 | 42160 | 42325 | 42488 | 42651 | 42813 | 42975 | 161 |
| 27 | 43136 | 43297 | 43457 | 43616 | 43775 | 43933 | 44091 | 44248 | 44404 | 44560 | 156 |
| 28 | 44716 | 44871 | 45025 | 45179 | 45332 | 45484 | 45637 | 45788 | 45939 | 46090 | 150 |
| 29 | 46240 | 46389 | 46538 | 46687 | 46835 | 46982 | 47129 | 47276 | 47422 | 47567 | 145 |
| 30 | 47712 | 47857 | 48001 | 48144 | 48287 | 48430 | 48572 | 48714 | 48855 | 48996 | 140 |
| 31 | 49136 | 49276 | 49415 | 49554 | 49693 | 49831 | 49969 | 50106 | 50243 | 50379 | 136 |
| 32 | 50515 | 50651 | 50786 | 50920 | 51055 | 51188 | 51322 | 51455 | 51587 | 51720 | 132 |
| 33 | 51851 | 51983 | 52114 | 52244 | 52375 | 52504 | 52634 | 52763 | 52892 | 53020 | 128 |
| 34 | 53148 | 53275 | 53403 | 53529 | 53656 | 53782 | 53908 | 54033 | 54158 | 54283 | 124 |
| 35 | 54407 | 54531 | 54654 | 54777 | 54900 | 55023 | 55145 | 55267 | 55388 | 55509 | 121 |
| 36 | 55630 | 55751 | 55871 | 55991 | 56110 | 56229 | 56348 | 56467 | 56585 | 56703 | 117 |
| 37 | 56820 | 56937 | 57054 | 57171 | 57287 | 57403 | 57519 | 57634 | 57749 | 57864 | 114 |
| 38 | 57978 | 58092 | 58206 | 58320 | 58433 | 58546 | 58659 | 58771 | 58883 | 58995 | 111 |
| 39 | 59106 | 59218 | 59329 | 59439 | 59550 | 59660 | 59770 | 59879 | 59988 | 60097 | 109 |
| 40 | 60206 | 60314 | 60423 | 60531 | 60638 | 60746 | 60853 | 60959 | 61066 | 61172 | 106 |
| 41 | 61278 | 61384 | 61490 | 61595 | 61700 | 61805 | 61909 | 62014 | 62118 | 62221 | 104 |
| 42 | 62325 | 62428 | 62531 | 62634 | 62737 | 62839 | 62941 | 63043 | 63144 | 63246 | 101 |
| 43 | 63347 | 63448 | 63548 | 63649 | 63749 | 63849 | 63949 | 64048 | 64147 | 64246 | 99 |
| 44 | 64345 | 64444 | 64542 | 64640 | 64738 | 64836 | 64933 | 65031 | 65128 | 65225 | 97 |
| Числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |

| Числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 65321 | 65418 | 65514 | 65610 | 65706 | 65801 | 65896 | 65992 | 66087 | 66181 | 95 |
| 46 | 66276 | 66370 | 66464 | 66558 | 66652 | 66745 | 66839 | 66932 | 67025 | 67117 | 93 |
| 47 | 67210 | 67302 | 67394 | 67486 | 67578 | 67669 | 67761 | 67852 | 67943 | 68034 | 90 |
| 48 | 68124 | 68215 | 68305 | 68395 | 68485 | 68574 | 68664 | 68753 | 68842 | 68931 | 89 |
| 49 | 69020 | 69108 | 69197 | 69285 | 69373 | 69461 | 69548 | 69636 | 69723 | 69810 | 87 |
| 50 | 69897 | 69984 | 70070 | 70157 | 70243 | 70329 | 70415 | 70501 | 70586 | 70672 | 86 |
| 51 | 70757 | 70842 | 70927 | 71012 | 71096 | 71181 | 71265 | 71349 | 71433 | 71517 | 84 |
| 52 | 71600 | 71684 | 71767 | 71850 | 71933 | 72016 | 72099 | 72181 | 72263 | 72346 | 83 |
| 53 | 72428 | 72509 | 72591 | 72673 | 72754 | 72835 | 72916 | 72997 | 73078 | 73159 | 81 |
| 54 | 73239 | 73320 | 73400 | 73480 | 73560 | 73640 | 73719 | 73799 | 73878 | 73957 | 80 |
| 55 | 74036 | 74115 | 74194 | 74273 | 74351 | 74429 | 74507 | 74586 | 74663 | 74741 | 78 |
| 56 | 74819 | 74896 | 74974 | 75051 | 75128 | 75205 | 75282 | 75358 | 75435 | 75511 | 77 |
| 57 | 75587 | 75664 | 75740 | 75815 | 75891 | 75967 | 76042 | 76118 | 76193 | 76268 | 76 |
| 58 | 76343 | 76418 | 76492 | 76567 | 76641 | 76716 | 76790 | 76864 | 76938 | 77012 | 74 |
| 59 | 77085 | 77159 | 77232 | 77305 | 77379 | 77452 | 77525 | 77597 | 77670 | 77743 | 73 |
| 60 | 77815 | 77887 | 77960 | 78032 | 78104 | 78176 | 78247 | 78319 | 78390 | 78462 | 72 |
| 61 | 78533 | 78604 | 78675 | 78746 | 78817 | 78888 | 78958 | 79029 | 79099 | 79169 | 71 |
| 62 | 79239 | 79309 | 79379 | 79449 | 79518 | 79588 | 79657 | 79727 | 79796 | 79865 | 69 |
| 63 | 79934 | 80003 | 80072 | 80140 | 80209 | 80277 | 80346 | 80414 | 80482 | 80550 | 68 |
| 64 | 80618 | 80686 | 80754 | 80821 | 80889 | 80956 | 81023 | 81090 | 81158 | 81224 | 67 |
| 65 | 81291 | 81358 | 81425 | 81491 | 81558 | 81624 | 81690 | 81757 | 81823 | 81889 | 66 |
| 66 | 81954 | 82020 | 82086 | 82151 | 82217 | 82282 | 82347 | 82413 | 82478 | 82543 | 65 |
| 67 | 82607 | 82672 | 82737 | 82802 | 82866 | 82930 | 82995 | 83059 | 83123 | 83187 | 64 |
| 68 | 83251 | 83315 | 83378 | 83442 | 83506 | 83569 | 83632 | 83696 | 83759 | 83822 | 63 |
| 69 | 83885 | 83948 | 84011 | 84073 | 84136 | 84198 | 84261 | 84323 | 84386 | 84448 | 63 |
| 70 | 84510 | 84572 | 84634 | 84696 | 84757 | 84819 | 84880 | 84942 | 85003 | 85065 | 62 |
| 71 | 85126 | 85187 | 85248 | 85309 | 85370 | 85431 | 85491 | 85552 | 85612 | 85673 | 61 |
| 72 | 85733 | 85794 | 85854 | 85914 | 85974 | 86034 | 86094 | 86153 | 86213 | 86273 | 60 |
| 73 | 86332 | 86392 | 86451 | 86510 | 86570 | 86629 | 86688 | 86747 | 86806 | 86864 | 59 |
| 74 | 86923 | 86982 | 87040 | 87099 | 87157 | 87216 | 87274 | 87332 | 87390 | 87448 | 58 |
| 75 | 87506 | 87564 | 87622 | 87679 | 87737 | 87795 | 87852 | 87910 | 87967 | 88024 | 58 |
| 76 | 88081 | 88138 | 88195 | 88252 | 88309 | 88366 | 88423 | 88480 | 88536 | 88593 | 57 |
| 77 | 88649 | 88705 | 88762 | 88818 | 88874 | 88930 | 88986 | 89042 | 89098 | 89154 | 56 |
| 78 | 89209 | 89265 | 89321 | 89376 | 89432 | 89487 | 89542 | 89597 | 89653 | 89708 | 55 |
| 79 | 89763 | 89818 | 89873 | 89927 | 89982 | 90037 | 90091 | 90146 | 90200 | 90255 | 55 |
| 80 | 90309 | 90363 | 90417 | 90472 | 90526 | 90580 | 90634 | 90687 | 90741 | 90795 | 54 |
| 81 | 90849 | 90902 | 90956 | 91009 | 91062 | 91116 | 91169 | 91222 | 91275 | 91328 | 53 |
| 82 | 91381 | 91434 | 91487 | 91540 | 91593 | 91645 | 91698 | 91751 | 91803 | 91855 | 52 |
| 83 | 91908 | 91960 | 92012 | 92065 | 92117 | 92169 | 92221 | 92273 | 92324 | 92376 | 52 |
| 84 | 92428 | 92480 | 92531 | 92583 | 92634 | 92686 | 92737 | 92788 | 92840 | 92891 | 51 |
| 85 | 92942 | 92993 | 93044 | 93095 | 93146 | 93197 | 93247 | 93298 | 93349 | 93399 | 51 |
| 86 | 93450 | 93500 | 93551 | 93601 | 93651 | 93702 | 93752 | 93802 | 93852 | 93902 | 50 |
| 87 | 93952 | 94002 | 94052 | 94101 | 94151 | 94201 | 94250 | 94300 | 94349 | 94399 | 50 |
| 88 | 94448 | 94498 | 94547 | 94596 | 94645 | 94694 | 94743 | 94792 | 94841 | 94890 | 49 |
| 89 | 94939 | 94988 | 95036 | 95085 | 95134 | 95182 | 95231 | 95279 | 95328 | 95376 | 49 |
| 90 | 95424 | 95472 | 95521 | 95569 | 95617 | 95665 | 95713 | 95761 | 95809 | 95856 | 48 |
| 91 | 95904 | 95952 | 95999 | 96047 | 96095 | 96142 | 96190 | 96237 | 96284 | 96332 | 47 |
| 92 | 96379 | 96426 | 96473 | 96520 | 96567 | 96614 | 96661 | 96708 | 96755 | 96802 | 47 |
| 93 | 96848 | 96895 | 96942 | 96988 | 97035 | 97081 | 97128 | 97174 | 97220 | 97267 | 46 |
| 94 | 97313 | 97359 | 97405 | 97451 | 97497 | 97543 | 97589 | 97635 | 97681 | 97727 | 46 |
| Числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |

| Числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 95 | 97772 | 97818 | 97864 | 97909 | 97955 | 98000 | 98046 | 98091 | 98137 | 98182 | 45 |
| 96 | 98227 | 98272 | 98318 | 98363 | 98408 | 98453 | 98498 | 98543 | 98588 | 98632 | 45 |
| 97 | 98677 | 98722 | 98767 | 98811 | 98856 | 98900 | 98945 | 98989 | 99034 | 99078 | 45 |
| 98 | 99123 | 99167 | 99211 | 99255 | 99300 | 99344 | 99388 | 99432 | 99476 | 99520 | 44 |
| 99 | 99564 | 99607 | 99651 | 99695 | 99739 | 99782 | 99826 | 99870 | 99913 | 99957 | 44 |
| 100 | 00000 | 00043 | 00087 | 00130 | 00173 | 00217 | 00260 | 00303 | 00346 | 00389 | 43 |
| 101 | 00432 | 00475 | 00518 | 00561 | 00604 | 00647 | 00689 | 00732 | 00775 | 00817 | 43 |
| 102 | 00860 | 00903 | 00945 | 00988 | 01030 | 01072 | 01115 | 01157 | 01199 | 01242 | 42 |
| 103 | 01284 | 01326 | 01368 | 01410 | 01452 | 01494 | 01536 | 01578 | 01620 | 01662 | 42 |
| 104 | 01703 | 01745 | 01787 | 01828 | 01870 | 01912 | 01953 | 01995 | 02036 | 02078 | 42 |
| 105 | 02119 | 02160 | 02202 | 02243 | 02284 | 02325 | 02366 | 02407 | 02449 | 02490 | 41 |
| 106 | 02531 | 02572 | 02612 | 02653 | 02694 | 02735 | 02776 | 02816 | 02857 | 02898 | 41 |
| 107 | 02938 | 02979 | 03019 | 03060 | 03100 | 03141 | 03181 | 03222 | 03262 | 03302 | 41 |
| 108 | 03342 | 03383 | 03423 | 03463 | 03503 | 03543 | 03583 | 03623 | 03663 | 03703 | 40 |
| 109 | 03743 | 03782 | 03822 | 03862 | 03902 | 03941 | 03981 | 04021 | 04060 | 04100 | 40 |
| 110 | 04139 | 04179 | 04218 | 04258 | 04297 | 04336 | 04376 | 04415 | 04454 | 04493 | 39 |
| 111 | 04532 | 04571 | 04610 | 04650 | 04689 | 04727 | 04766 | 04805 | 04844 | 04883 | 39 |
| 112 | 04922 | 04961 | 04999 | 05038 | 05077 | 05115 | 05154 | 05192 | 05231 | 05269 | 39 |
| 113 | 05308 | 05346 | 05385 | 05423 | 05461 | 05500 | 05538 | 05576 | 05614 | 05652 | 38 |
| 114 | 05690 | 05729 | 05767 | 05805 | 05843 | 05881 | 05918 | 05956 | 05994 | 06032 | 38 |
| 115 | 06070 | 06108 | 06145 | 06183 | 06221 | 06258 | 06296 | 06333 | 06371 | 06408 | 38 |
| 116 | 06446 | 06483 | 06521 | 06558 | 06595 | 06633 | 06670 | 06707 | 06744 | 06781 | 37 |
| 117 | 06819 | 06856 | 06893 | 06930 | 06967 | 07004 | 07041 | 07078 | 07115 | 07151 | 37 |
| 118 | 07188 | 07225 | 07262 | 07298 | 07335 | 07372 | 07408 | 07445 | 07482 | 07518 | 37 |
| 119 | 07555 | 07591 | 07628 | 07664 | 07700 | 07737 | 07773 | 07809 | 07846 | 07882 | 36 |
| Числа | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Разн. |

# Замѣченные опечатки и недосмотры.

| Стран. | Строка. Сверху. | Строка. Снизу. | Напечатано. | Слѣдуетъ читать. |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 4 | — | съ которымъ оно связано | съ которымъ она связана |
| 10 | — | 6 | (фиг. 7). | (фиг. 6). |
| 13 | 6 | — | параллелограмъ на | параллелограммъ на |
| 13 | 7 | — | движеніи AB пространства и относительномъ движеніи | движеніи AB пространства и движеніи |
| 14 | 1 и 2 | — | изъ построенія параллелограмма по дѣйствительной скорости лодки $W = AD$ и скорости теченія воды $C = AB_1 - AB_1CD$ | изъ построенія параллелограмма $AB_1CD$ по дѣйствительной скорости лодки $W = AD$ и скорости теченія воды $C = AB_1$ |
| 23 | — | 14 | напротинъ, получаются при | напротивъ, получаются при |
| 23 | — | 9 | $\alpha = \backsim 11^0 30'$ | $\alpha_{max} = \backsim 11^0 30'$ |
| 28 | 9 | — | заключаетъ въ себѣ слѣдующую | заключаетъ въ себѣ слѣдующее |
| 28 | — | 1 | видимая энергія тѣла. | способность производить работу. |
| 30 | 5 | — | можно принять $t = 0$ | можно принять $t_1 = 0$ |
| 31 | — | 9 | По уравненію 19), стр. 00: | По уравненію 19), стр. 26: |
| 32 | 14 | — | тѣло придетъ в овращеніе. | тѣло придетъ во вращеніе. |
| 33 | 5 | — | разсматривать за отрицательную. | разсматривать, какъ отрицательную. |
| 34 | — | 19 | илоскости, и R | плоскости, и R |
| 34 | — | 13 | такъ же равенъ суммѣ | также равенъ суммѣ |
| 37 | 8 | — | поступательпое движеніе | поступательное движеніе |
| 37 | — | 14 | Стремленіе однѣхъ силъ вращатъ тѣло | Стремленіе однѣхъ силъ вращать тѣло |
| 43 | 1 | — | силъ $P_1$ и $P_2$ | силъ $P_1$ и $P$ |
| 43 | 2 | — | отложимъ $AD = P_2$ | отложимъ $AD = P$ |
| 43 | 5 | — | $P_2$, такъ какъ изъ подобія | $P$, такъ какъ изъ подобія |
| 43 | 8 | — | $\frac{P_1}{P_2} = \frac{l_2}{l_1}$ | $\frac{P_1}{P} = \frac{l_2}{l}$ |
| 43 | — | 9 | $l_2 = 0{,}4\ l.$ | $l_2 = 0{,}4\ l_1.$ |
| 45 | — | 8 | и ниже точки точки опоры. | и ниже точки опоры. |
| 55 | 2 | — | $S_1D \parallel 2\ S_1E$ | $S_1D = 2\ S_1E$ |
| 55 | — | 12 | проводить цѣликомъ діагоналей; | проводить цѣликомъ діагонали; |
| 56 | 8 | — | F въ срединою | F съ срединою |
| 58 | 4 | — | лежитъ на линіи, дѣлящій | лежитъ на линіи, дѣлящей |
| 59 | 9 | — | $X_1 = \frac{\frac{bR}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{Rs}{b} - \frac{br^2}{2R}\cdot\frac{2}{3}\frac{rs}{6}}{\frac{b}{2}\cdot\frac{R^2\ r^2}{R}}$ | $X_1 = \frac{\frac{bR}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{Rs}{b} - \frac{br^2}{2R}\cdot\frac{2}{3}\frac{rs}{b}}{\frac{b}{2}\cdot\frac{R^2 - r^2}{R}}$ |

| Стран. | Строка. Сверху. | Строка. Снизу. | Напечатано. | Слѣдуетъ читать. |
|---|---|---|---|---|
| 69 | — | 12 | $P_1 = G \cdot \frac{BD}{AF}$ | $P_1 = G \cdot \frac{BD}{AB}$ |
| 70 | 8 | — | $P_1 l = Q_1 h_1 - Gb - Q_2 b_2 = 0.$ | $P_1 l = Q_1 b_1 - Gb - Q_2 b_2 = 0.$ |
| 82 | — | 15 | не грусныя измѣренія угловъ, | не градусныя измѣренія угловъ, |
| 87 | 6 | — | Для перваго вала: I: | Для вала I: |
| 87 | 7 | — | „ второго ;„ II: | „ „ II: |
| 87 | 8 | — | „ третьяго „ III: | „ „ III: |
| 87 | — | 10 | $= Q \frac{W}{R_1} \frac{r}{R_2} \frac{r_2}{R},$ | $= Q \frac{W}{R_1} \frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R},$ |
| 87 | — | 3 | $\frac{r_1}{R_2} \frac{r_2}{R_1}$ въ уравненіи 69) | $\frac{r_1}{R_1}, \frac{r_2}{R_2}$ въ уравненіи 69) |
| 88 | 17 | — | $\frac{PR}{Q} = \frac{32.40}{200} = 6{,}4$ сентим. | $W = \frac{PR}{Q} = \frac{32 . 40}{200} = 6{,}4$ сентим. |
| 93 | 6 | — | даже отлитныхъ изъ одного куска) | даже отлитыхъ изъ одного куска) |
| 97 | 8 | — | $N = G \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ | $N = G \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha}$ |
| 97 | — | 4 | (фиг. 221) | (фиг. 121) |
| 98 | — | 14 и 15 | Винтъ, собственно говоря, | Комплектный винтъ |
| 101 | 8 | — | какъ головка клина въ его | какъ головка клина къ его |
| 102 | — | 14 | при перекатываніи. | при катаніи. |
| 102 | — | 12 | такъ какъ сопотивленіе | такъ какъ сопротивленіе |
| 106 | — | 2 | или динамометромъ Прони | или нажимомъ Прони |
| 109 | — | 3 | (діаметръ цапры | (діаметръ цапфы |
| 111 | — | 12 | канатовъ и цѣпей вводятъ | канатовъ и цѣпей выводятъ |
| 112 | 5 | — | безъ копденсаціи, | безъ конденсаціи, |
| 113 | 4 | — | $V_m = \backsim P \cdot \frac{1}{2} P \cdot \frac{r}{L}$ | $V_m = \backsim \frac{1}{2} P \cdot \frac{r}{L}$ |
| 114 | — | 11 | треніе при перекатываніи; | треніе при катаніи; |
| 114 | — | 8 | треніе при перекатываніи: | треніе при катаніи: |
| 115 | — | 3 | = 12 севтим. | = 12 сентим. |
| 115 | — | 1 | тренія при перекатываніи: | тренія при катаніи: |
| 118 | 6 | — | радіусъ цапфы точки вращенія | радіусъ вращающейся цапфы |
| 118 | 11 и 12 | — | удерживающій грузъ Q | удерживающей грузъ Q |
| 120 | 2 | — | $\eta = \frac{Q}{P} = \frac{1}{1 + 0{,}08 . 0{,}3 + 0{,}25 . 0{,}01}$ | $\eta = \frac{Q}{P} = \frac{1}{1 + 0{,}08 . 0{,}3 + 0{,}25 . 0{,}1}$ |
| 121 | — | 4 | Болѣе точныя значенія | Болѣе точныя значенія $\eta$ |
| 128 | — | 13 | $\left(\text{т. е. } \frac{\text{окружность}}{\text{шагъ}}\right)$ | $\left(\text{т. е. } \frac{\text{окружность}}{\text{ходъ}}\right)$ |
| 131 | — | 11 | $P_1 = \frac{20 . 100 + 6 . 10 - (6 + 20) . 9{,}1 . 0{,}6}{40 + 0{,}1 . 0{,}6}$ | $P_1 = \frac{20 . 100 + 6 . 10 - (6 + 20) . 0{,}1 . 0{,}6}{40 + 0{,}1 . 0{,}6}$ |
| 131 | — | 10 | Опредѣлить P и $P_1$ | Опредѣлить P и $P_1$ |
| 131 | — | 6 | $P_1 = \frac{200 . 12 - 5.32 + (5 + 200) . 0{,}1 . 1}{80 + 0{,}1 . 1}$ | $P = \frac{200 . 12 - 5.32 - (5 + 200) . 0{,}1 . 1}{80 + 0{,}1 . 1}$ |

| Стран. | Строка. Сверху. | Строка. Снизу. | Напечатано. | Слѣдуетъ читать. |
|---|---|---|---|---|
| 132 | — | 5 | $Q = 2 . 4 . 0{,}62 . 150 - 10 = 744 - 110 = 734$ килгр. | $Q = 2 . 4 . 0{,}62 . 150 - 10 = 744 - 10 = 734$ килгр. |
| 134 | 3 | — | $= 2$ миллим. | $= 2$ метра |
| 136 | 8 | — | Трущіяся (фикціонныя) колеса. | Колеса тренія (фрикціонныя). |
| 136 | 9 | — | Вращеніе однаго вала A | Вращеніе одного вала A |
| 142 | 4 | — | (ср. уравненіе 150, | (ср. уравненіе 151, |
| 145 | 12 | — | (тренія, сопротивленіе воздуха) | (тренія, сопротивленія воздуха) |
| 148 | — | 3 | $l = \frac{c^3 \sin 2\alpha}{g}$ | $l = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$ |
| 149 | — | 1 | притянуть тѣла къ центру | притянуть тѣло къ центру |
| 151 | — | 12 | $\measuredangle 1 = \frac{360}{2 . 3{,}14} = 57^0 17' 45'$ | $\measuredangle 1 = \frac{360}{2 . 3{,}14} = 57^0 17' 45''$ |
| 152 | 2 | — | къ неподвижной течкѣ C, | къ неподвижной точкѣ C, |
| 153 | 4 | — | какъ составное при двухъ | какъ составное изъ двухъ |
| 154 | — | 10 | въ уравненіе 183, | въ уравненіе 184, |
| 155 | 15 | — | а за медленнымъ движеніемъ | а замедленнымъ движеніемъ |
| 156 | 2 | — | поглотиться сопротивленіемъ | поглотится сопротивленіемъ |
| 157 | 10 | — | двугой съ деревяннымъ, | другой съ деревяннымъ, |
| 158 | 8 | — | въ то время какъ, наоборотъ и наиболѣе удаленныя — | въ то время, какъ наиболѣе удаленныя — |
| 165 | 6 | — | изъ уравненія 207 и 205 получимъ: | изъ уравненія 201 — 205 получимъ: |
| 165 | — | 2 | при ударѣ пеупругихъ тѣлъ, | при ударѣ неупругихъ тѣлъ, |
| 173 | — | 6 | кожаннымъ манжетомъ (набивкой), который | кожанной манжетой (набивкой), которая |
| 180 | 4 | — | Такъ какъ I метр.$^2$ | Такъ какъ I метр.$^3$ |
| 184 | 7 | — | $V_2 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{8{,}8}\right) 100}{\left(\frac{7}{8{,}8} - 1\right) 1000}$ | $V_2 = \frac{87{,}8 - \left(1 - \frac{1}{8{,}8}\right) 100}{\left(\frac{7}{8{,}8} - 1\right) 1000}$ |
| 184 | — | 15 | зукій (фиг. 192). | узкій (фиг. 192). |
| 185 | — | 11 | Сообщающіеся трубки | Сообщающіяся трубки |
| 187 | — | 14 | $f_1 v^1 = fv$ | $f_1 v_1 = fv$ |
| 187 | — | 9 | соотвѣтствующая сторости | соотвѣтствующая скорости |
| 189 | 14 | — | $Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g}\, (H^3/_2 - H_1{}^3/_2)$ | $Q = {}^2/_3\, b \sqrt{2g}\, (H^{3/2} - H_1^{3/2})$ |
| 191 | 7 | — | отъ дна шлюзнаго каняла | отъ дна шлюзнаго канала |

ПЕРЕПЛ. М. ТРУХАЧЕВА ОФИЦ. У. 3