Парадигма развития науки

Идеологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

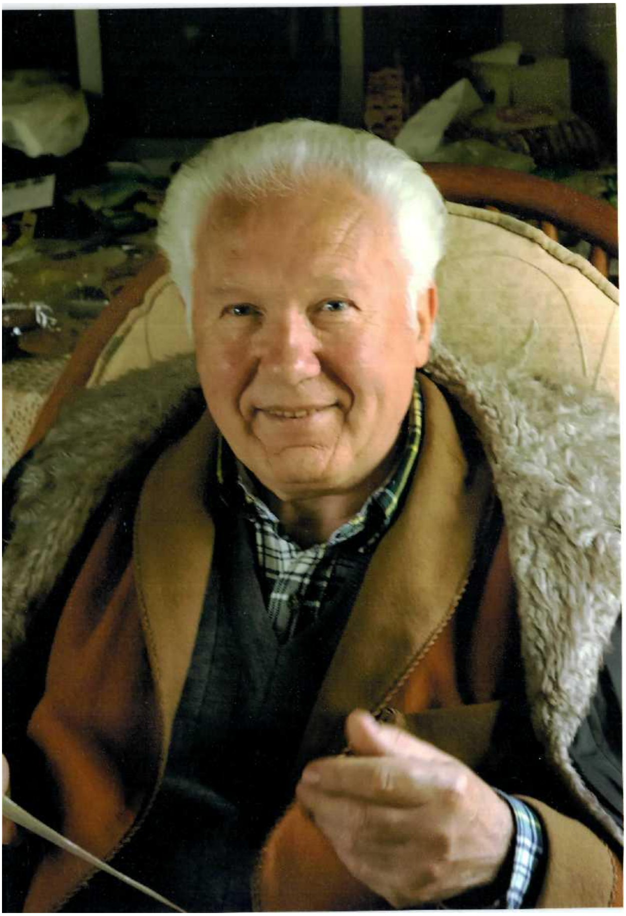
ПОНЯТОЛОГИЯ

(ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОНЯТИЙ)

Книга 1

Введение в теорию понятий

Киев
«Освіта України»
2014



Кононюк Анатолий Ефимович

Из переписки с А.П Алпатовым – ученым в области ракетостроения.

Уважаемый Анатолий Ефимович!
Я пересылаю Ваши работы своим коллегам.
Если можно, удовлетворите мое любопытство.
Вы используете энциклопедический подход к изложению материала, но в своем собственном формате, я имею ввиду, что материал изложен, с одной стороны, как образовательный, с другой - как монографический.
Вот вопросы.
Какую цель Вы преследуете?
Сколько лет Вы выполняете эту циклопическую работу?
Есть ли у Вас команда, которая Вам помогает ?
Вопросы не обязательны для ответа.

С огромным уважением к Вам и Вашему труду, А.Алпатов
16.02.2015

Уважаемый Анатолий Петрович!

Чтобы дать содержательные ответы на Ваши вопросы, мне необходимо ознакомить Вас с некоторыми «вехами» моего длительного жизненного пути (я родился в 1936г. в г.Киеве).

Свою интеллектуальную трудовую деятельность я начинал с работы конструктором (1960 г.). На этом поприще я проработал 15 лет (из них 10 лет – в должности начальника конструкторского отдела). Работая конструктором, я начал приобщаться к «техническому эпистолярному жанру», наибольшим достижением которого является «Справочник конструктора оборудования пищевых производств», опубликованный в 1981г. издательством «Техніка», г. Киев.

В 1975 г. я перешел на преподавательскую работу в Киевский Политехнический институт (который я и заканчивал, приобретя проффесию инженера-механика) на кафедру технической кибернетики. На преподавательской работе я проработал 10 лет, а, затем, 5 лет занимался “чистой” научной деятельностью на этой же кафедре. Мои научные интересы были тесно связаны с конструкторской работой, а именно: в науке я занимался вопросами анализа и синтеза систем автоматизированного проектирования в машиностроении. Результатами этой деятельности стали: написание кандидатской и докторской диссертаций, а также написание двух книг – «Справочник по САПР» (1988 г.) и «Автоматизация проектирования ГПС (на базе промышленных роботов)» (1990 г.).

В 1990 г. я перешел на работу в НПО «Файл» (зам. директора по науке), где продолжал заниматься разработкой САПР для различных отраслей машинно- и приборостроения. Но, как говорят – «недолго музыка играла», и, в связи с отсутствием заказов, НПО «Файл» приказало долго жить, а я досрочно вынужден был уйти на пенсию. Это был 1995 г. С тех пор я нигде официально не работал.

Пока я был сравнительно физически крепок (до 70 лет), то активно занимался различными видами физической деятельности, но так как после 70 лет активный физический труд стал мне «не по мышцам», то я решил возвратиться к умственному труду, который был для меня более привлекательным (умственный потенциал у меня не только сохранился, но и, как показала дальнейшая работа на этом направлении, окреп, помогая мне получать определенные результаты в области совершенствования высшего образования и развития науки).

Возвратившись в образовательно-научную деятельность (2006 г.) я долго думал с чего начать. В среде ученых исповедуется постулат: «Если хочешь досконально (глубоко) усвоить (освоить) определенную научную дисциплину, то начни писать по этой дисциплине монографический труд». У меня уже был опыт написания монографий и я решил им воспользоваться. На ум пришло исповедуемое некоторым сообществом ученых выражение: « в науке столько науки, сколько в ней математики», и я решил проверить себя в написании учебного пособия по Высшей математике. С 2006 г. по 2008 г. работал над двухтомным учебным пособием под названием «Вища математика», которому Министерство образования и науки Украины выдало «гриф» учебного пособия. В 2009 году мой труд был напечатан издательством КНТ (г.Киев).

После этого я решил не писать «чистые» методические учебные пособия и стал работать над созданием учебно-научного методолгического обеспечения науки и высшего образования , что привело, как Вы правильно заметили, к созданию «...с одной стороны, как образовательных, с другой - как монографических» работ. Дело в том, что я заметил, что учебные пособия читают в основном студенты, а ученые их не читают (мол, чему может научить учебное пособие состоявшегося ученого), а научные монографии читают в основном ученые, и, то, как правило хорошо подготовленные ученые, а студенты научные монографии не читают из-за их сложности. Вот я и взял на себя смелость и огромный труд создать такой формат изложения, который (я назвал его: «научно-учебное методическое обеспечение» студентов (аспирантов, докторантов) и состоявшихся ученых) привлекал бы и начинающих ученых (прежде всего будущих магистров) и маститых ученых, особенно тех, которые руководят аспирантами, докторантами и другими группами ученых. Такова предыстория формата изложения материала, в ней же раскрыта и цель изложения материала в предлагаемом Вам (и другим читателям) виде.

Если говорить о цели моей столь бурной умственной деятельности под конец жизни, то я отвечу словами героя одного фильма (несколько их перефразируя): «Мне стало за Державу обидно с таким высшим образованием и наукой».

Первое, за что я серьезно взялся по указанным проблемам, так это за разработку «Концепции совершенствования высшего образования» (2008 г.). Данная концепция была окончательно сформирована в 2010 г. и издана издательством «Освіта України» в 2011 г. Она полностью согласуется с взглядами специалистов Всемирного банка, занимающихся вопросами совершенствования высшего образования на основании создания университетов мирового класса, а так же, с программой Всемирного банка «Построение общества знания в области третичного образования» (вопросами третичного образования Всемирный банк занимается с 1963 г.). Результатом реализации моей Концепции была разработка и создание Международного Университета подготовки Магистров (МУМ) - университета мирового класса. Мне удалось разработать идеологическое, методологическое и организационное обеспечения указанного университета. Были подготовлены все необходимые документы для регистрации такого университета (2012 г.), но преодолеть бюрократическую машину по регистрации и открытии Международного Университета Магистров мне не удалось.

Но я не опустил руки и начал работать над новой концепцией – «Концепция парадигмы развития науки», разработку которой я окончательно закончил в 2014.

Основой данной концепции является «Открытая развивающаяся панмедийная систем наук». Разработана структурная схем данной системы и я осуществляю ее наполнение научно-учебными методическими работами.

Что касается команды, то она была во времена работы в КПИ и в НПО «Файл». Причем команда очень профессиональная и результативная. Мы работали над создание мощной общемашиностроительной САПР. Больших результатов мы достигли в создании базовых обеспечений САПР: методического, информационного, математического, лингвистического, программного. Особенно сильная группа была в области разработки системы трехмерной графики. Наши результаты в области трехмерной графики (особенно в анализе невидимых линий, выполнении достоверных разрезов и сечений и др.) были конкурентоспособны на мировом уровне (в некоторых вопросах мы были «впереди планеты (научной) всей». Но развал СССР угробил все, в том числе, и науку. НПП «Файл» лопнуло, а я вынужден был уйти на пенсию. Многие ведущие специалисты моей команды выехали заграницу (США, Канада) и я остался, в научном плане, одинок. Но это, как Вы видите, меня не остановило в моем увлечении наукой, и я с еще большим «остервененинем» в нее окунулся. Но работать без команды очень сложно и тяжело. Даже обсудить посещающие мысли не с кем, кроме, как с самим «любимым». Как Вы, наверное, заметили, что рецензентом моих работ является проф. Печурин Н.К. Он очень потенциально сильная научная личность, но, кроме как на рецензирование, он не соглашается принимать участие в предложенной мной «научной гонке». Поэтому я готов войти в состав научной команды, которая исповедует взаимоприемлемые подходы развития науки.

Вот такие мои обширные ответы на Ваши вопросы.

Мои интересы в науке, как Вы видите из части моих работ, полностью совпадают с Вашими. Так почему бы нам не соединить наши научные усилия и построить азы будущего в науке. Ведь, по моему (и не только моему) убеждению, современная наука пребывает, в лучшем случае, в состоянии застоя. Вы только обратите внимание, за какие научные работы последнего десятилетия присуждают Нобелевские премии. Так, например, по экономике, с интервалом в несколько лет, присудили Нобелевские премии, в переводе на общедоступный язык, за использование математического аппарата теории игр в экономике. Но, ведь, согласно теории игр, если вы принимаете участие в игре и не ошиблись или вас не «надули», то вы не в состоянии ни выиграть, ни проиграть. Тогда в чем смысл использовать такую науку в экономике? Поэтому я предлагаю стать Данками (как Вы помните, есть такой персонаж в рассказах Горького «Сказки старухи Изергиль) в науке и обсудить начальные пути движения в науку будущего (ее структуру я постарался заложить в книге «Концепция парадигмы развития науки»).

С уважением, А Кононюк.

22.02.2015

kononyuka36@mail.ru

P.S. Перечень моих могографий:

1. Общая теория систем – 3 книги;
2. Общая теория информации – 4 книги;
3. Общая теория распознавания – 2 книги;
4. Общая теория консалтинга – 4 книги;
5. Основы научных исследований – 4 книги;
6. Дискретно-непрерывная математика – 22 книги;
7. Общая теория моделирования – 5 книг;
8. Общая теория оптимизации – 4 книги;
9. Общая теория понятий – 3 книги;
10. Общая теория познания и созидания – 2 книги;
11. Общая теория коммуникаций -1 книга;
12. Истины и информация (фундаментальная теория) – 1 книга;
13. Высшая математика – 2 книги;
14. Нейронные сети и генетические алгоритмы;
15. Концепция развития науки и совершенствования высшего образования;
16. Парадигма развития науки.

Из переписки с д.ф.м.н. Войценей В.С.

Вторник, 9 февраля 2016, 14:30 +02:00 от "Voitsenya V.S."

Здравствуйте, Анатолий Ефимович,

С удовольствием прочитал Ваш ответ А. Алпатову. Но все равно, остается не очень понятным, как Вам удалось написать так много (более 50 книг).

Желаю дальнейших успехов.

С уважением, В.С

Вторник, 9 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Уважаемый Владимир Сергеевич!

Отвечу Вам притчей. Однажды спросили известного художника: "Как

Вам удается рисовать такие замечательные картины?. Он ответил: "Я буру нужные краски и кладу их в нужное место". Отвечу по аналогии - я беру нужные "научные кирпичи и блоки" и кладу их в нужное место рассматриваемой научной проблемы. И так изо дня в день (практически без выходных) на протяжении последних десяти лет.
И что меня вдохновляет писать дальше, так это отзывы тех ученых, которым я разослал электронные версии своих книг.
А разослал я свои книги 1200 ученым НАНУ, в том числе всем академикам, член-корам, заведующим отделами и, практически, все те, кто пожелал откликнуться на мои работы, прислали положительные отзывы.

А.Кононюк

Из переписки с д.ф.м.н. Шаповалом И.Н.

4 февраля 2016 г. от Шаповала И.Н.

Вот хотел Вас спросить, можно, ествественно, и не отвечать. По поводу

сочетания «дискретно-непрерывная математика», по отдельности общеупотребимых.

Но сочетание их вместе и ещё в титулах, по-видимому, не простая

констатация дихотомии. Ведь в бинарной логике «дискретно-непрерывная математика»= «вся математика».

Какой в этом Ваш подтекст, ведь любая нетривиальная трактовка этой связки выводит за рамки

существующей структуры её величества Математики?. Или это слишком сказано и такого смысла не предполагалось?

И.Ш.

7 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Здравствуйте, Иван Николаевич !

Высылаю книгу 7 "Графы " ч. 2, 3 по Дискретно-непрерывной математике.

Что касается сочетания названия «дискретно-непрерывная математика», то оно возникло спостанно. Я начал писать книги по дискретной математике, но затем написал четыре книги по функциям, дифференциалам, интегралам и мерам, а эти разделы математики, как мне известно, относятся к непрерывным математикам. Тогда я прибавил к названию «Дискретная математика» через тире слово «непрерывная». Видимо, согласно бинарной логики, мне следовало бы вместо тире поставить союз «и».

Кстати, существуют разделы математики, которые нельзя отнести ни к дискретным, ни к непрерывным, например, «Теория вероятностей», «Теория массового обслуживания», «Марковские процессы» и др.

С уважением , А . Кононюк

4 февраля 2016 г. от Шаповала И.Н.

Я примерно так и воспринял возникновение Вашего названия

«дискретно-непрерывная математика» по спонтанности.

Разговор этот вообще-то о нюансах, но начиная с некоторого уровня строгости оправданный,

по крайней мере во избежание путаницы.

Скажем, уже среди Ваших первых книг и функции, и меры бывают и непрерывные и дискретные.

Таковы и разделы математики, тем более Прикладная математика, а про математические книги вообще нечего говорить, они сплошь содержат и апеллируют то к непрерывности, то к дискретности,

чему пример и Ваш объёмный труд.

Я имел в виду всё же содержательную сторону двух этих категорий,

а не всевозможные салаты, которые из них можно приготовить.

В этом отношении, по содержанию мне было интересно, не имеете ли Вы под прицелом тот аспект,

который, опять же 100% не утверждаю, имелся в статье Неймана под конец его творчества,

рассмотреть альтернативы в бесконечно-значной логике, тогда и почти тавтология

«дискретно-непрерывная математика» = « математика» может получить

дополнительное содержание.

Да и, кстати сказать, есть же относящийся к обсуждаемому также глубокий результат

Коэна об аксиоме континуум (или дискретность).

(Любое бесконечное подмножество континуума является

либо счётным (или дискретным), либо континуальным (или непрерывным))

Спасибо за прочтение и за труд.

Иван Шаповал

9 февраля 2016 от Кононюка А.Е.

Высылаю книгу 4 "Алгебры и дифференциалы " ч.3 по Дискретно-непрерывной математике.

А сейчас отображу в этом послании некоторые мысли.

Чем больше я описываю разделов математики, тем больший сумбур в моей голове об этой «науке» - никакой системности (как Вы говорит: «винегрет»), а сплошная слабо связанная фрагментарность отдельных ее разделов. А ведь я нахожусь, где-то, на половине пути от намеченной мной реализации математической структуры: «Обобщенная теория математики» в рамках «Открытой развивающейся математической системы». Я полагаю, что всю математику можно изложить (представить) как систему, базирующуюся на множественно-графовой основе, т. е. отобразить всю математику средствами теории множеств и теории графов и на этом фундаменте построить математическую теорию под названием (как я уже говорил) «Обобщенная теория математики». А в таком виде Математика, как она сегодня представлена, по моему мнению, это не наука (в классическом понимании (определении) этого понятия). К сожалению, для реализации предложенного подхода у меня уже нет ни жизненного резерва, ни единомышленников на этом научном поприще.

Кстати, 27.05.2015 я обратился к Вам с предложением о сотрудничестве, но, к сожалению, ответа не получил. А жаль. Мне кажется, судя по фрагментам Вашей реакции на мои работы, у нас есть точки (а может «линии» и «поверхности») научного соприкосновения и мы могли бы совместно построить и «выдать на гора науки» еще не систематизированную научную теорию, например, «Истины и информация (фундаментальная теория)». (Между прочим, я уже набросал перечень вопросов, которые, на мой взгляд, следует рассмотреть в этой работе. Если Вам интересно знать содержание вопросов, я готов их Вам выслать). Я решил прервать мою дальнейшую работу над разделами Математики и сосредоточить свои умственные усилия на построении теории «Истины и информация», как одной из актуальных на нынешний день, как я полагаю, научных направлений. Присоединяйтесь!

С уважением , А . Кононюк

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К 213

Рецензент: *Н.К.Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А.Е.
К65 Общая теория понятий. К.1.
К.4:"Освіта України", 2014. - 514 с.
ISBN 978-966-7599-50-8

Освещены теоретические и практические аспекты организации понятий как процесса и как явления. Подробно рассмотрены математические средства описания моделей понятий, методы и принципы образования понятий. Изложены методы синтеза понятий и понятийных систем на основе наиболее распространенных формализованных языков. Особое внимание уделено процессам образования понятий как исходных условий для построения алгоритмов образования понятий. На основе и с использованием определяющего отношения строятся различные разновидности определений и исследуются свойства таких определений. Исследование определяющего отношения приводят к открытию новой концепции – концепции понятия. Сущности, определяемые посредством использования определяющих отношений, считаются и являются понятиями. Частными случаями понятий являются утверждения, теоремы, доказательства, теории.

Для магистров, аспирантов, докторантов, занимающихся теоретическими и практическими вопросами образования понятий и понятийных систем.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7599-50-8

Оглавление

Введение

Многие проблемы, парадоксы, противоречия и заблуждения (от парадоксов теории множеств и до проблем алгоритмической неразрешимости) обусловлены неправильным определением и некорректным использованием (или не использованием) и/или непониманием (или неправильным пониманием) **понятий**. Из-за неумения обращаться с понятиями (определять, образовывать, преобразовывать, применять) возникает множество семантических проблем и ошибок. Из-за незнания предназначения понятий проистекает множество неправильностей их применения и использования. В метаматематике имеются семантические ошибки из-за неразличения понятий истинности и правильности, в теории множеств и в логике Аристотеля – из-за противопоставления понятий единичности и общности (которые не сопоставимы). Даже профессиональные математики недостаточно ясно различают (а, точнее, зачастую не различают и смешивают) понятие множества и понятие совокупности, понятия неоднозначности и неопределенности.

Все эти проблемы оказываются понятийными. Оказывается, что **определение, образование, преобразование и использование понятий одинаковы, что в математике или физике, равно как в философии или быту. Понятийные методы не зависят от прикладной области и обусловлены собственной спецификой**.

Теория, которая допускает возможность элементов нечто означать, и будет называться теорией понятий.

Понятия составляют предмет исследования теории понятий.

Собственные понятия теории понятий (такие, как: утверждения, определения, теории, алгебры и даже само понятие “понятия” и др.) являются понятиями (в соответствии с собственным определением понятия).

Парадокс лжеца: некто говорит, что он лжец; если он действительно лжец, то он должен был бы сказать, что он не лжец; если он не лжец, то он тем более не мог сказать, что он лжец. Если же этот некто, несмотря на все это, заявляет, что он лжец, то на самом деле он просто мошенник, а не лжец. Эффект парадокса состоит в том, что понятия мошенника и понятие лжеца довольно близки (и даже одно “входит” в другое) и **неправомерная подмена понятия более “узким” понятием создает семантическую некорректность, которая воспринимается как парадокс. Для теории понятий парадокс лжеца парадоксом не является – она его квалифицирует как неправомерную подмену понятий**.

Парадокс Ахиллеса утверждает, что Ахиллес не сможет догнать черепаху; **парадокс заключается в подмене понятий: интуитивно, неосознанно мы подменяем понятие “догнать” понятием “перегнать**”, неосознанно полагая, что понятие перегнать включает понятие догнать и поскольку скорость движения Ахиллеса несравнимо больше скорости черепахи проблема представляется парадоксальной; но для того, чтобы догнать (или даже перегнать) черепаху, Ахиллесу в каждый момент времени необходимо знать когда, куда и как будет (и будет ли) далее двигаться черепаха (неизвестно, что черепахе в голову придет) что, конечно же, невозможно, и Ахиллес черепаху вряд ли сможет догнать. Конечно, если знать, куда, с какой скоростью, когда, по прямой или как будет двигаться черепаха, то можно все очень просто рассчитать, даже не прибегая к суммированию бесконечных рядов (что обычно предлагается в качестве решения этого парадокса). Нормальный алгоритм, например, $a \rightarrow b$ в соответствии с его формальным определением дословно означает возможность переделки буквы “a” в букву “b”, ибо никакого смыслового значения теория нормальных алгоритмов для букв не предполагает и не допускает; правда в самой теории нормальных алгоритмов вместо совершенно понятного понятия “переделки” одного объекта в другой использовано ничего не значащее (для объектов) понятие “перевода”.

Доказательство теоремы Гёделя о неполноте основано на использовании утверждения, что некоторое предложение нечто означает. Это утверждение сделано без обсуждения вопроса, способно ли рассматриваемое предложение это делать, и если может, то как, каким образом оно это делает. И вообще, что означает, что некоторая сущность “означает” некоторую другую сущность. Это сугубо **понятийные проблемы, и без их достаточного <u>исследования и обоснования</u> такие утверждения являются, мягко говоря, не очень понятными и адекватными.**

В математических текстах можно встретить такую, например, фразу: «Рассмотрим некоторое N-мерное пространство». Исключая предложения рассмотреть, например, два N-мерных пространства, зададимся более простым вопросом, что на самом деле предлагает автор этого предложения рассматривать? Понятно, что пространства с неопределенным числом измерений в “природе” не существует. Может быть, что и рассматривать нечего? Ан, нет, вроде бы и 2-мерное пространство, и 13-мерное пространство позволительно рассмотреть. Так что за объект есть N-мерное пространство? Этот объект есть понятие пространства.

Бытует мнение, что вся математика может быть выведена из теории множеств (правда без каких-либо уточнений, какими средствами). Для всей математики это утверждение проблематично, а вот **теория понятий, как альтернатива теории множеств, “выводится” элементарно. ???** Насколько известно, ни одна математическая дисциплина практически не была выведена на день сегодняшний из теории множеств, что и естественно, поскольку теория множеств не имеет и не допускает использования средств ее применения. Теория множеств зиждется на предположении, что множество подмножеств некоторого множества больше исходного множества. Пусть имеется множество {a, b, c}; выберем из этого множества два элемента, скажем a и b, образуем из них новый элемент d и добавим его в рассматриваемое множество; теория множеств полагает, что получающееся новое множество {a, b, c, d} больше исходного множества. Это справедливо, если множества организованы из ничего не значащих элементов. **Если полагать, что <u>элементы</u> это такие <u>сущности</u>, <u>которые способны нечто означать</u>, то при добавлении в множество нового элемента (a, b) нельзя исключать, что, например, элемент (c) был получен точно таким же способом и тогда нового, более мощного множества при добавлении такого элемента не будет образовываться. <u>Теория, которая получается с учетом этой возможности – допускать возможность элементов нечто означать, и будет теорией понятий.</u>** С простейшими, но достаточно характерными понятиями приходится иметь дело еще даже до знакомства с арифметикой. Когда к трем яблокам требуется добавить две груши, то для того, чтобы имелась возможность сформулировать результат этой не сложной операции, требуется создание нового понятия — понятия фрукта. Без наличия такого понятия яблоки с грушами не “складываются”. Более трудная понятийная проблема может встретиться и в другой достаточно обычной жизненной ситуации. Так известно значения сигналов обычных дорожных светофоров – на зеленый можно ехать, на красный ехать нельзя. Теперь представьте, что подъезжая к светофору вы видите включенными оба сигнала: и красный, и зеленый. Что делать? Правила дорожного движения ничего об этой ситуации не говорят. И действительно, здесь законы и правила заканчиваются, и ехать дальше можно, но только уже не по правилам, а по “понятиям”. Правила кончаются у такого светофора. Во всяком случае, теория понятий утверждает, что ехать так, как будто вообще нет светофора не следует. И не дай Бог, если к такому светофору подъедет ортодоксальный математический логик – он, скорее всего, будет стоять у такого светофора до скончания века, ибо противоречие!

Многие абстрактные теории (и в наибольшей степени – математика) <u>представляют собой работу с понятиями</u>.

Математические формализмы (такие как: теория множеств, теория алгоритмов, математическая логика и др.) с точки зрения теории понятий выглядят примитивными, кустарными поделками (хотя в прикладном, содержательном аспекте они представляют собой величайшие результаты). **Многие философские понятия вообще зачастую выглядят малообоснованными с <u>понятийной точки зрения</u>**. Так, например, во многих теориях рекомендуется использование более общих (как более продуктивных) понятий, а вот каким образом эти более общие понятия могут быть образованы, построены или получены и имеются ли методы построения общих понятий в этих теориях не говорится.

Работать с понятиями приходится практически на каждом шагу. **Умственный процесс работы с понятиями называется <u>мышлением</u>**. Мышление необходимо в любой деятельности, особенно в интеллектуальной. Мышление – трудное и не простое дело! Искусство мышление заключается в правильном образовании, определении, преобразовании и использовании понятий. Человеческое мышление не совершенно. Оно не формально и легко (как показывают парадоксы) может быть обмануто. **Человеческое мышление не представляет собой достаточно надежного средства для образования и использования сколь-нибудь <u>сложных понятий</u>**. Технология образования и работы с понятиями определяются специальной, новой дисциплиной – **<u>теорией образования понятий</u>**. **Предлагаемая теория понятий обеспечивает семантически корректную технологию определения и использования понятий.** Так, например, теория понятий предлагает концепцию (определение) понятия правильности и однозначности его понимания, которое не только интуитивно не очевидно, не только индуктивно не выводимо, но и вообще не очень понятно, каким образом она возникло, хотя и удовлетворяет его определению. **<u>Теория понятий</u> превращает искусство мышления в <u>научный процесс</u>, в технологию. Технология мышления позволяет создать если не мыслящую машину, то машину для мышления или, в крайнем случае, машину для обучения мышлению.** Профессиональный подход к технологии обработки понятий допускает и предлагает методы, неочевидные на интуитивном уровне, на уровне «здравого смысла». **<u>Технологию работы с понятиями следует не устанавливать, а познавать</u>. Теория понятий (в этом смысле) ближе к естественным дисциплинам, нежели к гуманитарным**.

К понятиям возможно применение различных действий, методов. Теория понятий предлагает некоторую схему применения методов к понятию. Эта схема называется **<u>понятийным (семантическим)</u>**

гомоморфизмом. Новые понятия являются результатом некоторых действий над уже имеющимися понятиями. Преобразование понятий обеспечивает построение новых понятий аналитическим (а не интуитивным) способом.
И, тем не менее, зачем все-таки нужно мышление и эта работа с понятиями, кроме как для решения этих парадоксальных головоломок, которые, по большому счету, также не очень понятно, зачем решать? Как представляется, **технология работы с понятиями необходима исключительно для рационализации поведения (деятельности) и принятия правильных (рациональных) решений, не исключая (и в том числе) самого мышления, т.е. исключительно из прагматических соображений.** Такого ответа оказывается достаточно для обоснования почти всех аспектов теории понятий и ее прагматики и глубже погружаться в эту зыбкую тему (в целях безопасности) не имеет смысла. Технологическая, прагматическая ценность использования понятий заключается в том, что определение операции для понятия автоматически означает ее распространение на все сущности, допустимые этим понятием.
Предлагаемая теория понятий, несмотря на объявленный ее прагматизм, в свой основе парадоксальным образом базируется на совершенно парадоксальной концепции, полностью (на первый взгляд) исключающей ее прагматизм. **Теория понятий создается как средство конструирования некоего виртуального мира, не имеющего никакого отношения к реальному миру. Парадоксальность заключается в том, что хотя создаваемый мир понятий виртуален (чистейшая выдумка), он имеет в арсенале своих средств средство конкретизации абстрактных понятий, которое предполагает и допускает существование реального мира, как "фрагмента", составной части виртуального мира понятий. Конкретизация абстрактных понятий реальными сущностями, обеспечивает прагматику понятийных (и, тем самым, и собственную) теорий.** Такой подход (используемая парадигма) оказывается более продуктивным. В то время, как различные теории (вплоть до философии) считают, что они призваны моделировать реальный мир (используя **категорию истиностности как мерило соответствия теории реальному миру** – не объясняя, правда, что есть соответствие, и как оно осуществляется, а лишь его оценивая: **соответствие есть – истина, нет – ложь**), **теория понятий изначально, концептуально отделяет себя от реального мира**, **полагая своей задачей построение некоего виртуального, идеального, духовного мира**. Даже **само строительство осуществляется по собственным законам и правилам**. Такой подход к построению и использованию

формальных теорий оказывается более продуктивным. **Виртуальный мир, строящийся средствами теории понятий, действительно представляет собой целый мир, мир со своими законами и правилами**. Хотя в виртуальном мире все виртуально, сама виртуальность реальна. Более того, виртуальных миров существует и может быть рассмотрено достаточно много. И более того, виртуальные миры в свою очередь могут образовывать иерархию, аналогичную иерархии реального и виртуального мира. Поскольку при таком подходе соответствие реальности уже не может выступать в качестве критерия правильности построения теории, теория понятий предлагает собственный (идеальный) критерий правильности, который обеспечивает (в частности) и ее собственную правильность.

Теория понятий основана на использовании вводимого в ней отношения семантического гомоморфизма, обеспечивающего (в числе прочего) отношения сущностей реального и виртуального миров, чем определяется и обеспечивается прагматика как самой теории понятий, так и создаваемых в ней теорий. **Теория понятий не объясняет реальный мир, но ее использование (как технологии) позволяет реальный мир понимать.**

На самом деле **построение теории понятий вызвано семантической некорректностью в формализации интуитивного понятия алгоритма**. В свое время, в связи с тем, что некоторые математические проблемы не поддавались решению, было высказано предположение, что эти задачи вообще не могут быть решены, и была предпринята попытка доказательства “принципиальной невозможности” решения этих задач. Для этого, прежде всего, потребовалось определиться с тем, **что понимать под принципиальной неразрешимостью задач**. Было предложено считать, что проблема является принципиально неразрешимой, если она не может быть решена посредством некоторого, “наиболее общего, универсального” средства решения. (Другой, возможно более продуктивный, семантический вариант разрешения проблемы неразрешимости – анализ семантической правильности и правомочности постановки самих задач, насколько известно, не встречается.) **В качестве “наиболее общего, универсального” средства решения проблем было предложено использование алгоритмов.** Для доказательств невозможности алгоритмического решения проблем (т.е. алгоритмической неразрешимости) потребовалась **формализация понятия алгоритма**. Было предложено несколько, достаточно разнообразных (оказавшихся впоследствии эквивалентными) точных (формальных) определений понятия алгоритма. Основываясь на использовании формального

определения понятия алгоритма, действительно удалось (и удается) показать невозможность (алгоритмического) решения различных задач. В тоже время, поскольку не имеется какого-либо обоснования невозможности усиления формального определения понятия алгоритма, предпринимались многочисленные попытки поиска усиления. Попытки построения средств, превосходящих формализованные таким образом алгоритмы, оказывались безуспешными до тех пор, пока не выяснилось, что самые обычные алгоритмические полно-видовые языки прикладного программирования несводимы к классическим формализациям алгоритма. Камнем преткновения являлась методика сравнения формализаций алгоритмов: если сравнивать алгоритмические формализации по способности алгоритмов преобразовывать слова в алфавитах, то все формализации действительно оказываются эквивалентными; но алгоритмы, написанные на современных полно-видовых языках, способны работать не только со словами в алфавитах, но и с более сложными, более содержательными объектами, которые словами всего лишь нотированы. Для лингвистического представления таких объектов требуется, чтобы используемые алфавиты включали не только буквы (в их традиционном, например, Марковском определении), но и некоторые специальные символы, которые под определение буквы не подпадают, хотя буквами и представляется. Безусловным и наиболее характерным примером “содержательного данного” являются сами алгоритмы. В современных, строго типизированных алгоритмических языках слова в алфавитах рассматриваются не сами по себе, а в качестве значений данных, семантика которых дается описаниями типов данных. В классических же формализациях алгоритмов никакие иные структуры данных, кроме слов в алфавитах, не рассматриваются.
В формализациях алгоритмов, конечно же, возможность применения алгоритмов к алгоритмам исследовалась, но, похоже, что на заре эпохи программирования больше интересовала и завораживала сама практическая осуществимость в формализациях такого сорта формальных алгоритмических преобразований, нежели такие нюансы, как обеспечение семантической однозначности таких алгоритмических преобразований. Даже в настоящее время **семантические аспекты алгоритмов остаются недостаточно исследованными**. Действительно, если оказывается, что можно писать алгоритмы, которые могут преобразовывать слова, представляющие алгоритмы, и работа этих алгоритмов вполне однозначна, то, казалось бы, что ещё требуется, какие могут тут возникать вопросы? И вроде нет никаких проблем. Но! **Проблему составляют семантические аспекты**

алгоритмических преобразований. Нормальные алгоритмы способны преобразовывать слова в алфавитах. Сами схемы алгоритмов не являются словами в алфавите алгоритма; поэтому для того, чтобы алгоритм мог быть применён к другим алгоритмам, работающим со словами в этом же алфавите, требуется схемы таких алгоритмов каким-либо образом “перевести” и представить в виде слов в этом же алфавите. Поскольку нормальные алгоритмы непосредственно к схеме нормального алгоритма применены быть не могут (ибо они применимы только к словам), то описание требуемого преобразования осуществить в виде нормального алгоритма невозможно и оно (по необходимости) может быть дано лишь неформальными средствами (например, на естественном языке). Уже в этом может быть усмотрена неудовлетворительность и недостаточность имеющихся формализаций алгоритма: на естественном языке требуемое преобразование, хотя и не формально, но может быть дано, а в нормальных алгоритмах оно невозможно. Эквивалентность всех разработанных формализаций понятия алгоритма ставит под сомнение саму возможность построения такой формализации, которая была бы способна осуществить решение сформулированной проблемы. Существует принципиальная возможность усиления (модификации, обобщения) определения нормального алгоритма, обеспечивающего вполне семантически однозначное применение модифицированных нормальных алгоритмов к модифицированным нормальным алгоритмам. Модификация заключается в представлении в модифицированных нормальных алгоритмах семантических аспектов данных, что, в свою очередь, привносит в теорию алгоритмов семантический аспект данных, и ставит задачу разработки семантических формализаций алгоритмов (в дополнение, если не в замену символьным алгоритмам). К сожалению, определение модифицированных нормальных алгоритмов не решают всех проблем алгоритмических преобразований алгоритмов; так, в частности, остается проблема формального определения, чем является результат алгоритмического преобразования алгоритма: алгоритмом или некоторым другим (не алгоритмическим) объектом. Некоторое решение возникающих семантических проблем предлагается теорией понятий.

По своему характеру **теория понятий предстает как мета-математическая дисциплина**, хотя на самом деле разработка оснований (и, тем более, обоснований) математики не является задачей теории понятий; просто **мета-математическая проблематика представляет собой подходящий, удобный полигон для отработки технологии формального мышления.** А вот использовать (или не использовать) эту технологию правильного и продуктивного мышления в математике – решать, конечно, самой математике. **Теория понятий не ставит своей целью формализацию интуитивного понятийного аппарата и, тем более, не является тезаурусом бытовых понятий, но является разработкой некоего формализма, обеспечивающего прикладной аспект формальных понятий, включая определение мета-алгоритмических преобразований. Сама теория понятий строится, естественно, в соответствии с собственными определениями и утверждениями**. Теоретико-понятийный формализм представляет собой новый, более совершенный тип формализма – **семантический формализм**. Использование этого формализма для определения интуитивных понятий оказывается возможным в качестве одного из его прикладных приложений, чем и объясняется выбор именования этого формализма как теории понятий. **<u>В теоретическом, концептуальном аспекте теория понятий предстает как концепция дальнейшего совершенствования понятия алгоритма;</u>** практическая, прикладная ценность теории понятий заключается в решении теорией понятий семантических проблем формализаций: **<u>понятия обладают формальной семантикой</u>**. **Теория понятий, как мета-математическая дисциплина, не занимается обоснованием математических утверждений, но утверждения, основанные на аналитических понятиях, являются гораздо более обоснованными**. **<u>Теория понятий устанавливает новый, более жесткий стандарт строгости и обоснованности построения утверждений.</u>** Кроме того, представляют интерес мета-понятийные аспекты теории понятий: **построение понятийных определений как некоторых специфических “методов” образования (преобразования) понятий, построение понятийных “методов” обобщения и конкретизации понятий, определение понятия определяющего отношения и построение конкретных отношений понятий. <u>Теория понятий является своей собственной мета-теорией и в этом качестве обеспечивает свою собственную правильность.</u> <u>Построение теории понятий начинается с исследования и определения того, что есть само определение</u>**. Сложность в определении этого понятия обусловлена тем обстоятельством, что такое определение, будучи определением, должно удовлетворять себе, как “частный случай” определения. Что означает удовлетворять, естественно также должно быть определено определением определения. **Конкретизация понятия определения позволяет дать формальные определения таким понятиям как понятие утверждения, понятие отношения, понятие теоремы, понятие теории, определение самого определения как понятия «понятие» и т.д. <u>Диалектика понятий обеспечивается</u>**

<u>использованием гомоморфизма как способа наследования преобразуемого понятия в результирующем понятии</u>. Понятие есть некая новая математическая структура в ряду таких структур как понятие числа, понятие матрицы, понятие полинома и т.д., но отличающаяся от них тем, что она предназначена для определения прикладных понятий (не исключая и собственного определения, т.е. определения понятия понятие). Понятие мета-алгоритма, как обобщения понятия алгоритма, представляет не только вычислительные, но и аналитические аспекты алгоритмических функций. Использование в построениях аналитических понятий вместо интуитивных позволяет формализовать ту часть построений, которая обычно выполняется “по наитию”, на основе «здравого смысла», без использования каких-либо формальных и обоснованных правил. Кроме того, теория понятий имеет обширную область **прикладных применений**: **<u>построение понятий составляет начало любой научной дисциплины,</u> и использование аналитически построенных понятий и методов работы с ними вместо интуитивных позволяет избегать многих понятийных некорректностей и ошибок**. **<u>В прикладном аспекте теория понятий, являясь аналогом и обобщением аппарата видов данных в языках и системах программирования, служит его объяснением и обоснованием. Многие прикладные проблемы оказываются понятийными</u>**. В частности, удается определить предназначение и способ использования семантического гомоморфизма и дать более корректное и строгое его определение; удается построить обобщение общей алгебры, предложить аналитическое определение и обоснование понятия пространства. Даже такое фундаментальное понятие, как понятие множества, прежде всего, является понятием, и работать с множествами следует по правилам работы с понятиями; бесконечное множество, как предел пополнения конечного множества, в явном виде представляет собой переход количества элементов в новое качество – в понятие множества. Этим, в частности, может объясняться спорность аксиомы выбора (элемента из бесконечного множества), поскольку о выборе элемента из понятия и речи быть не может. Для обеспечения прагматики прикладных теорий (формализмов) они должны строиться как конкретизации понятий теории понятий, выступающей в качестве некоторой мета-теории прикладных теорий. С применением теории понятий рассматривается метод доказательства общих утверждений; теория типов данных в языках и системах программирования оказывается еще одним применением теории понятий, осуществляемого методом ее конкретизации. **Применение теории аналитических понятий к лингвистике естественных**

языков помогает понять и объяснить некоторые аспекты представления и использования интуитивных понятий в естественных языках.
В целом, **<u>теорию понятий можно рассматривать как технологию (диалектического) мышления; теория понятий превращает мышление в технологию.</u>** Основой любой науки (а в особенности математики) является «правильное» мышление; **<u>теория понятий посвящена технологии формального аналитического мышления</u>**. Математика основывается на понятиях. Вся работающая, продуктивная математика работает на (неформальных, интуитивных) понятиях. **<u>Без использования понятий даже яблоко к грушам не добавить!</u>** Из-за неправильного мышления предпринимается слишком много непродуктивных, ошибочных и даже контрпродуктивных действий и выводов (как пример, концепция алгоритмической неразрешимости – недоказуемость не может быть доказана).
В целом **теория понятий предстает как технология аналитических рассуждений, как технология (диалектического) мышления.**
<u>Исследование определяющего отношения приводят к открытию новой концепции – концепции понятия. Сущности, определяемые посредством использования определяющих отношений, считаются и являются понятиями. Частными случаями понятий являются утверждения, теоремы, доказательства, теории.</u>

1. Семантические проблемы формализаций

Формализмы во многих дисциплинах и в первую очередь в математике играют существенную роль. Использование формализмов в теории понятий является эффективной технологией. Недостаточное внимание вопросам семантической интерпретации формализмов может приводить и приводит к наиболее серьезным, фатальным ошибкам и заблуждениям как в построении формализаций, так и в их использовании. Даже простейшие формальные схемы с учетом семантики входящих в нее элементов обретают новые, и даже несколько необычные свойства и аспекты. Так даже такая простая, знакомая со школьной скамьи схема раскрытия скобок (a+b)*c=a*c+b*c при придании элементам этой формулы определенного смысла, становится не очень понятной. Так, если используемые переменные означают, например, длины, то выражение (a+b) будет, скорее всего, означать сложение некоторых длин a и b, а выражение (a+b)*c может означать, например, площадь прямоугольника со сторонами (a+b) и c; тогда в правой части этого равенства должны складываться площади прямоугольников со сторонами {a,c} и {b,c}. Но операция сложения площадей, строго говоря, отличается (и семантически, и по сути) от операции сложения длин. Поэтому в правой части должна быть использована некоторая другая операция сложения. К слову, это равенство как раз и представляет определение операции сложения площадей через операцию сложения длин.

Формализации без семантической интерпретации ни к чему не применимы (поскольку в формализациях отсутствуют механизмы их применения к реальным объектам) и поэтому не представляют практической ценности. Правильное и адекватное понимание формальных теорий становится достаточно трудной проблемой (иногда даже для авторов этих теорий). Понимание достаточно сложных формальных абстрактных теорий уже не всегда может быть "выполнено" по "наитию". Для корректного и правильного его осуществления требуется разработка и использование некоторой соответствующей технологии. **Теория понятий представляет технологию семантического формализма**. **Технология семантического формализма исследует проблему построения объектов в неразрывной связи с их семантикой**.

Отличительной особенностью понятий (связанной и с мнемоникой используемого термина) является возможность понимания понятий. **Понимание понятий обеспечивается семантикой понятия**. **<u>Семантику понятия</u> составляет <u>совокупность понятийных функций</u>, применимых к рассматриваемому понятию.** Понятие может иметь ту или иную семантику, в зависимости от набора собственных функций.

Теория понятий допускает осуществление семантических процессов не только естественным, но и искусственным интеллектом.

Традиционно основу формализаций составляют формальные языки. Понятно, что формализованные языки предназначены и используются для представления и преобразования семантики, хотя осознание того, что есть семантика (и есть ли она на "самом деле"), каким образом она в языках (языками) представляется, каким изменениям и преобразованиям она может подвергаться продолжает оставаться на интуитивном (или даже сомнительном) уровне, несмотря на интенсивные исследования этой проблематики такими дисциплинами, как математика, информатика, лингвистика, философия. **Исследование <u>семантических свойств значений</u> – проблема, которая еще до**

недавнего времени была лишь онтологической философской проблемой, становится сегодня одной из **<u>актуальнейших проблем информационных технологий</u>. <u>Особенно важны и актуальны семантические аспекты формализаций для практики информационных технологий.</u>** Кроме того, из-за неразработанности семантических аспектов формализаций работа с семантикой продолжает оставаться привилегией и уделом человеческого мышления. Необходимость и важность семантических аспектов формализаций уже давно и в достаточной мере осознается исследователями. В разное время проблеме исследования семантических свойств значений уделяли внимание философы и лингвисты Рассел Б., Фреге Г., Карнап Р.; математики и логики Черч А., Льюис К.И., Тарский А., Лукасевич Я. Диапазон этих исследований чрезвычайно широк: **от разработок эвристических, прикладных семантических систем до попыток создания внесемантичных (асемантичных) формализмов**. Традиционным подходом этих исследований к решению семантических проблем формализаций является разработка и исследование различных способов семантической интерпретации формализмов. В соответствии с этим воззрением **существующие формализмы скорее следует считать не семантическими формализмами, а просто символизмами, поскольку они всего лишь представляют собой систему символьных обозначений интуитивных понятий, определений, действий, отношений. <u>Символизмы выполняют лишь начальный этап формализации: материализацию и представление интуитивной семантики.</u>** И хотя многие некорректности и ошибки, присущие интуитивным представлениям, привносятся таким образом и в формализмы, этот процесс (процесс материализации и представления семантики) едва ли подлежит исследованию и обсуждению из-за недоступности аргументных объектов этого преобразования. Однако последующая работа с этими уже вполне осязаемыми, реальными представлениями может быть исследована и надлежащим образом определена. Существенно и ценно, что правила и технология работы с этими представлениями уже никак не зависят от прикладной специфики этих понятий, а полностью определяются их собственной спецификой. Такая постановка проблемы семантической интерпретации формализмов естественным образом предполагает некоторую другую проблему: **если делается попытка извлечения семантики из формализмов, то, естественно, следует предварительно исследовать вопрос о помещении этой самой семантики в формализмы**. В такой постановке проблема семантики не исследуется, наверное, потому, что полагается, что сама по себе семантика слишком нематериальна и эфемерна, чтобы быть предметом такого исследования и что формализация и есть как раз первейший, изначальный этап материализации семантики, после которого только и появляется возможность ее предметного обсуждения и исследования.

Недостатком традиционного подхода к построению и использованию формализмов как раз и является использование интуитивной семантики. Вслед за допущением интуитивной семантики неформальной оказывается и ее “привязка” к тем или иным элементам формализмов. Предположение и использование интуитивной семантики лишает концептуальности сам метод формализации, оставляя за ним лишь вспомогательные функции идентификации.

Представляется, что концептуальная значимость формализаций могла бы быть обеспечена одним из двух способов: первый способ мог бы заключаться в разработке и построении формализма, полностью исключающего использование интуитивной семантики, т.е. разработку асемантичного формализма; второй способ заключается в построении некоей сущности, изначально обладающей семантикой. Сначала рассмотрим возможность построения асемантичного формализма. Второй вариант составляет основу теории понятий.

Для **семантических исследований особое значение имеет теория нормальных алгоритмов как достаточно фундаментальная попытка создания асемантичного формализма**. Успешное построение такого формализма означало бы, что семантика не имеет концептуальной ценности и является не более чем вспомогательным, технологическим средством. Построение этой асемантической формализации не может считаться успешным из-за следующего упущения. При построении теории нормальных алгоритмов оказывается необходимым преобразовывать схемы алгоритмов в слова с целью их последующего анализа и\или преобразования другими алгоритмами. Поскольку никакой семантики у слов в теории нормальных алгоритмов не предполагается, то естественно полагается, что для требуемого преобразования достаточно обеспечить однозначность преобразования слов (в частности, преобразования слова, представляющего схему нормального алгоритма (или являющегося схемой нормального алгоритма) в слово в алфавите (данных) этого алгоритма), и некоторый способ такого преобразования в теории нормальных алгоритмов предлагается. Но ничто не ограничивает возможности использования некоторого другого (тоже однозначного) способа требуемого преобразования. И анализирующие (преобразующие) алгоритмы на таких различных представлениях одного и того же алгоритма, естественно, могут давать различные результаты. Оснований для предпочтения одного из возможных способов не имеется. Выводы, основывающиеся на таких сопоставлениях, не будут абсолютными. В содержательных теориях, предполагающих семантику слов, требование ее сохранения выступает ограничителем допустимости преобразований. Модификация нормальных алгоритмов, не допускающая неоднозначного представление схем алгоритмов в виде слов, приводит к расширению понятия нормального алгоритма, по сути, понятием семантики. **Модифицированные нормальные алгоритмы** оказываются и более сильными (они оказываются не сводимыми к нормальным алгоритмам), что говорит и о нецелесообразности и ограниченности асемантических формализаций.

1.1. Семантический формализм

Для разработки и исследования семантических аспектов данных предлагается теория, в которой данные рассматриваются совместно с операциями над ними. (На этом же подходе базируется и теория категорий, но отличие заключается в том, что в теории категорий изначально операции рассматриваются над элементами множеств.) **В теории понятий данные и операции над ними трактуются и рассматриваются в диалектическом единстве, и именно <u>рассмотрение и исследование этого единения составляет предмет теории понятий</u>. В отличие от алгебр, которые в качестве аргументных данных операций предполагаются элементы множеств, в теории понятий в качестве <u>аргументных данных предполагаются понятия</u>.** Проблема семантической интерпретации данных затрагивает общие, фундаментальные вопросы и концепции формализаций. **Мета-алгебра понятий представляет не только вычислительные, но и аналитические аспекты формализаций.** Концептуальные проблемы семантики формализаций рассмотрены в разделах 1.1, 1.2, 1.3. Хотя проблема определения понятия алгоритма (функции), безусловно, является основной проблемой, для решения которой теория понятий оказывается необходимой, исходной, побудительной проблемой, исследование и решение которой привело к построению теории аналитических понятий, была другая, достаточно утилитарная, впрочем, не менее значимая проблема, — проблема семантической интерпретации данных в языках и системах программирования.

Асемантичный формализм продолжает оставаться неосуществленной мечтой. Альтернативой, противоположной построению асемантического формализма, является **рассмотрение семантики, как некоей реальной <u>сущности</u>**. В отличие от традиционных подходов, в которых исследуется проблема представления формализмами интуитивной семантики, **теория понятий предлагает некоторую структуру, которая не представляет семантику, а создает семантику**. **Структурой, способной обладать семантикой, в теории понятий является понятие**. Концепция семантического формализма основывается на подходе, в некотором смысле противоположном традиционному подходу к анализу семантики формализмов: не семантика надстраивается над формализмом, а **формализация рассматривается как метод конструирования и преобразования семантики. Это является основной и определяющей концепцией построения теории понятий: <u>не семантика для формализмов, а формализмы для семантики</u>.** Семантические проблемы при таком подходе перемещаются от использования формализаций к этапу их построения, создания. Для осуществления этого подхода потребовалась разработка и создание объекта, наиболее адекватного сущности интуитивной семантики. **Сущностью, обладающей семантикой, являются понятия.** Семантический формализм не пользуется интуитивной семантикой и не использует интуитивную семантику. Осуществление концепции семантического формализма полностью решает проблему формализации: обеспечивает возможность работы с осмысленной (семантической) информацией. **<u>Теория понятий реализует концепцию семантического формализма и позволяет ставить задачу автоматизации семантических процессов</u>**.

Понятие представляет собой достаточно сложную, специфическую и необычную сущность, для работы с которой интуитивные и прагматические представления и навыки оказываются, как правило, бесполезными или даже вредными (в отличие от многих других интуитивно достаточно не плохо представляемых сущностей). Некоторые свойства понятий оказываются неожиданными и непривычными (но не невозможными). Существенно, что правила и технология работы с этими сущностями уже никак не зависят от прикладной специфики этих понятий, а всецело определяются их собственной спецификой.

1.2. Нормальные алгоритмы Маркова

Теория нормальных алгоритмов (или алгорифмов, как называл их создатель теории) была разработана А. А. Марковым в конце 1940-х — начале 1950-х гг. XX в. Эти алгоритмы представляют собой некоторые правила по переработке слов в каком-либо алфавите, так что исходные данные и искомые результаты для алгоритмов являются словами в некотором алфавите.

Марковские подстановки

Алфавитом называется любое непустое множество. Его элементы называются буквами, а любые последовательности букв — словами в данном алфавите. Для удобства рассуждений допускаются пустые слова (они не имеют в своем составе ни одной буквы). Пустое слово будем обозначать Λ. Если *A* и *B*— два алфавита, причем $A \subseteq B$, то алфавит *B* называется расширением алфавита *A*.

Слова будем обозначать латинскими буквами: P, Q, R (или этими же буквами с индексами). Одно слово может быть составной частью другого слова. Тогда первое называется подсловом второго или вхождением во второе. Например, если *A* — алфавит русских букв, то можем рассмотреть такие слова: $P_1 = \mathrm{paragraf}$, $P_2 = \mathrm{graf}$, $P_3 = \mathrm{ra}$. Слово P_2 является подсловом слова P_1, а P_3— подсловом P_1 и P_2, причем в P_1 оно входит дважды. Особый интерес представляет первое вхождение.

Определение 1. *Марковской подстановкой называется операция над словами, задаваемая с помощью упорядоченной пары слов* (P, Q)*, состоящая в следующем. В заданном слове* R *находят первое вхождение слова* P *(если таковое имеется) и, не изменяя остальных частей слова* R*, заменяют в нем это вхождение словом* Q*. Полученное слово называется результатом применения марковской подстановки* (P, Q) *к слову* R*. Если же первого вхождения* P *в слово* R *нет (и, следовательно, вообще* *нет ни одного вхождения P в R), то считается, что марковская подстановка (P, Q) неприменима к слову R.*

Частными случаями марковских подстановок являются подстановки с пустыми словами:

$$(\Lambda, Q), \qquad (P, \Lambda), \qquad (\Lambda, \Lambda).$$

Пример 2. Примеры марковских подстановок рассмотрены в таблице, в каждой строке которой сначала дается преобразуемое слово, затем применяемая к нему марковская подстановка и, наконец, получающееся в результате словно:

Преобразуемое слово	**Марковская подстановка**	**Результат**
138 578 926	(8 578 9, 00)	130 026
тарарам	(ара, Λ)	трам
шрам	(ра, ар)	шарм
функция	(Λ, ζ-)	ζ-функция
логика		лог
книга		книга
поляна	(пор, т)	[*неприменима*]

Для обозначения марковской подстановки (P, Q) используется запись $P \to Q$. Она называется формулой подстановки (P, Q). Некоторые подстановки (*P*,*Q*) будем называть заключительными (смысл названия станет ясен чуть позже). Для обозначения таких подстановок будем использовать запись $P \to \ .Q$, называя ее формулой заключительной подстановки. Слово *P* называется левой частью, а *Q*— правой частью в формуле подстановки.

Нормальные алгоритмы и их применение к словам

Упорядоченный конечный список формул подстановок

$$\begin{cases} P_1 \to (\centerdot)Q_1, \\ P_2 \to (\centerdot)Q_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_r \to (\centerdot)Q_r, \end{cases}$$

в алфавите *A* называется схемой (или записью) нормального алгоритма в *A*. (Запись точки в скобках означает, что она может стоять в этом месте, а может отсутствовать.) Данная схема определяет (детерминирует) алгоритм преобразования слов, называемый **нормальным алгоритмом Маркова**. Дадим его точное определение.

Определение 3. Нормальным алгоритмом (Маркова) в алфавите *A* называется следующее правило построения последовательности V_i слов в алфавите *A*, исходя из данного слова V в этом алфавите. В качестве начального слова V_0 последовательности берется слово V. Пусть для некоторого $i \geqslant 0$ слово V_i построено и процесс построения рассматриваемой последовательности еще не завершился. Если при этом в схеме нормального алгоритма нет формул, левые части которых входили бы в V_i, то V_{i+1} полагают равным V_i, и процесс построения последовательности считается завершившимся. Если же в схеме имеются формулы с левыми частями, входящими в V_i, то в качестве V_{i+1} берется результат марковской подстановки правой части первой из таких формул вместо первого вхождения ее левой части в слово V_i; процесс построения последовательности считается завершившимся, если на данном шаге была применена формула заключительной подстановки) и продолжающимся — в противном случае. Если процесс построения упомянутой последовательности обрывается, то говорят, что рассматриваемый нормальный алгоритм применим к слову *V*. Последний член *W* последовательности называется результатом применения нормального алгоритма к слову *V*. Говорят, что нормальный алгоритм перерабатывает *V* и *W*.

Последовательность V_i будем записывать следующим образом:

$$V_0 \Rightarrow V_1 \Rightarrow V_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow V_{m-1} \Rightarrow V_m,$$

где $V_0 = V$ и $V_m = W$.

Мы определили понятие нормального алгоритма в алфавите *А*. Если же алгоритм задан в некотором расширении алфавита *А*, то говорят, что он есть нормальный алгоритм над *А*.

Рассмотрим примеры нормальных алгоритмов.

Пример 4. Пусть $A = \{a, b\}$— алфавит. Рассмотрим следующую схему нормального алгоритма в *А:*

$$\begin{cases} a \to\ .\Lambda, \\ b \to b. \end{cases}$$

Нетрудно понять, как работает определяемый этой схемой нормальный алгоритм. Всякое слово *V* в алфавите *А*, содержащее хотя бы одно вхождение буквы *a*, он перерабатывает в слово, получающееся из *V* вычеркиванием в нем самого левого (первого) вхождения буквы *a*. Пустое слово он перерабатывает в пустое. (Алгоритм не применим к таким словам, которые содержат только букву *b*.) Например,

$$aabab \Rightarrow abab, \quad ab \Rightarrow b, \quad aa \Rightarrow a, \quad bbab \Rightarrow bbb, \quad baba \Rightarrow bba.$$

Пример 5. Пусть $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$— алфавит. Рассмотрим схему

$$\begin{cases} a_0 \to \Lambda, \\ a_1 \to \Lambda, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n \to \Lambda, \\ \Lambda \to_{\bullet} \Lambda. \end{cases}$$

Она определяет нормальный алгоритм, перерабатывающий всякое слово (в алфавите *А*) в пустое слово. Например,

$$a_1a_2a_1a_3a_0 \Rightarrow a_1a_2a_1a_3 \Rightarrow a_2a_1a_3 \Rightarrow a_2a_3 \Rightarrow a_3 \Rightarrow \Lambda\,;$$

$$a_0a_2a_2a_1a_3a_1 \Rightarrow a_2a_2a_1a_3a_1 \Rightarrow a_2a_2a_3a_1 \Rightarrow a_2a_2a_3 \Rightarrow a_2a_3 \Rightarrow a_3 \Rightarrow \Lambda.$$

Нормально вычислимые функции и принцип нормализации Маркова

Как и машины Тьюринга, **нормальные алгоритмы не производят собственно вычислений: они лишь производят преобразования слов, заменяя в них одни буквы другими по предписанным им правилам.** В свою очередь, мы предписываем им такие правила, результаты применения которых мы можем интерпретировать как вычисления. Рассмотрим два примера.

Пример 6. В алфавите $A = \{A\}$ схема $\Lambda \to .1$ определяет нормальный алгоритм, который к каждому слову в алфавите $A = \{A\}$ (все такие слова суть следующие: $\Lambda,\ 1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ 11111$ и т.д.) приписывает слева 1. Следовательно, алгоритм реализует (вычисляет) функцию $f(x) = x + 1$.

Пример 7. Дана функция

$$\varphi_3(11\ldots1) = \begin{cases} 1, & \text{if } n \text{ delitsya na } 3, \\ \Lambda, & \text{if } n \text{ ne delitsya na } 3, \end{cases}$$

где *n*— число единиц в слове $11\ldots1$. Рассмотрим нормальный алгоритм в алфавите $A = \{1\}$ со следующей схемой:

$$\begin{cases} 111 \to \Lambda, \\ 11 \to .\Lambda, \\ 1 \to .\Lambda, \\ \Lambda \to 1 \end{cases}$$

Этот алгоритм работает по такому принципу: пока число букв 1в слове не меньше 3, алгоритм последовательно стирает по три буквы. Если число букв меньше 3, но больше 0, то оставшиеся буквы 1 или 11 стираются заключительно; если слово пусто, оно заключительно переводится в слово 1. Например:

$$1111111 \Rightarrow 1111 \Rightarrow 1 \Rightarrow \Lambda;$$
$$111111111 \Rightarrow 111111 \Rightarrow 111 \Rightarrow \Lambda \Rightarrow 1.$$

Таким образом, рассмотренный алгоритм реализует (или вычисляет) данную функцию.

Сформулируем теперь точное определение такой вычислимости функций.

Определение 8. *Функция f, заданная на некотором множестве слов алфавита А, называется нормально вычислимой, если найдется такое расширение B данного алфавита $(A \subseteq B)$ и такой нормальный алгоритм в B, что каждое слово V (в алфавите А) из области определения функции fэтот алгоритм перерабатывает в слово $f(V)$.*

Таким образом, нормальные алгоритмы примеров 6 и 7 показывают, что функции $f(x) = x + 1$ и $\varphi_3(x)$ нормально вычислимы. Причем соответствующие нормальные алгоритмы удалось построить в том же самом алфавите *А*, на словах которого были заданы рассматривавшиеся функции, т.е. расширять алфавит не потребовалось $(B = A)$. Следующий пример демонстрирует нормальный алгоритм в расширенном алфавите, вычисляющий данную функцию.

Пример 9. Построим нормальный алгоритм для вычисления функции $f(x) = x + 1$ не в одноичной системе (как сделано в примере 6), а в десятичной. В качестве алфавита возьмем перечень арабских цифр $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а нормальный алгоритм будем строить в его расширении $B = A \cup \{a, b\}$. Вот схема этого нормального алгоритма (читается по столбцам):

$0b \to .1$	$a0 \to 0a$	
$1b \to .2$	$a1 \to 1a$	$1a \to 1b$
$2b \to .3$	$a2 \to 2a$	$2a \to 2b$
$3b \to .4$	$a3 \to 3a$	$3a \to 3b$
$4b \to .5$	$a4 \to 4a$	$4a \to 4b$
$5b \to .6$	$a5 \to 5a$	$5a \to 5b$
$6b \to .7$	$a6 \to 6a$	$6a \to 6b$
$7b \to .8$	$a7 \to 7a$	$7a \to 7b$
$8b \to .9$	$a8 \to 8a$	$8a \to 8b$
$9b \to b0$	$a9 \to 9a$	$9a \to 9b$
$b \to .1$	$0a \to 0b$	$\Lambda \to a$

Попытаемся применить алгоритм к пустому слову Λ. Нетрудно понять, что на каждом шаге должна будет применяться самая последняя формула данной схемы. Получается бесконечный процесс:

$$\Lambda \Rightarrow a \Rightarrow aa \Rightarrow aaa \Rightarrow aaaa \Rightarrow \ldots$$

Это означает, что к пустому слову данный алгоритм не применим.

Если применить теперь алгоритм к слову 499, получим следующую последовательность слов: $499 \Rightarrow a499$ (применена последняя формула) $\Rightarrow 4a99$ (формула из середины второго столбца) $\Rightarrow 49a9 \Rightarrow 499b$ (дважды применена формула из конца второго столбца) $\Rightarrow 499b$ (предпоследняя формула) $\Rightarrow 49b0 \Rightarrow 4b00$

(дважды применена предпоследняя формула первого столбца) $\Rightarrow 500$ (применена формула из середины первого столбца).

Таким образом, слово 499 перерабатывается данным нормальным алгоритмом в слово 500. Предлагается проверить, что $328 \Rightarrow 329,\ 789 \Rightarrow 790$.

В рассмотренном примере нормальный алгоритм построен в алфавите B, являющемся существенным расширением алфавита a (т.е. $A \subseteq B$ и $A \neq B$), но данный алгоритм слова в алфавите a перерабатывает снова в слова в алфавите *А*. В таком случае говорят, что алгоритм задан над алфавитом *А*.

Создатель теории нормальных алгоритмов А. А. Марков выдвинул гипотезу, получившую название **"Принцип нормализации Маркова"**. Согласно этому принципу, для нахождения значений функции, заданной в некотором алфавите, тогда и только тогда существует какой-нибудь алгоритм, когда функция нормально вычислима.

Сформулированный принцип, как и тезисы Тьюринга и Чёрча, носит внематематический характер и не может быть строго доказан. Он выдвинут на основании математического и практического опыта.

Все, что известно о тезисах Тьюринга и Чёрча, можно с полным правом отнести к принципу нормализации Маркова. Косвенным подтверждением этого принципа служат теоремы следующего пункта, устанавливающие эквивалентность и этой теории алгоритмов теориям машин Тьюринга и рекурсивных функций.

Совпадение класса всех нормально вычислимых функций с классом всех функций, вычислимых по Тьюрингу

Это совпадение будет означать, что понятие нормально вычислимой функции равносильно понятию функции, вычислимой по Тьюрингу, а вместе с ним и понятию частично рекурсивной функции.

Теорема 10. *Всякая функция, вычислимая по Тьюрингу, будет также и нормально вычислимой.*

Доказательство

Пусть машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ и алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ вычисляет некоторую функцию f, заданную и принимающую значения в множестве слов алфавита *A* (словарную функцию на *A*). Попытаемся представить программу этой машины Тьюринга в виде схемы некоторого нормального алгоритма. Для этого нужно каждую команду машины Тьюринга $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j X$ представить в виде совокупности марковских подстановок. Конфигурации, возникающие в машине Тьюринга в процессе ее работы, представляют собой слова в алфавите $A \cup Q$. Эти слова имеют вид: $a_{i_1} \ldots a_{i_k} q_\alpha a_{i_{k+1}} \ldots a_i$. Нам понадобится различать начало слова и его конец (или его левый и правый концы). Для этого к алфавиту $A \cup Q$ добавим еще два символа (не входящие ни в A, ни в Q): $A \cup Q \cup \{u, v\}$. Эти символы будем ставить соответственно в начало и конец каждого машинного слова w: uwv.

Пусть на данном шаге работы машины Тьюринга к машинному слову w предстоит применить команду $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j X$. Это означает, что машинное слово w (а вместе с ним и слово uwv) содержит подслово $q_\alpha a_i$. Посмотрим, какой совокупностью марковских подстановок можно заменить данную команду в каждом из следующих трех случаев:

а) $X = C$, т.е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$. Ясно, что в этом случае следующее слово получается из слова uwv с помощью подстановки $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$, которую мы и будем считать соответствующей команде $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j$;

б) $X = L$, т.е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j L$. Нетрудно понять, что в этом случае для получения из слова uwv следующего слова надо к слову uwv применить ту подстановку из совокупности

$a_0 q_\alpha a_i \to q_\beta a_0 a_j$;

$a_1 q_\alpha a_i \to q_\beta a_1 a_j$;

$\vdots$

$a_m q_\alpha a_i \to q_\beta a_m a_j$;

$u q_\alpha a_i \to u q_\beta a_0 a_j$,

которая применима к слову uwv. В частности, последняя подстановка применима только тогда, когда q_α— самая левая буква в слове w, т.е. когда надо пристраивать ячейку слева;

в) $X = \Pi$, т.е. команда имеет вид: $q_\alpha a_i \to q_\beta a_j \Pi$. В этом случае аналогично, чтобы получить из слова uwv следующее слово, нужно к слову uwv применить ту из подстановок совокупности

$q_\alpha a_i a_0 \to a_j q_\beta a_0$;

$q_\alpha a_i a_1 \to a_j q_\beta a_1$;

$\vdots$

$q_\alpha a_i a_m \to a_j q_\beta a_m$;

$q_\alpha a_i v \to a_j q_\beta a_0 v$.

которая применима к слову uwv.

Поскольку слово $q_\alpha a_i$ входит в слово w только один раз, то к слову uwv применима только одна из подстановок, перечисленных в пунктах б,в. Поэтому порядки следования подстановок в этих пунктах безразличны, важны лишь их совокупности.

Заменим каждую команду из программы машины Тьюринга указанным способом совокупностью марковских подстановок. Мы получим схему некоторого нормального алгоритма. Теперь ясно, что применить к слову w данную машину Тьюринга — это все равно, что применить к слову uwv построенный нормальный алгоритм. Другими словами, действие машины Тьюринга равнозначно действию подходящего нормального алгоритма. Это и означает, что всякая функция, вычислимая по Тьюрингу, нормально вычислима.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 11. *Всякая нормально вычислимая функция вычислима по Тьюрингу.*

Эквивалентность различных теорий алгоритмов

Итак, мы познакомились с тремя теориями, каждая из которых уточняет понятие алгоритма, и доказали, что все эти теории равносильны между собой. Другими словами, они описывают один и тот же класс функций, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Следующие классы функций (заданных на натуральных числах и принимающих натуральные значения) совпадают:*

[indent]*а) класс всех функций, вычислимых по Тьюрингу;*

б) класс всех частично рекурсивных функций;

в) класс всех нормально вычислимых функций.

[/indent]

Полезно уяснить смысл и значение этого важного результата. В разное время в разных странах ученые независимо друг от друга, изучая интуитивное понятие алгоритма и алгоритмической вычислимости, создали теории, описывающие данное понятие, которые оказались равносильными. Этот факт служит мощным косвенным подтверждением адекватности этих теорий опыту вычислений, справедливости каждого из тезисов Тьюринга, Чёрча и Маркова. В самом деле, ведь если бы один из этих классов оказался шире какого-либо другого класса, то соответствующий тезис Тьюринга, Чёрча или

Маркова был бы опровергнут. Например, если бы класс нормально вычислимых функций оказался шире класса рекурсивных функций, то существовала бы нормально вычислимая, но не рекурсивная функция. В силу ее нормальной вычислимости она была бы алгоритмически вычислима в интуитивном понимании алгоритма, и предположение о ее нерекурсивности опровергало бы тезис Чёрча. Но классы Тьюринга, Чёрча и Маркова совпадают, и таких функций не существует. Это и служит еще одним косвенным подтверждением тезисов Тьюринга, Маркова и Чёрча.

Можно отметить, что существуют еще и другие теории алгоритмов, и для всех них также доказана их равносильность с рассмотренными теориями.

1.3. О семантике алгоритмов, данных и понятий

Основной проблемой формального, аналитического определения понятия алгоритма в информатике является проблема семантической интерпретации данных, с которыми работают алгоритмы. Алгоритмы преобразуют наборы символов в некоторые другие наборы (возможно, других) символов; без обеспечения их семантической, содержательной интерпретации алгоритмы становятся не более, чем преобразователем ничего не значащих наборов символов, игрой в символы, не имеющей прикладного применения. Так, в теории нормальных алгоритмов не удается сформулировать семантически корректное определение применения алгоритмов к алгоритмам.
Теория нормальных алгоритмов (теория, которая предлагает вариант формального определения преобразований слов в алфавитах), например, проблему семантической интерпретации данных (как значимую самостоятельную проблему) не только не решает, но даже никак ее не обсуждает и не ставит. Алгоритмы, как они определены в теории нормальных алгорифмов, преобразуют именно семантически неинтерпретируемые наборы символов, интерпретация остается вне формализации. Однако от проблемы семантической интерпретации данных полностью устраниться не удается. При построении самой теории нормальных алгоритмов некоторые содержательные (т.е. требующие учитывать семантику данных) применения алгоритмов все же приходится рассматривать: в теории нормальных алгоритмов возникает необходимость рассмотрения применения алгоритмов к

алгоритмам, что, тем самым, предполагает обеспечение семантической интерпретации данных. Здесь сразу возникает множество трудных вопросов по существу семантической интерпретации. **Теория нормальных алгоритмов решает проблему семантической интерпретации данных “очень просто”, применяя в качестве критерия семантической эквивалентности принцип взаимооднозначного соответствия элементов двух множеств. Полагается, что если элементы двух множеств находятся в отношении взаимооднозначного соответствия, то эти множества можно считать семантически эквивалентными.** По этой схеме в теории нормальных алгоритмов осуществляется применение алгоритмов к алгоритмам: устанавливается некоторое взаимооднозначное соответствие между множеством слов, представляющих схемы алгоритмов, и аргументным (для некоторого алгоритма) множеством слов; взаимооднозначность этого соответствия принимается в качестве несомненного критерия правомерности замены одного другим. Теория нормальных алгоритмов (как, впрочем, и многие другие дисциплины) рассматривает упомянутый принцип взаимнооднозначного соответствия элементов множеств в качестве критерия их семантической эквивалентности. С семантической, содержательной точки зрения количественное равенство, обеспечивающее возможность установления того или иного взаимооднозначного соответствия, никак не может служить хоть каким-то обоснованием семантического соответствия составляющих эти множества элементов, основанием для замены одного другим. Установление одного соответствия не исключает возможности многих других соответствий, и ни одно из этих соответствий не может считаться превалирующим, что и порождает семантические проблемы. Если бы взаимооднозначность соответствия действительно обеспечивала бы семантическую, содержательную эквивалентность, то не имело бы почти никакого смысла одно множество и заменять другим. Быть может для количественных сравнений такое соотнесение может оказываться вполне удовлетворительным, но с семантической точки зрения этот принцип не может быть признан удовлетворительным и приемлемым. Действительно, из того, что количество дней недели совпадает с количеством музыкальных нот или цветов радуги и между ними легко может быть установлено взаимооднозначное соответствие, не могут следовать какие-либо утверждения о семантической, содержательной эквивалентности этих сущностей, о допустимости и приемлемости замены одних элементов другими.

Пример использования отношения взаимооднозначных соответствий, использованный в теории нормальных алгоритмов для построения схемы применения алгоритмов к алгоритмам, не обеспечиывает семантически корректного (однозначного) самоприменения нормальных алгоритмов.

1.4. Типы научных теорий, их основные функции

По своей структуре ***научная теория*** **представляет собой системy первоначальных, исходных понятий и основных законов, из которых с помощью определения могут быть образованы все другие ее понятия, а из основных законов логически выведены остальные законы.** Но в таком виде теория появляется в результате трудного поиска сначала простейших эмпирических законов, а затем теоретических законов меньшей степени общности. **Только в конце исследования приходят к фундаментальным теоретическим законам.** Поэтому создание теории как определенной системы единого, целостного научного знания является делом значительно более сложным и трудным, чем разработка и проверка отдельной гипотезы или закона. Ведь в **состав законченной теории** входят **системы понятий, суждений, законов и вспомогательных допущений**. Гипотезы общего характера, хорошо подтвержденные и надежно обоснованные, впоследствии становятся законами, и поэтому включаются в состав теории. Таким образом, в своей завершенной форме ***теория представляет собой единую, целостную систему знания, элементы которой — понятия, обобщения, аксиомы и законы — связываются определенными логическими отношениями***.

Структура теорий, а также их классификация.

1. ***Структура теории.*** В точных науках в структуре теории выделяют обычно **исходные, или первичные, понятия, которые считаются неопределяемыми**. Все другие понятия вводятся с помощью операции логического определения. **Костяком теории служат ее основные законы или фундаментальные принципы**. Из них по правилам дедуктивной логики выводятся вторичные, или производные, законы.

Наиболее четкую структуру имеют математические теории, в которых все **вновь вводимые понятия определяются через первоначальные понятия с помощью правил определения, а теоремы доказываются путем логических правил вывода из аксиом.** Теории других наук, опирающиеся на опыт, наблюдения и факты, не могут быть представлены в такой форме, хотя бы потому, что с открытием принципиально новых фактов и зависимостей между ними, меняются их понятия и законы. Поэтому в подобных фактуальных теориях обычно ограничиваются установлением основных законов, принципов и понятий, содержание которых не остается неизменным, а меняется с развитием эмпирических и теоретических исследований. Тем не менее, стремление к **аксиоматическому идеалу построения теорий существует не только в математике, но и в других науках**. Ведь с помощью таких теорий можно чисто логически вывести большое число единичных фактов из небольшого числа исходных посылок общей теории. Иногда в целях систематизации научного знания вместо аксиоматического метода используется **метод принципов**, с помощью которого все известное знание рассматривается под углом зрения некоторых общих принципов. Так поступил, например. И. Ньютон при построении классической механики.

2. ***Классификация теорий*** может проводиться по разным основаниям логического деления.

Во-первых, по адекватности отображения исследуемой области явлений различают ***феноменологические*** **и нефеноменологические** теории, которые чаще всего называют ***аналитическими***. **Теории первого рода описывают действительность на уровне явлений, или феноменов, не раскрывая их сущности**. Такие теории возникают на предварительных уровнях научного исследования, когда происходит точное описание явлений и систематизация научного материала. Примером может служить геометрическая оптика, которая изучала явления распространения, отражения и преломления света, не раскрывая природы самого света. В противоположность этому **волновая и электромагнитная теории представляют собой <u>аналитические теории</u> потому, что они <u>раскрывают сущность</u> оптических <u>явлений</u>**. Волновая теория рассматривала свет как результат колебаний некоего мирового эфира, а электромагнитная теория — особого рода электромагнитных колебаний. Аналогично этому, многие **теории микросоциологии можно отнести к теориям феноменологического уровня, а теории, раскрывающие сущность социальных фактов и действий — к аналитическим.**

По степени точности предсказаний научные теории, как и законы, можно разделить на ***детерминистические*** **и** ***стохастические***. Детерминистические теории хотя и дают точные и достоверные предсказания, но в силу сложности многих явлений и процессов, наличия в мире значительной доли неопределенности и случайностей, применяются значительно реже. Стохастические теории дают вероятные предсказания, основанные на изучении законов случая. Такие теории применяются не только в физике и биологии, но и в социально-экономических и гуманитарных науках, когда делаются предсказания или прогнозы о процессах, в которых значительную роль играет неопределенность, связанная с взаимодействием случайных событий массового характера.

Не останавливаясь на других классификациях, остановимся на двух важнейших типах теорий, которые играют важную роль в современной экономике и социологии.

Позитивные и нормативные теории различаются по своему подходу к *явлениям.* В современной экономической и социальной науках принято различать позитивный и нормативный подходы. ***Позитивными*** называются суждения или теории, в которых делаются утверждения, относящиеся к фактическому состоянию дел в мире. Они могут оказаться как истинными, так и ложными. Если один экономист утверждает, например, что ускоренная приватизация государственной собственности приведет к нежелательным последствиям в экономике, а другой — отрицает это утверждение, то оба они высказывают позитивные утверждения. Иначе говоря, опираясь на соответствующие факты, они по-разному объясняют действительность, но не дают ей оценки в терминах соответствующих норм, т.е. не рассматривают такую политику как хорошую или плохую. ***Нормативные*** высказывания всегда предполагают определенную оценку, которая основывается на ценностных ориентациях ученого, его взглядах и мировоззрении. Оценки, нормы поведения, действия, и т.п. не поддаются анализу с точки зрения соответствия фактам, и поэтому нормативные суждения, в отличие от позитивных, не могут рассматриваться ни как истинные, ни как ложные. Разумеется, на практическом уровне применения экономической теории избежать оценок вряд ли возможно. Тем не менее, сторонники позитивного подхода считают, что экономические теории должны быть *позитивными* по своему характеру, т.е. опираться на строго объективные методы научного исследования, и поэтому должны быть свободны от каких-либо субъективных оценок и норм. Если, например, экономист ставит своей целью исследовать две основные формы налогообложения — единую для всех граждан или прогрессивную, то он должен добросовестно и тщательно изучить посылки, на которые они опираются, и вывести из них все необходимые следствия. Никаких субъективных мнений или оценок относительно этих форм налогообложения он не должен высказывать.

Задача позитивной экономической, социологической и политической теорий состоит в том, чтобы установить законы, принципы и правила, руководствуясь которыми, можно наиболее эффективно решить поставленную задачу. Если, например, в рыночной экономике ресурсы считаются заданными, то экономист должен проанализировать все способы наиболее рационального их использования для достижения поставленной цели. Следует, однако, отметить, что позитивные теории отличаются от простых дескриптивных теорий, которые лишь описывают явления и процессы, в то время как позитивные теории раскрывают механизм этих процессов.

Нормативные экономические теории используют результаты аналитических исследований, полученные в позитивной теории, но требуют определенной нормативной их оценки. Избежать таких оценок невозможно, так как при выборе гипотез, подборе фактов для их проверки, построении экономических моделей и теорий всегда приходится опираться на субъективные мнения, критерии и нормы выбора. Многие защитники нормативного подхода вообще считают экономические теории совершенно бесполезными, если они не используются для принятия конкретных решений на разных этапах хозяйственного или государственного управления. Поэтому нормативная теория не только опирается на результаты точных аналитических методов исследования о возможных способах решения различных общественных проблем, но и должна давать им соответствующую оценку.

Микроэкономические и макроэкономические теории. Такая классификация широко используется в физике и других точных науках, а также в экономике. В физике к микротеориям относят теории, которые исследуют взаимодействия микрочастиц материи: атомы, протоны, нейтроны, электроны и другие элементарные частицы. В отличие от них классическая механика, электродинамика, термодинамика и другие являются макротеориями.

Наиболее фундаментальная классификация экономических теорий основана на отнесении их к уровню микроэкономики и макроэкономики. К микроэкономическим теориям относят теории, охватывающие деятельность отдельных домохозяйств, предприятий, фирм и компаний, которые по своей сути составляют отдельные элементы экономической системы страны. Макроэкономическая теория изучает деятельность экономической системы в рамках народного хозяйства всей страны.

1.5. Предпосылки теории понятий

Теория понятий возникла не на пустом месте: накопилось некоторое число вопросов, ответы на которые в рамках существующих формализмов не удается получить.

1.5.1. Прагматика теорий

Ценность и нужность теорий и формализмов определяется возможностью их практического применения, использования. И если для технологий, работающих с реальными объектами, их ценность обеспечена уже тем, что они применяются и применяются к реальным объектам, то для абстрактных теорий и формализмов проблема установления их практической ценности представляет определенные трудности. Дело в том, что **теории и формализмы**, как известно из практики их использования, **применяются не только к реальным объектам, но и к другим теориям и формализмам**. Поэтому теория, позволяющая определять и устанавливать ценность теорий и формализмов (не исключая и себя), обладает наибольшей ценностью. **Такой теорией является теория понятий**. Больше того, **теория понятий способна не только устанавливать практическую ценность теорий, но и обеспечивать ее**.
Теории обычно противопоставляются практике. Такое противопоставление далеко не случайно, поскольку определение подходящего практичного механизма сопоставления абстрактных сущностей и реальных объектов представляет собой трудную, до конца не решенную проблему. Недостатком многих (а особенно формальных абстрактных) теорий является недостаточное (а иногда и полное) невнимание в них к вопросам (если не сказать, даже пренебрежение вопросами) прикладного применения теорий, вопросам практического использования теорий. Прикладной аспект теорий, конечно, имеется в виду и предполагается, но сами теории этой проблеме не уделяют должного внимания, считая, что главное – это разработка, создание и построение теории, а ее применение уже не представляет какой-либо проблемы, не должно содержать трудностей и это дело уже

прикладников. Больше того, иногда считается, что этой стороне дела теория и не должна уделять внимания, ибо это уже не теория, а ее применение, т.е. это уже вне теории. К слову сказать, такого же мнения нередко придерживаются и сами прикладники: была бы стоящая теория, а уж применить ее мы сумеем. Такое невнимание к прагматике как технологии применения теорий приводит к различным казусам, антиномиям, парадоксам, вплоть до полного обесценивания самих теорий. Проблему представляют не только ошибки и некорректности при использовании теорий, но и нередко сама возможность и технология использования теорий.

Не редко в самой создаваемой теории требуется ее собственное применение. Так в теории алгоритмов требуется рассматривать применение алгоритмов к алгоритмам, в теории множеств требуется создавать множества, состоящее из подмножеств множества. Из-за отсутствия в теории аппарата, обеспечивающего ее практическое применение, приходится дополнять теорию самодельными, кустарными средствами, что не всегда оказывается удовлетворительным. Даже авторское применение утверждений теории не гарантирует удовлетворительность используемых при этом средств. Конечно, нельзя утверждать, что эта проблема игнорируется полностью. Так, одной из попыток ее преодоления (не решения, но, именно, преодоления) явилось **использование отношения взаимнооднозначного соответствия элементов**. Это отношение используется, например, в теории множеств и в теории алгоритмов. В ряде работ показывается неудовлетворительность этого приема для обеспечения прагматики теорий; некорректности, которые возникают при использовании отношения взаимнооднозначного соответствия, рассматриваются на примере этих теорий. Кроме того, это отношение (по определению) применимо только для элементов множеств, и не может быть использовано в иных случаях, например, для понятий или алгебр.

Не всякая теория допускает решение проблемы применимости. Так, например, в теории множеств элементы множеств являются фактически инкапсулированными (закрытыми) объектами, что исключает использование методов их интерпретации, требующих рассмотрения структуры элементов. Поэтому, например, представление элемента множества как некоторого подмножества элементов множества может быть выполнено только вне теории множеств неформальными средствами. В теории нормальных алгоритмов применение алгоритмов к алгоритмам основано на использовании договоренностей, и для обеспечения прагматики теории алгоритмов требуется более адекватное определение понятия алгоритма.

Проблема практического применения теорий и формализмов представляет собой самостоятельную, практически важную проблему. Соотнесение элементов формализма и объектов, к которым требуется применение теории, действительно представляет собой непростую задачу. Для осуществления прикладного аспекта формальных теорий требуется некоторая новая специфическая мета-теория, в которой прагматика теорий являлась бы как предметом этой теории, так и ее методом. **Такой теорией оказывается <u>теория аналитических понятий</u>**. Проблема применимости формализмов оказывается одной и той же, как для геометрии, так и для теории алгоритмов, как для теории множеств, так и для любых формальных теорий. Тезис «практика - критерий истины» приобретает смысл и для формальных теорий: **практика теорий обеспечивается ее прагматикой**. **Основным отношением теории понятий, на котором строится теория понятий и ее собственная прагматика, является специальное определяющее <u>понятийное отношение</u>**. Это отношение, составляющее основу семантических определений, само определяется как “совмещение” некоторых других более элементарных отношений; представление о сути определяющего отношения может быть дано через посредство описания содержательных примеров его использования. В математике не имеется какого-либо аналога этого отношения, по крайней мере, в явном виде. Автором этого отношения, скорее всего, следует считать Н.Хомского, который предложил это отношение для описания структуры грамматических конструкций. **Это отношение в отличие от отношения взаимнооднозначного соответствия является асимметричным и продуктивным: оно определяет новую сущность и само обладает семантикой.**
Приходится признавать, что мышление не очень надежно: если теории (формализмы) еще близки к реальному миру, то их истинность в некоторой степени обеспечивается этой близостью, а по мере удаления от реального мира, по мере абстрагирования теорий они оказываются все более зыбкими и ненадежными. **Различные парадоксы теории множеств не есть каверзность самих множеств, а <u>есть проявление некорректности, неправильности и ошибочности мышления</u>.**
Построение теории нормальных алгоритмов не в полной мере решает проблему формализации массовых преобразований. Нередко некорректности, неправильности мышления приводят к непродуктивным определениям (примером непродуктивного определения может служить и-вестный парадокс Б. Рассела о

“брадобрее”; аналог этого парадокса используют для обоснования “существования несуществующих” алгоритмов (в алфавите А) в формулировке: “Невозможен нормальный алгоритм в А, применимый к тем и только тем записям нормальных алгоритмов в А, которые являются записями несамоприменимых алгоритмов”). **До сих пор продолжается дискуссия о правомочности и приемлемости актуальной или потенциальной бесконечности.** Все это (и многое другое) потребовало разработки **теории понятий, как технологии мышления. Наверное, мышление, как некий процесс, происходит по некоторым правилам, и теория понятий пытается эти правила выявлять и формулировать**.

1.5.2. Неудовлетворительность формализаций понятия алгоритма

Разновидностью проблемы практического применения формализмов, потребовавшей разработки теории понятий, является проблема построения семантических формализмов. Существующие формализации не в полной мере обеспечивают работу с семантическими сущностями. Формальным основанием такого утверждения является неудовлетворительность существующих формализаций в этом отношении. Наиболее ярко эта неудовлетворительность проявляется на примере формализаций понятия алгоритма.

Формализации алгоритмов (например, теория нормальных алгорифмов) во всей полноте и точности описывают манипулирование со словами в алфавитах. Полагается, что этого для формализации интуитивного представления алгоритма достаточно, и практические приложения должны сами побеспокоится о надлежащем соотнесении требуемых реальных объектов словам (или наоборот: о соотнесении слов реальным объектам). Такую схему прагматики можно бы было действительно принять, тем более она действительно на первый взгляд представляется предельно достаточной и не видно каких-либо упущений.

Формализация алгоритмов в виде нормальных алгоритмов представляет собой лишь достаточно точно определенное средство описания преобразований слов в алфавитах. Означают ли что-либо слова, а если означают, то как они это делают, в теории нормальных алгоритмов не рассматривается: в качестве способа осуществления прагматики нормальных алгоритмов предполагается использование взаимнооднозначных соответствий слов в алфавитах. Прагматика теории нормальных алгоритмов отсутствует (или, как можно сказать точнее, ограничена ничего не означающими словами в алфавитах). Практика работы с данными требует не столько преобразований наборов букв, но и использования более содержательных данных, что нормальными алгоритмами не обеспечивается. В ряде работ на конкретном примере самоприменения нормальных алгоритмов показана неудовлетворительность нормальных алгоритмов для решения такого рода проблем. Рассмотрим эту проблему подробнее. В качестве образца объектов, безусловно, обладающих вполне определенной семантикой, рассмотрим нормальные алгоритмы, т.е. в качестве содержательного, семантически вполне определенного аргумента будем рассматривать нормальные алгоритмы. Это означает, что требуется более тщательно проанализировать проблему применения алгоритмов к алгоритмам.

В теории нормальных алгоритмов рассматривается применение алгоритмов к алгоритмам. Нормальные алгоритмы представляются схемами, состоящими из последовательностей подстановок. Нормальные алгоритмы работают на словах в алфавитах. Поскольку схемы нормальных алгоритмов не являются словами, для применения алгоритмов к алгоритмам предлагается преобразовывать схемы нормальных алгоритмов в слова. К сожалению, теория нормальных алгоритмов построена так, что само это преобразование не может быть представлено нормальным алгоритмом; в теории нормальных алгоритмов это преобразование описывается на естественном языке. Преобразование схемы нормального алгоритма в слово в требуемом алфавите осуществляется в два этапа: сначала (заменой конструктивных элементов схемы нормального алгоритма некоторыми дополнительными буквами с последующей конкатенацией формул подстановок) схема алгоритма преобразуется в его изображение – слово в расширенном алфавите преобразуемого алгоритма; затем (путем перекодировки букв этого расширенного алфавита некоторыми двухбуквенными звеньями) изображения алгоритмов переводятся в записи - слова в алфавите применяемого алгоритма. Такая перекодировка, в частности, способна обеспечить преобразование изображения самого преобразуемого алгоритма в слово в его собственном алфавите, обеспечивая возможность применения алгоритма к собственной записи. Однозначность преобразования схемы нормального алгоритма в его запись рассматривается в качестве достаточного критерия правомочности перехода от схемы алгоритма к его символьному представлению в требуемом алфавите и, тем самым, обеспечения возможности применения алгоритма к алгоритму.

Покажем, что этот критерий выбора способа превращения алгоритма в аргумент алгоритма ошибочен и неправомочен. Поскольку эти договоренности являются не более чем договоренностями, то они могут (в силу самых разнообразных причин и обстоятельств) меняться. Именно эта возможность произвольного, ничем не ограничиваемого изменения аргумента и порождает неоднозначность результата самоприменения нормальных алгоритмов. Пусть рассматривается некоторое свойство алгоритмов и имеется способ анализа, обладает ли конкретный алгоритм этим свойством или нет; пусть этот анализ может быть выполнен с помощью некоторого анализирующего алгоритма, который в применении к записям других алгоритмов сортирует их на “обладающие свойством” и “не обладающие свойством” алгоритмы, т.е. пусть он перерабатывает записи алгоритмов, например, в пустые или непустые слова соответственно. Рассмотрим применение этого алгоритма к “себе”, т.е. к собственной записи. По-скольку различных однозначных преобразований изображения алгоритма в его запись может быть предложено достаточно много и не имеется никаких предпочтений для выбора какого-то определенного, то этот анализирующий алгоритм будет квалифицировать себя то как “обладающего свойством”, то как “не обладающего свойством” в зависимости от того, какой способ преобразования изображения алгоритма в его запись использован. В ряде работ приводится конкретный пример нормального алгоритма, который в зависимости от способа его превращения в слово дает различные результаты самоприменения. Поскольку задачей является анализ вполне определенного алгоритма посредством вполне определенного анализирующего алгоритма, способ превращения схемы нормального алгоритма в аргументное слово анализирующего алгоритма является всего лишь технологическим приемом теории алгоритмов, и он не должен иметь принципиального значения и не должен, во всяком случае, влиять на результат анализа. Эта **неоднозначность результата анализа одного и того же аргумента одним и тем же способом (алгоритмом) противоречит основной концепции алгоритмических преобразований** – **давать на вполне определенном аргументе вполне определенный результат**. Неоднозначность результата самоприменения алгоритма показывает, что предлагаемый в теории нормальных алгоритмов способ применения алгоритма к алгоритмам не может быть признан удовлетворительным и приемлемым. Таким образом, строгое и однозначное описание требуемых преобразований содержательных данных (на примере самоприменения алгоритма) оказывается невозможным. Это означает, что рассматриваемая формализация не в полной мере выполняет свою роль, не все аспекты интуитивного понятия алгоритма оказываются учтенными. **Неучтенной, неформализованной и проблемной оказывается аналитическое представление семантических сущностей**. **<u>Теория нормальных алгоритмов обеспечивает лишь технологию точных и однозначных преобразований наборов символов, но не алгоритмов или каких-либо других содержательных объектов.</u>** Естественно задаться вопросом, а возможно ли усиления формализации понятия алгоритма с тем, чтобы исключить указанную неоднозначность формализации алгоритма? Многочисленные попытки построения других, более сильных и адекватных формализаций понятия алгоритма, оказывались безуспешными до тех пор, пока не выяснилось, что **камнем преткновения является концепция сравнения формализаций алгоритмов: если сравнивать алгоритмические формализации по способности алгоритмов описывать преобразования слов в алфавитах, то все формализации действительно оказываются эквивалентными.** Если к сравнению привлекать более содержательные критерии и сравнивать формализации алгоритмов по способности описывать преобразования содержательных данных, например, алгоритмов (не исключая и преобразования самих себя), то оказывается, что по этому критерию предлагаемая в ряде работ **модификация нормальных алгоритмов** превосходит классические формализации алгоритмов. **В этих работах предлагается некоторое обобщение нормальных алгоритмов – модифицированные нормальные алгорифмы**. **Модифицированные нормальные алгоритмы отличаются от нормальных алгоритмов использованием в них некоторых специальных элементов, которые являются переменными определенного (рекурсивного) типа.** Эти специальные элементы, хотя и представляются некоторыми буквами, буквами (в смысле определения буквы по Маркову) не являются. Для модифицированных нормальных алгоритмов применение алгоритмов к алгоритмам (включая и самоприменение) определено непосредственно для изображений алгоритмов так, что изображение является преобразуемым этим алгоритмом аргументом вполне однозначным образом. Модифицированные нормальные алгоритмы естественно не могут быть представлены в виде нормальных алгорифмов. Модифицированные нормальные алгорифмы не нормализуемы, т.е. они в некотором смысле являются мета-алгоритмами по отношению к нормальным алгоритмам. Более точное и адекватное определение понятия алгоритма предлагается теорией понятий.

1.5.3. Аксиоматики множеств

В качестве еще одного примера практического применения самой теории понятий (кроме собственного построения) рассматривается обобщение понятия множества. Очень часто множества используются лишь для обозначения некоторых совокупностей. В этих случаях, как правило, достаточно бытовых представлений о совокупностях, и никакой потребности в формализации множеств, а тем более в их каких-либо усилениях и обобщениях не требуется. Даже такое **фундаментальное понятие, как понятие множества, прежде всего, является понятием, и, следовательно, работать с множествами следует по правилам работы с понятиями**. **Множество в большей степени является понятием, нежели совокупностью элементов**. Бесконечное множество, как предел пополнения конечного множества, в явном виде представляет собой переход количества элементов в новое качество – в понятие множества. **Аксиоматика множеств определяет множество не как совокупность элементов, а как понятие множества. Аксиоматика множества есть определение понятия множества.**

В свое время, с целью обеспечения возможности «многое мыслить как единое» Г. Кантором было предложено понятие множества. Оставляя несколько в стороне вопросы использования этой возможности (зачем и для чего такая возможность требуется, где и как она может использоваться), обратим основное внимание на саму возможность «многое мыслить как единое». По истечении времени, для формального определения понятия множества был предложен и использован аксиоматический подход. Считается, что аксиоматика определяет определяемый объект наилучшим образом. Так, считается, что система аксиом Френкеля-Цермело, например, определяет множества достаточно точно и полно. Определяемым этой (или некоторой другой) аксиоматикой объектом является не некоторое конкретное множество (хотя любое конкретное множество аксиоматикой также определяется), не некоторая разновидность множеств и даже не множество множеств. Определяемым объектом аксиоматики являются все множества, как конечные, так и бесконечные, как актуально бесконечные, так и потенциально бесконечные, множества любых мощностей, как собственно множества, так и их подмножества (и даже множества их подмножеств), как любое из построенных множеств, так и множества, которые даже нигде, никогда, никем и не будут построены; одним словом – абсолютно все множества. Это означает, что **аксиоматика множеств**, как средство для того, чтобы «многое можно было мыслить как единое», **является несравнимо более мощным средством, нежели сами определяемые ею множества, и <u>аксиоматики имеет смысл использовать в прикладных проблемах вместо множеств</u>**. Кроме того, что **аксиоматика определяет определяемый объект, аксио-матика обладает семантикой, которая является некоторой новой дополнительной сущностью аксиоматического определения**. **<u>Технология аксиоматических определений, как средство построения понятий, исследуется, обсуждается и излагается в теории понятий.</u>**

Аксиоматика является конечным объектом, для которого проблемы актуальной (не говоря уж о потенциальной) бесконечности не актуальны. **Работать с сущностями (т.е. множествами), определяемыми посредством аксиоматических определений, можно и надлежит через посредство <u>применения действий к самим определениям</u>**. Кроме того, аксиоматики способны определять не только множества элементов, но и различные другие, более содержательные объекты, как, например, те же аксиоматики. Признавая, что аксиоматика множеств мощнее определяемых ими собственно множеств, естественно возникает технологический вопрос: "Как определять аксиоматики и как с ними работать, и как работают они сами?". К сожалению, ни А. Френкель, ни Е. Цермело, ни другие авторы аксиоматик не раскрывают технологию, при помощи которой аксиоматика множеств была определена и построена; **не имеется сколь-нибудь <u>формального определения</u> того, <u>что есть аксиоматика</u>**.

Естественно полагать, что поскольку аксиоматика признается наиболее мощным универсальным средством определения, то **саму аксиоматику следует также определять аксиоматическим методом, т.е. <u>строить аксиоматику аксиоматики</u>.** Но при таком подходе к построению определений мы оказались бы в замкнутом круге, если бы не нашлось объекта, который сам удовлетворяет собственному определению и замыкает, тем самым, рекурсию. **Таким объектом оказывается <u>определение понятия сущности</u>.** На смену возможности «мыслить многое, как единое» приходит **концепция мышления понятиями, что предполагает и обеспечивает иное, понятийное мышление.**

Особо следует обратить внимание в концепции множества Г. Кантора на необходимость мыслить многое, как единое. Хотя Г. Кантор и не говорит, зачем бы нужно «многое мыслить как единое», можно предполагать, что Кантор Г. интуитивно понял, что для определения самой возможности определения концепции функции (алгоритма) требуется каким-либо образом обеспечить возможность преобразования многих аргументных значений через посредство описания требуемого преобразования над единым аргументом. Может быть еще более ценным в теории множеств Г. Кантора является то, что Г. Кантор наверное первый обратил внимание на проблему исследования и изучения самого **процесса мышления как процесса работы с понятиями**.

1.5.4. Теоретико-множественная формализация функций

Рассматривая теорию понятий как теорию, совершенствующую определение математической функции, наверное, будет оправдано предварительно более детально проанализировать особенности традиционной формализации понятия функции. Отметим еще раз, что **необходимость дальнейшего развития и совершенствования понятия алгоритма (функции) возникает исключительно в связи с проблемой алгоритмических преобразований самих алгоритмов.** Для общепринятых прикладных задач такой проблемы нет или, точнее, она не ощущается столь остро; для работы с традиционными прикладными данными вполне достаточно классической теоретико-множественной формализации понятия функции, особенно если принять во внимание замечание о различии функций и алгоритмов. Прежде, чем переходить непосредственно к рассмотрению **теории функций с использованием понятий вместо множеств в определении понятия (алгоритма) функции** имеет смысл, хотя бы кратко, остановится на анализе (с понятийной точки зрения) использования множеств в определении функций. Такое рассмотрение позволяет увидеть некоторые недостатки и некорректности теоретико-множественного подхода к **формализации функций**. **Необходимо также более детально рассмотреть саму концепцию математической функции. Понятие математической функции столь привычно и обыденно, что за ним теряется из виду сама концепция математической функции**. Особенность функций, в сравнении с преобразованием некоторого конкретного единичного объекта, состоит в том, что **<u>функция предполагает “множественность” значений аргумента</u>**, **<u>возможность применения некоторого определенного действия не только к одному единственному значению аргумента, а к гораздо большему числу значений аргумента.</u>** Для единичных объектов определение преобразований не представляет особого труда: для единичного объекта требуемое определение преобразования может быть дано с любой необходимой подробностью и тщательностью. В крайнем случае, оно (это преобразование) может быть непосредственно продемонстрировано. **Уникальной и определяющей особенностью функций является возможность применения одного и того же преобразования к различным объектам**; для обеспечения этой возможности эти различные объекты должны обладать определенной одинаковостью, похожестью, чем, собственно, и может обеспечиваться возможность применения одного и того же преобразования к различным, но "похожим" объектам. Изобретение функции основывалось на том, наверное, что одно и то же действие могло бы быть применено к нескольким, достаточно «близким», «похожим» объектам. Это предположение приводит **к появлению понятия функции, как способа применения описания одного и того же действия уже не к единственному объекту, а к некоторой их совокупности.** Для осуществления такой возможности требуется обеспечить эту "достаточную близость", похожесть (различных) объектов. Простым, естественным и логичным решением этой проблемы явилось в свое время предложение понятия множества, как совокупности элементов, обладающих требуемой "похожестью" изначально, как говорится, по определению. И действительно, использование такой концепции математической функции в большинстве случаев оказывается практически удовлетворительным и приемлемым. Но, несмотря на практическую удовлетворительность и приемлемость теоретико-множественная **концепция математической функции не обеспечивает полного, семантически корректного решения проблемы определения функции.** И основные неудовлетворенности вызывает как раз использование понятия множества. **Концепция множества не решает проблему "похожести", а лишь перемещает ее из проблематики определения функции в проблематику определения самого множества "похожих" элементов или даже в проблематику определения похожести элементов. Вместо проблемы определения такого множества "похожих" элементов теория понятий предлагает использование в формализациях понятий, которые требуемую "похожесть" способны обеспечивать**.

Еще одной проблемой определения функций при теоретико-множественном подходе является проблема построения требуемых множеств. **Формальная функция в теоретико-множественной формализации определяется на основе ориентированного сопоставления элементов двух множеств.** Для того чтобы определить функцию в такой формализации, требуется сопоставляемые множества предварительно уже иметь; но, если, например, имеются элементы только аргументного множества, откуда, каким образом можно поиметь множество результатов для некоторой требуемой функции? (Заметим, что не всегда таким образом требуемая функция может быть определена: так, допустим, что требуется определить числовую функцию, осуществляющую получение результирующего значения, вдвое меньшего аргументного значения; если результатное множество не содержит таких элементов, то задание такой функции оказывается невозможным.) Хорошо алгебре, она использует для значений определяемых функций то же самое аргументное множество. А как быть в иных ситуациях? Так, если имеется только множество натуральных чисел, то никакая функция из множества натуральных чисел в множество вещественных чисел невозможна из-за его отсутствия. Каким образом, откуда множество вещественных чисел могло бы образоваться? Конечно, вопросом появления множества вещественных чисел можно и не задаваться; множество вещественных чисел можно трактовать как некоторую (неизвестно откуда и каким образом появившуюся) новую сущность. Но тогда будет упущен более существенный аспект, нежели построение алгебраических операций: будет упущена возможность образования новых, более общих понятий. Представляется, что множество вещественных чисел могло бы образовываться некоторой операцией над натуральными числами; именно эти операции и могли бы образовывать новые элементы, из которых могло бы быть составлено множество вещественных чисел. **Именно исследованием такого сорта методов теория понятий и занимается.** Такие вот достаточно простые и интуитивно очевидные функции не могут быть представлены в теоретико-множественной формализации. Также не представляется возможным представить функцию построения множества всех подмножеств для некоторого (даже конечного) множества. Для задания этой функции требуется уже иметь множество подмножеств, а тогда проблемы построения такой функции просто нет. Эта возможность теоретико-множественной формализацией функций не допускается и не рассматривается. **Теория понятий основывается на рассмотрении действий, образующих новые понятия.** Основной недостаток использования множеств для формализации понятия математической функции видится в том, что при определении функции как ориентированного сопоставления элементов множества из определения функции утрачивается процесс превращения аргумента в результат. В этой формализации оказывается утраченным исконный смысл самого термина functio (лат.), означающего исполнение, осуществление, функционирование. Кроме того, определение функции f:a→b вовсе не означает, что действительно имеется действие f, которое, будучи примененным, к элементу “a” вырабатывало бы элемент “b”, точнее, преобразовало бы элемент “a” в элемент “b”. **Такое определение функций допускает к рассмотрению невозможные (с семантической точки зрения) функци**и. Функция f: яблоко → груша вовсе не означает, что действительно имеется технологический процесс превращения реального яблока в грушу.

1.6. Основные концепции теории понятий

Определяющей **концепцией теории понятий** является **концепция семантического формализма: вся теория понятий выводится из отношения семантического гомоморфизма сущностей посредством использования семантического гомоморфизма**. Кроме **концепции семантического формализма (определяющего отношения), являющейся основной**, в основе теории понятий лежат еще несколько, хотя достаточно существенных, но уже производных концепций. Среди этих концепций особо можно упомянуть ***концепцию замыкания определяющего отношения, концепцию актуализации определяющих отношений, концепцию использования определяющих отношений и концепцию мета-алгоритма***.

1.6.1. Определяющее отношение

Неудовлетворительность отношения взаимнооднозначных соответствий для обеспечения прагматики формализмов была показана на примере самоприменения нормальных алгоритмов и на примере отношений теории множеств. Вместо отношения взаимнооднозначного соответствия (сопоставления) элементов теория понятий предлагает специальное определяющее мета-отношение в качестве отношения, осуществляющего, в частности, и прагматику теорий. **Определяющее отношение есть отношение двух сущностей, провозглашающее одну из них в качестве обобщения другой и утверждающее, тем самым, вторую (считающуюся инициальной) сущность в качестве конкретизации первой. Кроме сущностей, составляющих определяющее отношение, считается, что само отношение также образует новую сущность, и считается, что она**

является семантикой определяющего отношения. <u>Теория понятий строится как абстрактная теория, использующая определяющие отношения сущностей как средство обобщения и конкретизации понятий</u>. Определяющие отношения способны обеспечивать прагматику формальных теорий, построенных на их основе и с их использованием. Поскольку инициальная сущность определяющего отношения не ассоциирована ни с какой сущностью или реальным объектом, **инициальное определяющее отношение (т.е. отношение, содержащее инициальную сущность)** может представлять собой как предельно абстрактное утверждение, так и конкретизацию понятия требуемой сущностью или даже реальным объектом. Такое определяющее отношение будет являться **полноценным определяющим отношением, и оно может быть использовано для построения средствами теории понятий новых сущностей, понятий, утверждений и теорий, обеспечивая, тем самым, их** прагматику.
Концептуально важным частным случаем определяющих отношений являются **рекурсивно-замкнутые определения понятий**. Особенностью рекурсивно-замкнутого определения является то, что как определение некоторого понятия посредством рекурсивно-замкнутого определения, так и само понятие, им определяемое, удовлетворяют этому рекурсивно-замкнутому определению. Само **определение рекурсивно-замкнутого понятия является <u>предельным понятием теории понятий</u>**. Все прочие определения являются конкретизациями этого (рекурсивно-замкнутого) определения. Вместе с тем, понятие, определяемое рекурсивно-замкнутым определением, может быть рассмотрено в качестве новой инициальной сущности.
Теория понятий объясняет концептуальность определяющих отношений. **Модифицированные нормальные алгоритмы отличаются от нормальных алгоритмов использованием в них <u>определяющих отношений</u>, которые не имеются в нормальных алгоритмах**. Доказательство ненормализуемости модифицированных нормальных алгорифмов показывает, что определяющие отношения представляют собой не менее концептуальное и необходимое средство, чем, скажем, само понятие формального алгоритма.

1.6.2. Актуализация понятий и понятие теории

Понятие или даже некоторый набор разрозненных понятий <u>не продуктивен</u> пока не предложен какой-либо <u>механизм</u>

использования или применения понятий. **Понятия обладают определенной продуктивностью во взаимодействии друг с другом**, особенно учитывая, что в качестве компонент понятия допускаются и реальные объекты – понятия в этом случае обретают прагматику. При построении интуитивных понятий возможность корректного взаимодействия понятий остается, как правило, вне формализации. Для устранения этого недостатка теория понятий вводит **понятие теории и метод актуализации понятий**, которые обеспечивают **возможность и средства использования уже построенных понятий в последующих построениях.** Актуализация понятий позволяет и обеспечивает использование актуализированных понятий при построении и использовании последующих понятий. **Понятие считается (и является) актуализированным, если имеется его гомоморфное разложение**. **Понятия, построенные с использованием уже имеющихся и актуализированных понятий, считаются и называются теориями**. Понятие теории вводится стандартным для теории понятий способом построения новых понятий с помощью соответствующей **определяющей понятийной функции – метода актуализации понятий**. **На самом деле, актуализация и взаимосвязь понятий определена во взаимодействии сущностей, которая определяется семантическим гомоморфизмом. Теория понятий является понятием теории в теории понятий**.

1.6.3. Прагматика теории понятий

Наибольшее влияние теория понятий оказывает на теорию алгоритмов. Довольно широкий круг вопросов, возникающих в связи с модификацией понятия алгоритма, исследуется и разрабатывается **теорией понятий, являющейся развитием и обобщением теории видов данных в том смысле, что конкретизация общей теории понятий дает теорию типов данных**. Гомоморфизм теории понятий обосновывает концепцию "наследования" типов данных. Теория понятий указывает предназначение условных конструкций и предлагает семантически корректную их интерпретацию в языках программирования, дает определение концепции переменной. В информатике (в языках и системах программирования) используются функции, несколько отличающиеся от традиционных математических функций: они в большей степени являются функциями над понятиями, нежели функциями на множествах. Это отличие, которое классическая математика объясняет неспособностью "машинного интеллекта" оперировать категориями континуума и бесконечности "настоящей",

чистой математики, допускает и концептуальное объяснение, предлагаемое теорией понятий.
К слову заметим, что между алгоритмами и функциями классической математики при всей их похожести имеется одно принципиальное, семантическое различие. **Если в математике функции строятся над семантически (хотя и не формально, но интуитивно) определенными данными (расстояние, время, скорость, площадь, объем, масса и другие, практически хорошо из-вестные сущности), то для алгоритмов ситуация с семантической точки зрения совершенно иная, противоположная: алгоритмы строятся над словами в алфавитах и семантическая (содержательная) интерпретация слов лишь имеется в виду (теорией алгоритмов не предлагается).** Поэтому при рассмотрении семантических вопросов в теории понятий рассматриваются в основном алгоритмы (а не фукции). **(Семантика математических функций индуктивна, семантика алгоритмов дедуктивна.)**

В заключение заметим, что **основной проблемой, потребовавшей разработки теории понятий, является проблема построения семантических формализмов.** Существующие формализации не в полной мере осуществляют решение этой проблемы. **Определяющей концепцией теории понятий является концепция определения, определяющего отношения**. Теория понятий определяет понятие как некоторую виртуальную сущность, которая предположением применимых к ней действий превращается в понятие; понятие, будучи определенным, считается реальным объектом. Для понятий определяется схема гомоморфного преобразования понятий так, что результатом применения такого преобразования к понятию является понятие. **Понятие “понятия” является предельной и неподвижной “точкой” теории понятий**. Основным технологическим приемом теории понятий является **технология использования определений**: если имеется некоторое определение определяемого объекта (к примеру, множества или треугольника), то любые преобразования определенного (таким образом) объекта могут и должны определяться через посредство преобразования определяющего его определения. Такой технологический прием называется семантическим гомоморфизмом и осуществляется посредством использования семантического гомоморфизма. Как представляется, такая технология исключает саму возможность появления каких-либо парадоксов.

1.7. Понятия множеств

Понятие множества является одним из постоянно и широко используемых понятий математики. В теории множеств не указывается, для каких целей они были разработаны и для чего они предназначены.

1.7.1. Функции на множествах

В свое время множества были использованы для создания формализации математической функции. Это использование оказалось для своего времени и для утилитарного математического, вычислительного употребления формализованных функций в целом вполне пригодным и достаточным. Если не относиться к формализации функции слишком пристрастно, не выходить за рамки утилитарного использования, то формализацию можно считать вполне удовлетворительной и приемлемой. Относительно множеств и использований множеств можно сделать ряд замечаний, как относящихся к определению формализаций функций, так и к другим использованиям. Использованиям множеств присущи органические недостатки. Основное замечание касается неудовлетворительности использования множеств в качестве аргумента формальных функций. Кроме этого, можно указать еще на ряд других использований множеств, в которых множества так же не вполне адекватны проблемам и в некоторых из которых могут быть использованы понятия с большей адекватностью. **Функции предназначены для единообразного преобразования достаточно больших наборов элементов**. Считая, что функция применяется к множеству элементов, использование множеств обеспечивает в некоторой степени такую единообразную множественность. Но здесь кроется некоторая неудовлетворительность использования множеств для этой цели. Рассмотрим пример: пусть требуется определить некоторую функцию, осуществляющую некоторое преобразование стульев (например, их покраску). Полагая, что подлежащие обработке стулья, в соответствии с формализацией функции, должны быть предварительно сорганизованы во множество, можно заметить, что в этом аргументном множестве не окажется тех стульев, которые будут произведены мебельными фабриками после завершения создания аргументного множества. Такое упущение этих стульев, конечно же, не может считаться удовлетворительным или даже допустимым для определения требуемой функции. Для обеспечения применимости функции ко всем возможным стульям, наверное, нужно использовать какое-либо другое аргументное образование вместо множеств. **Теория понятий предлагает использовать понятия вместо множеств**. Заметим, что когда несколькими строками выше формулировалась эта задача, **то использовалось не понятие множества стульев, а именно само интуитивное понятие стула, которое и обеспечивало требуемую постановку задачи преобразования всех стульев. Понятие стула способно представлять любые стулья, независимо от времени их изготовления. В этом отношении использование понятий вместо множеств гораздо более эффективно**. Действительно, в только что рассмотренном рассуждении посредством использования понятия “стула” удается апеллировать как к уже произведенным стульям, так и стульям, которые еще только будут произведены (как, в прочем, и к стульям, которые даже никогда и не будут произведены); **и делается это при помощи использования неформального понятия ”стула”.**

1.7.2. Отношение взаимнооднозначного соответствия

При использовании множеств в различных построениях, рассуждениях иногда возникают задачи, в которых требуется замена одного множества другим. Не вникая в обоснованность и необходимость таких требований, заметим, что критерием правомочности таких замен обычно выступает **количественная одинаковость этих множеств**, на основе которой предполагаются взаимнооднозначные соответствия множеств. Использование взаимнооднозначных соответствий для замены одного множества другим в случае семантически нагруженных элементов множеств семантически некорректно. Быть может для каких-либо задач (например, для количественных сравнений) этот критерий правомерен, но не в использованиях множеств в семантических формализмах. **В реальности элементы множеств, как правило, ассоциированы (и, как правило, неформально) с некоторыми содержательными аспектами и игнорирование этих аспектов в формализмах недопустимо, ибо для их представления формализмы и используются.**

В теории множеств в качестве способа практического использования, применения множеств на практике, никак не оговаривая и не исследуя требуемый для этого механизм, по умолчанию используется отношение взаимнооднозначного соответствия множеств. Рассмотрим более тщательно с семантической точки зрение какое-либо такое соответствие. Очевидно, что **взаимнооднозначное соответствие двух множеств представляет собой множество соответствий элементов этих множеств.** Поскольку соответствие составляют два конкретных элемента, взятых из двух множеств, то можно видеть, что такое (семантически никак не определенное) соответствие представляет собой, по сути, утверждение тождественности (эквивалентности) этих элементов. **В теории множеств никак не определяется, что есть тождественность элементов, что она означает, какие последствия и применения оно предполагает и допускает, для чего предназначено введение отношения тождественности.** Полагая, что элементами некоторых содержательных множеств являются, например, соответственно яблоко и груша, рассматриваемое соответствие будет утверждать тождественность рассматриваемого яблока и рассматриваемой груши. Каждый, кто видел и пробовал эти фрукты, конечно же, не согласится с таким утверждением. Как можно видеть из практики использования тождественности **в самой теории множеств, отношение тождественности допускает использование одного из тождественных элементов вместо другого без каких либо условий и/или ограничений.** Это означает, что наличие двух элементов становится неоправданным и излишним, и один из этих элементов может быть без ущерба для чего бы то ни было аннулирован. Установление взаимнооднозначного соответствия лишь означает следовательно, что одно из двух сопоставляемых множеств является излишним, и оно может быть устранено из рассмотрения (либо требуется иная, более глубокая, более основательная и содержательная интерпретация отношения тождественности). **Отношение взаимнооднозначного соответствия множеств не только не продуктивно, но и контрпродуктивно**. Это означает, что **отношение взаимнооднозначного соответствия, предлагаемое, допускаемое и используемое теорией множеств в качестве средства обеспечения прагматики теории множеств, является семантически некорректным и поэтому не может считаться приемлемым и допустимым средством обеспечения прагматики множеств. Использование отношения взаимнооднозначного соответствия множеств не имеет практического смысла. В теории понятий отношение взаимнооднозначного сопоставления ни в каком виде не используется (и оно никаким образом не может быть введено в теорию понятий средствами теории понятий);** некоторым, более сильным и более адекватным аналогом отношения взаимнооднозначного соответствия, на основе которого вся теория понятия и строится, является **определяющее отношение**. **Определяющее отношение устанавливает семантическую иерархию понятий.**

1.7.3. Формальные множества

Особо следует сосредоточиться на проблеме унификации элементов множеств. **Множество**, в соответствии с его формальным, общепринятым определением, **есть набор элементов, обладающих некоторым общим свойством**. К сожалению, сама формулировка (формальное определение) этого свойства не включается в определение множества. Формализм определения множества мог бы быть повышен включением (хотя бы) предиката, отбирающего элементы во множество, в качестве атрибута определения. Пусть некоторое конкретное множество образуют элементы, удовлетворяющие некоторому предикату P. Включим этот предикат в определение этого множества. **Это дает возможность при пополнении множества некоторым новым элементом производить проверку на удовлетворение элемента этому предикату**. При включении предиката в определение множества более содержательно можно определить операции сложения и пересечения множеств. При сложении двух произвольных множеств с предикатами P1 и P2, результирующее множество будет иметь предикат “P1 или P2”; пересечением будет множество с предикатом “P1 и P2”. **Построение предиката, допускающего подмножества элементом множества в качестве элемента множества, оказалось бы не простой (а, скорее, невозможной) задачей, что способствовало бы построению более правильной теории множеств**.
Для многих применений множеств такая формализация множеств могла бы оказаться более содержательной (если бы не теория понятий, которая осуществляет аналогичную технологию более общим способом); к сожалению, такие множества едва ли могут быть применены для формализации функций из-за того, что предикаты сами являются некоторыми функциями и для их использования в формализациях функций они сами должны быть уже предварительно формализованы.

1.7.4. Множества и отношения

Одним из применений множеств является их использование для представления отношений, но использование множеств в этих целях также не безупречно с семантической точки зрения. При построении сколь-нибудь содержательных теорий с использованием множеств обычно рассматриваются различного рода отношения элементов этих множеств. Отношения для множеств определяются достаточно произвольным образом: **установление отношения не отделено от представления отношения**. Подмножество некоторого произведения множеств считается как представлением, так и определением отношения.

Возможность взаимнооднозначных отображений множеств (представляющих отношения) на себя приводит к противоречивой проблеме определения однозначности отношения. Пусть некоторое множество представляет некоторое отношение. Рассмотрим взаимнооднозначное преобразование этого множества на себя. Встает вопрос: это преобразованное множество представляет то же самое отношение или другое? С одной стороны, поскольку это множество поэлементно состоит из тех же самых элементов, что и исходное множество, следует считать, что оно представляет то же самое отношение. С другой стороны, поскольку множество было получено некоторым преобразованием исходного множества, следует, что оно представляет некоторое другое отношение. **Определение отношения и представление отношения суть различные понятия и их смешивание может приводить и приводит к семантическим проблемам.**

Кроме того, при формализации понятия отношения посредством множеств, вне рассмотрения остается другой, гораздо более существенный вопрос: а что означает, что некоторые два элемента находятся в некотором отношении? Каковы обстоятельства, вызвавшие это отношение? Каковы последствия нахождения элементов в отношении? И, наконец, что содержательно есть это отношение?

1.7.5. Элементы множеств

В то время как формальному определению понятия множества уделяется некоторое внимание, определение элементов множеств продолжает оставаться на интуитивном уровне. Считается, что множества составлены из некоторого количества элементов; а что есть элемент множества и что может являться элементом множества теория множеств не уточняет; полагается, что некоторый произвольный набор “однородных” реальных объектов может быть рассмотрен как множество таких элементов, и на этом прикладная проблема определения элементов множества считается закрытой. **Поскольку не имеется точного определения, что есть элемент множества, то, как в самой теории множеств, так и при использовании множеств возможны неясности, неточности, некорректности и ошибки. В определении множеств никак не регламентировано, что есть элемент множества, что он может представлять, и может ли, и должен ли он что-либо представлять**. Определяя функцию как преобразование элемента “a” в элемент “b” (f:a→b), не определяется, что есть эти элементы. **Единственная неформальная спецификация ограничивает элементы тем, что все они должны обладать некоторым общим свойством.** Не регламентируя в определении множества спецификацию элементов, допуская, тем самым, в качестве элементов множеств все, что угодно, преследуется цель построения возможно более общего средства. Действительно, если состав и содержание элемента ничем не лимитируется, то создается впечатление предельной общности такого элемента. Эта, казалось бы, предельная всеобщность оборачивается предельной бесполезностью такой всеобщности. Дело в том, что **если представление, содержание, семантика элемента никак не регламентирована, то тем самым открывается возможность при различных реализациях, использованиях теорий, разработанных на таких элементах, получать относительно подставляемых в теорию объектов самые разнообразные, включая и противоречащие друг другу, результаты и выводы**. И это означает, что прикладное значение такой теории – никакое. Тем самым, **подстановка в элементы чего-либо теряет всякий смысл**. Остается игра в элементы, в собственно элементы, которая может представлять интерес лишь сама по себе и не может иметь и не имеет прикладного интереса, прикладного аспекта. В конечном счете, эти проблемы обусловлены семантическими проблемами теории множеств. Теория множеств оказывается весьма удачной абстракцией для исследования и использования количественных соотношений; эта абстракция оказалась столь удачной и сильной, что для ее достижения ценой является полная утрата всех прикладных, семантических аспектов. В самой теории множеств никак не рассматриваются прикладные аспекты – нет нужды, нет необходимости; полагается (почти молчаливо), что прикладные аспекты должны обеспечиваться и осуществляться самими приложениями теории множеств. Это несколько спорная (хотя и удобная для теории множеств) точка зрения и она могла бы быть принята, если бы некоторые аспекты приложения теории множеств не требовались бы в самой теории множеств. Так, построение элемента множества, являющегося его некоторым подмножеством, даже для случая конечного множества вызывают некоторые семантические проблемы.

1.7.6. “Бесконечность” множеств

Недостаточность возможностей конечной математики была в свое время в некоторой степени преодолена предложением фикции бесконечности для множеств элементов. Это наиболее простой, налядный и интуитивно привлекательный способ преодоления недостаточностей конечной математики, но не единственный и не самый ясный и продуктивный. **Использование аналитических понятий вместо бесконечных множеств в определении понятия функции, предлагаемое теорией понятий, представляет более сильный и достаточно адекватный вариант расширения возможностей конечной математики без привлечения неконструктивных сущностей**. **Фикция бесконечного множества произвольных (читай, неопределенных) элементов в теории понятий замещается концепцией сущности и производных от нее понятий**.

Для построений математических функций оказалось недостаточным использования конечных множеств. Проблема виделась в конечности конечных множеств, и естественным решением являлся переход к введению практически неосуществимой фикции бесконечного множества. **Появление бесконечных множеств есть следствие неумения обходиться конечными объектами, конечными сущностями.** Существование бесконечных объектов в реальном мире не обосновано (и вряд ли может быть обосновано вообще) и, главное, во введении такого понятия нет никакой необходимости, без него можно обходиться без утраты продуктивности теорий.

В тоже время возможен другой способ преодоления “недостаточности” конечных объектов. Этот подход состоит в использовании концепции понятия: фикция понятия, в отличии от фикции бесконечного множества, оказывается практически реализуемой, конструктивной. Традиционное бесконечное множество в значительной мере уже является более понятием, нежели совокупностью элементов. **Интуитивно привлекательная концепция множества в теории понятий реализуется понятием сомножества — неограниченного множества значений некоторого (рекурсивно-замкнутого) понятия.** Возможности сомножеств оказываются достаточно продуктивными. **Сомножества, в отличии от множеств, имеют размерность**. **В использовании сомножеств вместо множеств можно усматривать переход от количественных характеристик в сторону качественных**.

Неопределенность элементов множеств позволяет, в частности, предполагать бесконечные (даже различной мощности) множества. Бесконечные множества в интуитивном представлении представляются пределом неограниченного пополнения конечного множества. Понятно, что в конечное время никакой бесконечный процесс завершен быть не может, поэтому бесконечное множество, как некоторый завершенный, реально существующий объект рассматриваться не может. В качестве конструктивного и достаточного аналога фиктивных бесконечных совокупностей можно рассматривать **неограниченные множества**. Тем не менее, это не означает, что с потенциально бесконечными множествами элементов нельзя оперировать: “бесконечность” множеств можно допускать в предположении умения применения функций к определению множества, к понятию множества. Такая возможность рассматривается и используется теорией понятий. Интуитивные бесконечные множества, по сути, в большей степени и являются понятиями, нежели совокупностями, и теория понятий предлагает понимать и интерпретировать их как понятия (а не как совокупности).

1.7.7. Множества в видофикации данных

Еще одним сомнительным использованием множеств была попытка применения множеств в качестве средства видофикации данных. Такая попытка была предпринята при разработке языка самого высокого уровня (как он тогда был представлен) SETL. В языке программирования SETL (SET Language) для представления вида данных предлагалось использование множеств (в то время, как в некоторых языках множества уже рассматривались в качестве одного из возможных видов данных). Для простых типов данных, введенных еще в первых языках программирования, представление и формализация типов с помощью множеств на первый взгляд представляется вполне естественным. По мере развития языков программирования, особенно в части совершенствования видового аппарата, моделирование вида с помощью множеств оказывалось не только все менее и менее эффективным и адекватным, но и усугубляло ситуацию и запутывало проблему. **Проблемой оказалось конструирование подвидов на основе представления элементов**

множеств в виде множеств. В целом, попытка моделирования вида понятием множества не оказалась удачной. Неудачной оказалась и судьба языка SETL. Неудача может быть объяснена тем, что в действительности (как будет видно дальше) **не множества являются базовыми понятиями для видофикации, а скорее, наоборот, понятие, являющиеся аналогом понятия вида, являются более концептуальным (фундаментальным) понятием для других (включая и понятие множества) понятий.** Кроме организации элементов в виде множеств, возможны и другие способы организации, которые могут оказываться не менее универсальными. **Одним из таких способов является “организация элементов” в виде понятий.** **Понятие множества (в отличие от множества) не требует перечисления элементов**. Понятия оказываются более универсальными образованиями данных, нежели множество: **понятия включает понятие множества элементов, в то время, как понятие множества произвольных элементов понятие замкнутого понятия не допускает.**

1.8. Подходы к построению теории понятий

Многие подходы ведут к построению теории понятий. Мы рассмотрим **четыре** из них несколько подробнее, другие лишь упомянем. Первый подход, наиболее концептуальный, берет свое начало в теории алгоритмов. Второй, более прагматичный, проистекает из проблем определения и использования аппарата видофикации данных в языках и системах программирования. Третий подход состоит в использовании аксиоматического метода. В четвертом рассматривается построение теории понятий на примере критического анализа и уточнения определения алгебраического гомоморфизма. **Теория понятий в значительной мере интегрирует все эти подходы и их методы.** Возможно, методологически наиболее прямым является путь через устранение некоторых неточностей в определении алгебраического гомоморфизма. Это уточнение в теории понятий называется семантическим гомоморфизмом. Этот путь предпочтителен еще и потому, что семантический гомоморфизм используется в теории понятий во многих самых различных аспектах и в том числе в качестве схемы определения применения понятий к понятиям.

1.8.1. Алгоритмический подход к теории понятий

Для рассмотрения использования алгоритмов при решении тех или иных прикладных проблем необходимо рассмотрение и решение проблемы представления данными алгоритма соответствующих прикладных объектов. **Это проблема семантической интерпретации данных**. **Это основная проблема теории семантических алгоритмов. Семантическая интерпретация данных должна составлять часть формализации алгоритмов. Или наоборот: определение алгоритмов должно основываться на семантике данных.** Неразработанность семантических аспектов формализаций зачастую провоцирует использование неспецифических и неприемлемых методов семантической интерпретации данных. Так, недооценка проблемы интерпретации данных в теории нормальных алгоритмов приводит к ограничению понятия алгоритма принципом нормализации алгоритмов (аналогом тезиса Черча). Предельный или абсолютный (если так можно выразиться) формализм (или, точнее, символизм) построения теории нормальных алгоритмов не обеспечил семантической корректности и семантической полноты построения теории. Поэтому можно ставить задачу разработки другого, нового, более содержательного и надежного формализма для формализации интуитивного понятия алгоритма. Анализ формализма теории нормальных алгоритмов показывает, что недостатком использованного формализма является абсолютизация символизма и, как следствие, **игнорирование существенности семантических аспектов формализации.**
При использовании традиционного формализма вне формализации остаются, как уже было сказано, **семантические аспекты**. **Традиционные формализмы, по сути, являются лишь системой символьных обозначений (без определения и без обоснования отношения обозначения**); что означают те или иные обозначения остается вне формализации и их семантика фиксируется неформальными средствами, как правило, обычными неформальными описаниями на естественном языке. Эта отстраненность семантики от элементов, к которым она относится, провоцирует необязательность ее учета при различных (аналитических) манипуляциях с формальными элементами. Поэтому **представляется актуальной проблема разработки такого формализма, который обеспечивал бы единство данных и семантики этих данных.**
Пусть имеется нормальный алгоритм {х;у. На основе этого алгоритма построим “обратный” алгорифм {у;х. Рассмотрим объект, составленный из этих двух алгорифмов ({х;у)&({у;х). Будем (для

краткости) этот объект нотировать схемой: x : y. Понятно, что этот объект алгорифмом не является и на первый взгляд вообще не на что не похож. Больше того, любую пару взаимообратных функций, алгоритмов или отношений между сущностями u и v будем нотировать так же. Встает вопрос о оправданности и целесообразности введения в рассмотрение такого объекта. Во всяком случае, не имеется объективных обстоятельств, которые воспрепятствовали бы его введению и рассмотрению. Достаточным основанием и оправданем целесообразности и необходимости использования объектов такого типа является то обстоятельство, что с **его помощью удается построить обобщение нормальных алгоритмов, допускающих семантически корректное, однозначное самоприменение формальных алгоритмов**. Предлагаемый объект точнее всего (на уровне здравого смысла) может быть квалифицирован как определение отношения. В частности, объект ({x;y)&({y;x), как представляется, утверждает нечто похожее на отношение эквивалентности сущностей "x" и "y". Таким образом в рассмотрение вводится некий новый объект, называемый **отношением или сущностью**. Он, в соответствие с построением, может быть представлен **парой нормальных алгоритмов**, т.е. имеется его определение через нормальные алгоритмы. Но, к сожалению, это разложение не дает ответа на вопрос, что означают (и означают ли что-либо) алгоритмы, на которые раскладывается таким образом отношение. Но это вопрос не к предлагаемому определению отношения, а к алгоритмам, из которых отношение построено и на которые оно разложимо.

1.8.2. Видовой аспект теории понятий

Другой, быть может более прагматичный подход к теории понятий, проистекает из рассмотрения **понятия вида (типа) данных в языках программирования. Исторически теория понятий восходит к первым языкам программирования**. Проблема определения вида и проблема определения понятий имеют очень много общего и, как выясняется, они представляют собой, по сути, эквивалентные варианты одной и той же проблематики. В качестве основной взята понятийная проблематика, как более общая. Видовой подход инициировал понятийные исследования. В работе "Алгоритмический метаязык Алмет" устанавливается равносильность видовых средств языков программирования контекстно-свободным грамматикам Н.Хомского. **Анализ и исследования видового аппарата языков**

программирования привели, в конечном счете, к разработке и построению теории понятий, которая оказалась аналогом и обобщением видового аппарата.

Уже начиная с первых языков программирования (наверное, начиная с языка Алгол-58) **в программировании используется понятие типа данных**. В языках программирования типы данных появились из чисто прагматических соображений. В первых языках типы данных были достаточно примитивными, ограничивались простыми типами и использовались исключительно для целей управления памятью: с помощью типов решалась проблема распределения памяти при трансляции алгоритмов в коды конкретной вычислительной машины и задача управления памятью в процессе исполнения алгоритмов. По мере развития языков программирования понятие типа данных развивалось прежде всего. Наибольшего развития традиционный видовой аппарат получил в языке Algol-68. Начиная с языка Algol-68 **типы стали именоваться видами**. В этом языке появился такой, достаточно сложный вид данных, как **процедурный вид**. Достаточно строгое определение получили такие, уже используемые к тому времени в языках программирования виды данных, как **структуры, объединенные виды, ссылочные данные.** После языка Algol-68 видофикация данных получила новое направление развития, которое почти полностью определило последующее развитие аппарата видов и программирования в целом. В языках стали развиваться так называемые **абстрактные типы данных**. Совершенствование видов данных завершилось появлением объектно-ориентированных видов и объектного программирования, основу которого составляет видовая операция, получившая название наследования.

Практический интерес к теории видов данных вызван потребностью в совершенствовании языков программирования. Даже в таком, достаточно строго определенном языке как Algol-68, не все видовые определения можно было считать безупречными. Так не представляется правильным определение объединенного вида: определение объединенного вида не учитывает структуру объединяемых компонент. Попытка видофикации условных выражений оказалась не слишком успешной для практически приемлемого использования. Совершенствование языков программирования в части видофикации данных требовало более полного и глубокого понимания сути, предназначения и методов определения видофикации.

Уже с самого начала, с первых алгоритмических языков видовой аппарат вызывал пристальное внимание специалистов. Прежде всего, интриговали необычность и уникальность видового аппарата: понятие типа (вида) не имеет аналогов в других математических и информационных дисциплинах. Во всяком случае, в определении языков программирования не предлагается хоть какой-либо концепции и объяснения предназначения введения видового аппарата в язык (кроме как для управления помятью). **Основной задачей исследований было понять и объяснить, что представляет собой видовой аппарат, в чем состоит его уникальность, каково предназначение видового аппарата и каков механизм его функционирования**

Виды данных не являются обязательным, неотделимым атрибутом собственно вычислений. Известно, что, несмотря на использование видового аппарата при программировании задач, для исполнения алгоритмов решения этих задач видовые атрибуты уже не требуются. Эта необязательность аппарата видофикации данных для непосредственного исполнения программ определяли в свое время определенные трудности и неприятия становления видового аппарата и его внедрения в практику программирования. Даже теперь еще во многих языковых разработках не используется и оспаривается видовой подход к данным.

Для уяснения роли и функции видофикации в языках программирования было предпринято (в свое время) сравнение безвидового алгоритмического языка с языком, включающим некоторые минимальные видовые средства. В качестве безвидового языка использовались нормальные алгоритмы А.А. Маркова. Для сравнения использовались модифицированные (добавлением минимального видового средства) нормальные алгоритмы. Обнаружилось, что нормальные алгоритмы, даже в минимальной степени модифицированные видовыми средствами, оказываются непредставимыми в виде (немодифицированных) нормальных алгоритмов. Это означает, что **видофикация является не просто техническим, вспомогательным средством, а имеет концептуальный характер.**

1.8.3. Логико-аксиоматический аспект

Логико-аксиоматический подход к проблематике понятий скорее выявляет и ставит семантические задачи, нежели их решает. Математическая логика представляет некоторый механизм формализованного вывода утверждений из системы аксиом. Но как при построении механизмов вывода, так и при формулировании аксиом используется значительное количество различных понятий на основе интуитивной семантики, которые формулируются на интуитивном уровне. Правила логического вывода являются, по сути, функциями (алгоритмами), которые применяются к логическим утверждениям. **Применение алгоритмов к различным формализмам, существенной чертой которых является семантика, является, как это видно из построения теории понятий, весьма не простой задачей, которая в логико-аксиматических методах остается не исследованной.**

Об аксиоматичности самой теории понятий можно говорить в двух аспектах. Прежде всего, **теория понятий сама построена на аксиоматических принципах**. Более того, **теория понятий уточняет и развивает аксиоматический подход, концепцию аксиоматизации**. В некоторых аспектах теория понятий является более, чем аксиоматической теорией, поскольку **теория понятий включает и исходные аксиомы теории понятий и методы построения новых понятий.**

С другой стороны, <u>**системы прикладных понятий**</u>**, разрабатываемые в рамках общей теории понятий, автоматически являются аксиоматическими**. **Построение концептуальных понятий, как развитие и обобщение некоторых других понятий, можно трактовать как реализацию принципа аксиоматичности построения понятий.** Действительно, поскольку производное понятие в теории понятий является семантически корректным преобразованием (обобщением) некоторого другого понятия, оно, тем самым, реализует основные положения, которые обычно ассоциируются с принципом аксиоматичности. <u>**Теорию понятий**</u>**, как и** <u>**теории прикладных понятий**</u>**, разрабатываемые на основе и в соответствие с теорией понятий, можно и следует считать аксиоматическими теориями.** Больше того, теория понятий базируется на некоторых аксиоматических утверждениях, характерной особенностью ко-торых является то, что они сами удовлетворяют себе, и, таким образом, **теория понятий является рекурсивно-замкнутой аксиоматической теорией**.

1.8.4. Прагматический подход к теории понятий

И, наконец, можно упомянуть о прагматическом подходе к построению теории понятий. **В конкретных прикладных областях система (интуитивных) понятий этих областей отработана и про-верена, и, в том числе, и практикой их использования; система понятий в прикладных областях очень консервативна и устойчива.** <u>**В этой связи также можно заметить, что разработка и**</u>

<u>построение прикладных понятий представляет собой достаточно самостоятельную, обособленную и не простую проблему, от решения которой во многом зависит построение самой прикладной теории.</u> При построении конкретных прикладных понятий для исследователя в первую очередь, естественно, представляет интерес **содержательная сторона понятий**. В то же время, **понятийный аппарат представляет собой достаточно самостоятельный и достаточно сложный механизм формализации, имеющий собственные спе-цифические закономерности и правила построения, которые должны быть обеспечены и выполнены независимо от проблемной специфики области использования понятия.** Примером может служить многотрудная и драматичная проблема определения понятия множества. **<u>Понятия в первую очередь являются объектом теории понятий, и лишь потом компонентой прикладной теории</u>**. Все сказанное можно в полной мере относить и к самой теории понятий. Поэтому при ее разработке целесообразнее всего использование ее же собственных методов и ее собственных технологий. Каких-то особых и чрезмерно сложных понятийных проблем в прикладных дисциплинах, как правило, не возникает.

1.8.5. Проблема понятийного языка и терминологии

Теория понятий затрагивает терминологические и лингвистические вопросы. Во многих (если не во всех) дисциплинах проблема нотации, проблема соответствующего формального языка решается достаточно произвольным образом. **В теории понятий для нотации понятий оказывается возможным использование собственной понятийной категории – <u>понятийных определяющих отношений</u>.** Для лингвистического представления понятийных определяющих отношений требуется разработка и использование специальной, адекватной для этого нотации. **<u>Система нотации должна составлять основу понятийного языка</u>**. Ближайшим аналогом понятийной нотации является нотация видовых определений языков программирования и, что то же самое, контекстно-свободные грамматики. Некоторый вариант такой нотации используется для нотации понятий.

Для использования теории понятий, кроме нотации понятий требуется некоторый **<u>технологический механизм</u>, представляющий процесс работы с понятиями**. В качестве такого средства естественнее всего может быть рассмотрен некоторый **<u>понятийный язык</u>**. Кроме

понятийного языка **работа с понятиями может обеспечиваться специальными компьютерными системами**. **Зачатки понятийного языка можно усматривать в алгоритмических языках и в большей степени в языках программирования**. Объектно-ориентрованные языки программирования обладают свойствами понятийного языка в наибольшей степени. **Отличительной чертой понятийного языка** является его способность обеспечивать основополагающую черту использования понятий – **возможность регламентированного преобразования собственных понятий при построении новых понятий**. Понятийный язык является языком программирования. **<u>Предлагаемый в теории понятий язык программирования Aleph в основном удовлетворяет требованиям понятийного языка</u>**.
С проблемой понятийного языка тесно связан вопрос описания теории понятий. Одной из особенностей описания теории понятий является то, что в описании (по необходимости) используются понятия и термины естественного языка в их традиционном (неформальном) смысле; по мере построения и описания элементов теории понятий многие из этих понятий получают формальные определения не в противоречие (как кажется) с их традиционным смыслом.
Еще одно замечание следует сделать по поводу использования терминологии: естественный язык не очень приспособлен для работы с формальными понятиями по правилам и в соответствии с нормами, определяемыми теорией понятий; поэтому в описании теории понятий могут встречаться и встречаются утверждения, которые не в полной мере соответствуют нормам естественного языка в силу самой природы используемых понятий и технологии работы с понятиями.
В соответствие с тем, что **одни понятия могут являться обобщением других понятий, необходимо, чтобы используемая для <u>обозначения этих понятий терминология отражала собой факт обобщения</u>**. **В частности, поскольку новое понятие становится обобщением прежнего понятия, то, наверное, естественно допускать использование названия нового понятия в качестве обобщенного названия как для вновь образованного понятия, так и для прежнего понятия.**
Это замечание применимо не только к прикладным понятиям, но и к понятиям самой теории понятий, что естественно, поскольку и сама теория понятий строится в соответствие с правилами построения понятий. В частности, **термин понятие, например, является наиболее общим термином теории понятий, и он может использоваться и используется для называния любых, как прикладных, так и собственных понятий теории понятий.** В этой связи можно отметить, что естественные языки, как представляется, не

очень приспособлены (или пока плохо приспособлены) для отражения этой особенности понятий. В этой связи заметим, что при изложении теории понятий приходится неоднократно использовать глаголы считаться и являться. Не вдаваясь глубоко в смысл этих глаголов, заметим, что считается, что они находятся в отношении
являться : считаться, где отношение <:> является отношением, определяемым в теории понятий.

1.8.6. Определения

Несмотря на широкое использование определений как в математике, так и, практически, во всех других дисциплинах, **определение самого определения остается достаточно неопределенным, а, точнее, <u>его просто нет</u>. Для продуктивного использования аппарата определений в формальных теориях** (и особенно в автоматизированных системах поддержки мышления) **необходимо его <u>формальное и адекватное определение</u>**. Теория понятий предлагает и использует формальное определение определения. **<u>Формализация определений является фундаментальной и концептуальной технологической основой теории понятий; теория понятий строится в основном с помощью определений и во многом представляет технологию работы с определениями.</u> <u>Аппарат формальных определений позволяет определить, что есть утверждение, теорема, доказательство, аксиома, постулат, теория и др.</u>**

1.8.6.1. Структура формальных определений

Прежде, чем давать определение (понятия и вообще чего-либо), необходимо определиться с тем, **что есть само определение**. Необходимо также выяснить: **что значит, что некоторая сущность определяется определением и что означает, что некоторая сущность удовлетворяет определению.** Следует также заметить, что определения не создают, не строят конкретных экземпляров определяемых объектов и/или сущностей.
Для прикладных, утилитарных дисциплин проблемы определения определений, как правило, не возникает: **определения прикладных дисциплин находятся достаточно близко к их реальным аналогам,**

и прикладные определения являются практически их изоморфными образами. Понятия теории, определяющей технологию работы с определениями, оказываются достаточно абстрактными. **<u>В теории понятий определение определения оказывается, естественно, основополагающей концепцией</u>**: что есть и чем является объект, который предлагается в качестве определения? Во всяком случае, определение не есть договоренность о чем-либо. **Многие, даже математические определения, являются не более чем <u>договоренностями, соглашениями или переназываниями</u>!** Договоренность определением не является, но может определением считаться. **<u>Определения в теории понятий договоренностями не являются.</u> Определение, как представляется, должно обеспечивать как процедуру построения конкретных экземпляров определяемых сущностей, так и процедуру квалификации соответствующего объекта в качестве определяемой определением сущности.** Вместе с тем, определение, вообще говоря, не дает алгоритма построения определяемой сущности.

Прежде всего, естественно сформулировать некоторые аспекты и следствия исходной основополагающей концепции определений. И здесь необходимо заметить, что теория понятий, в отличие от общепринятой практики прикладных определений, осуществляющих определения новых понятий на основе уже предварительно определенных сущностей, допускает определения и на основе сущностей, определяемых самим рассматриваемым определением (так называемые рекурсивно-замкнутыеые определения), и, даже, вплоть до ситуации, когда разложение некоторой сущности на составляющие является определением этой сущности. Это несколько необычное замечание является утверждением теории понятий, которое теорией понятий обосновывается и доказывается; это одна из особенностей понятийных определений. Такой, несколько нетрадиционный подход к определениям следует из основополагающей концепции определения. **Естественно полагать, что определение, во всяком случае, должно что-то определять; определяемая сущность, естественно, должна определению удовлетворять. <u>Сущность, определяемая определением, считается определяемой сущностью; определяемая сущность естественно должна определением допускаться.</u>** Отношение, имеющее место быть между собственно определением и определяемой им сущностью, является (и считается, и называется) **определяющим отношением**. **<u>Определяющее отношение является единственным основополагающим отношением</u>**. Следствие основной концепции определений теории понятий заключается в том, что **<u>«нечто» полагается определенным, если это</u>**

<u>«нечто» действительно реально построено, образовано</u>. Теория понятий предполагает возможность преобразование определения в алгоритм построения определяемой сущности. Примером непродуктивного определения может служить известный парадокс Б. Рассела о “брадобрее”: определение “несамоприменимого брадобрея” непродуктивно – такого брадобрея не существует; аналог этого парадокса использован для обоснования “существования несуществующих” алгоритмов (в формулировке: “Невозможен нормальный алгориим в А, применимый к тем и только тем записям нормальных алгориимов в А, которые являются записями несамоприменимых алгориимов”). Парадокс Б. Рассела о “брадобрее” является вариантом более старого парадокса, известного как парадокс лжеца: некто заявляет, что он лжец; является ли он действительно лжецом? Заметим к слову, что этот парадокс не дотягивает до статуса парадокса, а скорее является всего лишь логическим фокусом. Действительно, если некто на самом деле лжец, и решает высказаться на эту тему (а выбор темы не является обсуждаемым вопросом, он обусловлен сутью проблемы), то по заявленной (в самом высказывании) теме он имеет право только сказать, что он не лжец (ибо в противном случае он будет говорить правду); если же он на самом деле не лжец, то он также имеет право сказать только, что он не лжец. Таким образом, по заявленной в высказывании теме в любом случае он должен сказать, что он не лжец. Однако, если он в действительности утверждает, что он лжец, то это означает, что он кто угодно (хитрец, мошенник, фокусник, жулик, и т.д.), но только его высказывание к вопросу о его правдивости не имеет никакого отношения, и его высказывание действительно скорее является мошенничеством, нежели ложью. **<u>Логический фокус лжеца основан на неправомерной подмене понятий</u>**. Сущность, полученная в соответствии с некоторым определением, имеет силу, осмыслена только в рамках этого определения, т.е. определение необходимо не только (и может быть даже не столько) для ее построения, но и для ее использования. И, как следствие, поскольку определяемая сущность полностью определяется своим определением, то применение различных преобразований к этой сущности может осуществляться исключительно через посредство их применения к определению этой сущности. Кроме того, что определение, естественно, должно что-то определять, столь же естественно считать, что определение этого «нечто» определяет его полностью, т.е. определение не только определяет это «нечто», но и определяет способы (алгоритмы) построения конкретных экземпляров определяемого объекта, способы квалификации объектов в качестве этого «нечто» и т.д. Одним словом, **определение должно определять всю теорию определяемой сущности; говоря точнее, теория определяемой сущности не должна противоречить определению этой сущности.**

Наряду с определением определения, необходимо определиться и с тем, что есть **определяемая сущность определения** и что означает, что **некоторая сущность удовлетворяет определению**. И если для произвольного вида определений требуемые определения сформулировать затруднительно, то для одного, достаточно универсального вида определений, ответ на этот вопрос может быть дан (при рассмотрении конкретизации понятий), а до тех пор в настоящей работе будет использоваться в обычном, неформальном смысле, который, естественно, не будет противоречить его формальному уточнению.

Определение определения. ***Любая сущность, обеспечивающая существование некоторой другой (определяемой) сущности, является определением.***

Признавая, что определения действительно, на самом деле “что-то” определяют, **будем отделять непосредственно определение (как некий механизм, аппарат, средство) от того, что это определение определяет; будем эти две отделенные друг от друга сущности сопоставлять**. Такое **сопоставление** было названо **определяющим отношением**. Как устроено собственно определение в «общем случае» (и есть ли вообще такой «общий случай»?) - неизвестно; а вот что определяющее отношение, построенное на основе некоторого начального определения, является новым определением, можно утверждать. **Какое бы исходное определение ни было, оно может быть использовано для построения последующих производных определений.**

Замечание. Заметим, что здесь уже просматривается некий дуализм определений: определение, являясь некоей сущностью, вводит в рассмотрение еще одну, новую сущность; дуализм проявляется уже на уровне названия рассматриваемого определения: определение определения. **Дуализм определений является той концептуальной основой, которая при ее развитии обеспечивает “массовость” применений определений, алгоритмов, функций и т.д.** В конечном счете, эта двойственность обеспечивает дуализм определяющего отношения, сопоставляющего объекты реального мира сущностям виртуального мира понятий и сущности виртуального мира объектам реального мира и исключающего сводимость одного сопоставления к другому.

Теорема. Определение определения действительно является определением.

Доказательство. Поскольку, как можно видеть, текст определения действительно нечто определяет: а именно то, что есть определение (т.е. то, что может рассматриваться в качестве определяемой сущности), он является определением и, следовательно, определение определения действительно является определением в соответствии с собственным определением.

Таким образом, на основе этой теоремы можно утверждать, что определение определения является не аксиомой или постулатом, а именно определением.

Тезис. Если не соглашаться с тем, что определение и, в частности, определение определения, действительно нечто определяют, то, вряд ли вообще что-либо может быть определено.

Замечание 1. Не всякое "определение" действительно что-либо определяет; примером непродуктивного определения может служить определение "несамоприменимого брадобрея" Рассела.

Замечание 2. В теории понятий показано, что для определений возможны преобразования, результатом которых являются новые определения, которые, в свою очередь, будут определять и новые определяемые сущности.

1.8.6.2. Некоторые конкретные определения

Самым первым, начальным (инициальным) определением в иерархии наследуемых определений является **определение инициальной сущности**. Наследуемость определений предполагает, что преобразования определений таковы, что в результирующем определении полностью "содержится" (в некотором виде) преобразуемое понятие. Инициальная сущность, определяемая определением инициальной сущности, как правило, на практике является не более чем лингвистическим объектом, ее представляющим.

При построении определений будем стараться придерживаться терминологии: вводимые (определяемые тем самым) инициальные сущности будем именовать сущностями; определения, построенные с использованием инициальных сущностей, будем именовать объектами и/или понятиями; и термин понятие обобщает (и включает) термин сущность.

<u>Определение инициальной сущности</u>. Некоторая виртуальная (воображаемая, искусственная, никак неопределенная) или иная (например, некоторая специальная разновидность понятия, которая будет определена дальше), ни с чем не ассоциируемая сущность, допускающая применение к себе действий, считается инициальной сущностью.

Считается, что инициальная сущность сама определяет себя. Инициальная сущность считается сущностью. Существенно для обеспечения прагматики определений, что реальные объекты и явления могут выступать в роли инициальной сущности.

Определение аппликации. Инициальная сущность с указанным для нее конкретным действием (именуемого далее методом) такого, что его взаимодействие с инициальной сущностью имеет эффектом некоторую сущность (называемую **эффектом взаимодействия**), считается аппликацией сущностей; вместе с тем, это означает, что **эффект взаимодействия сущностей разложим на взаимодествующие сущности**.

Метод, упомянутый в определении аппликации, определяет (описывает) суть преобразования инициальной сущности; **взаимодействие есть некое универсальное действие, осуществляющее применение указываемого метода к инициальной сущности, приводящее к получению эффекта**; для получения эффекта не привлекается ничего, кроме этих взаимодействующих сущностей, т.е. **результат всецело определяется их взаимодействием**.

Определение аппликации отличается от определения инициальной сущности тем, что в определении инициальной сущности лишь допускается применение действий, а в определении аппликации возможное действие указывается.

Определение индуктивного определения. Эффект взаимодействия сущностей, соотнесенный с некоторой сущностью, считается индуктивным определением.

Индуктивное определение ещё недостаточно для роли приемлемого определения и требуется его развитие и усиление. Усовершенствование индуктивного определения заключается в его пополнении концепцией квалификации некоторой сущности в качестве эффекта взаимодействия двух сущностей, что предполагает её разложимость на эти две сущности, взаимодействие которых (в соответствии с индуктивным определением) и соотносит рассматриваемую сущность с эффектом этого взаимодействия. **Это усовершенствование дополняет концепцию построения, содержащуюся в индуктивном определении, концепцией анализа (разложимости).**

Определение дедуктивного определения. Индуктивное определение, которое рассматривается и как схема разложения некоторой сущности на пару сущностей, эффект взаимодействия которых сопоставляется этой исходной сущности, является дедуктивным определением. По сути, дедуктивное определение, в дополнение к **индуктивному определению, определяющему «процесс построения»,** дополняется квалификацией произвольной сущности в качестве эффекта взаимодействия: **сущность может быть квалифицирована как эффект взаимодействия, если можно предположить некоторые две другие сущности, одна из которых является действием (методом), и таких, что их взаимодействие дает эффект, соотне-сенный с исходной сущностью.**

Из построения дедуктивного определения видно, что оно не произвольная “выдумка”, а **некоторое определение, построенное из некоторых предварительных определений по некоторым правилам пребразования определений, которые имеются в теории понятий.** Далее **под определениями будут иметься в виду дедуктивные определения и/или их усиления; точнее, дедуктивные определения будут считаться частным случаем определений.**

Замечание 1. Поскольку дедуктивное определение развивает и наследует индуктивное определение, индуктивные определения, как правило, не будут использоваться.

Замечание 2. Все приведенные определения (определение инициальной сущности, определение аппликации, определение индуктивного определения, определение дедуктивного определения, равно как и все последующие определения, из них получаемые) действительно являются определениями, т.е. **они все имеют некоторые, определяемые ими сущности, что следует из определения определяемой сущности.**

1.8.6.3. Определяемые сущности

Считается, что **определения должны нечто определять**. С другой стороны, можно говорить о том, что некоторые сущности удовлетворяют определенному определению. Ответы на эти вопросы дает

Определение определяемой сущности. Определяемая сущность некоторого определения это сущность, которая способна с ним взаимодействовать так, что в результате этого взаимодействия появляется некоторое (новое) дедуктивное определение. Определение определяемой сущности одновременно является и определением того, что означает, что некоторая сущность удовлетворяет некоторому определению: **сущность удовлетворяет определению, если она является определяемой сущностью этого**

определения, т.е. если она допускается определением.
Теорема. Определение определяемой сущности является определяемой сущностью определения определяемой сущности.
Теорема. Определение определяемой сущности удовлетворяет определению определяемой сущности.
Доказательство. Действительно, поскольку в определении определяемой сущности предполагается взаимодействие определения с некоторой сущностью, и оно может быть, в частности, осуществлено посредством рассмотрения самого определения в качестве упомянутой в определении сущности (т.е. **считая эффект подстановки определения в определение эффектом взаимодействия сущностей**), то это будет означать, что определение удовлетворяет определению определяемой сущности и, следовательно, оно является определяемой сущностью.
Это доказательство дано, естественно, на содержательном, неформальном уровне; **формальное доказательство может быть дано после определения достаточного формального аппарата теории понятий и, в частности, после определения механизма взаимодействия сущностей.**
Отношение, существующее между определением и определяемой им сущностью, считается, является и называется определяющим отношением.

1.8.6.4. Некоторые свойства и особенности определений

Индуктивные определения определяют новые понятия на основе известных сущностей или понятий. Определение определяемой сущности одновременно является определением понятия этой сущности. **<u>Сущности</u>, которые определяются определениями, в теории понятий считаются и называются <u>понятиями</u>.** В теории понятий определяются также действия (методы), допустимые для понятий, точнее, для их определений: критерий допустимости методов для понятий опять же выводится из основной концепции определений. Несмотря на то, что введенные в разделе определения являются первыми простейшими понятиями теории понятий, они обладают интересными, иногда парадоксальными свойствами. Здесь мы всего лишь упомянем некоторые из них. Так, понятно, что определение какой-либо сущности определяет все допустимые этим определением сущности и в то же время определение не определяет (в смысле, не строит) ни одного конкретного экземпляра определяемого объекта (**в теории понятий устанавливается отношение понятия сущности и объекта**). **Определение какого-либо объекта <u>определяет не множество</u> (имея в виду как актуально, так и потенциально бесконечные множества) <u>объектов</u>, а <u>определяет все объекты</u>**. Определение какого-либо объекта не есть алгоритм построения определяемого объекта; определение какого-либо объекта не есть алгоритм квалификации некоторого объекта в качестве определяемого объекта.

1.8.6.5. Нотация определений

Нотация определений представляет собой исключительно важный аспект теории понятий: **<u>нотация осуществляет актуализацию понятий через посредство актуализации их определений</u>**. Дело в том, что **преобразования понятий в теории понятий осуществляется через посредство преобразования их определений** и поэтому адекватная нотация определений существенна. Именно **преобразование определения некоторой сущности вырабатывает новую сущность** как эффект этого преобразования. Традиционные определения даются, как правило, на естественном языке; но естественный язык не является таким уж естественным для искусственного интеллекта; кроме того, **<u>естественный язык</u>**, естественно, **<u>содержит множество неоднозначностей, двусмысленностей и неточностей</u>**. Теория понятий допускает применение преобразований к определениям теории понятий, и выполнение таких преобразований для определений, сформулированных на естественном языке, представляет дополнительные, не обусловленные спецификой проблемы трудности. Кроме того, в естественных языках формулирование некоторых отношений, характерных для определения понятий и сущностей, составляют определенные лингвистические трудности. **<u>Нотация в теории понятий выполняет отнюдь не вспомогательную роль документирования, а является средством, способом конструирования, формулирования и представления определений</u>**. **Теория понятий предлагает некоторую канонизированную систему обозначений для представления определений, называемую <u>нотацией</u> <u>определений</u>**. Нотация дедуктивного определения представляет собой аутентичную запись (перевод) имеющегося (на естественном языке) определения дедуктивного определения в виде определенного набора специальных символов, т.е. в виде некоторых лингвистических схем. **Нотация**

дедуктивного определения, естественно, включает в себе нотацию и инициальной сущности, и нотацию аппликации, и нотацию индуктивного определения, т.е. нотация дедуктивного определения наследует нотацию всех предыдущих определений. Пусть v есть некоторая «произвольная виртуальная сущность», допускающая применение к себе действий, т.е. инициальная сущность; пусть f есть некоторая сущность, которая может взаимодействовать с сущностью v. Такая совокупность сущностей изображается конструкцией f[v], которая **представляет указанное взаимодействие сущностей и называется аппликацией**. Сущность, сопоставляемая эффекту этого взаимодействия, изображается нотацией этой сущности u. В отличие от эффекта взаимодействия сущностей f и v, которая может быть обозначена как f(v), аппликация этих сущностей f[v] представляет всего лишь упорядоченную пару взаимодействующих сущностей {f,v}. Взаимосвязь аппликации f[v] и сущности u, сопоставляемой эффекту применения действия f к аргументу v, сформулированная в дедуктивном определении, изображается схемой u : f[v], где символ “:“ представляет совмещение значения глагола “являться” из дедуктивного определения со значением глагола “считаться” из индуктивного определения. В естественном языке смысл символа “:” точнее всего передается местоимением “это”. Нотация определяющего отношения, как обобщения дедуктивного определения, естественно нотируется с использованием того же символа отношения “:”. Для различных конкретных разновидностей определений их нотация будет пополнять (или конкретизировать) введенную нотацию дедуктивного определения.

Нотация определения дедуктивного определения

В соответствии с нотацией определений нотация дедуктивного определения может быть представлена схемой:

((u:f[ ]) : ((u):f[ ])) [v],

где свободные позиции в квадратных скобках замещаются аргументом “v” при осуществлении взаимодействия метода ((u:f[ ]) : ((u):f[ ])), и аргумента [v].

1.9. Сущности

Сущности это начальные, простейшие объекты теории понятий. Теперь, имея аппарат дедуктивных определений, определение понятия сущности и определения некоторых конкретных сущностей могут быть даны с его использованием более формально и более содержательно и точно. Следует заметить, что само дедуктивное определение после формального определения сущностей и рассмотрения свойств сущностей может быть рассмотрено и сформулировано более детально и основательно.

1.9.1. Концепция сущности

Определение, в котором "сущность" является определяемой сущностью, является определением сущности. Определение сущности является дедуктивным определением (точнее, частным случаем или, еще точнее, некоторой конкретизацией дедуктивного определения); определение сущности – это утверждение того, что взаимодействие сущностей и есть сущность (суть сущности). Инициальной сущностью для построения более содержательных сущностей является "неопределенная сущность". Естественно, по-скольку она полагается неопределенной, никакого ее определения дано быть не может. Определение сущности допускает различные взаимодействия сущностей и, в частности, допустимо такое взаимодействие неопределенной сущности с некоторой другой сущностью, в результате которого неопределенная сущность становится более определенной.

1.9.2. Определение сущности

Определение сущности, поскольку оно является определением, должно определять не только сами сущности, но и предопределять всю теорию сущностей, и, в частности, способы построения сущностей и способы квалификации объектов в качестве сущностей. Поскольку в определении сущности (равно как и в дедуктивном определении) существенную роль играет взаимодействие сущностей, то предварительно необходимо сформулировать, что считается их взаимодействием.

Взаимодействие (двух сущностей u и v) - это такое дедуктивное определение (утверждение), которое определяет, что эффект u(v) взаимодействия некоторой сущности u и (возможно неопределенной) сущности v, называемый эффектом взаимодействия, находится с ними (т.е. с сущностями u и v) в отношении, представляемым дедуктивным определением u(v) : u[v].

Метод в этом дедуктивном определении взаимодействия представляется сущностью.

Замечание. Дедуктивное определение взаимодействия, в котором “эффект” взаимодействия двух сущностей неотличим от самих взаимодействующих сущностей, взаимодействием не считается и, следовательно, взаимодействием не является.

Определение сущности. Совокупность двух составляющих некоторого объекта (различаемых, скажем, как метод и его аргумент) одна из которых (скажем, метод) считается (или даже является) сущностью, взаимодействие которых образует исходный (вышеупомянутый) объект, **являeтся сущностью**. Определение сущности действительно можно считать определением, поскольку оно обеспечивает появление некоторой новой сущности (и называемой сущностью), которая определением и определяется. **Инициальная сущность**. В определении сущности одна из составляющих считается сущностью, о другой составляющей ничего не говорится. Она будет предполагаться инициальной (не-определенной) сущностью. Инициальная сущность допускает свою конкретизацию другой (являющейся или считающейся) сущностью; определение сущности не исключает возможности и аргументной составляющей быть (т.е. считаться и являться) сущностью; во всяком случае инициальная сущность считается сущностью. **Построение сущности**. **Определение сущности, вообще говоря, не является способом (алгоритмом) построения сущности (как и любые определения, оно не строит определяемый объект),** что допускает и предполагает, тем самым, возможность использования различных подходящих для этого способов. В теории понятий, в качестве одного из возможных (и, возможно, единственным) **способом построения сущностей, предлагается использование отношения обобщения-конкретизации; это отношение, также, является отношением определения. Построение отношения и является построением сущности.** Построение определения конкретной сущности можно рассматривать как применение к неопределенным (инициальным) сущностям операции (метода) взаимодействия сущностей, в результате чего одна из взаимодействующих сущностей становится более “определенной”; операция (метод) взаимодействия сущностей является некоторой конкретизацией взаимодействия. **Определение утверждения**. Отношение двух неопределенных сущностей u и v, считающееся определением сущности u через посредство обобщения сущности v и/или конкретизацией сущности u посредством сущности v, представляемое схемой u:v, **образует утверждение**.

Отношение u:v будем называть (а после необходимого доказательства и считать) утверждением, понимая под этим, что оно **утверждает инициальную** (до этого определяющего утверждения) **сущность** u в качестве обобщения (продолжающей оставаться инициальной) сущности v и сущность v в качестве конкретизации сущности u. Поскольку обе сущности, участвующие в построении определяющего отношения изначально являются инициальными (т.е. неопределенными и “свободными”) сущностями, то поэтому определяющее отношение не может быть недопустимым, несуществующим и непонятным. **Теорема.** Утверждение u:v, где u и v – некоторые исходно неопределенные сущности, и упорядоченная совокупность {u,v} этих сущностей считается сущностью, является сущностью. **Доказательство.** В соответствии с определением сущности утверждение u:v можно рассматривать как совокупность двух компонент: компоненты <:> и компоненты <u v>. Если вторую компоненту считать сущностью, а первую считать методом, который может взаимодействовать со второй компонентой с образованием исходного объекта в качестве эффекта этого взаимодействия, то этот исходный объект (в соответствии с определением сущности) будет являться сущностью.

Теорема. Утверждение u:v, где u считается обобщением v и v является конкретизацией u – является сущностью.

Доказательство. Это утверждение действительно является сущностью, поскольку оно дословно повторяет определение (и, тем самым, безусловно удовлетворяет определению) сущности. **Теорема.** Утверждение “сущность : определение сущности” является сущностью.

Доказательство. Действительно, это утверждение, по сути, является утверждением того, что определение сущности действительно определяет сущность, т.е. повторяет определение сущности в формализованном виде.

Более детально (с привлечением формального определения взаимодействия) утверждение данной теоремы можно представить схемой: сущность : (u(v) : u[v]).

Следствие. Определение сущности это такая сущность, что ее взаимодействие с “инициальной сущностью” дает эффектом сущность. **Теорема.** Для любой (определенной, неопределенной или, даже, для физической, реальной) сущности v допустимо утверждение u:v. **Доказательство.** Действительно, поскольку не имеется оснований, исключающих возможность считать v некоторой неопределенной инициальной сущностью (что обеспечивается её инкапсуляцией, неуказанием какой-либо внутренней структуры этой сущности), то u:v – сущность.

Любое взаимодействие сущностей образует не более чем сущность; сущности, которая была бы общее сущности – нет. **Теорема** (единственности). Пусть u; v – сущность; тогда <:> : ; - т.е. ; частный случай отношения <:>.

Доказательство. Доказательство будет очевидно после уточнения семантики отношения обобщения\конкретизации.

Следствие. Сущность является “своим частным случаем“. **Следствие.** Сущность является “максимальной сущностью”. **Следствие.** Утверждение является столь общим отношением, что его обобщения невозможно.

Следствие. <:>:[<:>,<any>] – сущность, ибо раскладывается на {<:>, <any>} естественным образом.

Следствие. <:> – мета-отношение.

<u>Определение понятия взаимодействия</u>. Сущность, которая может считаться (в соответствие с определением сущности) эффектом взаимодействия, является взаимодействием.

Сущность, для которой определено ее применение к сущности, считается взаимодействием.

Теорема. Взаимодействие, определяемое дедуктивным определением u(v):u[v] двух сущностей u и v, является сущностью. **Доказательство.** Действительно, полагая (u:v) : (u(v) : u[v]), получаем сущность в качестве эффекта взаимодействия. **Следствие.** Понятие взаимодействия является сущностью. **Взаимодействие сущностей** в теории понятий может осуществляться различными способами: **применением одной сущности к другой, конкретизацией и обобщением сущностей, <u>сложением и умножением сущностей</u> и т.д.** Интересно, что **<u>взаимодействие само может выступать в качестве сущности, т.е. в качестве понятия взаимодействия.</u>** Кроме того, определение сущности обеспечивает еще и суперпозицию сущностей: именно на основе определения сущности появляется возможность рассмотрения суперпозиций сущностей.

Теорема. Если u и v сущности, то аппликация u[v] будет удовлетворять определению сущности и, тем самым, являться сущностью.

Доказательство. Действительно, аппликация состоит из двух взаимодействующих сущностей и, следовательно, если аппликация u[v] имеет эффект (который обобщает аппликацию), то она является сущностью.

Таким образом, как представляется, определение сущности может быть обобщено путем предположения, что взаимодействующие компоненты могут образовывать не только исходный объект, но даже и некоторое его обобщение. Но поскольку имеет место утверждение (сущность : сущность) (т.е., что **любое обобщение сущности является не более, чем сущностью**), то на этом основании такое обобщение не будет определять более общей сущности.

Теорема. Взаимодействие двух сущностей является сущностью. **Доказательство**. Рассмотрев пару взаимодействующих сущностей можно видеть, что взаимодействия сущностей допускается определением сущности в качестве сущности: взаимодействие может быть представлено как пара ("разложено на пару") взаимодействующих сущностей, эффект взаимодействия которых может считаться (поскольку не имеется обстоятельств, препятствующих этому) сущностью, а это означает, что (любое) взаимодействие двух сущностей удовлетворяет определению сущности и, следовательно, является сущностью.

Замечание 1. Данная теорема предназначена не для того, чтобы показать, что объект, определяемый определением сущности, действительно существует, а для того, чтобы продемонстрировать, что работать с определением сущности можно и следует по правилам, которые самим этим определением предлагаются.

Замечание 2. Здесь используется интуитивное представлением о том, что означает, что некоторый объект удовлетворяет некоторому определению. Как будет показано, это интуитивное представление совпадает с формальным определением того, что значит, что объект удовлетворяет дедуктивному определению.

Сущности будут нотироваться буквами (и словами) некоторого алфавита. Заметим, что **хотя сущность буквой нотируется (обозначается), она буквой не является**.

Теорема. Определение сущности является сущностью. **Доказательство**. Действительно, **в определении сущности** рассматриваются некоторые **две сущности (<u>метод и его аргумент</u>) <u>взаимодействие которых (по определению сущности) дает новую сущность</u>**. Следовательно, определение сущности является сущностью.

Теорема. Определение сущности допускает некоторую инициальную сущность, связываемую с сущностью, в качестве сущности. **Доказательство.** Принимая во внимание, что настоящая теорема как раз и представляет требуемое в теореме связывание инициальной сущности с сущностью, инициальная сущность может быть рассмотрена в качестве сущности: сущность:сущность и/или инициальная сущность.

Теорема. Определение сущности представляет собой дедуктивное определение.

Доказательство. Действительно, определение сущности можно считать некоторой сущностью, которая взаимодействую с некоторой неопределенной (инициальной) сущностью дает эффектом некоторую сущность, которая считается сущностью; с другой стороны в определении сущности говорится о разложении сущности на две взаимодействующие сущности, взаимодействие которых дает в качестве эффекта сущность; это означает, что определение сущности действительно является дедуктивным определением.

Теорема. Действия, применяемые к инициальной сущности в дедуктивном определении, являются сущностями.

Доказательство. Действительно, поскольку дедуктивное определение образует некоторую новую сущность, то в соответствии с этим дедуктивным определением, она разложима на две компоненты, которые в соответствии с определением сущности могут считаться сущностями.

Следствие. Теорема позволяет представлять дедуктивное определение как суперпозицию двух действий над сущностями: как конкретизацию, конкретизируемой сущностью которой является аппликация.

Теорема. Результатом (эффектом) исполнения взаимодействия сущностей является сущность.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из рассмотрения исполнения для каждого вида взаимодействия.

Теорема. Определение является сущностью.

Доказательство. Поскольку считается, что определения определяют некоторую (определяемую) сущность, то сами определения (в предположении возможности определения над ними действий, т.е. ввиду возможности их взаимодействия с некоторой другой сущностью – действием) могут рассматриваться в качестве "сущностей", т.к. удовлетворяют определению сущности.

Замечание. "Сущность", определяемая схемой: сущность: сущность [сущность], – это такая сущность (в каком-то смысле предельная), что любое ее взаимодействие с сущностью ее только конкретизирует; это определение, в частности, означает, что **<u>понятия являются сущностями</u>, т.е. что обобщением взаимодействия сущностей является сущность**.

1.9.3. Существование сущностей

Поскольку сущности не являются объектами реального физического мира, остро стоит проблема обоснования существования сущностей (а затем и понятий). **В отличии реальных физических объектов, существование которых может быть достоверно установлено по их взаимодействию с некоторыми другими реальными физическими объектами,** существование которых признается, в виртуальном мире сущностей **проблема установления существования сущностей не столь очевидна и тривиальна**. Для установления существования сущностей требуется выработка, установление и принятие некоторого нового критерия существования, ибо прежний критерий взаимодействия сущностей с реальными физическими объектами проблематичен из-за неопределенности взаимодействий виртуальных и реальных объектов.

Критерий существования сущностей. В качестве критерия существования виртуальных сущностей можно принять возможность их обобщения: **любая сущность допускает свое обобщение**; **сущность, представляющая обобщение некоторой другой сущности, считается существующей.**

Теорема (существования). Существование сущности обеспечено его собственным определением.

Доказательство. Произвольная сущность, в соответствии с определением сущности, допускает разложение на определение дедуктивного понятия, применяемого к некоторой виртуальной инициальной сущности, и, следовательно, существование сущности не зависит от способа его построения, а определяется исключительно собственным определением.

1.9.4. Концепция гомоморфизма сущностей

Понятия, определяемые посредством их соответствующих определений, имеют в своей основе использование некоторой категории, которая фигурирует в определениях под именем инициальной сущности. Определение инициальной сущности практически никак ее не определяет, не специфицирует, предполагая лишь возможность применения к ней действий. Такая неограниченная, практически всеобъемлющая универсальность инициальной сущности, при всей ее привлекательности, абсолютно неконструктивна: что именно и, главное, каким образом что-либо может быть практически рассмотрено в качестве инициальной сущности остается неопределенным. **Эта особенность определений позволяет в качестве виртуальной сущности предполагать достаточно**

неограниченный набор произвольных сущностей. Совершенно уникальным и феноменальным технологическим приемом, возможным и допускаемым именно теорией понятий, является допущение в качестве конкретизации инициальной сущности самих сущностей. И, главное, в теории понятий имеется механизм, осуществляющий допущение сущностей в качестве “значений” инициальной сущности. Этот механизм достаточно и всецело конкретизируя инициальную сущность, никак не уменьшает ее универсализма, поскольку в получающихся таким образом определениях понятий инициальная сущность продолжает иметь место быть, продолжает наличествовать, она унаследована. Для осуществления этой возможности требуется всего лишь определить схему (способ) применения действий к сущностям. **Схема применения действий к сущностям, предлагаемая теорией понятий, называется <u>семантическим гомоморфизмом</u>**.

Рассмотрим применение одного определяющего отношения к другому: (w:u)[u:v]. Положим, что эффектом такого применения является выражение, сущность (w:(u:v)).

Эту схему применения определяющего отношения к определяющему отношению будем считать теорией и называть семантическим гомоморфизм: (w:(u:v)) : (w:u)[u:v].

Существование гомоморфизма

В соответствии с критерием существования сущностей можно утверждать, что семантический гомоморфизм существует и является сущностью. Аккуратнее будет сказать, что семантический гомоморфизм является сущностью и, следовательно, существует.

Теорема (теорема существования). Существование гомоморфизма обеспечено его собственным определением.

Доказательство. Сущность, представляющая гомоморфизм (определение гомоморфизма), представляет собой разложение некоторой сущности на две элементарные взаимодействующие сущности, взаимодействие которых образует исходную сущность. Это означает, что определение гомоморфизма удовлетворяет гомоморфизму; что гомоморфизм гомоморфен.

2. Понятия как средства отображения познания и созидания

2.1. Понятие как форма мышления. Общая характеристика понятия

Проблема простейшего элемента той или иной системы, той или иной науки исследовалась давно. В ее разработку внесли свой вклад Аристотель, Ф. Бэкон, Р. Декарт и Г. Гегель. В качестве такого **"первокирпичика"** здания логики как науки мы рассматриваем **понятие**, поскольку оно - **наипростейшая в структурном отношении форма мысли,** оно состоит всего лишь из двух элементов: **объема и содержания**. Некоторыми философами оспаривается простота понятия на том основании, что **понятие есть свернутая форма мысли**, раскрытие только содержания которого требует нескольких суждений. Поэтому, считают они, скорее суждение структурно проще понятия. Такая точка зрения является результатом нечеткого, нестрогого понимания **формальнологического подхода**, здесь формальный критерий подменен содержательным, от которого логика сознательно отвлекается. Раскрывая строение понятия как формы мысли, выделяя содержание в качестве одного из элементов его структуры, логика не ставит своей задачей раскрыть содержание всякого понятия, для нее достаточно того, что это содержание в любом понятии есть. **Поскольку же содержание понятия определяется предметной областью, которую понятие отражает, то строго говоря, содержание понятий - принадлежность только тех наук и специалистов, которые исследуют эти предметные области.** Логика может раскрывать содержание понятий только своей предметной области, но не понятий вообще. Формулируя нормативы такого раскрытия, но не зная существенных признаков иных предметных областей, логика содержания других наук не трогает. Ее нормативы выступают методологическими ориентирами для специалистов других наук, пытающихся сформулировать определения (а **определение и есть раскрытие содержания понятия**) тех или иных предметов.

Поскольку понятие состоит всего лишь из двух элементов, а **суждение составляют как минимум два понятия,** и в нем еще выделяются и другие структурные элементы, то естественно, что **понятие -**

простейшая форма мысли, **лежащая в основе других, более сложных**. Своей диалектической природой (обратным отношением объема и содержания) понятие определяет диалектичность и других, более сложных форм мысли.

Понятие — это мысль, в которой отражаются общие, и притом существенные, свойства предметов, процессов и явлений. Вместе с тем **понятия не только отражают общее, но и расчленяют вещи, группируют их, классифицируют в соответствии с их различиями**. Понятие "дерево" не только отражает общее, свойственное всем деревьям, но и отличие любого дерева от всего другого.

В отличие от ощущений, восприятий и представлений **понятия лишены наглядности или чувственности**. **Содержание понятия зачастую невозможно представить в виде наглядного образа**. Человек может представить, например, доброго человека, но не может представить в виде чувственного образа такие понятия и процессы, как доброта, зло, красота, закон, скорость света, мысль, причина и т. п. Но все это человек может понять.

Понятия образуются как результат двух диалектически связанных операций: выделения общего в ряду сходных по какому-либо признаку объектов и отвлечения, абстрагирования от других признаков.

Вырабатывая, например, понятие "стул", мы отвлекаемся от таких признаков реальных стульев, как высота, цвет, материал, и выделяем важнейшие его признаки, которые определяют использование стула: возможность сидеть на нем, наличие сиденья, спинки, ножек и т. д. Понятия одновременно являются общими и отвлеченными (абстрактными); оба этих признака существенны для понятия и взаимосвязаны, ибо **любое понятие есть результат и обобщения, и абстрагирования.**

Объективные признаки вещей многообразны. Одни из них устойчивые, существенные, необходимые, без которых предмет не может существовать в своей качественной определенности. Другие признаки преходящие, несущественные; приобретая или теряя их, предмет остается самим собою.

Например, существенные признаки специалистов, которых готовит Межрегиональная Академия управления персоналом, — профессионализм, умение руководить людьми, инициатива и творчество, высокие нравственные качества, строгая дисциплинированность, самоотверженность при выполнении служебного долга.

Такие же черты, как добродушие, обходительность, увлечение музыкой, поэзией, — несущественны.

Различие между существенными и несущественными признаками относительно: в определенных условиях, а также с развитием предмета и нашего познания они могут меняться местами. Критерием существенности признаков, отраженных понятием, является общественная практика.

Понятие — одна из основных форм научного познания. **Формируя понятие, наука отражает в них изучаемые ею предметы, явления, процессы.** Например, экономическая теория сформировала такие понятия, как "товар", "капитал", "стоимость", правовые науки — понятия "преступление", "наказание", "вина", "умысел", "правоспособность" и др. Отражая существенное, понятия не содержат всего богатства индивидуальных признаков предметов и в этом смысле они беднее форм чувственного познания — восприятий и представлений. Вместе с тем, отвлекаясь от несущественного, случайного, понятия позволяют глубже проникать в действительность, отображать ее с большей полнотой, на что не способно чувственное познание.

2.2. Понятие и слово

Понятие неразрывно связано с **основной языковой единицей** — **словом**. Понятия выражаются и закрепляются в словах и словосочетаниях, без которых невозможно ни формирование понятий, ни оперирование ими.

Понятие не существует без слова, мышление в понятиях — без языка. Единство мышления и языка означает не только то, что они неотделимы, не существуют друг без друга, но также и то, что они не тождественны. **Слово есть материальная оболочка понятия, а понятие — идеальное содержание слова**, таким образом, в единстве слова и понятия содержатся также различие и противоречие материального и духовного. Когда мы прониклись идеей, когда ум, говорил Вольтер, хорошо овладел своей мыслью, она выходит из головы вполне оформленной в виде подходящих выражений, облаченных в подходящие слова, как Минерва, вышедшая из головы Юпитера в доспехах. В разных национальных языках одно и то же понятие выражается разными словами. Но и в одном языке слово и понятие нередко не совпадают. Многие слова имеют не одно, а несколько значений. Например, слово русского языка «связка» употребляется в значениях: 1) несколько однородных предметов, связанных вместе («связка книг»), 2) сухожилие, соединяющее отдельные части скелета или органа тела («мышечные связки»), 3) элемент суждения, связывающий субъект и предикат или простые суждения. Несколько значений имеют слова «закон», «субъект», «край» и др.

Процесс развития мысли, обогащения понятий — процесс нелегкий как в развитии ребенка, усваивающего ранее выработанные людьми понятия с помощью слов, так и в историческом развитии человечества. Когда рождается новая мысль, подчас кажется, что все затруднения, связанные с ее выражением, возникают от "нехватки" слов.

Однако главная трудность состоит в недостаточной ясности, отчетливости самой мысли. Пока мысль неясна, она не может быть точно выражена, когда же мысль становится четкой, она сравнительно легко находит свое словесное оформление. Язык не только не препятствует, а наоборот, способствует развитию мышления, поскольку регистрирует и закрепляет в словах успехи в познании мира, достигнутые отдельными членами общества. Эти успехи благодаря языку становятся достоянием всех людей.

Язык влияет на сознание: его исторически сложившиеся нормы, специфичные у каждого народа, в одном и том же объекте оттеняют различные признаки. Стиль мышления, например, в немецкой философской культуре иной, чем, скажем, во французской, что в известной степени зависит и от особенности национальных языков этих народов. Однако зависимость мышления от языка не является абсолютной. Мышление детерминируется главным образом своими связями с действительностью, язык же может лишь частично модифицировать форму и стиль мышления.

Логическая структура мысли и грамматический строй языка не совпадают. **Законы логики общечеловечны, а формы словосочетаний специфичны для каждого национального языка**. С одной стороны, грамматические законы строения речи зависят от законов логического строения мысли, с другой стороны, логические формы, в которых отливается мысль, испытывают влияние грамматических особенностей языка.

В любом языке существуют синонимы и омонимы.

Омонимы (от греч. homos — «одинаковый» и onyma — «имя») — это слова, совпадающие по звучанию, одинаковые по форме, но выражающие различные понятия (например, коса — это и сплетенные вместе пряди волос, и идущая от берега узкая полоска земли, и орудие для срезания травы, злаков и т.п.; нота — графическое изображение музыкального звука и дипломатическое обращение одного государства к другому; заключение — суждение, полученное логическим путем из посылок, и состояние лица, лишенного свободы, и последняя часть, конец чего-либо).

Синонимами (от греч. synonymus — «одноименный») называются слова, близкие или тождественные по своему значению, выражающие одно и то же понятие, но отличающиеся друг от друга оттенками значений или стилистической окраской. Например, «родина» и «отечество»; «юридическая наука», «правоведение» и «юриспруденция»; «договор», «соглашение» и «контракт» и многие другие.

Наличие в языке омонимов ведет к необходимости выяснить значение слов, употребляемых в практике мышления. Многозначность слов (полисемия) нередко приводит к смешению понятий, а следовательно, к ошибкам в рассуждениях. Поэтому необходимо точно установить значение слов, с тем чтобы употреблять их в строго определенном смысле.

Слова и словосочетания, имеющие определенный смысл и обозначающие какой-либо предмет, называются именами.

Способность слов выражать различные понятия ведет иногда к неясности в рассуждении или в аргументации. Поэтому в науке пользуются словами-терминами (от лат. terminus— граница), точно выражающими содержание научных понятий.

Термин — это слово или словосочетание, обозначающее строго определенное понятие и характеризующееся однозначностью по крайней мере в пределах данной науки или родственной группы наук.

В науке, технике, искусстве и др. стремятся, чтобы каждый термин <u>имел единственное значение</u>. Многозначность терминов приводит ко всякого рода недоразумениям в спорах, дискуссиях, к ошибкам как в мышлении, так и в практике. Неточная терминология приводит к неопределенности в мышлении, к смешению понятий, а через них — к смешению явлений действительности. Поэтому вопросы терминологии небезразличны для науки.

2.3. Содержание и объем понятия

<u>Содержанием понятия</u> называется совокупность существенных признаков предмета, которая мыслится в данном понятии.

Например, содержанием понятия «преступление» является совокупность существенных признаков преступления: общественно опасный характер деяния, противоправность, виновность, наказуемость.

Множество предметов, которое мыслится в понятии, называется объемом понятия. Объем понятия «преступление» охватывает все преступления, поскольку они имеют общие существенные признаки.

Логика оперирует также понятиями «класс» («множество»), «подкласс» («подмножество») и «элемент класса».

Классом, или множеством, называется определенная совокупность предметов, имеющих некоторые общие признаки. Таковы, например, классы (множества) высших учебных заведений, студентов, юридических законов, преступлений и т.д. На основании изучения определенного класса предметов формируется понятие об этом классе. Так, на основе изучения класса (множества) юридических законов образуется понятие юридического закона.

Класс (множество) может включать в себя ***подкласс, или подмножество.*** Например, класс студентов включает в себя подкласс студенток юридических вузов, класс преступлений — подкласс экономических преступлений.

Отношение между классом (множеством) и подклассом (подмножеством) является отношением включения и выражается при помощи знака $\subset$**:** **A** $\subset$ **B.** Это выражение читается: А является подклассом В. Так, если А — следователи, а В — юристы, то А будет подклассом класса В.

Классы (множества) состоят из элементов. ***Элемент класса*** — это предмет, входящий в данный класс. Так, элементами множества высших учебных заведений будут Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московская государственная юридическая академия и т.д.

Отношение элемента к классу выражается при помощи знака $\in$:**A** $\in$ **B (A** является элементом класса **B).**

Если, например, А — юрист Иванов, а В — юристы, то А будет элементом класса В.

Различают универсальный класс, единичный класс и нулевой, или пустой, класс.

Класс, состоящий из всех элементов исследуемой области, называется *универсальным классом* (например, класс планет Солнечной системы). Если класс состоит из одного элемента, то это будет *единичный класс* (например, планета Юпитер); наконец, класс, который не содержит ни одного элемента, называется *нулевым (пустым) классом.* Пустыми классами являются, например, вечный двигатель, круглый квадрат, русалка, леший и др. Число элементов пустого класса равно нулю.

Содержание и объем понятия тесно связаны друг с другом. Эта связь выражается в *законе обратного отношения между объемом и содержанием понятия,* который устанавливает, что увеличение содержания понятия ведет к образованию понятия с меньшим объемом, и наоборот.

Так, увеличивая содержание понятия «государство» путем прибавления нового признака — «современный», мы переходим к понятию «современное государство», имеющему меньший объем. Увеличивая объем понятия «учебник по теории государства и права», переходим к понятию «учебник», имеющему меньшее содержание, так как оно не включает в себя признаки, характеризующие учебник по теории государства и права.

Подобное же отношение между объемом и содержанием имеет место в понятиях «преступление» и «преступление против личности» (первое понятие шире по объему, но уже по содержанию), «генеральный прокурор» и «прокурор», где первое понятие уже по объему, но шире по содержанию.

Закон обратного отношения между объемом и содержанием понятия лежит в основе логических операций.

2.4. Структура понятия

Как цельная форма мысли понятие представляет собой закономерное единство двух составляющих его элементов: объема и содержания. **Объем — структурный элемент понятия**, отражающий собой совокупность предметов, обладающих одинаковыми существенными и отличительными признаками. Так, объем понятия «стол» отражает собой всю совокупность столов на нашей планете, все их множество, весь их класс. Объем понятия «человек» - пятимиллиардное население планеты. **Содержание — элемент структуры понятия**, отражающий собой совокупность существенных и отличительных признаков, присущих предмету, явлению (классу предметов, множеству явлении, процессов и пр.). Содержание понятия «стол», например, будет представлять собой совокупность таких существенно-отличительных признаков данного предмета, как искусственность его происхождения, гладкость и твердость плоскости, вознесенной над поверхностью земли (пола), жесткость точки (точек) опоры и пр., и предназначенность для различных видов ручной деятельности человека. Полный перечень существенных признаков может сделать только хороший специалист в этом деле, логика не может заменить его, она не изучает подобные предметы, она лишь указывает, что входит в содержание отдельных мыслей о предмете, но какие именно признаки существенны для этого предмета лучше всего может знать лишь специалист в данной предметной области. Перечисляя признаки, входящие в содержание понятия "стол", - предмет всем хорошо известный, - мы тем не менее не застрахованы от замечаний специалистов в этой предметной области.

Закономерная связь объема и содержания понятия определяет целостность данной формы мысли. Внутренним законом структуры понятия является закон обратного отношения объема и содержания понятия. Увеличение объема понятия влечет за собой сокращение его содержания, а увеличение содержания — уменьшение объема, и наоборот. Так, добавление к перечню существенных признаков общего понятия «стол» еще и признака «квадратность» (а это определенно увеличивает содержание) сразу же сокращает объем исходного понятия до нового — «квадратный стол». Добавление еще одного признака, например «деревянность», сокращает объем еще более — до понятия «квадратный деревянный стол». Обратный процесс — сокращение содержания, — естественно, повлечет за собой увеличение объема понятия.

Обратное отношение объема и содержания понятия выступает главным законом структуры данной формы мысли. Такие законы мы и будем в дальнейшем называть внутренними законами, законами структуры. Законы структуры являются определяющими для любого предмета, ибо отражают его внутренние, существенные связи. Закон структуры понятия является определяющим внутренним законом данной формы мысли, и все особенности ее находятся в прямой зависимости от этого закона.

Некоторыми оспаривается правомерность этого закона на том основании, что развивающаяся наука по мере расширения области познания, т.е. объема предметов, на которые может распространяться то или иное понятие, увеличивает при этом и само содержание понятий в результате все более глубокого исследования познаваемой области. Здесь явное игнорирование или недопонимание специфики предмета формальной логики, которая отвлекается от конкретного содержания форм мысли и рассматривает их как таковые, ставшие, вне их исторического развития и изменения. Исторические изменения содержания тех или иных понятий, например, понятия "диалектика", понятия "человек", "метафизика" и пр., исследуются не формальной логикой, а теорией познания, диалектической логикой, наконец, филологией. Логику интересуют лишь структурные зависимости составляющих форму мысли элементов, а они в любые времена (при любых объемах и содержании) остаются закономерными и даже диалектическими. Закон обратной зависимости объема и содержания понятия есть диалектический по своей сути закон, потому что он взаимосвязывает определенным образом несовпадающие (противоположные) элементы данной формы мысли, и эта взаимосвязь определяет целостность ее.

На основании данного закона структуры можно по-иному определять само понятие: это форма мысли, элементы которой (объем и содержание) находятся в отношении обратной зависимости.

2.4.1. Логическая структура понятий

В структуре каждого понятия нужно отмечать две стороны: содержание и объем.

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков предмета, мыслимого в понятии, является идеальным образом реального мира.

Чтобы раскрыть содержание понятия, следует путем сравнения установить, какие признаки необходимы и достаточны для выделения данного предмета и выяснения его отношения к другим предметам.

Выяснение содержания понятий имеет очень важное значение для теории и практики менеджмента. До тех пор, пока не установлены содержание интересующего нас понятия и его признаки, не ясна сущность предмета, отражаемого этим понятием, невозможно точно и четко отграничить этот предмет от смежных с ним, происходит путаница в мышлении.

Кроме содержания в каждом понятии следует выявить его объем.

Объем понятия определяется совокупностью предметов, на которые оно распространяется.

Например, объем понятий "растение", "животное", "космическое тело" выражает безграничную совокупность соответствующих предметов реальной действительности. Другие понятия имеют гораздо более узкий объем, например "планеты солнечной системы" и т. д.

Существуют единичные понятия, объем которых распространяется на один предмет или явление, например предпринимательство, стажировка и др.

Совокупность предметов, на которые распространяется данное понятие, составляет логический класс предметов.

Логический класс — это совокупность предметов, имеющих общие признаки, вследствие чего они выражаются общим понятием.

Логический класс предметов и объем соответствующего понятия совпадают. Логические классы предметов бывают менее широкими и более широкими, ограниченными и безграничными. Так, класс химических элементов или класс сертификатов ограничен их определенным количеством, а класс деревьев безграничен, он охватывает все деревья, которые росли, растут и будут расти на нашей планете.

Более широкий логический класс может включать в себя менее широкие. В таком случае более широкий класс называется высшим, подчиняющим менее широкие, низшие классы. Например, класс космических тел выше класса звезд. Отношение между классами определяет объемные отношения понятий.

Если два общих понятия по объемам находятся в отношении подчинения, т.е. объем одного понятия входит в объем другого, то **более широкое по объему подчиняющее понятие называется родовым, а подчиненное — видовым**. Например, понятие "Академия управления персоналом" будет родом, а понятие "факультет экономики и управления бизнесом" — видом; понятие "психология" является видом родового понятия "наука". Видовое понятие в одном отношении может стать родовым по отношению к понятию с более узким объемом. Следовательно, род и вид — понятия соотносительные.

Содержание и объем понятия взаимосвязаны. Эта взаимосвязь выражена в логическом законе обратного отношения между объемом и содержанием понятия, который формулируется так:

С увеличением содержания понятия уменьшается его объем, а с увеличением объема понятия уменьшается его содержание.

Рассмотрим два понятия: "преступление" и "должностное преступление". Больший объем имеет понятие "преступление", так как оно распространяется на все преступления, а понятие "должностное преступление" охватывает только преступления, которые являются должностными. Содержание будет большим у понятия "должностное преступление", так как помимо признаков, присущих всякому преступлению, оно включает еще и признаки специфические, которыми должностное преступление отличается от других. Таким образом, больше объем — меньше содержание, больше содержание — меньше объем понятия.

2.5. Обобщение и ограничение понятий

Обобщением называется логическая операция, посредством которой через сокращение содержания понятия расширяется его объем.

Путем обобщения видовое понятие теряет отличительный признак и превращается в родовое.

Так, если из понятия "социология труда" исключить видовой признак — его назначение, то оно становится родовым понятием "социология".

Переходя от характерных особенностей вида к существенным признакам рода, можно получить наиболее широкое понятие. Например, в содержание понятия "украинец" входят и национальные, и племенные (славянин), и расовые (белой расы) признаки, исключив которые, получим понятие высшего рода — "человек". Отвлекаясь от видовых и социальных признаков понятия "человек", придем к понятию "животное", далее — к понятию "организм" и, наконец, — к понятию "материя" вообще.

Материя является философской категорией, которая имеет единственный признак — быть объективной реальностью, существовать независимо от сознания.

Категории — это понятия с предельно широким объемом. Категории не имеют рода и не поддаются обобщению. Категории являются пределом обобщения.

Такие предельно широкие по объему понятия имеют основополагающее значение для науки. Это свидетельствует о том, что процесс обобщения не есть опустошение содержания понятий, а углубление нашего познания в сущность явлений, в "природу вещей". **Каждая наука пользуется определенной <u>системой категорий</u> —**

наиболее широких понятий в пределах данной области знаний.
Процесс, обратный обобщению, называется ограничением понятий.
Ограничение — это такая логическая операция, с помощью которой путем усложнения содержания понятия сужается его объем.
Если при обобщении понятий идут от вида к роду, то при ограничении, наоборот, из родового получают видовое понятие.
Например, когда от понятия "договор" переходим к понятию "сделка", от него — к понятию "гражданское правоотношение", а затем — к понятию "правоотношение", то обобщаем понятие. А если от понятия "договор" мы переходим к понятию "страхование", а от него — к понятию "имущественное страхование", то мы ограничиваем понятие. Это достигается прибавлением к содержанию родового понятия нового, отличительного признака, наличие которого сужает его объем и приводит к видовому понятию. Пределом ограничения служит индивид, конкретный предмет. Логические операции обобщения и ограничения имеют важное значение в логической культуре мышления. Сопоставляя родовидовые понятия, мы уточняем их содержание и объем, а также уясняем отношения между ними.
Логические операции обобщения и ограничения понятий широко-применяются в практике мышления: переходя от понятий одного объема к понятиям другого, мы уточняем предмет нашей мысли, делаем наше мышление более определенным и последовательным.

2.6. Виды понятий

Единичными понятиями являются те, которые отражают всего лишь один единственный предмет (явление, процесс), т.е. объем этих понятий индивидуален. Это, например, понятия о дневном светиле, об авторе «Мастера и Маргариты» или об авторе десяти днях 1917 г., которые потрясли мир, или о путче августа 1991 г., о затмении солнца в 585 г. до н. э. и т.п.

Общими понятиями являются те, объемы которых отражают два и более однородных предмета (явления, процесса) вплоть до неисчислимого их множества. Такими понятиями будут «дом», «стол», «человек», «игра», «затмение», «облако», «стоимость», «совесть», «кривизна» и пр. Легко заметить, что общее понятие в грамматической форме может выражаться и единственным числом; в логике слова «стол» и «столы» одинаково выражают общее понятие о столе.

Пустые (нулевые) понятия — это понятия, объемы которых отражают пустые предметные области, им не соответствуют никакие реальные объекты; предметная область которых равна нулю. Это понятия, являющиеся результатом относительно самостоятельной абстрагирующей деятельности человеческого сознания, отражающие идеальные, идеализированные объекты, наделенные предельными свойствами («абсолютно черное тело», «несжимаемая жидкость», «идеальный газ», и пр.). Понятия о сказочных или фантастических, мифологических объектах тоже являются пустыми понятиями («сирена», «русалка», «конек-горбунок», «минотавр» и пр.).

За счет изменения одного из элементов структуры понятия последние могут подразделяться на виды.

Понятия принято делить на следующие виды: 1) единичные, общие, нулевые (пустые), 2) собирательные и несобирательные, 3) конкретные и абстрактные, 4) положительные и отрицательные, 5) безотносительные и соотносительные.

Понятия делятся на ***единичные и общие*** в зависимости от того, мыслится в них один элемент или множество элементов. Единичными понятиями являются те, которые отражают всего лишь один единственный предмет (явление, процесс), т.е. объем этих понятий индивидуален. Это, например, понятия о дневном светиле, об авторе «Мастера и Маргариты» или об авторе десяти днях 1917 г., которые потрясли мир, или о путче августа 1991 г., о затмении солнца в 585 г. до н. э. и т.п.

Общими понятиями являются те, объемы которых отражают два и более однородных предмета (явления, процесса) вплоть до неисчислимого их множества. Такими понятиями будут «дом», «стол», «человек», «игра», «затмение», «облако», «стоимость», «совесть», «кривизна» и пр. Легко заметить, что общее понятие в грамматической форме может выражаться и единственным числом; в логике слова «стол» и «столы» одинаково выражают общее понятие о столе.

Существуют также и пустые понятия. Пустые (нулевые) понятия — это понятия, объемы которых отражают пустые предметные области, им не соответствуют никакие реальные объекты; предметная область которых равна нулю. Это понятия, являющиеся результатом относительно самостоятельной абстрагирующей деятельности человеческого сознания, отражающие идеальные, идеализированные объекты, наделенные предельными свойствами («абсолютно черное тело», «несжимаемая жидкость», «идеальный газ», и пр.). Понятия о сказочных или фантастических, мифологических объектах тоже являются пустыми понятиями («сирена», «русалка», «конек-горбунок», «минотавр» и пр.).

Общие понятия могут быть ***регистрирующими и нерегистрирующими. Регистрирующими*** называются понятия, в которых множество мыслимых в нем элементов поддается учету, регистрируется (во всяком случае в принципе). Например, «участник Великой Отечественной войны 1941—1945 гг.», «родственники потерпевшего Шилова», «планета Солнечной системы». Регистрирующие понятия имеют конечный объем. Общее понятие, относящееся к неопределенному числу элементов, называется ***нерегистрирующим.*** Нерегистрирующие (неисчислимые) — все те понятия, объемы которых фактически не поддаются точному исчислению. Нерегистрирующими понятиями будут такие предельно широкие понятия, как «количество», «качество», «мера» и пр., такие общие понятия, как «дерево», «река», «человек» и пр., абстрактные понятия «белизна», «кривизна», «курносость» и пр. Хотя, как известно, еще Архимед в своем "Псаммите" брался исчислить даже песчинки, т.е. в принципе и объемы понятий "дом", "стол", "человек" могут быть исчислены, но фактически, реально это неосуществимо. Так, в понятиях «человек», «следователь», «указ» множество мыслимых в них элементов не поддается учету: в них мыслятся все люди, следователи, указы прошедшего, настоящего и будущего. Нерегистрирующие понятия имеют бесконечный объем.

Понятия делятся на **собирательные и несобирательные.** Понятия, в которых мыслятся признаки некоторой совокупности элементов, составляющих единое целое, называются ***собирательными.*** Например, «коллектив», «полк», «созвездие». Эти понятия отражают множество элементов (членов коллектива, солдат и командиров полка, звезд), однако это множество мыслится как единое целое. Содержание собирательного понятия нельзя отнести к каждому отдельному элементу, входящему в его объем, оно относится ко всей совокупности элементов. Например, существенные признаки коллектива (группа лиц, объединенных общей работой, общими интересами) неприложимы к каждому отдельному члену коллектива. Собирательные понятия могут быть общими («коллектив», «полк», «созвездие») и единичными («коллектив нашего института», «86-й стрелковый полк», «созвездие Большой Медведицы»).

Понятие, в котором мыслятся признаки, относящиеся к каждому его элементу, называется ***несобирательным.*** Таковы, например, понятия «звезда», «командир полка», «государство».
В процессе рассуждения общие понятия могут употребляться в **разделительном и собирательном** смысле.
Если высказывание относится к каждому элементу класса, то такое употребление понятия будет ***разделительным;*** если же высказывание относится ко всем элементам, взятым в единстве, и неприложимо к каждому элементу в отдельности, то такое употребление понятия называется ***собирательным.*** Например, высказывая мысль «Студенты 1-го курса изучают логику», мы употребляем понятие «студенты 1-го курса» в разделительном смысле, так как данное утверждение относится к каждому студенту 1-го курса. В высказывании «Студенты 1-го курса провели теоретическую конференцию» утверждение относится ко всем студентам 1-го курса в целом. Здесь понятие «студенты 1-го курса» употребляется в собирательном смысле. Слово «каждый» к данному суждению неприложимо.

Понятия делятся на **конкретные и абстрактные** в зависимости от того, что они отражают: предмет (класс предметов) или его признак (отношение между предметами).
Понятие, в котором мыслится предмет или совокупность предметов как нечто самостоятельно существующее, называется ***конкретным;*** понятие, в котором мыслится признак предмета или отношение между предметами, называется ***абстрактным.*** Так, понятия «книга», «свидетель», «государство» являются конкретными; понятия «белизна», «смелость», «ответственность» — абстрактными.
Различие между конкретными и абстрактными понятиями основано на различии между предметом, который мыслится как целое, и свойством предмета, отвлеченным от последнего и отдельно от него не существующим. Абстрактные понятия образуются в результате отвлечения, абстрагирования определенного признака предмета; эти признаки мыслятся как самостоятельные объекты мысли. Так, понятия «смелость», «инвалидность», «невменяемость» отражают признаки, не существующие сами по себе, в отрыве от лиц, обладающих этими признаками. Понятия «дружба», «посредничество», «психологическая несовместимость» отражают определенные отношения. Это абстрактные понятия.
Не следует смешивать конкретные понятия с единичными, а

абстрактные с общими. Общие понятия могут быть и конкретными, и абстрактными (например, понятие «посредник» — общее, конкретное; понятие «посредничество» — общее, абстрактное). Как конкретным, так и абстрактным может быть единичное понятие (например, понятие «Организация Объединенных Наций» — единичное, конкретное; понятие «мужество капитана Гастелло» — единичное, абстрактное).

Понятия делятся на **положительные (утвердительные) и отрицательные** в зависимости от того, составляют ли их содержание свойства, присущие предмету, или свойства, отсутствующие у него. Понятия, содержание которых составляют свойства, присущие предмету, называются ***положительными.*** Понятия, в содержании которых указывается на отсутствие у предмета определенных свойств, называются ***отрицательными.*** Так, понятия «грамотный», «порядок», «верующий» являются положительными; понятия «неграмотный», «беспорядок», «неверующий» — отрицательными.
В русском языке отрицательные понятия выражаются обычно словами с отрицательными приставками «не» и «без»: «неуловимый», «невиновный», «бездействие»; в словах иностранного происхождения — чаще всего словами с отрицательной приставкой «а»: «аморальный», «анонимный», «асимметрия» и т.д. Однако на отсутствие некоторых свойств предмета могут указывать слова без отрицательной приставки. Например: «темнота» (отсутствие света), «трезвый» (непьяный), «молчаливый» (неразговорчивый). С другой стороны, понятия «безделушка» (вещица для украшения), «невинный» (чистосердечный, простодушный), «негодование» (возмущение, крайнее недовольство) относятся к положительным; они не содержат отрицания каких-либо свойств, хотя выражающие их слова могут быть ошибочно восприняты как слова с отрицательными приставками 1 .

Понятия делятся на **безотносительные и соотносительные в** зависимости от того, мыслятся ли в них предметы, существующие раздельно или в отношении с другими предметами. Понятия, отражающие предметы, существующие раздельно и мыслящиеся вне их отношения к другим предметам, называются ***безотносительными.*** Таковы понятия «студент», «государство», «место преступления» и др. ***Соотносительные*** понятия содержат признаки, указывающие на отношение одного понятия к другому понятию. Например: «родители» (по отношению к понятию «дети») или «дети» (по отношению к понятию «родители»), «начальник» («подчиненный»), «получение взятки» («дача взятки»). Соотносительными являются также понятия «часть», «причина», «брат», «сосед» и др. В этих понятиях отражены предметы, существование одного из которых не мыслится вне его отношения к другому.

Не следует смешивать логическую характеристику понятий как положительных и отрицательных с политической, нравственной, юридической оценкой тех явлений, которые они отражают. Так, понятия «агрессия», «преступность», «алкоголизм» являются положительными их содержание составляют признаки, принадлежащие предмету Однако явления, отраженные в этих понятиях, вызывают у нас отрицательную оценку.

Определить, к какому виду относится то или иное понятие, — значит дать ему логическую характеристику. Так, давая логическую характеристику понятию «Российская Федерация», нужно указать, что это понятие единичное, собирательное, конкретное, положительное, безотносительное. При характеристике понятия «невменяемость» должно быть указано, что оно является общим (нерегистрирующим), несобирательным, абстрактным, отрицательным, безотносительным.

Логическая характеристика понятий помогает уточнить их содержание и объем, вырабатывает навыки более точного употребления понятий в процессе рассуждения.

2.7. Отношения между понятиями

Назначение понятий — глубоко и всесторонне отражать объективный мир, в котором взаимозависимость и взаимообусловленность явлений носят универсальный характер: **каждая вещь или предмет находится в связи с другими предметами**. Отражая объективную взаимосвязь вещей, понятия способны сами вступать в различные взаимоотношения.

Рассматривая отношения между понятиями, следует всего различать понятия **сравнимые и несравнимые.**

Сравнимыми называются понятия, имеющие некоторые признаки, позволяющие эти понятия сравнивать друг с другом. Например, «пресса» и «телевидение» — сравнимые понятия, они имеют общие признаки, характеризующие средства массовой информации.

Несравнимыми называются понятия, не имеющие общих признаков, поэтому и сравнивать эти понятия невозможно. Например:«квадрат» и «общественное порицание», «преступление» и «космическое пространство», «государство» и «симфоническая музыка» Они относятся к разным, весьма отдаленным друг от друга областям действительности и не имеют признаков, на основании которых их можно было бы сравнивать друг с другом. В логических отношениях могут находиться только сравнимые понятия.

В отношении *пересечения (перекрещивания)* находятся понятия, объем одного из которых частично входит в объем другого. Содержание этих понятий различно.

В отношении пересечения находятся понятия «юрист» (А) и «преподаватель» (В) (рис. 1): некоторые юристы являются преподавателями (как некоторые преподаватели — юристами).

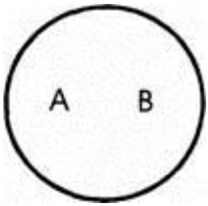


Рис.1

С помощью круговых схем это отношение изображается в виде двух пересекающихся кругов (рис. 2).

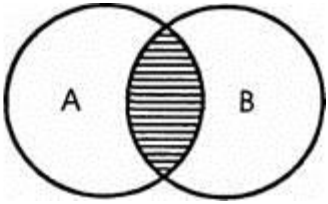


Рис.2

Сравнимые понятия делятся на **совместимые и несовместимые.**

Совместимые понятия

Понятия, объемы которых полностью или частично совпадают, называются ***совместимыми.*** В содержании этих понятий нет признаков, исключающих совпадение их объемов. Существуют три вида отношений совместимости: 1) ***равнообьемность,*** 2) ***пересечение (перекрещивание)*** **и** 3) ***подчинение (субординация).***

В отношении ***равнообъемности*** находятся понятия, в которых мыслится один и тот же предмет. Объемы этих понятий полностью совпадают (хотя содержание различно). В отношении равнообъемности находятся, например, понятия «геометрическая фигура с тремя равными углами» и «геометрическая фигура с тремя равными сторонами». Эти понятия отражают один предмет мысли: равноугольный (равносторонний) треугольник, их объемы полностью совпадают, однако содержание различно, поскольку каждое из них содержит разные признаки треугольника.

Отношение между понятиями принято изображать с помощью круговых схем (кругов Эйлера), где каждый круг обозначает объем понятия, а каждая его точка — предмет, мыслимый в его объеме. Круговые схемы позволяют наглядно представить отношение между различными понятиями, лучше понять и усвоить эти отношения.

Так, отношение между двумя равнообъемными понятиями должно быть изображено в виде двух полностью совпадающих кругов А и В (рис. 1).

В совместившейся части кругов А и В (заштрихованная часть схемы) мыслятся те юристы, которые являются преподавателями, а в несовместившейся части круга А — юристы, не являющиеся преподавателями, в несовместившейся части круга В — преподаватели, не являющиеся юристами.

В отношении ***подчинения (субординации)*** находятся понятия, объем одного из которых полностью входит в объем другого, составляя его часть.

В таком отношении находятся, например, понятия «суд» (A) и «городской суд» (B). Объем первого понятия шире объема второго понятия, кроме городских существуют и другие виды судов — краевые, областные, районные и т.д. Понятие «городской суд» полностью входит в объем понятия «суд» (рис. 3).

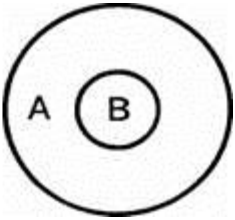


Рис.3

Понятие, имеющее больший объем и включающее объем другого понятия, называется ***подчиняющим*** (A), понятие, имеющее меньший объем и составляющее часть объема другого понятия, — ***подчиненным*** (B). Если в отношении подчинения находятся два общих понятия, то подчиняющее понятие называется ***родом,*** подчиненное — ***видом.*** Так, понятие «городской суд» будет видом по отношению к понятию «суд». Понятие может быть одновременно видом (по отношению к более общему понятию) и родом (по отношению к понятию менее общему). Например: понятие «лишение свободы на определенный срок» (B) — это род по отношению к понятию «лишение свободы на пять лет» (C) и в то же время вид по отношению к понятию «уголовное наказание» (A). Отношение между тремя подчиненными друг другу понятиями изображено на рис. 4.

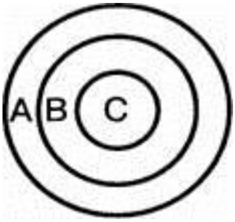


Рис. 4

Если в отношении подчинения находятся общее и единичное (индивидуальное) понятия, то общее (подчиняющее) понятие является видом, а единичное (подчиненное) ***индивидом.*** В таком отношении будут находится, например, понятия «адвокат» и «Ф.Н. Плевако».

Отношения «род» — «вид» — «индивид» широко используются в логических операциях с понятиями — в обобщении, ограничении, определении и делении.

Несовместимые понятия

Понятия, объемы которых не совпадают ни полностью, ни частично, называются ***несовместимыми (или внеположными).*** Эти понятия содержат признаки, исключающие совпадение их объемов.

Существуют три вида отношений несовместимости: 1) ***соподчинение (координация),*** 2) ***противоположность (контрарность),*** 3) ***противоречие (контрадикторность).***

1. В отношении ***соподчинения (координации)*** находятся два или больше неперекрещивающихся понятий, подчиненных общему для них понятию. Например: «областной суд» (В), «городской суд» (С), «суд» (А). Понятия, находящиеся в отношении подчинения к общему для них понятию, называются ***соподчиненными.*** В круговых схемах это отношение изображено на рис. 5.

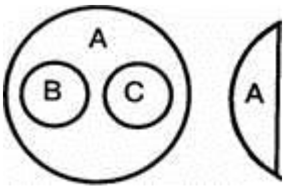


Рис.5

2. В отношении ***противоположности*** (контрарности) находятся понятия, одно из которых содержит некоторые признаки, а другое — признаки, не совместимые с ними. Такие понятия называются ***противоположными (контрарными).***

Объемы двух противоположных понятий составляют в своей сумме лишь часть объема общего для них родового понятия, видами которого они являются и которому они соподчинены; Таковы, например, отношения между понятиями «черный» и «белый», «отличник» и «неуспевающий», «дружественное государство» и «враждебное государство».

3. Родовое понятие «государство» не дано, но может быть образовано.

Понятие В содержит признаки, не совместимые с признаками понятия А. Объемы этих понятий не исчерпывают в своей сумме всего объема родового понятия «государство»: существуют и другие межгосударственные отношения.

4. В *отношении противоречия (контрадикторности)* находятся понятия, одно из которых содержит некоторые признаки, а другое эти же признаки исключает.

Объемы двух противоречащих понятий составляют весь объем рода, видами которого они являются и которому они соподчинены.

В отношении противоречия находятся положительные и отрицательные понятия: «четный» и «нечетный», «успевающий» и «неуспевающий», «дружественное государство» и «недружественное государство». Отношение между противоречащими понятиями изображено на рис. 6.

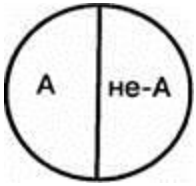


Рис.6

Из схемы видно, что положительное понятие А и отрицательное понятие **не-А** исчерпывают весь объем понятия «государство»:любое государство является дружественным или недружественным. Между двумя противоречащими понятиями не может быть никакого третьего понятия.

2.8. Определения понятий

Сознательное оперирование понятиями предполагает прежде всего уяснение их содержания. Оно не обнаруживается непосредственно в выражающем слове. **Каждый научный термин необходимо раскрыть, уяснить его смысловое значение, установить выраженное этим термином содержание понятия**.

<u>Логическая операция, раскрывающая содержание понятия, называется определением, или дефиницией.</u>

Различают определения **номинальные и реальные**.

Номинальным называется определение, посредством которого взамен описания какого-либо предмета вводится новый термин (имя), объясняются значение этого термина, его происхождение и т. п. Например: "Новая область науки, изучающая комплекс вопросов, связанных с осуществлением космических полетов, называется космонавтикой".

Реальным называется определение, раскрывающее существенные признаки предмета. Например: "Правосудие — это деятельность суда, состоящая в разбирательстве и разрешении уголовных и гражданских дел".

Различают также определения **явные и неявные**.

К явным относятся определения, раскрывающие существенные признаки предмета. Они состоят из двух четко выраженных понятий: определяемого и определяющего. Основным видом явного определения является определение через род и видовое отличие, которое включает в себя два приема: первый — подведение определяемого понятия под более широкое по объему родовое понятие (род); второй — указание видового отличия, т. е. признака, который отличает определяемый предмет (вид этого рода) от других видов, входящих в данный род. Например: "Чеком признается ценная бумага, содержащая ничем не обусловленное письменное распоряжение чекодателя банку уплатить держателю чека указанную в нем сумму". Здесь определяемое понятие "чек" является видом родового понятия "ценная бумага", которое содержит некоторые признаки понятия "чек"; остальная часть определения — видовое отличие — отличает чек от облигации, векселя, акции и других документов, выпускаемых в соответствии с законодательством в качестве ценных бумаг.

Определить понятие — значит раскрыть существенные признаки его содержания. В уголовном праве наряду с термином "содержание понятия" существует специфическое понятие "состав преступления". Под составом преступления понимается совокупность объективных и субъективных признаков, при наличии которых общественно опасное деяние признается определенным преступлением.

С логической стороны состав преступления — это содержание понятия, отражающего конкретное преступление. И состав преступления, и содержание понятия образуют одни и те же признаки определенного общественно опасного деяния.

Чтобы определить понятие о предмете, нужно детально изучить сам предмет, сравнить его с другими предметами, проанализировать свойства и отношения. Это далеко не единоразовый акт. Определение является итогом сложного познавательного процесса, оно в известной степени завершает логическое формирование понятия. Но содержание понятий не остается застывшим и неизменным; следовательно, не может быть и навсегда установившихся определений. Их уточнение обусловлено, с одной стороны, изменением самого предмета, а с другой — развитием нашего знания об этом предмете.

2.8.1. Правила определения понятий

Определение понятий опирается на ряд правил.

1. Определение должно быть соразмерным, т. е. объем определяемого понятия должен совпадать с объемом определяющего; они должны быть равнозначащими понятиями. Соразмерность легко проверяется через перестановку мест членов определительного суждения.

Например: "Наука о законах и формах правильного мышления есть логика".

При нарушении правила соразмерности определение будет или слишком широким, или очень узким. Например: "Общество, построенное на частной собственности, есть капитализм"; "Промышленное предприятие, изготовляющее техническое оборудование, называется заводом". В первом случае определяющее понятие по объему шире определяемого ввиду пропущенного видового признака капитализма — превращение рабочей силы в товар.

Во втором случае определяющее уже определяемого понятия, так как в него внесен излишний признак — изготовление технического оборудования, который не является обязательным для каждого завода.

2. Нельзя допускать того, чтобы определяющее само разъяснялось через определяемое понятие. Определяющее понятие не должно зависеть от определяемого. Нарушение этого правила приводит к логической ошибке — тавтологии. Например: "Преступник — это человек, совершивший преступление"; "Информация — это сообщение". Здесь определяющее понятие повторяет сказанное в определяемом. Поэтому тавтология не раскрывает содержания понятия, не выполняет функции определения.

Чтобы избежать подобной ошибки в определении, нужно помнить, что определяемое и определяющее понятия равны по объему, но не тождественны по содержанию и представляют собой самостоятельные понятия.

3. Определение не должно быть только отрицательным. Цель определения — ответить на вопрос: чем является данный предмет, отображенный в понятии. Для этого необходимо выявить и перечислить в утвердительной форме его существенные признаки. Отрицательное определение отмечает лишь отсутствующие признаки, т. е. указывает, чем не является данный предмет.

Конечно, легче сказать, чем не обладает предмет, нежели установить его существенные — общие и отличительные — признаки.

4. Определение должно быть кратким, точным и понятным. Слишком многословное определение выходит за рамки своего назначения и может превратиться в простое описание. В определении не следует допускать двусмысленных, расплывчатых терминов, которые можно понимать по-разному. Нечеткое определение ведет к непониманию сущности предмета, к смутным представлениям и путанице.

Определение понятия играет важную роль в теоретической и практической деятельности. Выражая в сжатом виде знание о предмете, оно является существенным моментом в познании действительности. В любой науке всем основным понятиям даются определения, причем в правовых науках точное определение понятий имеет не только теоретическое, но и практическое значение. В самом деле, если, например, в уголовном праве не будет точных определений понятий "умысел", "соучастие", "вина", "неосторожность", "необходимая оборона" и т. д., то это может привести к ошибочному толкованию этих понятий, к неправильному пониманию отраженных в них явлений, а следовательно, к ошибкам суда и следствия.

2.9. Деление понятий

2.9.1. Логическое деление понятий

Формально логические операции предполагают уяснение отношений между понятиями не только по содержанию, но и по объему.

Определение содержания понятий неразрывно связано с выявлением их объемов как видовых понятий, входящих в известный род. Выяснение объемных отношений между понятиями особенно важно при логических операциях в суждениях и умозаключениях.

Логическая операция, раскрывающая объем понятия, называется делением. Суть этой операции состоит в расчленении известного класса предметов, охваченных данными понятиями, на более мелкие классы. **Деление** — это такая логическая операция, в которой общее и отличительное, как две стороны каждой вещи, находят раздельное проявление в подчинении видовых понятий общему роду и во взаимном соподчинении.

От логического деления понятий нужно отличать мысленное расчленение представления предмета на составные.

Например, цельное представление самолета можно расчленить на фюзеляж, крылья и двигатель, а в результате логического деления понятия "самолет" получим его виды — гражданские и военные самолеты. Эти виды самолетов далее можно делить по назначению, боевым и техническим качествам и т. д. Все это будут самолеты, в то время как расчленение на части выводит за пределы этого понятия — фюзеляж или крылья еще не составляют самолет.

Понятие, которое делят, называется делимое, а полученные видовые понятия называются членами деления. Существенный признак, по которому объем родового понятия делится на виды, называется основанием деления.

2.9.2. Правила деления понятий

Логическое деление понятий предполагает соблюдение ряда необходимых правил.

1. Деление должно быть соразмерным, т. е. общий объем членов

деления должен равняться объему делимого родового понятия.
Это правило гарантирует от двух возможных ошибок: неполного (с остатком) или обширного (с избытком) деления.
Например, деление понятия "право" на государственное, гражданское, административное, уголовное будет неполным, с остатком; деление же понятия "идеология" на буржуазную, мелкобуржуазную, социалистическую и националистическую будет широким, с избытком.
2. В каждом акте деления необходимо **применять** только **<u>одно основание</u>, т. е. делить родовое понятие по видоизменению одного и того же существенного признака.**
3. **Члены деления должны взаимоисключать друг друга**. Согласно этому правилу члены деления должны быть соподчиненными понятиями, их объемы не должны перекрещиваться.
4. **Деление должно быть последовательным**, т. е. делимое понятие должно представлять собой ближайший род для членов первого деления, а члены деления должны быть непосредственными видами делимого понятия. **Нельзя переходить к подвидам, минуя непосредственные видовые понятия**.

2.10. Операции с понятиями

Накопленные знания о понятии, об этой элементарной форме мысли позволяют нам воспользоваться ими для самого главного - для оперирования (действования, или действия) с ними. Все раннее полученные знания о понятии, рассматриваемые по отдельности, представляют собой односторонние сведения о нем, это, говоря на языке философии, абстрактные в этой односторонности, неполноте знания. **Только в совокупности своей они представляют богатое определениями знание о данной форме мысли и в этом богатстве выступают как знание конкретное. Вот это знание и следует использовать для действий, для оперирования понятиями.**

Обычно к операциям с понятиями (или над понятиями) относят **<u>отрицание, умножение, сложение, вычитание, обобщение, ограничение, деление и определение</u>**. **<u>Операции</u> - самая важная (порой и самая сложная) часть учения о понятии, затрагивающая либо один элемент понятия, либо оба сразу**.

Простейшей логической операцией с понятиями является **отрицание. Операция осуществляется простым прибавлением к любому исходному понятию отрицательной частицы «не».** Данная операция может производиться неограниченное число раз с одним и тем же понятием. Учитывая специфику мысли, ясно, что всякий раз при этом отрицание отрицательного понятия дает положительное понятие, т.е. **двойное отрицание снимается, или нейтрализуется**. Так, отрицание отрицательного понятия «не-студент» даст в итоге понятие «не-не-студент», являющееся по существу положительным понятием «студент». Операция отрицания, таким образом, сколько бы раз она не совершалась, все равно дает только два возможных вида понятия: **утвердительное или отрицательное**. Некоторые авторы положительное и отрицательное понятия рассматривают как дополнительные. В этом смысле, например, понятие «успевающий студент» и понятие «неуспевающий студент», дополняя друг друга, отражают универсальную для них область — объем понятия «студент».

К числу простейших логических операций с понятием следует отнести сложение, вычитание и умножение понятий. Операция **сложения** представляет собой объединение объемов двух или более понятий, даже если эти понятия и не пересекаются, не совпадают между собой по объему. Так, объединив понятие «школьник» и понятие «студент», мы получим область, отражающую признаки, присущие тому и другому понятию в рамках общего для них родового понятия «учащийся».

Операция **умножение** состоит в отыскании области, которая обладает одновременно свойствами как одного, так и другого понятия. Так, умножение понятий «студент» и «спортсмен» дает область студентов, являющихся в то же время спортсменами, и наоборот.

Вычитание объема одного понятия из объема другого даст, в зависимости от видов рассматриваемых понятий, усеченную область объема. Вычитание возможно только между совместимыми, а точнее - между пересекающимися и подчиненными понятиями.

Результат вычитания тождественных понятий нельзя представить наглядно.

Обобщение рассматривается в логике и как метод, и как операция с понятием. Как операция с понятием обобщение заключается в увеличении объема исходного понятия — это переход от понятия с меньшим объемом к понятию с большим объемом за счет, естественно, уменьшения содержания исходного понятия. Так, переход от понятия «студент» к более общему понятию «учащийся» или «человек» совершается путем отбрасывания одного или нескольких содержательных признаков исходного понятия. Таким образом, увеличение объема понятия, т.е. обобщение, в тоже время есть и уменьшение содержания. Пределом обобщения выступают категории философии как наиболее широкие по объему понятия. Категории - это высший род, и с какого бы понятия мы не начали обобщение, конечным результатом его будет та или иная философская категория. В нашем примере, продолжая обобщение понятия "студент", мы получим после понятия "человек" понятие "примат", "млекопитающее", "позвоночное", "животное", "живой организм", наконец, "материя". Далее обобщить невозможно.

Обратная обобщению логическая операция ограничение есть переход от понятия с большим объемом к понятию с меньшим объемом. Ограничение совершается прибавлением к содержанию исходного понятия одного или нескольких новых признаков. Так, если к содержанию понятия «студент» прибавим хотя бы такой признак, как обучение в университете, то получим новое, содержательно более богатое понятие «студент университета». Продолжая эту операцию, можно получить понятие «студент Санкт-Петербургского университета» (студент СПбГУ), «студент СПбГУ гуманитарного факультета», «студент СПбГУ философского факультета», «студент СПбГУ 1-го курса философского факультета» и так вплоть до понятия о конкретном, отдельном студенте. Ясно, что пределом ограничения выступает единичное понятие, ограничить которое невозможно. Единичное понятие при минимуме объема имеет самое богатое содержание, наибольшее количество признаков. Такое понятие называется низшим видом, индивидом.

Несмотря на то, чти пустые (нулевые) понятия своим объемом не отражают реально существующие материальные объекты, тем не менее, как мысли они могут быть и обобщены. и ограничены. Например, нулевое понятие «кентавр» может быть обобщено — «мифологический образ», может быть ограничено — «кентавр Беотии», «кентавр Хирон». В подобных случаях мы имеем дело с мысленными формами, а мысли сами по себе, независимо от того, отражают они реальность или порождают ее в виде мнимых, нереальных, воображаемых предметов, как мысли они обладают собственными, отличными от предметов, свойствами. Мысли приобретают относительную самостоятельность и с ними можно производить определенные действия. **Обобщение и ограничение пустых понятий дают, как правило, тоже пустые единичные или общие понятия.** Обобщаются и ограничиваются и абстрактные понятия, но обобщаются они, как правило, сразу философской категорией «свойство», или "признак", "качество", а ограничение может быть доведено до единичности, до индивида.

Деление — логическая операция, раскрывающая объем понятия, это распределение объема исходного понятия на виды, группы, классы, части по единому для них признаку (основанию деления). В делении различают **делимое понятие, основание (признак) деления и члены деления. Основанием деления** должен быть общий для всех членов деления признак; видоизменение этого признака как раз и отличает один член деления от другого. Наличие основания деления отличает эту операцию от простого расчленения предмета на части. Рубль, например, мы можем разделить на составляющие его полтинники, гривеники, копейки и пр. Деление, конечно, тоже расчленение, но особое, и не предмета, а объема понятия и при этом еще по особому признаку. Деление понятия в логике — это такое раскрытие объема его, где каждый член деления, как составная часть объема понятия, сохраняет свойства делимого, т.е. целого, в то время как расчленение предмета дает такие части, которые не обладают свойствами целого (расчленяемого, делимого). Копейка, например, в отдельности, гривенник или полтинник не составляют рубля, а разделенное по объему понятие "рубль" дает в результате такие группы как "бумажный" или "металлический рубль", которые полностью сохраняют свойства делимого понятия, его содержательные признаки. Минута не составляет часа, она лишь шестидесятая часть его, поэтому понятие «час» не делится по объему на «минуты», не включает в свой объем понятие «минута». Понятие «час» может быть распределено по объему на «час академический», «час астрономический», «час учебный» и пр. Тут все члены деления сохранили свойства делимого, а вот части этого предмета — «минута», «секунда» и пр., каждая в отдельности, естественно, часом не являются. **Делению поддаются общие понятия, единичные понятия, объемы которых индивидуальны, делению не подлежат.**

Главным законом структуры этой логической операции является требование - деление должно быть соразмерным. Это значит, что объем делимого понятия должен быть равен сумме объемов всех членов деления. Выполнение этого требования на практике не так просто, как может показаться, и предполагает основательные знания того предмета, той предметной области, которую отражает делимое понятие. Знание логических требований к этой операции не освобождает человека от необходимости знать и сам предмет (предметную область).

Уточняющими этот главный закон структуры данной операции являются следующие логические требования: **деление должно производиться по единому, общему для членов деления признаку (основанию); признак деления должен быть четким, ясным, осознаваемым; члены деления должны исключать друг друга; деление должно быть полным, непрерывным, без скачков и пропусков.**

Как правило, **признаком (основанием)** деления выступает **существенный признак**, но возможны и случаи, когда таким основанием деления выступает и несущественный, даже случайный признак (при недостаточно глубоком исследовании предметной области). Так было в классификации растительных видов К. Линнея, когда признаком деления выступало количество тычинок в цветке растений. Деление же понятия "треугольник" на "остроугольные", "прямоугольные" и "тупоугольные" осуществляется по существенному признаку остроты угла, видоизменение которого и отличает один член деления от другого, члены деления при этом исключают друг друга, а совокупный объем их равен объему исходного, делимого понятия, т.е. в делении нет пропусков, оно полное деление.

В зависимости от основания деления различают три вида данной логической операции: **деление по видоизменению признака, дихотомическое деление и наиболее важный в науке вид деления — классификация** (кодификация, систематизация, тарификация, стратификация, типология и пр.). Деление по видоизменению признака мы уже рассмотрели.

Дихотомия, или дихотомическое деление, — это деление любой предметной области, любого объема (множества, класса) всего лишь на два члена деления. А мы знаем из отношений между понятиями, что всю предметную область, весь ее объем исчерпывают только противоречащие (взаимодополняющие) понятия, поэтому дихотомия — это и есть деление на противоречащие члены деления, на два взаимоисключающие друг друга понятия. Например, мир природы можно делить на органический и неорганический. Общий объем этих двух понятий соответствует объему делимого понятия, так что дихотомия никогда не нарушает главного закона этой операции: она всегда соразмерна. Дихотомически делить можно по разным признакам. Тот же мир природы мы можем делить на живой и не-живой, на животный и не-животный, растительный и не-растительный, на молекулярный и не-молекулярный и т.п. Если строго выдерживать деление на противоречащие понятия, то ошибиться невозможно, но ошибки возможны при делении на противоположные понятия. Так, деля понятие "дерево" на "хвойное" и "не-хвойное", или "лиственное" и "не-лиственное" мы делим дихотомически, правильно; деля же это понятие на "хвойное" и "лиственное", т.е. тоже казалось бы дихотомически, мы не застраховано от ошибок, так как противоположные понятия не исчерпывают всю предметную область.

Классификация - настолько сложная по своей структуре операция, что ее вправе рассматривать не просто как особый вид деления, а и как самостоятельный вид научного исследования, как довольно проблематичную задачу по систематизации, упорядочивания предметной области. Классическим вариантом классификации по существенному признаку, классификации, отражающей закономерные связи в определенной предметной области, является система химических элементов Д.И. Менделеева. Однако, достичь такого совершенства в других предметных областях не всегда удается, например, при классификации наук. (См.: Кедров Б.М. Классификация наук. М., 1961).

Так как логическая операция деления лежит в основе всякой классификации, то и определяется она как такое распределение объема (множества, предметной области и пр.) на составляющие его виды (группы, классы и пр.) по единому основанию (признаку деления), при котором каждый вид занимает строго определенное место в системе других и обладает в зависимости от этого места определенными свойствами. **Классификация, таким образом, не только распределяет, упорядочивает предметную область, но и устанавливает некоторые свойства видов этой предметной области, и поэтому выполняет роль не только систематизирующую, но и прогностическую, предсказательную, она есть вид опережающего отражения действительности, опережающего познания. <u>Зачастую классификации выступают завершающим моментом научного исследования различных предметных областей</u>** - это и классификация (систематизация) растительных и животных видов, химических элементов, наук, правовых норм и пр.

Классификации подразделяются на **искусственные** (по несущественному признаку) и **естественные** (по существенному признаку). Выделяют также научные и ненаучные классификации и т.п.

Определение понятия есть логическая операция, раскрывающая содержание понятия, т.е. это перечисление тех существенных и отличительных признаков того или иного предмета (объекта), которые отражаются мыслью (определяемым понятием) о нем. Конечно, эти признаки являются и общими, но поскольку общность отражается объемом, то она не входит в содержание понятия. Поскольку существенных признаков, как правило, не так уж и много, то определения в большинстве своем лаконичны и эта их краткость является большим достоинством, потому что определения, раскрывая главное, легко запоминаются, воспроизводятся и ими удобно пользоваться.

Как логическая операция, как нечто целое, определение состоит из двух элементов: определяемого понятия, называемого дефиниендум и сокращенно записываемого dfd., и определяющих понятий, называемых дефиниенс и сокращенно записываемых dfn. Определяющие - это те понятия, с помощью которых раскрывается содержание определяемого. Законом связи этих двух элементов определения, законом структуры данной операции является требование логики, аналогичное требованию к делению, - определение должно быть соразмерным. Этот основной закон структуры данной логической операции записывается в виде формулы: **Dfd=dfn.** Требование его достаточно понятно, а конкретизацией и дополнением его выступают другие правила определения:

Определение не должно заключать в себе круга, т.е. определяемое понятие нельзя определять через само себя или через понятия, которые, в свою очередь, определяются с помощью определяемого понятия. Простейшим видом "круга" в определении выступает тавтология: то же, через то же. Например: человек есть человек; бизнес есть бизнес; масло есть масляное; окончание - это то, что стоит в конце; этого не может быть, потому что этого быть не может и т.п. Несколько сложнее тавтологии - определение через понятие, которое в свою очередь определяется через исходное: комичное то, что смешно, а смешное то, что комично; вращение есть движение вокруг оси, ось же есть прямая, вокруг которой происходит вращение; это правда, потому что это - истина, а истинно это потому, что правильно. Когда же подобный круг опосредуется не одним, а несколькими звеньями, то его «закругленность» делается менее заметной и узнаваемой, и ее неподготовленный человек, возможно, и не обнаружит. Например: человек есть разумное существо, потому что он мыслит; мыслит же тот, кто способен рассуждать; а рассуждает человек, потому что наделен разумом, следовательно, человек разумен. Или: логика - наука о правильном мышлении; правильное мышление - мышление по логическим правилам, поэтому правильное мышление - логичное мышление, а раз оно логичное мышление, то, значит, научное мышление, поскольку логика есть наука и т.п.

Именно поэтому в логике формулируется и такое правило - **определение должно быть ясным, четким, свободным от двусмысленности, туманности и противоречивости; определение должно быть лаконичным**. Запутанные определения не выполняют своей основной роли, они не раскрывают в краткой форме содержания определяемого понятия, их усложненные формулировки трудно запомнить и ими поэтому сложно пользоваться: «драка есть такое состояние, субъекты которого, выходя за рамки границ правовой объективности, совершают неправомерные вторжения в область охраняемых государством объективных прав личности, нарушая, тем самым, или стремясь нарушить целость физических покровов личности многократным нарушением таковых прав».

Своеобразным кругом в определении можно рассматривать и случай, когда определяемое (неизвестное) определяется через неизвестное: олигоцен - третья эпоха палеогена; сепулькарии - объекты, служащие для сепуления; туляремия - инфекционное заболевание септицемического типа, возбудителем которого является бацилюс туляренце.

Наконец, последнее правило-пожелание: определение, по возможности, не должно быть отрицательным, ибо отрицание не раскрывает сущности, не перечисляет существенные признаки предмета, отражаемого определяемым понятием: эвкалипт - дерево, которое не растет в Английском парке Старого Петергофа. Сказать, что тот или иной человек не есть ученый, еще не значит перечислить те существенно-отличительные признаки его, которые входят в содержание единичного понятия (мысли) об этом человеке. Правда, полностью обойтись без отрицательных определений в науке невозможно, особенно при определении некоторых принципиальных положений, некоторых аксиом (точка - то, что не имеет частей) и пр.

Определения в науке выступают обычно итогом исследования того или иного предмета, той или иной предметной области, являясь лаконичной, удобной для употребления формулировкой сущности исследуемого, хотя подлинным определением предмета (предметной области), конечно же, выступает вся научная теория, учение о нем. **Если определением в науках обычно завершается исследование, то изложение науки, наоборот, начинается с определения.** В логике особенно. Учитывая специфичность ее предмета, который невозможно представить в наглядном виде, определение в логике и выполняет роль общей характеристики, как бы внешнего описания предмета мысли, предмета исследования, изложения, поэтому в логике всякое изложение обычно и начинается с определения.

Как логическая операция с понятием, определение по структуре своей и по способности раскрывать возможно полнее содержание того или иного понятия, подразделяется на **явное и неявное**. **Явные определения**, перечисляя существенные и отличительные признаки определяемого, раскрывая его сущность, подразделяются на: определение через ближайший род и видовое отличие (назовем его одним словом, термином - дефиниция), генетическое определение и номинальное. Слово "дефиниция" часто употребляется в самом широком смысле, как любое определение. Но, **на наш взгляд, дефиниция есть более строгое определение, наиболее научно значимое, это определение через ближайший род и видовое отличие.**

Дефиниция своим развернутым названием выделяет два этапа в своей структуре: первый — подведение определяемого понятия под ближайшее к нему родовое (не просто под любое с большим объемом, а обязательно - под ближайшее для него родовое), и второй этап — перечисление тех существенно-отличительных признаков, которые собственно и составляют специфику содержания определяемого понятия. Приводимое раннее определение логики как науки выдержано именно как дефиниция, как дефинитивное определение. Определяемое понятие «логика» подводилось под ближайшее к нему родовое «философская наука» и далее перечислялись его отличительные, т.е. видовые, специфические признаки.

Генетическое определение указывает способ формирования, возникновения или образования определяемого предмета. Такие определения хорошо знакомы многим еще со школьного курса геометрии. Например, **окружность там определяется как замкнутая кривая на плоскости, образованная движением точки В отрезка АВ вокруг неподвижной точки А.** В этом определении легко выделима та же структура, что и у дефиниции, потому что «замкнутая кривая» определенно выступает родовым понятием по отношению к определяемому, а описание способа формирования его есть как бы перечисление отличительных признаков определяемого предмета.

<u>Номинальное определение</u>, или <u>определение имени, слова</u> есть определение, которое направлено лишь на раскрытие смысла, значения, назначения и особенностей слова (имени, знака), не касаясь существенных признаков того предмета, который данным словом обозначен. Номинальными будет, таким образом, все статьи этимологических и толковых словарей, так как в них речь идет не о предметах, а о словах. Номинальным будет, например, следующее определение слова «лавсан»: это - слово, образованное сокращением названия «лаборатория высокомолекулярных соединений». При этом, данное определение ничего не говорит о сущности нового синтетического материала, полученного в этой лаборатории. Или, определяя слово "философия", говорим, что оно составлено из двух древнегреческих слов "филэо" - любовь и "софос" - мудрость, тоже, ведь, при этом не говорим о сущности данной науки, не раскрываем ее содержания. Определяя микроскоп как слово, которым называют инструмент наблюдения очень мелких предметов, мы тоже даем, скорее, номинальное определение. Номинальное - от средневекового термина ноумен, которым пользовались номиналисты, признававшие существование единичного, а все общее объявлявшие лишь словом, понятием. Разновидностей номинальных определений много, можно выделять номинальное определение синтаксического, семантического, знакового характера.

К **неявным определениям** относится довольно большая группа приемов, сходных с определением: остенсивное определение, или указание, описание, метафора, сравнение, гипербола, характеристика, операциональное определение, контекстуальное определение, определение через перечисление, определение через противоположность и некоторые другие. Поскольку многие из них не имеют прямого отношения к логике, это филологические особенности, то охарактеризуем лишь некоторые из них.

<u>Указание</u> — словесное сопровождение непосредственно воспринимаемой вещи (явления, процесса), на которую указывают пальцем. В логике этот прием называют «остенсивное определение», т.е, буквально - указание пальцем. Остенсивным определением обычно пользуются при ознакомлении ребенка с незнакомым ему предметом, или при общении с людьми, не владеющими языком общения, да и при изучении иностранных языков.

<u>Описание</u> — более подробная словесная характеристика того предмета, который наблюдается непосредственно, или словесное художественное изображение той или иной картины для представления ее другим, как это имеет место в художественной и иной литературе (например, описание Днепра у Гоголя).

<u>Сравнение</u> (различение), или метафора, — прием, используемый при сопоставлении двух или нескольких предметов (понятий), когда один из предметов более известен, чем другой. Например, совесть — это внутренний суд; дети — цветы жизни, экзаменационная сессия - период истребительных войн, мозг учащегося - поле сражения и пр. Литературно-художественная, да и научная, метафора это тоже сравнение: жизнь - сцена, а люди - актеры на ней и пр. Различение - тоже сравнение, только акцент здесь не на сходстве: отвага отличается от безрассудства тем, что направлена на благородное дело, а вот безрассудство может быть связано и с позерством, эгоистическими целями, неблаговидными поступками.

<u>Характеристика</u> — это более подробное описание предмета с выделением отличительного, характерного, а то и существенного признака (признаков) в предмете (явлении, процессе). Характеристика помимо описании предполагает и некоторое обобщение, стремление проникнуть в сущность через внешние признаки, через являющееся, поверхностное, что всем знакомо хотя бы по служебным и иным характеристикам.

Операциональное определение — определение действием, экспериментом, заключающееся в выполнении специальных правил, приемов, определенной последовательности. Кислота определяется, например, как такое вещество, которое окрашивает лакмусовую бумагу в красный цвет.

Контекстуальное определение - определение через текст, в котором определяемое явно не называется, а характеризуется, описывается косвенно, иносказательно.

Определение через перечисление предметов, входящих в объем определяемого понятия или тех, на которые распространяется определяемое понятие, используется довольно часто и особенно тогда, когда явного определения, раскрывающего сущность, дать не удается. Это, например, следующее юридическое определение понятия «близкие родственники»: это «родители (усыновители), дети, братья, сестры, а также дедушка и бабушка».

Определение через противоположность, через полярное отношение используется тогда, когда у понятия нет более широкого для него родового понятия. Так, известные из философии определения категорий «материя», «движение», «сознание», «пространство», «время», «случайность», «необходимость» и пр. являются определениями через противоположность, через отношение их к своей парной, но полярной им категории.

К приемам, сходным с определением можно отнести и так называемые определения через пример, схему, чертеж, таблицу и пр.

2.11. Понятия в некоторых областях знаний

2.11.1. Понятие в истории философии

В подходе к понятию в истории философии выявились две противоположные линии — материалистическая, считающая, что понятия объективны по своему содержанию, и идеалистическая, согласно которой понятие есть спонтанно возникающая мысленная сущность, абсолютно независимая от объективной реальности. Например, для объективного идеалиста Г. Гегеля понятия первичны, а предметы, природа суть лишь бледные копии их. Феноменализм рассматривает понятие как последнюю реальность, не относящуюся к объективной действительности. Некоторые идеалисты рассматривают понятия как фикции, созидаемые «свободной игрой сил духа». Неопозитивисты, сводя понятия к вспомогательным логико-языковым средствам, отрицают объективность их содержания.

Будучи отражением объективной реальности, понятия столь же пластичны, как и сама действительность, обобщением которой они являются. Они «… должны быть также обтёсаны, обломаны, гибки, подвижны, релятивны, взаимосвязаны, едины в противоположностях, дабы обнять мир». Научные понятия не есть нечто законченное и завершённое; напротив, оно заключает в себе возможность дальнейшего развития. Основное содержание понятия изменяется лишь на определённых этапах развития науки. Такие изменения понятия являются качественными и связаны с переходом от одного уровня знания к другому, к знанию более глубокой сущности мыслимых в понятии предметов и явлений. Движение действительности можно отразить только в диалектически развивающихся понятиях.

2.11. 2. Определение понятия у Канта

Под понятием Кант разумел любое общее представление, поскольку последнее фиксировано термином. Отсюда и его определение: «Понятие… есть общее представление или представление того, что обще многим объектам, следовательно — представление, имеющее возможность содержаться в различных объектах»

2.11. 3. Определение понятия у Гегеля

Понятие для Гегеля — «прежде всего синоним действительного понимания существа дела, а не просто выражение любого общего, любой одинаковости объектов созерцания. В понятии раскрывается подлинная природа вещи, а не её сходство с другими вещами, и в нём должна поэтому находить свое выражение не только абстрактная общность (это лишь один момент понятия, роднящий его с представлением), а и особенность его объекта. Вот почему формой понятия оказывается диалектическое единство всеобщности и особенности, которое и раскрывается через разнообразные формы суждения и заключения, а в суждении выступает наружу. Неудивительно, что любое суждение ломает форму абстрактного тождества, представляет собою её самоочевиднейшее отрицание. Его форма — А есть В (то есть не-А)».

Всеобщее понятие выражает не простую абстрактную общность, одинаковость единичных представителей данного класса, но «*действительный закон* возникновения, развития и исчезновения единичных вещей».

2.11. 4. Понятие в формальной логике

Понятие в формальной логике — элементарная единица мыслительной деятельности, обладающая известной целостностью и устойчивостью и взятая в отвлечении от словесного выражения этой деятельности. Понятие — это то, что выражается (или обозначается) любой значащей (самостоятельной) частью речи (кроме местоимений), а если перейти от масштабов языка в целом к «микроуровню», то — членом предложения. Для трактовки проблемы понятия (в её формальнологическом аспекте) можно воспользоваться готовым арсеналом трёх областей современного знания: 1) общей алгебры, 2) логической семантики, 3) математической логики.

1. Результат процесса образования имени (понятия) естественно описывается в терминах гомоморфизма; разбивающего интересующее нас множество объектов на классы «эквивалентных» в каком-либо отношении элементов (то есть игнорируя все различия между элементами одного класса, не интересующие нас в данный момент), мы получаем новое множество, гомоморфное исходному (т. н. фактор-множество) по выделенному нами отношению эквивалентности. Фактор-множество может содержать всего 2 класса (элементов имени и всех остальных элементов), тогда его естественно называть именем, или большее число классов, тогда его естественно называть свойством. Например: имя — дом, свойство — цвет. В случае имени, описанный выше гомоморфизм принято называть характеристической функцией подмножества, соответствующего объему имени. Элементы этого нового множества (классы эквивалентности) можно мыслить теперь как единые, нерасчленяемые объекты, полученные в результате «склеивания» всех неразличимых в фиксированных нами отношениях исходных объектов в один «комок». Эти «комки» отождествлённых между собой (образов) исходных

объектов и есть то, что мы называем именами (понятиями), полученными в результате мысленной замены класса близких между собой представлений одним «родовым» именем. В этом смысле имя совпадает с (бинарным) свойством. Совокупность имён и свойств задаёт отношение толерантности. Понятия, таким образом, составляют подмножество имен или свойств, выделенное в силу проверенной на практике важности их для процесса познания. Именно такое определение было формализовано в рамках теории решения задач, оно описывается ниже в соответствующем разделе. Стоит особо подчеркнуть, что приведенные выше соображения не имеют отношения к самому процессу образования имени или понятия, не дают для него четкого математически точного алгоритма. Поиски таких алгоритмов относятся к тематике распознавания образов.

2. При рассмотрении семантического аспекта проблемы понятия необходимо различать понятие как некоторый абстрактный объект и называющее его слово (являющееся вполне конкретным объектом), имя, термин. Объёмом имени называется та самая совокупность «склеиваемых» в него элементов, о которой сказано выше, а содержанием имени — перечень признаков (свойств), на основании которых производилось это «склеивание». Т. о., объём понятия — это денотат (значение) обозначающего его имени, а содержание — концепт (смысл), который это имя выражает. Чем обширнее набор признаков, тем ýже класс объектов, удовлетворяющих этим признакам, и наоборот, чем ýже содержание понятия, тем шире его объём; это очевидное обстоятельство часто именуют **законом обратного отношения**.

3. Формальнологическую проблематику, связанную с теорией понятия, можно изложить, опираясь на хорошо разработанный аппарат исчисления предикатов. Семантика этого исчисления такова, что им легко описывается субъектно-предикатная структура суждений, рассматривавшихся в традиционной логике (**субъект, то есть подлежащее, — то, о чём говорится в предложении, выражающем данное суждение; предикат, то есть сказуемое, — то, что говорится о субъекте**), при этом возможны далеко идущие, хотя и вполне естественные, обобщения. Прежде всего допускается (как и в обычной грамматике) более одного субъекта в предложении, причём (в отличие от грамматических канонов) роль субъектов играют не только подлежащие, но и дополнения — «объекты»; в роли

предикатов фигурируют не только собственно сказуемые (в том числе выраженные многоместными предикатами, описывающими отношения между несколькими субъектами), но и определения. Обстоятельства и обстоятельственные обороты в зависимости от их грамматического строения всегда можно отнести к одной из этих двух групп (субъекты и предикаты), а пересмотр всего словарного запаса любого языка, «мобилизуемого» на выражение понятия, показывает, что он весь распределяется на эти две категории (количественные числительные, а также слова типа «всякий», «любой», «некоторый», «существует» и т. п., не попавшие в это распределение на два класса, играют в естественном языке роль кванторов, позволяющих образовывать и отличать друг от друга общие, частные и единичные суждения). При этом субъекты (выражаемые посредством т. н. термов языков, основанных на исчислении предикатов) и предикаты выступают как имена понятий: вторые самым буквальным образом, а первые, будучи переменными, «пробегают» некоторые «предметные области», служащие объёмами понятий, и если они постоянные (константы), то являются именами собственными, обозначающими конкретные предметы из этих предметных областей. Т. о., предикаты — это содержания понятий, а классы объектов, на которых эти предикаты истинны, — объёмы; что касается термов, то они являются либо родовыми именами для произвольных «представителей» некоторых понятий, либо именами конкретных представителей. Иными словами, вся формальнологическая проблематика, связанная с теорией понятия, оказывается фрагментом исчисления предикатов. Так, закон обратного отношения оказывается перефразировкой тавтологии (тождественно-истинной формулы) логики высказываний $A \& B \rightarrow A$ (здесь & — знак конъюнкции, → — знак импликации) или её обобщения из логики предикатов $\forall x\, C(x) \rightarrow C(x)$($\forall$ — квантор всеобщности).

2.11. 5. Понятие в теории решения задач

Теория решения задач — теоретический раздел исследований по искусственному интеллекту — предлагает достаточно математически строгую и в то же время наглядную трактовку термина «понятие».

Полное математически строгое описание можно найти в монографии Бенерджи.

Можно дать менее строгое, но более лаконичное описание таким образом:

1. Понятия образуются на основании свойств.
2. Существует два основных класса свойств — внутренние и внешние. Внешние свойства выявляются непосредственно, их существование постулируется, вопрос об их происхождении не ставится. Внутренние свойства являются ненаблюдаемой непосредственно логической функцией внешних свойств.
3. При решении задач используются преимущественно внутренние свойства. Использование это состоит в том, что в зависимости от значения свойства выбирается та или иная операция, ведущая к решению задачи.
4. Понятие в традиционном его понимании — это особый вид внутренних свойств, получаемых в результате логической конъюнкции (логическое И) внешних свойств.
5. Любое внутреннее свойство можно представить в виде дизъюнкции (логическое ИЛИ) понятий.

В такой трактовке закон обратного отношения действительно оказывается тривиальным следствием определения и одного из законов поглощения $A\&B\rightarrow A$. Стоит заметить, что закон обратного отношения не имеет места для произвольного свойства.

Бенерджи рассматривает модель задач, в которой задано некоторое множество ситуаций и множество преобразований (операций) одной ситуации в другую. Выделено также подмножество ситуаций, являющихся целью решения. «При этом мы стремимся перевести данную ситуацию в другую допустимую ситуацию, применяя последовательность преобразований, чтобы в конце прийти к целевой ситуации». Понятия в модели Бенерджи применяются для описания как целевого подмножества, так и стратегии выбора преобразований.

Понятия по Бенерджи логично было бы называть «протопонятиями», так как в общенаучном смысле понятия выделяются и фиксируются с помощью термина в ходе решения широкого класса однородных задач, в которых их применение оказалось полезным.

2.11. 6. Понятие в психологии

Психология позволяет подойти к изучению понятий эмпирически, исследуя существующие в сознании отношения между понятиями (семантические кластеры, группы, сети), в том числе с помощью математических методов (кластерного и факторного анализа); процессы формирования понятий, в том числе с помощью метода формирования искусственных понятий; возрастное развитие понятий и т. п.

2.11.7. Возрастное развитие понятий

Психологические исследования позволили установить, что понятия не являются неизменными по своей природе сущностями, не зависящими от возраста оперирующего ими субъекта. Овладение понятиями происходит постепенно, и понятия, которыми пользуется ребёнок, отличаются от понятий взрослого человека. Были выявлены различные типы понятий, соответствующие различным возрастным стадиям.

2.11.8. Предпонятия

Предпонятие — термин, введённый Ж. Пиаже для обозначения примитивных понятий, используемых ребёнком на дооперациональной стадии когнитивного развития.

Предпонятия ориентированы на действие. Они образны и конкретны; не относятся ни к индивидуальным объектам, ни к классам вещей. Предпонятие не обозначает объект, независимый от пространственного и временного контекста, в котором он дан; объект в новом контексте может утратить имя (предпонятие), которое к нему относилось. При этом сходные члены одного класса не рассматриваются как таковые, ребёнок может относиться к ним как к одной и той же вещи, «имеющей свойства наполовину индивидуальные, наполовину родовые».

Предпонятия связываются друг с другом посредством *трансдуктивного* рассуждения, представляющего собой переход от частного к частному (в отличие от дедукции и индукции). В таком рассуждении между звеньями цепи рассуждения устанавливаются ассоциативные связи, а не логические или физические (причинно-следственные) связи.

Ж. Пиаже обнаружил, что на дооперациональной стадии когнитивного развития (2—7 лет) понятия ребёнка представляют собой ещё не истинные понятия, но предпонятия. Предпонятия образны и конкретны, не относятся ни к индивидуальным объектам, ни к классам вещей и связываются друг с другом посредством трансдуктивного рассуждения, представляющего собой переход от частного к частному.

2.11.9. Житейские и научные понятия

Л. С. Выготский, исследуя развитие понятий в детском возрасте, писал о житейских (спонтанных) и научных понятиях. **Житейские понятия** — приобретаемые и используемые в быту, в повседневном общении слова вроде «стол», «кошка», «дом». **Научные понятия — это слова, которые ребёнок узнаёт в школе, термины, встроенные в систему знаний, связанные с другими терминами.**

При использовании житейских понятий *ребёнок долгое время* (до 11-12 лет) *осознаёт только предмет*, на который они указывают, *но не сами понятия, не их значение*. Лишь постепенно ребёнок овладевает значением понятий. Согласно взглядам Выготского, развитие спонтанных и научных понятий идёт в противоположных направлениях: спонтанных — к постепенному осознанию их значения, научных — в обратном направлении.

Приходящее с возрастом осознание значений связано с рождающейся систематичностью понятий, то есть с установлением логических отношений между ними. А поскольку научные понятия, которые ребёнок усваивает в процессе обучения, принципиально отличаются от житейских понятий именно тем, что по самой своей природе они должны быть организованы в систему, то — полагает Выготский — их значения и осознаются первыми. Осознанность же значений научных понятий постепенно распространяется и на житейские.

Поня́тие — отображённое в мышлении единство существенных свойств, связей и отношений предметов или явлений; мысль или система мыслей, выделяющая и обобщающая предметы некоторого класса по определённым общим и в совокупности специфическим для них признакам.

Понятие есть результат применения категории к восприятию. Отсюда понятие в его отвлеченности противостоит конкретности восприятия. Также понятие противостоит слову, которое можно трактовать как знак понятия.

Понятия суть «сокращения, в которых мы охватываем, сообразно их общим свойствам, множество различных чувственно воспринимаемых вещей» (Ф. Энгельс), а также нечувственных объектов, таких как другие понятия. Понятие не только выделяет общее, но и расчленяет предметы, их свойства и отношения, классифицируя последние в соответствии с их различиями. Так, понятие «человек» отражает и существенно общее (то, что свойственно всем людям), и отличие любого человека от всего прочего.

Те́рмин (от лат. *terminus* — предел, граница) — слово или словосочетание, являющееся названием некоторого понятия какой-нибудь области науки, техники, искусства и т. п. Термины служат специализирующими, ограничительными обозначениями характерными для этой сферы предметов, явлений, их свойств и отношений. В отличие от слов общей лексики, которые зачастую многозначны и несут эмоциональную окраску, термины в пределах сферы применения однозначны и лишены экспрессии.

2.12. Классификация понятий

Прежде чем перейти к классификации понятий, напомним определения понятия и термина.

Понятие есть результат применения категории к восприятию. Отсюда понятие в его отвлеченности противостоит конкретности восприятия. Также понятие противостоит слову, которое можно трактовать как знак понятия.

Понятия суть «сокращения, в которых мы охватываем, сообразно их общим свойствам, множество различных чувственно воспринимаемых вещей» (Ф. Энгельс), а также нечувственных объектов, таких как другие понятия. Понятие не только выделяет общее, но и расчленяет предметы, их свойства и отношения, классифицируя последние в соответствии с их различиями. Так, понятие «человек» отражает и существенно общее (то, что свойственно всем людям), и отличие любого человека от всего прочего.

Те́рмин (от лат. *terminus* — предел, граница) — слово или словосочетание, являющееся названием некоторого понятия какой-нибудь области науки, техники, искусства и т. п. Термины служат специализирующими, ограничительными обозначениями характерными для этой сферы предметов, явлений, их свойств и отношений. В отличие от слов общей лексики, которые зачастую многозначны и несут эмоциональную окраску, термины в пределах сферы применения однозначны и лишены экспрессии.

В быту, да и в науке, значение слова «понятие» может отличаться от его значения в философии или формальной логике.

Понятие считается **составным**, если оно опирается на другие понятия, и **элементарным** в противном случае (например: «Элементарные понятия статистики»)

Понятия можно разделить на абстрактные и конкретные, и, в каждом из них, на эмпирические и теоретические.

Понятие называется **эмпирическим**, если оно выработано на основе непосредственного сравнения общих свойств некоторого класса наличествующих (доступных для изучения) объектов или явлений, и **теоретическим**, если оно выработано на основе опосредованного анализа некоторого класса явлений (или объектов) при помощи ранее выработанных понятий, концепций и формализмов.

Понятие называется **конкретным**, если оно относится к определённому объекту окружающего мира, и **абстрактным**, если оно относится к свойствам широкого класса объектов.

Название любого материального предмета одновременно является конкретным эмпирическим понятием. К конкретным теоретическим понятиям следует отнести, в частности, государственные законы.

Абстрактные эмпирические понятия отражают принятый стиль мышления или суждений, например: «В контексте логотерапии понятие *духовного* не имеет религиозной окраски и относится к собственно человеческому измерению существования».

К абстрактным эмпирическим понятиям можно отнести, в частности, неписаный и порой довольно расплывчатый кодекс поведения какой-либо социальной группы (зачастую приблатнённой или даже уголовной), который в общих чертах определяет, какие действия считаются «правильными» или «неправильными»). Чтобы увидеть разницу между теоретическими и эмпирическими понятиями, сравните 2 фразы:

«*Приговоры… выносились в соответствии с действовавшими в те времена* законами»

«*Приговоры… выносились в соответствии с действовавшими в те времена понятиями*»

(по замыслу автора в последнем случае речь идет, по существу, о беззакониях).

Абстрактные теоретические понятия приняты в физике, например: «Перейдем к изложению основных понятий классической механики. Для простоты, мы будем рассматривать только материальную точку, то есть тело, размером которого можно пренебречь…» (Википедия, Классическая механика).

В более специфических случаях понятие считается конкретным (хотя может оставаться вполне теоретическим), например: "*Электрон* — стабильная элементарная частица с зарядом $-1.6021892(46)\times10^{-19}$ Кл, массой $9.109554(906)\times10^{-31}$ кг и спином 1/2. ".

Понятия в широком смысле и научные понятия

Различают понятия в *широком смысле* и *научные понятия*. Первые формально выделяют общие (сходные) признаки предметов и явлений и закрепляют их в словах. Научные понятия отражают существенные и необходимые признаки, а слова и знаки (формулы), их выражающие, являются научными терминами. В понятии выделяют его содержание и объём. Совокупность предметов, обобщённых в понятии, называется объёмом понятия, а совокупность существенных признаков, по которым обобщаются и выделяются предметы в понятии, — его содержанием. Так, например, содержанием понятия «параллелограмм» является геометрическая фигура, плоская, замкнутая, ограниченная четырьмя прямыми, имеющая взаимно параллельные стороны, а объёмом — множество всех возможных параллелограммов. Развитие понятия предполагает изменение его объёма и содержания.

2.13. О содержании и структуре термина «научное понятие»

Важным объектом исследования науковеда является изучение содержания и структуры термина «научное понятие». Положение это настолько очевидно, а сам термин научного понятия представляется в такой мере первичным и непосредственно данным, что определение его мало занимает науковедов. Однако, как только мы удаляемся за пределы привычных нам представлений и той науки, в глубиннах которой мы функционируем, количество спорных случаев в определении научного понятия начинает катастрофически возрастать. Не только при изучении средневековой научной литературы, но и в значительно более близкие эпохи провести черту, обозначающую рубеж юрисдикции науковеда и начало полномочий историка, культуролога, юриста и т. п., оказывается делом совсем не столь уж простым. **Факты подвижности границы, отделяющей научнго понятия от ненаучного, многочисленны**. На динамический характер этого противопоставления указывали многие исследователи.

Если рассматривать научное понятие как определенную совокупнолсть признаков предмета, то прежде всего следует отметить, что в общей системе науки эти понятия будут составлять часть. Существование научных понятий подразумевает одновременное наличие ненаучных и то, что коллектив научного собщества, который ими пользуется, умеет проводить различие между ними. Неизбежные колебания в пограничных случаях только подкрепляют самый принцип: когда мы испытываем сомнения, следует ли отнести русалку к женщинам или к рыбам, или свободный стих к поэзии или прозе, мы заранее исходим из этих классификационных делений как данных.

Разграничение совокупностей научных понятий и всей массы остальных понятий, функционирующих в составе данной научной дисциплине, может осуществляться с двух точек зрения.

1. Функционально. С этой точки зрения, **научным понятием будет являться всякое <u>словесное и формализованное научно сформулированное определение</u>, которое в пределах данной научной дисциплины способно реализовать научную функцию данной научной дисциплины**. Поскольку в принципе возможно (а исторически весьма нередко) положение, при котором для обслуживания научной функции в период создания научного понятия и в период его функционирования необходимы разные условия, научное понятие, не входящее для автора в сферу науки, может принадлежать науке, с точки зрения исследователя, и наоборот.

Одно из основных положений формальной науки состоит в том, что функция научного понятия реализуется тогда, когда научное понятие замкнуто на себя, функционирование его определено установкой на понятийное выражение и, следовательно, если в ненаучном понятии вперед выступает вопрос "что", то функция научного понятия реализуется при установке на "как". Поэтому план понятийного выражения становится некоторой имманентной сферой, получающей самостоятельную научную ценность. Семиотические исследования подводят к прямо противоположным выводам. Научно функционирующее понятие выступает как понятие повышенной, а не пониженной, по отношению к ненаучным понятиям, семантической нагрузки. Оно значит больше, а не меньше, чем обычное понятие. Дешифруемое при помощи обычных механизмов естественного языка, оно раскрывает определенный уровень смысла, но не раскрывается до конца. Как только пользователю информацией становится известно, что перед ним научное понятие, он сразу к нему подходит совершенно особым образом. Научное понятие предстает перед ним дважды (как минимум) зашифрованным; первая зашифровка - система естественного языка (предположим, русского). Поскольку эта система шифра дана заранее и адресант с адресатом одинаково свободно ею владеют, дешифровка на этом уровне производится автоматически, механизм ее становится как бы прозрачным - пользователи перестают его замечать. Однако это же понятие - пользователь информацией знает это - зашифрованно еще каким-то другим образом. В условие научного функционирования понятия входит предварительное знание об этой двойной шифровке и незнание (вернее, неполное знание) о применяемом при этом вторичном коде. Поскольку пользователь информацией не знает, что в воспринятом им понятии на этом втором уровне значимо, а что - нет, он "подозревает" все элементы понятийного выражения на содержательность. Стоит нам подойти к понятию как к научному, и в принципе любой элемент (признак) - вплоть до опечаток, - может оказаться значимым. Прикладывая к научному понятию целую иерархию дополнительных кодов: общенаучных, специальных (профильных), стилевых, функционирующих в пределах всей научной дисциплины или узкой группы научных направлений (вплоть до тематических), мы получаем в одном и том же научном понятии самые разнообразные наборы значимых элементов (признаков) и, следовательно, сложную иерархию дополнительных по отношению к ненаучному понятию пластов значений.

Таким образом, некоторые формальные научные школы делают, видимо, верное наблюдение о том, что в научно функционирующих понятиях внимание оказывается часто приковано к тем элементам (признакам), которые в иных случаях воспринимаются автоматически и сознанием не фиксируются. Однако объяснение ему было сделано ошибочное. Научное функционирование понятия порождает не понятие, "очищенное" от значений, а, напротив, понятие, максимально перегруженное значениями. Как только мы улавливаем некоторую упорядоченность в сфере понятийного выражения, мы ей тотчас приписываем определенное содержание или предполагаем наличие здесь еще не известного нам содержания понятия.

2. С точки зрения организации научного понятия. Для того чтобы научное понятие могло себя вести указанным выше образом, оно должен быть определенным способом построенно: отправитель информации его действительно зашифровывает многократно и разными кодами (хотя в отдельных случаях возможно, что отправитель создает понятие как ненаучное, то есть зашифрованный однократно, а получатель приписывает ему научную функцию, примышляя более поздние кодировки и дополнительную концентрацию смысла). Кроме того, получатель должен знать, что понятие, к которому он обращается, следует рассматривать как научное. Следовательно, научное понятие должено быть определенным образом семантически организованно и содержать сигналы, обращающие внимание на такую организацию. Это позволяет описывать научное понятие не только как определенным образом функционирующее в общей системе понятий данной научной дисциплины, но и как некоторым образом устроенное. Если в первом случае речь пойдет о структуре научной дисциплины, то во втором - о структуре научного понятия.

Между функцией научного понятия и его внутренней организацией нет однозначной автоматической зависимости: формула отношения между двумя этими структурными принципами складывается для каждой научной дисциплины по-своему, в зависимости от наиболее общих научных моделей. В самом общем и неизбежно схематическом виде соотношение это можно определить так: в период возникновения той или иной системы научной дисциплины складывается определенная, присущая ей, структура понятийных функций и устанавливается система отношений между функциями и научными понятиями. Так, например, в 1740-1750-е гг. в научной литературе происходит упорядочение понятий на самых различных уровнях: метрическом, стилистическом, строго научном и т. д. Одновременно устанавливалась система отношений между этими структурами и их общая ценностная иерархия.

Затем период организации заканчивается. Известная неопределенность в соотнесенности звеньев уступает место однозначной упорядоченности, что означает падение информационной емкости системы понятий, ее закостенение. В этот момент, как правило, происходит смена научных теорий, а если, как это часто бывает, научное закостенение оказывается лишь частным проявлением более широких - уже общественных - процессов стагнации, то и смена глубинных идеологических и научных представлений. На этой стадии система функций понятий и система внутренних построений научных понятий могут освобождаться от существующих связей и вступать в новые комбинации: сменяются ценностные характеристики; "низ", "верх" науки функционально меняются местами. В этот период научные понятия, обслуживающие научную функцию, стремятся как можно менее походить своей имманентной структурой на научное понятие. Самые слова "наука", "понятие" приобретают уничижительный оттенок. Но не следует думать, что инакомыслящие в области науки уничтожают научную понятийную функцию как таковую. Просто, как правило, научные понятия в новых условиях оказываются неспособными выполнять научную функцию, которую с успехом обслуживают понятия, сигнализирующие своим типом организации о некоторой "исконной" ненаучной ориентации.

Далее следует этап формирования новой системы идейно-научных кодификаций, в результате чего между структурой научных понятий и их функцией складывается новая - первоначально достаточно гибкая - система отношений.

Таким образом, в научном развитии принимают участие не только научные понятия. Наука, представляя собой часть культуры, нуждается для своего развития в не-науке, подобно тому, как культура, составляя лишь часть человеческого бытия, нуждается в динамическом соотнесении с внешней для нее сферой не-культуры - незнакового, нетекстового, несемиотического бытия человека. Между внешней и внутренней областями происходит постоянный обмен, сложная система вхождений и выведении. Причем сам факт введения современного научного понятия в сферу современной науки означает перекодировку его на язык современного научного восприятия, то есть решительное переосмысление.

Кроме отношения научного понятия и функции существенную роль в механизме научного развития играет система оценок. Вся система научных понятий, входящих в науку, в ценностном отношении организуется трехступенчатой шкалой: "верх", отождествляемый с высшими научными ценностными характеристиками, "низ", представляющий противоположность его, и промежуточная область, нейтральная в аксиологическом отношении.

Уже само распределение различных по своей природе и функции групп научных понятий по классам аксиологической иерархии способно стать существенной типологической характеристикой данной научной дисциплины. Предположим, что мы имеем дело с научной дисциплины, в которой этический вид научных понятий занимает позицию ценностного "верха", а научный - "низа", и другую, с противоположным распределением оценок этих классов. Уже этого будет достаточно, чтобы увидеть в первой существенное типологическое сходство со средневековой научной культурой, а во второй - с Римом периода упадка или любой эстетской системой. Понятно, сколь существенное значение для понятия науки в этой системе имеет место, которое ей отводится в общей ценностной иерархии понятий.

Однако в данном случае оказывается, что научные понятия ведут себя иначе, чем все остальные. Обычно место научного понятия или его агента (ибо каждому виду понятий соответствует определенная деятельность) в общей иерархии науки обозначено однозначно: сакральное понятие или место монаха может быть святым или презренным, но не может быть святым и презренным одновременно. Юридическое понятие и свойство быть законником также в каждом виде науки оценивается однозначно (создающий законы подлежит высшей оценке для Цицерона, низшей - для Христа, в средневековой иерархии он занимает срединное место). Только научные понятия могут быть предметом взаимоисключающих аксиологических оценок. Хотя научным понятиям в общей иерархии науки отводится определенное место, они постоянно проявляют тенденцию к расположению на противоположных концах лестницы, то есть в исходной позиции задают некоторый конфликт, создающий потенциальную возможность дальнейшей нейтрализации в некоторых амбивалентных понятиях. Научные понятия, обслуживающие другие научные функции, ведут себя принципиально иным образом. Для того чтобы объяснить это явление, следует обратиться к внутренней организации того комплекса научных понятий, который мы определяем как систему научных понятий.

Внутренняя организация системы научных понятий - и в этом ее отличие от других классов понятий, которые относительно однородны по отношению к общей системе культуры, - изоморфна науке как таковой, повторяет общие принципы ее организации.

Наука никогда не представляет собой аморфно-однородной суммы понятий: она не только организация, но и самоорганизующийся механизм.

На самой высокой ступени организации она выделяет группу (класс) понятий более абстрактного, чем вся остальная совокупность понятий уровня, то есть метапонятий. Это нормы, правила, теоретические трактаты и критические статьи, которые возвращают науку в ее самое, но уже в организованном, построенном и оцененном виде. Организация эта складывается из двух типов действий: исключения определенного разряда научных понятий из круга науки и иерархических организаций и таксонометрической оценки оставшихся.

Самоосмысление науки начинается с исключения определенного типа научных понятий. Так начинается разделение на "дикие", "нелепые" и "правильные", "достоверные" понятия.

Исключение определенных понятий из науки совершается не только в синхронном, но и в диахронном плане; понятия, сформулированные до возникновения декларируемых норм или им не соответствующие, объявляются не-научными. Отобранный в соответствии с определенными теоретическими концепциями состав имен и понятий, включаемых в литературу, в дальнейшем подвергается канонизации в результате составления справочников, энциклопедий и хрестоматий, проникает в сознание читателей. Оттенок полемики, присущий ему, утрачивается, забываются конкретные имена создателей легенды, и то, что представляло собой полемические гиперболы и метафоры, начинает восприниматься в прямом смысле.

Таким образом, потомки получают от каждого этапа развития науки не только некоторую сумму понятий и понятийных выражений, но и созданную ею самой о себе легенду и определенное количество апокрифических - отвергнутых и преданных забвению - научных работ.

Однако реальная картина научной жизни, как правило, усложняется тем обстоятельством, что наука одного и того же периода времени чаще всего подвергается осмыслению с нескольких точек зрения, причем границы термина "научное понятие" могут расходиться при этом достаточно далеко. Колебание между ними обеспечивает системе в целом необходимую информативность.

Одновременно с включением (выключением) тех или иных понятий из области науки работает и другой механизм - иерархического распределения научных работ и ценностной их характеристики. В зависимости от той или иной общенаучной позиции за основу распределения берутся нормы стиля, тематика, связь с определенными философскими концепциями, выполнение или нарушение общепринятой системы правил, но неизменен самый принцип иерархической ценностной характеристики: внутри науки понятия также относятся к аксиологическому "верху", "низу" или некоторой нейтральной промежуточной области.

Распределение внутри науки области "высокого" и "низкого" и взаимное напряжение между этими областями делает науку не только суммой научных понятий (работ), но и понятием, единым механизмом, целостный научной работой. Постоянство и единообразие этих структурных принципов для различных научных дисциплин и научных периодов (парадигм) поистине достойно внимания. Видимо, описывая науку того или иного научного периода как единый научный текст, мы скорее всего приблизимся к задаче выделения универсалий науки как специфического явления.

Внутренняя классификация науки складывается из взаимодействия противоположных тенденций: упомянутого выше стремления к иерархическому распределению научных работ и научных направлений, равно как и любых иных значимых элементов научной структуры, между "высоким" и "низким", с одной стороны, и тенденции к нейтрализации этой оппозиции и снятию ценностных противопоставлений, с другой.

В зависимости от исторических условий, от момента, который переживает данная наука в своем развитии, та или иная тенденция может брать верх. Однако уничтожить противоположную она не в силах: тогда остановилось бы научное развитие, поскольку механизм его, в частности, состоит в напряжении между этими тенденциями.

Другим примером внутренней организации науки как целостного организма может быть противопоставление "высокой" и "массовой" (популярной) науки. В рамках единой науки всегда ощущается разграничение науки, состоящей из фундаментальных наук, лишь с известным трудом поддающихся классификационной унификации, и практически компактной, однородной совокупности понятий прикладных наук. Выделить какой-либо признак, с тем чтобы приписать его исключительно той или иной из названных групп, затруднительно, поскольку история науки убеждает, что они легко и постоянно обмениваются признаками.

"Вершинная" и "массовая" совокупность научных понятий каждая в отдельности могут приобретать в конкретных исторических условиях самые различные значения: социальные, эстетические или общефилософские. Постоянна лишь их функциональная противопоставленность.

"...Современная наука, - писал А. Н. Веселовский, - позволила себе заглянуть в те научные направления, которые до тех пор стояли позади их, лишенные голоса; она заметила в них жизнь, движение, неприметное простому глазу, как все, совершающееся в слишком обширных размерах пространства и времени; тайных пружин исторического процесса следовало искать здесь, и вместе с понижением материального уровня исторических изысканий центр тяжести был перенесен в научную жизнь".

Такой подход многих других исследователей, обусловил интерес к новым научным направлениям. Имея отчетливо демократический характер как явление идеологическое, этот подход, в собственно научном смысле, был связан с расширением круга изучаемых источников и проникновением в историю науки методов, выросших на почве лингвистических приемов исследования.

Критика, которой подвергался в ряде случаев такой подход к истории науки, связана была с тем, что при этом часто ставился знак равенства между научностью и исторической значимостью.

Понятие прикладной науки - понятие социологическое (в терминах семиотики - "прагматическое"). Оно касается не столько структуры тех или иных понятий, сколько их социального функционирования в общей системе научных понятий, составляющих данную наука. Таким образом, понятие это, в первую очередь, определяет отношение того или иного коллектива научного сообщества к определенной группе научных понятий. Одна и та же научная работа может с одной точки зрения включаться в это понятие, а с другой - исключаться.

Понятие прикладной науки подразумевает в качестве обязательной антитезы некоторую вершинную фундаментальную науку. Говорить о прикладной науке применительно к понятиям, не разделенным по признаку распространения, ценности, доступности, способу фиксации или хранения или каким-либо иным образом, очевидно, не имеет смысла. Видимо, можно предположить следующую схему усложнения парадигмы научных понятий.

Таким образом, на очередном этапе научного развития прикладная наука часто выполняет роль резервуара, в котором обе эти группы научных понятий (понятий фундаментальных и прикладных наук) обмениваются научными ценностями (хотя, конечно, существует и прямой обмен). В XX в. развитие средств массовой коммуникации создали между этими группами особые отношения и ввели новые факторы, рассмотрение которых не есть предмет настоящей работы.

Система понятий прикладнях наук должна обладать двумя взаимно противоречащими признаками. Во-первых, она должна представлять более распространенную в количественном отношении часть научных понятий. При рассмотрении признаков "более распространенная - менее распространенная", "более читаемая - менее читаемая", "более известная - менее известная" система понятий прикладнях наук получает более сильные характеристики. Следовательно, в определенном коллективе ученых она будет осознаваться как научно полноценная и обладающая всеми качествами, необходимыми для научного функционирования. Однако, во-вторых, в том же научном сообществе должны действовать и быть активными нормы и представления, с точки зрения которых эта система понятий не только оценивалась бы чрезвычайно низко, как "плохая", "грубая", "устаревшая" или по какому-нибудь другому признаку исключенная, отверженная, апокрифическая, но и как бы не существовала вовсе.

Иногда сама эта выключенность будет повышать интерес к научному понятию.

Отношения между этими группами могли складываться самым разнообразным путем. Так, прикладная наука может копировать "высокую" (фундаментальную) науку, создавая ее упрощенный и переведенный на значительно более примитивный научный язык вариант. Возможно и другое отношение, в основе которого лежит не стремление уподобиться высокой науке, а пренебрежительное (потребительское) отношение к ней, однако в пределах общих структурных норм, почерпнутых из той же высокой науки.

Механизм живой научной жизни подразумевает наличие и борьбу обеих этих тенденций. Победа какой-либо из них означала бы стагнацию науки как целого. Мы остановились более подробно на соотношении "верха" и "низа" науки отнюдь не потому, что это единственный или даже важнейший из бинарно противопоставленных механизмов внутренней организации науки. Не менее существенна оппозиция "свое-чужое": синхронно организованная "своя" система науки постоянно испытывает возмущающее воздействие не только со стороны действительности, но и от других наук. Здесь возможно вторжение отдельных научных понятий («чужая» наука на этой стадии контакта воспринимается как хаотическая, не имеющая своей организации), восприятие системы чужих научных понятий: однако система эта конструируется в недрах собственной науки по принципу уподобления или противопоставления ей. Наконец, наступает взаимодействие с системой чужой науки. Но поскольку, как мы видели, наука в принципе не однолика, из набора, предъявляемого воспринимаемой наукой, также возможен самый различный выбор.

Таким образом, и здесь мы сталкиваемся не с неподвижной суммой научных понятий, а с конфликтами, напряжением, "игрой" различных организующих научных сил.

Можно было бы остановиться на том внутреннем напряжении, которое создается в науке нового времени одновременным сосуществованием фундаментальной науки и прикладной, разными типами их отталкивании и уподоблений. Однако это уже часто делалось. Создание исчерпывающего списка противопоставлений, свойственных науке как единому механизму, - задача будущего. Но эта задача уже осуществима и, более того, насущно актуальна: без нее невозможно типологическое сравнение наук и построение истории всеобщей (обобщенной) науки. Однако выполнение этой задачи не есть цель настоящей работы, устремления которой значительно более скромны. Мы стремились показать, что **наука как динамическое целое не может быть описана в рамках какой-либо одной упорядоченности**. **Наука существует как определенная множественность упорядоченностей, из которых каждая организует лишь какую-то ее сферу, но стремится распространить область своего влияния как можно шире.** При "жизни" какого-либо исторического этапа науки противоборство этих тенденций составляет основу того, что делает возможным выражать в науке интересы различных научных направлений, борьбу нравственных, политических или философских концепций эпохи.

Когда наступает новый исторический момент, моделирующая активность науки проявляется, в частности, в том, что она активно творит свое прошлое, выбирая из множественности организаций вчерашнего дня одну и канонизируя ее (так Возрождение избрало упрощенную античность). Процесс этот облегчается тем, что каждая из противоборствующих тенденций из полемических побуждений утверждает свою универсальность. В процессе подобной историко-научной канонизации сами научные понятия трансформируются, поскольку в научной литературе вчерашнего дня они существовали как часть ансамбля, элемент механизма, а теперь становятся единственно представляющими этап развития науки.

Однако **наступает новый исторический этап науки** (**<u>новая парадигма развития науки</u>**), и ученые следующих поколений открывают новое лицо, казалось бы, давно изученных научных понятий, изумляясь слепоте своих предшественников и не задумываясь о том, что же скажут о них самих последующие науковеды. Между тем эта поразительная способность научных понятий давать материал для все новых открытий должна была бы привлечь внимание, поскольку в ней проявляются некоторые существенные черты организации науки как синхронного механизма.

2.14. Теории формирования понятий

Формирование понятий (образование понятий) — усвоение или выработка человеком новых для него понятий на основе опыта.

Формирование понятий — это переход от единичных вещей и явлений, данных в чувственном опыте, к обобщению этого опыта в понятиях, фиксирующих существенные признаки этих вещей и явлений. **<u>Вещи</u> даны в ощущениях и восприятиях, <u>понятиями</u> же оперирует мышление**; **вещи чувственны, а <u>понятия</u> представляют собой <u>нечувственные сущности</u>, доступные лишь разуму.** Как заполняется этот по видимости непреодолимый разрыв между единичным и всеобщим, каким образом возникновение понятий, столь отличных по своей природе от вещей, вообще возможно и как именно протекает этот процесс, каковы его механизмы, — всё это составляет одну из сложнейших проблем **теории познания.**

Формирование понятий изучается философией и психологией. Если философия занимается общетеоретическими вопросами — объяснением связи между единичным и всеобщим, то психология сосредоточивает внимание на вопросе о том, как именно происходит выявление признаков, составляющих некоторое понятие (класс), и правил, связывающих эти признаки.

2.14.1. Платон (теория припоминания) и Аристотель

Принимая во внимание пропасть, разделяющую единичное и общее, Платон отказывается допустить, что понятия могут быть получены, выведены из чувственного опыта. Мы никогда не смогли бы найти обобщающую идею, — говорит он, — если бы уже не имели ее. «Мы непременно должны знать равное само по себе ещё до того, как впервые увидим равные предметы» («Федон»). Поэтому «знание — это припоминание» («Федон»). Платон постулирует существование самостоятельной сферы идей (эйдосов). Идеи существуют сами по себе, объективно, независимо от нашего познания и чувственного мира (более того, как раз вещи этого чувственного мира производны от идей, представляют собой их воплощения). (Следует отметить, что понятия не тождественны идеям: идеи, в отличие от понятий, не в нас, не присутствуют в сознании; идеи — это то, что мыслится в понятиях.) Далее, переходя в самый ответственный момент на язык мифа, Платон говорит, что душа некогда обитала в той небесной сфере, где существуют идеи, и там созерцала их; однако, пав на Землю, душа позабыла это знание. Но при виде вещей, являющихся тенью, несовершенным отражением идей, душа вспоминает и сами оригиналы. Вещи только помогают их вспомнить, «напоминая» об идеях, которые душа некогда непосредственно созерцала.

По сходному пути пошел ученик Платона Аристотель, утверждая, что знание общего не вырабатывается из знания единичного, а лишь *выявляется* благодаря ему. Согласно Аристотелю, все формы бытия уже существуют в душе потенциально, будучи заложены в пассивной части души (в пассивном уме); воздействие действительности на душу через ощущения, в сочетании с работой активной части ума, актуализирует их.

2.14.2. Закон диссоциации (У. Джеймс)

Философ и психолог У. Джеймс предлагает следующее объяснение механизма формирования понятий. «Мы бы никогда не смогли различить элементы абсолютно неизменяющейся группы, состоящей из свойств, нигде более порознь не встречающихся, — пишет Джеймс. — Если бы все холодное было мокро, а мокрое — холодно, если бы только твердые вещи были колючи, а остальные нет, то вероятно ли, чтобы мы различали холодное и влажное, твердое и колючее? …Если бы теплота прямо зависела от высоты предмета над земной поверхностью… то для понятий „теплота“ и „высота“ у нас имелось бы одно слово».

Но если некий признак можно встретить и в составе других групп, вместе с другими признаками, то он начинает выделяться. **Признак**, который мы встречаем то в одном, то в другом объекте, вследствие этого отделяется и от того и от другого «и мало-помалу становится для нашего сознания самостоятельным представлением — **абстрактом**». Джеймс называет это *законом диссоциации образа при изменении сопровождающих элементов*.

2.14.3. Ассоциативная теория

Ассоцианизм не видит принципиальных различий между понятиями и представлениями.

Еще Дж. Локк сформулировал этот взгляд. Особенную наглядность придает ему коллективными фотографиями Ф. Гальтон, в которых он на одной и той же пленке делал один снимок поверх другого; накладывание их друг на друга приводило к тому, что индивидуальные признаки стирались и сохранялись лишь общие черты. По этому образцу мыслил ряд психологов, придерживавшихся этой концепции на природу понятий и процесс их образования.

Т. Циген полагал, что понятие — это ассоциация представлений.

В 1950-х годах Рестл и Бурн попытались свести формирование понятий к повторяющемуся совместному предъявлению признаков, сопровождающемуся подкреплением. Их взгляд состоял в том, что подкрепление правильного сочетания признаков ведёт к постепенному отсеву несущественных признаков и формированию понятия из существенных. Между существенными признаками и реакцией опознания их как понятия образуется ассоциация.

2.14.4. Теория выдвижения и проверки гипотез (Дж. Брунер)

Работа Джерома Брунера и его коллег *A Study of Thinking* (1956) оказала сильное влияние на формирующуюся когнитивную психологию в целом и исследования в области формирования понятий в частности.

Дж. Брунер предположил, что следует изучать различные *стратегии* формирования понятий и предложил для этого соответствующую методику). Брунер описал две стратегии: сканирование и сосредоточение (иначе: «целостная стратегия», «фокусировка»), каждая из которых также имеет по две разновидности.

1. *Одновременное сканирование*. Происходит одновременная проверка всех возможных гипотез (под гипотезами понимаются различные наборы признаков; один из этих наборов и представляет собой искомое понятие). Не выдержавшие проверки гипотезы отбрасываются по мере их опровержения. Особенность этой стратегии в том, что при этом необходимо помнить всё просмотренное в ходе проверки.
2. *Последовательное сканирование*. В этом случае гипотезы проверяются поочерёдно. Когда гипотеза оказывается опровергнутой, ее отбрасывают и переходят к другой с учетом всего предыдущего опыта.
3. *Консервативное сосредоточение*. Берётся положительный пример понятия (то есть то, о чём достоверно известно, что этот предмет подходит под искомое понятие), после чего его признаки по одному проверяются на существенность. Заменяя проверяемый признак, но оставляя все остальные без изменения, можно определить, является ли этот признак существенным, то есть входит ли в искомое понятие. Эта стратегия выгоднее, так как уменьшает нагрузку на память.
4. *Рискованное сосредоточение* отличается от консервативного тем, что измененяются 2 или более признаков за раз.

2.14.5. Метод формирования искусственных понятий

В психологии существуют различные методы исследования понятий, среди которых особенно полезен для изучения формирования понятий метод формирования искусственных понятий. Этот метод состоит в том, что испытуемому предъявляется ряд объектов, сходных по одним признакам и различающихся по другим. О каждом из этих объектов испытуемый узнаёт, что он является (или, наоборот, не является) примером некоторого понятия (иначе говоря, входит в некоторый класс), причём точное определение этого понятия (признаки класса) испытуемому неизвестно. Задача испытуемого — на основании получаемой информации «отгадать» это понятие, то есть определить признаки, составляющие его (и правила, связывающие эти признаки).

2.15. Связь теории понятий с математикой

Теория понятий предлагает технологию определения, построения и преобразования формальных понятий. В качестве первого и основного применения технологии рассматривается формализация неформальной теории понятий. В теории понятий удается дать формальное определение определения и предложить метод проверки правильности утверждений.
Теория понятий использует технологию установления правильности утверждений в качестве замены концепции истинности утверждений

Определение и исследование понятий оказывается ничуть не более простой проблемой, чем исходная проблема определения функции и, более того, проблемой оказывается само определение определения.

Понятие функции (алгоритма) является одним из основных понятий математики. Функции и алгоритмы используются в математике в основном для вычисления значений величин. Но функции способны удовлетворять не только вычислительные потребности, потенциал функций гораздо выше, они способны решать фундаментальные проблемы. Для использования потенциальных возможностей функций необходимо определение понятия функции, адекватное природе функций.

Все основные свойства функций (в основном числовых функций) были изучены на основе интуитивного представления о функциях, но для более строгого обоснования полученных результатов потребовалось перейти от интуитивного представления о функции к ее формальному определению. При использовании формализаций следует учитывать, что не все свойства формализованных математических функций можно считать истинными свойствами функций; часть из них привносится используемыми формализациями. И наоборот, не все свойства функций оказываются формализациями учтенными.

С появлением теории множеств определение функции было дано с использованием понятия множества: функции в этой формализации определяются на основе сопоставления элементов двух, предварительно заданных, множеств элементов. Это определение является общепринятой формализацией интуитивного представления понятия функции в традиционной математике. Для большинства прикладных применений функций эта формализация оказывается приемлемой, вполне удовлетворительной, удачной и продуктивной. Математические функции указывают, каким элементам аргументного множества сопоставляются некоторые другие, результирующие элементы результирующего множества . Для задания функции в такой формализации требуется существование двух множеств (или, в случае алгебраических функций, – одного множества, рассматриваемого как в качестве аргументного, так и в качестве результирующего). Если существование аргументного множества при рассмотрении функций естественно предполагается, то отсутствие требуемого результирующего множества не позволяет задавать требуемые функции в этой формализации. Проблемы построения необходимого множества результирующих значений функции остаются вне формализации понятия функции. Не для любых задач теоретико-множественная формализация функций оказывается приемлемой и достаточной,не все существенные аспекты понятия функции в этой формализации оказываются отраженными. Не представленным, например, оказывается процесс получения (построения) результата функции из аргумента. В этой формализации оказывается утраченным даже исконный смысл самого термина functio (лат.), означающего исполнение, осуществление. Само определение понятия функции, рассматриваемое как процесс построения, конструирования нового понятия на основе существующих, имеющихся понятий (т.е. как функция над понятиями) не может быть выражено в такой формализации. Могут быть приведены еще некоторые задачи, в которых использование теоретико-множественной формализации функций оказывается неудовлетворительным. Такой способ формализации определяет скорее значения функций, но не понятие функции; скорее представляет функцию, нежели является ею. Теория множеств, воспринимавшаяся поначалу как математический рай (по выражению Гильберта), теперь оказывается лишь этапом на пути к более фундаментальным понятийным концепциям.

Очередной попыткой формализации интуитивного понятия функции, учитывающей уже процесс преобразования аргумента в результат, можно считать разработку уточнения определения алгоритма. Уточнение интуитивного понятия алгоритма потребовалось в свое время для обоснования невозможности решения некоторых математических проблем. Было разработано и предложено несколько уточнений определений алгоритмов. Эти формализации определяют алгоритм как последовательность действий, преобразующих аргумент в результат. В качестве способа представления аргумента, результата (и промежуточных значений) в алгоритмах используются слова в алфавитах. Попытка использования понятия алгоритма не привносит принципиально новых аспектов в определение функции. Формализации алгоритмов являются не более чем соглашениями о правилах преобразования слов в алфавитах и имеют отношения к понятию алгоритма не более, чем, например, правила передвижения фигур в шахматах или правила дорожного движения. Для того, чтобы эти правила можно было считать определением понятия алгоритма, необходимо иметь способ сопоставления слов некоторым другим объектам, к которым преобразование, определяемое алгоритмом, могло бы быть применимым. Проблема представления с помощью слов преобразуемых объектов породила трудную, до конца так и не решенную проблему семантической интерпретации данных. Использование для этих целей взаимно однозначных соответствий элементов множеств не является правомерным, обоснованным и убедительным основанием: взаимно однозначные соответствия являются количественным, а не семантическим отношением. Во всяком случае, взаимная однозначность соответствия не является никаким основанием для замены элементов одного множества элементами другого, поскольку возможны и другие взаимно однозначные соответствия элементов этих же множеств и не имеется никаких оснований для предпочтения того или иного соответствия. Без решения этой проблемы формализация алгоритмов является ни к чему не применимой игрой в слова. Игнорирование семантических аспектов данных приводит к понятию алгоритма, ограниченного тезисом Черча. По этой причине и эта, алгоритмическая формализация понятия функции не может считаться удовлетворительной и окончательной.

Радикальное развитие определения понятия функции предлагается теорией понятий. С точки зрения математики, теоретико-множественная формализация вполне достаточна, недостатки изнутри математики не видны, и у математики особой заинтересованности и потребности в совершенствовании и дальнейшем развитии определения понятия функции нет. **Более того, проблема развития и совершенствования понятий (и понятия функции в том числе) является не совсем математической проблемой, а скорее проблемой некоей специальной дисциплины - общей теории понятий. Для выполнения этой работы требуются <u>специальные знания и специальные методы - это задача теории понятий</u>.** Потребность в развитии и совершенствовании определения понятия появилась при объяснении видофикации данных в языках и системах программирования. В отличие от предшествующих формализаций, которые, по сути, представляют собой лишь интуитивные уточнения интуитивных представлений о функциях, теория понятий осуществляет осознанное, целенаправленное конструирование специального объекта, который способен представлять собой понятия и, в частности, понятие функции. Теория понятий использует понятия вместо множеств в определении функций. Определение и исследование понятий оказывается ничуть не более простой проблемой, чем исходная проблема определения функции и, как это ни может показаться странным, проблемой оказывается само определение определения. Теория понятий исследует и решает эту комплексную проблему.

В теоретическом, концептуальном аспекте теория понятий предстает как концепция построения понятия функции; практическая, прикладная ценность теории понятий заключается в решении теорией понятий семантических проблем формализаций: **понятия обладают семантикой.** Теория понятий, как метаматематическая дисциплина, исследует и объясняет суть и природу понятийных функций, является теорией понятийных функций и представляет собой новый, более совершенный тип формализма – семантический формализм. Математика понятийных функций представляет не только вычислительные, но и аналитические аспекты функций. Кроме того, теория понятий имеет обширную область сопутствующих применений: построение понятий составляет начало любой дисциплины, и использование аналитически построенных понятий и методов работы с ними вместо интуитивных позволяет избегать многих понятийных некорректностей и ошибок. Многие прикладные проблемы оказываются понятийными. Построение аналитического определения понятия функции позволяет по-новому, более обоснованно, сформулировать некоторые математические проблемы. В частности, удается определить предназначение и место семантического гомоморфизма и дать более корректное и строгое его определение; удается построить обобщение общей алгебры, дать определение отношений и алгоритмов. Теория понятий является своей собственной мета-теорией и в этом качестве обеспечивает свою собственную правильность и позволяет дать аналитические определения таким понятиям, как понятие понятия, понятие теории, понятие теоремы, определение самого определения и т.д. В прикладном аспекте теория понятий, являясь аналогом и обобщением аппарата видов данных в языках и системах программирования, служит его объяснением и обоснованием; теория понятий является теорией видов данных.

Алгоритмы, определяемые над понятиями, алгоритмически сильнее традиционных алгоритмов на множествах. Теория понятий устанавливает новый, более жесткий стандарт строгости и обоснованности построения аналитических теорий. Теория понятий представляет технологию аналитических рассуждений, технологию мышления.

О смысле понятия “теория”

Термин “теория” употребляется в науке в двух смыслах. В широком смысле он обозначает комплекс взглядов, представлений, позволяющих делать некоторые, в значительной степени качественные заключения о каких-либо явлениях. В этом смысле термин “теория” родственен термину “мировоззрение”. В более узком смысле термин “теория” используется в точных науках, где обозначает систему определений, аксиом и выведенных из них по правилам логики теорем и следствий, которые дают возможность количественно описывать некоторый круг явлений.

Идеи Н.А. Козырева, безусловно, образуют теорию в широком понимании этого термина; они выражают вполне определенную систему взглядов об устройстве Вселенной и позволяют делать качественные выводы о ряде явлений. И как мировоззренческая концепция, они уже оказывают воздействие на наши представления об окружающем Мире. Но пока еще идеи Н.А. Козырева не стали теорией в том смысле, в котором данный термин понимается в точных науках: они не образуют систему строго формализованных понятий и утверждений, которые позволяли бы получать количественные решения достаточно широкого круга конкретных задач. Поэтому еще многое предстоит сделать на пути их уточнения и развития.

3. Теория понятоведения как базовая наука (научное ядро) всей совокупности наук – замкнутой развивающейся панмедийной научной системы

В настоящем разделе постараемся доказать, что понятоведение является самостоятельной междисциплинарной отраслью знаний, а теория понятоведения представляет собой базовую науку (научное ядро) всей совокупности наук и исследуем ее связи с другими научными направлениями.

Деление научного знания на отдельные научные дисциплины возникло еще в Стародавней Греции. Дисциплинарная организация науки начала свое становление в XVII-XIX в. как средство хранения и передачи больших объемов научных знаний, накопленных в Европе с эпохи Возрождения.

Каждая научная дисциплина, например, теория информации, теория систем, теория принятия решений и др, имеет собственные предметы и методы исследования и не ставит себе целью заменить ими специфические методы других наук, которые используют свои средства исследования. Однако в материальном и духовном мире все взаимосвязано, что способствует появлению и быстрому развитию познавательных подходов и методов на границе разных научных дисциплин. Из таких подходов и методов со временем выделяются междисциплинарные области знаний. Этот процесс отображает интеграционные тенденции в развитии науки. Например, математическая физика – теория математических моделей физических явлений – занимает отдельное место и в математике, и в физике, находясь на стыке этих наук. Математическая физика тесно связана с физиков в той ее части, которая касается построения математических моделей больших классов физических явлений, а с математикой - касательно методов, с помощью которых эти модели изучают. Это же происходит на стыке физики и химии. Например, физическая химия объясняет химические явления и определяет (устанавливает) их закономерности, базируясь на общих принципах физики (термодинамики, статистической физики, кинетической теории вещества), а химическая физика изучает строение и преобразование химических веществ с помощью методов новых разделов физики: атомной физики и квантовой механики.

Характерным признаком возникновения междисциплинарных областей знаний является появления собстенных предметов исследования и осмысления их специальными теориями, которые объясняют касающиеся их факты и имеют собственный понятийный аппарат. Возникшая междисциплинарная область знаний начинает создавать собственные научные продукты, которые отличны от других наук, в частности «родительских».

3.1. К вопросу о понятоведении

В нашем понимании **понятоведение** – это наука, которая исследует функции, структуру, образование, определение, разработку, развитие, употребление и поддержку понятий и систем понятий в различных научных предметных областях (дисциплинах). Предметами исследования понятоведения являются понятия и системы научной разработки понятий, а также **<u>понятология</u> как общенаучное методологическое направление, связанное с исследованем совокупности философских, теоретических, фундаментально-прикладных научных вопросов анализа и синтеза научного формирования понятий и систем понятий любой природы.**

Понятология каждой области знания строится на основе понятийных связей профессиональных знаний. Понятология как систематический набор понятий, таким образом, ограничивает и вербально закрепляет систему понятий той или иной области знания. Понятологии и понятия как их составные части, являются инструментом, с помощью которого формируются научные теории, законы, принципы, положения.

Будем рассматривать **понятийные системы** как упорядоченные совокупности понятий с зафиксированными отношениями между понятиями (признаками предметов), отражающими отношения между этими понятиями.

Понятоведение представляет собой самостоятельную междисциплинарную область наук, которая находится в «области пересечения» четырех групп наук, которые объединены между собой базовой наукой (ядром наук) – **теорией понятоведения** (рис.1).

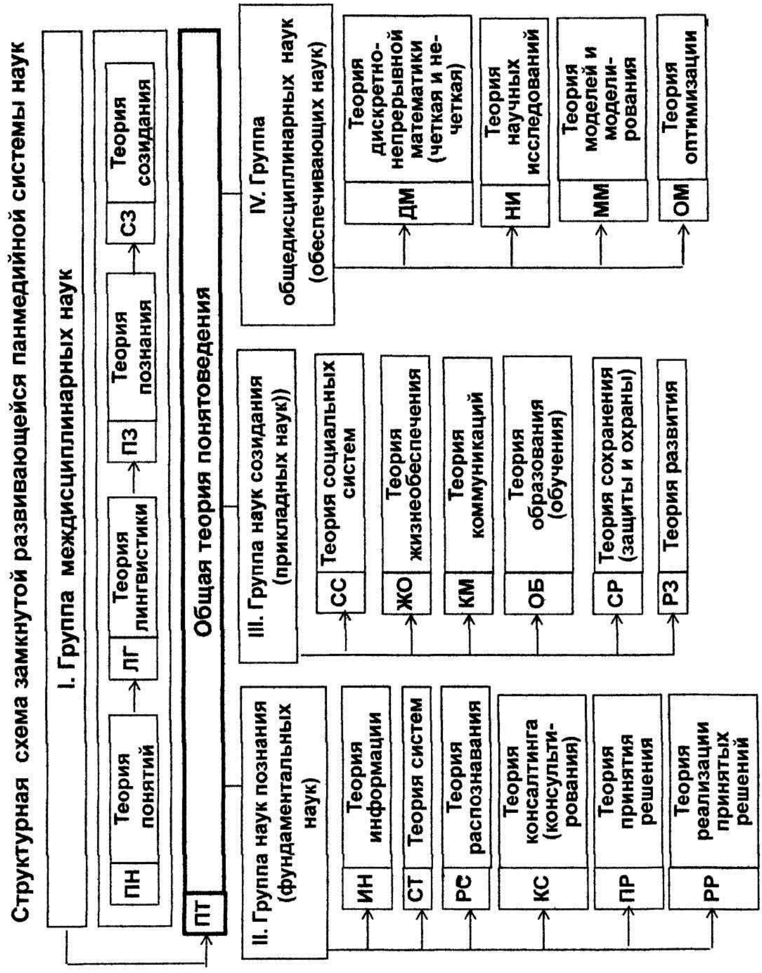


Рис.1. Структурная схема Замкнутой Развивающейся Панмедийной Системы Наук

В зависимости от предметов исследования выделим следующие группы научных дисциплин:

I) группа междисциплинарных наук;
II) группа наук познания (фундаментальных наук);
III) группа наук созидания (прикладных наук);
IV) группа общедисциплинарных наук (обеспечивающих наук).

Группа междисциплинарных наук – это совокупность наук, которые определяют **идеологию развития всего множества наук**. Эта группа наук представлена следующими научными теориями:
- теория понятий;
- теория лингвистики;
- теория познания;
- теория созидания.

Группа наук познания (фундаментальных наук) – это совокупность наук, которые изучают строение, признаки, свойства, состояния и преобразования живой и неживой природы, базируются на научных определениях, измерениях и расчетах. Эта группа наук представлена следующими научными теориями:
- теория информации;
- теория систем;
- теория распознавания;
- теория консультирования;
- теория принятия решений;
- теория реализации принятых решений.

Группа наук созидания (прикладных наук) – это совокупность наук, которые изучают закономерности развития социальных систем и отдельных их подсистем, их структуру, развитие, средства и процессы (технологии) и определяют оптимальные способы их реализации. Эта группа наук представлена следующими научными теориями:
- теория социальных систем;
- теория жизнеобеспечения;
- теория коммуникаций;
- теория образования (обучения);
- теория сохранения (защиты и охраны);
- теория развития.

Группа общедисциплинарных (обеспечивающих наук) – это совокупность наук, которые обеспечивают первые три группы наук методами и средствами формального описания предметов исследования, построения моделей, определение оптимальных

значений параметров объектов исследования. Эта группа наук представлена следующими научными теориями:
- теория дискретно-непрерывной математики (четкой и нечеткой);
- теория научных исследований;
- теория моделей и моделирования;
- теория оптимизации.

Вторая, третья и четвертая группы наук представляют собой **методолгические научные дисциплины,** на базе которых разрабатываются методические средства познания, фиксация и обработка знаний, которые широко используются различными научными дисциплинами для исследования конкретных предметных областей.

Как видно из рис. 1, ядром Замкнутой развивающейся панмедийной научной системы являетмя **теория понятоведения**.

Во–первых, понятоведение широко использует понятия, методы и средства исследования и развития объединенных вокруг него наук и использует некоторые их понятия и понятийные системы. Так, базируясь на категориях и методах теории познаний, выделяют и исследуют основные категории действительности, в частности, процессные понятия. Методы формальной логики обеспечивают взаимосвязи понятий разных предметных областей и логическую правильность их классификаций и сформулированных определений (дефиниций).

Общепризнано, что одной и ведущих фундаментальных наук является **общая теория систем**, или **системология,** так как одним из основных требований к образованному понятию и его определению является системность – понятия не существуют сами по себе, а являются элементами определенных систем. Учитывая это, методологически весьма необходимым для понятоведения является **системный подход**, который исходит из того, что первичностью является целостность (система), а вторичностью ее составляющие (элементы).

Для формального описания понятий и их исследования ширококо используют математические средства (прежде всего теорию множеств, теорию отношений, теорию графов, теорию вероятностей и др), а для построения информационных моделей накопления, сохранения переработки и транспортирования понятийной информации – методы информатики

Методы семиотики представляют возможность обеспечивать единство объема и содержания понятий, исследовать различные отношения как между признаками и свойствами предметов, так и между понятиями как знаками, между понятиями и объкетами, между понятиями и другими знаками специальных языков, обосновывать выбор определенного понятия как знака (когда это невозможно осуществить лингвистическими методами).

Семио́тика, или **семиоло́гия** (греч. σημειωτική, от др.-греч. σημεῖον — «знак, признак»), — наука, исследующая свойства знаков и знаковых систем (естественных и искусственных языков).

Понятоведение также широко использует понятия и методы **языкознининия,** так как система понятий и система определений (дефиниций) – это две инфорационные модели предметной области (свернутая и развернутая), построенные языковыми средствами, хотя они и базируются на внеязычных принципах. Учитывая это, можно отметить, что понятоведение связано как с «традиционными» разделами языкознания (грамматикой – морфологией и синтаксисом, лексикологией, словообразованием, фонетикой и др.), так и новыми направлениями в понятоведении, такими как: исследование понятий отдельных научных дисциплин, аспектология понятий, функциональная грамматика понятий, когнитивная лингвистика понятий.

Исследование понятий отдельных научных дисциплин – это направление в понятоведении, которое изучает принципы строения, образования и определения понятий определенных предметных областей знаний, их особенности и отличия от понятий других предметных областей и др.

Аспектология понятий – это направление в понятоведении, которое изучает глагольный (процессный) вид (аспект) понятий в системе его опозиций и корреляций, спектр значений и функций глаголов, которые не имеют видовых пар и смежны с видом категории (роды действий), а также аспектуально важные средства контекста.

Функциональная грамматика понятий - это направление в понятоведении, которое исследует категорийно-функциональную специфику разноуровневых единиц понятийной системы и их функционирование в научных дисциплинах (науке), используя двухвекторный подход: от языкового (понятийного) средства до совокупности его функций - и обратный - от функции до совокупности средств разных языковых (понятийных) уровней, которые их выпоняют.

Когнитивная лингвистика понятий - это направление в понятоведении, в котором функционирование понятий рассматривают как разновидность познавательной деятельности, а структуры, их организации и механизмы человеческого сознания исследуют через (посредством) понятий и понятийных систем.

Во–вторых, понятоведение обслуживает все множество научных дисциплин, предоставляя им свои продукты в виде понятий и понятийных систем (систем понятий).

Понятийная система – множество понятий, структурированных и организованных в соответствии с существующими между ними связей (отношений).

Сформулировать научную теорию в некоторой области знаний или обобщить результаты практики невозможно, не используя однозначно толкуемой и непротиворечивой системы понятий (понятологии). Именно понятоведение является той методологической дисциплинной, которая предоставляет каждой научной дисциплине свое методическое обеспечение – методы построения понятийных систем (систем понятий) и систем определений (дефиниций).

Будем различать фундаментальное и прикладное понятоведение. Первое изучает суть понятий и системы понятий, общие подходы и методы их построения, закономерности развития в контексте развития научных дисциплин и др. Другое, базируясь на результатах фундаментального понятоведения и обобщениях научно-практического опыта в области образования понятий, разрабатывает методы образования, описывания и представления понятий определенных областей знаний. В частности такие методы (на наш взгляд не вполне совершенные) содержат международные стандарты ISO 704:2009, ISO 10241-1:2011, ISO 10241-2:2012.

Будем различать в понятоведении и третье направление работы в области построения понятий и систем понятий. Это направление будет представлено системой стандартов в области понятийной работы - понятологии, а именно: Единой системой научной разработки понятий (ЕСНРП).

Основой понятоведения является теория понятий, которая включает в себя ряд научных теорий в области понятоведения, таких как:

- теория образования понятий;
- теория определения понятий;
- теория знакового образования понятий;
- система научной разработки понятий (СНРП);
– система стандартов «Единая система научной разработки понятий (ЕСНРП)».

Расмотрим вкратце основные принципы создания некоторых из приведенных структурных единиц теории понятий.

3.2. Некоторые подходы к образованию понятий

Рассмотрим традиционные логические и философские подходы к образованию понятий, и выявим ряд трудностей при их образовании, разрешение которых может быть разрешено путем обращения к психологической науке. Данный материал базируется на работе Власова Д.В. «Логические и философские подходы к построению теоретической модели образования понятия»

Согласно позиции классического рационализма исходной единицей, «кирпичиком» рационального познания является *понятие*. Понятие является одной из универсальных, узловых категорий, связывающих воедино такие разнородные сферы научного дискурса, как философия и методология научного познания, исследования человеческого мышления, исследования языка, исследования коммуникации. По сути, мышление в понятиях отождествляется с рациональным мышлением.

Относительно процедуры образования понятия в логической науке не наблюдается серьезных разногласий. Рассматривая понятие как абстрактную информационную структуру, логика и процесс образования понятий моделируются в высшей степени абстрактно.

Согласно логической теории образования понятия для того, чтобы выделить класс предметов по какой-то совокупности признаков, необходимо обобщить данные предметы по этим признакам. Обобщение состоит в том, что мы отвлекаемся от всех индивидуальных и иных различий внутри класса, пренебрегаем этими различиями, не принимаем их в расчет. В результате такой процедуры предметы мыслятся абстрактно, то есть как обладающие лишь указанной отличительной совокупностью признаков.

Схематизируя процесс образования понятий, отвлекаясь от тех реальных исторических процессов, которые протекают в естественном языке, логика образования понятий разделяет этот процесс на четыре основные фазы: анализ, синтез, сравнение и обобщение.

Анализ предметов, данных в представлении, — это разложение их на отдельные признаки, посредством выявления их связей и отношений с другими предметами. Синтез — это воспроизведение предмета, расчлененного в процессе анализа на отдельные признаки, в результате которого предмет предстает в виде системы выделенных свойств и отношений. Сравнение — это выявление сходств и различий между предметами. Обобщение — это объединение под одной знаковой формой множества предметов, обладающих общими признаками. Обобщение связано, как уже отмечалось, с процессом абстрагирования. При этом в логике образования понятий выделяют три вида абстрагирования. Первый из них состоит в том, что в предмете выделяются какие-то определенные признаки, а все остальные признаки при этом остаются за пределами внимания. Результат применения такого приема есть абстрактно мыслимый предмет, характеризуемый лишь некоторой ограниченной совокупностью выделенных признаков, общих для некоторого класса. Этот прием может быть назван «обобщающее-различающим абстрагированием».

Второй вид — отождествляющее абстрагирование. Он состоит в том, что, выделяя некоторые признаки предмета, мы игнорируем все остальные не как несущественные, а как просто несуществующие. Это ведет к отождествлению всех предметов, обладающих выделенными признаками. Например, элементами понятия «федеральный закон», являются не различные экземпляры федеральных законов, а сами федеральные законы. Тот факт, что каждый федеральный закон публикуется, а, значит, существует во многих экземплярах, попросту игнорируется.

Третий вид абстрагирования — это так называемое изолирующее абстрагирование, состоящее в том, что отдельные признаки предметов или отношения между предметами мысленно отделяются от самих предметов и становятся самостоятельными предметами мысли. Результатом таких процессов являются так называемые абстрактные объекты и понятия: «невесомость», «высота», «безработица» и др.

Обобщающее абстрагирование имеет много общего с таким выделяемым в логике приемом познания как идеализация, который состоит в том, что, имея в виду некоторые предельные случаи проявления того или иного качества, мы либо мысленно наделяем предметы какими-то свойствами, которых они в действительности не имеют, либо лишаем их каких-то свойств, которыми они в действительности обладают. Обычно в качестве примеров результата идеализации приводят математические объекты. Можно в качестве примеров идеализации привести и такие понятия, как, например, «потребительская корзина», «прожиточный минимум» и т. п.

Логическая модель образования понятия, отличаясь высокой степенью абстрактности, не отражает в полной мере реальный процесс образования понятия, происходящий в человеческом сознании, как появление и результат определенной познавательной деятельности. Попытки воссоздать этот процесс, выделить его основные алгоритмы предпринимались в философии. Так, в рамках материалистической теории познания достаточно распространен был подход, в рамках которого эта проблема решалась в контексте проблемы восхождения в процессе познания от абстрактного к конкретному, в связи с проблемой конкретности истины. Характерным примером данного подхода является концепция А. П. Шептулина, который, рассматривая проблему единичных понятий в своем труде, посвященном диалектике единичного, особенного и общего, отмечает, что в ходе практической деятельности человек сталкивается прежде всего с единичными предметами: «В процессе производства человек имеет дело с отдельными, неповторимыми во всех своих подробностях предметами. Таким является и орудие, используемое им в процессе труда, и предмет, на который направлено воздействие орудия, и продукт, получающийся в результате труда. Иначе и не может быть, ибо в объективной действительности <…> самостоятельно, качественно, обособленно существуют лишь отдельные предметы».

Вместе с этим постоянно совершается и обратный переход от общего к единичному. Так, человек, имея знание о том, что палка может заполнить пространство, отделяющее его руку от плода, находящегося высоко на дереве, может использовать это знание и отыскивать необходимой длины палку. Тем самым он, «приспосабливаясь к специфическим условиям, совершает переход от общего к единичному, ибо имеющееся у него общее представление о ноже он преломляет через специфику данного камня, дает ему вещественную оболочку и тем самым превращает его в конкретный предмет (реализует его в отдельном предмете)».

При этом, как считает А. П. Шептулин, на ранних этапах своего развития человек не отделяет общее от единичного, не обладает способностью к абстрагированию: «Движение как от единичного к общему, так и от общего к единичному <…> еще не представляет собой движение абстракций, отвлеченных от предметов и мыслимых как таковых: это движение есть прежде всего движение самих предметов в практической деятельности и сопровождающее их движение чувственных данных, представлений. Здесь общее хотя и улавливается в отдельном, но не освобождается, не отделяется от единичного. Оно (общее) хотя и мыслится самостоятельно, но лишь на фоне отдельного, лишь в том виде, в каком оно существует в действительности, т. е. как сторона отдельного. Примитивный ум хотя и отодвигает единичное на второй план, выделяя в предметах или явлениях ту или иную, имеющую значение для жизни человека, общую сторону, но еще не может оторваться от него. Оно (единичное) должно присутствовать при всех его мыслительных операциях, должно сопровождать их, так же как оно присутствует при всех практических операциях и сопровождает их».

Этой неразделенностью общего и единичного, несформированностью абстрактного мышления А. П. Шептулин объясняет тот факт, что в языках примитивных народов «отсутствуют общие отвлеченные понятия, хотя и имеется масса общих представлений, отражающих и фиксирующих те или иные предметы в том или ином их специфическом виде или в той или иной конкретной обстановке». Такие понятия, в частности, встречаются у туземцев островов Товарищества, которые «употребляют особые слова для обозначения собачьего хвоста, птичьего хвоста и т. п., названия же хвоста вообще у них нет. У могикан есть слова, означающие разные способы резания, но нет глагола «резать», и есть готовые формы для выражения «я люблю его», «я люблю тебя», но нет глагола «любить». У эскимосов есть глаголы, означающие ловить кита, ловить тюленя и т. п., но нет, однако, слова для выражения ловить рыбу. Далее, у них нет даже глаголов «я хочу» или «я желаю», но есть особые глагольные формы для выражения «я хочу есть мясо», «я хочу есть похлебку»; нет у них также общего существительного для понятия «удар», но есть слова для обозначения ударов различными орудиями. На языке cheroki можно насчитать тридцать слов для обозначения различных видов мытья, но нет слова просто «мыть». У туземцев Тасмании для каждой разновидности каучукового дерева имелось особое название, но слова «дерево» у них не было. Индейцы-кламаты не имеют родового термина для понятия лисицы, белки, бабочки и т. д., но каждая порода лисиц, белок и т. д. имеет у них свое особое имя».

В контексте проблемы выявления реальных алгоритмов образования понятия представляет интерес и работа А. А. Ветрова, автор которой поставил цель «выяснить отношение, существующее между представлением и понятием и оценить (исключительно с точки зрения этого отношения), насколько полно бытующее в литературе определение понятия как отражения существенных признаков предмета». Как показывает в данной работе А. А. Ветров, специфика понятия как формы познания определяется не тем, что оно выражает общий признак, поскольку общее может выражаться не только в понятии, но и в представлении. Общее представление возникает в нашем воображении при упоминании класса предметов, имеющих определенные наглядно представимые признаки. «Так, например, услышав слово “овчарка”, мы воспринимаем образ овчарки. Конечно, может случиться, что в сознании появится образ какой-то определенной овчарки. Это будет единичное представление. Но чаще всего возникает такой образ, относительно которого мы не скажем, что это образ овчарки, которую мы раньше видели. В этом образе на первом плане признаки, общие ряду овчарок; признаки же, свойственные отдельным экземплярам, или совсем отсутствуют (например, белое пятно на черной шерсти), или отступают на задний план и не являются предметом нашего внимания (например, та или иная их величина и т. п.). Это и есть общее представление».

С другой стороны, далеко не всякому понятию соответствует какое-то представление. Так, вряд ли можно составить представление о собаке вообще, человеке вообще. Особенно это справедливо в тех случаях, когда вещь не доступна чувственному восприятию. Иными словами «общность представлений» имеет определенные границы, и когда этих границ оказывается недостаточно, человек переходит от наглядных форм познания к абстрактным.

Каковы же отличительные черты понятия как формы познания? Как считает А. А. Ветров, такой чертой понятия является его «расчленяющий» характер. Если в представлении нам дан целостный образ какого-то предмета или класса предметов, то **в понятии происходит аналитическое выделение ряда признаков, характеризующих этот предмет или класс.** Именно **благодаря аналитической, расчленяющей функции понятие выводит нас за пределы представлений и становится мощным орудием познания.** «Расчленяя предмет на признаки, выделяя их каждый в отдельности и познавая предмет через расчлененные признаки, мы получаем понятие, лишенное элемента чувственности. А последнее, в свою очередь, составляет основу для раскрытия нечувственных связей и отношений».

В то же время, как считает А. В. Ветров, в основе всякого понятия лежат элементарные представления: «Если за словом, обладающим определенным значением, стоит неразложимое на признаки образование, то очевидно, что последнее является не чем иным, как представлением, — точнее, общим представлением, поскольку речь идет о раскрытии содержания общих понятий. Ведь никакая другая форма знания о предмете, кроме чувственного, не расчлененного на признаки образа и нечувственного понятия, предполагающего расчленение признаков, неизвестна. **Значение слова может раскрыться или через понятие, или через представление <…>.** Если поэтому **слово** обладает значением, а последнее **не может быть разложено на отдельные элементы, признаки**, то есть **не может быть понятием**, то остается одна-единственная возможность — это значение воплощается в представлении».

На наш взгляд, данный подход смешивает два вопроса: **вопрос о природе понятия как формы мысли и вопрос о реализации понятий в реальных эмпирических процессах мышления, речи, познания, коммуникации.** **Понятие как форма мысли представляет собой выраженную в языке интеллектуальную модель определенного предмета (физической, социальной, идеальной природы), построенную рационально мыслящим**

субъектом в процессе познания путем выявлении существенных признаков этого предмета. Отличительными признаками этой модели являются ее идеальная природа и языковая форма выражения.

Однако в реальных психических процессах данные процедуры могут быть заменены другими процедурами, в которых, наряду с рациональным мышлением, участвуют **воображение, эмоции, ощущения, представления**. Между тем **результаты этих процедур могут использоваться в роли понятия и выполнять функции понятия в мышлении, познании, коммуникаци**и. **Данные образования правильнее назвать квазипонятиями.** Природа квазипонятий — психическая, но не идеальная. И, несмотря на то, что они, как правило, всегда бывают представлены в виде тех или иных выражений языка, **нельзя сказать, что языковая форма полностью воплощает все их содержание**.

На наш взгляд, А. А. Ветров в своем подходе абсолютизирует роль психических функций, подменяющих рациональное мышление в процессе образования понятий, и неправомерно игнорирует различия между понятиями в строгом смысле и квазипонятиями. Такой вывод вытекает из анализа его утверждений о том, что, какую бы область знания мы ни взяли, мы всегда обнаружим те последние элементы (общие представления), на которых все держится и к которым сводятся все более поздние мысленные образования. В обыденной жизни, например, мы не раскрываем посредством перечисления признаков содержания тех мысленных образований, в которых отражаются простые свойства вещей (белизна, твердость, сладость и т. п.). **Знание о них имеет поэтому форму общего представления, а не понятия**.

А. А. Ветров считает, что без опоры на общие представления люди не смогли бы уловить смысла используемых понятий, аргументируя это тем, что обыденный язык (а зачастую и язык науки) предполагает связь с определенными представлениями. При этом А. А. Ветров признает, что понятие о предмете А не является непосредственно общим представлением, ибо понятие имеет своей необходимой предпосылкой **мысленное расчленение предмета на признаки Б, В, Г и т. д., а общее представление (если только оно вообще возможно) такого мысленного расчленения не содержит, оно заключает в себе признаки Б, В и Г в форме слитного чувственного образа.** Однако из этого верного положения делается неправомерный, на наш взгляд, вывод о том, что понятие, в конечном счете, все же сводится при логическом анализе к общим представлениям, которые выступают в качестве последних элементов.

Причиной внутренней противоречивости данной концепции представляется недооценка различий между чувственным и рациональным уровнями познания, фактическое смешение этих двух уровней. По мнению В. М. Богуславского, оппонента А. А. Ветрова в дискуссии о природе понятия, которая развернулась в советской философии в 1960–1980-х гг., естественным следствием концепции А. А. Ветрова становится вывод о том, что «в отличие от представления, образующегося путем простого воспроизведения восприятия, понятие образуется путем сравнения различных представлений и восприятий путем их анализа и синтеза, путем отвлечения и обобщения».

<u>**Процесс образования понятий предстает как последовательный переход от индивида к виду и от вида к роду путем сравнения и выделения общего.**</u> Однако, как считает В. М. Богуславский, при этом теряется различие между переходом от представлений к понятию, с одной стороны, и от одних понятий к другим — с другой. По мнению Богуславского, **между понятием и представлением существует <u>не количественное, а качественное различие</u>**. «Отрицание этой качественной разницы — результат попытки объяснить образование понятия, ограничившись сопоставлением готового понятия и готового представления».

В. М. Богуславский, подходя к проблеме образования понятия, считает, что важно исследовать само «движение, результатом которого является понятие», обратиться к самим процессам образования понятий и представлений, для чего исследовать связи между понятиями и их отличие от связей между представлениями.

Однако главным принципом связи между представлениями В. М. Богуславский, вслед за Аристотелем и Локком, считает ассоциацию по смежности, подчеркивая спонтанный характер ассоциативных связей между восприятиями и, следовательно, случайный, неуправляемый характер их появления в нашем сознании: «Связь представлений возникает лишь благодаря известному содержанию и известной последовательности восприятий, но ни содержание, ни последовательность восприятий от воли воспринимающего не зависят». Такая работа сознания, по сути, не отличается от представлений животного, который также «содержат определенные знания о действительности, помогают животному ориентироваться в окружающей его среде».

Рассматривая процесс образования связей между понятиями В. М. Богуславский останавливается на понятиях «движение» и «теплота» и отмечает, что связь между ними на протяжении тысячелетий не осознавалась. Это осознание стало результатом меняющейся практики и сопутствующего ей развития научных знаний, в результате чего происходит такое изменение содержания понятий о теплоте и движении, что между этими понятиями усматривается существенная связь, и, поскольку эти изменения носят существенный, качественный характер, возникают новые понятия движении и теплоты, обозначаемые теми же терминами, что и старые понятия. По мнению М. В. Богуславского, принципиальным моментом **понятийного постижения реальности является его активный характер**, который проявляется в том, что **понятия способны, с одной стороны, аккумулировать практический опыт, с другой стороны, выступают в роли некоего предзнания, направляющего новый опыт.**

Признавая активный характер рационального (понятийного) познания, все-таки трудно согласиться с тем, что в этом заключается специфическое отличие понятийного познания от, скажем, художественного познания действительности или опытного познания. На наш взгляд, **специфика понятия как инструмента познания состоит в его способности структурировать реальность в соответствии с системой категориальных векторов, отражающей структуру жизненного мира субъекта.** В отличие от восприятия животного, человеческое восприятие является социально опосредованным. Очевидно, что необходим ряд новых исследований, направленных на изучение характера, особенностей и природу этой опосредованности.

В целом надо отметить, что многие философы связывают генезис понятия с человеческой деятельностью. При этом, однако, конкретное наполнение этой деятельности разные авторы интерпретируют по-разному. Так, С. И. Терентьев подчеркивает в качестве «главного момента» этой деятельности коммуникативный момент, связывая с ним «конституирование интерсубъективного измерения понятия», которое, по его мнению, и составляет сущность понятия.

В целом, говоря о попытках построения **теоретической модели образования понятия**, приходится признать ограниченность этих подходов, вследствие чего возникающие модели страдают схематичностью и обладают невысокими объяснительными возможностями, а составляющие их теоретические положения во многих случаях являются самоочевидными. Для того, чтобы повысить информативность этих моделей, представляется целесообразным дополнить их психологическим подходом. Именно **психология, как наука, изучающая мышление и поведение человека** как эмпирический феномен, **способна дать конкретное знание** о специфических закономерностях и механизмах, которым подчиняется **процесс образования понятий**. С учетом этого, изучая структуры понятийного мышления и особенности процесса формирования понятий у человека, возникает настоятельная необходимость в обращении к результатам современных исследований когнитивных структур в рамках общей и социальной психологии.

3.3. Некоторые взгляды на определения понятий

Принципиальных возможностей построения определений понятий, скорее всего, насчитывается две. Вначале мы скажем о той из них, которую не будем анализировать, то есть о той, определение которой дано рядом исследователей, сказавшим, как следует давать определение – "подводить конкретное понятие под более общее". Этот способ определения основывается на методе логической дедукции, и он не будет интересовать нас вот по какой причине.

Нам интересно построить не сопрягающее определение понятия – "бумага это носитель письменных знаков", а индентифицирующее, то, определительное представление которого способно однозначно указывать присутствие именно данного объекта, а так носителей письменных знаков мы можем насчитать бесчисленное множество – от древних глиняных табличек до современных заборов по сторонам глухих закоулков.

Рамки поставленной задачи обращают наше исследование к следующей проблеме – может ли понятознание, и в частности теория понятий, найти в себе возможности разработки такой формальной **теории определения понятий**, что устанавливала бы те нужные критерии *достаточности*, чье использование приводило бы к созданию строгой определительной характеристики предмета.

Обосновать принципиальную возможность нужного решения попытаемся на анализе собственно проблемы "предмета определения".

При этом следует вернуться к принципам общих положений и дать пояснение в том смысле, что искомое определение – то, которое базируется на логическом методе индукции. Хотя при этом следует отметить, что в чистом виде только индуктирующее или только дедуктирующее определения невозможны, и, создавая определение понятия методом индукции из состоящих в нем элементов, мы не можем избежать того, чтобы не использовать в нем некоторых общих понятий и т.п.

Первый шаг предложенного анализа будет состоять в принятии некоего положения, которое на интуитивном уровне кажется ошибочным, но которое мы условно сделаем действительным и потому далее совершим попытку его опровержения. Предположим, мы соглашаемся с той точкой зрения, что уже такой минимум обозначения как *имя понятия* в достаточной степени служит нам в качестве полноценного определения.

Анализируя определительные способности имени понятия, мы можем поставить следующий вопрос: можно ли понимать имя понятия в качестве образца представления той высокой сложности, что уже соответствует уровню полноценного описания? Вряд ли, поскольку само по себе имя понятия не открывает возможности разложения его смыслового содержания на комплекс (либо структуру) других имен понятий. То есть мы не можем признать имя понятия полноценным средством определения на том основании, что лежащая в его основе простая рецепторная или рефлективная образность не позволяет сосредоточить в очерченном им представлении то достаточное число элементов, что позволяло бы совершить операцию однозначного воспроизведения обозначенной именем сущности.

Хотя и среди огромного множества имен понятий встречаются имена понятий и другого порядка, лексика которых может быть представлена в качестве своего рода редуцированного выражения. Примером здесь может служить имя понятия "треугольник", в котором составная структура его лексемы уже позволяет выделить элементы, собственно и образующие данную геометрическую фигуру (три элемента "угол"). Итак, очевидная невозможность использования любого произвольного имени понятия в качестве определения заставляет начать поиск тех возможных выражений, которые вполне способны предоставить нам подобные услуги.

Главным требованием, которое выдвинуто к определению, стала возможность передачи посредством определения некоторой возможности реконструктивного воссоздания вещи или предмета. Первая проблема, над которой должен задуматься всякий, кто ставит перед собой задачу реконструктивного воспроизведения – это проблема того материала, с которым он будет работать. Здесь следовало бы воспользоваться опытом практической деятельности.

Производство любого технического изделия, например, практически никогда не происходит на одном заводе, завод, что выпускает продукцию, предназначенную конечному потребителю, сам использует полуфабрикаты и выпущенные другим заводом же компоненты. Следовательно, исходя из приведенного примера, мы можем позволить себе определить главное правило реконструкции следующим образом: условие "адресуемого объекта" реконструктивного действия – это условие того уровня грануляции, который содержит в себе компоненты, используемые в подобном воссоздании.

Следовательно, определение, достаточно подробное в том смысле, что его определительная способность соответствовала бы возможности реконструкции, должно в отношении используемых ссылок быть обращено к предметам, относящимся к тому уровню компонентной грануляции, которым будет пользоваться мыслимая в определении реконструкция.

Требование указания описанием конкретизирующих объектов мы оговорили. Теперь нам следует оговорить требование в части *представления* этих самых конкретизирующих объектов. Первый вопрос здесь – обязательность признаковой полноты для их имен и второй – указание места этих объектов в структуре случая их использования.

Положим, мы говорим о том, что частями несущих конструкций некоего дома оказываются гвозди. В подобном определении дома мы не указываем, какие это гвозди, но, естественно, понимаем, что они должны быть соразмерны с толщиной тех брусьев, из которых он и построен. Отсюда мы можем говорить о косвенном задании признаков этих элементов – гвоздей – через молчаливое согласие с некоторым пониманием принципов *стандартного* соответствия размеров элементов. Маленькими гвоздиками, понятно, такие брусья не закрепить.

В общей же форме нам следует сказать, что те составившие определение элементы, на которые оно и ссылается, в своем признаковом представлении должны показывать определенную совместимость, не допуская возможности (кроме соответствующих случаев) контрастного комбинирования – "иголки и стога сена".

Также определение должно содержать и ссылку на характер случая использования элементов; нужно пояснять, что некий элемент используется как образующий (пример: несущая конструкция), когда другие – только лишь в качестве дополняющих (обивка или окраска).

Следующая проблема, на которой следует остановиться – это связь описания с деятельностным запросом. Положим, что в данном нами определении уже смогли выразить знание идентификаторов и функций составляющих элементов, а теперь хотим попытаться каким-то образом характеризовать саму последовательность реконструкции определяемого предмета из готового набора элементов.

Воспользуемся таким примером как животное; оно в настоящем виде "животным" признается в таком случае, когда только способно выполнять репродуктивную функцию. Если не брать здесь искусственного состояния типа "кастрированного животного", то неразвившемуся и уже перезрелому состояниям в жизни животного биология требует давать отдельное определение (малек и головастик в одном случае, "пожилой возраст" в другом).

Отсюда появляется следующее требование (то же самое, что, добавим, вводит и черчение) – определяемое следует показывать с деятельностной точки зрения в условиях некоторой *полной реализации* его *функций*. Это деятельностное ограничение возможности определения мы можем назвать деятельностным ограничением внутреннего характера, другим деятельностным ограничением определения мы можем назвать ограничение самого реконструктивного процесса.

Зададим такой вопрос: почему в мясной промышленности скот учитывается именно "по головам"? Ответ очевиден – вот та существенная и открытая внешнему наблюдению часть тела, присутствие которой на положенном ей месте характеризует саму возможность жизни. Если же у какого-то поросенка потерян хвостик, то такой признак еще не о чем не говорит. Так и в технике, классификация определенные элементы конструкции показывает как базовые, все прочие узлы относя к списку "агрегатов". Хотя в том или ином смысле такое разделение можно назвать условным, но важен принцип: деятельностный аспект устанавливает, может быть и не всегда обязательное, но важное для самой процедуры разделение составляющих вещь элементов по важности их присутствия в данной комбинации.

Еще один пример деятельностной характеристики вещи касается того ряда случаев, когда жестко задается последовательность воссоздания подобного предмета; здесь примером служит дом, который необходимо строить обязательно с фундамента.

Общий же вывод, который наши наблюдения позволяют сделать в отношении проблемы присутствия в определении условий деятельностных характеристик, оказывается следующим: эти характеристики следует выделить как *индивидуально присущие признаки существования*, и в тех случаях, когда они играют важную роль, они должны быть непременной составной частью определения.

Если мы понимаем определение как реконструктивную операцию, то в нем тогда нам следует отразить и то обстоятельство, что процесс такой реконструкции может сталкиваться с неполнотой признаков, по которым мы выделяем составляющие элементы. Об этом говорит следующий пример: завод выпускает изделие, а оно не работает. Приходят к сборщику и слышат его ответ: "Мало ли что не работает! Я всё сделал по инструкции".

То есть определение обслуживает конкретное понимание, и определенные требования могут заставить использовать в подобном определении элементы, выбор которых мы будем делать по неполному числу признаков. То есть, если указано условие: нужно взять листок бумаги, то можно брать любой – и папиросной, и ватмана, – хотя, вероятно, необходимо использовать лишь один определенный вид бумаги.

Но в большей степени подобные определения появляются в составе научных описаний вновь открываемых форм действительности, содержащих в себе и специфические элементы; наука, не вполне понимания характер этих элементов, описывает их на данный момент известному набору признаков. Примером может послужить использовавшееся некоторое время назад описание многочисленных спутников Сатурна именно как "колец", что соответствовало их наблюдаемому облику.

Перечисленные особенности дополняют характеристику определения условием указания **признаковой полноты**, характеризующей используемые элементы; критерием же этой полноты может служить возможность элемента столь обстоятельно характеризоваться присущими ему признаками, что мы полноценно можем понимать этот элемент как заместитель места в пространстве (как вид *состояния*, иными словами).

Наконец, определению подлежит и способность избирательного сочетания определяемого, если такая существует, с некоторой внешней средой. Вспомним пример, когда автомобиль может быть изготовлен в тропическом и арктическом исполнении, как необходимо при определении света, как и электромагнитного поля в целом, указывать среды, которые проницаемые для его прохождения.

Мы не способны понимать свою цивилизацию иным образом, кроме разве как "земную", и сами мы делимся на обитателей зон тропического, умеренного и холодного климата. Но опять, указание свойств *адаптивности* не всегда может быть обязательной составляющей определения, поскольку, например, такое твердое тело как камень может существовать в огромном диапазоне условий, кроме разве той среды сверхвысокой температуры, когда механическая среда в целом прекращает существование.

Итак, если определению важно, чтобы определяемое позволяло характеризовать его и в форме существования, адаптированного к определенному перечню внешних условий, то следует указать те пределы, в которых данное существование может сохранять свое постоянство. Это действительно, не лишнее обратить внимание, в отношении физических объектов, но и в отношении так называемых "духовных" – "учебник был рассчитан на детей 10-11 лет".

Определению также следует показывать и такую характеристику объекта как условие его чувствительности или безразличия к целостности собственного состава. Инвалид, потерявший какую-то часть тела, все равно остается юридически полноправным членом общества, автомобиль же, в силу своего компоновочного решения не позволяет его использовать, если отсутствует одно колесо из четырех.

Этот элемент определения показывает такую характеристику как условия, допускающие данное существование, отражает те пределы, в продолжение которых данное существование определяется как идентичное само себе.

Перечисленным здесь требованиям, которые мы предъявляем к акту определения, можно дать имя *содержательных*. Но кроме них следует обозначить и требования, относящиеся к **рациональности определения как формы мыслительной процедуры**. Определение должно быть целесообразно в отношении планов того понятия, потребности которого вызвали к жизни само это определение. То есть здесь можно говорить о том, что некий предмет можно определять в потребительском и производственном смысле.

То есть определения могут быть теоретическими и эмпирическими, классическими и нестрогими, подробными или краткими – обладать множеством форм, которые присущи им в силу используемой деятельностной установки. Таким образом, определение с точки зрения его целесообразной компоновки можно характеризовать той деятельностно допускаемой потерей условной "абсолютной достаточности", которая была нами установлена для *принципа определения*.

Изложенные посылки позволяют понимать ***определение*** как *деятельностно обусловленный выбор характеристик, входящих в условную "абсолютную" регенеративную модель определительного отношения, позволяющего планировать акт создания данной условности из набора ее составляющих элементов, позиционированных на данном уровне гранулируемости*.

Деятельностное ограничение, связанное с самим мыслительным актом определения, проявляется в своего рода "стилистике" определительного действия, в чем подчеркивается принципиальный характер актуальности именно подобного выбора характеристик. Как учила нас актуализации представлений сказка "Три поросенка", главным качеством построенного домика служит прочность.

В завершении обобщим введенные требования, которые предлагается предъявлять к определению регенеративного типа. Как мы представляем себе, определение, фиксирующее условность в той степени подробности, что достаточна для воссоздания вещи из набора элементов, должно удовлетворять следующим требованиям:

1. Назвать уровень гранулируемости, на котором будут выбираться комбинируемые определением элементы;
2. с достаточной для действия выбора полнотой характеризовать используемые в определительном построении элементы;
3. характеризовать определяемое вариацией индивидуально присущих признаков существования;
4. давать определяемому полноценное описание как форме замещения пространства;
5. раскрывать ограничивающие определяемое возможности адаптивности к перемене среды;
6. характеризовать определяемое чувствительностью или безразличием к целостности своего состава;
7. уметь производить деятельностно допускаемую потерю полноты "абсолютного" определения.

Представив теорию определения понятий базирующейся на методе индукции определения, следовало бы оценить проблему того, применяется ли данный метод определения на практике и попытаться самим дать примеры подобных определений.

В достаточной степени близкими аналогами определений, использующих метод индукции можно назвать описательные части конструкторской документации, определения юридических квалификаций, вводящие ролевые фигуры типа преступник, свидетель, событие преступления, практики разведения домашних животных, устанавливающие строгие стандарты пород.

Попытаемся дать определение обыденным вещам, применив для этого предложенную методологию.

Положим, мы характеризуем такой предмет как *верхняя мужская рубашка*. Верхняя мужская рубашка представляет собой композицию из кроеных деталей, а именно 2-х деталей основы, 2-х рукавов, воротника, отворотника, стойки, 2-х манжет, соединенных швами и некоторого числа пришитых пуговиц; шьется из неплотных тканей, представляет собой так называемую "летнюю" одежду, стирается при определенной температуре воды.

Возьмем другой обыденный предмет – *тертый пирог*. Предыдущее определение – это результат нашего собственного творчества, настоящее – извлечение из кулинарной книги. **Тертый пирог** – 3 желтка растереть с s стакана сахара, смешать с 1 стаканом топленого (можно сливочного) масла, положить немного соды и соли, затем все это смешать с мукой до состояния мелкой крупки. Полученную массу разделить пополам. Одну часть рассыпать на сухой лист слоем примерно 1 сантиметр, положить сверху начинку из тушеных яблок (или из лимона, пропущенного вместе с кожицей через мясорубку) с сахаром и высыпать на нее ровным слоем вторую часть мучной массы, слегка пригладив. Поставить в духовой шкаф на S часа для выпечки.

Но столь простые в своей примитивности, но принципиально такие же определения будут относиться и предметам научного познания, когда мы молнию будем описывать как эффект разряда атмосферного электричества, накапливающегося в верхних слоях атмосферы, характеризуемого определенной силой тока, интенсивностью свечения и т.п. составляющими элементами.

Подводя итог размышлениям над проблемой предмета определения, выполняемого посредством метода индукции, следует отметить роль этого определения в деятельности познания. Подобное определение редко когда служит рабочим или предварительным, но чаще всего представляет собой итоговое суждение, подводящее черту под длительным процессом познания некоторой проблемы.

Использование определений, базирующихся на методе индукции, уводит нас и от смысловых дефиниций, когда культурные или научные стандарты предрешают демонстрируемое нами отношение к вещам, заставляя нас использовать вилку только для того, чтобы брать пищу, но не для ковыряния в зубах. В этом смысле дедукция, началом которой оказывается культурный стандарт, предопределяет наше отношение, которое не связано с вещью, а связано с манерой поведения; так дикарь вряд ли будет использовать мебель так, как это сделает цивилизованный человек.

Понятознанию следует пользоваться средствами, которые позволили бы ему преодолеть зависимость от культурных парадигм и выбираемых в качестве исходных положений рассуждения универсумов.

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В науке и практической деятельности человека определения играют чрезвычайно важную роль. Определение раскрывает суть предмета, выделяет его из множества ему подобных. Определение завершает изучение предмета, воссоздает предмет в его закономерных и необходимых связях. Правильно сформулированное, оно оказывает содействие получению новых выводимых знаний, изучению новых предметов и формированию определений новых понятий.

Чтобы определение было правильно сформулированно, необходимо придерживаться соответствующих правил. Приведем основные из них.

1. ***Определения должно быть соизмеримым***. Из этого следует, что определяемое понятие и понятие, которое определяет, должны быть равны по объему. Рассмотрим определение — «Понятие — это форма мышления, которое отображает общие и важные признаки предмета, взятые в их единстве». Как проверить его на соизмеримость? Для этого необходимо определенное понятие поставить на место определяемого и прибавить слово «всякий», «любой», сделав так называемое обращение. Если получим истинное высказывание, то объемы определенного и определяемого понятий будут равные, а само определение — соизмеримым. Так, вышеприведенное определение понятия является соизмеримым, так как можем сказать, что «Любая форма мышления, которая отображает общие и важные признаки предмета, взятые в их единстве — это понятие» является истинным утверждением.

В случае нарушения этого правила возможны логические ошибки, которые носят название *«весьма широкое определение»* (когда некоторые признаки опускаются) или *«весьма узкое определение»* (когда приписываются некоторые признаки). Если в приведенном примере определения понятия опустить то, что «отображает общие и важные признаки предмета, взятые в их единстве», то получим определение «Понятие — это форма мышления», которое будет весьма широким, поскольку формой мышления есть не только понятие. Примером весьма узкого определения будет определение — «Ромб — это параллелограмм, в котором стороны и углы равны», такое определение включает лишь квадраты и исключает ромбы, которые не являются квадратами.

При нарушении этого правила, можно прийти и к определению понятий несуществующих предметов.

Ошибки такого характера случаются довольно часто и являются результатом невнимательности при определении понятий или недостаточным знанием предмета. Во всех случаях такие ошибки наносят ущерб практике человеческого мышления.

2. ***Определение, как правило, не должно быть лишь отрицательным***. То есть следует стремиться, чтобы определение не содержало лишь тех признаков, которые не принадлежат данному понятию или были просто отрицанием другого. Примерами нарушений этого правила является определения: «Круг — это геометрическая фигура, которая не имеет углов и отрезков»; «Демократический стиль — это стиль, который не является авторитарным».

Правда, иногда в математике встречаются определения понятий через отрицание, в частности, определения параллельных прямых, иррационального числа.

3. ***Определение не должно включать в себя логического круга.*** Под логическим кругом здесь понимается такой способ определения, когда определяемое понятие стараются раскрыть через определенное, которое лишь является повторением определяемого или может быть выяснено лишь через определяемое, как здесь: «дееспособность — это способность к действиям», «доказательство — это процесс в котором что-то доказывается». Разновидностью такой ошибки в определении является *тавтологическое* определение, которое еще называют *«одно и то же через одно и то же».* Например, «свобода — это свобода», «истина — это истина».

4. ***Определение должно быть четким и однозначным.*** Это правило требует четкости и однозначности в выражении важных признаков предметов. Нарушение этого правила приводит к двусмысленности, а то и многозначности определения.

Нельзя использовать в роли определений образных выражений, как например: «собака — это друг человека», «логика — это мой любимый предмет».

5. ***В определения должны входить лишь термины, значения которых уже приняты, признанны.*** Нарушение этого правила приводит к ошибке по названию *«определение неизвестного через неизвестное».* Такая ошибка часто встречается в учебном процессе, в публичных выступлениях некоторых лекторов, которые используют непонятные для аудитории термины или «модные слова».

ПРИЕМЫ, КОТОРЫЕ ДОПОЛНЯЮТ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Поскольку определение понятия не может охватить все свойства, особенности предмета, то для обеспечения более полной и всесторонней информации часто прибегают к приемам, которые дополняют определение: *указания, объяснения, описания, характеристики, сравнения, различия.* С другой стороны, если не полностью сформировалось понятие о предмете, то также прибегают к этим же приемам и называют их приемами, которые подобны определениям. Раскроем содержание этих приемов.

1. ***Указания*** — это прием, когда демонстрируется сам предмет, который обозначается данным термином, указывает на него и его признаки. Это простейший прием ознакомления с предметом, который непосредственно нами воспринимается. Указания на признаки предмета часто называют *остенсивным определением.*

2. ***Объяснения*** — это выяснение смысла слова или термина. Оно подобно номинальному определению.

3. ***Описание*** — это воспроизведения наглядного образа предмета через перечень его признаков с целью установления отличий от других, ему подобных предметов. Описание базируется на чувственном восприятии предмета.

4. ***Характеристика*** — это подчеркивание того, что предмету присущи либо не присущи те или иные конкретные важные признаки. Указанные в характеристике признаки в своей совокупности дают возможность установить индивидуальность предмета. В отличие от описания, характеристика используется для раскрытия внутренних признаков, свойств предмета.

5. ***Сравнения*** — это ознакомление с предметом через сопоставление его с другим предметом. Сравнения являются одним из наиболее распространенных приемов в учебном процессе.

6. ***Различия*** — это ознакомления с предметом путем сопоставления его с другим предметом, при этом указывают не на сходство их признаков, а на их различие, отличие. Например, «Данная фирма отличается от других фирм города видами услуг, которые она предоставляет населению», «Изделия фирмы *А* отличаются от таких же изделий фирмы *В* высшей огнестойкостью и более низкой ценой».

В заключение отметим, что такое детальное рассмотрение вопроса формирования понятий и определений, с нашей точки зрения, является очень важным и позволит сформировать понятия и определения теории познания и созидания, руководствуясь вышеизложенными правилами и рекомендациями в части формирования понятий и их определений.

3.4. О системе научной разработки понятий (СНРП)

Обычно для выражения своих мыслей люди пользуются интуитивно выбираемыми словами и словосочетаниями разговорного языка. Однако интуитивный подход для построения понятий научной дисциплины неприемлем, так что приходится устанавливать границы применимости и точный смысл каждого слова или выражения в рамках данной научной или специальной области. При этом одни понятия используются только в узкоспециальных областях (например, сопротивление продольному изгибу). Другие понятия, часто выражаемые общеупотребительными словами, применяются в различных смыслах, причем часто их значения близки к обиходным, но иногда могут иметь значение, совершенно отличное от общепринятого (например, такие технические термины, как «журавль», «баба»).

Большая научная проблема связана с выбором наиболее точных имен (названий) для понятий. Так, даже отыскание общего выражения для понятия «системный продукт» является сложной задачей. Здесь всегда нужно прислушиваться к критике, особенно со стороны тех, кто уже рассматривал аналогичные проблемы, тем более если при известных условиях было выбрано другое выражение для обозначения аналогичного содержания. Риск неудачи здесь тем меньше, чем тщательнее и объективнее проведены сопоставление имеющихся данных, их обсуждение и необходимая унификация. Для систем научной разработки понятий, как и для систем вообще, это справедливо в особенности, поскольку здесь развитие шло от практики к теории. В соответствии с установившейся традицией термины в технике чаще всего принимались интуитивно, без их точного определения. Например, термин «машина», являющийся основой целого ряда других понятий и терминов, имеет различное содержание в зависимости от специальной области, времени и места использования.

Терминологические трудности еще более усиливаются в связи с различиями смысла понятий в разных языках. Так, например, немецкий термин Technik (техника) не совпадает с английским technique (методика, технический прием, оборудование), а немецкое слово Konstrukteur (конструктор, строитель, создатель) не адекватно соответствующему английскому designer (конструктор, проектировщик, художник).

Точности ради отметим, что даже в некоторых фундаментальных науках пока еще не достигнуто полное единство относительно некоторых терминов. Такое положение наблюдается в кибернетике и теории систем — науках, которые имеют для нас основополагающее значение. Отсутствие единства по терминологическим вопросам не позволяет сослаться на соответствующую литературу и вынуждает рассматривать некоторые элементарные, но важные понятия.

В основу выбора названий для обозначения специальных понятий в системе научной разработки понятий нами положены следующие принципы:

— широкое использование понятий в их укоренившемся значении, которое может быть лишь уточнено;

— ориентация в понятийном плане на фундаментальные науки, такие, как информатика, системогогия, математика и другие, с учетом того, что разработанные вновь понятия должны охватывать и область техники;

— применение, где это возможно, международной терминологии, что облегчает понимание на международном уровне.

При определении понятий используются также многие уже принятые термины.

Кроме того, для различных понятий наряду с их определениями и названиями, будут рекомендованы также буквенные символы для их обозначения. Использование символов, с одной стороны, соответствует целям установления общепринятой терминологии, а с другой — позволяет сократить записи и затраты интелектуального труда. Однако решение о том, использовать ли такие рекомендации, предоставляется читателю.

При разработке понятия любого изделия или технологического процесса в СНРП разрабртчик понятия должен решать последовательно три типа задач поискового разрабатывния понятий.

Задачи первого типа — это задачи выбора или поиска в СНРП наиболее эффективного *физического принципа функционирования понятия* для конкретных условий и требований. При решении этих задач варьируют физическими эффектами и явлениями до нахождения наиболее целесообразного их сочетания. Если, например, разработчик понятия разрабатывает понятие определяющее устройство для взвешивания, то он может положить в основу содержания определения понятия принцип действия закона рычага или закон упругой линейной деформации тел, или пьезоэффеы, а также многие другие физические эффекты и их комбинации.

Второй тип—задачи выбора или поиска в СНРП наиболее рационального *решения по формированию определения понятия* при заданном физическом принципе действия предмета. При решении этих задач варьируют понятийными элементами и признаками до нахождения наиболее целесообразного их сочетания. Решение таких задач представляет собой как бы материализацию выбранного физического принципа действия предмета. Решения формирования определений понятий могут отличаться описанием форм функциональных элементов и материалом, из которых предметы изготовлены, числом элементов, характером соединений и связей между элементами, расположением элементов в пространстве и другими признаками. Изменение понятийных элементов и признаков обеспечивает значительно большее разнообразие решений формирования определений понятий.

Третий тип — задачи описания определений в СНРП *оптимальных значений параметров* исследуемого предмета. При решении этих задач варьируют значениями параметров до нахождения их оптимального соотношения. К параметрам обычно относят размеры элементов, расстояние между ними, массу, скорость движения, температуру, время воздействия, частоту колебаний, напряжение, надежность, консистенцию и многие другие показатели. Выбор оптимальных значений параметров также нелегкая задача. Например, такая простая задача, как определение шести размерных параметров двутавровой балки (при заданных нагрузке, условиях прочности и устойчивости, 5%-ной точности определения параметров) приводит к поиску на множестве решений из $(1/0{,}05)^6 = 64\,000\,000$ вариантов!

С точки зрения разработчиков понятий решение задач первого типа, как правило, приводит к созданию принципиально новых понятий, за которыми следуют серии понятий как результат решения задач второго типа. Это значит, что решение задач второго типа дает подавляющее число эксклюзивных решений в области формирования понятий. Решение задач третьего типа также иногда приводит к новым решениям в области формирования понятий, отличающимся новыми эффективными количественными соотношениями геометрических или физических параметров.

Попробуем ответить на вопрос, что представляет собой проблема выбора наилучшего решения в СНРП в области формирования понятий, которая включает три указанных типа задач и с которой имеет дело почти каждый разработчик понятий независимо от того, разрабатывает он понятия в области самолетостроения, измерительных приборов, мясорубок или любых их узлов. Для этого введем два очень важных понятия: техническое задание на разработку понятий и критерий качества определения понятия. Под *техническим заданием* на разработку понятий подразумевается перечень основных эксплуатационных, технологических, экономических и других требований и их значений, которым должно удовлетворять разработанное понятие.

Например, для понятия «автодорожный мост» это могут быть ширина проезжей части, грузоподъемность, максимальная стоимость, надежность работы при действующих гидрологических и метеорологических факторах и т. д. Сформулированное решение на разработанное понятие (которое раскрывает своим определением вполне определенные физический принцип действия предмета, техническое решение и значения параметров) будем называть *допустимым,* если оно удовлетворяет техническому заданию.

Критерий качества — это количественный показатель, с помощью которого из двух любых допустимых понятийных решений можно выбрать лучшее. Критериями качества могут быть материалоемкость, производительность, коэффициент полезного действия, надежность, точность, стоимость, трудоемкость и др. Хотя во многих реальных задачах приходится делать выбор по нескольким критериям качества, однако для простоты приведенного ниже рассуждения рассмотрим только задачи с одним критерием.

Построим упрощенную наглядную модель множества всех возможных понятийных решений, из которого должен выбирать разработчик понятий, имея конкретное техническое задание. Это множество состоит из довольно большого количества допустимых понятийных решений и недопустимых решений, не удовлетворяющих отдельным требованиям технического задания.

Множество всех возможных понятийных решений можно представить в виде безбрежного океана с далеко отстоящими друг от друга архипелагами. Все точки «водной поверхности» такого океана — это множество недопустимых решений. Все точки поверхности суши отдельного архипелага — множество допустимых решений с одинаковым принципом функционирования. Все точки поверхности суши отдельного острова в архипелаге— множество допустимых решений с одинаковым понятийным решением, но с различными значениями параметров, которые будем отождествлять с координатами точки. Любая точка поверхности острова имеет свою отметку (положение по высоте), значение которой будем отождествлять с критерием качества понятийных решения, описанного координатами точки.

Как показывают теоретические и экспериментальные исследования различных реальных задач разработки понятий, характерными свойствами рельефа указанных «островов» является наличие нескольких (иногда очень большого числа) «вершин», «хребтов» и замысловатых «фиордов». Поскольку оптимальные понятийные решения, как правило, лежат на границе различных математически выраженных ограничений, то большинство «вершин» лежит на границе «острова», имеющего вертикальные «обрывистые берега».

Каждая вершина на «острове» — это *локально оптимальное решение* для рассматриваемого понятийного решения. Наиболее высокую вершину на «острове» называют *глобально оптимальным решением.* Наиболее высокая вершина в пределах «архипелага» — глобально оптимальное решение для рассматриваемого понятия. Наиболее высокая вершина в пределах всех «архипелагов» — глобально оптимальное решение для рассматриваемого технического задания.

Следует заметить, что для нового технического задания «рельеф», как после крупной геологической катастрофы, сильно изменится: появятся новые «архипелаги» и «острова», а многие из существующих скроются «под водой».

Рассмотрим обоснования необходимость автоматизации разработки понятий на примере поискового конструирования. При разработке понятий в области поискового конструирования часто ставится цель — сформировать систему научнообоснованных новых понятия в проблемной области, например, поисковом конструировании. Теоретически такую задачу можно решить, обследовав всю соответствующую «галактику» (все множество существующих и потенциально возможных понятийных решений) и выбрав в ней глобально оптимальное решение. Практически при решении такой задачи сначала выбирают (в том числе разрабатывают) и оценивают (интуитивно, вычисляя или экспериментируя) расширенное множество различных новых понятийных решений по виду изделия в целом и его агрегатам, узлам и деталям. Затем, анализируя и сопоставляя отдельные понятийные решения такого расширенного множества, выбирают комплекс (композицию) наиболее эффективных, непротиворечивых и взаимно усиливающихся новых понятийных решений. Так, для современных самолетов расширенное множество включает от 1000 до 2000 новых понятийных решений, а окончательный комплекс—100—150. По-видимому, при таком подходе к разработке новых понятий с большой вероятностью находят лучшую композицию решений в своей «галактике» или очень близкую к ней.

Возникает вопрос, есть ли реальная возможность при разработке системы научнообоснованных понятий получать понятийные решения на уровне требований понятийной науки.

Начавшаяся и развивающаяся в XX в. научно-техническая революция привела к устойчивым изменениям, можно сказать по геометрической прогрессии, следующих показателей развития техники в ведущих отраслях промышленности:

— число различных классов технических систем удваивается в среднем через каждые 10 лет;
— сложность изделий по числу деталей и узлов возрастает в два раза через 15 лет;
— объем научно-технической информации, используемой в конструкторских разработках, удваивается через 8 лет;
— время создания новых изделий уменьшается в два раза через 25 лет, одновременно сокращается время морального старения изделий.

Если учесть совместное влияние всех этих факторов, то можно получить следующий результат: объем разработок систем научнообоснованных понятий возрастает примерно в 10 раз через каждые 10 лет. При сохранении «ручной технологии» разработки понятий необходимы такие же темпы увеличения числа специалистов. Однако их число может возрастать за 10 лет не более чем в три раза. В связи с этим возникает дефицит между необходимым и фактическим обеспечением работ. Следовательно, в последние десятилетия на начальных стадиях проектирования большинство изделий все менее и менее прорабатываются и все более не соответствуют уровню лучших мировых образцов. Это в основном и породило проблему как улучшения качества вновь выпускаемых изделий, так разрабтку систем научнообоснованных понятий .

Поэтому в ближайшее время темпы технического прогресса любой страны, в первую очередь, будут определяться степенью сокращения дефицита научно- технических кадров.

Рассмотрим средства автоматизированной разработки понятий, которыми являются системы научной разработки понятий (СНРП).

Структурное единство каждой из подсистем и системы в целом обеспечивается с помощью системных компонентов автоматизированной научной разработки понятий (АСНРП), которые представляют собой совокупность методического, информационного, лингвистического, математического, программного, технического и организационного обеспечений. Каждая компонента выполняет соответствующие функции в АСНРП и характеризуется определенным набором средств, к которым относятся следующие виды обеспечения:

методическое — документы, в которых отражены состав, правила отбора и эксплуатации средств автоматизации разработки понятий;

информационное — документы, содержащие описание стандартных понятийных процедур, типовых понятийных решений и элементов, и другие данные, а также файлы и блоки данных на машинных носителях с записью указанных документов;

лингвистическое — языки разработки понятий, понятология (система понятий);

математическое — методы, математические модели, алгоритмы;
программное — документы с текстами программ, программы на машинных носителях и эксплуатационные документы;
техническое—-вычислительная и организационная техника, средства передачи данных, измерительные и другие устройства;
организационное — положения, инструкции, приказы, штатные расписания, квалификационные требования и другие документы, регламентирующие организационную структуру подразделений и их взаимодействие с комплексом средств автоматизации разработки понятий.

Остановимся на каждом из средств обеспечения АСНРП более детально.

Методическое обеспечение. Как уже отмечалось, методическое обеспечение — это есть совокупность документов, устанавливающих состав и правила отбора и эксплуатации средств автоматизации разработки понятий. Оно должно поддерживать процесс разработки понятий с помощью АСНРП в целом. Прохождение проекта разработки понятий в АСНРП характеризуется логической схемой процесса автоматизированной разработки понятий, определяющей порядок и правила принятия решений в ходе разработки нового понятия.

Один из возможных вариантов схемы, процесса автоматизированной разработки понятий представлен на рис. 1.

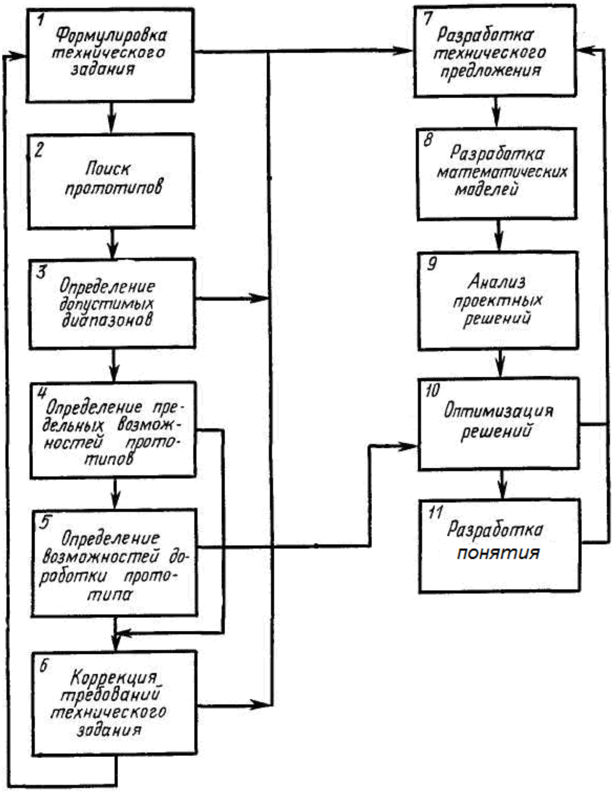


Рис. 1. Структурная схема процесса разработки понятий.

Схема предполагает следующий порядок этапов проведения работ по разработке понятий.

1. Формируется техническое задание на разработку понятия или системы понятий в целом.
2. Осуществляется поиск среди существующих понятий или систем понятий, таких, которые удовлетворяют требованиям на разработку понятий. Этот этап дает возможность исключить неоправданные затраты на разработку новых фрагметов и элементов (компонент, автрибутов) понятий, а также позволяет наиболее эффективно использовать номенклатуру существующих понятий. Если в банке данных АСНРП есть понятия с требуемыми характеристиками, то ЭВМ выдает все необходимые сведения о них. Если нет сведений об понятиях с требуемыми характеристиками, то ЭВМ констатирует этот

факт и разработчик понятий в диалоговом режиме выделяет «критические» параметры требований и затем осуществляется переход к следующему этапу разработки понятий. (Под «критическими» параметрами будем понимать параметры и характеристики, не удовлетворяющие требованиям технического задания).

3. Разработчик назначает допустимые отклонения по «критическим» параметрам. Производится поиск понятий-прототипов с характеристиками, близкими к требуемым. Если их нет, то осуществляется переход к седьмому этапу; если есть, то к четвертому этапу разработки понятий.

4. Определяются предельно допустимые возможности понятий-прототипов («запас») по выделенным «критическим» параметрам. Если по уточненным данным понятие или система понятий обеспечивают выполнение технических требований в полном объеме, то осуществляется переход к 6-му этапу, а если нет, то к 5-му этапу.

5. Определяется возможность доработки понятия или системы понятий (например, параметрическая, структурная коррекция, оптимальный выбор параметров, изменение методов разработки понятия или систем понятий и т. п.). Если доработка дает желаемый результат, т. е. требуемые характеристики выполнены, то осуществляется переход к 10-му этапу. Если нет, то к следующему этапу.

6. Определяется возможность коррекции исходных требований технического задания с учетом полученных данных об понятиях-прототипах и возможностях их доработки. Если коррекция возможна, она осуществляется, и процесс разработки понятия или систем понятий повторяется с первого этапа. В противном случае коррекция невозможна, осуществляется переход к 7-му этапу.

Следует подчеркнуть, что с 7-го этапа фактически осуществляется разработка принципиально нового разработки понятия или системы понятий. При этом проделанная работа на первых шести этапах разработки позволяет разработчику вполне обоснованно переходить к созданию новых образцов понятия или системы понятий, так как исчерпаны все возможности по использованию существующих прототипов.

7. Принимаются принципиальные решения о реализации понятия или системы понятий, строится математическая модель понятия, отражающая протекающие процессы и явления в разработанном образце понятия. Модель может быть задана разработчиком, например, в виде условной схемы или аналитического выражения на экране дисплея или получена с помощью ЭВМ в диалоговом режиме.

8. Производится построение или выбор математического аппарата по анализу принятых решений.
9. Осуществляется анализ принятых решений по разработке новых понятий или систем понятий. Если они имеют характеристики, близкие к требуемым, то переходят к 10-му этапу.
10. Проводится оптимизация полученных решений по сформированным функциям качества. Если в ходе оптимизации найдены решения, обеспечивающие наилучшим образом выполнение требований технического задания и дополнительных рекомендаций, то осуществляется переход к 11-му этапу, если нет — к 7-му этапу.
11. Проводится профессиональная проработка отобранных решений, окончательный выбор вариантов реализации понятия или системы понятий, выпускается документация на разработанное понятие или систему понятий.

Методическое обеспечение является ключом для понимания, назначения и взаимосвязи всех других компонентов АСНРП (информационного, математического, программного обеспечения и т. д.).

Информационное обеспечение. Оно включает в себя совокупность сведений, необходимых для поддерживания процесса автоматизированной разработки понятий или систем понятий. Разработка информационного обеспечения (ИО) обусловлена решением задач, связанных с организацией хранения, поиска, обеспечения защиты информации, санкционированности доступа, удобства и своевременности представления необходимых сведений пользователям системы и т. д. ИО включает средства для описания и накопления входной, выходной и промежуточной информации, необходимой для разработки. К средствам описания различных видов информации относятся архивы, библиотеки, банки и базы данных.

Информационное обеспечение включает также традиционные средства формирования и обновления информационных массивов, алгоритмы оптимального размещения и поиска информации. Кроме того, средства информационного обеспечения АСНРП должны осуществлять:

- прием запросов как от операторов-разработчикоа, так и от подсистем к программам АСНРП;
- обработку запросов и выдачу результатов поиска непосредственному источнику запроса в требуемой для него форме;
- хранение и работу с информацией, представляющей результат всех стадий как ручных, так и автоматизированных процессов принятия решений;
- реализацию принципа доступности системы, т. е. возможность формирования и приема запроса на рабочем месте разработчика;

- оперирование информацией, определяемой как путем указания на нее, так и по смысловому запросу; быстрое внесение изменений и корректировку информации, а также доведение этих сведений до пользователя;
- проверку корректности вводимой информации и гарантию правильности хранимой и выдаваемой информации;
- получение копий требуемых документов в буквенно-цифровой и графической формах и т. п.

Сформулированные задачи обработки информации в АСНРП делают еще более актуальными вопросы широкого использования в составе ИО систем управления базами данных (СУБД).

Под СУБД понимается специальная программная система, поддерживающая структуры и взаимосвязи данных как на логическом (уровне описания данных), так и на физическом уровнях (уровне хранения данных в ЭВМ).

Характерной чертой СУБД является их ориентация не на конкретные приложения, а на поддержание принятых структур данных. Это позволяет хранить в одной базе данных самую разнообразную информацию, характеризующую разрабатываемый объект с различных точек зрения.

Таким образом, информационный комплекс АСНРП в качестве основных элементов включает в себя базы данных и их системы управления.

Лингвистическое обеспечение. Это сокупность лингвистических средств, включающих в свой состав системы понятий и языки разработки, с помощью которых осуществляется взаимодействие разработчика с системой. Понятия и определения, используемые в АСНРП, оговариваются в соответствующих документах (руководящих материалах, нормалях, стандартах), что необходимо для однозначного понимания специалистами различных аспектов разработки понятий и систем понятий.

Особое положение в лингвистическом обеспечении занимают языки программирования, одни из которых обеспечивают общение разработчика с ЭВМ, а другие служат для описания алгоритмов обработки информации в ЭВМ. Существующие языки программирования можно разделить на три класса: машинно-ориентированные, процедурно-ориентированные и проблемно-ориентированные.

Программирование на машинно-ориентированных языках требует знаний не только сущности задачи и алгоритма ее решения, но и структуры, технических особенностей ЭВМ, способов программирования на ней. Типичным представителем машинно-ориентированных языков является язык ассемблер. Как правило, эти языки используются при написании программ, например, операционных систем. Использование машинно-зависимых языков позволяет делать программы более компактными и быстродействующими. Однако программирование с помощью этих языков является наиболее трудоемким.

Появление процедурно-ориентированных языков в значительной степени упростило процесс программирования за счет включаемых
и эти языки специальных средств описания процессов решения различных классов задач. Представление алгоритма на языке данного класса заключается в описании алгоритма в виде последовательности процедурных шагов, детализирующих вычислительный процесс. К наиболее широко используемым процедурно-ориентированным языкам относятся Паскаль, Ада, Си и др.

Процедурно-ориентированные языки важны для АСНРП, так как решают задачу совместимости программ для различных типов машин, облегчают взаимодействие человека с ЭВМ, упрощают процессы написания, отладки программ и обучения программированию.

Проблемно-ориентированные языки характеризуются наличием непроцедурных средств, указывающих в основном на то, что должно быть сделано алгоритмом, а не как, т. е. языки отражают сущность, а не способ реализации вычислительного процесса.

В программе формулируются соотношения, а не последовательность вычислений, и, таким образом, программист освобождается от обязанности разрабатывать шаги алгоритмов и определять их порядок.

К проблемно-ориентированным языкам можно отнести язык Пролог, которым интересуются специалисты по разработке искусственного интеллекта. В Прологе не пишут формул, вместо этого определяют соотношения между объектами и величинами. Язык состоит только из описания и не имеет инструкций.

К лингвистическим средствам АСНРП можно отнести также языки запросов к базе данных, манипулирования данными и описания данных. Характер этих языков определяется системой управления базой данных, используемой в АСНРП.

Большое внимание уделяется разработке взаимодействия разработчиков с ЭВМ на естественном профессиональном языке. Предполагается, что АСНРП должна располагать знаниям, необходимыми для разработки понятий и систем понятий, процедурами обработки знаний, методами выполнения процедур разработки понятий и систем понятий, и разработчик может обращаться к ЭВМ на естественном языке, инициировать к действию соответствующие программы и алгоритмы, облегчающие ему процесс разработки понятий и систем понятий.

Математическое обеспечение. Такое обеспечение представляет собой математические методы, модели и алгоритмы, на основе которых осуществляется процесс автоматизированной разработки понятий и систем понятий. Для правильного понимания роли и назначения этого вида обеспечения в АСНРП рассмотрим проблемы, возникающие в ходе разработки понятий и систем понятий. На этапах разработки понятий и систем понятий осуществляются выработка концепций и просмотр общих схемных решений, поиск оптимальных параметров, сравнение альтернативных вариантов. Проработки, выполненные на этих этапах, оказывают решающее влияние на качественные и количественные характеристики разработыных понятий и систем понятий. Как уже отмечалось, эти этапы характеризуются сложностью формализации задач разработки понятий и систем понятий, необходимостью учета большого количества разнообразных требований, критериев и ограничений.

Поэтому для выработки обоснованных решений необходимо в максимальной степени использовать математические модели понятий и систем понятий, а также модели процесса их разработки. Степень обоснованности выбранных решений повышается за счет точности описания протекающих процессов и явлений в объекте разработки, а также оптимизации принимаемых решений на базе разрабатываемого математического аппарата.

Таким образом, разработка математического обеспечения АСНРП является одним из самых ответственных этапов в построении АСНРП, на котором закладываются точность и достоверность принимаемых решений, а значит и качество и эффективность работы всей АСНРП в целом.

В АСНРП используется множество математических моделей и методов, охватывающих практически все разделы математики.

Математические методы в АСНРП можно условно разбить на следующие группы: имитационного моделирования; логического синтеза; оптимизации; синтеза геометрических и чертежно-графических моделей объекта.

Методы имитационного моделирования используются для создания имитационных моделей разрабатываемых понятий и систем понятий и экспериментирования с ними в условиях реальных ограничений, а также для оценки соответствия разрабатываемых понятий и систем понятий предъявляемым к ним требованиям и условиям функционирования.

Методы логического синтеза предназначены для синтеза разрабатываемых понятий и систем понятий на основе формального описания их функционирования, так называемого сквозного логического синтеза, начиная от ввода в ЭВМ формализованного задания на разработку понятий и систем понятий до выдачи ЭВМ структуры понятий и систем понятий с учетом заданных ограничений.

Методы оптимизации позволяют разработчику на любом этапе разработки понятий и систем понятий провести оптимизацию значений параметров в целом по формируемым функциям качества. Для этого в системе должны быть предусмотрены возможности:

- назначения параметров оптимизации;
- формирования функций качества, которые позволили бы количественно оценить рассматриваемые решения;
- формирования ограничений, выделяющих в пространстве множество возможных состояний системы области, которые соответствуют требованиям технического задания, дополнительным рекомендациям;
- выбора методов поиска экстремума функции качества в зависимости от количества параметров оптимизации, количества и вычислительной сложности ограничений, а также от характера и трудоемкости вычисления функции качества;
- выбора исходной точки поиска, которая может быть определена волевым решением или с помощью вычислительных процедур.

Формализация процесса разработки понятий и систем понятий требует разработки математических моделей разрабатываемых понятий и систем понятий.

Эффективность математического обеспечения АСНРП во многом определяется достигнутым уровнем единства физических и математических принципов, применяемых для разработки моделей, а также возможностями приспосабливаемости имеющихся в АСНРП моделей к решению конкретных задач на всех этапах разработки понятий и систем понятий.

Программное обеспечение. Представляет собой совокупность программ, обеспечивающих реализацию функций АСНРП. Анализ задач и особенностей автоматизированной разработки понятий и систем понятий показывает, что программное обеспечение АСНРП должно обеспечивать выполнение следующих основных функций:

- пользовательских, с помощью которых непосредственно прово- дится автоматизированную разработку понятий и систем понятий;
- обеспечивающих, с помощью которых осуществляются структурное и функциональное объединение системы, ее работоспособность и развитие. С учетом задач и функций, выполняемых различными компонентами ПО (рис. 2), его можно разделить на две группы: системное (общее) и специальное (прикладное).

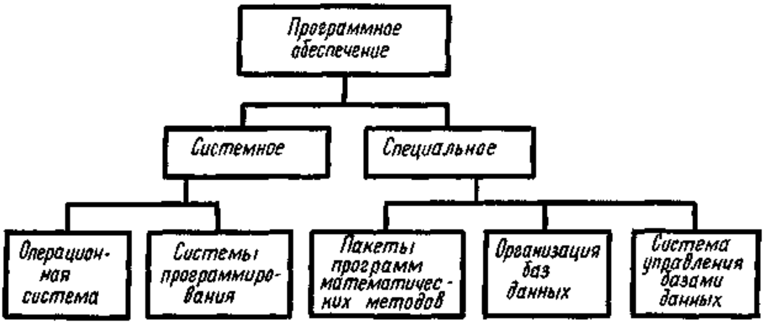


Рис. 2. Структурная схема программного обеспечения АСНРП

К системному программному обеспечению относятся системы программирования (трансляторы, редакторы, стандартные программы) и программы операционной системы, включающие управляющие программы, которые выполняют планирование использования ресурсов и координацию работы отдельных устройств, входящих в состав вычислительной системы АСНРП.

Операционная система (ОС) — это программный комплекс, разработанный специально для управления ресурсами ЭВМ, автоматизации разработки прикладных программ и управления процессом их выполнения.

Существуют три основных типа ОС: мультипрограммирования, с разделением времени и реального времени.

Мультипрограммирование — это способ организации работы вычислительной системы, который позволяет нескольким заданиям совместно использовать ее ресурсы. Задание на обработку данных передается ОС из пакета заданий в порядке очереди с учетом присвоенного ему приоритета.

Особенностью мультипрограммирования является то, что после того, как какое-либо задание начинает выполняться, оно полностью занимает ЭВМ до тех пор, пока не будет выполнено, либо не будет вынуждено остановиться по какой-то причине. Такой режим использования ЭВМ, называемый обычно пакетным, позволяет максимально загружать машину, однако естественно создает трудности в организации единого разветвленного вычислительного процесса, когда в системе должно выполняться несколько заданий.

В ОС с разделением времени все задания выполняются одновременно путем циклического выделения ресурсов машины каждому из заданий.

Поскольку этот процесс происходит весьма быстро, у пользователей создается иллюзия их одновременного обслуживания.

В тех случаях, когда обработка данных должна проводиться в реальном масштабе времени прохождения какого-либо процесса, применяются ОС реального времени.

Специальное программное обеспечение (СПО) предназначено для решения конкретных задач на всех этапах разработки понятий и систем понятий. В основе прикладных программ лежат конкретные методы научных дисциплин, используемых в ходе разработки понятий и систем понятий, а также методы вычислительной математики и программирования. Состав СПО всегда индивидуален и зависит от объекта разработки, специфики и объема задач, решаемых конкретной АСНРП.

Разработка прикладных программ проводится на основе математического обеспечения и является одной из наиболее трудоемких и ответственных задач при создании АСНРП.

В результате разработки ПО, входящего в АСНРП, должна быть оформлена документация, необходимая для разработки, составления и сопровождения программ. Такие документы носят название программных документов. В их состав в соответствии состандартом «Виды программ и программных документов» входят:

- спецификация — состав программ и документация на них;
- текст программ — запись программ на некотором языке программирования с необходимыми комментариями;
- описание программ — сведения о логической структуре и функционировании программ;
- программа и методика испытаний — требования, поэтапная проверка при испытании программ, а также порядок и методы их контроля;
- техническое задание — назначение и область применения программы, технические, технико-экономические и специальные требования, предъявляемые к программе, необходимые стадии и сроки разработки, виды испытаний;
- пояснительная записка — схема алгоритма, общее описание алгоритма и функционирования программ, а также обоснование принятых технических и технико-экономических решений;
- эксплуатационные документы — сведения для обеспечения функционирования и эксплуатации программы.

Техническое обеспечение (ТО). Это совокупность устройств, вычислительной и организационной техники, предназначенных для выполнения автоматизированной разработки понятий и систем понятий. Это ТО представляет собой физическую интеграцию всех компонентов АСНРП в единое целое, обеспечивающее функционирование АСНРП.

В техническое обеспечение АСНРП входят универсальные ЭВМ, средства представления графической информации и дистанционной передачи данных.

Минимальный набор технических средств, позволяющий эффективно решать задачи разработки понятий и систем понятий при непосредственном участии человека, **называют базовыми конфигурациями** АСНРП**.** Базовые конфигурации АСНРП могут быть одно- и многоуровневые.

Одноуровневой базовой конфигурацией является автоматизированное рабочее место (АРМ) разработяика понятий и систем понятий.

Технические средства АРМ состоят из миниЭВМ (ноутбука) с расширенным составом периферийного оборудования.

Последовательность действий пользователя этих АРМ обусловлена спецификой задач, решаемых при разработке понятий и систем понятий, набором директив и используемых прикладных программ, а также характером требуемой конечной документации (чертежи, таблицы, графики).

Под автоматизированным рабочим местом (АРМ) будем понимать совокупность технических, программных и информационных средств АСНРП, предназначенных для автоматизации процессов по подготовке, преобразованию и редактированию текстовой и графической информации, а также операций взаимодействия человека с системой в процессе разработки понятий и систем понятий.

Использования вычислительной техники, для решения задач разработки понятий и систем понятий автоматизация деятельности по разработке понятий и систем понятий предполагает:

- приближение ЭВМ к рабочему месту разработчика;
- реализацию программ, позволяющих работать в итерационных циклах, а также просматривать варианты решений и вырабатывать концепции;
- обеспечение быстрой реакции системы на запросы человека;
- возможность прерывания работы с сохранением после созданной информации промежуточных вариантов решения;
- оснащение рабочего места разработчика привычными и удобными периферийными средствами.

Организационное обеспечение. Это обеспечение включает в себя положения, инструкции, приказы, штатные расписания и другие документы, регламентирующие организационную структуру подразделений и их взаимосвязь с комплексом средств автоматизированной разработки понятий и систем понятий.

3.5. Введение в методолгию разработки научных понятий

Что есть научное и ненаучное понятие? Как должны разрабатываться понятия? Какова роль понятия в науке? Что есть понятие «наука», «теория», «знание», «познание» «созидание», какие общенаучные понятия должны отражать их природу, методологию**?** Каково соотношение и причинная связь понятий «наука», «теория», «знание», «познание» «созидание»**?** Как должны быть связаны в эволюции все научные понятия**?** На каких общих принципах должны строиться все научные понятия**?** Должна ли быть общая методология разработки научных понятий? Постараемся вкратце ответить на эти вопросы.

Сразу заметим, что **человек мыслит только и только понятиями и познает окружающий мир и самого себя через (посредством) понятий**.

В свете глобальных проблем познания, актуальность темы очевидна. Эта тема является существенной частью **общей проблемы теории познания и созидания**. Об этом и пойдёт речь. В чём отличие **научного и ненаучного понятия**?

Все научные **понятия** отражают (отображают, образуют) какую-то статичную или изменяющуюся **объективную, общепринятую, познанную реальность, как правило, определённую в единых системах координат (эталонов) времени и пространства, в величине и размерности (природе). Например,** планета Земля, Иванов А.А, величина параметра в момент времени, изменение чего-то, число людей в театре, размер предмета, химический элемент.**... Или отражают отношения объектов, их взаимодействие** (столкновение шаров, обмен стоимостей, отображение чего-то на что-то..). Эти понятия имеют **внутреннюю определённую структуру, сравнительную характеристику, а значит <u>конкретику</u>**. Как правило, они являются общепринятыми и в какой-то степени эталонными, так как с ними можно что-то объективно сранивать. **Именно из этих понятий должна строиться любая, несущая <u>объективную информацию</u> мысль, научная теория, дискуссия, норма юридического права, другие понятия.**

Ненаучные понятия отражают не очевидную, не общепринятую, безотносительную, до конца не определённую однозначно

(непознанную) и неэталонную, не определённую в пространстве и времени, субъективную реальность (душа, совесть, полезность, бесконечность, справедливость, красота, честность, порядочность, народ, хорошо, плохо, тепло, холодно, нормально, добро, зло...). **С этими понятиями нельзя ничего сравнивать, они многозначны и неконкретны.** Из таких понятий построены стихи, гороскопы, катрены Настрадамуса, психологические тесты, речи политиков, гипнотическое воздействие, аутогенные тренировки и пр. Это существенная часть языка гуманитариев, поэтов, политиков. Они доказали свою жизнеспособность по эмоцианальному или психологическому воздействию на субъекта. Но **предел их научной применимости ограничен низкой степенью конкретики, отсутствием эталона этого понятия и сравнительной с ним характеристики (величины), отсутствие однозначной структуры, пространственно-временной и причинно-следственной определённости.** На таких понятиях "не построить ни дома, ни сарая". Они недопустимы в употреблении, когда речь идёт о вопросах, затрагивающих жизненные интересы людей и их объединений. **Они должны отсутствовать в любом способе познания и созидания (науке), в серьёзной дискуссии, в теории права (способе познания справедливости), в речи "народных избранников" и в любой речи, которая доносит мысли претендующие на общепринятую актуальную реальность, на определённость.**

Никто не спорит о важности точного формулирования понятий для науки. Любое понятие отражает реальность. Либо **субъективную либо объективную**. Следовательно, все **причинно-следственные связи**, отражающие эту реальность должны присутствовать в **структуре и эволюции (изменчивости) самих понятий**. В методологической причинно-следственной взаимосвязи **научных понятий** должна быть заложена **методология познания и созидания** и **методология изменчивости объектов, которые отождествляются их понятиями**. В **методологии познания и созидания** должна быть заложена методология взаимодействия объекта, нуждающегося в понятийном определении и лица, формулирующего (разрабатывающего) этот объект в форме **понятия**. **Если в формулировке не прослеживается структура познанной реальности, следовательно методология разаработки понятий и методология познания и созидания данной реальности отсутствует. Можно сформулировать следующий вывод: пока не определены общие, глобальные зависимости во взаимодействии, эволюции объектов и их свойств, до тех пор не будут найдены и аналогичные зависимости в эволюции и**

<u>методологии разработки понятий</u>. Пока, ни первого, ни второго в современной методологии <u>научной</u> <u>разработки</u> <u>понятий</u> не найдено. И в этом направлении требуемое движение в науке осуществляется недостаточно. Понятия научные и ненаучные перемешаны, разница между ними отсутствует. Научные понятия часто определяют через ненаучные, относительные через безотносительные. **<u>Понятийный кризис, как следствие и проявление общего кризиса развития науки, налицо</u>**. Так называемые **"научные понятия**" **<u>методологически часто не сформированы</u>**. **Причинно-следственная структура понятий не просматривается, а общие закономерности их разрабрики и изменчивости не являются общенаучными.** Не будем голословны. Например, существует ряд формулировок **понятия «наука»**. **«Научнее»** данного понятия, пожалуй, в качестве примера, придумать сложно.

Наука *- особый вид познавательной деятельности, направленной на выработку объективных, системно организованных и обоснованных знаний о мире. (Новейший философский словарь, в редакции Е.В. Хомича)*

Наука*, сфера человеческой деятельности, функцией которой является выработка и теоретическая систематизация объективных знаний о действительности;(БСЭ)*

Наука *- в социологии - социальный институт, функцией которого является производство, накопление, распространение и использование новых знаний. (Общественные науки)*

Из анализа приведенных выше формулировок можно сделать следующие выводы о сформулированной природе данного понятия, то есть, **<u>наука</u>** **-** ***это разновидность познавательной деятельности человека по производству, накоплению и систематизации объективных (достоверных, обоснованных) знаний***.

А что значит познавательная деятельность? Это собственно и есть процесс познания, процесс "производства" знаний. А что значит достоверность и обоснованность? Это, по существу, **общепринятость, эталонность знаний, определённых научными понятиями.**

Существует понятие «знание».

Знание *– это проверенный практикой результат познания действительности. (БСЭ).*

То есть, **знание - формулируется как продукт (результат) познания, продукт познавательной деятельности.** Таким образом, науку, в значительной степени, определяют через понятие «знание», а «знание», через понятие «наука». Данная обратная взаимосвязь понятий «наука» и «знание» в теории понятий называется ***тавтологией***, когда нечто определяется или доказывается тем же самым (лат. idem per idem). **Ошибочность и научная вредоносность тавтологии проясняется в отсутствии причинно-следственных обратных связей в реальных физических объектах, которые эти понятия отождествляют**. То есть, от процесса "производства" знаний, качество знаний зависит, а вот от качества "произведённых" им знаний процесс производства знаний не зависит. Отсутствует явная причинная обратимость объектов, которые выражаются понятиями. Для большей ясности, приведем ещё один пример тавтологии. Можно определить понятие ***обувного производства****, как деятельность по производству обуви,* а понятие ***обувь****, как продукт обувного производства.* Вроде обратная и прямая связь понятий есть. Но **нет тождественной обратимой причинно-следственной связи между объектами "обувь" и "обувное производство**". Ибо не зависит от качеств объекта - "обуви" причинно, процесс её производства, а вот качества обуви от производства причинно зависят. Данные понятия, в своей формулировке, не проясняют ни природу объекта познания и созидания – "производителя обуви" ни качества и природу объекта познания и созидания – "обувь". Формулировка – чистой воды *тавтология*. Для низкосортного толкового словаря может и сойдёт, но в научные понятия они явно не годятся. Кстати, во многом математика "тавтологична". Например, в математической фразе 2+3=5 и 5=2+3 нет никакой математической разницы. Но если рассматривать причинно-следственные связи процессов **объединения объектов-чисел** (2+3=5) и **разъединения числа** (5=2+3) на два числовых объекта, то смысловая разница есть. По этой причине, роль математики, как объединяющей все науки сильно преувеличена. Это сказалось, в частности, в проблемах **квантовой механики, в которой математика полностью заменила физику.**

В нашем случае, с понятиями «наука» и «знание», налицо, методологическая ошибка формулировки этих понятий. Что, естественно, не проясняет их сущность. Научная полезность от подобного формулирования – нулевая. Это не «кирпичики» познания и созидания, на которых можно надстраивать дальнейшее «здание познания и созидания» по единой методологии.

Существует ряд формулировок, которые характеризуют науку, как систематизированную совокупность знаний.

Наука *– это* ***система знаний о закономерностях*** *в развитии природы, общества и мышления и о способах планомерного воздействия на окружающий мир. (Словарь Ушакова)*

Наука *- систематическое* ***объединение и изложение объективно достоверных сведений****, принадлежащих к какой-либо области знания, в более общем смысле - объективно достоверное и систематическое знание. (Брокгауз и Ефрон)*.

Данные формулировки отождествляют науку через процесс обработки уже имеющихся сведений (знаний). То есть, "наука" это мельница, на входе которой - знания, на выходе – обработанные (переработанные) знания. Уже в данном случае просматривается какая-то урезанная методология. Но кто эти знания добыл для дальнейшей переработки? Тоже наука? Всё это не проясняет причинно-следственную суть и структуру этого общенаучного понятия.

Существует ещё одно понятие, синонимичное понятиям: познание, созидание, знание, наука, учение. Это понятие "**теория**". Если выразить значения этих понятий, через множество их признаков (подпонятий, свойств, предикатов) то эти множества в значительной степени пересекутся. **В значительной степени это синонимы.** Рассмотрим подробней понятие «теория».

Теория *(греч. theoria - наблюдение, рассмотрение, исследование, умозрение, буквально - "зрелище", "инсценировка") - высшая форма организации научного знания, дающая целостное представление о… (Философский словарь)*

Теория *- форма достоверных научных знаний: - представляющая собой множество логически увязанных между собой допущений и суждений; - дающая целостное представление о закономерностях ... (Общественные науки)*

То есть, **теория** - это *"форма организации научного знания*", это **форма познавательной деятельности, а наука -** "*особый вид познавательной деятельности (Новейший философский словарь, в редакции Е.В. Хомича)*"**.** Есле нет смысловой разницы в понятиях "форма" и "вид" следовательно, понятия "наука" и "теория" - есть синонимы.

Теория *(греч. theoria - рассматриваю, исследую), в широком смысле - комплекс взглядов, представлений, идей, направленных на истолкование и объяснение какого-либо явления; (БСЭ)*

То есть, это **познавательная деятельность**, реализуемая через комплекс формализованных представлений, взглядов.

ТЕОРИЯ *ж* **.***греч. умозренье, умозаключенье; заключенье, вывод из чего-либо, не по явленью на деле, а по выводам своим; противоположное дело, на деле, опыт, практика. (Даль)*

ТЕОРИЯ*, и, ж. [греч. theoria - исследование]. 1.Учение, являющееся отражением действительности, обобщением практики, человеческого опыта.... (Ушаков)*

Обратите внимание, сколько синонимичных, производных понятий: «наука», «теория», «знание», «учение», «методология», «методика» и др., образовано, по сути, из базового (отсутствующего) не сформированного методологически понятия «***познания***», «***познавательная деятельность***». Ибо, базовое понятие методологически не определено изначально. **Оно не является общенаучным понятием.** И не одно из производных понятий не содержит в себе общего алгоритма познания, общих правил познания или конкретику понятия «познать», определяющего "что значит «познать»?"

Таким образом, проанализировав свойства имеющихся в словарях формулировок понятий «наука», «теория», «знание», «учение», «методология», «методика», можно **выделить несколько этапов развития познавательной деятельности**:

- В процессе совместного пространственно-временного бытия субъекты (они же объекты) познают друг друга, изменяют друг друга взаимодействуя друг с другом. Наличие "памяти" объектов о взаимодействиях и способности передавать информацию (память) при очередных взаимодействиях и по наследству, обеспечивает сохранение и развитие их познавательной способности. Естественный отбор сохраняет, отбирает и развивает объекты с наибольшими познавательными способностями. На определённом этапе развития познавательной способности, начинается "познание" способов познания. **<u>Это краткая гносеология понятия познания и науки</u>.** Способность управлять событиями-взаимодействиями, а значит управлять изменениями, приводит к осознанию полезности познания и созидания. Приводит к развитию способов познания и созидания теми объектами, которые могут передавать накопленные познания и способы познания - науку. Передаются и способы изменения бытия. **Таким образом, первообразным источником появления и развития познавательной способности объектов и науки, выступает неизбежность событий - <u>взаимодействий объектов</u>, бытие которых происходит в едином для объектов <u>пространстве и времени</u>. Характеризуется любое взаимодействие <u>временем, местом, участниками</u>. В итоге, получается, что и <u>НАУЧНОЕ ПОНЯТИЕ должно быть определено во времени, пространстве и в причинно-следственной структуре его образовавшей.</u>**
- В процессе эволюции объектов, способных накапливать и передавать знания, возникает **НАУКА** - *как познавательная и созидательная деятельность наиболее развитых объектов (организмов, животных, человека) и их объединений (сообществ) по «производству» знаний об* ***объекте познания*** *(познавательная деятельность) и* ***объекте созидания*** *(созидательная деятельность) и их передаче, в том числе и по "наследию" при помощи (посредством)* ***ПОНЯТИЙ****;* (В этой части проявляется синонимичность понятия «наука» и понятия «познание». ***ПОЗНАНИЕ*** *— творческая деятельность субъекта, ориентированная на получение достоверных знаний о мире... (Новейший философский словарь, в редакции Е.В. Хомича));*

- "Орудием труда" **НАУКИ** в "производстве" знаний, выступают **идеи, гипотезы (предположения), объекты-инструментарии познания и созидания, опыты (жизненный опыт), модели, формализованные представления объектов, признаков, свойств, взаимодействий. Результатами**, итогом полученных "трудом учёных" данных, их обобщением **выступают алгоритмы, методики, теории и в конечном итоге - всё теже ПОНЯТИЯ**. (В этой части, проявляется синонимичность понятия «наука» и понятия «теория». ***Теория*** *- комплекс взглядов, представлений, идей; (БСЭ))*.
- Следующий этап развития познания и созидания и науки обеспечила необходимость повышения эффективности познавательной и созидательной деятельностей, необходимость систематизации накопленных знаний. Появилось понятие **наука о науке - как обработка полученных в процессе познания и созидания знаний, опыта, выраженного опять же *в научных ПОНЯТИЯХ, сведение их в причинно-следственные системы (закономерности, принципы, правила, методики, алгоритмы, статистические методы).*** (В этом проявляется начало уже другого этапа познания и созидания, в котором познаются закономерности, через познание базы уже полученных знаний).
- Следующий этап: **НАУКА - используется как система применения на практике полученных объективных сведений (знаний) в форме рекомендаций, моделей, опытных образцов и пр.**. (В этой части, понятие НАУКА проявляется как совокупность способов воздействия (взаимодействия) объектов науки с обществом и личностью (воздействие на образование, просвещение, экономику и пр.)). И всё это должно строится на **НАУЧНЫХ ПОНЯТИЯХ**.

Известная парадигма академика, физика, лауреата Нобелевской премии П.Л. Капицы: **"ЭКСПЕРИМЕНТ - ТЕОРИЯ - ПРАКТИКА"**, в свете общей методологии познания и созидания, выглядит так. Взаимодействие объекта познания и созидания и эталонного субъекта (научный опыт, опытное испытание) - **есть ЭКСПЕРИМЕНТ** или множество экспериментов. В опытах выясняется лишь относительная (соразмерная) опытам природа свойств и/или признаков (совокупность свойств и/или признаков) и величина параметров свойств и/или признаков познаваемого (создаваемого) объекта, относительно общепринятых эталонов этих свойств и/или признаков - опытного инструментария. В результате корректно поставленного эксперимента выясняется величина и размерность познаваемых свойств и/или признаков относительно величины и размерности эталонных свойств и/или признаков инструментария. **Образуется опытная база полученных опытных знаний**, которую следует систематизировать, связать в причинно-следственные связи. Создаётся основа для следующего **этапа познания и созидания - <u>создание теории</u>**.

К опытной базе подбирается формальный способ её причинно-следственной организации. Производится подбор и применение способов причинно-следственных связей (зависимостей) в познании и созидании, применение моделей, схем, алгоритмов, средств математики, физики, логики, статистики и др.. Это и есть **работа по созданию ТЕОРИИ ПОЗНАНИЯ И СОЗИДАНИЯ** при помощи обработки полученной опытным путём базы знаний. Итогом **ТЕОРИИ ПОЗНАНИЯ И СОЗИДАНИЯ** является **<u>получение формализованного для массового употребления на практике алгоритмов, методик.</u>** Примером такого подхода, является получение вида функциональной зависимости (закона) относительного целого от его свойств и/или признаков.

Практическая применимость теории, с целью искусственной широкомасштабной имитации эксперимента в повседневной жизни - **есть ПРАКТИКА**. В ней и проявляется состоятельность теории. К сожалению, в современной теории познания и созидания, формальная фаза теоретического осмысления подчас подбирается некорректно, так как **отсутствуют общие принципы познания и созидания и методология формирования научных понятий**.

<u>В.Л.Киссель в своей работе "Наукоучение. Общие принципы логики и методологии научного познания. Семиотика науки." Писал.</u> *"Определение, представленное без учета сущности самого определения как явления, искажает причинно-следственное бытие определяемого и определяющего в схеме логически правильного определения, и* ***ведет к тупиковым определениям, оказывающимся тормозом на пути дальнейшего развития научного познания****. Отсюда возникают такие логически противоречивые понятия как "комплексное число", "бесконечность", "масса движения", "волновая механика", "вероятностная причина" и, как следствие, "вероятностные законы микромира". Лучшей характеристикой*

логической путаницы современной теоретической науки лишенной философского основания является характеристика В.Гейзенбергом одного из моментов научного познания физической реальности, отражающая бытие естественнонаучного знания в состоянии "неопределенности"./ Опубликовано: Философские исследования. М., 2002, 2, с.114-127/

Теория подменяется подчас набором имипирических, структурно неопределённых, статистических зависимостей, подгоночных коэффициентов, а общенаучные принципы - системой постулатов. ***Наука, как и понятия, перестают быть строгими и структуризованными***. И от эксперимента переходят непосредственно к его практическому тиражированию, опуская выяснение причинно-следственной сути, что является чрезвычайно опасной тенденцией в современном высокотехнологичном и информационном обществе, использующем энергии ядерных и химических реакций, генетические способы управления изменчивостью и пр. По этой же причине, и формулировки базисных понятий теории познания и созидания: ***познание, созидание, знание, наука, теория, методологически не сформированы, не ясны в причинно-следственных связях, тавтологичны.***

Безусловным лидером в этой области стала философия, в конце концов, погрязшая в неопределённости своих понятий, так и не ставшая способом познания общих закономерностей бытия и утратившая актуальность своего предназначения. Приведем лишь один "клубок" синонимов повсеместно употребляющихся в данной "науке": *достоверность, истинность, объективность, правдивость, сущность, существо, имманентная сущность, гносеология и пр.*. **Таких клубков десятки и их не распутать без методологии разработки понятий**. И так повсеместно, в широком диапазоне общенаучных дисциплин. **Наука в целом, погрязла в бессистемно сформированных, синонимичных, переплетённых, производных, суррогатных, дублирующих друг друга понятиях.** Их тысячи, а словарей дисциплинарных, тематических, толковых - десятки. ***Вредоносность бессистемного подхода в формировании научных понятий, очевидна***. Взять, для примера, **понятие бесконечности**. Нет этого научного понятия вообще. И быть не может. Почему? Потому, что бесконечности не существует, это ненаучное, не познаваемое в сравнении понятие, имеющее лишь смутную математическую сущность, ***не имеющее реальной физической сущности (размерности, природы) и величины***. Но, нашлись «великие ученые» и применили теорию неправомочных допущений и обобщений - "обозвали" бесконечность конечным знаком - конечным понятием, создали учение о бесконечности. Закономерным итогом данного кабалистического подхода, появились математические неопределённости (деление бесконечности на ноль, бесконечности на бесконечность, понятие производной и предела, мгновенной скорости и ускорения.). **Ещё пример.** Существовало **в экономике (до 70-х годов 20 века) понятие эталона стоимости, единой общепринятой меры стоимости и понятие денежной единицы**, как денежное выражение, фактически (часть) эталона стоимости, имеющее природу эталона. Это был способ познания величины стоимости экономического объекта в сравнении с эталоном. Но ввели понятие денежный знак, товар, "оторвали" его в смысловом выражении от понятия **эталона стоимости**. Появились понятия - **деривативы** (производные финансовые инструменты - изменяющиеся стоимости), **рычажные деньги, условная стоимость нематериальных активов, фьючерсы, опционы**. **И все эти производные финансовые инструменты имеют тавтологичную связь со стоимостью и её денежным выражением**. Как развитие данного беспредела в условиях рынка, появились биржевые торги денежными единицами, как товарами и их производными инструментами. А что получилось по сути? Торгуют сегодня эталонами стоимостей в реальном масштабе времени, финансы накачали виртуальными деньгами сосчитать которые не могут до сих пор. **Приравняли реальные деньги и виртуальные. Приравнивают статичные стоимости и изменяющиеся стоимости, стоимости сегодняшние и будущие. Экономику трясёт в глубочайшем системном кризисе доверия к деньгам и стоимостям, к оценке стоимостей и способам её познания (биржам). Ещё пример.** Эвклид писал в "Началах..." "Число есть множество, сложенное из единиц». То есть, существовало **понятие математического числа**, **как отношение какой-то совокупности объектов (свойств) к своей единичной части**. Применение единичного эталона являлось теорией объективного познания величины. **Понятие числа в математике сегодня сделали абстрактным.** Никто сегодня не пытается, по большому счёту, увидеть физический смысл ни в понятии числа, ни в математических действиях над ними. Появилась возможность подменять понятие числа необоснованными расширениями. Появилась некоммутативность умножения (a*b <не равно> b*a), появились гиперкомплексные числа. Таких примеров - десятки. И эти примеры - базовые в своей узкодисциплинарной области, на которых надстраивается десятилетиями дальнейшая теория познания. **Плодится в прогрессии мусор теорий, место которому на свалке истории.**

Любая **теория, как конечная часть большого (условно бесконечного) процесса познания, базируется на начальном перечне базовых понятий и приводит, в итоге, к новому перечню научных понятий, структурно определённых методологией их образования в данной теории.** Если брать в базис теории познания и созидания, такие понятия как, например, непознаваемое понятие "бесконечность", "виртуальные деньги" и "гиперкомплексные числа", то плодится понятийный мусор, из которого вытекает муть новых лжетеорий и новых лжепонятий, вытекают кризисы их практической реализации, экономические кризисы и кризисы наук, права.

Что такое научные дисциплины: математика, физика, химия, геометрия? Формулировки из словарей приводить не будем, они, как правило, написаны узкодисциплинарными специалистами: математиками, физиками, химиками, не старающимися определить место наук в общей методологии познания и созидания. Фактически, это **способы познания и созидания реальных объектов мироздания и их изменчивости, при помощи формального представления этих объектов как совокупностей физических, математических, химических, биологических, исторических, геометрических свойств и/илипризнаков, в их сравнении с некоими общепринятыми эталонами!**

Из-за отсутствия единого подхода к разработке научных понятий "выплывают" явные проблемы в **формулировках понятий наук: математики, химии, физики и всех остальных.** Отсюда их классификация на "гуманитарные" и "технические", на "точные " и "неточные", **не по их способам познания** (способы должны быть универсальны), **а по типу объектов познания**, фигурирующих в данных науках. Их классифицируют по научным и ненаучным понятиям в данных науках употребляющихся. Общество справедливо начало делить по данному принципу и людей. Появились "гуманитарии" и "технари". Эти типы людей, как правило, распознаются, практически, безошибочно по манере изложения своих мыслей. **Только по-настоящему образованных и универсальных учёных и специалистов скоро не останется при таком подходе!** А вспомните великих мыслителей прошлого? Это были универсальные учёные, мыслители-философы замечательно знавшие имеющиеся в их время способы познания: механику, математику, геометрию (Платон, Зенон, Архимед, Пифагор, Аристотель, Птолемей, Галилей, Декарт, Ньютон, Гук, Юм, Ломаносов, Эйлер, Лагранж, Лаплас....). ***Вся история развития науки и эволюция мыслителей - это утрата универсальности, вследствии разрастания базы познания и созидания и отсутствия её глубокой методологической систематизации. Это следствия отсутствия общей методологии познания и созидания, отсутствие универсальной модели познания и созидания, основанной на самых общих принципах.*** Настало время создавать единую теорию познания и созидания (методологию познания и созидания), начало которой положил А.Кононюк.

Назрела необходимость реализации нового этапа развития науки - этапа построения новой парадигмы развития науки как (в виде) Замкнутой Развивающейся Панмедийной Системы Наук (ЗРМПСН). Опытной базы для этого уже предостаточно. Необходима систематизация и обобщение опытных данных, создание понятийной базы данной теории, по единой методологии разработки научных понятий.

3.6. Принципы построения Замкнутой Развивающейся Панмедийной Системы Наук (ЗРПМСН).

Все **науки это формальные процессы объективного познания и созидания** вырабатывающие практические знания. Отсюда можно предложить формулировки их понятий. Примеры формулировок понятий некоторых научных дисциплин приведены ниже:

Математика - процесс познания объектов мироздания, которые выражаются через совокупность математических свойств (числовая характеристика - число, причинно-следственная зависимость - функция и пр.).

Геометрия - процесс познания объектов мироздания, которые выражаются через совокупность геометрических свойств (геометрическая точка, отрезок, плоскость, трехмерное пространство, площадь, объем, плоский объект, пространственный объект и пр.).

Физика - процесс познания объектов мироздания, в их причинно-следственнорй связи, которые выражаются через совокупность физико-математических свойств (физико-математическая точка, обладающая размерностью (например массой) в момент времени и имеющая координату (сила; скорость; энергия; мощность, инерция и пр.).

История человедчества - процесс познания объектов человечества определённой природы: личностей, народностей, наций, государств и пр.) и совокупность их исторических свойств (культура, экономика, политика, государственность, право и пр.) в их взаимодействии и эволюции, на определённом временном (историческом) интервале.

Обобщим и систематизируем всё вышесказанное.

Конечное познание и созидание объекта *(познание, созидание, знание, определение)* - **есть взаимодействие объекта и субъекта познания и созидания. Предлагается опираться на <u>три базовых этапа</u> становления и развития теории познании и созидании:**

- определение посредством процессов познания и созидания, их относительных сравнительных характеристик (величин), их свойств, в сравнении (во взаимодействии) с ранее познанными и созданными объектами (свойствами, признаками, понятиями, знаниями, опытным инструментарием);

- определение её причинно-следственной зависимости (размерности) объекта познания и созидания, от ранее познанных свойств (признаков, понятий, знаний), построение теории;

- разработка научноопределенного понятия - нового знания с целью практического использования в теории познания и созидания.

Процессы познания и созидания (науки, теории, научное познание и созидание, инструментарий познания и созидания, эксперимент) - совокупность формальных способов и правил, методик, алгоритмов, экспериментов, опытов, выясняющих размерность и величину (природу, изменчивость, функцию) объекта определённой природы. Процессы познания и созидания выясняют и зависимость относительного целого от его свойств (признаков).

Таким образом, из данных понятий выясняется, что **любая теория, это промежуточный, формальный этап, часть любого познавательного и созидательного процессов. Теория представляет собой формализацию объективных причинно-следственных зависимостей (реальностей) в виде: процессов правил, формул, моделей, алгоритмов, принципов, представлений, взглядов, ощущений.** Начинается каждый этап с **перечня базовых понятий познаваемых и созидаемых объектов и их свойств и/илипризнаков**, **а завершается перечнем вновь разработанных**, **базовых для следующего этапа развития познания и созидания понятий**. **Эксперимент, теория, практика имеют общую цель - реализация и применение познавательной и созидательной деятельности - получение и использование знаний (познаний, созиданий, понятий).**

Познание и созидание - результат взаимодействия объектов природы и их свойств.

Научное познание и созидание - познание при помощи средств науки (методов, принципов, процессов, теорий).

Выход из глобального понятийного кризиса видится в:

- **формировании единых общенаучных принципов познания окружающего мира и созидания в нем;**
- **выработки новой парадигмы развития науки на базе единных (триединства): идеологии познания и созидания, методологии познания и созидания и организации науки (вместе с кадровым обеспечением);**
- **методологии формирования (разработки) научно-разрабатываемых понятий;**
- **создание единной системы научно-разарботанных понятий - множества эталонных научных понятий,**

созданной на основе единой методологии и по единым принципам (стандартам).

- **создание системы стандартов - «Единая система научной разработки понятий (ЕСНРП)».**

Это будет настоящим прорывом как в области развития Науки, так и области подготовки научных кадров. Общенаучные понятия будут причинно связанными друг с другом и разграничены в конечных совокупностях своих предикатов. Это станет началом глубоких системных преобразований в Науке, а затем и во всех областях жизнедеятельности людей (экономике, политике, общественной жизни). Результатом реализации данного подхода, станет новая научная и общественная образовательная среда, в которой все люди будут находиться в инерциальных системах познания и созидания. И все понятия будут иметь относительно разных людей одинаковый смысл. Фактически будет создан **ЯЗЫК ОБЩЕНАУЧНОГО ОБЩЕНИЯ.**

Язык общенаучного общения должен начинаться, видимо, с понятия «сущность».

Сущность – собирательное понятие, представляющее собой любой различимый объект (объект, который мы можем отличить от другого). Сущностями могут быть люди, места, самолеты, рейсы, вкус, цвет и т.д. Необходимо различать такие понятия, как **тип сущности и экземпляр сущности**. Понятие "тип сущности" относится к набору однородных личностей, предметов, событий или идей, выступающих как целое. Экземпляр сущности относится к конкретной вещи в наборе.

Теоретическая основа (теория) рассмотенного подхода реализована А. Кононюком в созданной им Замкнутой Развивающейся Панмедийной Системе Наук (ЗРПМСН) - универсальном научным средством познания мироздания и созидания в нем, основанном на единной методологии разработки понятий и идеолого-методолгических принципах объективного познания окружающего мира и созидания в этом мире (рис. 1).

Стуктурное единство парадигмы развития науки обеспечивается с помощью компонетнов ЗРПМСН, которые представляют собой совокупность идеологического, методологического и организационного обеспечений (рис. 2)

Рис. 2

Идеология науки - социально-ценностные представления науки о самой себе, своих возможностях, целях, предназначении, функциях и роли в обществе.

Идеология науки имеет исторический характер, меняется вместе с развитием общества и является неодинаковой для различных культурно-исторических типов науки (например, наука по-разному понимала свои задачи, возможности и предназначение на Древнем Востоке, в античную эпоху, в Средние века, в Новое время, в эпоху Просвещения и в наше время).

Стуктурное единство идеологического обеспечения обеспечивается с помощью компонетнов системы иделогии науки, которые представляют собой совокупность наук (рис. 3):

- концептуальные положения создания парадигмы развития наук;
- общая теория понятий;
- общая теория познания и созидания.

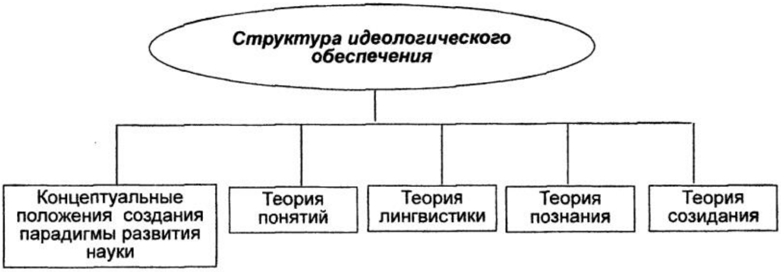


Рис. 3

На рис 4 представлена укрупненная структура общей теории понятий

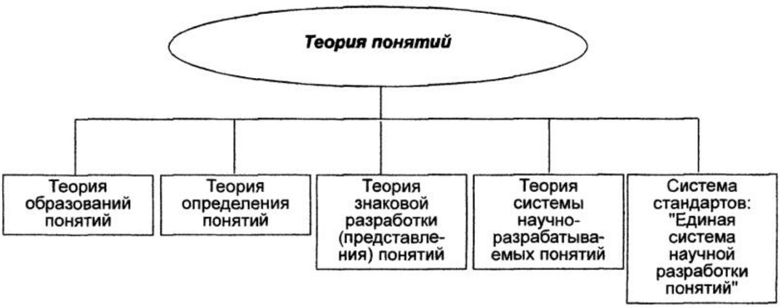


Рис. 4

Методология науки, в традиционном понимании, — это учение о методах и процедурах научной деятельности, а также раздел общей теории познания, в особенности теории научного познания (эпистемологии) и философии науки.

Методология, в прикладном смысле, — это система (комплекс, взаимосвязанная совокупность) принципов и подходов исследовательской деятельности, на которые опирается исследователь (учёный) в ходе получения и разработки знаний в рамках конкретной дисциплины — физики, химии, биологии и других научных дисциплин.

Основная задача методологии науки заключается в обеспечении эвристической формы познания системой строго выверенных и прошедших апробацию принципов, методов, правил и норм. В частности, для достижения успеха в исследовательской деятельности (например, в области правоведения) учёный должен овладеть «секретом» метода и обладать эвристической технологией научного мышления. Овладеть существующей методологией необходимо, потому что далеко не каждый исследователь может создать собственную, оригинальную методологию научного исследования, у которой нашлось бы достаточно последователей, чтобы он мог заявить с полным на то основанием о создании собственной научной школы. Поэтому Кононюком А.Е. предпринята попытка создать собственную, оригинальную методологию развития наук, которая представлена в составе структуры предложенной Кононюком А.Е. замкнутой развивающейся панмедийной системы наук группами наук.

Методологию фундаментальных наук представляют научные дисциплины II группы наук замкнутой развивающейся панмедийной системы наук.

Методологию прикладных наук представляют научные дисциплины III группы наук замкнутой развивающейся панмедийной системы наук.

Методологию общедисциплинарных наук представляют научные дисциплины IV группы наук замкнутой развивающейся панмедийной системы наук.

При выполнении дальнейших исследований в области теории понятий нам понадобится ряд понятий из области теории познания и созидания. Рассмотрим некоторые базовые понятия теории познания и созидания.

Познание и созидание - процесс событий (взаимодействий объекта и субъекта). В результате взаимодействия объекта и субъекта, объект познается и/или создается субъектом.

Процесс познания и созидания – совокупность конечных **этапов познания и созидания,** взаимодействия (изменения) относительных объектов (сущностей) и их свойств.

Этап познания и созидания объекта – применение различных способов познания и созидания (наук) взаимодействия объекта и субъекта, в результате которого, в сравнении, происходит определение его относительной сравнительной характеристики (величины) и её причинно-следственной зависимости (размерности); происходит формулирование понятия объекта, как результата взаимодействия. (У объектов «не людей» формулирование есть отображение. Так, дерево, познавшее удар молнии, через своё изменение, «формулирует» понятие «удар молнии» через ожёг ствола. Ожёг – это субъективное определение деревом свойств молнии при их взаимодействии.)

Этап познания и созидания свойства – определение во времени и пространстве его величины и природы (размерности), формулирование понятия свойства.

Относительное свойство объекта (параметр) – есть характеристика познанной в сравнительной величине, в причинно-следственной зависимости (природе, размерности) и понятии часть природы объекта (мироздания).

Событие–взаимодействие. Под элементарным единичным событием-взаимодействием следует понимать пространственно-временной контакт двух объектов - носителей двух соразмерных свойств одной природы. В результате элементарного события-взаимодействия соразмерные свойства двух объектов претерпевают относительные изменения (познают друг друга) линейно, одновременно и одноместно, а система взаимодействия, на время до другого взаимодействия по данному свойству, относительно взаимодействующих в событии объектов, считается изолированной (замкнутой). Способ объективного познания события - применение единого для объектов свойственного эталона, единой системы координат и отсчёта времени. Применение (введение) в естествознание понятия события-взаимодействия, имеющего размерность (природу) являет собой источник (причину) абсолютного соразмерного изменения для двух взаимодействующих в одном событии объектов (свойств) в цепи причинно-следственных связей. Тогда как, понятие изменения является относительным явлением и не может корректно рассматриваться в качестве однозначной причины.

3.7. Система научно-разрабатываемых понятий (СНРП)

Разработка и развитие системы научно-разрабатываемых понятий (СНРП) зависит от четкой организации и координации проводимых исследований и использования их результатов в области научной разработки понятий. Необходимым условием для выработки обоснованных планов и мероприятий по совершенствованию и развитию системы СНРП является наличие классификационного описания ее структуры. С этой целью автор настоящей работы, используя принцип последовательного раскрытия структуры, применяемый при рассмотрении сложных систем, установил семь подсистем (уровней), последовательно раскрывающих и дополняющих структуру системы СНРП (рис. 5): библиотека, каталог, альбом, раздел, модуль, блок, карта. Примером создания системы понятий может служить обобщенная целостная развивающаяся система объектно–свойственных научных понятий (ОЦРСОСНП), реализованная в системе научно-разрабатываемых понятий (СНРП).

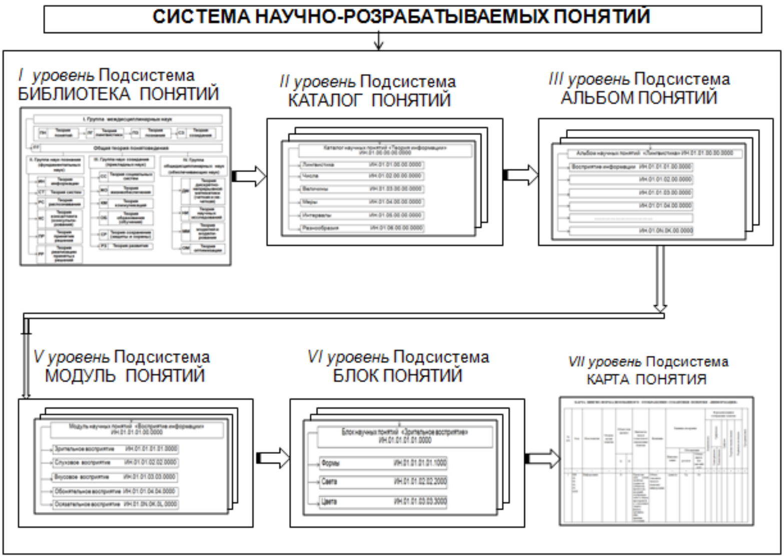


Рис. 5. Структура системы научно-разрабатываемых понятий (СНРП)

Все понятия разрабртанные в данной системе, в принципе, не противоречат имеющим место быть понятиями, и наведут системный порядок, уточнят их, «впишут» отдельные понятия в систему понятий, связанных причинно-следственно единой методологией их формирования (одно понятие станет развитием (изменением) другого понятия). Отфильтруются лжепонятия и многочисленные синонимы, а затем и лжетеории на них основанные. То есть, образуется вместе с методологией познания и созидания, система разработки научных понятий, в которой, на каждом этапе познания и созидания, есть базовые относительно первообразные для данного этапа понятия и производные понятия, образованные как изменения подпонятий (предикатов) данного понятия. Первообразными понятиями для них являются понятия **объекта, свойства, события-взаимодействия свойств**.

В ней прослеживается систематизация теории познания и созидания и смысловое присутствие методологически разработанных (частично) понятий современной теории познания и созидания: **индукция** (фактически - отображение взаимодействия (свойств одного объекта на свойства другугого)), **дедукция** (фактически - причинно-следственный подход к познанию и созиданию объекта), **анализ** (фактически - рассмотрение объекта как совокупности его свойств), **синтез** (фактически - рассматрение объекта как единого целого и причинно-следственной зависимости относительного целого от его свойств).

Научное понятие – по причинной сути, есть результат взаимодействия познаваемого (создаваемого) объекта и познающего (создающего) субъекта, в результате которого, познаваемый (создаваемый) объект представляется как характеристическое свойство объекта познания (созидания) (объекта, свойства или взаимодействия, причинной связи, отношения). Отсюда, понятие, по своей структуре, есть общее название относительной совокупности его конечных свойств (признаков, предикатов). Понятие объединяет в относительное целое некую конечную совокупность свойств различной природы (подпонятий, предикатов), от которых данное понятие зависит причинно в величине и природе (размерности). Понятие входя в структуру другого понятия, является просто его свойством (подпонятием, предикатом). То есть, одно и тоже понятие может характеризовать как объект – относительное целое, так и свойство другого объекта. Употребление структурно сформулированных научных понятий в процессе познания и созидания, есть важнейший способ познания и созидания изменчивости объектов и их понятий, часть общей методологии познания и созидания.

научный метод (от греч. methodos) — это упорядоченный способ познания, исследования явлений природы и общественной жизни, приводящий к истине

теория (от греч. theoria наблюдение, исследование) — это сложное многоаспектное явление, которое включает:

обобщение опыта, общественной практики, отражающее объективные закономерности развития природы и общества

совокупность обобщенных положений, образующих какую-либо науку или ее раздел

гипотеза (от греч. hypothesis основание, предположение) — это:

- научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте, а также теоретического обоснования для того, чтобы стать достоверной научной теорией

наблюдение — это в общем и целом целенаправленное восприятие, обусловленное задачей деятельности, а в частности в науке — восприятие информации на приборах, обладающее признаками объективности и контролируемости за счет повторного наблюдения, либо применения иных методов исследования (например, эксперимента)

эксперимент (от лат. experimentum — проба, опыт) — это поставленный опыт, изучение явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явления и многократно воспроизводить его при повторении этих условий

Способ объективного (достоверного) познания (созидания) события-взаимодействия - применение единой системы отсчёта координаты и единой системы отсчёта времени, применение единого свойственного эталона сравнения.

После события–взаимодействия по данному свойству и до начала следующего события, свойство не изменяется (сохраняет неизменной величину параметра) и объект обладает по данному свойству **относительной инерцией - I**. Отсюда, **природа (размерность) и энергии и инерции одинаковы**. И инерция и энергия **имеют причинно-следственную связь с** событиями-взаимодействиями – причиной их появления. (Понятие инерции, энергии являются общенаучными, ибо присущи свойству любой природы и размерности, являются результатом события-взаимодействия и изменения).

Инерция - есть энергия элементарного относительного изменения данного свойства (равно как и энергия, затраченная на элементарное относительное изменение данного свойства). **Инерция**, сообщённая абстрактному свойству, *i*-м событием-взаимодействием есть **энергия изменения** свойства, которая имела какое-то время неизменности до следующего события-взаимодействия по свойству определённой природы (размерности).

Энергия изменения (энергия) – есть величина изменения свойства объекта, соотнесённая с временем (продолжительностью) данного изменения. **Из понятия энергии и инерции следует, что энергия есть сумма инерций**.

Движение объекта (изменение состояния (положения) объекта) – результат событий-взаимодействий свойств данного объекта с соразмерными свойствами других объектов.

Общее уравнение взаимодействия – есть физико-математическая запись (способ познания) элементарного события-взаимодействия объекта А, имеющего свойство a_1 и объекта В, имеющего соразмерное свойству a_1, свойство b_1.

$a_1 + b_1 = b_2 + a_2$ Поскольку, $a_2 = a_1 + \Delta a_1$, $b_2 = b_1 + \Delta b_1$, то имеется два решения этого уравнения: $\Delta a_1 = -\Delta b_1$ и $\Delta b_1 = -\Delta a_1$. В результате элементарного события-взаимодействия, соразмерные свойства **обмениваются своими относительными изменениями**. Общенаучное толкование данного уравнения глобально. От общего волнового уравнения, законов сохранения, третьего закона Ньютона, закона Гука, обмена стоимостей в теории стоимостей, до поговорки на бытовом уровне: «С кем поведёшься, от того и наберёшься». По анализу следствий из данного уравнения, вытекают глобальные принципы познания.

Из уравнивания сторон уравнения (знаком тождества) выясняется, как бы, его полная обратимость (ложная обратимость). В математике, это происходит повсеместно (действия над числами, разложения функций в ряды и пр.). Широта применимости данного уравнения ограничена его тавтологичностью, то есть, причинно-следственной необратимостью сторон данного уравнения и не учётом временных свойств.

Способы и принципы познания и созидания – совокупность общих общенаучных правил, определяющих корректность применения способов познания и созидания в той или иной области познания и созидания объектов определённой природы (принцип применимости теории).

Относительность - есть основной способ познания и созидания, выражающийся в сравнительном (относительном) подходе к познанию и созидания любого свойства (объекта). Это способ, определяющий объективность либо субъективность познания и созидания, способ определения сравнительной величины, способ соразмерного сравнительного подхода в познании и созидания совокупности свойств объекта - его размерности, способ подхода к взаимодействию и способ определения причины и следствия изменения.

Вытекает принцип, из уравнения взаимодействия, ибо величины свойств относительны либо объективному эталону (общему знаменателю, способу сравнения с эталоном), либо друг другу.

Принцип применения эталона в качестве объективного критерия относительного познания и созидания позволяет любое познанное свойство (объект) любой природы выразить математически в **объективной величине относительно единичного эталона**.

Вытекает из уравнения взаимодействия, ибо величины свойств в уравнении, для корректности его решения, должны быть приведены к общему знаменателю - эталону.

Эталон - есть не изменяемая и не изменяющая при взаимодействии с ним единичная величина соразмерных (одной природы) свойств (объектов). Есть всеобще признанный, принимаемый формально, сравнительный свойственный критерий величины, основанный на осознанной необходимости объективного познания и созидания в сравнении с ним и следовательно на всеобщем согласии его применения. От взаимодействия с эталоном величина познаваемого свойства причинно-следственно не зависит. Эталон, есть единичный инструмент познания и созидания, носитель размерности (природы) свойства или объекта и критерий объективности познания величины.

Вытекает из уравнения взаимодействия, ибо применение единого эталона есть способ объективного познания и созидания в сравнении с общим для двух свойств, критерием (знаменателем).

Принцип субъективного (ложного) познания – величина и природа познаваемого объекта (свойства) причинно-следственно зависит от способа познания этой величины. Любой объект, имеет различные свойства, относительно субъектов, имеющих различные свойства относительно друг друга.

Вытекает из уравнения взаимодействия, ибо величины свойств будут иметь различную величину, если они приведены относительно различных по величине свойств (субъективных эталонов).

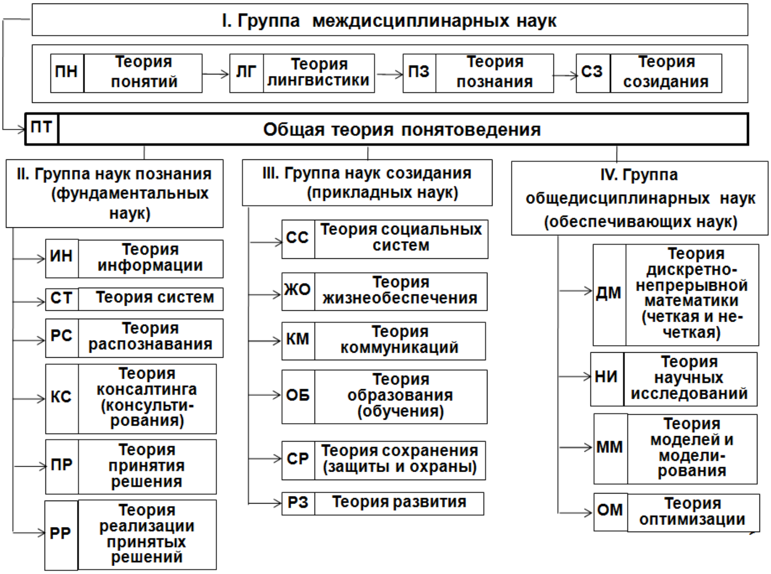
Принцип объективного (истинного, достоверного) познания или принцип независимости объекта познания и созидания от способа его познания и созидания основан на том, что величина любого свойства любого объекта в данный момент времени, есть продукт предшествующего познанию величины изменения (причины). Принцип выражается в том, что величина свойства, величина изменения свойства, по своей причинно-следственной сути, **не зависит ни от относительной начальной величины свойства в момент времени t, ни от конечной его величины, ни от способа объективного познания величины этого свойства и величины изменения, выражением которого является применение формального сравнительного эталона** (способа познания), а **зависит только от свойств событий-взаимодействий, изменивших причинно величину познаваемого свойства**.

Вытекает из уравнения взаимодействия. Величины изменений не зависят от начальных величин свойств, ибо для корректности записи уравнения, величины свойств должны быть приведены к общему знаменателю – эталону, а применение эталона не должно изменять величину, природу познаваемых свойств.

Данными понятиями ОЦРСОСНП очерчивается значительная фундаментальная понятийная основа предложенной теории (методологии) познания и созидания, методологии формирования понятий. При помощи единой методологии возможно проведение **ревизии основных положений** и **базовых понятий** некоторых теорий, нашедших широкое практическое применение. Это теория стоимости (экономическая теория), теория чисел (математика), дифференциальное и интегральное исчисление (математика), евклидова планиметрия (геометрия), классическая механика (физика), электродинамика (физика), теория права (юриспруденция).

Рассмотрим краткое содержание подсистем СНРП

Подсистема «Библиотека». Эта подсистема представляет собой совокупность систем понятий всех групп научных дисциплин ЗРПНС и ее ядра «Понятоведение», функционирующих в научном сообществе, необходимых и достаточных для оптимального планирования и управления научными исследованиями и развития наук вцелом. Элементами (объектами) подсистемы «Библиотека» являются:



ПТ – общая теория понятоведения; ПН – теория понятий; ЛГ- теория лингвистики; ПЗ – теория познания; СЗ – теория созидания; ИН – теория информации; СТ – теория систем; РС – теория распознавания; КС – теория консалтинга; ПР – теория принятия решений; РР - теория реализации принятых решений; СС – теория социальных систем; ЖО – теория жизнеобеспечения; КМ – теория коммуникаций; ОБ – теория образования; СР – теория сохранения; РЗ – теория развития; ДМ – теория дискретно-непрерывной математики; НИ – теория научных исследований; ММ – теория моделей и моделирования; ОМ–теория оптимизации.

Рис. 6. Структурная схема подсистемы «Библиотека» научно-разработанных понятий

Для идетификации каждой научной дисциплины используются индификационные коды, которые приведены в начале имени конкретной научной дисциплины.

Подсистема «Каталог». Объектами подсистемы являются унифицированные системы понятий (рис. 7).

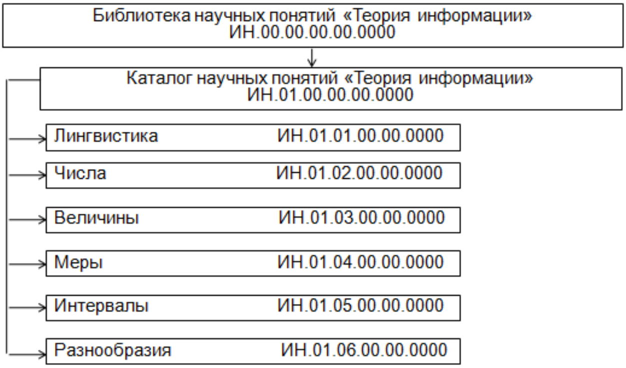


Рис. 7. Структурная схема подсистемы «Каталог» научно-разработанных понятий

Каталоги являются структурными единицами элементов подсистемы «Библиотека» и предназначены для предоставления помощи пользователям в их творческой деятельности. Пользователи могут с помощью подсистемы «Каталог» уверенно и без помощи информационного центра определить, существует ли система понятий даной предметной области в каталоге, и, если да, оценить его возможную причастность к их потребностям и узнать как им пользоваться. Если технические условия или правила, например, требуют от пользователя придерживаться отдельной понятийной системы, сылка на которую сделана только на ее регистрационный номер, пользователь имеет возможность обнаружить сведения об этой понятийной системе в каталоге. Каталоги систем понятий являются основным вспомогательным материалом для информационных центров обслуживания пользователей.

Систематизация каталогов систем понятий применяется в разных вариантах согласно с их предметными областями.

Каталог систем понятий структурирован таким обзазом, что его отдельные элементы, которые представляют собой системы понятий под названием «Альбом», могут быть найдены в каталоге со всех возможных точек доступа к предмету определенной области кругу пользователей согласно с назначением каталога.

Основной раздел каталога содержит все сведения, которые касаются систем понятий перечисленных в каталоге.

Каталог структурирован таки образом, при котором основной раздел систематизиролван в предметном порядке.

Подсистема «Альбом». Объектами подсистемы являются все виды систем понятий используемых в конкретной предметной области, разработанные в соответствии с действующей научной методолгией и стандартами по разработке понятий и систем понятий (рис. 8).

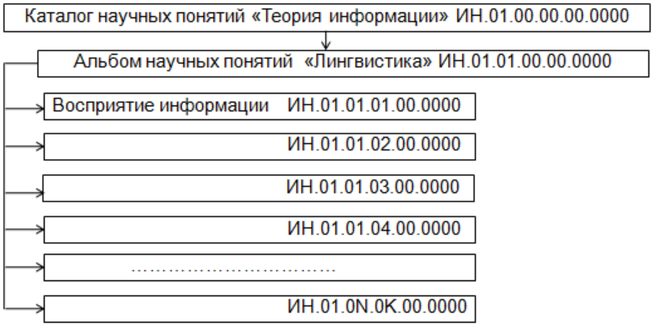


Рис. 8. Структурная схема подсистемы «Альбом» научно-разработанных понятий

Подсистема «Модуль». Объектами такой подсистемы понятий являются определенные совокупности основных комплектов системы понятий, разработанных на разных стадиях разработки понятий (рис.).

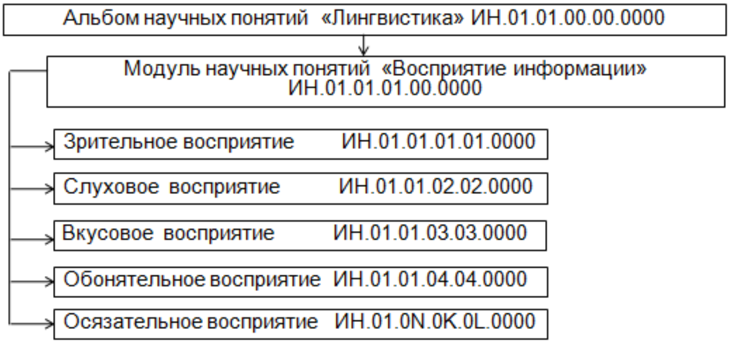


Рис. 8. Структурная схема подсистемы «Модуль» научно-разработанных понятий

Подсистема «Блок».
Объектами подсистемы являются основные комплекты понятий — совокупность элементарных понятий, объединенных определенной целевой функцией (рис. 9). Номенклатура основных комплектов регламентирована стандартами.

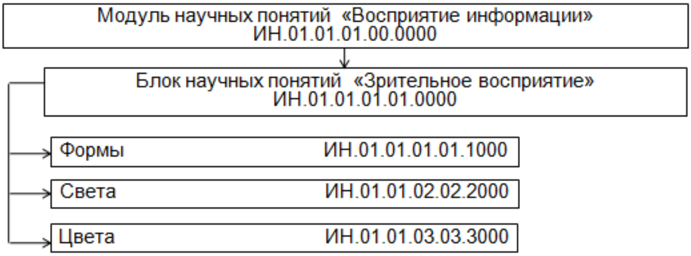


Рис. 9. Структурная схема подсистемы «Блок» научно-разработанных понятий

Подсистема «Карта понятия».

Объектами этой подсистемы являются элементарные понятия — предметы, содержащие информацию (графическую, текстовую), оформленную в установленном порядке, и имеющие в соответствии с действующими стандартами правовое значение.

Объектами подсистемы являются элементы множества графических и текстовых знаков и фрагментов, образующих в определенной совокупности понятия (рис. 10).

КАРТА ЛИНГВО-ФОРМАЛИЗОВАННОГО ОТОБРАЖЕНИЯ СЕМАНТИКИ ПОНЯТИЯ «ИНФОРМАЦИЯ»

№ п/п	Код	Имя понятия	Модель имени понятия	Объект или процесс		Лингвистическое (смысловое) определение понятия	Величина	Единица измерения			Формализованное отображение понятия						Программа (имя)
								Наименование	Обозначение		Аналитическое	Графическое		Графовое	Теоретико-множественное	Формально-логическое	
				О	П				русское	Международное (английское)		Геометрическое	Топологическое				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	ИН 00. 00. 00. 00. 0000	Информация		О		Представляет собой свойство сущности (объектов, процессов, явлений) отображать себя в общее пространство с помощью (через) форму, организацию, признак, состояние	Объем (симантического понятия) информации	гранула	Гр	Gr							

Рис. 10. Структурная схема подсистемы «Карта понятия» научно-разработанных понятий

Содержание, правила построения и оформления каждого знака и фрагмента понятия в большинстве случаев регламентируются стандартами и вследствие этого имеют правовое значение.

Множество элементов, входящих в состав каxедой из семи подсистем, в зависимости от их свойств и характеристик были, в свою очередь, классифицированы по форме л типологии форм представления информации, по структурно-функциональному и производственно-технологическому назначению, уровню типизации и сложности, способу воспроизведения и методу обработки, по степени актуализации и т. д. Например, объекты подсистемы «Документ» по методу обработки классцфщируются на

3.8. Метод автоматизированной разработки понятий

Необходимость автоматизированой разработки понятий на естественном языке возникает при решении на ЭВМ различных задач образования и определения понятий, в частности, в системах автоматизированной разработки понятий (САРП). В самом общем смысле такая автоматизированная разработка понятий предполагает разработку методов адекватного перехода от текста на естественном языке к его представлению на формальном языке, используемом в конкретной системе. При этом особую важность приобретает корректность распознавания смысла сложных определений понятий.
Результатом такого распознавания является отображение определения понятия на формальный язык, принятый в конкретной САРП, или на ограниченный естественный язык. Наиболее общим случаем подобного отображения является машинное отображения (МО) определения понятия с естественного языка на формальный и наоборот. Методика, разрабатываемая для систем МО, может оказаться адекватной задачам отображения с естественного языка на формальный в САРП. Поэтому задача обработки текстов естественных языков в системах автоматизированной разработки понятий может рассматриваться в ряду общих проблем автоматического преобразования текста (АПТ).
Рассмотрим основные подходы к ее решению, базирующиеся на

тезаурусном представлении информации и выборе русского языка в качестве метаязыка семантического описания

Эффективно действующая система АПТ должна базироваться на специально разработанной лингвистической модели, которая является основой для построения лингвистического обеспечения автоматизированной системы. Состояние АПТ и МО характеризуется лексическим уровнем обработки текста. Хотя программа лексического отображения и является необходимым условием работы системы АПТ, полноценная обработка текста на ЭВМ так же, как и в случае САРП, не может быть достигнута без актуализации значений, т. е. распознавания смысла многозначных лексических единиц, опирающегося на семантический анализ их контекстного окружения. В соответствии с этим все формы АПТ, предусматривающие семантические операции, в том числе и МО, основываются на теории формального распознавания смысла понятия, использующей принципы тезаурусного представления информации.

Действующие системы АПТ опираются на теорию формального распознавания смысла (ФРС) и работают при наличии двуязычных автоматических словарей и словарей оборотов (АС, АСО). Так, опыт эксплуатации АС и АСО показал, что промышленную информационную переработку иностранных текстов можно начинать уже на базе АС и АСО. Вместе с тем следует иметь в виду, что хотя пословно-пооборотное отображение текста с одного языка на другой и является первоначально необходимым условием для организации промышленного МО, качественное отображение текста на ЭВМ не может быть достигнута без обращения к семантике текста, т. е. без устранения многозначности у подавляющего числа лексических единиц, не вошедших в словарь оборотов. Тезаурусное представление информации в системе АПТ обеспечивает у работающих алгоритмов способность снятия многозначности лексических единиц. Эффективность тезаурусного анализа зависит от того, насколько адекватно воспроизведена лингвистическая модель исследуемого подъязыка, используемая при анализе входного языка и синтезе выходного языка. Следовательно, наиболее полное извлечение с помощью ЭВМ смыслового инварианта текста становится возможным только тогда, когда в машину вводится структурированное тезаурусное описание всего семантического пространства или его отдельных областей.

Главная задача автоматической переработки текстов определений понятий заключается в том, чтобы с минимальными информационными потерями извлечь нужный смысл из текста на входном языке и правильно передать этот смысл средствами выходного языка. Решение этой задачи связано в первую очередь с корректностью отображения сложных определений понятий — именных понятийных словосочетаний (ИПС). Поэтому одной из наиболее актуальных проблем современной организации и разработки системы АПТ является построение моделей алгоритмического смыслового анализа и синтеза ИПС.

Существует два способа распознавания смысла ИПС. Первый способ использует иконический подход, который достигается простым отождествлением текста и составляющих его единиц с эталонами, заложенными в памяти ЭВМ. Хотя этот способ достаточно прост, он оказывается нетехнологичным из-за громоздкости системы понятий и алгоритма поиска. Второй способ является алгоритмическим и основывается как на введении семантической информации в структуру системы понятий, так и на разработке алгоритмов анализа комбинаторики единиц текста, учитывающих их семантическую совместимость. При этом последний способ эффективнее, поскольку он является более экономным в отношении использования памяти ЭВМ и скорости обработки данных, а также более гибким и технологичным при включении новых лексических единиц в АС и в программную систему ФРС.

В качестве базовой теоретической концепции, лежащей в основе решения задачи распознавания смысла ИТС, выбрана теория ФРС. Сущность этой теории заключается в том, что перерабатываемый на ЭВМ текст и составляющие его единицы отождествляются с заранее заложенными в памяти лингвистического автомата элементами модели предметной области. При этом базовыми понятиями ФРС являются семантическое пространство (СП), признаки СП, области и подобласти СП, алфавит областей СП, точки СП, эталоны и так далее, заранее задаваемые в памяти лингвистического автомата.

Можно сделать вывод, что в рамках теории ФРС базой исследования является разработка модели, под которой понимается некоторая искусственно созданная формальная система объектов, структура и поведение которой имитируют структуру и поведение натурного объекта. В случае лингвистического моделирования понятий соответствие модели ее натурному объекту может быть объективно проверено только с помощью сильной обратной связи, т. е. при создании воспроизводящих понятийно-лингвистических моделей (ВПЛМ). Разработка ВПЛМ основывается на предварительной экспликации и задании в памяти лингвистического автомата определенного участка объективной действительности. В соответствии с этим при моделировании понятийного объекта необходимо выполнение следующих основных операций: выявление понятий и связей моделируемой области знаний; обнаружение и классификация языковых форм выражения этих понятий и связей; представление языковых форм выражения понятий и их связей в эксплицитной и дискретной форме.

Глубина ФРС всякого текста определяется адекватностью разработки модели СП, в пределах которого производится ФРС, способом отображения этой модели в лингвистической информационной базе понятий (ЛИБП) системы МО, уровнем разработки ЛИБП и соответствующих
алгоритмов.

Задачи ФРС и их отображение ЛИБП определяют необходимость адекватного отображения конкретной предметной области с помощью последовательной системы моделей понятий, каждая из которых отличается от предыдущей степенью абстрагирования от оригинала. Этими моделями понятий являются внешняя, промежуточная и внутренняя схемы.

В качестве аппарата описания внешней схемы понятий выбрана тезаурусная модель, обеспечивающая переход от уровня представления связей и отношений между конкретными единицами СП к уровню описания системы связей между лексическими единицами (ЛЕ) и их семантическими характеристиками (рис. 11).

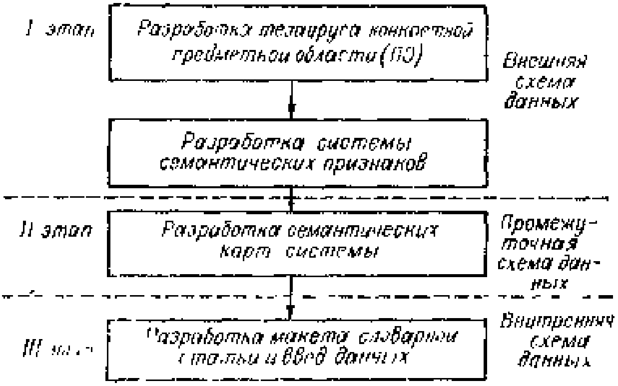


Рис.11. Этапы разработки лингвистической информационной базы понятий

При создании ЛИБП осуществляется последовательный переход от конкретных уровней анализа исходного лингвистического материала к абстрактным; от внешней лексической схемы к внутренней, адресно-отсылочной. Разработка самой внешней схемы также представляет процедуру последовательного перехода от уровня фиксации связей и отношений между конкретными единицами понятийной системы к более абстрактному уровню описания отношений: к фиксации отношений между семантическими характеристиками этих единиц. Разработка внешней схемы состоит из проектирования тезауруса конкретной ПО (конкретизация, аспектная иерархизация) и системы семантических признаков (генерализация).

На основе разрабатываемых таким образом моделей создается семантический модуль ЛИБП, использование которого для задач ФРС построено на основе принципа фильтрации. Этот принцип заключается в том, что из всей массы сведении, извлекаемых из ЛИБП о конкретной ЛЕ, к анализу допускается только релевантная с точки ярения исследуемого СП и ситуации информация. Стратификационный подход к СП предполагает введение системы фильтров, последовательно снимающих нерелевантную для каждой конкретной ситуации информацию о ЛЕ текста и, следовательно, последовательно актуализирующих значение этих ЛЕ.

При отображении именных понятийных словосочетаний (ИПС), являющихся предметом нашего исследования, выделяются три фильтра, опирающихся на разрешенную сочетаемость: классов понятий в рамках ИПС; семантических признаков, которыми характеризуются определенные классы понятий; конкретных ЛЕ, заданных в тезаурусе предметной области.

Система фильтров, предназначенная для обеспечения МП ИПС, разрабатывается от самых абстрактных, обобщенных уровней, т. е. от уровня синтаксического анализа в терминах классов понятий (грамматический фильтр, основывающийся на сочетаемости классов понятий в рамках определенной синтаксической конструкции) до конкретных, связанных со структурой СП, уровней семантического тезаурусного анализа.

При этом возникает парадоксальная ситуация: разработка ЛИБП ведется от анализа конкретных ЛЕ последовательно через этапы обобщения (генерализации) к более абстрактному описанию, к анализу на уровне классов. При создании модели использования ЛИБП, т. е. при разработке алгоритмов мы, наоборот, последовательно переходим от абстрактных уровней (фильтров) к конкретным, и чем тоньше семантический анализ, тем более конкретные характеристики ЛЕ вовлекаются в его сферу. Избежать парадокса нельзя в принципе, так как модель отображения понятия создается итеративно и развивается от абстрактных (универсальных) уровней к конкретным. При создании ЛИБП последовательно разрабатываются модели понятий, отличающиеся уровнем обобщения. При разработке алгоритмов отображения разные уровни обобщения реализуются как последовательность применяемых фильтров.

Таким образом, ФРС и отображение ИПС предусматривают решение следующих задач: разработку модели некоторого СП на уровне внешней, промежуточной, внутренней схемы понятий и разработку алгоритмов отображения значений ЛЕ, входящих в ИПС, и формирования требуемого отображения определения понятия.

Методом экспликации структуры СП является разработка семантической сети, отражающей эту структуру на уровне понятий, а затем последовательный переход к тезаурусной модели как к дальнейшей экспликации семантической сети на уровне конкретных ЛЕ.

Тезаурус позволяет установить аспектную иерархию понятий и соответствующих им ЛЕ, обусловленную теми ролями, которые эти понятия играют друг относительно друга в структуре СП. С помощью этой модели установлена системность связей между ЛЕ, репрезентирующими денотаты соответствующих знаков.

Разработанная тезаурусная модель достаточно точно представляет предметную область, но имеет узко тематическую направленность и, следовательно, изолирована от ЛИБП, моделирующих другие СП. Поэтому возникает необходимость дальнейшего абстрагирования от структуры СП, заключающегося в переходе на другой уровень описания, который может быть увязан с общим семантическим описанием языка. На этом уровне описания, основанном на иерархии обобщения, устанавливается структурированное описание понятий относительно присущих им свойств. Таким образом, тезаурусное описание каждой ЛЕ дополняется семантическим описанием в виде набора семантических признаков (СемПов).

Семантические признаки, разработанные в рамках соответствующего СП и с учетом формально-грамматического подхода, определяющего зависимость типа признаков от класса понятия, существуют в определенной системе перехода от общих категориальных признаков до узких, характеризующих отдельные лексико-семантические группы или отдельные ЛЕ. Для установления такой иерархии генерализации строится признаковый тезаурус, узлами которого являются СемПы.

Для полноты семантического описания ЛЕ в ЛИБП необходимо разработать: словарь СемПов, организованный в виде признакового тезауруса; правила приписывания отдельным ЛЕ кодов по признаковому тезаурусу; таблицы разрешенной сочетаемости семантических кодов. Выявление СемПов проводится с привлечением методов компонентного анализа. При анализе ЛИ, включенных в тезаурус, проводится начальное разбиение этих ЛЕ на семантические ггруппы в соответствии с верхними узлами признаковых тезаурусов, а затем внутри этих групп проводится дальнейшая семантизация.

Выделенные семантические признаки отражают виртуальную семантику ЛЕ, а актуальное значение каждой ЛЕ обусловлено ее семантико-синтаксической валентностью к реальной дистрибуции ЛЕ в контексте (в том числе и в ИТС).

Разработанные в соответствии с этими принципами отраслевой и признаковый тезаурусы составляют внешнюю схему данных.

В качестве модели данных, выступающих как интерфейс между признаковым тезаурусом, отраслевым тезаурусом и структурой словаря, выступает новый для понятийной лингвистики «инструмент»— **семантическая карта** (см. таблицу).

Таблица.

Образец заполнения семантической карты для лексической единицы «линия»

Тезаурусный уровень (ТУ) — код	Семантические характеристики исходной лексической единицы				Семантические характеристики зависимой лексической единицы				Семантическое отношение	
	ЛЕ	ЛГК	Семантический признак		ЛЕ	ЛГК	Семантический признак		Тип	Код
			Название	Код			Название	Код		
050102	Линия	3026	Тип связи	А	«Канал»	3001	Устройство	В	Принадлежность	P
050203	»	3026	» »	А	«Абонент»	3013	Отдельное лицо	Ц	Субъектность	S
050203	»	3026	» »	А	«Идентификация»	3026	Невекторный процесс	Б	Принадлежность	P
					«Управление»	3051	То же	Б	»	P

В карте фиксируются данные следующих типов:

1) информация о позиции ЛЕ в структуре тезауруса ПО (определяется параметрами: номером узла тезауруса, в котором данная ЛЕ зафиксирована, этот номер определяет принадлежность слова к конкретной тезаурусной модели; потенциальными связями описываемой ЛЕ с другими ЛЕ в рамках ПО и конкретного тезауруса);

2) семантические признаки, которые характеризуют каждую ЛЕ с помощью семантических признаков (СемПов), формируемых по признаковому тезаурусу;

3) отсылочные лексико-грамматические коды *(*ЛГК*),* определяющие характеристики описываемых ЛЕ в структуре ЛИБП.

Отраслевая тезаурусная информация задается двумя основными параметрами: номером тезаурусного уровня (ТУ) и отсылками к соотносимым по тезаурусу ЛЕ. Поскольку одна и та же ЛЕ может входить в разные ТУ (таблица), то при ее тезаурусном описании в семантической карте первым фиксируется конкретный номер ТУ, где означается вся относящаяся к нему информация. Фиксация ТУ однозначно определяет набор семантических признаков, свойственных ЛЕ. Этот набор фиксируется в семантической карте в виде понятийного семантического признака и буквенного кода. ЛЕ, принадлежащие одному ТУ, имеют один и тот же набор СемПов. Следующие столбцы карты содержат сами ЛЕ, связанные с исходной ЛЕ, наборы из СемПов и отсылочную информацию. Последним вводимым в карту типом семантической информации является семантическое отношение, фиксируемое между заглавной и связанным с ней ЛЕ. Это отношение также задается в виде характеристики отношения и его буквенного кода.

Для введения семантической информации в ЛИБ производится компрессия семантической карты путем исключения из ее структуры лексической информации.

Такая семантическая информация, приписываемая ЛЕ русского АС, достаточна для установления структуры и снятия многозначности компонентов ИТС. Соответствующий семантический модуль реализуется в виде системы фильтров, последовательно использующих информацию из ЛИБП, и включается в общую архитектуру формально-лингвистического МО. Семантический модуль реализуется в виде трех последовательно применяемых фильтров:

1) грамматического, анализирующего поверхности структуры ИПС, установления направления анализа и снятия конверсионной омонимии.

2) семантического, контролирующего допустимость сочетаний смыслов отображаемых эквивалентов на основе сочетаемости их семантических признаков;

3) отраслевого тезауруса, проверяющего допустимость сочетания конкретных объектов ПО, манифестируемых ЛЕ в структуре ИПС.

Задача фильтрующего алгоритма заключается в том, чтобы, опираясь на разрешенную комбинаторику смыслов ЛЕ, составляющих ИПС, и их связи в рамках СП, «отфильтровать» единственно допустимую с семантико синтаксической точки зрения структуры ИПС и отображения его компонентов. Особенность этого алгоритма состоит еще и в том, что выделенное на основе предварительного синтаксического анализа формализованное ИПС обрабатывается с опорой на заданную в АС комбинаторику отображения элементов, составляющих ИПС.

Семантический фильтрующий анализ ИПС начинается с определения природы ядра ИПС и его валентностей. Затем последовательно анализируются валентности атрибутов, причем выбор единственно правильного эквивалента для ядра и каждого атрибута осуществляется исходя из типа семантического отношения между ними на уровне комбинаторики семантических признаков. Если исследование комбинаторики смыслов не дает однозначного решения, то исследуются тезаурусиые связи ядра и каждого атрибута.

Окончательное формирование структуры отображения осуществляется с модификацией лексико-грамматнческих характеристик отображаемых эквивалентов, необходимых для их согласования друг с друюм.

В лингвистическом автомате, при формальной актуализации значений элементов, входному ИПС могут соответствовать различные отображения. Учитывая, что во всех случаях мы имеем дело с декартовыми произведениями множеств, число возможных вариантов v_n отображений n-членного ИПС будет для v_3 около 1,6 млн. Чтобы минимизировать эту избыточность в порождении отображаемых эквивалентов, применяют систему семантических фильтров.

Математическая модель, соответствующая этому процессу, может быть описана следующим образом.

Пусть A — предметная область, состоящая из всех ЛЕ системы; отношения ρ — синонимия на A; ρ_1, ρ_2 — строгие древесные порядки на множестве классов A/ρ. Перейдем к математической модели иерархии обобщения (генерализации).

Пусть $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$— признаки предметной областш A, тогда $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k \subset A \times A$ и являются эквивалентностями на $A^{(i)}$ разбивающими каждый раз A на два класса $A^{(i)}_1$, $A^{(i)}_2$, где $A^{(i)}_1$ — класс элементов предметной области, обладающий свойством δ_i; $A^{(i)}_2$ —класс элементов предметной области, не обладающий свойством δ_i. Поскольку первоначально элементам из A сопоставляется, может быть

неоднозначно, некоторый набор признаков $\gamma^{(a)}$, то получается бинарное отношение γ между элементами множества A и элементами множества подмножеств $\mathcal{P}$ $(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$ множества признаков $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$, то есть $\gamma \subset A \times \mathcal{P}(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$ и пара $[a, \gamma(a) \in \gamma]$ тогда и только тогда, когда элементу сопоставляется набор признаков $\gamma(a)$. Таким образом, первоначально мы имеем при генерализации систему
$H^{(1)} = \{A, \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}\}\ \gamma$, где $\delta_i \subset A \times A$, $\gamma \in A \times \mathcal{P}(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$, причем δ_i — эквивалентности, а γ, вообще говоря, не является отображением. Но используя метод анализа окружения, удается добиться замены бинарного отношения γ на новое бинарное отношение f, являющееся, с одной стороны, подмножеством бинарного отношения γ, а с другой стороны, отображением множества A в множестве
$\mathcal{P}(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$, то есть сопоставление элементу a подмножества признаков $f(a)$ производится однозначно.

Далее на множестве признаков $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$ рассматриваются отношения строгого древесного порядка $\tilde{1}, \tilde{2}, ..., \tilde{m}$, образующие на множестве $\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$ древесный дихотомический тезаурус. Таким образом, модель иерархии обобщения представляет собой систему
$H^{(2)} = \{A, \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}, f, \tilde{1}, \tilde{2}, ..., \tilde{m}$, $\delta_i \subset A \times A$, $f \subset A \times \mathcal{P}(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$,
$\tilde{j} \subset \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\} \times \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}\}$, где δ_i -эквивалентности, $\tilde{j}$ — строгие древесные порядки, f — отображение.

Математическая модель семантической струкуры предметной области представляет собой систему $H = \{A, \rho, A/\rho, \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}, \rho_1, \rho_2, f,$
$\tilde{1}, \tilde{2}, ..., \tilde{m}$, $\rho \subset A \times A$, $\delta_i \subset A \times A$, $f \subset A \times \mathcal{P}(\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\})$,
$\tilde{j} \subset \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\} \times \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$, $\rho_1, \rho_2 \subset A/\rho \times A/\rho$,
где ρ, δ_i — эквивалентности; ρ_1, ρ_2, $\tilde{j}$ — строгие древесные порядки;
f - отображение.

При этом анализ и отображение каждого именного понятийного словосочетания основывается на двух взаимодополняющих структурах: на общей структуре синтаксического анализа именного понятийного словосочетания, определяемой типом входного языка, и на структуре семантических связей, фиксируемых по признаковому и отраслевому тезаурусам. Использование фильтрующих алгоритмов является основным приемом компрессии избыточности языка при автоматической отображении текста.

4. Модели и моделирование понятий

4.1. Типы и модели структур понятий и признаков предметов

Изучение типов и моделей структур понятий будем иллюстрировать примерами из организации моделей структур понятий.
Будем различать физическую и логическую организацию моделей понятий.
С другой стороны, когда речь идет о понятиях применительно к решению какой-то конкретной задаче, следует помнить, что понятия, закодированные в компьютере в виде нулей и единиц, несут в себе информацию о реальном объекте.
Разрабатывая понятие, используемое в какой-то конкретной предметной области, следует помнить, что оно должно быть прочитано и однозначно понято субъектами. Поэтому будем использовать ряд научных подходов к разработке понятий и их определений. К широко используемым будем относить лингвистический (словесный), аналитический, табличный, графический методы описания понятия.
Лингвистическое описание позволяет представить понятие посредством слов и выражений.
Аналитическое описание позволяет представить понятие посредством математических формул.
Табличное описание понятия будет использоваться для представления сложных логических условий, определяющих проведение тех или иных процессов.
Графическое описание понятия в виде схемы позволяет описать понятие в компактной наглядной (визуальной) форме. Графическое описание понятия представляется в виде графического изображения, состоящего из геометрических и топологических объектов (фигур), которые будем называть символами, соединенных стрелками, которые, в ряде случаев, показывают последовательность действий.
Если разрабатывается понятие, то разработчик пытается отобразить в понятии предметную область путем некоторого набора признаков, представленных в их единстве – структуре понятия. При этом, естественно, его интересуют не все признаки, а лишь некоторые, которые имеют непосредственное отношение к разрабатываемому понятию.
Совокупность понятий будем называется **предметной областью,** а сами понятия — **понятия предметной области.**

Например, при описании процесса проектирования РЭА понятиями предметной области могут быть: материалы; предметы, элементы, агрегаты, изделия; станки, оборудование; технологические процессы.

Для каждого понятия предметной области должны быть описаны признаки (характеристики), являющиеся наиболее важными для определения данных понятий. Эти характеристики будем называть **параметрами.** Каждый параметр может принимать определенные значения.

Например, когда речь идет о телевизоре как понятии об объекте предметной области, в качестве параметров (в зависимости от решаемой задачи) могут быть использованы характеристики (марка, индекс, изображение, диаметр кинескопа, цена). Для определенного типа понятия они примут конкретные значения. Например, понятие «Рекорд», ВЦ-311, цветной, 47 см, 640 руб.

Для любого понятия существует совокупность определяющих его параметров, которую будем называть **картой понятия.** Она, в свою очередь, содержит **поля,** в которых описивается каждый отдельно взятый признак понятия. Семейство карт образует **блок понятий.** Несколько блоков образуют **модуль понятий.** Несколько модулей образуют **каталог.** Несколько каталогов образуют **библиотеку понятий.** Совокупность взимосвязанных библиотек понятий образуют **систему научно-разработанных понятий** (СНРП) При этом можно отметить следующие соответствия между объектными понятиями предметной области и логическим представлением понятий:

число объектных понятий равно числу карт понятий в блоке;

число признаков, описывающих объектное понятие, равно числу полей в каждой карте.

При описании параметров признаков понятий будем использовать числовые величины, строки символов, значения проводимых измерений. Чтобы осуществить обработку этих данных с помощью ЭВМ, необходимо как-то учитывать тот факт, что внутренне представление информации в ЭВМ сводится в конечном счете к последовательности нулей и единиц. Действительно, пусть в ходе некоторой операции в регистре центрального процессора оказалась двоичная величина 1101010001010011. Как интерпретировать ее?

Для того чтобы машина могла однозначно интерпретировать признак понятия, представимый данными, необходимо снабдить его некоторой дополнительной информацией, сообщающей о «типе обрабатываемого» признака. Поэтому признаки, интерпредируемые данными, которые закладываются в ЭВМ, будем классифицировать по типам.

В языках программирования высокого уровня тип признаков будем задавать путем явного описания признака в тексте программ. Основные типы признаков будем классифицировать следующим образом: простые; структурированные; ссылочные.

Простые типы признаков не обладают внутренней структурой и представляют собой конечный набор типов, которые будем называть **базисными**. К простым типам признаков относятся: целый; дробный; символьный; логический.

Целый и дробный типы признаков предназначены для представления числовых значений параметров признаков, символьный используется для образования текстов из символов. Логический тип состоит из логических значений «истина» и «ложь» и применяется для выражения значений логических условий.

Признаки любого простого типа характеризуются тем, что в любой момент времени каждому признаку соответствует только **одно значение**.

Для решения большинства научных задач требуется возможность использования таких типов признаков, которые могут содержать много значений. Поэтому в рассмотрение кроме базовых типов признаков введем структурированные.

Структурированные типы признаков предназначены для разработки из конечного набора базисных типов сложных структурных признаков.

К этим типам признаков будем относить: массивы (одно- и многомерные), последовательности (кортежи, стеки).

Под **массивом** будем понимать группировку набора признаков идентичного типа. Массиву присваивается **имя**, обозначающее всю группу признаков. Причем к каждому элементу группы возможен индивидуальный доступ с помощью целого индекса, указывающего позицию элемента в группе. В n-мерных массивах позиция элемента задается с помощью n индексов.

Ссылочный тип признаков предназначен для обеспечения ссылок на другие признаки и называется **указателем**. Этот тип применяется для динамического построения сложных структур признаков.

Одним из основных способов структуризации понятий является использование абстракций.

Абстракция предполагает, что несущественные признаки должны быть опущены, а внимание должно быть сконцентрировано на основных общих свойствах множества объектов. Так, общее понятие ТЕЛЕВИЗОР — есть абстракция, отражающая множество наших представлений о конкретных телевизорах. Абстракция может быть многоуровневой т. е. объект абстракции одного уровня может рассматриваться как объект абстракции другого уровня и т. д. Таким образом, абстракция может использоваться для формирования нового типа из других типов. Например, БЫТОВАЯ РАДИОАППАРАТУРА определяется как абстракция типов ТЕЛЕВИЗОР, МАГНИТОФОН, ПРОИГРЫВАТЕЛЬ и т. д. Механизм абстракций будет широко использоваться при построении моделей понятий.

Модели понятий и их признаков. Разработка СНРП любых типов предполагает, что понятиями, заложенными в систему, будет пользоваться не один человек, а группы пользователей, имеющих доступ к системе. Возможность совместного использования одних и тех же понятий требует создания единой информационной структуры — **библиотеки понятий**. Под **библиотекой понятий (БП)** будем понимать систему научно-разработанных понятий предметной области знаний, предназначенной для совместного использования группой пользователей. Использование библиотек понятий позволяет:

представлять сложные структуры понятий, когда объектом понятия являются не только признаки, но и структуры, в которые они организованы;

сокращать дублирование информации за счет структурирования признаков и самих понятий, что повышает надежность информации;

обеспечивать независимость понятий от изменений их признаков;

повышать достоверность информации и сокращать затраты на обслуживание систем понятий .

Для того чтобы некоторую предметную область представить в библиотеке понятий, прежде всего необходимо выделить те понятия, которые важны с точки зрения всех потенциальных пользователей библиотеки понятий. В силу этих причин создание библиотека понятий требует широкого использования механизма абстрагирования. На абстрактном уровне проводится классификация понятий и объектов предметной области. Сам процесс абстрагирования информации о предметной области, требуемой для создания библиотеки понятий, будем называть **логическим проектированием библиотеки понятий (проектирование понятий).** При логическом проектировании понятий ряд физических характеристик предметов и особенности отдельных пользователей не учитываются. Логическое проектирование осуществляется в рамках некоторой заранее принятой модели абстрагирования, которую будем называть **моделью понятий.** Точнее говоря, под ней понимают основные понятия и способы, используемые при выполнении абстрагирования.

Описание предметной области в терминах некоторой модели понятий будем называть **концептуальной схемой,** или **моделью.** Связь между предметной областью и концептуальной моделью понятия может быть отражена определенным образом (рис. 1).

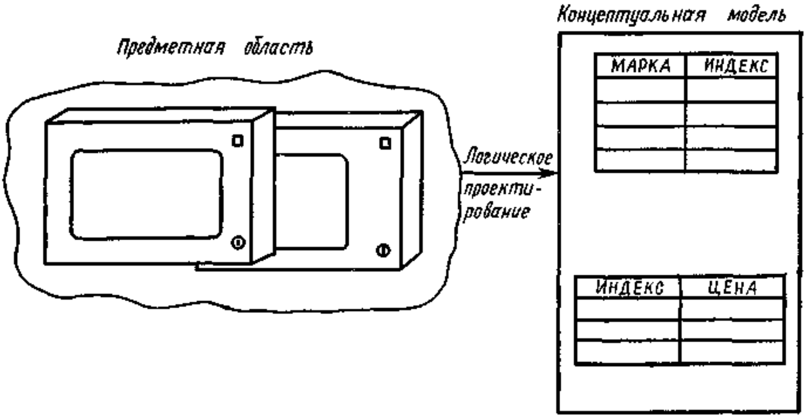


Рис. 1. Связь между предметной областью и концептуальной моделью понятия

Концептуальная модель понятия характеризует логическое представление признаков и является тем мостиком, посредством которого связываются возможности физического представления признаков в понятиях и в то же время их независимого использования в различных проблемных областях.

Концептуальную модель, описанную и скорректированную с точки зрения представления признаков в понятии, будем называть **внутренней моделью.** Поскольку БП рассчитана на то, что каждый пользователь имеет доступ к определенным понятиям, концептуальная модель должна отражать еще один уровень логического представления понятий для каждого конкретного пользователя. Такое представление концептуальной модели, непосредственно связанное с применением, будем называть **внешней моделью понятия** (схемой). Так как каждый отдельный пользователь в большинстве случаев имеет отношение лишь к небольшой, вполне определенной части понятий, хранимых в библиотеке, то внешняя модель у него может быть своя. Таким образом, архитектура БП может быть упрощенно представлена, как на рис. 2.

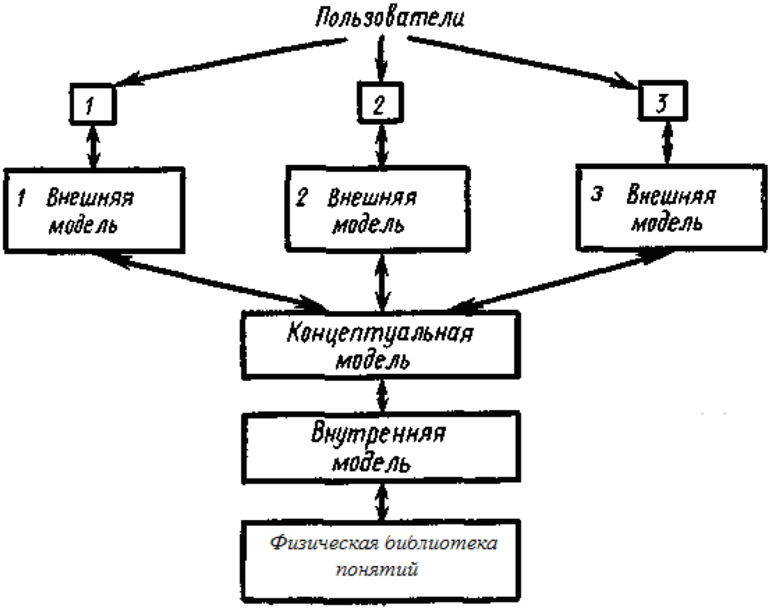


Рис. 2. Архитектура библиотеки понятий

Можно отметить, что на концептуальном уровне осуществляется формализованное описание информационной библиотеки понятий в терминах конкретной предметной области. Это означает, что на концептуальном уровне одна и та же информационная библиотека понятий описывается средствами различных представлений моделей понятий. Поэтому при разработке понятий вводится еще один уровень описания понятия. Модель этого уровня должна выражать информацию о предметной области.

Этот уровень будем называть информационно-логическим или инфо-логическим (рис. 3).

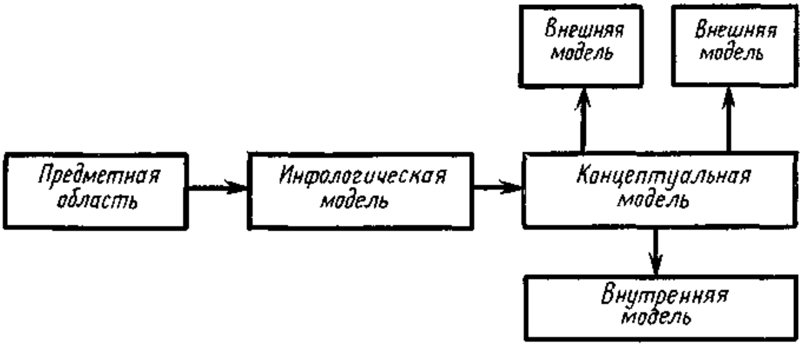


Рис. 3. Место инфологической модели в процессе разработки моделей понятий

Инфологическая модель понятия служит для формализации представления о предметной области до привязки к конкретным средствам реализации библиотеки понятий знаний.

Таким образом, при моделировании понятий и их признаков возникает проблема многоуровневого представления понятий. Поэтому при проектировании БП уровни представления понятий и их признаков будем подразделять на инфологический и даталогический. Причем, если инфологические модели используются для построения семантических (смысловых) моделей понятий, отражающий информационное содержание конкретной предметной области, **даталогические модели** служат для реализации информационных БП в определенной среде.

Целостность (единство) понятий и их признаков. При создании БД всегда следует учитывать логические ограничения на значения признаков и их соотношения. Они обычно представляют собой условия, при которых имеют смысл те или иные признаки. Так, например, если будем рассматривать значение стоимость детали, то оно не может превышать значение СТОИМОСТИ ИЗДЕЛИЯ, в которое детали входят составной частью. Или, например, значение ДАТА ИЗГОТОВЛЕНИЯ телевизора не может принять значение 1912 г.

Логические ограничения, накладываемые на признаки, рассматриваются как свойства, присущие признакам и обеспечивающие адекватное отображение понятий предметной области в БП. Если эти ограничения записать в БП, то их можно использовать для контроля целостности содержимого БП. Отсюда возникает понятие **целостности понятий,** т. е. понятия, содержащиеся в БП, не должны противоречить заданным логическим ограничениям, которые назовем **ограничениями целостности.** Они обычно задаются для множества понятий. Их можно разбить на два основных типа: **внутренние и явные**.

Внутренние ограничения обусловлены самой структурой принятой модели понятий. Так, например, в **реляционных моделях понятий** дубликаты записей не размещаются. Или в **иерархической** модели понятий связи ограничены древовидной иерархической структурой.

В некоторых моделях понятий вводятся ограничения, которые описываются в **явном виде**, с помощью специальных конструкций **языка описания понятий**. К явным ограничениям целостности можно отнести ограничения на значение параметров признаков. Ограничения в явном виде задаются не только для параметров признаков, но и для типов понятий (сущностей) и связей. Так, например, если рассматривать сущность СТУДЕНТ, то может быть ограничено число студентов, обучающихся в одной группе.

Для того чтобы уточнить, какие бывают ограничения на связи, необходимо рассмотреть основные типы связей.

Связь один к одному (1:1). Она определяет такой вид связи между двумя типами сущностей *А* и *В,* при котором каждому экземпляру сущности *А* соответствует только один *В,* и наоборот. Например, связь студент курса — номер зачетной книжки (рис. 4).

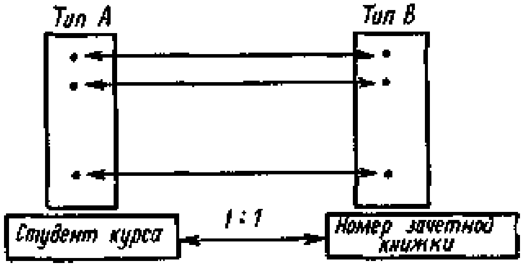


Рис. 4. Связь один к одному (1:1)

Здесь каждый экземпляр одного типа сущности однозначно определяет другой.

Связь один ко многим (1:М). Соответствует случаю, когда для двух типов сущностей *А* и *В,* одному экземпляру сущности *А* соответствует несколько (0, 1, 2*,...,М)* экземпляров сущности *В.* Однако каждому *В* соответствует только один экземпляр сущности *А,* например, связь группа — фамилия, имя, отчество студента (рис. 5).

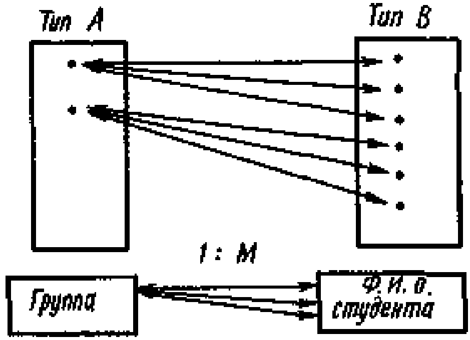


Рис. 5. Связь один ко многим (1 :М)

Связь многие к одному (М: 1). Является вариантом связи, обратных к связи 1 : *М*, т. е. в этом случае многим экземплярам сущности типа *А* соответствует только один *В.* Например, Ф. И. О. студента — группа (рис. 6).

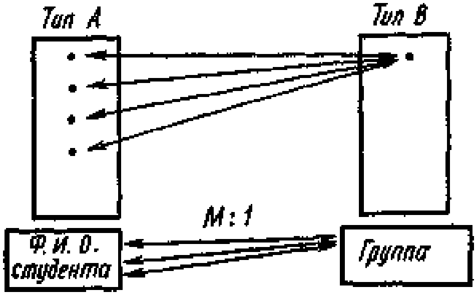


Рис. 6. Связь многих к одному (М:1)

Связи типа 1:1, 1 *:М, М:* 1 называют функциональными.

Связь многие ко многим (М:М). Соответствует случаю, когда каждому экземпляру сущности *А* может соответствовать несколько экземпляров сущности *В,* и наоборот. Например, телевизор — резистор (рис. 7).

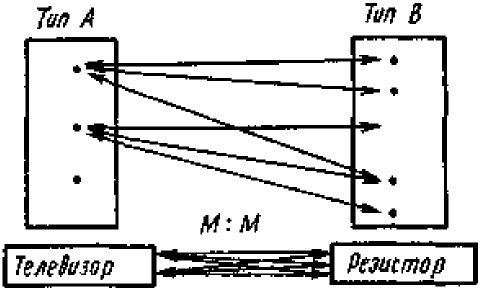


Рис. 7. Связь многих ко многим (М: М)

До сих пор рассматривались двусторонние связи между типами сущностей. Иногда целесообразно рассматривать одностороннюю связь от сущности *А* к сущности *В* (такие связи называют **ассоциациями**). Ассоциации, в свою очередь, подразделяют на три типа: простая, сложная и условная.

Ассоциация простая (тип 1). Соответствует случаю, когда экземпляр сущности *А* определяет один и только один экземпляр сущности *В,* т. е. идентификация экземпляра сущности *В* является уникальной. Например, связь типа группа — фамилия старосты группы (рис. 8).

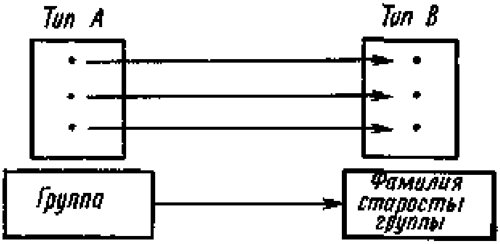


Рис. 8. Ассоциация простая по типу *I*

Естественно, что в частном случае может оказаться, что в разных группах могут оказаться старосты с одинаковыми фамилиями, и поэтому обратная связь (от *В* к *А)* здесь не рассматриваются.

Сложная ассоциация (тип М). Соответствует случаю, когда каждый экземпляр сущности *А* определяет несколько (нуль, один, два и **т** д.) экземпляров сущности *В.* При этом идентификация экземпляра типа *В* не обязательно является уникальной: например, связь между сущностями УЗЛЫ ИЗДЕЛИЯ и ПОСТАВЩИК (рис. 9).

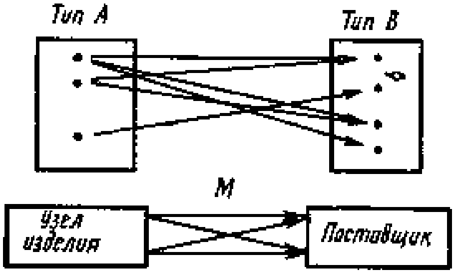


Рис. 9. Сложная ассоциация по типу *М*

Условная ассоциация (тип С). Описывает связь, когда для двух типов сущностей *А* и *В* может не существовать экземпляра типа сущности *В,* но если существуют, то он относится к единственному экземпляру сущности *А.* Например, связь между сущностями служащий — дата увольнения (рис. 10).

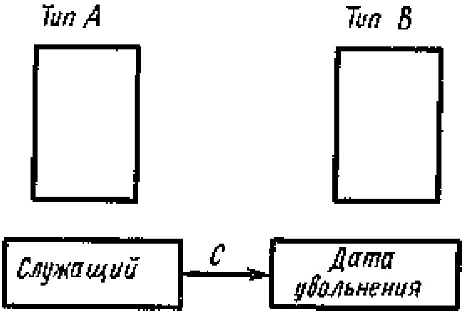


Рис. 10. Условная ассоциация по типу *С*

Приведенные типы связей не исчерпывают все множество видов ограничений, которые могут иметь место. Поэтому контроль выполнения ограничений в явной форме в конкретных моделях понятий представляет собой сложную задачу и требует от СУБП целого набора актов доступа к БП и использования средств реляционного исчисления.

Операции над понятиями и признаками. В процессе использования понятий приходится осуществлять над ними некоторые операции, которые необходимы для заданной конкретной операции.

Селекцию можно осуществить на основе использования логической позиции понятия или его признака, его значений и связей между ними.

Использование для селекции **логической позиции понятия или его признака** базируется на определенной упорядоченности понятий в СНРП. Упорядоченность понятий позволяет использовать для селекции такие понятия, как первый элемент, последний, текущий, *n*-й. Относительно текущего элемента можно указать предыдущий элемент и последующий. Этот тип селекции называют также селекцией **посредством текущий.**

Использование для селекции **значений параметров признаков** требует задания в явном виде значений признаков, являющихся критериями селекции. Простое условие определяется на одном признаке и одном его значении и обычно имеет вид

Имя признака — оператор условия — значения параметра признака.

Под оператором-условием понимается один из арифметических операторов (= , ≠, <;, >, ≤, ≥). Приведем пример простого условия селекции по значению параметров признаков:

средний балл студента ≥4,0.

Это условие означает, что из всего списка студентов следует отобрать студентов, имеющих средний балл не меньше 4,0.

Более сложные критерии селекции могут быть заданы выражениями, построенными на простых условиях с помощью логических операторов (И, ИЛИ, И). Например, условие

средний балл ≥4,0 и физика =5

означает селекцию тех студентов, у которых средний балл не менее 4,0 и которые сдали физику на 5.

Селекцию понятий и их признаков можно производить не только по логической позиции или по значению, но и в соответствии с логическими связями между ними. Например, при наличии связи типа РАБОТАЕТ между сущностями ПРЕПОДАВАТЕЛЬ и КАФЕДРА можно осуществить селекцию всех лиц, работающих преподавателями на кафедрах университета и всех кафедр, имеющихся в университете.

Селекция такого рода называется селекцией по связности понятий и их признаков.

По характеру производимого действия над понятиями и их признаками различают следующие виды операций:

1. Идентификация понятия и определение его позиции в БП;
2. Выборка (получение требуемых понятий из БП);
3. Включение (запись новых понятий в БП);
4. Удаление понятий;
5. Обновление (модификация) понятий.

Эти действия могут быть применены как к признакам, так и к типам понятий и связям.

По характеру способа получения результата различают навигационные и спецификационные операции. Если результат представлен единичным понятием (значением параметра признака, реализацией понятия или связи), полученным при прохождении по логическому пути (т. е. при **навигации)** в структуре БП, то соответствующую операцию называют **навигационной.**

Навигационные операции всегда предполагают селекцию посредством текущей. Отсюда возникает задача манипулирования текущими. Для определения текущих могут использоваться специальные индексы, которые могут совпадать с ключами.

Если в операции определяются только требования к результату, но не задается способ его получения, то операции называется **спецификационными.** В спецификационных операциях текущие на пользовательском уровне не видны. **Они могут быть определены в <u>терминах операций теории множеств</u>: объединение, пересечение, разность.** Поэтому результату спецификационной операции в общем случае соответствует некоторое множество объектов (понятий, признаков).

В процессе использования понятий возникает необходимость использования более сложных действий над понятиями (признаками), чем позволяют навигационные и спецификационные операции. Например, при выполнении операций селекции необходимо автоматически поддерживать целостность понятий. Этого можно добиться путем создания специальной программы, которая будет осуществлять проверку большого количества понятий. Эта программа, естественно, потребует использования локальных операций манипулирования над понятиями. С другой стороны, она может рассматриваться как глобальная операция проверки целостности понятий.

Такие глобальные операции называют **процедурами библиотек понятий.** Другими словами — это обобщенные операции изменения состояния библиотеки понятий. Процедура библиотеки понятий рассматривается как единая макрооперация, при выполнении которой ни одна другая процедура или программа не может обратиться к понятиям. Поэтому такие процедуры или операции будем называть еще **транзакциями**.

Один из видов процедур БП — определение значений параметров признака, которые непосредственно в ней не хранятся, например, путем вычисление сумм, подсчет числа экземпляров, определение минимума, максимума. Процедуры этого вида будем называть **функциями агрегации.**

Важный вид процедур БП — определение значений параметра признака понятия, например, вычисление возраста студента по дате его рождения и текущей календарной дате. Процедура БП, обеспечивающая определение значения параметра какого-либо признака, назовем **виртуальным признаком.** Для пользователя он представляется как обычный признак, обладающий теми же свойствами, что и любой другой признак.

Процедуры БП применяются также для контроля целостности, контроля доступа к понятиям, расширения языка понятий операциями, первоначально в них не предусмотренными.

Особый вид процедур БП составляют процедуры, активизирующиеся при определенных условиях и выполняющих одну или более операций включения, удаления или модификации. Такие процедуры называют **запускаемыми включением, удалением, обновлением.**

Анализируя различия между процедурами БП и операциями, можно отметить следующее:

1. Процедуры при своем выполнении могут захватывать обширные области понятий;
2. Процедуры могут реализовать широкий круг действий над понятиями;
3. Вызовы процедур не выполняются пользователем;
4. Процедуры обычно описываются в схеме понятий, в то время как операции включаются в пользовательскую программу.

Использование БП привело к необходимости создания специальных программ, обеспечивающих управление понятиями, содержащимися в библиотеке, т. е. систем управления библиотекой понятий (СУБП).

Таким образом, *СУБП —это специальный пакет программ, посредством которого реализуется централизованное управление БП и обеспечивается доступ к понятиям*. База данных вместе с системой управления его являются составными частями банка данных.

Развитие СУБП приводит к созданию (разработке) ряда языков описания состояния понятий предметной области, которое в СУБП интерпретируется состоянием БП. Множество допустимых состояний БП определяется схемой БП, задаваемой на языке **определения понятий (ЯОП).**

Изменение состояния БП и извлечение понятий из БП для последующего манипулирования (использования) понятиями обеспечивается средствами **языка манипулирования понятиями (ЯМП).**

Описание структуры понятия некоторого типа на формализованном языке назовем **схемой этого понятия**. **Язык описания понятий** — это язык высокого уровня, предназначенный для схемы БП. С его помощью описываются типы понятий, содержащиеся в БП, и их структура.

Язык манипулирования понятиями (ЯМП) используется при написании прикладных программ, обращающихся к понятиям, содержащихся в БП. Основной функцией ЯМП является выполнение операций ввода-вывода при обработке информационной базы. Собственно говоря, совокупность ЯОП и ЯМП и определяет ***модель понятий, понимаемую как совокупность методов и средств определения логической структуры БП.***

В качестве моделей понятий, наиболее широко используемых при создании БП, будем использовать: реляционную; сетевую; иерархическую.

4.2. Реляционная модель структуры понятий

В основе реляционной модели структуры понятий (РМСП) лежит математическая теория отношений. Этим определяется и название модели (RELATION - отношение). Отношение служит средством структуризации понятий, которые в нашем рассмотрении будут представляться совокупностью признаков и свойств.

Таким образом, представив n-местное отношение в виде таблицы, тем самым определенным образом структурируем понятия. Поэтому подобные преобразования будем называть реляционной структурой или реляционным типом понятия. Массив понятий, представленный набором реляционных структур, образует реляционную БП, и схема реляционной БП будет представлена набором схем отношений:

$$R_1(A^1_1, A^1_2,..., A^1_k);$$
$$R_2(A^2_1, A^2_2,..., A^2_l);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m(A^m_1, A^m_2,...,A^m_n),$$

где A_i^j — имя параметра, R_j— имя отношения.

Ограничение модели. Число ограничений в реляционной модели невелико, что обеспечивает достаточную свободу в выборе представления типов связей и понятий. Основным ограничением является невозможность представления в отношении дубликатов строк. Это ограничение позволяет уточнить понятие **ключа отношения**. В реляционной модели понятий (РМП) ключ определяется как подмножество параметров, которые позволяют однозначно идентифицировать кортеж. Так как дубликаты строк в отношении запрещаются, то это означает, что каждое отношение имеет, по крайней мере, один ключ (состоящий из всех параметров). Отношение может иметь и несколько ключей, называемых **возможными ключами**. Один из возможных ключей выбирается в качестве

первичного. Следует иметь в виду, что первичный ключ не разрешается обновлять и никакая из его компонент не может принимать значения «неопределено».

Второе ограничение модели состоит в том, что порядок столбцов в таблице является значимым. Пренебрегать упорядочением столбцов можно только в том случае, если каждому столбцу присвоено уникальное имя.

На значения параметров в модели можно задавать ограничения в явном виде. Большинство явных ограничений, которые встречаются на практике, это ограничения на зависимости между параметрами. Явное задание ограничений обеспечивает возможность самостоятельного исследования зависимостей между параметрами.

Зависимость отражает тот факт, что один признак зависит от другого. В РБП в качестве таких признаков рассматриваются либо **аргументы,** либо **кортежи**. Одним из основных типов зависимостей, рассматриваемых в реляционных БП, являются **функциональные зависимости.**

Рассмотрим формальное определение функциональной зависимости, принимая следующие обозначения. Большими буквами $A,B,C,\ldots$ обозначим одиночные параметры, X, Y, Z — множество параметров, а a, b, c,... и x, y, z,... — соответствующие им значение. Большие буквы R, S будем применять для обозначения отношений.

Предположим, что существует некоторое **универсальное отношение** U, в котором каждый параметр имеет уникальное имя. При этом будем считать, что множество параметров любого другого отношения представляет собой некоторое подмножество параметров универсального отношения U.

Пусть A и B параметры отношения R. Тогда говорят, что параметр B отношения R функционально зависит от параметра A, если в каждый момент времени каждому значению a соответствует не более одного значения b. Функциональную зависимость f параметра B от параметра A обозначают: $f{:}A\rightarrow B$.

Эту зависимость f можно также представить множеством упорядоченных пар $\{<a, b>|a\in A, b\in B\}$, в которых каждому значению a соответствует только одно значение b. При этом говорят, что B **функционально зависит** (или просто зависит) от A, а A **функционально определяет** (или **определяет**) B.

Если существует единственная функциональная зависимость B от A, то ее обозначают просто $A\rightarrow B$. В случае отсутствия между ними функциональной зависимости вводят обозначения $A\neq B$.

Если $A\rightarrow B$ и одновременно $B\rightarrow A$, то между A и B существует взаимно-однозначное соответствие, которое записывается как $A\leftrightarrow B$.

Пусть: $f:A_1, A_2,... ,A_n \to B$ и $g:A_1, A_2,..., A_m \to B$, где $m<n$. Так как параметры $A_1, A_2,..., A_m$ функционально определяют B, то $A_{m+1},A_{m+2},.. ,A_n$ называют **посторонними** в f. В этом случае B неполно зависит от $A_1, A_2,... ,A_n$. Если для данного f не существует g с вышеуказанными свойствами, т.е. левая часть f не содержит посторонних параметров, то говорят, что реализуется **полная функциональная зависимость**.

Пусть есть множество параметров $A_1, A_2,... ,A_n$ отношения R, а также множество F функциональных зависимостей $X \to Y$, где X и Y — подмножества параметров множества $A_1, A_2,... ,A_n$. Тогда из функциональных зависимостей, которые входят в F, могут быть выведены другие функциональные зависимости, присущие отношению R.

Обозначим через F^+ замыкание множества функциональных зависимостей F, т.е. полное множество зависимостей, которую можно получить из F. Множество зависимостей F^+ можно построить из F на основе следующих правил вывода функциональных зависимостей (ФЗ):

1. ФЗ1 (свойство рефлексивности).
2. ФЗ2 (свойство пополнения).
3. ФЗ3 (свойство транзитивности).

Это полный набор правил, т.е. он позволяет по заданному множеству F определить полное множество функциональных зависимостей F^+, присущий рассматриваемой схеме отношений $R(A_1, A_2,... ,A_n)$.

Рассмотрим эти правила более подробно.

Правило ФЗ1 (свойство рефлективности). Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$ и $Y \subseteq X$, то имеет место функциональная зависимость $X \to Y$. Например, задано отношения $U(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$.

Рассмотрим два множества параметров:

$$X = \{A_1, A_2, A_3, A_4\} \text{ и } Y = \{A_1, A_4\}.$$

Исходя из свойства транзитивности, можно сказать, что существует функциональная зависимость $X \to Y \in F^+$. Данное правило говорит о том, что, имея исходную функциональную зависимость $A_iA_jA_kA_n \to A_iA_j$, можно в состав множества параметров левой части выражения вводить любые параметры из множества U. При этом функциональная зависимость будет сохраняться. Можно также в правую часть включать параметры, которые уже расположенны в левой части.

Правило ФЗ2 (свойство пополнения). Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$ и имеет место функциональная зависимость $X \to Y$, то $X \bigcup Z \to Y \bigcup Z$. В отличие от правила ФЗ1 данное говорит о том, что для его применения не существенно выполнение условий $Y \subseteq X$. Т.е. любые параметры из множества U можно одновременно подставлять в левую и правую части выражения функциональной зависимости F.

Например, имеется универсальное отношение $U(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ и заданы наборы параметров $X = \{A_1, A_3\}$, $Y=\{A_2, A_4\}$, $Z=\{A_5\}$. Тогда из условия, что существует функциональная зависимость $X\rightarrow Y$:

$$\{A_1,A_3\}\rightarrow\{A_2,A_4\}$$

следует, что имеет место зависимость

$$\{A_1, A_3, A_5\}\rightarrow\{A_2, A_4, A_5\}.$$

Правило ФЗЗ (свойство транзитивности). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$, $Z\subseteq U$ и имеют место зависимости $X\rightarrow Y$ и $Y\rightarrow Z$, то $X\rightarrow Z$. Например, имеются подмножества параметров $X=\{A_1, A_3\}$, $Y=\{A_2, A_4\}$, $Z=\{A_5\}$. Тогда из условия существования зависимостей $\{A_1, A_3\}\rightarrow\{A_2, A_4\}$, $\{A_2, A_4\}\rightarrow\{A_5\}$ следует, что имеет место зависимость $\{A_1, A_3\}\rightarrow\{A_5\}$.

Кроме этих правил часто используют дополнительные правила следствия ФЗ1, ФЗ2 и ФЗЗ.

Правило ФЗ4 (свойство расширения). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$ и задана функциональная зависимость $X\rightarrow Y$, то тогда для любого $Z\subseteq U$ имеет место функциональная зависимость $X\bigcup Z\rightarrow Y$.

Правило ФЗ5 (свойство продолжения). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$, $W\subseteq U$, $Z \subseteq U$ и задана функциональная зависимость $X\rightarrow Y$, то для любых $W\subseteq Z$ имеет место зависимость $X\bigcup Z\rightarrow Y\bigcup W$.

Правило ФЗ6 (свойство псевдотранзитивности). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$, $W\subseteq U$, $Z \subseteq U$ и заданы функциональные зависимости $X\rightarrow Y$, $Y\bigcup W\rightarrow Z$, то имеет место функциональная зависимость $X\bigcup W\rightarrow Z$.

Правило ФЗ7 (свойство аддитивности). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$, $Z \subseteq U$ и заданы функциональные зависимости $X\rightarrow Y$, $X\rightarrow Z$, то имеет место функциональная зависимость $X\rightarrow Y\bigcup Z$.

Правило ФЗ8 (свойство декомпозиции). Если $X\subseteq U$, $Y\subseteq U$, $Z \subseteq U$ и при этом $Z\subseteq Y$ и задана функциональная зависимость $X\rightarrow Y$, то будет иметь место функциональная зависимость $X\rightarrow Z$.

Очевидно, что даже при небольшом числе зависимостей F число функциональных F^+ должно быть довольно большое.

Функциональная зависимость играет важную роль в моделировании понятий. Вместе с тем можно отметить, что это отнюдь не общий вид зависимости. Важную роль играет также многозначная зависимость.

Многозначные зависимости. Рассмотрим отношение $R(X, Y, Z)$, где X, Y, Z — множество параметров. Кортеж отношения $R(X, Y,Z)$ обозначим через $<x, y, z>$. Если в отношении $R (X, Y, Z)$ присутствуют кортежи $<x, y, z>$; $<x, y', z>$;... $(x, y, z'>$; $<x, y', z'>$, то говорят, что существует многозначная зависимость параметров Y и Z от X. Эта зависимость обозначается $X \to \to Y$.

Пример. Рассмотрим таблицу, в которой указанные школьники-победители олимпиад по предметам:

№ п/п	Ф. И. О. школьника	Школа №	Предмет
1	Давыдов В. А.	154	Математика
2	Давыдов В. А.	154	Физика
3	Кулешов К. Г.	820	Биология
4	Жукова А. М.	154	Математика
5	Жукова А. М.	154	Физика

В нашем примере имеют место две многозначные зависимости:
ШКОЛА №→→ПРЕДМЕТ (например, № 154→ → (математика, физика), № 820→→ (биология)) и ШКОЛА № →→Ф. И. ШКОЛЬНИКА

Другими словами, X многозначно определяет Y, если и только если множество $Y=\{y|(x, y, z)\in R\}$ определяется только X.

Многозначную зависимость определяют путем следующей проверки.

Если для двух кортежей t и s отношения $R(X, Y, Z)$ справедливо первое условие:

$$t[X]= s\,[X]$$

т.е. t и s совпадают по значениям параметров X и существует третий кортеж u, такой, что выполняется второе условие:

$$u[X, Y]=t[X, Y];\quad u[Z]=s[Z],$$

то существует многозначная зависимость.

Пример. Рассмотрим отношение ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ (Ф. И. О. ШКОЛЬНИКА, ШКОЛА №, ПРЕДМЕТ).

Проверим на основании вышеприведенного условия многозначную зависимость ШКОЛА №→→ПРЕДМЕТ

1) t [№154]= s [№154].

Можно отметить, что существует четыре кортежа, у которых значение параметра ШКОЛА И (№ 154) совпадает, т.е. первое условие выполняется. В качестве t и s возьмем, например, кортежи

t [Давыдов В. А. № 154 математика],

s [Жукова А. М. № 154 физика].

Рассмотрим, существует ли такой кортеж u, для которого будет выполняться и второе условие, определяющее многозначную зависимость.

Можно выделить кортежи, для которых выполняется соотношение
u[№ 154, математика] =t [№ 154, математика]; это следующие кортежи:

t [Давыдов В. А., № 154, математика],

u [Жукова А. М., № 154, математика],

т.е. первому уравнению во втором условии - кортежи удовлетворяют. Анализируя таблицу, заметим, что для того, чтобы существовала многозначная зависимость ШКОЛА №→→ПРЕДМЕТ, должно выполняться условие

u[Жукова А. М.]=s [Жукова А. М.],

что действительно имеет место.

Другой способ проверки многозначной зависимости $X \to\to Y$ на отношение $R(X, Y, Z)$ может быть осуществлен на основе проверки существования кортежа $<x, y, z>$ при условии, что существуют кортежи $<x, y, z'>$ и $<x, y', z>$.

Следует иметь в виду, что в общем случае формальная проверка должна выполняться на множестве всех возможных экземпляров кортежей отношения.

Правила вывода многозначных зависимостей сходны с правилами вывода функциональных зависимостей:

МЗ1 (дополнение). Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $X \to\to Y$, то имеет место многозначная зависимость $X \to\to U - X - Y$.

МЗ2 (присоединение). Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $Z \subseteq W$, $X \to\to Y$, то имеет место зависимость $XW \to\to YZ$.

МЗ3 (транзитивность). Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $X \to\to Y$, $Y \to\to Z$, то $X \to\to Z — Y$.

Существуют также правила вывода для совокупности ФЗ и МЗ:

ФМ1. Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $X \to Y$, то $X \to\to Y$.

ФМ2. Если $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $W \subseteq U$ и W не пересекается с Y (т.е. $W \bigcap Y=0$), и $X \to\to Y$, $W \to Z$, то имеет место зависимость $X \to\to Z$.

ФМ3. Если $X \to\to Y$, $XY \to Z$, то $X \to Z — Y$.

Функциональная и многозначная зависимости являются свойствами, существующими между двумя параметрами (множествами). С их помощью осуществляют декомпозиции (разбиение) отношения на два или восстанавливают исходное отношение, соединяя два отношения (рис. 11).

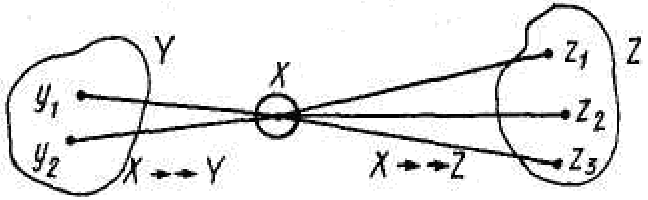


Рис. 11. Пример изображения многозначных зависимостей

Одним из основных вопросов любой организации понятий есть вопросы сохранения жизнеспособности прикладных программ при изменениях в БП для того, чтобы избежать трудностей поддержания БП и назначения ключей для каждого отношения. Рассмотрим отношение $R\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Возможный ключ k отношения R — это комбинация параметров (возможно, состоящих из одного параметра), обладающих следующими свойствами.

1. В каждом кортеже отношения R величина k единственным образом определяет этот кортеж.
2. Не существует параметра в возможном ключе k, который мог бы быть удален без нарушения свойства 1.

Всегда существует, по крайней мере, один возможный ключ, т.е. комбинация всех параметров R удовлетворяет свойству 1.

Если в отношении R имеется несколько возможных ключей, то один из них выбирается в качестве первичного.

Параметр A_i отношения R называется также первичным, если он входит в состав любого ключа (возможного или первичного) отношения.

Нормальные формы схем отношений. Рассмотрим четыре уровня нормализации схем отношений и соответственно четыре нормальные формы отношений: 1НФ, 2НФ, 3НФ, 4НФ. Их взаимное отношение можно представить в виде, представленном на рис. 12.

Из рис. 12 следует, что отношения являются как бы вложенными друг в друга по возрастанию номеров.

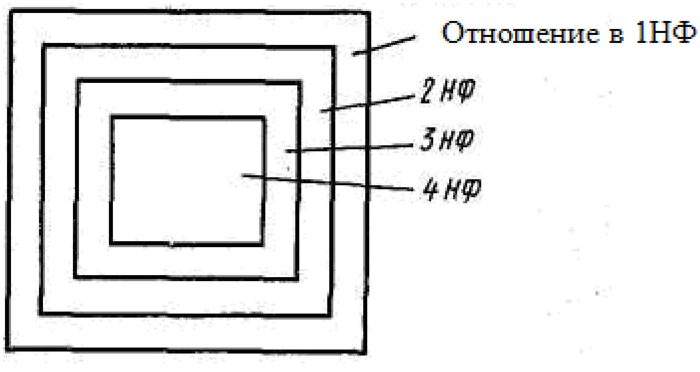


Рис. 12. Взаимное отношение нормальных форм

Так, например, если отношение находится в 4НФ, то оно будет удовлетворять и условиям 3НФ, 2НФ, 1НФ.

Отношение находится в **первой нормальной форме** (1НФ), если каждый параметр отношения есть простым (атомарным) параметром, т.е. отсутствуют составные. Рассмотрим схему отношения:

АВТОМОБИЛЬ (МОДЕЛЬ, МАРКА, МОЩНОСТЬ, СТОИМОСТЬ, ИЗГОТОВИТЕЛЬ (НАЗВАНИЕ ЗАВОДА, ГОРОД)).

В этом случае параметр ИЗГОТОВИТЕЛЬ составной. Для приведения к 1НФ отношения необходимо избавиться от составного отношения - ИЗГОТОВИТЕЛЬ. Этого можно добиться, рассматривая вместо составного параметра его составляющие:

АВТОМОБИЛЬ (МОДЕЛЬ, МАРКА МОЩНОСТЬ, СТОИМОСТЬ, НАЗВАНИЕ ЗАВОДА ИЗГОТОВИТЕЛЯ, ГОРОД).

Приведение отношения к 1НФ достаточно для реализации языков запросов.

Чтобы рассмотреть 2НФ, введем понятие **полной зависимости**. Пусть X и Y — подмножества параметров отношения R и $X \rightarrow Y$. Если Y функционально не зависит от любого подмножества A множества X (причем A не совпадает с X), то Y называется полностью зависимым от X в R. Тогда говорят, что отношение R находится **во второй нормальной форме** (2НФ), если оно нормализовано, т.е. находится в первой нормальной форме, и каждый непервичный параметр полностью зависит от первичного ключа.

Отношение R находится **в третий нормальной форме** (3НФ), если оно находится во второй нормальной форме и каждый непервичный параметр в отношении R не содержит транзитивных зависимостей от первичного ключа. Транзитивная зависимость наблюдается в R, если существует такой параметр A, что $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow A$, $Y \leftrightarrow X$, где X — ключ.

Можно заметить, что 2НФ и 3НФ накладывают ограничения на зависимости только в связи с непервичными параметрами. Поэтому в рассмотрение вводят **усиленную третью нормальную форму** (или нормальную форму Бойса-Кодда).

Отношение R находится в усиленной третий нормальной форме, если для всех зависимостей $X \rightarrow A$, когда A не принадлежит X, X является возможным ключом отношения R. Обычно параметр, от которого функционально полно зависит другой, называют **детерминантой**. Поэтому говорят, что отношение R находится в усиленной третий нормализованной форме, если все детерминанты являются ключами.

Можно отметить следующее отличие этих нормальных форм по информационному содержанию. Вторая нормальная форма более информативна, чем первая, а третья более информативна, чем вторая.

Поэтому 3НФ и усиленная 3НФ больше понятны пользователю и приспособленны к реализации.

Существует также нормальная форма, которая учитывает многозначные зависимости, ее называют **четвертой нормальной формой** (4НФ). Отношение R находится в четвертой нормальной форме, если каждый раз, когда существует многозначная зависимость $X \to\to Y$ (где $Y \neq \varnothing$, $Y \not\subset X$ и XY состоит не из всех параметров R), также существует зависимость $X \to A$ для любого параметра A в R.

Получение отношений нормальной формы достигается декомпозицией их схем. Под декомпозицией схемы отношения $R=\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ понимается замена схемы совокупностью отдельных схем

$\rho = \{R_1, R_2, ..., R_k\}$ таких, что $R_1 \bigcup R_2 \bigcup ... \bigcup R_n = R = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. При этом не накладывается никаких ограничений на пересечение любых двух элементов совокупности ρ.

Для извлечения требуемых понятий из библиотеки разрабатываются специальные языки манипулирования понятиями, обеспечивающие выполнение необходимых операций. Для разработки и исследования языков манипулирования понятиями рекомендуется использовать математический аппарат, основанный на следующих трех подходах:

реляцинная алгебра;

реляцинное исчисление с переменными-кортежами;

реляцинное исчисление с переменными-параметрами.

Реляционная алгебра. В ней определяются основные операции над параметрами реляцинного типа. Все операции, вводимые в реляцинной алгебре, можно разделить на традиционные над множествами и специализированные, вводимые для удобства поиска в БП.

К операциям первой группы относятся: объединение, пересечение, разность, декартово произведение. К операциям второй группы следует отнести: проекцию, ограничение, соединение, деление.

Объединение. В результате применения этой операции получается отношение, объединяющее кортежи, содержащиеся в исходных отношениях. Пусть имеем два исходных отношения R_1 и R_2. Операция объединения этих отношений будет обозначаться $R_1 \bigcup R_2$:

$$R_1 \bigcup R_2 = \{r | r \in R_1 \text{ или } r \in R_2\}.$$

Объединяемые отношения должны иметь одинаковые параметры (должны быть объединимыми):

Пример.

R_1:

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3

R_2:

A	B	C
a_3	b_4	c_2
a_4	b_5	c_3
a_2	b_2	c_2

$R_1 \cup R_2$

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3
a_3	b_4	c_2
a_4	b_5	c_3
a_2	b_2	c_2

Пересечение. В данной операции (которая обозначается $\bigcap$) получают отношение, включающее кортежи, общие для R_1 и R_2:

$$R_1 \bigcap R_2=\{r|r \in R_1 \text{ и } r \in R_2\}.$$

Пример. Для отношения R_1 и R_2 из предыдущего примера получим

$R_1 \cap R_2$:

A	B	C
a_2	b_2	c_2

Разность. В результате применения этой операции $(R_1 \backslash R_2)$ получается отношение, которое содержит кортежи, являющиеся кортежами отношения R_1 и не являющиеся кортежами отношения R_2:

$$R_1 \backslash R_2 =\{r|r \in R_1 \text{ и } r \notin R_2\}.$$

Пример.

$R_1 \setminus R_2$:

A	B	C
a_1	b_1	c_1
a_3	b_3	c_3

Декартово (прямое) произведение. В этой операции ($R_1 \times R_2$) из m-местного отношения R_1 и n-местного отношения R_2 получают $(m+n)$-местное отношение. Причем первые m элементов представляют кортежи из отношения R_1, а последние n элементов - кортежи из отношения R_2:

$$R_1 \times R_2=\{\langle r_1,\ r_2,\rangle\ |r_1 \notin R_1 \text{ и } r_2 \in R_2\}.$$

Пример.

$R_1 \times R_2$:

A	B	C	A	B	C
a_1	b_1	c_1	a_3	b_4	c_2
a_2	b_2	c_2	a_3	b_4	c_2
a_3	b_3	c_3	a_3	b_4	c_2
a_1	b_1	c_1	a_4	b_5	c_3
a_2	b_2	c_2	a_4	b_5	c_3
a_3	b_3	c_3	a_4	b_5	c_3
a_1	b_1	c_1	a_2	b_2	c_2
a_2	b_2	c_2	a_2	b_2	c_2
a_3	b_3	c_3	a_2	b_2	c_2

Проекция. Операция проекции предназначена для изменения числа столбцов в отношении, т.е. в том случае, когда из строк-кортежей требуется исключить какие-либо параметры.

Обозначим через $j_1, j_2, ..., j_n$ — номера столбцов n-местного отношения R. Операцию определения проекции отношения R обозначим через $\pi_{j_1, j_2, ..., j_n}(R)$, а сама операция заключается в том, что из отношения R выбираются столбцы и компонуются в указанном порядке $j_1, j_2, ..., j_n$.

Пример. Рассмотрим отношение ТЕЛЕВИЗОР.

Наименование	*Индекс*	*Диагональ кинескопа, см*	*Цена, руб*
Рекорд	ВЦ-311	47	640
Рубин	Ц-266Д	67	1040
Темп	Ц-280Д	61	755
Электроника	Ц-283	61	755
Горизонт	Ц-355	57	610

Тогда можно получить проекцию $\pi_{1,4}$ (ТЕЛЕВИЗОР):

Наименование	Цена, руб.
Рекорд	640
Рубин	1040
Темп	755
Электроника	755
Горизонт	610

$\pi_{4,1,3}$ (ТЕЛЕВИЗОР):

Цена, руб.	Наименование	Диагональ кинескопа, см
640	Рекорд	47
1040	Рубин	67
755	Темп	61
755	Электроника	61
610	Горизонт	51

π_4 (ТЕЛЕВИЗОР):

Цена, руб.
640
1040
755
755
610

Можно отметить, что в последней проекции оказались одинаковые строки.

Ограничение. Ограничением называют такую операцию, в которой отношение исследуют по строкам и выделяют множество строк, которые удовлетворяют заданным условиям.

Обозначим через r строку (кортеж) отношения R, а через θ определим одно из отношений: $=$, $\neq$, $<$, $\leq$, $>$, $\geq$. Тогда θ-ограничение между избранным параметром.

A в отношении R и некоторой величиной C определяют следующим образом: $R[A\theta C]=\{r|r\in R$ и $r[A]\theta C\}$, где $r[A]$ соответствует значению параметра A в строке r.

Таким образом, θ-ограничение обеспечивает получение среди строк отношения R только тех строк, в которых значение параметра A и значение величины C удовлетворяют условию сравнения θ.

Например, нужно из отношения ТЕЛЕВИЗОР выделить те марки телевизоров, которые имеют стоимость меньше 700 руб.

ТЕЛЕВИЗОР [цена < 700]:	РЕКОРД	ВЦ-311	47	640
	ГОРИЗОНТ	Ц-355	51	610

Следует отметить, что в частном случае в операции сравнения вместо величины *C* можно использовать другой домен *B*. Тогда операция ограничения определяется как

$$R(A\theta B)=\{r\,|\,r\in R \text{ и } r(A)\theta r(B)\}$$

Пример. Пусть отношение *R* имеет вид:

$$R:\quad \begin{array}{cccc} (A, & B, & D, & E) \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & 15 & 17 & p \\ k & 22 & 28 & q \\ e & 39 & 11 & e \\ m & 16 & 43 & m \end{bmatrix}$$

Так как операция θ-ограничение предусматривает выбор среди строк отношения *R* только тех, в которых значения параметров *A* и *B* удовлетворяют условию сравнения θ, то для условий (*B*<*D*) и *(A= E)* получим следующие отношения:

$$R[B<D]:\quad \begin{array}{cccc} A & B & D & E \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} a & 15 & 17 & p \\ k & 22 & 28 & q \\ m & 16 & 43 & m \end{bmatrix}$$
$$R[A=E]:\quad \begin{array}{cccc} A & B & D & E \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} e & 39 & 11 & e \\ m & 16 & 43 & m \end{bmatrix}$$

Соединение. Операция соединения обратна операции проекции. Рассмотрим для простоты два бинарных отношения $R_1(A, B)$ и $R_2(B, C)$. Соединением (обозначается $\rhd\lhd$) отношений R_1 и R_2 ($R_1 \rhd\lhd R_2$) называют операцию, при которой соединяют два отношения, используя в качестве признака соединения общий параметр *Y:*

$$R_1 \bowtie R_2=\{\langle A,\ \mathrm{B},\ C\rangle\,|\,\langle A,\ B,\rangle\in R_1 \text{ и } \langle B,\ C,\rangle\in R_2\}.$$

Отношение $R_1 \rhd\lhd R_2$ является отношением с параметрами <*A*, *B*, *C*>.

Например:

R_1:	Наименование	Индекс	R_2:	Индекс	Цена
	Рекорд	ВЦ-311		ВЦ-311	640
	Темп	Ц-280Д		Ц-280Д	755
	Электроника	Ц-283		Ц-283	755
	Горизонт	Ц-355		Ц-355	610

Отношение $R_1 \rhd\lhd R_2$ будет иметь вид:

Наименование	Индекс	Цена
Рекорд	ВЦ-311	640
Темп	Ц-280	755
Электроника	Ц-283	755
Горизонт	Ц-355	610

Операция соединения соответствует случаю, когда просто стыкуются таблицы отношений. Но поскольку в получающейся таблице параметры с одинаковым содержанием присутствуют дважды, один из одинаковых столбцов исключают. Такую операцию называют **естественным соединением**. Операцию соединения можно использовать не только для бинарных, но и для n-местных отношений:
$R^1 \bowtie R_2 \bowtie ,..., \bowtie R_n=\{M|M$ — кортежи, которые образованы соединением параметров отношений $R_1, R_2,..., R_n\}$.
Отметим, что рассматривались в основному операции соединения фактически по условию равенства двух параметров в двух отношениях. В общем случае соединение можно осуществлять не только по условию равенства, но и по любой другой θ: =, ≠, <, ≤, >, ≥:

$$R_1 \underset{A\theta B}{\bowtie} R_2=\{(r,\ s)\,|\, r\in R_1 \text{ и } s\in R_2 \text{ и } (r(A)\theta r(B))\},$$

когда θ - оператор равенства, то операцию называют **эквисоединением**.
Если сравнение θ возможно, то для параметров A и B одинаковые имена необязательные.

Пример. Пусть имеются отношения $R_1(A, B, C)$ и $R_2(D, E, F)$

$$R_1: \quad A\ B\ C \qquad\qquad R_2: \quad D\ E\ F$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 7 \\ 5 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} d_1 & 8 & 3 \\ d_2 & 8 & 2 \\ d_3 & 3 & 10 \\ d_4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

Для условий (C=E), (B>F) получим

$$R_1 \underset{C=E}{\bowtie} R_2: \quad \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 & 5 & 8 & d_1 & 8 & 3 \\ a_2 & 5 & 8 & d_2 & 8 & 2 \\ a_2 & 7 & 8 & d_1 & 8 & 3 \\ a_2 & 7 & 8 & d_2 & 8 & 2 \\ a_3 & 2 & 5 & d_4 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \underset{B>F}{\bowtie} R_2: \quad \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 3 & 4 & d_2 & 8 & 2 \\ a_2 & 5 & 8 & d_1 & 8 & 3 \\ a_2 & 5 & 8 & d_2 & 8 & 2 \\ a_2 & 7 & 8 & d_1 & 8 & 3 \\ a_2 & 7 & 8 & d_2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Таким образом, с помощью операции соединения можно объединять строки разных отношений по критерию сравнения значений каких-нибудь двух параметров.

Деление. Рассмотрим деление m-местного отношение R_1 на n-местное отношение R_2.

Пусть из общего количества m параметров отношения R_1 выделим несколько параметров: $A, B,...,F$ и из них составим список, обозначив его через M. Набор значений параметров из M столбцов можно рассматривать как проекцию отношения R на список параметров M, т.е. $\pi_M(R_1)$. Тогда через $\overline{M}$ будут обозначаться параметры дополнительного к M, т.е. параметры отношения R_1, не вошедшие в список M, и соответственно значения параметров из списка $\overline{M}$ определяются $\pi_{\overline{M}}(R_1)$. Будем полагать, что делимое (отношение R_1) может быть представлено таким образом, что его параметры сгруппированы в порядке $R_1(\overline{M}, M)$. В отношении R_2 также выделим несколько параметров $G, K,...,P$ и составим из них список, обозначив его через N (формально этот список представляет собой проекцию $\pi_N(R_2)$). Если проекции $\pi_M(R_1)$ и $\pi_N(R_2)$ объединимы, т.е. имеют одинаковое количество параметров, то можно рассматривать операцию деления R_1 по M на R_2 по N (что обозначается как $R_1[M \div N]R_2$). Операция деления $R_1[M \div N]R_2$ представляет собой операцию, которая определяет такое наибольшее множество значений параметров с

$\pi_{\bar{M}}$ (R_1) (обозначим его через $r_1(\bar{M}))$, что прямое произведение этого множества $r_1(\bar{M})$ с $\pi_N(R_2)$ содержится в R_1.

Операции деления можно определить с помощью уже ранее введенных операций таким образом:

$$R_1[M \div N]R_2 = \pi_{\overline{M}}(R_1) \setminus \pi_{\overline{M}}((\pi_{\overline{M}}(R_1) \times \pi_N(R_2)) \setminus R_1),$$

где $\pi_{\bar{M}}$ - это проекция отношения на параметры списка $\bar{M}$.

Пример.

R_1:

A	B	C	D
a_1	b_1	c_3	d_1
a_2	b_1	c_1	d_1
a_3	b_2	c_2	d_2
a_1	b_3	c_1	d_3
a_3	b_2	c_1	d_1
a_3	b_1	c_2	d_2

R_2:

C	D
c_1	d_1
c_2	d_2

Включим в список матрицы M параметры C и D (из отношения R_1), тогда в список $\bar{M}$ войдут параметры A и B, а в список N — параметры C и D из отношения R_2:

$R_1[(C, D) \div (C, D)]R_2$

A	B
a_3	b_2

Действительно,

$\pi_{\overline{M}}(R_1)$:

A	B
a_1	b_1
a_2	b_1
a_3	b_2
a_1	b_3
a_3	b_1

$\pi_{\overline{M}}(R_1) \times \pi_N(R_2)$:

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_1	d_1
a_2	b_1	c_2	d_2
a_3	b_2	c_1	d_1
a_3	b_2	c_2	d_2
a_1	b_3	c_1	d_1
a_1	b_3	c_2	d_2
a_3	b_1	c_1	d_1
a_3	b_1	c_2	d_2

$\pi_{\overline{M}}(R_1) \times \pi_N(R_2) \setminus R_1$:

A	B	C	D
a_1	b_1	c_1	d_1
a_1	b_1	c_2	d_2
a_2	b_1	c_2	d_2
a_1	b_3	c_1	d_1
a_1	b_3	c_2	d_2
a_3	b_1	c_1	d_1

$$\pi_{\overline{M}}\left(\left(\pi_{\overline{M}}(R_1) \times \pi_N(R_2)\right) \setminus R_1\right):$$

A	B
a_1	b_1
a_2	b_1
a_1	b_3
a_3	b_1

$$R_1[(C,\ D) \div (C,\ D)]\, R_2 = \pi_{\overline{M}}(R_1) \setminus \pi_{\overline{M}}((\pi_{\overline{M}}(R_1) \times \pi_N(R_2)) \setminus R_1):$$

A	B
a_3	b_2

При **построении языка манипулирования понятиями на основе реляционной алгебры каждый оператор языка реализует некоторый набор алгебраических операций**, в результате выполнения которых получается желательное исходное отношение.

Другой подход к построению языка манипулирования понятиями основан на использовании **моделей реляционного исчисления**.

Суть этого подхода заключается в том, что желательный результат определяется не заданием набора операций над отношениями, а путем описания требований, которым должно удовлетворять результирующее отношение. СУБП представляется самой подобрать последовательность операций, которые ведут к поставленной цели. Естественно, что языки, которые основаны на использовании моделей реляционного исчисления, представляют собой языка очень высокого уровня.

Реляционное исчисление. В реляционном исчислении, равно как и в реляционной алгебре, имеется набор понятий и операций, которые позволяют записывать любое отношение в виде некоторой формулы или формального выражения (α-выражения).

Формулы в реляционном исчислении кроме арифметических операций (= , ≠, <, ≤, >, ≥) включают дополнительные **логические** операции. К ним относят операции квантификации:

$\forall$ - квантор общности и $\exists$ - квантор существования.

Квантор общности $\forall$ читается как: «все для всех», «для каждого», «который бы не был».

Например, запись $\forall$ *x* читается «для любого *x*» или «для всех *x*».

Квантор существования $\exists$ читается «для некоторого», «существует хотя бы один». Например, $\exists$ *y* читается «для некоторого *y»* или «существует *y* такой, что». Кроме кванторов в реляционном исчислении используются логические операции: $\vee$, $\wedge$, $\urcorner$.

Операция $\vee$ носит название **логическое сложение,** или **дизъюнкция,** и по смыслу соответствует слову «ИЛИ». Операция $\wedge$ **логическое умножение, или конъюнкция,** и отвечает слову «И». Операция $\urcorner$ — операция отрицания, отвечает «НЕ», т.е. запись $R_1 \wedge R_2$ будет читаться как «отношение R_1 И отношение R_2», запись $R_1 \vee R_2$ — «отношение R_1 ИЛИ отношение R_2».

При записи выражения в реляционном исчислении используется понятие **свободных или связных переменных.**

Вхождение переменных *x* в формулу реляционнго исчисления $\psi(x)$ связано, если в ψ она находится в части формулы, которая начинается квантором $\forall$ или $\exists$, за которым непосредственно следует переменная *x*. В таких случаях говорят, что квантор связывает переменную *x*. В остальных случаях вхождение переменной *x* в формулу ψ свободно.

Например, в формуле

$$\forall x (R_1(x, y) \vee (\exists y) R_2(x, y, z))$$

переменная *x* связана, переменная *y* в отношении R_1 свободна, а в R_2 — связана, переменная *z* свободна.

Формулы в реляционном исчислении строятся из атомов и совокупности арифметических и логических операторов. Атомы в реляционном исчислении представляются по-разному. В зависимости от того, что используется в качестве переменной - кортеж (строка) или параметр (столбец). Поэтому различают реляционное исчисление с переменными-кортежами и переменными -доменами.

Реляционное исчисление с переменными-кортежами. Выражение такого исчисления может иметь следующий вид:

$$\{r \mid \psi(r)\},$$

где *r*-кортеж: ψ — некоторая формула исчисления. Например, выражение $\{r | R_1(r) \wedge R_2(r)\}$, где в качестве формулы $\psi(r)$ используется выражение $R_1(r) \wedge R_2(r)$, означает, что необходимо получить множество всех кортежей *r*, таких, что они принадлежат одновременно как отношению R_1, так и отношению R_2. В том случае, когда в качестве переменных в реляционном исчислении используются кортежи, атомы, из которых конструируются формулы, они могут быть следующих типов:

1. Атом — отношение $R(r)$, где *r* — кортеж в отношении *R*.
2. Атом — конструкция типа $s[i]\theta v[j]$ или $s[i]\theta c$, где *c* — некоторая константа; θ — арифметический оператор $(=, \neq, <, \leq, >, \geq)$;

s, v — кортежи; *i, j* — номера (или имена) параметров (столбцов) в соответствующих кортежах. Например, атом $(s[1] = q[7])$ означает, что первая компонента кортежа *s* равна седьмому кортежу *q*, а атом $s[5]<10$ означает, что пятая компонента меньше 10. Два вышеперечисленных типа вида атомов являются единственными в реляционном исчислении.

Сами формулы рекурсивно конструируются из атомов по следующим правилам.

1. Любой атом - это формула. Все вхождения переменных-кортежей, которые упомянуты в атоме, являются свободными.

2. Если ψ формула, то $\neg\psi$ — тоже формула ($\neg$ - символ логического отрицания).

3. Если ψ_1 и ψ_2 формулы, то и выражения $\psi_1 \wedge \psi_2$ и $\psi_1 \vee \psi_2$ также являются формулами. Причем свободными (связными) являются те и только те вхождения переменных, которые происходят от свободных (связных) вхождений переменных ψ_1 и ψ_2.

4. Если ψ формула и r - свободная переменная-кортеж этой формулы, то $\forall r(\psi))$ и $\exists r(\psi)$ также формулы, переменная в этом случае становится связанной.

5. Формулы могут при необходимости заключаться в скобки.

6. Ничто другое не является формулой.

Реляционное исчисление с переменными-доменами. В этом случае в качестве переменных вместо кортежей используются домены. Реляционное исчисление с переменными на доменах строится с использованием тех же операторов, которые и с переменными кортежами. Но в качестве атомов формул исчисления используются следующие типы:

1. $R(x_1, x_2, ..., x_n)$, где R — n-арное отношение, x_i — константа или переменная на некотором домене.

Атом $R(x_1, x_2, ..., x_n)$ указывает, что значения x_i, которые являются переменными, должны быть выбраны так, чтобы $(x_1, x_2, ..., x_n)$ было кортежем отношения.

2. $x\theta y$, где x и y — константы или переменные на некотором домене, θ - арифметический оператор сравнения.

В остальном формулы реляционного исчисления с переменными-доменами строятся аналогично формулам исчисления с переменными-кортежами.

Выражение реляционного исчисления с переменными на доменах имеет вид $\{x_1, x_2.....x_n|\psi(x_1, x_2, ..., x_n)\}$, где ψ — формула, обладающая тем свойством, что только ее свободные переменные на доменах являются различными переменными $x_1, x_2, ..., x_n$.

Выражение реляционного исчисления $\{r|\psi(r)\}$ или $\{x_2, x_2, ..., x_n|\psi(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ служит основой реальных языков манипулирования понятиями.

В реляционном исчислении доказано, что для любого простого выражения исчисления существует эквивалентное ему выражение реляционной алгебры. Поэтому может быть построена универсальная процедура для перевода выражений реляционного исчисления в эквивалентное по смыслу алгебраическое выражение.

4.3. Сетевая модель структуры понятий

В основе разработки сетевых моделей структур понятий лежит возможность представления связей между понятиями и образующими их признаками и свойствами в графической форме.

В основе сетевой модели структуры понятий лежат понятия «сущность» и «связь», а к основным типам структур модели относят: параметр признака понятия, блок параметров, запись, набор.

Сущность (предмет) — это собирательное понятие, некоторая абстракция реально существующего объекта предметной области, процесса или явления. Набор однородных объектов, процессов или явлений определяет **тип** сущности, а каждый конкретный объект, процесс или явление в наборе представляет **экземпляр** сущности. Связи между сущностями фиксируются заданием множества отношений. При анализе связей между сущностями наиболее часто используются бинарные связи, т.е. связи между двумя сущностями. По характеру бинарные связи между типами сущностей различают:

один к одному (1:1);

один ко многим $(1:M)$;

много к одному $(M:1)$;

много ко многим $(M:M)$.

Параметр признака понятия - это наименьшая единица, характеризующия признак понятия, которой можно оперировать в БП и выполнять построение всех других структур понятий и признаков. Параметр признака имеет имя, которое хранится в БП как часть описания понятия. Именами параметров признаков могут быть, например, ИНДЕКС ИЗДЕЛИЯ, ДАТА ВЫПУСКА, СТОИМОСТЬ и т.д. В сетевых моделях структур понятий параметры признаков (свойств) используются для представления совокупности признаков сущности (предмета).

Блок параметров признаков (свойств) — совокупность параметров признаков (свойств), которые имеют общее имя, которую можно рассматривать как единое целое. Например, блок параметров ДАТА состоит из параметров признаков: ЧИСЛО, МЕСЯЦ, ГОД.

Запись понятия (сущности) - совокупность параметров признаков (свойств) или самих признаков (свойств), которые описывают конкретный экземпляр понятия (сущности). Предположим, что понятие (сущность) ТЕЛЕВИЗОР описывается параметрами признаков:

МАРКА; ИНДЕКС, ЦЕНА. Тогда запись в этом объекте для конкретного изделия может быть: РЕКОРД, ВЦ-311, 640.

Сетевая модель структур понятий в качестве базовых использует понятие «экземпляр» и «набор».

Тип записи — это общее понятие, которое представляет собой собрание экземпляров записи. Каждый тип записи состоит из некоторого числа параметров признаков, значения которых размещаются в экземплярах записи данного типа. В качестве связей между типами записей используются наборы. Каждый набор представляет собой отношение (связь) между двумя или несколькими типами записей. Он отображает множество связей между экземплярами записей типа «владелец» и «член». Для каждого типа набора один тип записи может быть объявлен «владельцем», а остальные — его «члены». При этом любой экземпляр записи типа «член» может быть связан не больше чем с одним экземпляром типа «владелец».

Графическая интерпретация сетевой модели понятий и признаков их образующих, представляет собой ориентированный граф без петель. Причем, вершинам графа соответстуют типы записей, а дугам - наборы, отражающие связи между соответствующими типами записей. Направленные стрелки на дуге ориентированы от записи типа «владелец» к записи типа «член».

Подмножество дуг, соединяющих одну запись - владельца с несколькими записями - членами, называется **экземпляром набора**.

Рассмотрим, например, граф, отражающий упрощенную базу понятий комплектующих деталей телевизора (рис. 13).

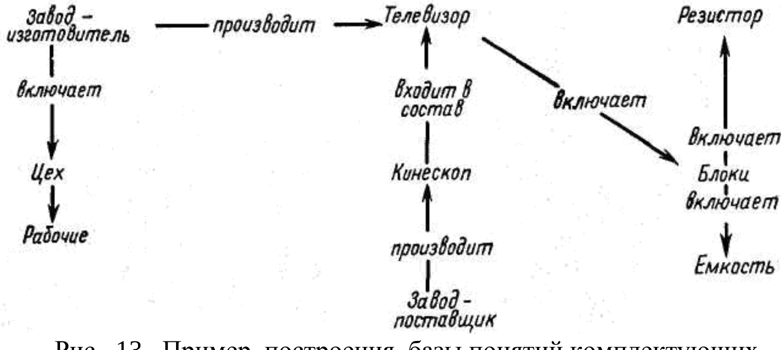


Рис. 13. Пример построения базы понятий комплектующих телевизора

Стрелки между вершинами отвечают наборам понятий, отражающих связи между записями, а надписи над стрелками - именам наборов.

Как тип записи, так и набор параметров в общем случае могут быть представленны таблицами. Но в отличие от таблиц реляционных моделей, в сетевых моделях данных они могут допускать дубликаты строк или записей.

В сетевой модели понятий вводится особый тип набора признаков, называемый **сингулярным** и имеющий только один экземпляр набора этого типа. В нем запись «владелец» отсутствует (владельцем является система управления БП). Этот тип набора обычно используется для создания традиционного файла, состоящего из однотипных записей.

В сетевой модели понятий есть несколько ограничений, которые необходимо учитывать при построении модели понятия. Основным внутренним ограничением является функциональность связей, так как нельзя реализовать связи типа *М:М.* В модели понятия это ограничение соответствует положению: в конкретном экземпляре набора экземпляр записи числа может иметь не больше одного экземпляра записи владельца.

Для того чтобы отобразить принятую схему данных в памяти ЭВМ, требуется описать все таблицы, соответствующие записям и наборам. Для этого предполагается разработать язык описания понятий, позволяющий задать схему понятий с помощью четырех типов статей.

Статья схемы задает имя схемы БП. Статья запишется как:

SCHEMA NAME IS имя схемы.

Статья области характеризует область памяти, в которой размещаются экземпляры записей БП. С помощью этой статьи можно в случае необходимости распределять БП по разным ЗУ. Поскольку в общем случае можно выделить под БП несколько разных областей, каждая из них должна иметь собственное уникальное имя и описываться следующим образом:

AREA NAME IS имя области;

Статья записи содержит описание типа записи, которая включает имя записи и характеризуюее все параметры признака, которые входят в ее состав. Каждому типа записи отвечает своя статья. Статья записи начинается предложением:

RECORD NAME IS имя записи;

Следующий за этим предложением текст зависит от варианта реализованного ЯОП. Поскольку ряд СУБП реализуют ЯОП, дальше будем рассматривать случай, когда статья записи формируется на его основе. Тогда вторым предложением в схеме записи будет идти предложение:

$$\text{LOCATION MODE IS} \begin{cases} \text{DIRECT} \\ \text{CALC (имя процедуры) USING (имя calc-элемента)} \\ \text{DUPLICATES ARE (NOT) ALLOWED} \\ \text{VIA имя набора SET} \\ \text{SYSTEM} \end{cases}$$

где в фигурных скобках указано одно из возможных описаний.
DIRECT используется в том случае, когда предполагается, что номер страницы области для размещения записи будет определяться программой, которая выполняет включение записи в БП.
CALC применяется, когда предполагается, что специальная программа будет использовать значение ключа БП.
Ключ библиотеки понятий — это идентификатор, который уникально определяет запись, помещенную в БП.
Для того чтобы можно было различать отдельные экземпляры записей, которые сохраняются в БП, каждому экземпляру записи присваивается значение ключа, который играет роль внутритсистемного идентификатора
Зная значение ключа, можно быстро отыскать соответствующую запись. В формате CALC USING имя calc-элемента, в качестве имен Calc-Элемента используются имена параметров признаков записи.
В том случае если ключи не имеют дубликатов значений, то в варианте CALC следует указать DUPLICATES ARE NOT ALLOWED. Если ключ имеет дубликаты значений, например в качестве ключа задан параметр признаков ФАМИЛИЯ в записи типа СТУДЕНТ, то следует указать DUPLICATES ARE ALLOWED.
VIA SET используется в том случае, когда нужно запись разместить физически как можно ближе к соответствующему экземпляру набора, в который он будет включен.
SYSTEM применяется в случае, если размещение записей возлагается на саму СУБП (в соответствии с заложенными в нее алгоритмами).
Для того чтобы приписать рассматриваемый тип записи к некоторой области, используется предложение

WITHIN имя области AREA

Для описания внутренней структуры записи в статью записи включается подсистема параметров, которая имеет вид

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\text{BINARY}\\ \text{DECIMAL}\end{array}\right\}\\ \left\{\begin{array}{l}\text{FIXED}\\ \text{FLOAT}\end{array}\right\}\\ \text{REAL}\\ \text{CHARACTER}\\ \text{DATA-BASE-KEY}\end{array}\right\}$$

С помощью этой подсистемы каждому параметру признака приписывается тип значений параметра: двоичное, десятичное, фиксированное, плавающее, натуральное, символьное, ключ БП.

Статья набора позволяет описать наборы БП. Формат задачи набора имеет вид

SET NAME IS имя набора;

$$\text{OWNER IS}\left\{\begin{array}{l}\text{имя записи}\\ \text{SYSTEM}\end{array}\right\}$$

$$\text{ORDER IS PERMANENT INSERTION IS}\quad\left\{\begin{array}{l}\text{SORTED}\\ \text{PRIOR}\\ \text{NEXT}\\ \text{LAST}\\ \text{FIRST}\end{array}\right\}$$

Первое предложение статьи задает имя описываемого набора. Второе указывает имя типа записи, являющейся записью владельца набора. И последнее - на способ включения экземпляров записей - членов в экземпляры описываемого типа набора.

Обычно предполагается, что на внутреннем уровне экземпляры набора, которые включают несколько членов записей, организованы в виде **цепочки**.

Цепочка записей реализуется с помощью специального служебного элемента — **указателя,** который содержит (указывает на) адрес записи, логически связанного с рассматриваемой. Посредством указателей можно организовать обращение не только к следующим записям, но и к предыдущим.

Команды, которые входят в фигурные скобки третьего предложения схемы, как раз и позволяют организовать цепочку необходимым образом и означают:

FIRST - запись включается первым в цепочку перебора записей, т.е. сразу же после записи владельца (рис. 14).

LAST - запись включается последней (рис. 14).

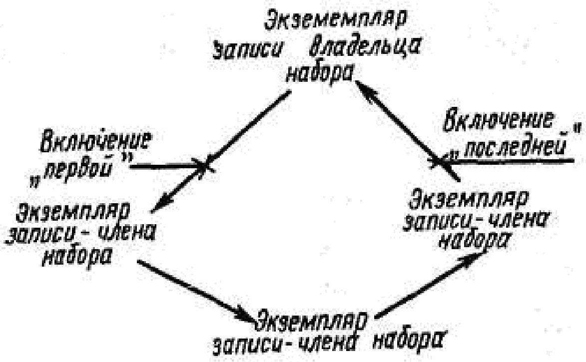


Рис. 14. Реализация вариантов FIRST и LAST

NEXT - включение следующей записи, т.е. записи, которая следует за текущей записью набора (рис. 15). Под текущей записью набора понимается тот экземпляр записи конкретного экземпляра набора, на который указывает «текущая» запись, в типе набора.
PRIOR - включение предыдущей записи, т.е. перед текущей записью набора (рис. 15).

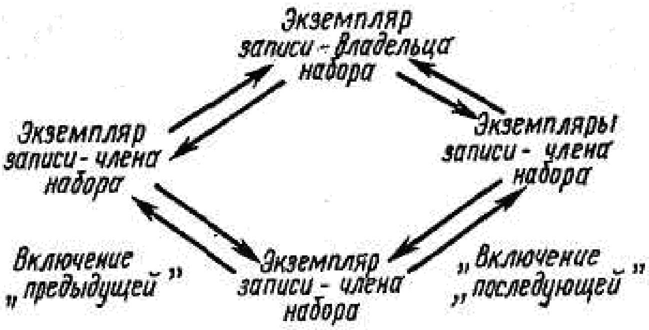


Рис. 15. Реализация вариантов NEXT и PRIOR

SORTED - СУБП поддерживает упорядоченность экземпляров однотипных записей, которые входят в экземпляр набора, в соответствии с возрастанием и убыванием ключевого данного.
Описание числа набора проводится с помощью подстатьи члена набора, имеющей вид

$$\text{MEMBER IS имя записи} \begin{Bmatrix} \text{AUTOMATIC} & \text{MANDATORE} \\ \text{MANUAL} & \text{OPTIONAL} \end{Bmatrix}$$

В зависимости от способа включения экземпляра записи-члена в экземпляр набора различают два типа членства в наборе:
AUTOMATIC - автоматический;
MANUAL - ручной.
Чтобы поместить в БП новую запись, необходимо сформировать ее в рабочей области программ и только затем с помощью операторов языка манипулирования понятиями записать в БП. Если необходимо экземпляр записи-члена поместить в БП, но при этом не соединять ни с каким экземпляром набора, то указывают оператор MANUAL. Последующее включение этой записи в набор должно быть осуществлено программистом явным образом с помощью соответствующих средств языка манипулирования понятиями. Тип членства AUTOMATIC предусматривает, что в момент помещения в БП запись должна быть автоматически включена в набор. Операторы MANDATORY (обязательный) и OPTIONAL (необходимый) характеризуют вид исключения экземпляра записи из экземпляра набора описываемого типа. Так тип OPTIONAL означает, что запись может исключаться из набора параметров в произвольный момент времени.
Поскольку БП предполагает соответствующее манипулирование понятиями, предполагается разработать соответствующий язык, позволяющий осуществлять запись в БП: STORE (запомнить), ERASE (стереть), MODIFY (изменить), CONNECT (присоединить), DISCONNECT (исключить) и др.
Оператор STORE (запомнить) - помещает понятия, подготовленные в рабочей области программы, в библиотеку понятий .
Оператор ERASE (стереть) - удаляет из БП экземпляр записи.
Оператор MODIFY (изменить) - обновляет текущую запись.
Оператор CONNECT (присоединить) - включает текущую запись в набор.
Оператор DISCONNECT (исключить) - исключает текущую запись из набора, но при этом она остается в БП.
Можно отметить, что приведенный набор операторов ЯМП является функционально полным, т.е. позволяет образовывать в БП произвольное допустимое схемой БП состояние.

4.4. Иерархическая модель структур понятий

Иерархическая структуры модель понятий, так же как и сетевая, основаны на возможности представления структур понятий и признаков их образующих, в виде графов. Но в отличие от сетевой на иерархическую модель накладываются более жесткие ограничения. Граф иерархической БП имеет древовидную структуру связей.
Древовидная структура или дерево - это граф, не содержащий циклов. Дерево представляет собой связанный граф, так как каждая вершина в нем завершает по крайней мере одно ребро (рис. 16).

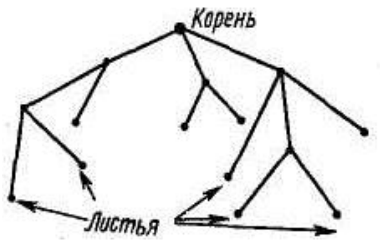


Рис. 16. Граф дерева

При работе с иерархической моделью структуры понятия граф, описывающий структуру понятий, является направленным или ориентированным, т.е. дерево в этом случае будет ориентированным.
В зависимости от направления дуг в ориентированном графе выделяют такие типы вершин, как корень и лист.
Корень — это вершина, которая имеет одну или несколько исходящих дуг и ни одной входящей.
Лист - это вершина, которая имеет одну или несколько входящих дуг и ни одной исходящей.
Корень можно рассматривать как источник направленной древовидной структуры. От корня до любого листа легко проследить элементарную последовательность дуг. Число дуг между корнем и листом называется уровнем диста. Вершину графа, который не является ни корнем, ни листом, называют **узел ветвления.**
Примером иерархической структуры в виде дерева служит схема управления большинства организаций. Корнем схемы является директор. От него исходят одна или несколько дуг к его заместителям. От них отходят дуги к более низким уровням управления и т.д. к непосредственных исполнителей, которые на графе соответствуют листьям.

Основными понятиями в иерархической модели понятий есть **тип записи** и **иерархические отношения.** Вершины в дереве соответствуют типу понятия и называются типом записи понятия. Тип записи состоит из одного или более **элементов понятий.** Во многих иерархических моделях вместо понятия «тип записи» будем использовать эквивалентное понятие «тип сегмента».

Иерархическое отношение (ветка дерева) соединяет два типа записей и представляет собой множество связей между экземплярами записей этих двух типов.

Дуги (ветки) дерева соответствуют функциональному типу связи, т.е. типам 1:1, 1:M, M:1, и их называют **связью исходной порожденной.** Дуга выходит из **типа родительской записи** и заходит в **тип порожденной записи.** Таким образом, рассматривая последовательность связей — исходной-порожденной, можно выделить типы родительских и порожденных записей. Каждый экземпляр родительского типа записей может иметь связь с несколькими (в том числе и с нулем) экземплярами порожденных записей. В свою очередь, каждый экземпляр записи порожденного типа подчинен ровно одному экземпляру записи родительского типа. Другими словами, иерархическое отношение можно рассматривать как функцию, признаком которой служит экземпляр порожденного типа записи, а ее значением является экземпляр родительского типа.

Иерархическая модель накладывает жесткие ограничения на иерархические отношения между записями. Поскольку любые два типа записей могут быть связаны не более чем одним иерархическим отношениям, то иерархическим связям не требуются собственные имена. Каждая из иерархических связей может быть однозначно идентифицирована указанием родительской и порожденной записи.

Модели понятий «понятие-связь». Они появились как обобщение и развитие иерархических и сетевых моделей понятий. Модель «понятие-связь» задумана как средство представления понятия предметной области, не зависимого от особенностей среды хранения и не связанного соображениями физической эффективности. Базовыми структурами в этих моделях являются типы понятий и связей. Тип понятия в модели носит название множество понятий. **Каждое понятие при этом идентифицирует понятие предметной области**. Связь между ними фиксируется заданием множества отношений. Различают два вида отношений - **слабые** и **стандартные**. Слабые связи идентифицируют иерархические отношения.

Множество связей (МС) в данной модели можно представить как математическое отношение n типов понятий. Если МС есть множество, то его можно определить следующим образом:

$$\text{МС}=\{<m_1, m_2,...,m_n>|m_1 \in M_1, \quad m_2 \in M_2,..., m_n \in M_n\},$$

где m_1 — понятие, которое принадлежит множеству (системе) понятий M_i, а кортеж $<m_1, m_2,...,m_n>$ - связь, которая принадлежит множеству МС.

Параметр в модели «понятие-связь» называют **множеством значений.** В этом случае значения представляет собой конкретный экземпляр множества значений. Для изображений множеств понятий и отношений могут быть использованы диаграммы, аналогичные графам. МС изображается прямоугольником, множество отношений - ромбом. Множествам обоих типов присваиваются имена; множества понятий соединяются с множествами отношений, в котором они участвуют с помощью ненаправленных линий. Множество значений представляется овалом (рис. 17).

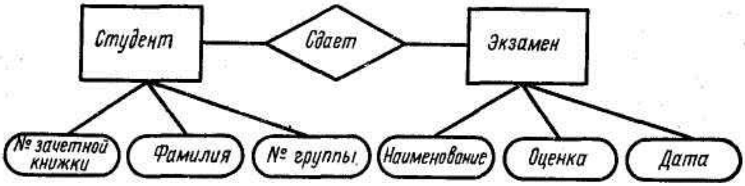


Рис. 17. Модель данных «понятие-связь»

Использование моделей «понятие-связь» является удобным средством для представления концептуальной информации.

Бинарные модели. Отношения, используемые для описания понятия предметной области, в общем случае могут быть n-мерными. Наиболе часто ведутся исследования по представлению информации с помощью, как правило, бинарных отношений, поскольку они позволяют лаконично представить сложные связи.

Бинарные модели, основанные на использовании бинарных отношений, имеют простые базовые структуры понятий, способные обеспечить эффективное представление предметной области. Поскольку графы позволяют наглядно задавать отношения, их использование в бинарных моделях также позволяет лучше уяснить особенности модели понятия. Вершины графа в бинарных моделях соответствуют классификационному обобщению экземпляров понятий в типы и называются *категориями,* а дуги — *бинарным отношением* категорий. Граф, который удовлетворяет этим структурным представление, носит название *графа типов.* Каждому бинарному отношению ставится в соответствие отношение, имеющее противоположное направление. Например:

СТУДЕНТ -УЧИТСЯ У - ПРЕПОДАВАТЕЛЬ - ОБУЧАЕТ -

Обеим направлениям бинарного отношения присваиваются уникальные имена, которые называются *функциями доступа.*

В бинарном отношении категорий понятий СТУДЕНТ и ПРЕПОДАВАТЕЛЬ направление от категории СТУДЕНТ к категории ПРЕПОДАВАТЕЛЬ есть функция доступа УЧИТ У. Представленное отношение может быть охарактеризовано следующим образом:

СТУДЕНТ УЧИТСЯ У ПРЕПОДАВАТЕЛЯ

Функция доступа для противоположного направления будет

ПРЕПОДАВАТЕЛЬ УЧИТ СТУДЕНТА

Расширение бинарного графа типов позволяет рассматривать понятие двух родов-объектов и поименованных бинарных отношений (связей). Взаимосвязи, в которых принимает участие более двух понятий объектов, в свою очередь, интерпретируются как понятия объекты.

Объект - это реализация категории понятия. Например, объект - это конкретные студенты и преподаватели. Объекты подразделяются на **абстрактные и конкретные**. Причем имеется в виду, что абстрактные всегда существуют, в то время как конкретные появляются и исчезают в описании реального объекта. Так, абстрактные объекты используются для представления чисел, дат и др.

Объекты соединены связями, которые отображают реализацию бинарного отношения. Каждой связи в обоих направлениях присваиваются имена, соответствующие функциям доступа.

Для создания категорий понятий в бинарной модели понятий используют оператор CATEGORY. Например, условие

СТУДЕНТ = CATEGORY

говорит о создании новой категории понятия с именем СТУДЕНТ.

Для создания бинарного отношения следует задать его имя, функции доступа и категории соответствующему данному отношению объектов. Например:

СТУДЕНТ - ПРЕПОДАВАТЕЛЬ = RELATION (СТУДЕНТ, ПРЕПОДАВАТЕЛЬ, УЧИТСЯ У, УЧИТ) определяет бинарное отношение СТУДЕНТ - ПРЕПОДАВАТЕЛЬ категорий СТУДЕНТ и ПРЕПОДАВАТЕЛЬ с функциями доступа УЧИТЬСЯ У, ОБУЧАЕТ.

В бинарных моделях отсутствует явно выраженное понятие «свойство объекта». Свойства объектов могут быть определены с помощью бинарного отношения, заданного на множестве объектов и других элементарных объектов, с помощью которых задаются значения свойств.

Как уже отмечалось, отношение характеризуется двумя функциями доступа, каждая из которых определяет минимальное и максимальное число объектов в присоединяемой категории. Ограничение на число объектов задается оператором AFN, позволяющим задать граничные величины подмножеств значений функций доступа. Так, например, если для функции доступа ОБУЧАЕТ запишем:

$$\text{ОБУЧАЕТ} = \text{AFN}\ (0, \infty),$$

то это будет означать, что преподаватель может вообще никого не обучать, или обучать любое число студентов.

Логический доступ к данным бинарной модели понятия обеспечивается с помощью программ, которые реализуют элементарные операции доступа.

Семантические сети моделей понятий. Для представления семантических (смысловых) текстов, задаваемых на естественном языком, разработаны **семантические сетевые модели понятий**.

Семантическая сеть представляет собой ориентированный граф с намеченными вершинами и дугами. При этом если вершины обозначаются только в целях ссылок к ним, то метки дуг содержат сведения о некоторых их семантических свойствах и значениях.

Для представления понятий используются четыре типа вершин: **концепты** (или понятия), **события, характеристики** (свойства) и **значения.**

Концепты - константы или параметры, которые специфицируют физические или абстрактные объекты.

События - отвечают действиям, наблюдаемым в представляемой области.

Характеристики - вершины, соответствующие свойствам концепты.

Значения - вершины, соотносящиеся с областями значений, которые могут принимать характеристики.

Поскольку имеется четыре типа вершин, необходима соответствующая зависимая от этих типов интерпретация дуг, которые соединяют различные вершины. Модели семантической сети предусматривают возможность распределения вершин по типам. В этом случае следует различать вершины-концепты и вершины-классы, которые собственно и представляют определенные типы вершин. Например, КУЛЕШОВ - концепт, СТУДЕНТ- класс.

Различие между классом и концептом весьма близко к тому же, что между типом и экземпляром в других моделях. Отличие заключается в том, что граф семантической сети включает как классы, так и концепты. Кроме того, концепт может быть соотнесен с несколькими классами.

Поскольку семантические сети предусматривают задавать на графе в явном виде различие между вершинами-концептами и вершинами-классами, то в рассмотрение вводятся три вида дуг: утверждение; порождение экземпляра; бинарное отношение.

Утверждение — дуга, которая соединяет два концепта.

Порождение экземпляра — дуга, между классом и концептом.
Бинарное отношение — дуга, которая связывает два класса.
Рассмотрим пример семантической сети (рис. 18), иллюстрирующей сказанное.

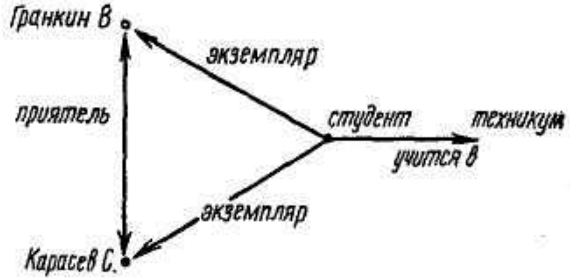


Рис. 18. Пример семантической сети

В данной семантической сети, вершины ГРАНКИН В. и КАРАСЕВ С. - концепты, СТУДЕНТ и ТЕХНИКУМ - классы. Дуга ПРИЯТЕЛЬ - утверждение. Дуги, связывающие вершину СТУДЕНТ с вершинами КАРАСЕВ С. и ГРАНКИН В., отображают связь экземпляров с классами. Дуга УЧИТСЯ В отображает бинарное отношение между классами СТУДЕНТ и ТЕХНИКУМ.
Классы могут быть связаны в иерархию в соответствии со связями ЕСТЬ НЕК и ЕСТЬ - ЧАСТЬ. **Эти связи позволяют из отдельных понятий и классов строить более общие понятия и классы.**
Для представления в семантической сети некоторых событий и действий вводится набор простых отношений, которые характеризуют основные компоненты события. Для построения с помощью семантической сети структуры события в первую очередь выделяют из него само действие, которое описывается обычно глаголом. После этого выделяют лиц, совершающих действие и объекты, над которыми оно осуществляется. Лицо, которое осуществляет действие, называется **агентом.** Вещи, над которыми действие осуществляется, называют **объектами**. Лицо, получающееся результатом действия или испытывающее его, называется **адресат**.
Рассмотрим предложение: «Мастер починил телевизора». В этом предложении выделим действие: ПОЧИНИЛ. Очевидно, что объектом является МАСТЕР (рис. 19).

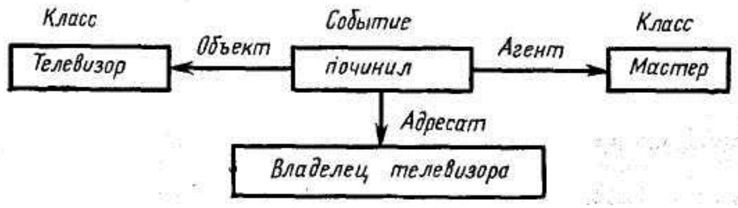


Рис. 19. Сеть предложения «Мастер починил телевизора»

В данном предложении адресат явно не указан, но его наличие можно предположить. Рассмотрим более сложное предложение:
«Вчера мастер Босин П. А. починил магнитофон «Юность», принадлежащий студенту Афонину К. А.».
Семантическая сеть для данного предложения представлена на рис. 20.

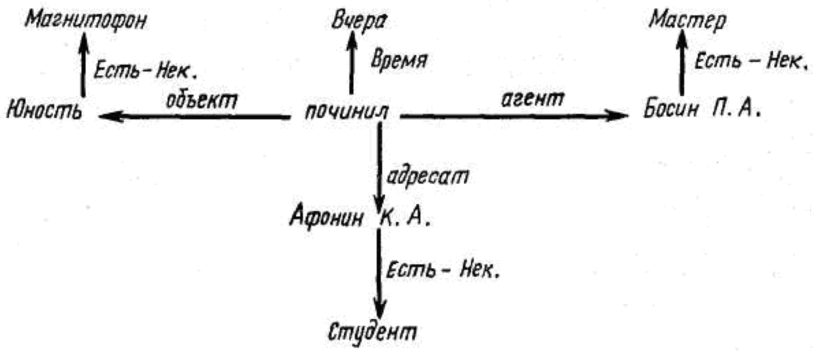


Рис. 20. Пример семантической сети

В этом предложении появилась новая дуга ВРЕМЯ, которое указывает на то, когда происходит событие. В общем случае в семантических сетях кроме простых отношений: агент, объект, адресат выделяют и другие, позволяющие описать широкий класс событий. К ним относят: время, место, инструмент, цель и др.
Операции, совершаемые над понятиями, задаваемые семантической сетью, разбиваются на два подмножества: операции над классами и над бинарными отношениями.
Над классами могут быть совершены четыре операции:
- образование понятия некоторого класса или установление принадлежности существующего понятия некоторого класса к еще одному;

- устранение принадлежности понятия к некоторому классу или полное его исключение;
- выборка понятий, которые принадлежат к одного класса;
- определение принадлежности понятия указанному классу.

Над бинарными отношениями могут быть совершены три операции:
- установление связи между классами;
- выборка всех понятий, связанных в данном бинарном отношении с указанным понятием;
- установление наличия связей между двумя понятиями.

В общем случае реализация всех вышеперечисленных операций требует создания специальных программ, которые учитывают рассматриваемую предметную область.

Разработка семантических сетевых моделей понятий явилась следствием повышения требований к интегрированному представлению понятий, которое включает не только понятия, но и их категории, свойства категорий и операции над данными. Важную роль в развитии моделей понятий этого класса играют проблемы алгоритмизации процессов естественного языка. Модели семантических сетей широко используются при разработке систем понятий искусственного интеллекта.

Инфологические модели понятий. Ифологическое проедставленне полностью независимо от физических параметров среды хранения. Эта модель в качестве базовой использует понятие: объект, свойства и связи.

Под объектом понимается нечто представляющее интерес для решаемой задачи. Предполагается, что существование объекта связано с такими событиями, как появление (возникновение), изменение и исчезновение.

Объекты подразделяются на атомарные и составные.

Атомарный объект, — это любой объект, дальнейшее разложение которого на другие объекты невозможно.

Составной объект включает в себя множество объектов.

С каждым объектом связывается определенный набор свойств. Важным свойством существования объекта является время (время его возникновения и исчезновения).

С помощью базовых концепций объектов, свойств связей и времени формируется **элементарный факт**. Элементарный факт задается формально как тройка $<x, y, z>$ или $(<x_1, x_2, ..., x_n>rz)$, где $<x_1, x_2, ..., x_n>$ - кортежи объектов, y — свойство, r — отношение, z — время. Такую базовую структуру называют **элементарной плеядой**.

Так как в рамках инфологической модели все может быть объявлено объектом, то свойства и отношения, в свою очередь, также могут рассматриваться как объект.

В данной модели типы объектов вводятся путем группирования объектов и их свойств. Объектная группа $O(p)$, соотнесенная со свойством p, определяется как совокупность объектов, потенциально (вне связи со временем) имеющих свойство p. Объекты, обладающие свойством p, в определенный момент времени образуют подмножество $O_t(p)$ множества $O(p)$, называемое **временным срезом объектной группы**.

В инфологической модели понятия атрибута вводится с помощью понятий объекта, свойства, связи и времени. **Атрибут определяется как множество свойств (признаков) $A= \{p_i\}$ объектной группы $O(p)$, такое, что в каждый момент времени каждый объект x, принадлежащий $O_t(p)$, содержится, по крайней мере, в одной $O_i(p)$. Свойства p — это значение атрибута A объектной группы $O(p)$.**

Базовые операции включения, обновления и удаления в инфологической модели связаны с вводом новых элементарных понятий и предполагают наличие механизмов интерпретации элементарного понятия.

Процедуры обращения к БП **(транзакции)** могут быть представлеы парой (оператор, параметр). К основным операциям, которые изменяют БП, относят <ДОБАВИТЬ, понятие> <УБРАТЬ понятие> <ЗАМЕНИТЬ понятие 1, понятие 2>.

На основе базовых процедур возможно конструирование более универсальных запросных средств.

Следует иметь в виду, что возможности инфологической модели существенно меньше возможностей естественного языка и их удобно использовать лишь в тех случаях, когда модель предметной области позволяет описать только очевидные факты.

5. Элементы комбинаторного анализа как средства построения моделей понятий и их моделирование

В теории понятий мы по большей части будем иметь дело с конечными или конечно порожденными множествами признаков и свойств сущностей (предметов) и с системами конечных множеств сущностей (предметов) — отношениями. Для того чтобы составить ясное и однозначное представление о понятии (в том числе для построения математической модели понятия), следует выполнить анализ информации, составляющей описание этого понятия. Типичная **цель такого анализа — описание множества признаков и свойств понятий, и самих понятий с помощью комбинаторных операций над некоторыми более простыми множествами, базисом, или даже в прямом перечислении его элементов – признаков и свойств. Соответствие между комбинаторными операциями над множествами и арифметическими операциями над их мощностями (эти мощности часто называют комбинаторными функциями) есть специальный вид соответствия между рекурсивными схемами задания множеств и функций.** Можно сказать, что комбинаторный анализ является прикладным разделом математической теории функциональных систем, в том числе, систем понятий, с операциями, в котором трактуются вопросы практической техники анализа дискретных множеств и отношений, элементами которых являются понятия, признаки, свойства. Образно говоря, **комбинаторный анализ относится к дедуктивным разделам математики** так, примерно, как тактика в теории понятий относится к правилам и основам стратегии формирования понятий: богаче конкретным содержанием, но беднее общностью и универсальностью понятий и формулировок определений понятий.

5.1. Теория моделей понятий

В теории понятий мы будем иметь дело с моделями понятий, построение которых будут базироваться на теории моделей.

Теория моделей — раздел математической логики, который занимается изучением связи между формальными языками и их интерпретациями, или моделями. Название **теория моделей** было впервые предложено Тарским в 1954 году. Основное развитие теория моделей получила в работах Тарского, Мальцева и Робинсона.

Теория моделей понятий посвящена изучению фундаментальной взаимосвязи между синтаксисом и семантикой понятий. При этом, первому в ней отвечает формальный язык, а второму — модель — математическая структура понятия, допускающая некоторое описание понятия этим языком. *Теория моделей* возникла как обобщение существующих подходов решения метаматематических проблем, связанных с алгеброй и математической логикой. Сами эти подходы существовали давно, но при этом долгое время не рассматривались во всей своей общности, в рамках одной логико-философской парадигмы. Естественным примером в этом контексте является проблема, связанная с пятым постулатом Евклида о параллельности линий. Веками математикам не удавалось доказать его истинность, пока в XIX веке Бойя и Лобачевский не построили неевклидову геометрию, показав тем самым, что постулат параллельности не может быть ни доказан, ни опровергнут. С точки зрения *теории моделей*, это означает, что система аксиом без пятого постулата допускает несколько различных моделей, то есть в этом случае — несколько вариантов реализации геометрии.

Таким образом, первоначальная *теория моделей* выросла из таких разделов математики как логика, универсальная алгебра, теория множеств в качестве обобщения и укрупнения существующих знаний. Поэтому первые результаты теории моделей появились задолго до её «официального» возникновения. Первым таким результатом принято считать теорему Лёвенгейма — Сколема (1915). Другим крупным результатом стала теорема компактности, доказанная Гёделем (1930) и Мальцевым (1936).

5.1.1. Теория моделей понятий первого порядка

Теория моделей для классической логики первого порядка является исторически первым и наиболее развитым примером теоретико-модельного подхода. В роли моделей здесь выступают множества, представляющие область возможных значений переменных. Функциональные символы интерпретируются как операции соответствующей арности над ними, а предикаты — как отношения.

Теорема компактности

Одним из важнейших инструментов теории моделей понятий является **теорема компактности,** сформулированная А.Кононюком, которая утверждает, что множество формульных определений понятия имеет модель понятия тогда и только тогда, когда модель понятия имеет каждое его конечное подмножество признаков.

Название теоремы связано с тем, что она может быть сформулирована как утверждение о компактности пространства понятий.

Из теоремы компактности следует, что некоторые понятия не являются выразимыми в логике первого порядка. Например, понятия конечности или счётности не могут быть выражены никакими формульными определениями понятий и даже их множествами: если множество формульных определений понятий имеет сколь угодно большие конечные модели, то оно имеет и бесконечную модель. Аналогично, теория, имеющая бесконечную модель, мощность которой не меньше мощности сигнатуры, имеет модели и любой большей мощности.

Теорема компактности находит применение для разработки моделей признаков и понятий, например, математического анализа и синтеза признаков и понятий.

5.1.2. Теория понятий и элементарная эквивалентность

Теория понятий T — это множество замкнутых формул (определений) понятий (признаков), замкнутое относительно выводимости, то есть если формула (определение) φ следует из T, то φ принадлежит T.

Теория понятий, имеющая хотя бы одну модель понятия, называется **непротиворечивой**, остальные теории — противоречивыми.

Теория понятий T называется **полной**, если для любой формулы φ теория содержит φ или $\neg\varphi$. Если A — понятие «алгебраическая система понятий», то множество истинных на A замкнутых формул образует полную теорию понятий — теорию системы A, обозначаемую с помощью $Th(A)$.

Если на алгебраических системах понятий A и B истинны одни и те же замкнутые формулы, то A и B называются **элементарно эквивалентными алгебраическими системами понятий**. Таким образом, A и B элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются моделью одной и той же полной теории понятий.

Если полная теория T имеет конечную модель A, то все модели теории T изоморфны A, в частности, все они содержат такое же количество элементов (признаков). Следовательно, для конечных алгебраических систем понятия элементарной эквивалентности и изоморфизма совпадают.

Подсистемы понятий

Алгебраическая система понятий *B* называется подсистемой алгебраической системы понятий *A*, если $|B| \subseteq |A|$ и интерпретация каждого сигнатурного символа в *B* является ограничением его же интерпретации в *A* на множество $|B|$. Подсистема понятий называется элементарной, если для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и для любых $b_1, \ldots, b_n \in |B|$ выполнено: $A \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $B \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Система понятий *A* называется в этих случаях (элементарным) **расширением системы *B***.

Элементарная подсистема понятий *B* элементарно эквивалентна *A*. Теории понятий, для моделей которых верно и обратное — каждая элементарно эквивалентная подсистема понятий является элементарной — называются **модельно полными теориями понятий**. Модельная полнота теории понятий *T* эквивалентна каждому из следующих свойств:

- любая формула (определение) в *T* эквивалентна экзистенциальной формуле (определению),
- любая формула (определение) в *T* эквивалентна универсальной формуле (определению),
- объединение *T* с диаграммой любой модели понятия порождает полную теорию понятий.

Если $X \subseteq |A|$ — непустое множество, то среди всех подсистем понятий *A*, включающих *X*, существует наименьшая, которая называется **порожденной множеством понятий** *X*. Для элементарных подсистем понятий в общем случае такое утверждение неверно.

Будем говорить, что теория понятий *T* имеет термальные понятийные функции, если для каждой формулы $\varphi(x, \bar{y})$ существует терм $t_\varphi(\bar{y})$ и из теории понятий *T* следует формула

$(\forall\bar{y})((\exists x)\varphi(x,\,\bar{y}) \to \varphi(t_\varphi(\bar{y}),\,\bar{y}))$. Иначе говоря, если существует элемент (признак), на котором формула $\varphi(x,\,\bar{y})$ истинна, то в качестве этого элемента (признака) может быть взято $t(\bar{y})$. Если теория понятий имеет термальные понятийные функции, то она **модельно полна**. Каждая теория понятий *T* имеет расширение T^S, имеющее **термальные понятийные функции**. При этом каждая модель *A* теории *T* может быть обогащена до модели A^S теории T^S.

Теорема «вверх» утверждает, что если *A* — алгебраическая система понятий мощности не меньше α=| *Th(A)*|, то *A* имеет элементарные расширения понятий любой мощности больше или равной α.

Теорема «вниз»: если *A* — алгебраическая система понятий мощности α и β=| *Th(A)*|, то *A* имеет элементарные подсистемы понятий любой мощности между β и α.

5.1.3. Аксиоматизируемость и устойчивость

Множество формул *A* будем называть множеством аксиом определений понятий для теории понятий *T*, если *T* является множеством следствий *A*. В частности, сама *T* является множеством аксиом определений понятий для себя. Если для теории *T* существует конечное множество аксиом определений понятий, то ее будем называть **конечно аксиоматизируемой**.

Совокупности алгебраических систем понятий назывем классами. Класс алгебраических систем понятий *K* называется аксиоматизируемым, если он является совокупностью моделей некоторой теории понятий *T*. В этом случае множество аксиом определений понятий для *T* называется также множеством аксиом определений понятий для *K*. Класс *K* аксиоматизируем тогда и только тогда, когда аксиоматизируемы сам *K* и его дополнение.

Теория понятий *T* называется устойчивой относительно надсистем понятий (соответственно, подсистем), если для любой алгебраической системы понятий *A* из $A \models T$ и $B \subseteq A$ (соответственно, $A \subseteq B$) следует, что $B \models T$. Теория понятий *T* устойчива относительно подсистем понятий тогда и только тогда, когда она аксиоматизируема посредством универсальных формул определений. Теория понятий T устойчива относительно надсистем понятий тогда и только тогда, когда она аксиоматизируема посредством экзистенциальных формул определений.

Теория понятий T называется устойчивой относительно гомоморфизмов, если для любой алгебраической системы понятий A из $A \models$ T следует, что $B \models$ T, если B — гомоморфный образ A. Теория понятий T устойчива относительно гомоморфизмов тогда и только тогда, когда она аксиоматизируема посредством позитивных формул (то есть формул, не содержащих импликацию и отрицание).

5.1.4. Цепи понятий

Цепью понятий называется множество алгебраических систем понятий, линейно упорядоченное отношением «быть подсистемой понятий». Если для элементов цепи понятий выполняется свойство «быть элементарной подсистемой понятий», то цепь понятий также называется элементарной.

Объединение цепи алгебраических систем понятий дает новую систему понятий той же сигнатуры, которая будет надсистемой понятий для всех элементов цепи понятий. При объединении элементарной цепи понятий это объединение будет элементарной надсистемой понятий и, следовательно, в нём будет сохраняться истинность всех формул.

При объединении любых цепей понятий (в том числе неэлементарных) сохраняется истинность $\forall\exists$-формул, верно и обратное — если формула сохраняет свою истинность при объединении любых цепей понятий, то она эквивалентна некоторой $\forall\exists$-формуле.

Теории понятий, которые могут быть аксиоматизируемы посредством $\forall\exists$-формул называются **индуктивными**.

Теорема. Теория понятий T является индуктивной тогда и только тогда, когда она устойчива относительно объединения цепей понятий. Пример индуктивной теории понятий — теория полей понятий фиксированной характеристики.

Метод цепей понятий является одним из важнейших инструментов построения алгебраических систем понятий с требуемыми признаками и свойствами.

5.1.5. Ультрапроизведения

Пусть L — язык. $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ — семейство алгебраических систем понятий, $\mathcal{A}_i = \langle M_i,\ L\rangle$. *Прямым произведением* алгебраических систем понятий $\mathcal{A}_i,\ i \in I$, называется алгебраическая система понятий $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{A}_i = \left\langle \prod\limits_{i\in I} A_i,\ L \right\rangle$, где для каждого предикатного символа понятия $P \in L$

$$\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i \models P(a_1,\ \ldots,\ a_{n_P}) \Leftrightarrow \mathcal{A}_i \models P(a_{1i},\ \ldots,\ a_{n_P i})$$

для каждого $i \in I$;

для каждого функционального символа понятия $f \in L$

$$(f(a_1,\ \ldots,\ a_{n_f}))_i = f(a_{1i},\ \ldots,\ a_{n_f i})$$

и для каждого константного символа понятия $c \in L$

$$(c)_i = c.$$

Пусть D — фильтр над I. Определим на $\prod\limits_{i\in I} A_i$ отношение $a \sim_D b \Leftrightarrow \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in D$. Введём обозначения:

$$a/D = \{b \mid b \sim_D a\},$$

$$\prod_{i\in I} A_i/D = \left\{a/D \mid a \in \prod_{i\in I} A_i\right\}.$$

Определим алгебраическую систему понятий $\mathcal{A} = \left\langle \prod_{i\in I} A_i/D,\ L \right\rangle$ следующим образом.

Положим для предикатного символа понятия $P \in L$

$$\mathcal{A} \models P(a_1,\ \ldots,\ a_{nP}) \Leftrightarrow \{i \mid \mathcal{A}_i \models P(a_1 i,\ \ldots,\ a_{nPi})\} \in D,$$

для каждого функционального символа понятия $f \in L$

$$f(a_1/D,\ \ldots,\ a_{n_f}/D) = f(a_1,\ \ldots,\ a_n)/D$$

и для константных символов понятий $c \in L$

$$c = c/D.$$

Определённая таким образом алгебраическая система понятий $\mathcal{A}$ называется *фильтрованным произведением* систем понятий $\mathcal{A}_i$ по фильтру D и обозначается

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/D.$$

Если D — ультрафильтр, то $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/D$ называется *ультрапроизведением*, если все $\mathcal{A}_i$ совпадают и равны $\mathcal{A}$, то $\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/D$ называется ультрастепенью $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^I/D$.

Основное свойство ультрапроизведений состоит в том, что они сохраняют все предложения:

Теорема. *Пусть* L *— язык,* $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ *— семейство алгебраических систем понятий языка* L, D *— ультрафильтр над* I. *Тогда для любой формулы* $\varphi(\overline{x})$ *языка* L*и любой последовательности* $\overline{a}$ *элементов (признаков) из* $\prod_{i\in I} A_i$

$$\prod_{i\in I} \mathcal{A}_i/D \models \varphi(\overline{a}/D) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi(\overline{a}_i)\} \in D.$$

Также теорему компактности можно сформулировать следующим образом.

Теорема компактности. *Если множество формул локально выполнимо в некотором классе понятий К, то оно выполнимо в некотором ультрапроизведении систем понятий из К.*

Теория понятий *T* с равенством, имеющая конечную или счётную сигнатуру, называется категоричной теорией понятий в счётной мощности понятий, если все её счётные нормальные модели понятий изоморфны. Категоричность в данной несчётной мощности определяется аналогично.

5.2. Комбинаторные операции и функции, используемые при моделировании понятий

1. Будем различать два основных типа операций над множествами моделей понятий. К первому типу относем так называемые *алгебраические* операции, такие как объединение $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_k = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ или пересечение $A_1 \bigcap A_2 \bigcap ... \bigcap A_k = \bigcap_{i=1}^{h} A_i$ нескольких множеств моделей понятий, а также теоретико-множественная разность $A \backslash B = \{x \backslash x \in A,\ x \notin B)$ и ее частный случай — дополнение $\overline{A} \Rightarrow B \backslash A$ множества моделей понятий A до множества моделей понятий B, когда $A \subseteq B$ и из контекста ясно, о каком B идет речь, симметрическая разность $A \otimes B \Rightarrow (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$. Для операций этого типа характерно, что результирующее множество моделей понятий состоит из тех же элементов, из которых составлены множества моделей понятий, которые подвергаются операции, либо пусто. **Операции другого типа будем называть *кардинальными*, <u>при их применении возникают новые элементы (признаки)</u>**. Таковы: прямое произведепие $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы моделей признаков понятий вида $<a_1, a_2, ..., a_k>$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ...,$ $a_k \in A_k$ (иногда эту операцию можно рассматривать как ассоциативную, иногда — нет, это всегда ясно из контекста; в частости, использование $A^k \Rightarrow A \times A \times ... \times A$ $_k$ раз подразумевает обычно ассоциативный вариант) (в ассоциативном случае элементы $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ называют также словами и записывают в виде $a_1 a_2 ... a_k$. Связную часть $a_i a_{i+1}$ ... a_{i+j} слова $a_1 a_2 ... a_k$ называют фрагментом этого слова; если $i = 1$, то префиксом, а если $i+j = k$, то суффиксом), булевская степень 2^A — множество всех подмножеств A:$2^A \Rightarrow \{X | X \subseteq A\}$ и кардинальная степень A^B—множество всех функций с областью определения B и областью значений A (т. е. отображений, сопоставляющих каждому $b \in B$ единственный элемент $f(b) \in A$).

2. Один из способов задания множеств моделей понятий при определенном универсальном множестве U (универсе) есть *характеристические функции понятий*. По существу этот способ — одна из форм задания множества моделей понятий свойством (признаком) его элементов. Характеристической функцией множества моделей понятий A в универсе U называется функция $s_A \in \{0, 1\}^U$, определенная правилом

$$\mathrm{s}_{\mathrm{A}}(x)=\mathrm{s}_{\mathrm{A}}^{(U)}(x)=\begin{cases}1, & \textit{если } x\in A,\\ 0, & \textit{если } x\notin A.\end{cases}$$

Любую функцию, принимающую только два значения, скажем, f из $\{0,\ 1\}^U$ можно рассматривать как характеристическую функцию множества понятий $N_f \Longrightarrow \{x|f(x) = 1\}$, так как, очевидно, $s_{N_f}(x) \equiv f(x)$ (и равным образом $N_{s_A} \equiv A$) Следующее соотношение выражает фундаментальный принцип подсчета *мощности понятий* конечного множества понятий:

$$|A|=\sum_{x\in U} s_A(x) \qquad (1)$$

3. Соотношения, перечисляемые в этом пункте, устанавливают связь алгебраических операций над множествами моделей понятий с арифметическими и булевскими операциями над их характеристическими функциями, после чего легко прослеживается и связь с операциями над соответствующими комбинаторными функциями понятий:

$$s_U^{(U)}(x) \equiv 1,\ s_\varnothing^{(U)}(x) \equiv 0, \qquad (2)$$

$$s_{\overline{A}}^{(U)}(x) = 1 - s_A^{(U)}(x) = \overline{s_A(x)}, \qquad (3)$$

$$s_{A\cap B}(x) = s_A(x)\cdot s_B(x) = s_A(x)\ \&\ s_B(x), \qquad (4)$$

$$s_{A\setminus B}(x) = s_A(x) - s_{A\cap B}(x) = s_A(x)\ \&\ \overline{s_B(x)}, \qquad (5)$$

$$s_{A\otimes B}(x) = s_A(x) + s_B(x) - 2s_{A\cap B}(x) = s_A(x) \oplus s_B(x). \qquad (6)$$

Проверка соотношений (2) — (6) довольно проста, как и переход к комбинаторным функциям понятий на основе (1). Проследим этот переход на одном примере:

$$s_{A\cup B}(x) = s_A(x) + s_B(x) - s_{A\cap B}(x)$$

влечет

$$|A\cup B| = \sum_{x\in U} s_{A\cup B}(x) = \sum_{x\in U} s_A(x) + \sum_{x\in U} s_B(x) - \\ - \sum_{x\in U} s_{A\cap B}(x) = |A| + |B| - |A\cap B|.$$

Используя индукцию по k, этот результат обобщается на случай объединения любого конечного числа k множеств моделей понятий:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k| = \\ = \sum_{\sigma=1}^{k} (-1)^{\sigma} \sum_{(j_1,\ldots,j_\sigma)} |A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_\sigma}|, \quad (7)$$

где внутренняя сумма распространяется на всевозможные σ-элементные множества индексов моделей понятий. Метод подсчета на основе (7) называют *методом включения и исключения.*

4. Своеобразие обозначений для кардинальных операций с понятиями приводится в связи с соответствующими операциями над комбинаторными функциями понятий:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \ldots |A_k|, \quad (8)$$

$$|2^A| = 2^{|A|}, \quad |A^B| = |A|^{|B|}. \quad (9)$$

Правило произведения (8) доказывается легко — при k=2 индукцией по мощности одного из множеств и затем индукцией по k. Заметим, что (8) сохраняет силу независимо от того, рассматриваем ли мы операцию прямого произведения как ассоциативную или нет, т. е.

$$|A_1 \times (A_2 \times A_3)| = |(A_1 \times A_2) \times A_3| = |A_1 \times A_2 \times A_3|.$$

Соотношения (9) доказаны в п. 6.

5. Наиболее общее представление о функциях понятий связано с табличным способом задания функций понятий. Для функции $f \in A^B$ часто рассматривают ее «естественное» продолжение на 2^B, полагая $f(\varnothing) = \varnothing$, и для непустых $C \subseteq B$ —

$$f(C) = \bigcup_{x \in C} \{f(c)\} \quad (10)$$

Важным случаем функциональной связи между множествами моделей понятий являются *взаимно однозначные соответствия.* Между множествами моделей понятий A и B взаимно однозначное соответствие (если оно существует) устанавливается функцией $f \in A^B$ такой, что $f(B) = A$, и если $x, y \in B$ и $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$. Для бесконечных множеств это понятие позволяет ввести понятие мощности множества, не обращаясь к понятию «количество», а для конечных позволяет получать оценки мощности, не прибегая к прямому подсчету. Если между изучаемым множеством моделей понятий A и множеством моделей понятий B, мощность которого известна, установлено взаимно однозначное соответствие, то это сразу приводит к определению комбинаторной функции множества понятий A.

6. Примеры. (a) Функция $\nu(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 2^{n-i}$

устанавливает взаимно однотипное соответствие между множествами $A_n = \{0, 1\}^n$ и $B_n = \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n \sim 1}\}$, Свойство (признак) $v(A_n)= B_n$ докажем индукцией по n. При $n = 1$ проверяем, затем, полагая справедливым для $n— 1$, имеем

$$\nu(A_n)=\nu(\{0\}\times A_{n-1})\cup\nu(\{1\}\times A_{n-1})=$$
$$=B_{n-1}\cup\{2^{n-1}+x\,|\,x\in B_{n-1}\}=B_n.$$

Второе свойство (признак): пусть $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle\neq\langle y_1,\ldots,y_n\rangle$ и f— наименьшее, для которого $x_j\neq y_j$, скажем, $x_j = 1$, $y_j = 0$. Тогда

$$\nu(x_1,\ldots,x_n)-\nu(y_1,\ldots,y_n)=$$
$$=2^{n-j}+\sum_{i=j+1}^{n}(x_i-y_i)\cdot 2^{n-i}\geqslant 2^{n-j}-\sum_{i=j+1}^{n}2^{n-i}=1,$$

т. е. $\nu(x_1,\ldots,x_n)\neq\nu(y_1,\ldots,y_n)$, ч. т. д.

(б) $|2^A|=|\{0,1\}^A|=|\{0,1\}^{|A|}|=2^{|A|}$. Взаимно однозначное соответствие между 2^A и $\{0, 1\}^A$ было установлено в п. 2: $B\to s_B^{(A)}(x)$. Соответствие между функциями $\{0, 1\}^A$ и элементами $\{0,1\}^{|A|}$ получим, сопоставляя функции $f(x)$ упорядоченный набор ее значений

$$\langle f(a_1),f(a_2),\ldots,f(a_{|A|})\rangle\in\{0,1\}^{|A|},\ \text{где}\ f(a_i)\in\{0,1\}.$$

Например, при $A = \{0,1\}$ эти соответствия таковы:

$$2^A\leftrightarrow\{0,1\}^A\leftrightarrow\{0,1\}^{|A|},$$
$$\varnothing\leftrightarrow f_1=0\leftrightarrow\langle 0,0\rangle,$$
$$\{0\}\leftrightarrow f_2=\bar{x}\leftrightarrow\langle 1,0\rangle,$$
$$\{1\}\leftrightarrow f_3=x\leftrightarrow\langle 0,1\rangle,$$
$$\{0,1\}\leftrightarrow f_4=1\leftrightarrow\langle 1,1\rangle.$$

(в) Рассмотрим более подробно взаимно однозначное соответствие между A^B и $A^{|B|}$, доказывающее (9). Пусть $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, и пусть все функции A^B перечислены в левой части таблицы 1.

Таблица 1

x	b_1	$b_2\ \ldots\ b_n$
$f_1(x)$	$f_1(b_1)$	$f_1(b_2)\ \ldots\ f_1(b_n)\to\langle f_1(b_1),\ f_1(b_2),\ \ldots,\ f_1(b_n)\rangle$
$f_2(x)$	$f_2(b_1)$	$f_2(b_2)\ \ldots\ f_2(b_n)\to\langle f_2(b_1),\ f_2(b_2),\ \ldots,\ f_2(b_n)\rangle$
...	..	. . . .
$f_i(x)$	$f_i(b_1)$	$f_i(b_2)\ \ldots\ f_i(b_n)\to\langle f_i(b_1),\ f_i(b_2),\ \ldots,\ f_i(b_n)\rangle$
...	..	. . . .
$f_m(x)$	$f_m(b_1)$	$f_m(b_2)\ \ldots\ f_m(b_n)\to\langle f_m(b_1),\ f_m(b_2),\ \ldots,f_m(b_n)\rangle$

Справа от каждой функции показан соответствующий ей элемент A^n, это просто набор значений этой функции, упорядоченный в согласии с избранным упорядочением множества *B*. Очевидно, что каждый набор из A^n соответствует некоторой функции A^B, а различным функциям соответствуют различные наборы. Поэтому $|A^B|=|A|^{|B|}$.

(г) Число размещений элементов (признаков) $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ по *k* файлам $A =\{a_1,\dots, a_k\}$ равно k^n. Это следует из того, что каждому размещению можно сопоставить функцию $f \in A^B$ такую, что $f(x)$ есть номер файла, в который помещен *x.* Любая функция из A^B задает некоторое размещение, а различным размещениям соответствуют различные функции.

(д) В примере (а) мы воспользовались рекурсией для определения множества A^n и его комбинаторной функции $|A^n|$:

$$A^1 = A, \quad A^n = A \times A^{n-1};$$
$$|A^1| = |A|, \quad |A^n| = |A| \cdot |A^{n-1}|.$$

Такой вид рекурсии, когда общий член параметрического семейства определяется схемой, включающей члены этого же семейства с меньшими значениями параметра, называют *рекуррентностью* (возвратом). Именно рекуррентность может являться итогом комбинаторного анализа множеств моделей понятий, так как последующее исследование — получение явного выражения комбинаторной функции понятий или оценок для этой функции — перемещается в область функционального анализа. Рассмотрим, в качестве последней иллюстрации, множества $P_{A,k}$ всех *k*-элементных *перестановок* элементов (признаков) из $A = \{1, 2, ..., n\}$, т. е. $P_{A,k}$ есть подмножество A^k, состоящее из всех наборов значаний признаков понятий $<x_1, ..., x_k>$, у которых все элементы $x_1, ..., x_k$ различны. Пусть $A_i \Rightarrow A\backslash\{i\}$. Легко понять, что $P_{A,1} = A$ и

$$P_{A,k} = \bigcup_{i=1}^{n} \{i\} \times P_{A_i,k-1} \text{ для } k = 2, 3, \dots, n.$$

Учитывая, что $|P_{A,k}| = |P_{B,k}|$ при $|A| = |B|$, имеем

$$P_{n,k} \Rightarrow |P_{A,k}|, \quad P_{n,1} = n, \quad P_{n,k} = n \cdot P_{n-1,k-1}.$$

Полученная простая рекуррентность дает

$$P_{n,n} = n! \Rightarrow n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 \ (0! \Rightarrow 1)$$

— одну из основных комбинаторных функций наряду с k^n, и для произвольного $k=1, 2, \dots, n$

$$P_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

5.3. Отношения порядка и нумерации моделей понятий

1. Пусть

$$A^{+} \Rightarrow A \cup A^{2} \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^{i}.$$

Отношениями на множестве моделей понятий A в широком смысле будем называть произвольные подмножества моделей понятий A^{+}, т. е. элементы $2^{(A+)}$ n-местными отношениями на множестве моделей понятий A называются произвольные подмножества моделей понятий A^{n}. Если представить элементы множества моделей понятий A *вершинами* (точками), а тот факт, что пара $<a_1, a_2>$ принадлежит отношению $\rho \subseteq A^2$, изобразить ориентированным отрезком (стрелкой), *ребром,* то такое представление ρ называется *графом отношения* ρ: $G_\rho = <A, \rho>$. При удачном расположении вершин и ребер графа G_ρ иногда может быть достигнуто хорошее понимание структуры отношения ρ и его свойств, которыми представлены модели понятий. Аналогичным образом для произвольного отношения на модели понятия ρ вводится понятие *гиперграфа* $G_\rho=<A, \rho>$, хотя с увеличением местности отношений ценность этого понятия становится все более проблематичной.

2. Способы задания отношений в понятиях имеют много общего со способами задания произвольных множеств понятий и признаков, но есть и специфические моменты. Остановимся на двух приемах упрощения задания отношений и, в частности, возможности задания бесконечных отношений конечными средствами.

Пусть R — некоторый класс отношений, F — множество всех отношний из R, включающих ρ, содержащее *наименьший элемент* (пересечение всех отношений из F), который обозначим $\rho' = (\rho)_n$. Тогда говорят, что ρ *семантически определяет* ρ' *в классе* R. Например, если R состоит из одного отношения ρ, то $(\varnothing)n = \rho$. Пусть $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5\}$ — отношения на $A = \{1, 2, 3\}$, графы которых изображены на рис. 1

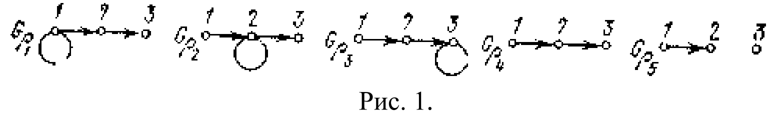


Рис. 1.

Если $R = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$, а $R_1 = R \cup \{\varnothing\}$, то имеем

$$(\varnothing)_R = \rho_4, \quad (\varnothing)_{R1} = \varnothing, \quad (\rho_5)_{R1} = \rho_4.$$

Пусть s — некоторое формальное правило образования понятия по произвольному запасу наборов признаков X некоторой совокупности наборов признаков $s(X)$. Через s^* обозначим итерированное правило

$$s: \quad s^0(X) \Rightarrow X, \quad s^{i+1}(X) \Rightarrow s(s^i(X))$$

и

$$s^*(X) \Rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} s^i(X).$$

Тогда отношение ρ *синтаксически определяет* отношение ρ' *относительно правила s,* если ρ' = s(ρ), и относительно s^*, если p' = s^*(ρ).

3. Класс отношений, рассматриваемый в остальной части этого подраздела, — отношения порядка признаков моделей понятий: *линейный порядок* и *частичный порядок.* Определения связаны с некоторыми свойствами бинарных отношений в моделях понятий. Отношение ρ на A называется *рефлексивным,* если для любого $a \in A$ имеет место $\langle a, a\rangle \in \rho$ и *антирефлексивным,* если для любого $a \in A$ имеет место $\langle a, a\rangle \notin \rho$; *симметричным,* если для любых $a, b \in A$ из $\langle a, b\rangle \in \rho$ следует $\langle b, a\rangle \in \rho$, и *антисимметричным,* если следует $\langle b, a\rangle \notin \rho$; *транзитивным,* если для любых $a, b, c \in A$ из $\langle a, b\rangle \in \rho$ и $\langle b, c\rangle \in \rho$ следует $\langle a, c\rangle \in \rho$.

Термин «линейный порядок» отражает интуитивное представление о «полном» порядке в множестве моделей понятий. Полное упорядочение конечного множества моделей понятий A равносильно перенумерации его элементов, иными словами — для этого надо установить взаимно однозначное соответствие между A и начальным отрезком натурального ряда длины $|A|$.

Мы будем рассматривать отношение строгого порядка «меньше», обозначаемое символом «<» $(a < b)$. Отношение нестрогого порядка определяется через строгий: «≤» $\Rightarrow$ «<» $\bigcup$ « = ». Очевидно, что отношение строгого порядка ρ на множестве моделей понятий A должно иметь следующие пять свойств:

1) антирефлексивность;
2) антисимметричность;
3) транзитивность;
4) сравнимость $\Rightarrow$ «для любых $a, b \in A$ либо $\langle a, b\rangle \in \rho$, либо $\langle b, a\rangle \in \rho$, либо $a = b$»;
5) ацикличность графа G_ρ.

Первые четыре из перечисленных условий принимаются за определение линейного порядка (пятое является их следствием).

4. Понятие частичного порядка вводится в связи с вопросом о возможности расширения отношения ρ до линейного порядка на множестве моделей понятий *A*.

Теорема 1. *Отношение* ρ *на A можно дополнить до линейного порядка на A в том и только в том случае, если граф* G_ρ *этого отношения ациклический.*

Доказательство. Ограничимся случаем конечного *A*.

Н е о б х о д и м о с т ь. Если $\rho \subseteq \rho_1$ и ρ_1 — линейный порядок, то G_{ρ_1} — ациклический, таков, следовательно, и G_ρ, который получается из G_{ρ_1} удалением некоторых ребер, в результате чего цикл возникнуть не может.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Предположим, что ρ' есть *элементарное расширение* ρ, если $\rho' = \rho \bigcup \{<a, b>\}$ (т. е. получается добавлением одной пары к ρ) и *элементарное транзитивное расширение,* если к тому же для некоторого $c \in A$ имеет место $<a, c> \in \rho$ и $<c, b> \in \rho$. Пусть *s*(ρ) — транзитивное замыкание отношения ρ, т. е. результат применения элементарных транзитивных расширений до тех пор, пока это возможно.

Рассмотрим следующие утверждения.

Лемма 1. *Элементарное транзитивное расширение ациклического отношения ациклично.*

Лемма 2. *Если ациклическое отношение* ρ *транзитивно, пара* $<a, b>$ *несравнима* (т. *е.* $a \neq b$, $<a, b> \notin \rho$ и $<b, a> \notin \rho$), *то* $\rho' = \rho \bigcup \{(a, b)\}$ *ациклично.*

При помощи элементарных расширений, удовлетворяющих леммам 1 и 2, невозможно расширение отношения, уже расширенного до линейного порядка. Линейный порядок всегда будет достигаться за конечное число элементарных расширений, так как общее число пар элементов из *A,* в силу конечности *A*, конечно. Теорема доказана.

Замечая, что транзитивное замыкание *s*(ρ) определено однозначно, независимо от выбора порядка элементарных транзитивных расширений, получаем еще один факт.

Т е о р е м а 2. *Если* $\rho \in \rho_1$ *и* ρ_1 *— линейный порядок, то*

$$\rho \subseteq s(\rho) \subseteq \rho_1.$$

Таким образом, множество расширений до линейного порядка ациклического отношения ρ совпадает с множеством расширений до линейного порядка отношения *s*(ρ). Это обстоятельство является причиной внимания к классу антирефлексивных, антисимметричных и транзитивных отношений. Бинарные отношения, обладающие этими тремя свойствами, называются отношениями *частичного порядка.*

Из теоремы 2 вытекает способ сокращенного задания отношений частичного порядка. Пусть ρ — отношение частичного порядка. Определим соответствующее ему отношение «покрытия»

$$\rho': \langle a, b\rangle \in \rho' \Rightarrow «\langle a, b\rangle \in \rho$$

и не существует $c \in A$ такого, что $\langle a, c\rangle \in \rho$ и $\langle c, b\rangle \in \rho$».

Тогда $s(\rho')=\rho=s(\rho)$. Следовательно, *отношение частичного порядка синтаксически определяется соответствующим отношением покрытия относительно правила транзитивного замыкания.* Им же оно определяется и семантически относительно класса отношений частичного порядка *R:* $\rho = (\rho')_R$.

5. Примеры, (а) Рассмотрим на $\{0, 1\}^n$ отношение

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \leqslant \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Rightarrow x_1 \leqslant y_1 \& \ldots \& x_n \leqslant y_n.$$

Легко проверить, что оно является отношением нестрогого частичного порядка, а отображение v из примера (а.4.1.6) $\{0, 1\}^n$ на линейно упорядоченное множество натуральных чисел позволяет продолжить частичный порядок до линейного (называемого *лексикографическим)* следующим образом:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle < \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Rightarrow \nu(x_1, \ldots, x_n) < \nu(y_1, \ldots, y_n).$$

(б) Пусть $E_k=\{0,1,\ldots,k-1\}$. На $E_{m_1} \times E_{m_2} \times \ldots \times E_{m_n}$ определим, аналогично предыдущему, отношение частичного порядка:

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \leqslant \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \Rightarrow x_1 \leqslant y_1 \& \ldots \& x_n \leqslant y_n.$$

Для $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \in E_{m_1} \times \ldots \times E_{m_n}$ положим

$$\nu(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\prod_{j=i+1}^{n} m_j\right), \quad \text{где} \quad \prod_{j=n+1}^{n} m_j \Rightarrow 1,$$

и снова получим расширение до линейного порядка. Это прямое обобщение примера (а): там v представляло собой отображение, обратное двоичному представлению натуральных чисел, здесь — представлению натуральных чисел в системе счисления с переменным основанием (или произвольным постоянным основанием в случае $m_1 = m_2 = \ldots = m_n$).

6. В теории понятий важное значение имеют вопросы реализации нумераций, устанавливающих линейный порядок в множествах моделей понятий. Встречаются такие нумерации в весьма разнообразных модификациях понятий.

5.4. Отношения эквивалентности и разбиения моделей понятий

1. Для бинарного отношения ρ на множестве моделей понятий A через ρ(a) обозначается окрестность элемента (признака предмета или его параметра) a: $\rho(a) \Rightarrow \{b \mid \langle a, b\rangle \in \rho\}$. В графе G_ρ этого отношения множество ρ(a) есть множество всех вершин, соседних с a, т. е. таких, в которые из a ведут ребра. Множество всех окрестностей

$$A/\rho \Rightarrow \{\rho(a) \mid a \in A\}$$

называется *фактор-множеством A* по отношению ρ.

Система непустых множеств $A_1,...,A_k$ моделей понятий называется *разбиением* множества A моделей понятий, если $A_i \bigcap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $A_1 \bigcup ... \bigcup A_k = A$. В этом случае $|A|=|A_1|+\ldots+|A_k|$, а если все классы разбиения равномощны, то $|A = k \bullet |A_i|$ для любого $i = 1,\ldots, k$.

Бинарное отношение называется *отношением эквивалентности,* если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Теорема 1. *Если* ρ *— отношение эквивалентности на A, то A/*ρ *есть разбиение.*

Доказательство. Ввиду рефлексивности ρ имеем $a \in \rho(a)$ для любого $a \in A$. Поэтому $A = \bigcup\limits_{a \in A} \{a, \subseteq \bigcup\limits_{a \in A} \rho(a) \subseteq A$, откуда

$$\bigcup_{a \in A} \rho(a) = A.$$

Остается показать, что если $\rho(a) \bigcap \rho(b) \neq \varnothing$, то $\rho(a)=\rho(b)$. Пусть $c \in \rho(a) \cap \rho(b)$ и $d \in \rho(a)$. Тогда $\langle b, c\rangle \in \rho$ (так как $c \in \rho(b)$), $\langle c, a\rangle \in \rho$ (так как $\langle a, c\rangle \in \rho$ и ρ симметрично) и $\langle a, d\rangle \in \rho$ по условию. Ввиду транзитивности ρ заключаем, что $\langle b, d\rangle \in \rho$, т. е. $d \in \rho(b)$, следовательно, $\rho(a) \subseteq \rho(b)$. Аналогично проверяется, что $\rho(b) \subseteq \rho(a)$, откуда следует $\rho(a)=\rho(b)$ ч. т. д.

Заметим, что A/ρ может быть разбиением и тогда, когда ρ не является отношением эквивалентности. Например, если $A = \{a, b\}$, $\rho = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$, то $A/\rho=\{\{a\},\{b\}\}$, но ρ антирефлексивно.

Тем не менее именно факторизация по отношениям эквивалентности, особенно в случае, когда классы эквивалентности равномощны, оказывается наиболее эффективным приемом анализа множеств моделей понятий.

Упрощение задания отношения эквивалентности достигается следующим образом. Для эквивалентности ρ граф G_ρ состоит из компонент связности $G^{(1)}, G^{(2)}, ..., G^{(k)}$, которые все являются полными графами на классах эквивалентности. Возьмем в каждой компоненте $G^{(i)}$ остов $T^{(i)}$ (связывающее дерево), и пусть ρ_i — отношение такое, что

$$G_{\rho_i} = T_1, \text{ а } \rho' = \bigcup_{i=1}^{h} \rho_i.$$

Аналогично элементарному транзитивному расширению определим элементарное рефлексивное и элементарное симметричное расширение отношений. Пусть $s(\rho)$— рефлексивное, симметричное и транзитивное замыкание отношения ρ.

Теорема 2. *Отношение эквивалентности* ρ *синтаксически определяется любым из своих остовных отношений* ρ' *относительно правила s рефлексивного, симметричного и транзитивного замыкания:* $s(\rho') = \rho$. *Им же оно определяется и семантически относительно класса отношений эквивалентности R:* $(\rho')_n = \rho$.

2. С разбиениями связано несколько комбинаторных функций понятий. В первую очередь это *число сочетаний* из n элементов по $k : |C_n^k| = \binom{n}{k} \Rightarrow \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ — *биномиальные коэффициенты, число всех разбиений n-элементного множества моделей понятий: B(n)* и некоторые другие.

(а) Сочетания из n элементов по k суть k-элементные подмножества моделей понятий n-элементного множества моделей понятий, скажем, $E_n = (0, 1,..., n — 1)$. Рассмотрим на множестве $P_{n,k}$ k-элементных перестановок E_n отношение эквивалентности ρ: перестановки эквивалентны в том и только том случае, если они состоят из одних и тех же элементов (признаков). Тогда между множеством моделей понятий C_n и множеством моделей понятий $P_{n,k}/\rho$ имеется взаимно однозначное соответствие: сочетанию A соответствует класс $P_{A,k}$ эквивалентности, состоящий из всех перестановок состава A. Например, при $n = 4$, $k = 2$ соответствие выглядит так:

$$\begin{array}{lcl}
C_4^2 & & P_{4,2}/\rho \\
\{0,1\} & \rightarrow & \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}, \\
\{0,2\} & \rightarrow & \{\langle 0,2\rangle, \langle 2,0\rangle\}, \\
\{0,3\} & \rightarrow & \{\langle 0,3\rangle, \langle 3,0\rangle\}, \\
\{1,2\} & \rightarrow & \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}, \\
\{1,3\} & \rightarrow & \{\langle 1,3\rangle, \langle 3,1\rangle\}, \\
\{2,3\} & \rightarrow & \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle\}.
\end{array}$$

Все классы понятий равномощны: $|P_{A,k}|=k!$, поэтому $|P_{n,k}|=k!|C_n^k|$, откуда $|C_n^k| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Термин «биноминальный коэффициент» связан с *биноминальной теоремой:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

которая имеет комбинаторную природу. Каждый член $x^k y^{n-k}$, появляющийся в правой части после раскрытия скобок, соответствует некоторому подмножеству k скобок из n:

$$(x+y)\ldots(x+y) \quad (n \text{ раз})$$

- тому, из которого выбран в произведение x. Поэтому после приведения подобных членов коэффициент при $x^k y^{n-k}$ должен быть равен $|C_n^k|$, что и констатирует теорема.

(б) Комбинаторная функция *сочетаний с повторениями,* т. е. неупорядоченных *выборок значений параметров* из n по k элементов, в которые каждый элемент может входить любое число раз и в которых объем выборки равен суммарному числу вхождений в нее всех элементов (число вхождений элемента может быть и нуль), выражается также биномиальным коэффициентом: $|D_n^k| = \binom{n+k-1}{n-1}$.

Действительно, между сочетаниями с повторениями и решениями уравнения $x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1} = k$ в неотрицательных целых числах есть взаимно однозначное соответствие: решению $\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ соответствует выборка, в которую 0 входит x_0 раз, 1 — x_1 раз и т. д. Решения этого уравнения находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями $y_0+y_1 + \ldots + y_{n-1} = k + n$ в положительных целых числах:

$$\langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \to \langle x_0+1, x_1+1, \ldots, x_{n-1}+1\rangle.$$

Последние в свою очередь находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством всех двоичных последовательностей длины $n + k — 1$, включающих ровно $n — 1$ вхождений единицы, т. е. с множеством всех характеристических функций множества C_{n+k-1}^{n-1}:

$$\langle y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\rangle \to 0^{y_0-1}10^{y_1-1}1\ldots10^{y_{n-1}-1}.$$

Прослеженная цепочка индуцирует взаимно однозначное соответствие между D_n^k и C_{n+k-1}^{n-1}, откуда $|D_n^k| = |C_{n+k-1}^{n-1}|$, ч. т. д.

(в) **Полиномиальная теорема**.

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ldots n_k} x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k},$$

где сумма в правой части берется по всем решениям уравнения $n_1 + ... + n_k = n$ *в неотрицательных целых, а* $\binom{n}{n_1 \ldots n_k} \Rightarrow \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}$

— полиномиальные коэффициенты.

Аналогично примеру (а) можно показать, что

$$\binom{n}{n_1 \ldots n_k}$$

является комбинаторной функцией множества всех размещений *n*-элементного множества по *k* файлам таких, что в первый файл попадает n_1 элементов, во второй — n_2 элементов и т. д.

(г) Для комбинаторной функции *B(n)*—числа разбиений *n*-элементного множества понятий — нет простого выражения в элементарных функциях. Легко непосредственно определить несколько первых значений: $B(1) = 1$, $B(2) = 2$, $B(3) = 5$, $B(4) = 15$, $B(5) = 52$,... По определению полагают $B(0) \Rightarrow 1$. Для вычисления *B(n)* можно использовать рекуррентность

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(n-i). \tag{11}$$

Соотношение (11) получается так. Пусть $\mathfrak{B}_{n+1}$—множество всех разбиений понятий E_{n+1} и $n \in A \subseteq E_n$. Через $\mathfrak{B}_{n+1}^A$ обозначим подмножество тех разбиений понятий, у которых *A* есть класс разбиения понятий, содержащий элемент (значение параметра) *n*. Если $|A|=k$, то класс $\mathfrak{B}_{n+1}^A$ определяется выборкой (сочетанием!) из E_n по k—1 элементов, так как *k*-м элементом *A* является всегда *n*. Легко понять, что $\mathfrak{B}_{E_n}^A$ находится во взаимно однозначном соответствии с $\mathfrak{B}_{E_n \setminus A}$, а различные классы $\mathfrak{B}_{n+1}^A$ составляют в совокупности $\mathfrak{B}_{n+1}$:

$$\mathfrak{B}_{n+1} = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{A \in C_n^k} \mathfrak{B}_{n+1}^A, \tag{12}$$

откуда

$$|\mathfrak{B}_{n+1}| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in C_n^k} |\mathfrak{B}_{n+1}^A| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\mathfrak{B}_{E_n \setminus A}|$$

и (11) доказано.

(д) Сходными рассуждениями получаются рекуррентные соотношения для комбинаторной функции *S(n, k)* — числа разбиений понятий E_n ровно на *k* непустых классов понятий:

$$S(n+1,k)=\sum_{j=k-1}^{n}\binom{n}{j}S(j,k-1), \qquad (13)$$

$$S(n+1,k)=S(n,k-1)+kS(n,k). \qquad (14)$$

Начальные значения для вычисления: $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ при любом $n \geq 1$.

Для $S(n, k)$ существует и явное выражение через элементарные функции:

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n. \qquad (15)$$

Это можно доказать, например, с помощью (14) индукцией по n.

3. С отношениями эквивалентности связана важная идея производящих функций. Это понятие помогает при решении вопросов перечисления элементов (значений параметров признаков) как конечных, так и бесконечных множеств моделей понятий. Пусть каждому элементу множества моделей понятий A сопоставлены количественные значения параметров признаков $P_1, \ldots, P_k$, т. е. имеется функция f, которая каждому $a \in A$ ставит в соответствие набор натуральных чисел $f(a) = \langle P_1(a), \ldots, P_k(a)\rangle$ (у людей такими признаками могут быть, например, возраст, рост, вес и т. п.). Каждому признаку P_i поставим в соответствие переменную x_i $(i=\overline{1,k})$, элементу $a \in A$ произведение

$$x_1^{P_1(a)} \ldots x_k^{P_k(a)},$$

а всему множеству A — функцию

$$F_A(x_1,\ldots,x_k)=\sum_{a\in A}x_1^{P_1(a)}\ldots x_k^{P_k(a)}. \qquad (16)$$

Функция (16) называется *производящей функцией* множества моделей понятий A по признакам $P_1, \ldots, P_k$. Переменные и операции, фигурирующие в (16), формальные, т. е. символы, имена, которые надо интерпретировать, придать им определенные значения, смысл. Лишь после интерпретации производящая функция приобретает конкретное содержание, становится рабочим инструментом для разработки модели понятия. Данная символика объясняется тем, что в наиболее распространенной интерпретации x_i — действительные или комплексные переменные, сложение, умножение и возведение в степень — элементарные функции анализа понятий. Термин «производящая функция» отражает способ использования этого понятия — компактное задание информации о множестве моделей понятий с учетом того, что в алгебрах функций (понятий) часто можно указать нетривиальные тождественные преобразования формул, которые представляют собой модели понятий. Потому к интерпретации предъявляется лишь требование, чтобы *представление функций (понятий) формулами вида* $\sum\Pi$ — *«сумма произведений», как в* (16),— *было единственным* с точностью до перестановок сомножителей в произведениях и слагаемых в сумме. Изредка оказываются полезными и некоммутативные производящие функции.

Иногда производящая функция F_A перечисляет все множество моделей понятий A — если f устанавливает взаимно однозначное соответствие между A и $\{f(a) \mid a \in A\}$ (т. е. если признаки однозначно идентифицируют элемент из A, являются как бы его паспортом). Чаще F_A перечисляет A/ρ, где

$$\langle a_1, a_2\rangle \in \rho \Rightarrow \langle P_1(a_1), \ldots, P_k(a_1)\rangle = \langle P_1(a_2), \ldots, P_k(a_2)\rangle \qquad (17)$$

есть отношение эквивалентности на A. В последнем случае эквивалентным элементам A соответствуют одинаковые слагаемые в (16), поэтому после приведения подобных членов в (16) производящая функция может сохранить информацию о мощности классов эквивалентности (17) в виде коэффициентов при слагаемых.

Обратимся к примерам производящих функций.

(а) Производящая функция подмножеств n-элементного множества A по признаку $P(B) \Rightarrow |B|$, как следует из биномиальной теоремы в п. 2(а), есть

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Производящая функция сочетаний с повторениями по тому же признаку, согласно п. 2(б), есть

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n-1} x^k.$$

Используя рекуррентность

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

легко получить соотношение $F_n(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x)$.

откуда $F_n(x) = \frac{F_{n-1}(x)}{(1-x)}$ и ввиду $F_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{0}x^k =$
$= \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{(1-x)}$ находим

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Этот же вывод легко получить и прямыми комбинаторными рассуждениями, наподобие п. 2(*а*).

(б) Эквивалентные преобразования с целью упрощения формульного задания комбинаторных функций во многих случаях используют производящие функции.

Так, из примеров *(а)* получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}2^{-k} = \frac{1}{(1-1/2)^{n+1}} = 2^{n+1}.$$

Аналогично, из полиномиальной теоремы п. 2(в), полагая $x_1 = \ldots = x_k = 1$, получаем тождество

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1\ldots n_k} = k^n.$$

(в) Производящие функции часто оказываются полезными для эквивалентных преобразований рекуррентных схем задания комбинаторных функций к формульному представлению через элементарные функции. Для числа разбиений *B(n),* используя рекуррентность (11), такое представление можно получить в виде бесконечного ряда.

Пусть

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n)}{n!}x^n$$

— производящая функция последовательности $\{B(n)/n!\}_{n=0}^{\infty}$. Учитывая, что $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, получаем

$$B'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B(n)}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n+1)}{n!}x^{n}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B(n-k)\right]\frac{x^n}{n!}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{B(n-k)}{(n-k)}x^{n-k}\right]=e^{x}B(x).$$

Таким образом, для *B(x)* получено дифференциальное уравнение $B'(x)=e^x \bullet B(x)$ с начальным условием $B(0)=1$. Интегрируя, получаем

$$B(x)=e^{(e^{x-1})}=\frac{1}{e}\bullet e^{(e^x)} \tag{18}$$

Разложим теперь (18) в ряд по степеням *x:*

$$B(x)=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k!}=$$

$$=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^n x^n}{n!}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Отсюда получаем искомое выражение для числа разбиений класса понятий:

$$B(n)=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}. \tag{19}$$

Представление о порядке роста *B(n)* дают следующие оценки.

Теорема 1. $B(n)\leq n!$

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по *n.* Для $n=0$ имеем $B(0)=1=0!$ Пусть для 1, 2,..., *n* утверждение справедливо. Тогда при $n\geq 2$ получаем

$$B(n+1)\leqslant\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-i)!=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}<n!\,e<(n+1)!,$$

ч. т. д.

Теорема 2.

$$B(n)\geqslant n^{n(1-\varepsilon(n))},$$

где $\varepsilon(n)\to 0$ *при* $n\to\infty$.

Доказательство. Мы покажем, что для любого *m* найдется $n_0=n_0(m)$ такое, что при $n>n_0$

$$B(n) > n^{n\left(1-\frac{1}{\log_m n}-\frac{\log_m \log_m n}{\log_m n}\right)}. \qquad (20)$$

Согласно (19) имеем, учитывая, что $k! < \frac{k^k}{e}$ при $k \geq 3$:

$$B(n) = e^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^n}{k!} > e^{-1}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{k^n}{k!} > \sum_{k=3}^{\infty}k^{n-k}.$$

Пусть $f(x) = x^{n-x}$. При n достаточно большом имеем $B(n) > f\left(\frac{n}{\log_m n}\right)$, так как на отрезке $\left[\frac{n}{\log_m n}-1, \frac{n}{\log_m n}\right]$ функция $f(x)$ убывает (на этом отрезке

$$f'(x) = x^{n-x}\cdot\left(\frac{n}{x}-1-\ln x\right) < 0).$$

Следовательно,

$$B(n) > \left(\frac{n}{\log_m n}\right)^{n-\frac{n}{\log_m n}} > n^{n\left(1-\frac{1}{\log_m n}-\frac{\log_m \log_m n}{\log_m n}\right)},$$

ч. т. д.

Аналогично можно показать, что

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty}S(n+k,k)\,x^n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-kx)}$$

и $S(n,k) \sim \frac{k^n}{k!}$ при фиксированном k и $n\to\infty$.

(г) Рассмотрим систему функций $f_1(n),\dots, f_m(n)$, определенную условиями $f_i(n)=0$ при $n<0$, $f_i(0)=c_i$ и системой линейных рекуррентных соотношений

$$f_i(n) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{b_j}a_{ijk}f_j(n-d_{ijk}) \quad \left(i=\overline{1,m}, d_{ijk}>0\right) \qquad (21)$$

для положительных n. Пусть $F_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty}f_i(n)\,x^n$ — производящая функция последовательности $\{f_i(n)\}_{n=0}^{\infty}$ ($i = \overline{1, m}$). Умножая каждое равенство (21) на x^n и суммируя по n = 1, 2,..., получаем следующую систему линейных функциональных уравнений для производящих функций $F_i(x)$:

$$F_i(x) - c_i = \sum_{j=1}^{m}P_{ij}(x)\,F_j(x) \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (22)$$

где $P_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{b_j} a_{ijk} x^{d_{ijk}}$. По правилу Крамера $F_i(x) = \frac{\delta_i(x)}{\delta(x)}$, где

$$\delta(x) = \det \begin{vmatrix} 1-P_{11} & -P_{12} & \dots & -P_{1m} \\ -P_{21} & 1-P_{22} & \dots & -P_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_{m1} & -P_{m2} & \dots & 1-P_{mm} \end{vmatrix},$$

а $\delta_i(x)$ получается подстановкой в матрицу, определяющую $\delta(x)$, вместо i-го столбца начальных условий $\|c_j\|$.

Пусть $d_i(x)$=НОД($\delta_i(x)$, $\delta(x)$), нормированный условием $d_i(0)=\delta(0)=1$ (находится с помощью алгоритма Евклида). Дробно-рациональную функцию $F_i(x)$ представим в виде несократимой дроби $F_i(x) = P_i(x)/\Delta_i(x)$, где $P_i(x) = \delta_i(x)/d_i(x)$, $\Delta_i(x) = \delta(x)/d_i(x)$.

Пусть $x_1, \dots, x_s$ — корни многочлена $\Delta_i(x)$ кратностей $k_1, \dots, k_s$ соответственно. Тогда

$$F_i(x) = \frac{c_i' P_i(x)}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{k_1} \dots \left(1-\frac{x}{x_s}\right)^{k_s}}$$

и после разложения на простейшие дроби

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)^{k_1} \dots \left(1-\frac{x}{x_s}\right)^{k_s}} = \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{k_j} A_{jl} \left(1-\frac{x}{x_j}\right)^{-l},$$

учитывая разложение $\frac{1}{(1-x)^n}$ из примера (а), получаем

$$F_i(x) = c_i' P_i(x) \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{k_j} A_{jl} \sum_{t=0}^{\infty} \binom{l+t-1}{l-1} \frac{x^t}{x_j^t} =$$
$$= c_i' P_i(x) \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{s} q_j(t) x_j^{-t} \right) x^t,$$

Где $q_j(t) \Rightarrow \sum_{l=1}^{k_j} \binom{l+t-1}{l-1} A_{jl}$ — полином от t степени не выше k_j—1.

Если

$$P_i(x) = \sum_{r=0}^{N} \alpha_r \cdot x^r,$$

то для $f_i(n)$ находим

$$f_i(n) = c_i' \sum_{r=0}^{N} \alpha_r \cdot \sum_{j=1}^{s} q_j(n-r)\, x_j^{-(n-r)} = \sum_{j=1}^{s} \pi_j(n)\, x_j^{-n}, \tag{23}$$

где

$$\pi_j(n) \Rightarrow c_i' \sum_{r=0}^{N} \alpha_r \cdot q_j(n-r)\, x_j^r$$

— полиномы от n.

Если некоторые из x_j — комплексные числа, то (23) можно преобразовать к действительной форме $\sum_j \psi_j(n) |x_j|^{-n}$, где $\psi_j(n)$ — полиномы от n, $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$.

При практической реализации этого плана нахождения формульного представления функций $f_i(n)$ наибольшую трудность может вызвать поиск корней $\Delta_i(x)$. Рассмотрим пример: пусть

$$f_1(n) = (17/4) f_1(n-1) - (9/17) f_2(n-1),$$
$$f_2(n) = 9 f_1(n-1) - (4/17) f_2(n-2),$$
$$f_1(0) = f_2(0) = 1.$$

Находим

$$\delta = \det \begin{vmatrix} 1-(17/4)\,x & (9/17)\,x \\ -9x & 1+(4/17)\,x^2 \end{vmatrix} = 1 - (17/4)\,x + 5x^2 - x^3 = (1-2x)^2 (1-x/4),$$

$$\delta_1 = \det \begin{vmatrix} 1 & (9/17)\,x \\ 1 & 1+(4/17)\,x^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{17}(4x^2 - 9x + 17),$$

$$\delta_2 = \det \begin{vmatrix} 1-(17/4)\,x & 1 \\ -9x & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(19x+4), \quad d_1(x) = d_2(x) = 1,$$

$$F_1(x) = \frac{16}{17\cdot 49} \cdot \frac{(x+3)(4x^2-9x+17)}{(1-2x)^2} + \frac{1}{17\cdot 49} \cdot \frac{4x^2-9x+17}{(1-x/4)},$$

$$F_2(x) = \frac{4}{49} \cdot \frac{(x+3)(19x+4)}{(1-2x)^2} + \frac{1}{4\cdot 49} \cdot \frac{(19x+4)}{(1-x/4)}.$$

Остается найти коэффициенты при x^n. После преобразований окончательно находим

$$f_1(n) = \frac{1}{833}\left[(756n + 788)\cdot 2^n + 45 \cdot 4^{-n}\right],$$

$$f_2(n) = \frac{1}{49}(189n + 29)\cdot 2^n + \frac{20}{49} \cdot 4^{-n},$$

откуда, в частности, $f_1(n) \sim \frac{108}{119} \cdot n \cdot 2^n$, $f_2(n) \sim \frac{27}{7} \cdot n \cdot 2^n$.

(д) Любая функция алгебры логики $f(x_1,...,x_n)$ является производящей функцией множества $N \subseteq \{0, 1\}^n$, если представление (16) интерпретировать как совершенную дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) и $P_i(x_1,..., x_n) = x_i$, а $x^1 = x$ и $x^0 = \overline{x}$. При этом соответствие между элементами N_j и конъюнкциями (16) взаимно однозначное.

Отметим еще две интерпретации (16) в классе функций алгебры логики, для которых также выполняется требование единственности представления в форме ∑П: *полиномы Жегалкина* и *функции Яблонского.* Для функций Яблонского правая часть (16) есть сокращенная ДНФ.

4. Стандартным приемом факторизации универса при анализе конечных систем подмножеств являются *диаграммы Венна.*

Пусть $S = \{A_1, ..., A_n\}$ — система множеств моделей понятий в универсе U. Тип элемента (признака) $x \in U$ относительно S определяется тем, каким множествам моделей понятий из S этот элемент принадлежит, а каким — нет. Положим $<a, b> \in \rho \Rightarrow$ «для любого $i = \overline{1, n}: a \in A_i \leftrightarrow b \in A_i$». Очевидно, что ρ есть отношение эквивалентности на U и U/ρ содержит не более 2^n классов эквивалентности ρ (число возможных типов элементов, так как тип элемента $x \in U$ характеризуется двоичным набором $<s_1(x), ..., s_n(x)>$, где $s_i(x)$ — 1, если $x \in A_i$, и $s_i(x) = 0$ в противном случае).

Диаграмма Венна для системы n множеств моделей понятий представляет собой разбиение прямоугольника на 2^n клеток — по клетке для каждого типа элементов (признаков). На рис. 2 построены диаграммы Венна для n = 1, 2, 3.

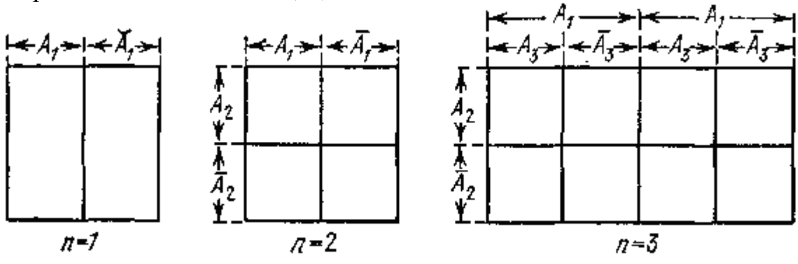


Рис. 2.

Из приведенных примеров легко понять, как построить диаграмму Венна для любого *n:* она получается из диаграммы для *(n* — 1)-го множеств после того, как мы разделим пополам все вертикальные (или горизонтальные) полосы и отнесем A_n все полосы с нечетными номерами, считая слева (сверху), а все полосы с четными номерами отнесем к $\overline{A}_n$. Тем самым каждая клетка предыдущей диаграммы разобьется на две части, одна из которых относится к A_n, а другая — к $\overline{A}_n$.

Полезно представить себе диаграмму Венна в виде ящика, в который можно разложить все элементы универса. Ящик состоит из 2^n ячеек, в каждую из них складываются однотипные элементы (признаки), элементы различных типов попадают в различные ячейки в соответствии с указателями. Таким образом, многие задачи логического анализа совокупностей множеств моделей понятий (равным образом — свойств, признаков) могут быть сведены к стандартной комбинаторной задаче о размещениях элементов данного множества по ящикам.

Пример. Дано множество понятий $A \subseteq U=\{u_1 \ldots, u_n\}$. Сколько можно составить из элементов U пар множеств $<X_1, X_2>$ таких, что $X_1 \subseteq A \subseteq X_2$?

Рассмотрим диаграмму Венна для $n = 3$ (рис. 3).

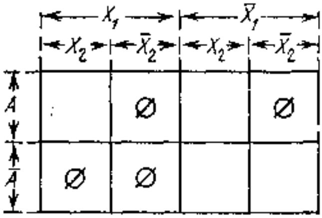


Рис. 3.

Так как условие $X \subseteq Y$ равносильно $X \bigcap \overline{Y} = \varnothing$, а между парами множеств $<X_1, X_2>$ и размещениями универса по ящикам диаграммы, такими что A размещается в верхних ящиках, а $\overline{A}$ — в нижних, есть взаимно однозначное соответствие, то парам, удовлетворяющим $X_1 \subseteq A \subseteq X_2$, соответствуют размещения, при которых ящики, отмеченные на диаграмме символом $\varnothing$, пусты. Следовательно, искомые пары перечисляются всевозможными размещениями элементов A по двум ящикам AX_1X_2 и $A\overline{X}_1X_2$ — независимо — элементов $\overline{A}$ по двум ящикам $\overline{A}\ \overline{X}_1X_2$ и $\overline{A}\ \overline{X}_1\ \overline{X}_2$. Число таких размещений равно $2^{|A|} \cdot 2^{|\overline{A}|} = 2^{|A|+|\overline{A}|} = 2^{|U|} = 2^n$.

5.5. Независимые множества моделей понятий в графах

1. В период формирования теории графов в XVIII — XIX веках одним из основных поставщиков задач о графах были игры и головоломки. Так и задача нахождения максимальных независимых множеств вершин в графах впервые возникла в шуточном, развлекательном варианте: в 1854 году Гаусс предложил читателям берлинского шахматного журнала найти все позиции, в которых на шахматной доске стоит максимально возможное число попарно не атакующих друг друга ферзей. Это число равно восьми, одна из позиций, решающих задачу Гаусса, изображена на рис. 4 (ферзь атакует любую клетку, расположенную с ним на одной линии — вертикали, горизонтали или диагонали).

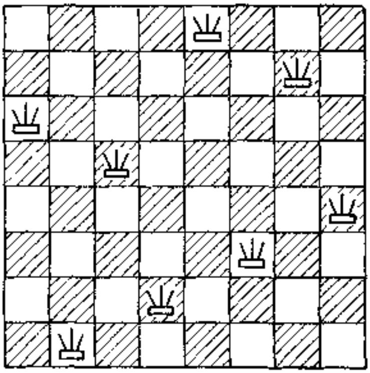


Рис. 4.

В XX веке содержание многих задач теории графов обогатилось, так как обнаружилась их связь с естественнонаучными моделями. Так случилось и с задачей о независимых множествах вершин. На ее прямое отношение к вопросам моделирования понятий указал А.Е.Кононюк в 2013 году.

2. В этом подразделе мы рассматриваем гиперграфы и графы только для симметричных отношений, т. е. ребра мы рассматриваем как неупорядоченные множества.

Пусть $G = \langle V, R \rangle$ —гиперграф со счетным множеством вершин V и множеством ребер R (подмножеств V). Множество $W \subseteq V$ называется *независимым,* если оно не содержит в себе ни одного ребра. Множество $W \subseteq V$ называется *опорой,* если для любого $r \in R$ имеет место $r \bigcap W \neq \varnothing$. Именно независимые множества будут использоваться нами при описании моделей понятий.

Независимое множество моделей понятий называется *тупиковым,* если всякое его расширение уже не является независимым множеством моделей понятий. Опора называется *тупиковой,* если всякое ее подмножество моделей понятий уже не является опорой. Через $H(G)$ обозначим класс всех независимых множеств моделей понятий G, $H'(G)$ — класс всех его опор, $H_{\text{Т}}(G)$ и $H'_{\text{Т}}(G)$ — соответственно классы всех тупиковых независимых множеств моделей понятий и тупиковых опор G.

Понятия независимого множества моделей понятий и опоры гиперграфа двойственны: непосредственно из определений вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Множество моделей понятий* $W \in H(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{W} = V \backslash W \in H'(G)$. *Множество моделей понятий* $W \in H_T(G)$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{W} = V \backslash W \in H'_{\text{Т}}(G)$.

Через

$$\alpha(G) = \max_{W \in H(G)} |W|$$

будем обозначать *число независимости* гиперграфа G,

$$G,\ \alpha'(G) = \min_{W \in H'(G)} |W|$$

— *число опоры* G. Для конечных гиперграфов из теоремы 1 следует, что

$$\alpha(G) = |V| - \alpha'(G). \tag{24}$$

У бесконечного гиперграфа число независимости может быть конечным, бесконечным или не существовать.

Пример, когда для графа G числа независимости не существует, следует из теоремы Диксона.

Пусть в графе $G_k = \langle V, R \rangle$: $V \Rightarrow N^k$, где $N = \{0, 1, 2, ...\}$ есть множество всех натуральных чисел с нулем, и для

$X = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ и $Y = \langle y_1, \ldots, y_k \rangle$ в N^k $(X \neq Y)$

$\langle X, Y \rangle \in R \Rightarrow$ «X и Y покоординатно сравнимы, т. е.

$$x_1 \leqslant y_1, \ldots, x_k \leqslant y_k \text{ или } y_1 \leqslant x_1, \ldots, y_k \leqslant x_k».$$

Теорема 2. *В* N^k *не существует бесконечного множества попарно несравнимых векторов.*

Доказательство. Индукция по k. При $k = 1$ утверждение очевидно: любые два числа, представляющие значения признаков, сравнимы.

Пусть оно справедливо при всех $k < m$. Рассмотрим $H \in H(G_m)$. Пусть $H_{ij} \Rightarrow \{X|X \in H, x_i = j\}$ — множество всех векторов из H, у которых значение i-й координаты фиксировано и равно j. По предположению индукции это множество конечно, пусть

$$h_{ij} = |H_{ij}| < \infty,$$

Положим $m_i \Rightarrow \min \{x_i | X \in H\}$ и $H' \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{m} H_{im_i}$.

Множество H' непусто и конечно: $|H'| \leqslant \sum_{i=1}^{m} h_{im_i}$.

Следовательно, для каждого $i=1,m$ существует $M_i \Rightarrow \max \{x_i | X \in H'\} < \infty$ и множество $H'' \Rightarrow \bigcup_{i=i}^{m} \bigcup_{j=m_i}^{M_i} H_{ij}$ тоже конечно:

$$|H''| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m_i}^{M_i} h_{ij}.$$

Остается показать, что $H=H''$ и, следовательно, конечно. По построению $H'' \subseteq H$ и для любого $X \in H''$ имеет место $X \leqslant M \Rightarrow \langle M_1, \ldots, M_m \rangle$. Но если $Y \in H$ и $Y \notin H''$, то, по построению H'', для любого i имеем $y_i > M_i$, т. е. $Y > M$. Тогда для любого $X \in H''$ было бы $X \leq M < Y$, т. е. X и Y были бы сравнимы в H, что невозможно. Таким образом, $H = H''$ и теорема доказана.

Следствие. $\alpha(G_1) = 1$, *и при* $k \geq 2$ $\alpha(G_k)$ *не существует.*
Действительно, для любого t = 1, 2, .. ., в N^k можно указать независимое множество

$$\{\langle i, \; t-1-i, \; 0, \ldots, 0 \rangle \mid i = \overline{0, t-1}\}$$

мощности t, а бесконечного независимого множества не существует в силу теоремы Диксона.

3. Алгоритмическая задача нахождения $\alpha(G)$ и какого-либо из независимых множеств моделей понятий максимальной мощности или всего класса $H_M(G)$ независимых множеств моделей понятий максимальной мощности для конечных графов, подобно задаче о минимизации ДНФ и многим другим экстремальным задачам, относится к классу так называемых *универсальных переборных проблем.* К такому понятию есть весьма веские основания. Считается, что **основная часть любого алгоритма**, решающего универсальную переборную проблему, состоит в **переборе области решений и выборе оптимального на основе сравнения их <u>параметров</u>**. При таких обстоятельствах особенно актуальным становится вопрос об

организации перебора параметров, которыми определяются признаки понятий.

Пусть $V = \{v_1,..., v_n)$. В нашем случае переборный путь параметров признаков понятий состоит в перечислении всех 2^n подмножеств V, отборе из них $H(G)$ и, после сравнения попавших в $H(G)$, нахождении $H_M(G)$ и, следовательно, $\alpha(G)$. Объем перебора растет при этом очень быстро — экспоненциально — с ростом числа вершин гиперграфов. Существуют различные эвристические приемы сокращения перебора в задачах дискретной оптимизации, фигурирующие обычно под понятием метода ветвей и границ. Мы ограничимся здесь изложением систематического подхода.

Первое соображение состоит в том, что максимальные независимые множества моделей понятий содержатся среди тупиковых: $H_M \subseteq H_T$. Как следует из теоремы 2, между H_T и H'_T имеется простое взаимно однозначное соответствие. Поэтому для нахождения максимальных независимых множеств моделей понятий достаточно перебрать H_T или H'_T. Кроме этого, для H'_T мы можем написать функцию Яблонского в качестве производящей функции, перечисляющей характеристические функции H'_T по параметрам признаков понятий

$$P_i(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i = 1, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

при интерпретации $x^0 \Rightarrow 1$.

Теорема 1. *Функция Яблонского*

$$f_G(x_1, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{r \in R} \left(\bigvee_{v_i \in r} x_i \right) \tag{25}$$

является производящей для H'_T.

Доказательство. Легко проверяются следующие факты:

(а) $f_G(x_1,..,. x_n) = 1$ в том и только том случае, если вектор $<x_1,..., x_n>$ есть набор значений характеристической фукций опоры $\{v_i \mid x_i = 1)$.

(б) Функция алгебры логики f_0 монотонна, следовательно, ее сокращенная ДНФ не содержит отрицаний.

(в) $x_{i_1} \& \cdots \& x_{i_k}$ есть конъюнкция минимального ранга в том и только том случае, если $[v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}]$ — тупиковая опора. Отсюда следует утверждение теоремы. После раскрытия скобок в (25) получается выражение, не содержащее отрицаний. Поэтому сокращенная ДНФ получается из него применением только правил поглощения:

$$A \vee AB = A, \quad 1 \cdot A = A \cdot 1 = A, \quad A \cdot A = A \vee A = A.$$

При раскрытии скобок полезно также иметь в виду тождество

$$\mathop{\&}_{i=1}^{n}(x \vee x_i) = x \vee x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Пример. Для графа *G*, изображенного на рис. 5, имеем

$$\begin{aligned} f_G(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ x_8) = \\ = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_4)(x_2 \vee x_3)(x_2 \vee x_7)(x_3 \vee x_4)(x_4 \vee x_5) \\ (x_4 \vee x_8)(x_5 \vee x_6)\&(x_5 \vee x_8)(x_6 \vee x_8)(x_6 \vee x_7) = \\ = x_2x_4x_5x_8 \vee x_2x_4x_6x_8 \vee x_2x_4x_5x_7x_8 \vee x_1x_2x_3x_5x_6 \vee \\ \vee x_1x_3x_5x_6x_7 \vee x_1x_3x_4x_5x_7x_8 \vee x_1x_3x_4x_6x_7x_8. \end{aligned}$$

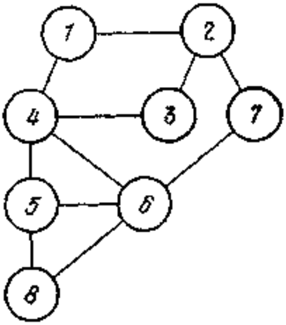


Рис. 5.

Таким образом, $\alpha(G) = 4$ и $|H_T| = |H'_T| = 7$. Множества H_T и H'_T перечислены в таблице 2.

Таблица 2

H_T	1, 3, 7, 8	1, 3, 5, 7,	1, 3, 6	4, 7, 8
H'_T	2, 4, 5, 6	2, 4, 6, 8	2, 4, 5, 7, 8	1, 2, 3, 5, 6

H_T	2, 4, 8	2, 6	2, 5
H'_T	1, 3, 5, 6, 7	1, 3, 4, 5, 7, 8	1, 3, 4, 6, 7, 8

Рассмотрим графы $G_n^{(2)} = \langle E_2^n, R\rangle$, т. е. подграфы G_n, порожденные подмножеством $E_n^2 = \{0, 1\}^n \subset N^n$.

Теорема 2.

$$\alpha\left(G_n^{(2)}\right) = \binom{n}{[n/2]}.$$

Доказательство. Пусть $H \in H\left(G_n^{(2)}\right)$ и $H = \bigcup_{i=0}^{n} H_i$, где H_i — множество всех векторов из H веса i (для $X = <x_1,..., x_n>$ вес $\|X\| = \sum_{i=1}^{n} x_i$), $h_i = |H_i|$.

Возьмем произвольный вектор X такой, что $\|X\| = k$. Перечислим все линейно упорядоченные цепочки признаков, проходящие через X, у которых соседние элементы отличаются только в одной координате, а длина равна $n + 1$. От X вверх цепь признаков можно продолжить $(n — k)!$ способами: добавляем единицу в любой из $(n — k)$ нулевых разрядов X, затем — в любой из оставшихся $(n — k — 1)$ нулевых и т. д. Аналогично, вниз такую цепь признаков можно продолжить, независимо от верхнего участка, $k!$ способами. Поэтому общее число рассматриваемых цепей признаков равно $k!(n — k)!$. Но различным элементам H соответствуют попарно непересекающиеся множества цепей признаков. Так как всего имеется $n!$ цепей признаков, имеем $\sum_{k=0}^{n} h_k k!(n-k)! \leqslant n!$, откуда

$$\sum_{k=0}^{n} h_k \binom{n}{k}^{-1} \leqslant 1. \qquad (26)$$

А так как $\binom{n}{k}$ достигает максимума при $k = [n/2]$ (целая часть $n/2$), умножая (26) на $\binom{n}{[n/2]}$, получаем оценку

$$|H| = \sum_{k=0}^{n} h_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} h_k \binom{n}{k}^{-1} \binom{n}{[n/2]} \leqslant \binom{n}{[n/2]},$$

т. е.

$$\alpha\left(G_n^{(2)}\right) \leqslant \binom{n}{[n/2]}.$$

Равенство в утверждении теоремы следует из того, что множество всех векторов веса $[n/2]$ независимо и имеет мощность $\binom{n}{[n/2]}$. Теорема доказана.

Приведем усиление теоремы 2.

Теорема 3. $H_{м}(G_n^{(2)})$ *при четном n состоит из единственного множества, упомянутого в доказательстве теоремы* 2, *а при нечетном n — из двух, вторым является множество всех векторов веса* (n+1)/2.

Из теоремы 2 следует оценка числа тупиковых независимых множеств моделей понятий произвольного гиперграфа, что то же самое — длины сокращенной ДНФ $f_G(x_i,..., x_n)$:

$$|H_т(G)| = l_c(f_G) \leqslant \binom{n}{[n/2]} \sim \frac{2^n}{\sqrt{2^{-1}\pi n}}. \qquad (27)$$

Если G — граф, то оценка (27) может быть усилена:

$$|H_т(G)| = l_c(f_G) \leqslant (\sqrt[3]{3})^n, \quad \sqrt[3]{3} \approx 1{,}442\ldots \qquad (28)$$

4. Рассмотрим еще один бесконечный граф $G=(A^+, R)$, где R — отношение префиксности между признаками моделей понятий

$$A^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i: \langle x,y\rangle \in R \Rightarrow$$

«существует z такое, что $x = yz$ или $y = xz$». Случай $|A|$=1 тривиален: любые два признака моделей понятий находятся в отношении префиксности, G есть полный граф и $\alpha(G)$ = 1.

Будем далее предполагать, что $A=E_n$, $n\geq 2$. Тогда множество {1, 01,..., 0^i1,...} независимо и бесконечно, т. е. $\alpha(G) =\infty$.

Независимые множества моделей понятий графа G будем называть *префиксными моделями признаков понятий,* тупиковые модели признаков понятий будем называть также полными. В этом пункте исследуются свойства префиксных моделей признаков понятий.

Для модели признака $x = x_1, \ldots x_k, \in A^k$ через $|x| = k$ будем обозначать длину имени этой модели признака, а для множества моделей признаков $W = \{w_1, w_2,.., w_i,...\}$ через $D(W)$ — спектр длин имен моделей признаков W, $D(W)=\{|w_1|,|w_2|,...,|w_i|,...)$, а $d(W)$ =max (| w_1| i = 1, 2,....} при $|W|$ ∞.

Непосредственно из определений вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $W\in H(G)$, *то*

(а) *если* α — *префикс по крайней мере одного из имен моделей признаков W, то* $W_\alpha \Longrightarrow \{\beta|\alpha\beta\in W) \in H(G)$;

(б) *если* $w_i\in W$ *и* $A_1\subseteq A$, *то* $(W\backslash w_i) \bigcup wA_i \in H(G)$;

(в) *если* $\alpha A \subseteq W$, *то* $(W\backslash\alpha A) \bigcup \{\alpha\}\in H(G)$;

(г) $W\in H_T(G)$ *в том и только том случае, если для любого* $\alpha\in A^+$ *найдется* $w_i\in W$ *такое, что* $(\alpha,w_i) \in R$.

Непосредственным применением критерия тупиковости модели признака (см. (г) в теореме 1) получаются все утверждения следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $W \in H_T(G)$. *Тогда:*

(а) *если* α — *префикс по крайней мере одного из имен моделей признаков* W, *то* $W_\alpha \in H_T(G)$;

(б) *если* $W=0{\bullet}W_0 \bigcup \ldots \bigcup (n-1)W_{n-1}$, *то каждое множество* W_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ *есть тупиковая префиксная модель признака;*

(в) *единственная тупиковая префиксная модель признака с наименьшим числом имен моделей признаков и одновременно наименьшей возможной суммой длин всех имен моделей признаков (равными n) есть A;*

(г) *если* α — *префикс по крайней мере одного из имен моделей признаков* $W(|W| < \infty)$ *и* $|\alpha| = d(W) - 1$, *то* $\alpha A \subseteq W$;

(д) *если* $w_i \in W$, *то* $W_{(i)} \Rightarrow (W \backslash \{w_i\}) \bigcup w_i A \in H_T(G)$;

(е) *если* $\alpha A \subseteq W$, *то* $W' \Rightarrow (W \backslash \alpha A) \bigcup \{\alpha\} \in (G)$.

Если $W \in = H_T(G)$ и конечен, то в утверждении (е) теоремы 2 имеем

$$|W'| = |W| - n + 1 < |W|,$$

$$\sum_{w \in W'} |w| < \sum_{w \in W} |w|.$$

С учетом (в) и (г) это позволяет во многих случаях доказывать утверждения о тупиковых префиксных моделях признаков индукцией по $|W|$, $d(W)$, или по $\sum\limits_{w \in W} |w|$.

Теорема 3. *Пусть* $W \in H_T(G)$ *и* $|W| = m < \infty$.

Тогда:

(а) $n - 1$ *является делителем* $m - 1$;

(б) $d(W) \leqslant \frac{m-1}{n-1}$.

Доказательство. (а) При $m = n$ это следует из (в) теоремы 2. Если при $|W| < m$ утверждение справедливо и $m>n$, то $d(W) > 1$ и согласно (г) $d(W) = \{d_i, \ldots, d_{m-n}, d, \ldots, d\}$. Тогда по (е) $\{d_1 \ldots, d_{m-n}, d(W)\}$ — спектр длин имен тупиковой префиксной модели признака с числом имен, меньшим m. По предположению индукции $n - 1$ является делителем $m - n$, но $m - 1 = (m - n) + (n - 1)$ и $n - 1$ является делителем $m - 1$, ч. т. д.

(б) Индукция по $d(W)$. При $d(W) = 1$ это следует из (в) теоремы 2. Предположим утверждение справедливым при $d<d(W)$. Согласно (г), W можно представить в виде $W = W_1 \bigcup W_2{\bullet}A$, где $W_2{\bullet}A \subseteq A^{d(W)}$,

$d(W_1)<d(W)$. По (е) $W_3 = W_1 \bigcup W_2 \in H_т$ и $d(W_3)<d(W)$. По предположению $d(W)-1 \leqslant \frac{|W_1|+|W_2|-1}{n-1}$, следовательно,

$$d(W) \leqslant \frac{|W_1|+|W_2|-1+n-1}{n-1} \leqslant \frac{|W|-1}{n-1},$$

так как $|W_1| + |W_2| + n - 1 \leq |W|$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если $W \in H(G)$, то $D(W)$ удовлетворяет неравенству Мак-Миллана*

$$\sum_{w \in W} n^{-|w|} \leqslant 1. \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $W = \{w_1, ..., w_k\}$, $|w_i|=d_i$ и $N>d(W)$. Тогда

$$w_1 A^{N-d_1} \bigcup \ldots \bigcup w_k A^{N-d_k} \subseteq A^N,$$

причем $w_i A^{N-d_i} \bigcap w_j A^{N-d_j} = \varnothing$ при $i \neq j$.

Следовательно.

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} w_i A^{N-d_i} \right| = \sum_{i=1}^{k} \left| w_i A^{N-d_i} \right| = \sum_{i=1}^{k} n^{N-d_i} \leqslant \left| A^N \right| = n^N,$$

откуда следует (29). Теорема доказана, так как для бесконечного W утверждение следует из его справедливости для любого конечного подмножества.

Пусть $W \in H(G)$ и $W=W_1 \bigcup ... \bigcup W_i,...$, где $W_i=W \bigcap A^i$. Тогда спектр длин моделей признаков W можно задать в виде последовательности $D'(W) \Rightarrow <\sigma_1, \sigma_2, ...,\sigma_i ...>$, где $\sigma_i = |W_i|$, а неравенство Мак-Миллана переписать в форме

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i n^{-i} \leqslant 1. \tag{30}$$

Теорема 5. *Если выполнено* (30), *то существует* $W \in H(G)$, *удовлетворяющий условию* $D'(W)= <\sigma_1, \sigma_2, ...,\sigma_i ...>$.

Доказательство. Искомая префиксная модель признака строится поэтапно: выбираем произвольно $W_1 \subseteq A$ так, что $|W_1|= \sigma_1$, и, после того как построены $W_1, W_2,...,W_{k-1}$ на k-м этапе выбираем произвольно $W_k \subseteq \Delta_k \Rightarrow A^k \setminus (W_1 \cdot A^{k-1} \cup \ldots \cup W_{k-1} \cdot A^1)$ так, что $|W_k|=\sigma_k$, и так до бесконечности. Корректность построения, очевидно, зависит от того, будет ли справедливо неравенство $|\Delta| \geq \sigma_k$ при любом $k = 1, 2,...$ Но мы имеем

$$|\Delta_k| = |A^k| - \sum_{i=1}^{k-1} |W_i| \cdot |A^{k-i}| = n^k - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i \cdot n^{k-i} =$$

$$= n^k \left(1 - \sum_{i=1}^{k-1} \sigma_i n^{-i}\right) \geqslant \sigma_k$$

(последнее неравенство следует из того, что

$$1-\sum_{i=1}^{k}\sigma_i n^{-i} \geqslant 1-\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i n^{-i} \geqslant 0,$$

Откуда $1-\sum_{i=1}^{k-1}\sigma_i n^{-i} \geqslant \sigma_k n^{-k}$, ч. т. д.

Т е о р е м а 6. *Если* $W \in H(G)$ *и* $|W| < \infty$, *то существует* $W' \in H_T(G)$ *такой, что* $W \subseteq W'$ *и* $d(W) = d(W')$.

Доказательство. Пусть $W = W_1 \bigcup W_2$, где $W_2 \subseteq A^{d(W)}$, а $d(W_1)<d(W)$ (возможно, что $W_1 = \varnothing$.Тогда

$$W_2 \Leftarrow A^{d(W)}\backslash W_1A^+ \quad \text{и} \quad W' \Rightarrow W_1 \cup (A^{d(W)}\backslash W_1A^+)$$

— искомая тупиковая модель признака. Теорема доказана.

Следующая теорема устанавливает спектральную характеристику конечных множеств из $H_T(G)$.

Теорема 7. *Для того чтобы в* $H_T(G)$ *существовал W, удовлетворяющий условию* $D(W)= \{d_1,...,d_m\}$, *необходимо и достаточно выполнение*

$$\sum_{i=1}^{m} n^{-d_i} = 1. \tag{31}$$

Доказательство. ***Необходимость***. Если $W' \in H_T(G)$, то по теореме 4 выполнено неравенство Мак-Миллана, которое мы возьмем в форме (30):

$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i n^{-i} \leqslant 1$. Но если $\sum_{i=1}^{k}\sigma_i n^{-i} < 1$, то при построении $W=W_1 \bigcup ... \bigcup W_k$, как в доказательстве теоремы 5, получим $|\Delta_k| > \sigma_k$, т. е. $W_k \subseteq \Delta_k$ и $W_k \neq \Delta_k$.

Следовательно, $W' = W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1} \cup \Delta_k$ есть независимое расширение *W*, что противоречит предположению о тупиковасти *W*. Поэтому выполняется (31).

Достаточность. Из (31) по теореме 5 следует существование *W*, для которого $W \in H(G)$ и $D(W) = \{d_1, \ldots, d_m\}$. Но, согласно теореме 4, $W \in H_T(G)$, так как всякое его расширение нарушает необходимое условие (29). Теорема доказана.

Описание структуры множеств $W \in H(G)$ дается так называемой структурной функцией

$$f_w(z_0, \ldots, z_{n-1}) \Rightarrow \sum_{w \in W} z_0^{|w|_0} z_1^{|w|_1} \ldots z_{n-1}^{|w|_{n-1}}, \tag{32}$$

где $|w|_i \Rightarrow$ число вхождений *i* в имя *w*. Функция $f_w(z_0,..., z_{n-1})$ есть производящая функция, перечисляющая имена множества *W* по их составу, т. е. по признакам $P_i(w) \Rightarrow |w|_i$. В случае конечного *W* сумма (32) содержит конечное число слагаемых и ее будем называть *структурным полиномом множества W*. Описание структуры конечных тупиковых префиксных моделей признаков дает

Теорема 8. *Полином* $f(z_0,\ldots, z_{n-1})$ *является структурным полиномом некоторой тупиковой префиксной модели признака в том и только том случае, если выполнены условия:*

(а) $f(0,\ldots, 0) = 0$;

(б) *коэффициенты f — неотрицательные целые;*

(в) $f - 1 = (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1)g$ *для некоторого полинома* $g(z_0, \ldots, z_{n-1})$, *коэффициенты которого тоже неотрицательные целые, причем, если* $f = f_W$, *где* $W \in H_T(G)$, *то* $g = f_{\pi(W)} + 1$, где $\pi(W)$ — *множество всех префиксов имен W*.

Доказательство. ***Необходимость***. 1 Густь $f=f_W$ и $W \in H_T(G)$. Выполнение (а) и (б) очевидно по смыслу производящей функции, (в) докажем индукцией по $|W|$. При $|W|=n$ по теореме 2 (в) $W=A$ и $f_W = z_0 + \ldots + z_{n-1}$, т. е. (в) выполнено с $g = 1 + f_{\pi(A)}$, так как $\pi(A) = \varnothing$ и $f_{\pi(A)} = \varnothing$. Пусть $|W| = k > n$ и для случаев, когда $|W| < k$, (в) проверено. По теореме 2 (г, е) для $\alpha \in \pi(W)$ длины $d(W)$ — 1 имеем $\alpha A \subseteq W$ и $W' = (W/\alpha A) \bigcup \{\alpha\} \in H_T(G)$. Но $|W'|=k-n+1<k$ и по предположению индукции $f_{W'}=1+(z_0+\ldots+z_{n-1}-1)\cdot g_1$, где $g_1=f_{\pi(W')}+1$. Ввиду $f_W = f_{W'} - f_\alpha + f_{\alpha A}$ и $f_{\alpha A} = f_\alpha \cdot f_A$ имеем

$$f_W - 1 = (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1) \cdot g_1 + (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1) f_\alpha = (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1)(f_{\pi(W)} + 1),$$

так как $\pi(W) = \pi(W') \cup \{\alpha\}$ и $f_{\pi(W)} = f_{\pi(W')} + f_\alpha$, т. е. (в) справедливо и для *W*. Необходимость доказана.

Достаточность. Индукция по $t = \deg(f)$ (степени полинома *f*). Если $t = 1$, то $g = \text{const}$, $f = (z_0 + \ldots \ldots + z_{n-1}) \cdot g - (g - 1)$ и ввиду (а) $g = 1$, поэтому $f = (z_0 + \ldots \ldots + z_{n-1}) = f_A$ и утверждение проверено. Предположим, что оно справедливо для всех полиномов степени, меньшей *t* ($t>1$). В силу (в) $f-1$ можно представить в виде

$$f - 1 = (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1)(h + \bar{g}),$$

где $g = h + \bar{g}$ и *h* — однородный полином степени $t - 1$, а $\deg(\bar{g}) < t-1$.

Рассмотрим полином $\bar{f} = f - (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1)h = 1 + (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1) \cdot \bar{g}$. Покажем, что для $\bar{f}$ (а)—(в) выполнены.

1) $\bar{f}(0,\ldots, 0)=0$ очевидно.

2) Коэффициенты $\overline{f}$ — неотрицательные целые, так как отрицательные члены в $\overline{f}$ могли бы появиться только из слагаемого — $(z_0 + \ldots + z_{n-1})h$ и их степень была бы равна t, тогда как $\deg(f) = 1 + \deg(\bar{g}) \leqslant t - 1$.

3) $\bar{f} - 1 = f - 1 - (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1)h = (z_0 + \ldots + z_{n-1} - 1) \cdot \bar{g}$, где коэффициенты $\bar{g}$ — неотрицательные целые.

Так как $\deg(\overline{f}) < t$, по предположению индукции существует $\overline{W} \in H_T(G)$ такой, что $\overline{f} = f_{\overline{W}}$. Пусть $\overline{W} = \{w_1, \ldots, w_N\}$, а $\overline{f}$ записан в виде суммы членов с единичными коэффициентами $\overline{f} = f_1 + f_2 + \ldots + f_N$ так, что $f_i = f_{w_i}$ и пусть $f_1 + \ldots + f_j = h$, а $V_h = \{w_1, \ldots, w_j\}$ (то, что каждый член h входит в данное представление $\overline{f}$, следует из определения $\overline{f}$). На основании теоремы 2 (д) заключаем, что $W = (\overline{W} \setminus \overline{W}_h) \cup \overline{W}_h \cdot A \in H_T(G)$. При этом

$$f_W = f_{\overline{W}} - f_{\overline{W}_h} + f_{\overline{W}_h \cdot A} = \bar{f} - h + (z_0 + \ldots + z_{n-1})h = f$$

и $g = 1 + f_{\pi(W)}$, так как $g = \bar{g} + h$ и $\pi(W) = \pi(\overline{W}) \cup \overline{W}_h$. Теорема доказана.

Индуктивное доказательство достаточности условий (а) — (в) подсказывает способ построения модели признака по заданной структурной функции. Рассмотрим, например, полином как модель признака, состоящий от двух переменных:

$$f = z_0 z_1 + 2z_0^2 z_1 + z_0 z_1^2 + z_0^3 + 2z_0 z_1^3 + z_1^4 + z_0^3 z_1^2 + z_0^2 z_1^3.$$

Выполнение (а), (б) очевидно. После деления f—1 на $z_0 + z_1$ — 1 получаем

$$f - 1 = (z_0 + z_1 - 1)\big(z_0^2 z_1^2 + z_1^3 + z_0 z_1^2 + z_1^2 + z_0^2 + z_0 z_1 + z_0 + z_1 + 1\big),$$

т. е. (в) тоже выполнено и

1) $h = h_0 = z_0^2 z_1^2$, а $\bar{f} - 1 = (z_0 + z_1 - 1)\big(z_1^3 + z_0 z_1^2 + z_1^2 + z_0^2 + z_0 z_1 + z_0 + z_1 + 1\big)$.

Следующие шаги выполняются по одному и тому же шаблону:

2) $h_1 = z_1^3 + z_0 z_1^2$, $\overline{\overline{f}} - 1 = (z_0 + z_1 - 1)(z_1^2 + z_0^2 +$
$+ z_0 z_1 + z_0 + z_1 + 1)$;

3) $h_2 = z_1^2 + z_0^2 + z_0 z_1$; $\overline{\overline{\overline{f}}} - 1 = (z_0 + z_1 - 1)(z_0 + z_1 + 1)$;

4) $h_3 = z_0 + z_1$; $\overline{\overline{\overline{\overline{f}}}} - 1 = z_0 + z_1 - 1$.

Отсюда $\overline{\overline{\overline{\overline{f}}}} = z_0 + z_1 = f_{\{0,1\}}$ и $W_4 = \{0, 1\}$. Теперь остается от W_4 вернуться к искомой модели признака, проходя шаги в обратном направлении согласно правилу

$$W_i = (W_{i+1} \setminus W_{h_i}) \cup W_{h_i} \cdot A.$$

Результат получится $W = W_0$:

$$W_4 = \{0, 1\}, \quad W_{h_3} = \{0, 1\},$$
$$W_3 = \{00, 01, 10, 11\}, \quad W_{h_2} = \{11, 00, 01\},$$
$$W_2 = \{10, 000, 001, 010, 011, 110, 111\}, \quad W_{h_1} = \{111, 011\},$$
$$W_1 = \{10, 000, 001, 010, 110, 1110, 1111, 0110, 0111\},$$
$$W_{h_0} = \{0110\},$$
$$W = W_0 = \{10, 000, 001, 010, 110, 1110, 1111,$$
$$0111, 01100, 01101\}.$$

Сделаем два замечания к сказанному о префиксных моделях признаков.

Замечание 1. Мощность класса

$$H_T^{(m)}(G) = \{W \mid W \in H_T, \ |W| = m\}$$

m-элементных тупиковых префиксных моделей признаков согласно теореме 3(а) отлична от нуля только при $m = (n\text{-}1)k\text{+}1$, $k = 1, 2, \ldots$

Как показано выше, по этой подпоследовательности мощность множества различных спектров моделей признаков из $H^m{}_T(G)$ с ростом m стремится к бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Замечание 2. Неравенство Мак-Миллана является частным случаем необходимого условия, вытекающего из теоремы 8, которому должен удовлетворять префиксная модель признака W:

(А) $f_W(z_0, \ldots, z_{n-1}) \leqslant 1$ при любых $z_0, \ldots, z_{n-1}$ таких, что $z_i > 0$, $i = \overline{0, n-1}$, и $\sum_{i=0}^{n-1} z_i = 1$,

и более слабого условия

(Б) $f_W(z_0, \ldots, z_{n-1}) \leqslant 1$ при некоторых $z_0, \ldots, z_{n-1}$ таких, что

$$z_i > 0,\ i = \overline{0,\ n-1},\ \text{и}\ \sum_{i=0} z_i = 1:$$

оно получается при $z_0 = \ldots = z_{n-1} = 1/n$.

Легко проверить, что для конечных префиксных моделей признаков следующие условия равносильны: равенство в (А), равенство в (Б) и $W \in H_T(G)$. При этом, очевидно, для любых префиксных моделей признаков, в том числе и для бесконечных, из первого условия следует второе, а из второго — третье. Однако в общем случае никакие два из этих условий неравносильны.

5. *Хроматическое число графа G* можно определить как наименьшее число независимых множеств, на которое можно разбить множество его вершин. Существуют графы, для которых число независимости связано с хроматическим числом дополнительного графа

$$\overline{G} = \langle V,\ \overline{R}\rangle\ \left(\overline{R} \Rightarrow V^2 \setminus (R \cup \{v_i, v_i\}_{i=1}^{n})\right).$$

Например, если ρ — отношение эквивалентности на множестве A, то для его графа G_ρ имеет место

$$\chi(\overline{G}_\rho) = \alpha(G_\rho) = |A/\rho|. \qquad (33)$$

5.6. Моделирования понятий с использованием комбинаторной теории полугрупп

1. *Полугруппой П=<П, °>* называется множество *П*, замкнутое относительно бинарной ассоциативной операции ° (знак операции в формулах обычно опускается, так как основная операция единственная, а скобки опускаются, так как операция ассоциативная и *(xy)z = x(yz) = xyz)*. Содержание комбинаторной теории полугрупп в широком смысле составляет изучение дискретных полугрупп с содержательно определенной операцией — полугрупп преобразований с операцией суперпозиции, матричных полугрупп и т. п. В более узком смысле *комбинаторная теория полугрупп есть теория свободной полугруппы, ее подполугрупп и представлений полугрупп образующими и гомоморфизмами свободной полугруппы над этими образующими.*

Свободной полугруппой над моделями параметров признаков понятий A называется множество A^+ с операцией умножения значений параметров моделей признаков, состоящей в приписывании значений параметров моделей признаков, т. е. $x \bullet y = xy$. В некоторых случаях к A^+ удобно добавить единичный элемент — «пустое» значение параметров моделей признаков λ, длину которого полагают равной нулю, и для любого значения параметра моделей признаков *x: x*λ=λ*x*=*x*. Полугруппу $A^* \Rightarrow A^+ \bigcup (\lambda)$ называют иногда свободным моноидом над алфавитом *A*.

Отображение полугруппы < $П_1$, °> в полугруппу < $П_2$, *>, скажем, φ(*x*), называется гомоморфизмом, если

$$\varphi(x_1 \circ x_2) = \varphi(x_1) * \varphi(x_2). \qquad (34)$$

Если при этом φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между полугруппами, то оно называется ***изоморфизмом***.

Существует взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами полугруппы и некоторыми отношениями эквивалентности на ней, называемыми ***конгруэнтностями***.

Отношение эквивалентности ρ на полугруппе *П* называется *стабильным слева,* если из <*x, y*>∈ρ следует, что для любого z: <*zz, xy*>∈ρ; *стабильным справа,* если из <*x, y*>∈ρ следует, что для любого z: <*xz, yz*>∈ρ. Отношение эквивалентности ρ называется *конгруэнтностью,* если оно стабильно и слева, и справа.

Теорема 1. *Если* φ *— гомоморфизм полугруппы П, то отношение* ε_φ: <*a, b*>∈ε_φ ⇒ φ(*a*) =φ(*b*) *есть конгруэнтность. Если* ρ *есть отношение конгруэнтности на полугруппе П, то П/*ρ *есть полугруппа, в которой X ° Y есть класс Z конгруэнтности* ρ, *который содержит целиком* $X \circ Y = \{ab \mid a \in X,\ b \in Y\}$, *а отображение* φ_ρ, *сопоставляющее каждому a*∈*П класс* $\varphi_\rho(a)$, *содержащий элемент a, есть гомоморфизм.*

Теорема 2. *Если П — конечно порожденная полугруппа и A={a_1,...,a_n} — множество имен образующих П, то на A^+ существует отношение конгруэнтности* ρ *такое, что П изоморфна A^+/* ρ.

Средством описания отношений на полугруппе являются:

соотношения — равенства параметров моделей признаков в множестве имен образующих понятия;

смешанные соотношения — равенства параметров моделей признаков, включающие, кроме имен образующих понятия, символы переменных x_i, значениями которых могут быть любые значения параметров;

тождества — частный вид смешанных соотношений, когда отсутствуют вхождения собственных имен.

Соотношение и тождество называются нетривиальными, если параметры моделей признаков в левой и правой частях графически различны.

Дополнительные возможности описания отношений представляют *условные тождества* (называемые также *квазитождествами)* — законы вида

$$\forall x_1, \ldots x_N \quad \left[\mathop{\&}_{i=1}^{k} \alpha_i(x_1, \ldots, x_N) = \beta_i(x_1, \ldots, x_N) \right] \to$$
$$\to \alpha(x_1, \ldots, x_N) = \beta(x_1, \ldots, x_n), \qquad (35)$$

с помощью которых формулируются формальные, синтаксические правила вывода соотношений.

В любой полугруппе выполняется квазитождество

$$\forall x_1, x_2, y, z \qquad (x_1 = x_2) \to (yx_1z = yx_2z). \qquad (36)$$

Пусть *s* — правило вывода соотношений согласно (36), т. е. соотношение вида $yx_1z = yx_2z$ выводится из $x_1=x_2$ по правилу *s*. Если $s^*(\psi) = \rho$, то говорят, что $\Pi = \Pi<A|\ \psi>$ — представление полугруппы Π образующими A и определяющими соотношениями ψ над этими образующими. Если существует такое представление с конечным множеством ψ, то Π называется конечно определенной.

Теорема 3. *Если полугруппа конечно определена по отношению к какому-либо множеству образующих, то она конечно определена и по отношению к любому другому конечному множеству образующих.*

Заметим, что $s^*(\psi)$ есть наименьшее отношение конгруэнтности на полугруппе, содержащее ψ. Поэтому ψ семантически определяет отношение $\rho=s^*(\psi)$ в классе отношений конгруэнтности на полугруппе.

Теорема 4. *Если полугруппу Π можно изоморфно вложить в группу, то в Π выполняется квазитождество Мальцева: для любых $x, y, z, u, x', y', z', u'$*

$$(yx = y'x' \,\&\, yz = y'z' \,\&\, uz = u'z') \to ux = u'x'. \qquad (37)$$

В дальнейшем мы будем использовать для соотношений вида $\alpha=\beta$ равноценную запись в виде дробей: $\frac{\alpha}{\beta}$ или $\frac{\beta}{\alpha}$. В частности, это удобно в связи с тем, что с умножением $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1\beta_2}$ соотношения в любой полугруппе, учитывая (36), сами образуют полугруппу. Используя такую запись, правилу вывода соотношений на основе квазитождества Мальцева можно придать следующую форму: из соотношений $\frac{yx}{y'x'}$, $\frac{yz}{y'z'}$, $\frac{uz}{u'z'}$ выводится $\frac{ux}{u'x'}$, или, символически,

$$\frac{x}{x'} \leftarrow \frac{y}{y'} \to \frac{z}{z'} \leftarrow \frac{u}{u'},$$

подразумевая, что $\frac{\alpha}{\beta} \to \frac{\gamma}{\delta}$ означает соотношение $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta} \leftarrow \frac{\gamma}{\delta}$ — соотношение $\frac{\gamma\alpha}{\delta\beta}$, сплошные стрелки означают условия, а пунктирная — вывод из условий.

Через $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right.$ будет обозначаться результат максимального сокращения соотношения $\frac{\alpha}{\beta}$ слева, например,

$$\left[\frac{ab}{aba} = \left[\frac{c}{ca} = \frac{\lambda}{a}, \quad \left[\frac{ab}{ac} = \left[\frac{bb}{bc} = \frac{b}{c}.\right.\right.\right.\right.$$

Двойственное обозначение для сокращения справа — $\left.\frac{\alpha}{\beta}\right]$.

Теорема 5. *Существуют конечно определенные полугруппы, для которых проблема равенства значений параметров моделей признаков алгоритмически неразрешима* (т. е. проблема распознавания по паре значений параметров моделей признаков, равны эти значения параметров моделей признаков в полугруппе или нет, иными словами — представляют один и тот же элемент полугруппы или нет?).

Таким образом, с представлениями полугрупп образующими и определяющими соотношениями связаны принципиальные проблемы, в отношении решения которых дело обстоит качественно хуже, чем с универсальными переборными проблемами.

2. Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с *разложениями значений параметров моделей признаков на множители.* Такое разложение можно задавать *скобочной* или *поименной* записью (вместо скобок можно использовать какой-либо разделительный знак, скажем, вертикальную черту). Например, скобочной записи α=(01)(010)(010)(01), где α=0101001001, соответствует поименная $b_1b_2b_2b_1$, если некоторым значениям параметров моделей признаков присвоить имена так, что $b_1 \Rightarrow 01$, $b_2 \Rightarrow 010$. Очевидно, что поименная запись однозначно определяет соответствующую ей скобочную: $b_1b_2b_2 \Rightarrow$ (01)(010)(010)...

Число разложений значений параметров моделей признаков длины N в произведение i непустых значений параметров моделей признаков равно числу способов расставить i—1 разделительных знаков в (N — 1) промежутке между элементами значений параметров моделей признаков и есть поэтому $\binom{N-1}{i-1}$, $i = \overline{1, N}$. Следовательно, общее число таких разложений значений параметров моделей признаков длины N равно $\sum_{i=1}^{N}\binom{N-1}{i-1} = 2^{N-1}$.

Сложнее перечислить все разложения значений параметров моделей признаков в произведение непустых сомножителей из заданного множества. Пусть $V = \{v_1, ..., v_m, \dots\}$ — множество значений параметров моделей признаков, $B=\{b_1, ..., b_m, \dots\}$ — множество имен значений параметров моделей признаков из V в том же порядке. Пусть $F_V(\alpha)$ — множество всех поименных разложений значений параметров моделей признаков α в произведение значений параметров моделей признаков из V. Положим

$$J(V,\ \alpha) \Rightarrow \{j \mid \alpha = v_j\alpha_j\} \qquad (38)$$

и по определению $F_V(\lambda) \Rightarrow \{\ \lambda\ \}$, Легко проверить, что в таком случае для вычисления $F_V(\alpha)$ при $\alpha \neq \lambda$ справедлива рекуррентная формула:

$$F_V(\alpha) = \bigcup_{j \in J(V,\alpha)} b_j F_V(\alpha_j). \qquad (39)$$

Например, для $V = \{01,\ 100, 010,\ 1001\}$ и $\alpha = 0101001001$ находим

$$\begin{aligned} F_V(\alpha) = b_1F_V(01001001) \cup b_3F_V(1001001) = \\ = b_1b_1F_V(001001) \cup b_1b_3F_V(01001) \cup \\ \cup b_3b_2F_V(1001) \cup b_3b_4F_V(001) = b_1b_3b_1F_V(001) \cup \\ \cup b_1b_3b_3F_V(01) \cup b_3b_2b_2F_V(1) \cup \{b_3b_2b_4\} = \\ = \{b_1b_3b_3b_1,\ b_3b_2b_4\}. \end{aligned}$$

Установим условия, при которых в полугруппе V^+ свободной полугруппы A^+ выполняется свойство однозначности разложения на множители по базису V (т, е. условия того, что для любого $\alpha \in A^+$ имеет место $|F_V(\alpha)| \leq 1$). Имеется несколько однотипных критериев. Далее, в этом пункте предполагается, что V — базис, т. е. для значений параметров моделей признаков $v \in V$ имеет место $|F_V(v)| = 1$.

Теорема 1. *Для выполнения свойства единственности разложения значений параметров моделей признаков на простые (неразложимые) сомножители в подполугруппе* V^+ *необходимо и достаточно, чтобы для любых* α, $\beta,\gamma,\delta \in V^+$ *из соотношений* $\alpha x = \beta$ и $x\gamma = \delta$ *следовало* $x \in V^*$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть свойство единственности выполнено для V^+, и пусть $\alpha x = \beta$ и $x\gamma = \delta$, где α, $\beta,\gamma,\delta \in V^+$. Тогда для значения параметра $\alpha x\gamma$ существуют разложение вида $\alpha x|\gamma$ (так как $\alpha x = \beta \in V^+$ и $\gamma \in V^+$) и разложение вида $\alpha|x\gamma$ (так как $x\gamma = \delta \in V^+$ и $\alpha \in V^+$). Но, ввиду единственности, это одно и то же разложение, включающее оба разделительных знака: $\alpha|x|\gamma$, откуда $x \in V^*$.

Достаточность. Предположим, что единственности нет. Тогда существует знчение параметра $\alpha\beta\gamma$ такой, что $\beta \notin V^*$, и есть разложения $\alpha|\beta\gamma$, в котором между β и γ нет разделительного знака, и $\alpha\beta|\gamma$, в котором между α и β нет разделительного знака. Но в таком случае мы имели бы $\alpha\beta=u\in V^+$, $\beta\gamma=v\in V^+$, $\alpha\in V^+$, $\gamma\in V^+$, но $\beta\notin V^*$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Условие в теореме 1 эквивалентно следующему:

$$\text{для любого } x\text{: } V^+x \cap V^+ \neq \varnothing \text{ и } xV^+ \cap V^+ \neq \varnothing \text{ влечет } x \in V^*. \qquad (40)$$

Рассмотрим еще два частных случая условия (40):

$$\text{если } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in V^+,\ x\alpha = \gamma,\ \beta x = \gamma, \text{ то } x \in V^* \qquad (41)$$

(эквивалентно: $xV^+ \cap V^+ \cap V^+x \neq \varnothing$ влечет $x\in V^*$), и

$$\text{если } \alpha,\ \beta,\ \gamma \in V^+,\ \alpha x = \beta,\ x\alpha = \gamma, \text{ то } x \in V^* \qquad (42)$$

(эквивалентно: если $\alpha\beta \in V^+$ и $\beta\alpha \in V^+$, то либо $\alpha\in V^*$ и $\beta\in V^*$, либо $\alpha\notin V^*$ и $\beta\notin V^*$).

В действительности каждое из этих условий эквивалентно (40) и может служить критерием единственности разложения на множители. Пусть, например, выполнено (42) и не выполнено (40): $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in V^+$, $\alpha x = \beta$, $x\gamma = \delta$ и $x \notin V^*$. Умножим первое соотношение слева на γ, а второе справа на α. Получаем $(\gamma\alpha)x = \gamma\beta$, $x(\gamma\alpha) = \delta\alpha$, $\gamma\alpha,\ \gamma\beta,\ \delta\alpha \in V^+$, $x \notin V^*$, — противоречие с (42). Аналогично проверяется равносильность (41) и (40).

Условие префиксности значений параметров моделей признаков V — достаточное для единственности разложения значений параметров моделей признаков V^+ на простые множители. Это легко вывести непосредственно из (39) и формально, записав его в виде

$$Vx \cap V^+ \neq \varnothing \rightarrow x \in V^* \qquad (43)$$

и сравнив с (40). Оно не является необходимым.

Теорема 1 и эквивалентные ей критерии (41), (42) не являются алгоритмическими. На вопрос о том, какова длина кратчайшего из неоднозначно разложимых значений параметров моделей признаков, если такие существуют, они не дают ответа.

Еще одни критерий единственности разложения значений параметров моделей признаков на множители по множеству признаков V можно сформулировать в терминах структурных функций. Здесь V может и не быть базисом. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — значения параметров V, т. е. множество всех букв, имеющих вхождение в признаки V, в

$$f_V(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{v\in V} \left(\prod_{i=1}^{n} z_i^{|v|_i} \right)$$

— структурная функция V, которую мы рассматриваем в области $z_1 > 0$, $z_2 > 0$, ..., $z_n > 0$. Тогда, очевидно, для любого N по смыслу производящей функции имеет место

$$f_{V^N}(z_1, \ldots, z_n) \leqslant (f_V(z_1, \ldots, z_n))^N. \quad (44)$$

Учитывая, что строгое неравенство в (44) имеет место только при условии, что существует признак, допускающий два разложения в произведение *N* признаков из *V*, и что если существует признак, допускающий два разложения на множители из *V*, скажем, $b_{i_1} \ldots b_{i_p}$ и $b_{j_1} \ldots b_{j_q}$, то найдется и признак, допускающий два разложения на одинаковое число сомножителей из *V*, именно

$$b_{i_1} \ldots b_{i_p} b_{j_1} \ldots b_{j_q} \text{ и } b_{j_1} \ldots b_{j_q} b_{i_1} \ldots b_{i_p},$$

получаем теорему.

Теорема 2. *Для выполнения свойства единственности разложения на множители из V необходимо и достаточно, чтобы для любого N —* 1, 2, ... *имело место*

$$f_{V^N}(z_1, \ldots, z_n) = (f_V(z_1, \ldots, z_n))^N.$$

3. Далее будем рассматривать свободные полугруппы и $\mathfrak{I}$-полугруппы — полугруппы, изоморфные конечно порожденным подполугруппам свободных полугрупп. Представления $\mathfrak{I}$-полугрупп образующими в A^+ (т. е. задания множествами признаков *V* таким образом, что $П = V^+$) будем называть понятийными представлениями.

Пусть $\mathfrak{I}$-полугруппа $П = V^+$ задана *понятийным* представлением $V = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и $B = \{b_1 \ldots, b_m\}$ — значения параметров имен образующих в том же порядке. Пусть *f* - естественный гомоморфизм B^+ на V^+:

$$f(b_i) = v_i \quad (j = \overline{1, m}), \quad f(b_{i_1} \ldots b_{i_k}) = f(b_{i_1}) \ldots f(b_{i_k})$$

$$\text{и} \quad R(V) = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \middle| f(\alpha) = f(\beta) \right\}.$$

R(V) есть отношение конгруэнтности на B^+, соответствующее гомоморфизму *f*, поэтому $П = П\langle B | R(V) \rangle$. Пусть

$$R_1(V) \Rightarrow R(V) \backslash R(V)^2,$$

т. е. $R_1(V)$ есть множество всех соотношений *R(V),* которые не могут быть разложены в произведение соотношений *R(V).*

Теорема 1. *R(V) = $R_1(V)$*, причем $R_1(V)$ — множество свободных образующих R(V).*

Доказательство. Если $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2} \in R(V)$ и $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2} \in R(V)$, то $\left|f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right| = \left|f\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\right| + \left|f\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)\right|$ (для соотношения $\frac{\alpha}{\beta} \in R(V)$ через $f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ обозначаем параметр $f(\alpha)$, равный $f(\beta)$), где $\left|f\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\right| > 0$ и $\left|f\left(\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right)\right| > 0$.

Поэтому каждое соотношение $R(V)$ представимо в виде произведения соотношений из $R_1(V)$, число которых заведомо не больше числа букв в соотношении. Единственность такого представления следует из того, что

$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}\frac{\alpha_2}{\beta_2} \in R(V)$ и $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \in R(V)$ влечет выполнение $\frac{\alpha_2}{\beta_2} \in R(V)$, так как если $f(\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_1)f(\alpha_2) = f(\beta_1)f(\beta_2) \Rightarrow f(\beta_1\beta_2)$ и $f(\alpha_1) = f(\beta_1) = \gamma$, то после сокращения слева на γ получаем $f(\alpha_2) = f(\beta_2)$, что равносильно $\frac{\alpha_2}{\beta_2} \in R(V)$. Теорема доказана.

Следствие. $\Pi = \Pi\langle B | R_1(V)\rangle$.

Замечание. Когда целесообразно, естественный гомоморфизм f продолжают на свободный моноид B^*, полагая $f(\lambda) = \lambda$.

4. В этом пункте рассмотрим бескоэффициентные уравнения в свободной полугруппе, проще говоря — *уравнения в параметрах.* Пусть ρ:

$$f_i(x_1, \ldots, x_m) = g_i(x_1, \ldots, x_m), \ i \in J, \tag{45}$$

— система уравнений в параметрах (f_i, g_i — параметры в множестве значений параметров неизвестных). Набор параметров признаков $X_0 = \langle x^0_1, \ldots, x^0_m\rangle$ называется решением системы (45), если при подстановке левая и правая части каждого уравнения совпадают графически. Набор параметров называется *унтер-решением* системы (45), если $R(X_0) \subseteq s^*(\rho)$, т. е. если в полугруппе X_0^* нет никаких нетождественных соотношений, кроме, быть может, соотношений ρ и их следствий. Так, всякое множество свободных образующих, в том числе всякий префиксная модель признака, является унтер-решением.

Унтер-решение называется *экстремальным,* если его спектр является минимальным элементом в множестве спектров всех унтер-решений системы (т. е. в этом множестве нет спектра, который им мажорируется по отношению покоординатного сравнения).

Пусть $F(\rho)$ — множество всех унтер-решений системы ρ, $Y^0(\rho)$ — множество всех экстремальных унтер-решений этой системы.

Теорема 1. *Для любой системы уравнений* ρ *множество ее экстремальных унтер-решений* $Y^0(\rho)$ *конечно.*

Утверждение теоремы следует непосредственно из теоремы Диксона.

Теорема 2. *Не существует алгоритма, вычисляющего по произвольной конечной системе уравнений в признаках* ρ *множество ее экстремальных унтер-решений* $Y^0(\rho)$.

Доказательство. С произвольной системой уравнений ρ над переменными $X = \{x_1, ..., x_m\}$, включающей уравнения $x_i x_1 = x_1 x_i = x_i$ для всех i=l, 2. …, m, связываем полугруппу $П = П\langle X|\rho\rangle$, в которой x_1 является единицей, и полугруппу $П_0 = П\langle X \cup \{x_0\}|\rho_0\rangle$, где

$$\rho_0 = \rho \cup \{x_1 x_0 = x_0,\ x_0 x_1 = x_0\}$$

($П$ есть свободное произведение $П * \{x_0^i\}_{i=0}^{\infty}$ полугрупп с общей единицей — классом, включающим x_1).

Покажем, что $\langle a, \lambda, \ldots, \lambda\rangle \in Y^0(\rho_0)$ в том и только том случае, если $П$ — единичная (т. е. одноэлементная) полугруппа.

Пусть $П$ — единичная. Тогда $\langle a, \lambda, \ldots, \lambda\rangle \in Y^0(\rho_0)$, так как $\alpha \Rightarrow \alpha_1 a \alpha_2 a \ldots \alpha_k a \alpha_{k+1} = a^k$ в $П_0$, и если

$$\beta \Rightarrow \beta_1 a \beta_2 a \ldots \beta_l a \beta_{l+1} = a^k \text{ в } П_0,$$

то $k = l$ и $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}$ в $П$. Следовательно, $\langle\alpha, \beta\rangle \in \rho_0$.

Обратно: если $\langle a, \lambda, \ldots, \lambda\rangle \in Y^0(\rho_0)$, то из $\alpha \neq \beta$ в $П$ следует $\langle \alpha a, \beta a\rangle \notin \rho_0$ в $П_0$, но в $П_0$ имеем по предположению $a\alpha = \beta a = a$ — противоречие. Следовательно, для любых α,β пара $\langle\alpha, \beta\rangle \in \rho$ в $П$, т. е. $П$ — единичная.

Но проблема распознавания единичности понятия или признака для конечно определенных полугрупп алгоритмически неразрешима, откуда следует утверждение теоремы.

Что касается решений уравнений в признаках, проблема состоит в нахождении общего решения, описывающего с точностью до каких-либо преобразований все решения. Некоторые из относящихся сюда результатов содержатся в следующих пунктах.

5. Рассмотрим уравнения в признаках с двумя неизвестными. Для признака α обозначим через ε(α) примитивный корень значения параметра этого признака, т. е. кратчайшие значения параметров из признаков β, для которых верно $\alpha\{\beta\}^+$. В представлении $\alpha = \varepsilon(\alpha)^\tau$ натуральное число $\tau = \tau(\alpha)$ — показатель признака α. Признак α называется простым, если ε(α)=α, в противном случае — периодическим (τ(α)> 1). Очевидно, что для любого признака α: ε(ε(α)) = ε(α), т. е. ε(α) — простое (если бы $\varepsilon(\alpha) = \beta^i,\ i \geqslant 2$, то имели бы $\alpha = \beta^{i\tau},\ |\beta| < |\varepsilon(\alpha)|$).

Теорема 1. *Пусть* $\delta = \varphi(\alpha, \beta) = \psi(\alpha, \beta),\ \alpha \neq \lambda,$ $\beta \neq \lambda$, *и* $\varphi(x, y) \neq \psi(x, y)$. *Тогда существует признак* γ *такой, что* $\alpha = \gamma^i$ *и* $\beta = \gamma^j$ *для некоторых натуральных чисел* i, j.

Доказательство. Индукция по $|\delta| = k$. При $k = 1$ очевидно, что $\alpha = \beta = \gamma$. Пусть утверждение верно при $k < m$ и $|\delta| = m$. Если $\alpha \neq \beta$, то α и β находятся в отношении префиксности, скажем, $\alpha = \beta \bullet \omega$. Пусть $\varphi = x\varphi_1(x, y)$, а $\psi = y\psi_1(x, y)$. Тогда из

$$\beta\omega\varphi_1(\beta\omega, \beta) = \beta\psi_1(\beta\omega, \beta)$$

следует

$$\delta' = \omega\varphi_1(\beta\omega, \beta) = \psi_1(\beta\omega, \beta) \text{ и } |\delta'| < m.$$

Поэтому по предположению индукции $\omega = \gamma^i$, $\beta = \gamma^j$ и, следовательно, $\alpha = \gamma^{i+j}$, $\beta = \gamma^j$. Теорема доказана. В качестве следствий этой теоремы получаем:

$\varepsilon(\alpha^i) = \varepsilon(\alpha)$ для любого признака α и натурального i; (46)

если $\alpha = \beta^i$, то $\beta = \varepsilon(\alpha)^{\tau(\alpha)/i}$, $\tau(\alpha) = i \cdot \tau(\beta)$. (47)

(46) докажем индукцией по $|\alpha|$. При $|\alpha| = 1$ имеем $\varepsilon(\alpha^i) = \varepsilon(\alpha) = \alpha$.

Пусть $|\alpha| = k$. Тогда $\alpha^i = (\varepsilon(\alpha^i))^{\tau(\alpha^i)}$, $\alpha = \varepsilon(\alpha)^{\tau(\alpha)}$ из $\alpha^{i+1} = \alpha \bullet \alpha^i = \alpha^i\alpha$ и по теореме 1, учитывая, что $\varepsilon(\alpha^i)$ и $\varepsilon(\alpha)$ — простые признаки, заключаем, что $\varepsilon(\alpha^i) = \varepsilon(\alpha)$. (161) доказано.

Если $\alpha = \beta^i$, то $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\beta^i) = \varepsilon(\beta)$, откуда

$$\alpha = (\varepsilon(\alpha))^{\tau(\alpha)} = (\varepsilon(\alpha)^{\tau(\beta)})^i = \varepsilon(\alpha)^{i\tau(\beta)}$$

и (47) доказано.

Пусть $\alpha = a_1a_2 \ldots a_N$. Через $\alpha^{(i)} \Rightarrow a_ia_{i+1} \ldots a_{i+N-1}$ обозначается циклический сдвиг признака α на i — 1 разрядов вправо (индексы в такой записи понимаются как наименьшие положительные значения по модулю

$$N = |\alpha|, \alpha^{(1)} = \alpha^{(N+1)} = \alpha).$$

Пусть $C(\alpha) = \{\alpha^{(i)} | i = \overline{1, N}\}$ — циклокласс, порожденный признаком α. Легко проверить, что для любого признака α и любого i

$$\varepsilon(\alpha^{(i)}) = (\varepsilon(\alpha))^{(i)}, \quad (48)$$

$$C(\alpha) = \{(\varepsilon(\alpha^{(j)}))^{\tau(\alpha)} | j = \overline{1, |\varepsilon(\alpha)|}\}, \quad (49)$$

$$|C(\alpha)| = |\varepsilon(\alpha)|. \quad (50)$$

6. Задача нахождения решений уравнений в признаках двойственна задаче перечисления соотношений между образующими $\mathfrak{I}$-полугрупп. Понятийное представление $\mathfrak{I}$-полугруппы V называется минимальным, если для любого изоморфного понятийного представления V' и изоморфизма f, индуцируемого соответствием $f(v_i) = v^1_i$, имеет место либо $|f(v_i)| = |v_i|$ для всех $i = 1, 2, \ldots, |V|$, либо $|f(v_i)| > |v_i|$ для некоторого i, т. е. если V не может быть «сжат».

Например, $\{aba, ab, ba\}$ не минимально, так как сжатие, определенное соответствием

$$aba \to a,$$
$$ab \to ab,$$
$$ba \to ba,$$

есть изоморфизм.

Теорема 1. *Пусть* $V = \{v_1, \dots, v_m\}$, $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ *и для* $i = \overline{1, m}$ $v_i = \varphi_i(w_1, \dots, w_n)$, *причем каждое* x_j $(j = \overline{1, n})$ *входит по крайней мере в один из признаков* $\varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = \overline{1, m}$. *Тогда, если W не минимальный, то и V не минимальный.*

Доказательство. Если ψ есть изоморфизм полугруппы W^+, то его ограничение на подполугруппу V^+ есть тоже изоморфизм. Ясно, что если ψ сжимал *W*, то при условии теоремы ψ сжимает и *V*. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если выполняется свойство единственности разложения на множители по* $V = \{v_1, ..., v_m\}$, *то V минимально в том и только том случае, если* $|v_1| = |v_2| = \dots = |v_m| = 1$, *т. е. V есть алфавит.*

Это — непосредственное следствие предыдущей теоремы.

Теорема 3. *Пусть A, B— алфавиты.* $A \cap B = \varnothing$, $T_n(A, B) = \{B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B, A^n\}$ $(n > 1)$. *Тогда:*

(а) *$T_n(A, B)$ — префиксная модель признака или понятия ;*

(б) *если* $V \subseteq T_n(A, B)^*$ *и* $A(V) \cap A \neq \varnothing$, *то V не минимально;* (для мложества слов *V* через *A(V)* обозначается алфавит всех букв, входящих в признаки *V*, *A'(V)* и *A''(V)* —алфавиты всех первых и всех последних букв *V* соответственно).

(в) *если для признака* α: $A(\alpha) \subseteq A \cup B$, *то* $\alpha \notin T_n(A, B)^*$ *в том и только том случае, если* $\alpha \in A^m$ *и n не является делителем m либо если* $\alpha = \alpha' b \alpha''$, *где* $b \in B$ *и* $\alpha'' \in A^m$, $m > 0$, *и n не является делителем m.*

Доказательство, (а) очевидно, (б) следует из того, что свойство единственности разложения на множители по множеству сохраняется для любого подмножества, и теорем 1, 2, (в) легко проверяется индукцией по | α |. Теорема доказана.

Теорема 4. *Если V минимально, то*

$$A(V) = A'(V) = A''(V).$$

Доказательство. Если, скажем, $A''(V) \neq A(V)$, то для любого $n>1$ имеем $V \subset T_n(A(V) \setminus A''(V), A''(V))^*$ и

$$A(V) \cap (A(V) \setminus A''(V)) \neq \varnothing.$$

Тогда по теореме 3 V не минимален. Рассуждение для $A'(V)$ совпадает с этим с точностью до обращения всех признаков в множествах V и T. Теорема доказана.

Из теоремы 4 вытекает важное свойство решений систем уравнений в признаках. Если разложения на множители по признакам $V = \{v_1, ..., v_m\}$ имеют свойство единственности, $B = \{b_1, ..., b_m\}$, то V^+ изоморфна свободной полугруппе с m образующими. В этом случае естественный изоморфизм $f=f_V$ полугруппы B^+ на V^+ назывется свободным изоморфизмом. Если при этом V — префиксная модель признака или обращение префиксной модели признака, то f_V называется префиксным или соответственно обратно-префиксным изоморфизмом. Легко проверить, что классы свободных изоморфизмов и префиксных изоморфизмов замкнуты относительно суперпозиции отображений. Если множество $W \subseteq B^+$, то его образ $f(W)$ при свободном изоморфизме называется его производным.

Как следует из теоремы 4, если V минимально, то $|A'(V)| = |A''(V)| \leq |V|$, а если свойство единственности разложения на множители по V не выполняется, то $|A'| < |V|$. Учитывая это, получаем следующую переформулировку теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть* $\mathfrak{D}$ *— множество всех решений системы уравнений в признаках* (45) *в (m —* 1*)-буквенном алфавите, а* $\mathfrak{Y}$ *— множество всех ее унтер-решений в m-буквенном алфавите. Тогда множество всех решений* (45) *и множество всех ее унтер-решений являются соответственно производными от* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{Y}$.

7. Здесь покажем, что за редким исключением средством синтаксического задания $\mathfrak{F}$-полугрупп могут быть только соотношения между именами образующих, и выявим соответствующее исключение.

Теорема 1. *Если в* $\mathfrak{F}$*-полугруппе выполняется нетривиальное смешанное соотношение, то она коммутативна и все тождества, которые в ней выполняются, являются следствиями $XY = YX$, а любое смешанное соотношение перестановками сомножителей и последующим сокращением приводится к обычному соотношению.*

Доказательство. Пусть $\alpha x_i \varphi = \beta x_j \psi$ — неразложимое смешанное соотношение в $\mathfrak{F}$-полугруппе, V — минимальное понятийное представление этой полугруппы $\{v_1, \ldots, v_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ и f — естественный гомоморфизм B^* на V^+. Соотношение однородно (т. е. всякая переменная входит одинаковое число раз в левую и правую части), так как при любых подстановках значений переменных длина значений параметра признака в левой части должна равняться длине значений параметра признака в правой части.

Возможны случаи:

(1) $\alpha=\beta$ — пустой признак и $i \neq j$;

(2) α или β отлично от λ, тогда $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ находятся в отношении префиксности, скажем, $f(\alpha) = f(\beta) \bullet\gamma$ и $\gamma \neq \lambda$. Поскольку вместо любой переменной можно подставлять любое значение параметра признака из V и равенство должно выполняться, все признаки V должны начинаться на одну и ту же букву (первую букву γ в случае (2)). Тогда по теореме 4.6 $|A(V)|=1$ и V^+ изоморфна коммутативной подполугруппе полугруппы натуральных чисел по сложению. Любое однородное тождество, очевидно, выводится из $XY = YX$, а в смешанном соотношении все переменные перестановками можно перевести в каждой части в префикс и, после сокращения, вхождений переменных не останется ввиду однородности. Теорема доказана.

Тождественные соотношения вообще накладывают сильные ограничения на класс полугрупп, в которых они выполняются. Например, в класс коммутативных полугрупп, т. е. полугрупп, в которых выполняется тождество $XY = YX$, всякая конечно порожденная полугруппа конечно определена, т. е. для ее синтаксического задания к тождеству коммутативности достаточно добавить конечное число соотношений.

В то же время в классе $\mathfrak{F}$-полугрупп существуют такие, которые не являются конечно определенными. Вопрос о сложности описания соотношений в $\mathfrak{F}$-полугруппах изучался разными авторами. Ими получен алгоритмический критерий конечной определенности $\mathfrak{F}$-полугруппы, заданной словесным представлением. С его помощью можно показать, что, например, $\mathfrak{F}$-полугруппа, заданная образующими $\{a, ab, ba, bb\}$, не является конечно определенной. Подобный пример с менее чем 4 образующими невозможен: как показано в одной из работ, *все $\mathfrak{F}$-полугруппы с тремя и менее образующими конечно определены.* В ряде работ найдены все представления $\mathfrak{F}$-полугрупп с тремя образующими неприводимыми системами определяющих соотношений.

8. **Примеры.** (а) Найдем представление $\mathfrak{F}$-полугруппы, порожденной образующими $V=\{a, ba, ab\}$, определяющими соотношениями над образующими

$$x \Rightarrow a, \; y \Rightarrow ba, \; z \Rightarrow ab.$$

1) Покажем, что

$$R_1(V) = \left\{ \frac{x}{z} \left(\frac{y}{z} \right)^i \frac{y}{x} \right\}_{i=0}^{\infty} \quad (51)$$

Для любых $\alpha, \; \beta \in \{a, \; b\}^*$, как легко проверить, имеем

$$F_V(ba\alpha) = yF_V(\alpha),$$
$$F_V(\beta ab) = F_V(\beta)z,$$
$$F_V(\alpha aa\beta) = F_V(\alpha a)F_V(a\beta),$$
$$F_V(\alpha bb\beta) = F_V(\alpha b)F_V(b\beta).$$

Отсюда следует, что если $\frac{\mu}{\nu}$ неразложимо и $\mu,\ \nu \in F_V(\alpha)$, то α не содержит вхождений *aa* и *bb*, т. е. имеет вид α=*(ab)ⁱa* для некоторого натурального числа *i* Индукцией по *i* находим $F_V\left((ab)^i a\right) = \{z^j xy^{i-j}\}_{j=0}^{i}$. Из этого множества можно выбрать только одну несократимую пару $xy^i = z^i x$, откуда следует (51).

2) Любое из соотношений (51) выводится из $xy = zxx$:

$$xy^{i+1} = zxy^i = z^2xy^{i-1} = \ldots = z^ixy = z^{i+1}x.$$

В результате получаем

$$V^+ = \Pi\langle\{x,\ y,\ z\}\,|\,xy = zx\rangle.$$

(б) Рассмотрим обратную задачу: описать все решения уравнения

$$xy = zx. \tag{52}$$

Так как *x* и z находятся в отношении префиксности, должно выполняться $x = zx_1$ либо $z = xz_1$, где x_1 и z_1 отличны от λ (решения, в которых один из признаков пустой, исчерпываются, как легко проверить, следующими наборами <λ, λ, λ>, <α, λ, λ > и < λ, α, α >; решения, соответствующие $x_1 = \lambda$ в первом случае и $z_1 = \lambda$ во втором случае — < α, α, α >, где α — произвольный признак).

В первом случае подстановка в (52) дает $zx_1y = zzx_1$ и после сокращения на z слева — $x_1y=zx_1$. Следовательно, решение, соответствующее этому случаю, получается из некоторого решения $\langle x_h\ y,\ z\rangle$ того же уравнения (52), но с меньшей суммой длин признак, операцией

$$\langle x_1,\ y,\ z\rangle \to \langle zx_1,\ y,\ z\rangle. \tag{53}$$

Во втором случае получаем аналогично $xy = xz_1x$, откуда $y = z_1x$, т. е. решение имеет вид

$$\langle x,\ z_1x,\ xz_1\rangle, \tag{54}$$

где $x,\ z_1$— произвольные непустые признаки. Проверкой убеждаемся, что (54) является решением (52) при любых $x,\ z_1$ следовательно, любое решение (52) получается из (54) с произвольными $x,\ z_1$ операциями (53):

$$\langle x,\ z_1x,\ xz_1\rangle \to \langle (xz_1)x,\ z_1x,\ xz_1\rangle \to \dots$$

$$\dots \to \langle (xz_1)^i x,\ z_1x,\ xz_1\rangle \to \dots$$

Итак, общее решение можно записать в виде

$$\langle(\alpha\beta)^i\alpha,\ \beta\alpha,\ \alpha\beta\rangle,\quad \langle\alpha,\ \lambda,\ \lambda\rangle, \tag{55}$$

где α, β — произвольные признаки, i — произвольное неотрицательное целое ($<\alpha, \alpha, \alpha>$ получается из (55) при $\beta = \lambda$, $i = 0$, $<\lambda, \lambda, \lambda>$— при $\alpha = \beta = \lambda$, $<\lambda, \beta, \beta>$ — при $\alpha = \lambda$, $i = 0$).

Нетривиальные решения (т. е. соответствующие случаю $\alpha \neq \lambda$, $\beta \neq \lambda$ и $\varepsilon(\alpha)\neq\varepsilon(\beta)$) все изоморфны — это можно проверить, найдя представление полугруппы, порожденной любым из них, и убедившись, что оно совпадает с представлением в примере (а). Это не случайность, а свойство широкого класса уравнений в признаках: например, показано, что нетривиальное решение любого неоднородного уравнения с тремя неизвестными единственно с точностью до изоморфизма.

(в) Рассмотрим граф $G_\rho^{(N,n)}$ отношения эквивалентности ρ на

$$A^N\quad (|A| = n):\ (\alpha,\ \beta) \in \rho \Rightarrow C(\alpha) = C(\beta).$$

Согласно (33) $\alpha\left(G_\rho^{(N,n)}\right) = |A^N/\rho|$. Получим явное выражение для $\alpha(G_\rho^{(N,n)})$.

Пусть $P_n(N)$ — множество всех простых слов A^N. Тогда согласно п. 5 имеем

$$A^N = \bigcup_{d\mid N} \{\alpha^{N/d} \mid \alpha \in P_n(d)\} \tag{56}$$

(объединение по всем делителям d числа N, включая 1 и N). Так как каждый признак α представим в виде $\alpha = \varepsilon(\alpha)^{\tau(\alpha)}$, где ε(α) — простое (примитивный корень), единственным способом, множества в правой части (56) попарно не пересекаются и мы имеем

$$|A^N| = n^N = \sum_{d\mid N} |P_n(d)|.$$

Отсюда, применяя теоретико-числовую формулу обращения арифметических функций (если

$$G(N) = \sum_{d\mid N} F(d),\ \text{то}\ F(N) = \sum_{d\mid N} \mu(d)\, G\left(\frac{N}{d}\right),$$

где функция Мёбиуса $\mu(N)$ вычисляется так: $\mu(1) = 1$, если $p_1,.., p_k$ — различные простые, то $\mu(p_1,.., p_k)=(-1)^k$, $\mu(N)=0$ в остальных случаях), получаем

$$|P_n(N)| = \sum_{d\mid N} \mu(d)\, n^{N/d},$$

$$\alpha\left(G_\rho^{(N,n)}\right)=|A^N/\rho|=\sum_{d|N}\frac{1}{d}\,|P_n(d)|=\sum_{d|N}\frac{1}{d}\sum_{k|d}\mu(k)\,n^{d/k}.$$

Так, если N — простое число, то

$$\alpha\left(G_\rho^{(N,n)}\right)=\sum_{k|1}\mu(k)\,n^{1/k}+\frac{1}{N}\sum_{k|N}\mu(k)\,n^{N/k}=$$
$$=\mu(1)\cdot n+\frac{1}{N}\left(\mu(1)\cdot n^N+\mu(N)\cdot n\right)=$$
$$=n+\frac{1}{N}\left(n^N-n\right).$$

(г) Хотя массовая проблема перечисления всех экстремальных унтер-решений систем уравнений в признаках алгоритмически неразрешима, для многих конкретных систем понятий и даже для больших классов понятий она может быть решена. Характер рассуждений, приводящих к решению, мы проиллюстрируем на примере системы уравнений с четырьмя неизвестными. Пусть $\rho = s^*(\rho_1)$, где ρ_1:

$$x_1x_2=x_3x_1,$$
$$x_1x_4x_1=x_3x_2$$

— система уравнений в словах признаков над алфавитом $\{0,\ 1\}$.

Пусть $X=\langle x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\rangle\in Y^0(\rho)$ и спектр длин его признаков есть

$$D_X=\langle d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4\rangle,\ d_i=|x_i|,\ i=\overline{1,\ 4}.$$

Установим несколько необходимых условий.

1) Все признаки X отличны от λ и попарно различны. Действительно, легко проверить, что признаки длины два или меньше участвуют в ρ только в одном соотношении $x_1x_2 = x_3\ x_1$. Но если какой-либо из признаков $x_i = \lambda$, то выполняется $x_i^2 = x_i$, а соотношение $x_i = x_j$ при $i\neq j$ тоже не входит в ρ. В частности, все $d_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

2) Если $1 \notin D_x$, то $<2, 2, 2, 2> \leq D_x$ и в таком случав D_x может быть спектром экстремального унтер-решения только при $D_x = <2, 2, 2, 2>$ и, следовательно, $X = (00, 01, 10, 11>$, которое является префиксной моделью признака и действительно принадлежит множеству $Y(\rho)$. Таким образом, остается рассмотреть такие X, что $D_x \ni =1$.

3) Две единицы не могут входить в D_x, так как если $x_i = 0$, $x_j = 1$ и $k\neq i, j$, то x_k выражается через x_i и x_j.

4) Если $1\in D_X$ и $2\notin D_X$, то $<1, 2, 3, 3> <D_X$ в некотором порядке, следовательно, D_x не является спектром экстремального унтер-

решения, так как <1, 2, 3, 3> — спектр тупиковой префиксной модели признака: <1, 01, 001, 000> $\in$ *Y*(ρ). Таким образом, кроме <2, 2, 2, 2> и <1, 2, 3, 3> нас могут интересовать только спектры, не мажорирующие эти, т. е. имеющие состав <1, 2, 2, *i* >, где *i*>2.

5) Тройки признаков с длинами {1, 2, 2} могут быть <1, 00, 01>, <1, 00, 10>, <1, 01, 10> (тройки, которые получаются из них переобозначениями 0 и 1, отличаются от этих несущественно). Две первые из них — префиксная модель признака и ее обращение, третья удовлетворяет соотношению $ab = ca$ при $a \Rightarrow 1$, $b \Rightarrow 01$, $c \Rightarrow 10$. Учитывая 1), эта тройка может входить в унтер-решение только при $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$.

Выясним, возможно ли это, т. е. можно ли подобрать признак x_4 так, чтобы <1, 01, 10, x_4> $\in$ *Y*(ρ). Если да, то найдем кратчайший из таких признаков и получим экстремальное унтер-решение. Признаком длины 2 x_4 быть не может: 01 и 10 входят в *X*, $x_4 \Rightarrow 11$ влечет $x_4 = x^2_1$, а если $x_4 \Rightarrow 00$, то $x_3x_4x_1 = x_1x_4x_2$ и это соотношение не входит в ρ, так как к $x_3x_4x_1$ ни одна из подстановок ρ, неприменима. Аналогично обнаруживаем, что ни один признак длины 3 не может быть взят в качестве x_4:

$$
\begin{array}{llll}
000 - & x_1x_4x_2 = x_3x_4x_1, & 100 - & x_4x_1 = x_3x_2, \\
001 - & x_1x_4 = x_3x_2, & 101 - & x_4 = x_1x_2, \\
010 - & x_1x_4 = x_3^2, & 110 - & x_4 = x_1x_3, \\
011 - & x_4 = x_2x_1, & 111 - & x_4 = x_1^3.
\end{array}
$$

Среди признаков длины 4 находим $x_4 \Rightarrow 0001$ такой, что с вхождением $x_4 = 0001$ никакое неразложимое соотношение невозможно и <1, 01, 10, 0001 > $\in$ Y^0(ρ). Если $d_1 = 1$, $d_2 = d_3 = 2$, то надо проверить еще, не существуют ли унтер-решения <1, 00, 01, x_4>, <1, 01, 00, x_4>, <1, 00, 10, x_4> или <1, 10, 00, x_4> с более коротким x_4. Но если *X* допускает какое-либо нетождественное соотношение, то, как следует из вида ρ_1, x_1 и x_3 должны быть в отношении префиксности, а x_1 и x_2 — в отношении суффиксности. Это не выполняется в каждом из перечисленных выше случаев, следовательно, ни одни ни них нереализуем, разве что можно найти такое x_4, что *X* имеет свойство единственности разложения на множители. Такое тоже невозможно, как легко убедиться непосредственной проверкой.

6) Перечислим остальные спектры, реализуемость которых подлежпг проверке:

$\langle 1, 2, i, 2\rangle$, $\langle 2, 2, 1, i\rangle$,
$\langle 1, i, 2, 2\rangle$, $\langle 2, i, 1, 2\rangle$,
$\langle 2, 1, 2, i\rangle$, $\langle i, 2, 1, 2\rangle$,
$\langle 2, 1, i, 2\rangle$, $\langle 2, 2, i, 1\rangle$,
$\langle i, 1, 2, 2\rangle$, $\langle 2, i, 2, 1\rangle$,
$\langle i, 2, 2, 1\rangle$.

Аналогичными рассуждениями можно убедиться, что ни один из них нереализуем. Таким образом, матрице спектров экстремальных унтер-решений системы ρ состоит из <1, 2, 2, 4>, <2, 2, 2, 2> и всех перестановок <1, 2, 3, 3>.

Замечание. Используя пример (б), можно показать, что общее решение системы уравнений ρ_1 можно записать в виде $<(\alpha\beta)^i\alpha, \beta\alpha, \alpha\beta, \beta\beta>$, где α, β — произвольные признаки, *i* — произвольное неотрицательное целое.

(д) Пусть каждому значению паратетра признака $i \in E_n = \{0, 1,..., n — 1\}$ сопоставлено действительное число *w(i),* его «вес», и $f = f_W$ — естественный гомоморфизм $(E_n)^+$ на подполугруппу W^+ коммутативной полугруппы действительных чисел по сложению:

$$f(i) = w(i) \text{ и } f(x_1, ..., x_N) = f(x_1)+...+ f(x_N).$$

Множество $R_{W,n} \Rightarrow f^{-1}(0)$, если непусто, образует, очевидно, подполугруппу $(E_n)^+$.

Значение параметра признака $\alpha \in R_{W,n}$ назовем неотрицательным, если для любого его префикса α' имеет место $f(\alpha') \geq 0$, и положительным, если для любого его префикса α имеет место $f(\alpha') > 0$. Пусть $R^0_{W,n}$ — подполугруппа всех неотрицательных значений параметров признаков $R_{W,n}$. Очевидно, что единственным неприводимым порождающим множеством $R^0_{W,n}$ (в данном случае — множеством всех значений параметров признаков, неразложимых в произведение) является бесконечное множество $R^1_{W,n}$ всех положительных значений параметров признаков из $R^0_{W,n}$, причем оно является множеством свободных образующих.

Вложение полугруппы $R^0_{W,n}$ в $R_{W,n}$ имеет свойство, устанавливаемое ниже.

Теорема 1. *Если* $\alpha = a_1a_2...a_N \in R_{W,n}$, *то существует такое f, что циклический сдвиг* $\alpha^{(j)} = a_ja_{j+1}... a_Na_1... a_{j-1}$ *содержится в* $R^0_{W,n}$.

Доказательство. Пусть $h_i \Rightarrow f(a_1 ... a_i) = w(a_1) + ... + w(a_i)$ и $h(\alpha) = \{h_i\}_{i=1}^N$. Тогда

$$h_i\left(\alpha^{(j)}\right) = \begin{cases} f(a_j \ldots a_{j+i-1}), & \text{если } j+i-1 \leqslant N, \\ f(a_j \ldots a_N a_1 \ldots a_{j+i-N-1}), & \text{если } j+i-1 > N, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} f(a_1 \ldots a_{j+i-1}) - f(a_1 \ldots a_{j-1}), \\ f(a_1 \ldots a_N a_1 \ldots a_{i+j-N-1}) - f(a_1 \ldots a_{j-1}) \end{cases}$$
$$= h_{i+j-1} - h_{j-1}.$$

Отсюда

$$h\left(\alpha^{(j)}\right) = \{h_{i+j-1} - h_{j-1}\}_{i=1}^{N},$$

причем первое слагаемое при i = 1, 2,…., N пробегает множество значений параметров признаков $h(\alpha)$. Таким образом, достаточно взять j так, чтобы $h_{j-1} = \min\limits_{1\le i\le N} h_i$, и получим требуемый сдвиг. Теорема доказана.

Положим

$$f(i) = w(i) = 1 - i \cdot \frac{N}{k} \ \left(i = \overline{0, n-1}\right), \ \|\alpha\| \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} a_i.$$

Тогда

$$f(\alpha) = |\alpha| - \|\alpha\| \cdot \frac{N}{k},$$

$$\alpha \in R_{W,n} \leftrightarrow |\alpha| - \|\alpha\| \cdot \frac{N}{k} = 0 \leftrightarrow \frac{|\alpha|}{\|\alpha\|} = \frac{N}{k}.$$

Возьмем n = 3, N = 3, k = 2, α = 101200110 $\in R_{W,3}$. Имеем h_1 = —1/2, h_2 = 1/2, h_3 = 0, h_4 =-2, h_5 = -1, h_6 = 0, h_7 = —1/2, h_8 = —1, h_9 = 0 и для получения неотрицательного сдвига надо взять j = 5: $\alpha^{(5)}$ = 001101012 и для него h_1 = 1, h_2 = 2, h_3 = 3/2, h_4 = 1, h_5=2, h_6 = 3/2, h_7 = 5/2, h_8 = 2, h_9 = 0.

Теорема 2. Если *НОД* (|α|, ||α||) = 1 *и* $\alpha \in R_{W,n}$, *то в циклоклассе* $C(\alpha)$ *существует единственное неотрицательное значение параметра признака и оно положительно.*

Доказательство. Если $\alpha^{(j)} = \alpha_1\alpha_2$ — неотрицательный сдвиг α, то из α_1, $\alpha_2 \in R_{W,n}$ следует (в предположении, что $\frac{N}{k}$ — несократимая дробь), что

$$\frac{|\alpha_1|}{\|\alpha_1\|} = \frac{N}{k} = \frac{|\alpha_2|}{\|\alpha_2\|}, \ |\alpha_i| = p_i N, \quad \|\alpha_i\| = p_i k \quad (i = 1, 2).$$

Тогда $p_i \geqslant 1, \ |\alpha| = (p_1 + p_2)N, \ \|\alpha\| = (p_1 + p_2)k$ — противоречие и теорема доказана.

5.7. Регулярные множества признаков понятий

1. Одним из элементов модели языка понятий является описание правил разработки понятий, грамматики. **Теория *регулярных множеств признаков понятий* составляет раздел исследований в области математического моделирования языков понятий, рассматриваемых как подмножества свободных полугрупп над конечными алфавитами. Регулярные языки признаков понятий — наименьший класс языков, содержащий все конечные языки и замкнутый относительно основных комбинаторных операций над языками.**

2. Основной способ задания грамматик регулярных множеств признаков понятий — графический. Пусть $G = <Q, R>$ — конечный граф (как правило — ориентированный, может быть с кратными ребрами), $F \in (A^+)^R$ — функция, сопоставляющая ребрам G признаки из A^+ (функция переходов), P — некоторое множество путей в графе G. Система $\Gamma = <G, F, P>$ называется *источником признаков* (далее: источников), $G = G(\Gamma)$, $F = F(\Gamma)$ и $P = P(\Gamma)$ — элементы источника Г. Вершины графа G назывем *состояниями* источника Г.

Будем говорить, что путь $p = r_1, \dots r_k$ в графе G порождает признак понятия $F(p) \Rightarrow F(r_1) \dots F(r_k)$. Будем говорить, что пустой путь Λ, не содержащий ни одного ребра, начинается и кончается в каждой вершине и порождает пустой признак понятия λ. Множество всех признаков понятий, которые порождаются путями из P, т. е.

$$\mathfrak{L}(\Gamma) \Rightarrow \{\alpha \mid \exists\, p \in P \quad F(p) = \alpha\},$$

будем называть *языком признаков понятий, порожденным источником признаков* Г.

Пусть $Q_1 \subseteq Q$, $Q_2 \subseteq Q$ и $P(Q_1, Q_2)$ — множество всех путей в G, которые начинаются в вершинах Q_1 и кончаются в вершинах Q_2. Источник называется *регулярным,* если в нем выделены $q_0 \in Q$, $Q' \subseteq Q$ и множество путей определено как $P = P(q_0, Q')$.

Множество признаков понятий $\mathfrak{L} \subseteq A^*$ называется *регулярным,* если $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma)$ для некоторого регулярного источника Г. Регулярное множество $\mathfrak{L} \subseteq A^*$ называется *конечно перечислимым,* если оно порождается некоторым регулярным источником Г таким, что $P_\Gamma = P(q_0, Q)$ (т. е. у которого множеством заключительных состояний Q' является множество всех состояний).

3. Покажем наличие тесной связь между регулярными источниками признаков и *конечными автоматами.* Для источника Г через $\varphi_\Gamma(a, q)$

обозначим (вообще говоря, многозначное и не полностью определенное) отображение множества $A \times Q$ в 2^Q:

$$\varphi_\Gamma(a, q) = \{q' \mid \exists r = \langle q, q' \rangle \in R \quad F(r) = a\},$$

называемое функцией следования признака. Функция φ_Γ естественно доопределяется для любых $\alpha \in A^*$ и $Q_1 \subseteq Q$:

$$\varphi_\Gamma(\lambda, Q_1) = Q_1,$$

$$\varphi_\Gamma(\alpha, q) = \{q' \mid \exists p \in P(q, q') \quad F(p) = \alpha\},$$

$$\varphi_\Gamma(\alpha, Q_1) = \bigcup_{q \in Q_1} \varphi_\Gamma(\alpha, q).$$

Источник называется *простым,* если $F \in A^n$, т. е. значениями F являются для всех ребер только знаки. Для простого источника это доопределение можно задать индуктивно по длине признака понятия α: если для $\alpha \in A$ множества $\varphi_\Gamma(\alpha, Q_1)$ заданы, то для $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ имеет место

$$\varphi_\Gamma(\alpha_1\alpha_2, Q_1) = \varphi_\Gamma(\alpha_2, \varphi_\Gamma(\alpha_1, Q_1)). \qquad (57)$$

Регулярный источник Г, для которого $|\varphi_\Gamma(a, q)| \leq 1$ при любых $a \in A$ и $q \in Q$, называется *автоматным* или, для краткости, *A-источником,* поскольку при этом условии Г представляет собой диаграмму Мура конечного автомата $\langle A, Q, \varphi_\Gamma, q_0, \text{—} \rangle$ без выхода, с входным алфавитом A и множеством состояний Q, у которого q_0 — начальное состояние, а φ_Γ — функция следующего состояния. Соответствующий автомат полностью определен, если $|\varphi_\Gamma(a, q)| = 1$ при любых $a \in A$ и $q \in Q$, в противном случае имеем частичный автомат. Легко заметить, что область определения частичного автомата всегда представляет собой конечно перечислимое множество. Следует иметь в виду свойство полностью определенных A -источников: *множество путей в графе такого источника находится во взаимно однозначном соответствии с множеством признаков A^*.*

Регулярный источник может быть задан графом, ребрам которого приписаны значения функции переходов F, либо таблицей функции F (начальное и заключительные состояния как-либо помечаются). В других случаях полезен *индуктивный способ задания,* особенно для A-источников. Индуктивный способ состоит в задании начального состояния q_0 и *функции следования* некоторым правилом. При этом множество Q состояний определяется как множество всех состояний, достижимых из начального, а заключительные состоянии выделяются из Q некоторым признаком (свойством). Например, условия $q_0 = 0$, $A = E_2 = \{0, 1\}$, $\varphi_\Gamma(a, q) = a + q + 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $Q' = \{q \mid q \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)\}$ задают регулярный источник, представленный также таблицей 3 и графически — на рис. 6.

Таблица 3

A	O	φ_Γ	A	Q	φ_Γ
0	0	1	1	0	2
0	1	2	1	1	3
0	2	3	1	2	0
0	3	0	1	3	1

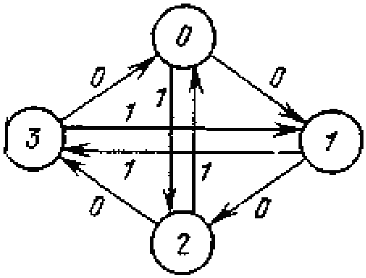


Рис 6.

Недостатком такого способа задания регулярного источника может оказаться необходимость обосновывать конечность множества его состояний.

4. Источники Γ_1 и Γ_2 называются *эквивалентными,* если $\mathfrak{L}(\Gamma_1) = \mathfrak{L}(\Gamma_2)$, т. е. если они порождают один и тот же язык понятий. (Источник Г называется *сокращенным,* если через любое из его состояний проходит по крайней мере один путь из $P(q_0, Q')$. Вполне очевидно, что *любой источник эквивалентен некоторому сокращенному источнику*). Одно из эквивалентных преобразований источников показано на рис. 7. Оно применяется к ребру, которому приписан признак понятия, разложимый в произведение αβ, и состоит в том, что вводится новая вершина q' и данное ребро заменяется путем из двух ребер, причем первому приписан признак α, а второму — β.

Рис. 7.

Конечным числом таких преобразований произвольный источник можно преобразовать к простому источнику.

Теорема 1. *Для любого регулярного источника существует эквивалентный ему простой регулярный источник.*

Теорема 2. *Для любого регулярного источника существует эквивалентный ему полностью определенный А-источник.*

Доказательство. Пусть Г = $<G, F, P>$ — произвольный простой регулярный источник. Полностью определенный *А*-источник $\Gamma_1 = <G_1, F_1, P_1>$ зададим индуктивно:

$$Q_1 \equiv \{q_M \mid M \subseteq Q\}, \quad P_1 = P\ (q_{\{q_0\}}, \{q_M \mid M \cap \\ \cap Q' \neq \varnothing\}), \ \varphi_{\Gamma_1}(a, q_M) = q_{\varphi_\Gamma(a, M)}.$$

Покажем, что для любого $\alpha \in A^*$ имеет место

$$\varphi_{\Gamma_1}(\alpha, q_{\{q_0\}}) = q_{\varphi_\Gamma(\alpha, q_0)}. \tag{58}$$

Индукция по длине α. Если $|\alpha| \leq 1$, то (58) выполняется по определению. Пусть (58) справедливо для признаков длины, меньшей *k*, и $|\alpha| = k > 1$: $\alpha = \beta a$, где $a \in A$, $|\beta| < k$. Тогда, используя (57), получаем

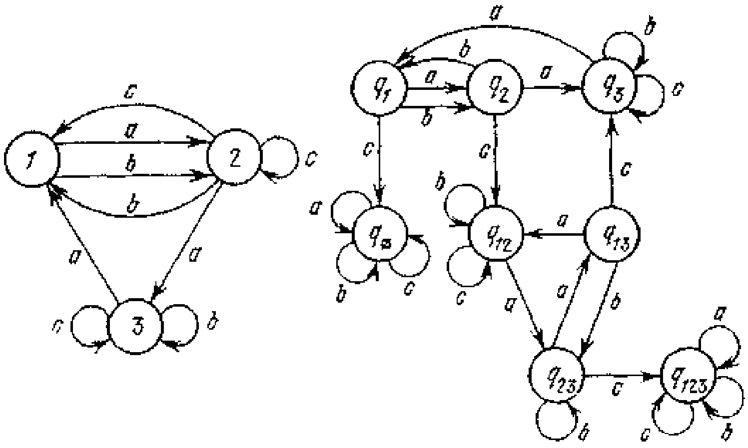
$$\varphi_{\Gamma_1}(\alpha, q_{\{q_0\}}) = \varphi_{\Gamma_1}(\alpha, \varphi_{\Gamma_1}(\beta, q_{\{q_0\}})) = \varphi_{\Gamma_1}(a, q_{\varphi_\Gamma(\beta, q_0)}) = \\ = q_{\varphi_\Gamma(a, q_{\varphi_\Gamma}(\beta, q_0))} = q_{\varphi_\Gamma(\beta a, q_0)} = q_{\varphi_\Gamma(\alpha, q_0)}$$

и (58) доказано. Но мы имеем

$$\alpha \in \mathfrak{L}(\Gamma) \leftrightarrow \varphi_\Gamma(\alpha, q_0) \cap Q' \neq \varnothing \leftrightarrow \varphi_{\Gamma_1}(\alpha, q_{\{q_0\}}) = \\ = q_{\varphi_\Gamma(\alpha, q_0)} \in Q_1' \leftrightarrow \alpha \in \mathfrak{L}(\Gamma_1)$$

и, следовательно, $\mathfrak{L}(\Gamma_1) = \mathfrak{L}(\Gamma)$. Теорема доказана.

Если число состояний Г равно *N*, то число состояний эквивалентного ему *А*-источника Γ_1, который строится в доказательстве теоремы 2, не превосходит 2^N, но может таким и оказаться. Возникает вопрос: не существует ли более экономное построение? Можно показать (Лупанов), *для любых N и* $|A| \geq 2$ *существуют регулярные источники с N состояниями, для которых* 2^N *— наименьшее возможное число состояний эквивалентного полностью определенного А-источника.* При $N = 3$, $A = \{a, b, c\}$ источник Лупанова и эквивалентный ему полностью определенный *А*-источник показаны на рис. 8, *а), б).*



а) $P=P(1,1)$ б) $P=P(q_1,\{q_1, q_{12}, q_{13}, q_{123}\})$

Рис. 8.

Рассмотрим вопрос об упрощении конечных автоматов в отношении уменьшения числа состояний. Покажем, что *исход минимизации определен однозначно с точностью до обозначения состояний* (т. е. с точностью до изоморфизма).

Пусть $\mathfrak{L} \subseteq A^*$ — регулярное множество и $\rho_{\mathfrak{L}}$ — отношение эквивалентности на A^*: $\langle \alpha, \beta \rangle \in \rho_{\mathfrak{L}} \Rightarrow$ «для любого $\gamma \in A^*$: $\alpha\gamma \in \mathfrak{L} \leftrightarrow \beta\gamma \in \mathfrak{L}$», а $A^*/\rho_{\mathfrak{L}} = \{\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_i, \ldots\}$, где $\lambda \in \mathfrak{A}_0$. Заметим, что любой класс $\mathfrak{A}_i$ либо целиком содержится в $\mathfrak{L}$, либо не пересекается с $\mathfrak{L}$.

Пусть Г — регулярный полностью определенный *А*-источник и $\mathfrak{L}(\Gamma) = \mathfrak{L}$. Определим отношение эквивалентности ρ_{Γ}:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in \rho_{\Gamma} \Rightarrow \varphi_{\Gamma}(\alpha, q_0) = \varphi_{\Gamma}(\beta, q_0).$$

Очевидно, что классы $A^*/\rho_{\Gamma} = \{\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}\}$ и можно считать, что $q_i \Rightarrow \mathfrak{B}_i$, $\lambda \in \mathfrak{B}_0$.

Пусть $i_{\mathfrak{L}}(\alpha)$ — номер класса $\rho_{\mathfrak{L}}$, содержащего α, $i_{\Gamma}(\alpha)$ — номер класса ρ_{Γ}, содержащего α. Так как из $i(\alpha) = i(\beta)$ следует $i(\alpha\gamma) = i(\beta\gamma)$ для любого $\gamma \in A^*$, то существует функция $j(i,\alpha)$ такая, что для любых α, β

$$i(\alpha\beta) = j(i(\alpha), \beta). \qquad (59)$$

Докажем, что

$$\rho_{\Gamma} \subseteq \rho_{\mathfrak{L}}. \qquad (60)$$

Если $\langle\alpha,\ \beta\rangle \in \rho_\Gamma$, т. е. $\varphi_\Gamma(\alpha,\ q_0) = \varphi_\Gamma(\beta,\ q_0) = q_s$, то для любого γ имеем

$$\varphi_\Gamma(\alpha\gamma, q_0) = q_{j(i_\Gamma(\alpha),\gamma)} = q_{j(i_\Gamma(\beta),\gamma)} = \varphi_\Gamma(\beta\gamma, q_0),$$

$$\alpha\gamma \in \mathfrak{L} \leftrightarrow q_{j(i_\Gamma(\alpha),\gamma)} \in Q' \leftrightarrow \beta\gamma \in \mathfrak{L},$$

т. е. $\langle\alpha,\ \beta\rangle \in \rho_\mathfrak{L}$ и (60) доказано.

Из (60) следует, что $|A^*/\rho_\mathfrak{L}| \leqslant |A^*/\rho_\Gamma| = |Q| < \infty$, т. е. число классов $\rho_\mathfrak{L}$ конечно и каждый класс $\rho_\mathfrak{L}$ является объединением некоторых классов ρ_Γ, а так же, что если $N_\mathfrak{L}$ — наименьшее число состояний полностью определенного A-источиика, порождающего $\mathfrak{L}$, то $N_\mathfrak{L} \geqslant |A^*/\rho_\mathfrak{L}|$.

Покажем, что в действительности $N_\mathfrak{L} = |A^*/\rho_\mathfrak{L}|$. Для этого построим источник $\Gamma_\mathfrak{L}$ с $n = |A^*/\rho_\mathfrak{L}|$ состояниями такой, что $\mathfrak{L}(\Gamma_\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$. Пусть Q — множество номеров классов $A^*/\rho_\mathfrak{L}$ и $0 = i(\lambda), \varphi_{\Gamma\mathfrak{L}}(a, i) = j(i, a)$, Q' — множество всех номеров классов, содержащихся в $\mathfrak{L}$. Мы имеем $\varphi_{\Gamma\mathfrak{L}}(\alpha, 0) = i_\mathfrak{L}(\alpha)$, следовательно, $\mathfrak{L}(\Gamma_\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}$ и $|Q| = N_\mathfrak{L}$. Подведем итог в виде теоремы

Теорема 3. *Множество $\mathfrak{L}$ регулярно в том и только в том случае, если $A^*/\rho_\mathfrak{L}$ конечно. Если $\mathfrak{L}(\Gamma) = \mathfrak{L}$ и* Г *— полностью определенный A-источник, то $\Gamma_\mathfrak{L}$ получается из* Г *факторизацией множества состояний по отношению эквивалентности, соответствующему $\rho_\mathfrak{L}$. Если число состояний* Г *равно $N_\mathfrak{L}$, то* Г *совпадает с* $\Gamma_\mathfrak{L}$ *с точностью до обозначения состояний.*

Алгоритмические вопросы минимизации A-источников решаются теми же методами, что и для конечных автоматов. (Пусть $Q(\Gamma_\mathfrak{L}) = Q(\Gamma)/\rho$ и $(q_i,\ q_j) \in \rho_s \Rightarrow$ «для любого α, длина которого не превосходит s, $\varphi_\Gamma(\alpha,\ q_i) \in Q'(\Gamma) \leftrightarrow \varphi_\Gamma(\alpha,\ q_j) \in Q'(\Gamma)$».

Тогда $\rho_0 \supseteq \rho_1 \supseteq \ldots$ и имеет место теорема: $\underset{\rho}{\rho_{N-1}} = \rho$).

Если $|A| = 1$, то, как следует из теоремы 2, любой регулярный источник эквивалентен A-источнику, представляющему собой граф преобразования множества Q (рис. 9).

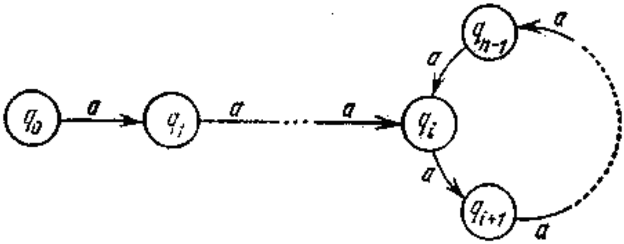


Рис. 9.

Признаки A^* в этом случае можно рассматривать как модели признаков, значения параметров которых представлены натуральными чиселами: $a^i \Rightarrow i$. Если $P = P(q_0, q_j)$, то

$$\mathfrak{L}(\Gamma) = \begin{cases} \{j\}, & \text{если } j < i, \\ \{j + k(n-i)\}_{k=0}^{\infty} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому множество натуральных чисел при таком прямолинейном моделировании регулярно в том и только том случае, если оно есть объединение конечного множества и некоторого (конечного) числа арифметических прогрессий с одинаковой разностью.

Используя этот факт, легко указать примеры нерегулярных множеств. Так, $\left\{a^{i^2} \middle| i = 0, 1, 2, \ldots\right\}$ не регулярно — оно бесконечно и разность между соседними по возрастанию членами может быть как угодно велика.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\rho_{A^* \setminus \mathfrak{L}} = \rho_{\mathfrak{L}}, \tag{61}$$

$$\rho_{\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2} \supseteq \rho_{\mathfrak{L}_1} \cap \rho_{\mathfrak{L}_2}. \tag{62}$$

5. Покажем, что некоторые естественные операции над регулярными языками понятий приводят снова к регулярным языкам понятий.

Из (61), (62) следует, что если $A^*/\rho_{\mathfrak{L}}, A^*/\rho_{\mathfrak{L}_1}, A^*/\rho_{\mathfrak{L}_2}$ конечны, то и $A^*/\rho_{\overline{\mathfrak{L}}}$ и $A^*/\rho_{\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_2}$ тоже конечны. Учитывая теорему 2.4 и то, что $\mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2 = \overline{\overline{\mathfrak{L}}_1 \cap \overline{\mathfrak{L}}_2}$, делаем первый вывод.

Теорема 1. *Класс регулярных языков понятий замкнут относительно объединения, пересечения и теоретико-множественной разности.*

Замечание. Если $\lambda \in \mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}$ регулярно, то и $\mathfrak{L}\setminus\{\lambda\}$ регулярно; для любого регулярного $\mathfrak{L}$ множество $\mathfrak{L} \bigcup \lambda\}$ тоже регулярно.

Произведение языков понятий $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ есть

$$\mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \Rightarrow \{\alpha\beta \mid \alpha \in \mathfrak{L}_1, \beta \in \mathfrak{L}_2\}.$$

Теорема 2. *Класс регулярных языков понятий замкнут относительно операции произведения.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}(\Gamma_1)$, $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}(\Gamma_2)$ регулярны,

$$Q_1 = \{q_{10},\ q_{11},\ \ldots,\ q_{1n}\},\quad Q_2 = \{q_{20},\ q_{21},\ \ldots,\ q_{2m}\}.$$

Построим Г такой, что $\mathfrak{L}(\Gamma) = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2$ (достаточно это сделать в предположении, что $\lambda \notin \mathfrak{L}_1$ и $\lambda \notin \mathfrak{L}_2$, учитывая теорему 1, последующее замечание и соотношения $(\mathfrak{L}_1 \cup \{\lambda\}) \cdot \mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \cup \mathfrak{L}_2$.., и $\mathfrak{L}_1 \cdot (\mathfrak{L}_2 \cup \{\lambda\}) = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2 \cup \mathfrak{L}_1$.

Возьмем $Q = Q_1 \cup Q_2$, $P = P\ (q_{10}, Q_2')$ и положим

$$\varphi_\Gamma(a, q) = \\ = \begin{cases} \varphi_{\Gamma_1}(a, q), & \text{если } q \in Q_1 \text{ и } \varphi_{\Gamma_1}(a, q) \cap Q_1' = \varnothing, \\ \varphi_{\Gamma_1}(a, q) \cup \{q_{20}\}, & \text{если } q \in Q_1 \text{ и } \varphi_{\Gamma_1}(a, q) \cap Q_1' \neq \varnothing, \\ \varphi_{\Gamma_2}(a, q), & \text{если } q \in Q_2. \end{cases}$$

Тогда Г — искомый регулярный источник, в чем убеждаемся непосредственной проверкой. Теорема доказана.
Итерацией языка понятий $\mathfrak{L}$ называется язык понятий $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}^+ \cup \{\lambda\}$, где $\mathfrak{L}^+ \Rightarrow \mathfrak{L} \cup \mathfrak{L}^2 \cup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{L}^i$.

Теорема 3. *Класс регулярных языков понятий замкнут относительно операции итерации.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma)$. Учитывая теорему 1 и последующее замечание, можно предположить, что $\lambda \notin \mathfrak{L}$, и доказать регулярность $\mathfrak{L}^+$. Определим Γ_1: $Q_1 = Q$, $P_1 = P(q_0, Q')$,

$$\varphi_{\Gamma_1}(a, q) = \begin{cases} \varphi_\Gamma(a, q) & \text{при } \varphi_\Gamma(a, q) \cap Q' = \varnothing, \\ \varphi_\Gamma(a, q) \cup \{q_0\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\mathfrak{L}(\Gamma_1) = \mathfrak{L}^+$. Теорема доказана.
(Легко проверить справедливость следующих тождеств:
$X(YZ) = (XY)Z$, $X(Y \cup Z) = XY \cup XZ$, $(X \cup Y)Z = XZ \cup YZ$,
$X^+ = X \cdot X^* = X^* \cdot X$ и т. д.).

6. Рассмотрим вопрос о решении некоторых уравнений в алгебре регулярных множеств понятий.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \notin S$, *тогда уравнение*

$$X = XS \cup T \tag{63}$$

имеет единственное решение $X = TS^*$ *(в частности,* $X=\varnothing$ *при* $T=\varnothing$, $X = S^*$ *при* $T = \{\lambda\}$, $X = T$ при $S = \varnothing$).

Доказательство. Пусть X_0 — решение (63), т. е. $X_0 = X_0S \bigcup T$. Подставляя это выражение для X_0 в правую часть (63) и применяя тождественные преобразований, получим

$$X_0 = (X_0S \cup T)S \cup T = X_0S^2 \cup TS \cup T. \tag{64}$$

Следующую подстановку делаем в (64) и т. д. После k таких подстановок получим

$$X_0 = (X_0S \cup T)S^k \cup TS^{k-1} \cup \ldots \cup TS \cup T =$$
$$= X_0S^k \cup TS^k \cup TS^{k-1} \cup \ldots \cup TS \cup T.$$

Поэтому $T\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k} S^i\right) \subseteq X_0$ для любого k и, следовательно, $TS^* \subseteq X_0$.

Пусть

$$d(S) \Rightarrow \min_{\alpha \in S} |\alpha| (d(S) > 0,$$

так как $\lambda \notin S$ и $d(\varnothing) \Rightarrow \infty$. Для любого $\alpha \in A^*$ найдется $k = k(\alpha)$ такое, что $|\alpha| < (k + 1)d(S)$. Поэтому, если $\alpha \in X_0$, то $\alpha \notin X_0S^i$ при $i > k(\alpha) + 1$ и, следовательно, $\alpha \in T\left(\bigcup\limits_{i=0}^{k} S^i\right) \subseteq TS^*$, т. е. $X_0 \subseteq TS^*$. Таким образом, если (63) имеет решение, то им может быть только $X_0 = TS^*$. Делаем проверку:

$$(TS^*)S \cup T = TS^+ \cup TS^0 = T(S^+ \cup S^0) = TS^*.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Если $X = XS \cup T$, S и T регулярны, $\lambda \notin S$, то и X регулярно.*

Следствие 2. *Пусть $\|S_{ij}\|$ есть $N \times N$-матрица, элементы которой суть конечные подмножества A^+ признаков понятий, не содержащие λ. Тогда система уравнений*

$$\begin{cases} X_0 = X_0S_{00} \bigcup X_1S_{10} \bigcup \cdots \bigcup X_{N-1}S_{N-1,0} \bigcup \{\lambda\}, \\ X_1 = X_0S_{01} \bigcup X_1S_{11} \bigcup \cdots \bigcup X_{N-1}S_{N-1,1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{N-1} = X_0S_{0,N-1} \bigcup X_1S_{1,N-1} \bigcup \cdots \bigcup X_{N-1}S_{N-1,N-1} \end{cases} \tag{65}$$

имеет единственное решение, которое может быть записано в виде формул $X_i = \Phi_i(S_{00}, S_{01}, \ldots, S_{N-1,N-1})$, $i = \overline{0, N-1}$, алгебры регулярных множеств признаков понятий над операциями $\bigcup, \bigcap, —, \bullet, *$.

Это легко доказать, используя исключение неизвестных по теореме 1 и индукцию по N.

В силу теорем 1 — 3 в п. 5, формула $Y = \Phi(X_1,..., X_n)$ алгебры регулярных множеств признаков понятий с операциями $\bigcup$, $\bigcap$, —, •, * над конечными множествами $X_1,...,X_n \subseteq A^*$ задает регулярное множество признаков понятий Y. Справедливо и обратное.

Теорема 2. *Всякое регулярное множество признаков понятий может быть задано формулой в* $\bigcup$, $\bigcap$, —, •, * *над конечными множествами признаков понятий.*

Доказательство. Пусть регулярное множество $\mathfrak{L}$ признаков задано A-источннком Г с множеством вершин $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{N-1}\}$. Положим

$$X_i \Rightarrow \mathfrak{L}(\langle G, F, P(q_0, q_i)\rangle) \qquad i = \overline{0, N-1},$$
$$S_{ij} \Rightarrow \{a \mid a \in A, \exists r = \langle q_i, q_j\rangle \in R \qquad F(r) = a\},$$
$$i, j = \overline{0, N-1}.$$

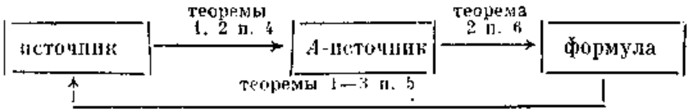
Тогда X_i и S_{ij} связаны системой уравнений (65), причем выполнены условия следствия 2 теоремы 1. Следовательно,

$$X_i = \Phi_i(S_{00}, S_{01}, \ldots, S_{N-1,\, N-1}), \qquad i = \overline{0, N-1},$$

и $\mathfrak{L} = \bigcup\limits_{q_i \in Q'} X_i$, ч.т.д.

Следствие. *Класс регулярных множеств признаков понятий в алфавите А есть замыкание множества* $\{\{a\}, ..., \{a_n\}, \{\lambda\}\}$ *относительно операций объединения, умножения и итерации.*

7. Учитывая, что источник, порождающий конечное множество признаков понятий, строится тривиально, переходы от одного способа задания регулярного множества признаков понятий к другим из упомянутых выше можно проиллюстрировать следующей диаграммой:



8. Регулярный язык понятий называется *связным,* если существует порождающий его регулярный источник, граф которого связен (т. е. из любой его вершины в любую другую есть ориентированный путь).

Рассмотрим A-источиики признаков понятий с N состояниями и алфавитом $A =\{a_1, ..., a_n\}$ из m букв ((N, m)-источники).

Теорема 1. *Число* (N, *m)-источников признаков понятий равно* $(N+1)^{Nm}$.

Доказательство следует из взаимно однозначного соответствия между множеством (N, m)-источников признаков понятий и множеством полностью определенных функций $(Q \bigcup \{0\}^{A\times Q}$ (у функций этого мпожества значение 0 показывает, что соответствующая функция следования при данных значениях переменных не определена).

Теорема 2. *Доля связных (N, m)-источников понятий в общем числе (N, m)-источников понятий стремится к* 1 *при m→∞.*

Доказательство. Несвязные *(N, m)-источники признаков понятий* — это в точности те источники признаков понятий, у которых имеется l состояний $(l = \overline{1,\ N-1})$, из которых нет ни одного ребра в остальные $N - l$ состояний. Поэтому число несвязных $(N,\ m)$-источников признаков понятий не превосходит

$$\sum_{l=1}^{N-1}\binom{N}{l}(N+1)^{mN-ml}(l+1)^{ml} =$$

$$= \left\{\sum_{l=1}^{N-1}\binom{N}{l}\left(\frac{l+1}{N+1}\right)^{ml}\right\}(N+1)^{mN}.$$

Отсюда с учетом теоремы 1 следует, что их доля в общем числе (N, m)-источников признаков понятий

$$\delta_m \leqslant \sum_{l=1}^{N-1}\binom{N}{l}\left(\left(\frac{l+1}{N+1}\right)^{l}\right)^{m},$$

а так как $\binom{N}{l} < 2^N$ и $\left(\frac{l+1}{N+1}\right)^{l} \leqslant \left(\frac{N}{N+1}\right)^{N-1} \leqslant \Big(1 -$ $- \frac{1}{N+1}\Big)^{N+1} < \frac{1}{e}$, имеем $\delta_m < 2^N(N-1)e^{-m}$, т. е. $\lim\limits_{m\to\infty}\delta_m = 0$, ч.т.д.

9. Один подкласс регулярных языков понятий — словесные представления $\mathfrak{F}$-полугрупп — мы рассматривали в п. 1.18. Это в точности языки понятий, допускающие формульное задание в виде V^*, где V — конечное множество имен признаков понятий. Здесь рассмотрим еще один важный подкласс — *фрагментно ограниченные языки понятий.*

Пусть $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ — регулярные языки понятий и $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2)$ — множество всех имен понятий $\mathfrak{L}_1$, которые не содержат вхождений имен понятий из $\mathfrak{L}_2$. (Если имя понятия α входит в имя понятия β, т. е. $\beta = \gamma_1\alpha\gamma_2$, то α называется *фрагментом* β *(префиксом, если* $\gamma_1=\lambda$, *суффиксом,* если $\gamma_2=\lambda$, и само β называют *несобственными фрагментами)).*

Так как $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_1 \setminus A^*\mathfrak{L}_2A^*$, в силу теорем 1—3 из п. 5 язык понятий $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2)$ тоже регулярен, причем из доказательства этих теорем можно извлечь эффективный способ построения порождающего источника признаков.

Особое значение имеют фрагментно ограниченные языки понятий с конечными множествами ограничений $\mathfrak{L}_2$, как наиболее легкий аппарат построения приближенных моделей языков понятий. Простейшими из таких языков понятий являются *диграммно ограниченные языки понятий,* для которых $\mathfrak{L}_2$ есть множество *диаграмм,* т. е. имен понятий длины два.

Установим некоторые свойства фрагментно-ограниченных языков понятий.

Во-первых, заметим, что если α есть фрагмент β, то для любых $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ имеет место $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2,\ \alpha,\ \beta) = \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2,\ \alpha)$.

Поэтому, если для языка понятий $\mathfrak{L}$ определить его фрагментно свободное ограничение $\mathfrak{L}^{\varphi}$ как множество всех имен понятий $\mathfrak{L}$, которые не содержат в качестве фрагментов других имен понятий $\mathfrak{L}$, то для любых языков понятий $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ имеем $\mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2) = \mathfrak{L}_1(\mathfrak{L}_2^{\varphi})$. Следовательно, не ограничивая общности, всегда можно предполагать определяющее множество ограничений для фрагментно ограниченного языка понятий фрагментно свободным. Например, если $\mathfrak{L} = \{0^i\}_{i=0}^{\infty} \cup \{0^i10^j\}_{i,j=0}^{\infty}$ — множество всех двоичных имен понятий, вес которых не превосходит 1, то $\mathfrak{L} = E_2^*(\mathfrak{L}_1) = E_2^*(\mathfrak{L}_1^{\varphi})$, где $\mathfrak{L}_1$ — множество всех имен понятий, вес которых не менее 2, а $\mathfrak{L}_1^{\varphi} = \{11, 101, 1001, \ldots, 10^i1, \ldots\}$.

Во-вторых, очевидно, что для любого множества индексов J и языков понятий $\mathfrak{L}_i \subseteq A^*$, $i \in J$:

$$\bigcap_{i \in J} A^*(\mathfrak{L}_i) = A^*\left(\bigcup_{i \in J} \mathfrak{L}_i\right).$$

Отсюда следует, что для любого языка понятий $\mathfrak{L} \subseteq A^*$ среди фрагментно ограниченных языков понятий, содержащих $\mathfrak{L}$, имеется наименьший (их пересечение), обозначаемый $\Phi(\mathfrak{L})$. Если $\mathfrak{L} \subseteq A^*$ и $\Phi(\mathfrak{L}) = A^*$, то $\mathfrak{L}$ называется *фрагментным покрытием A^*.*

Теорема 1. *Если $\alpha \in A^+$ и $\mathfrak{L} \subseteq A^*(\alpha)$, то*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\mathfrak{L} \cap A^k|}{|A^k|} = 0.$$

Доказательство. Пусть $|\alpha| = n$, $|A| = m$. Очевидно, что

$$\mathfrak{L} \cap A^k = \mathfrak{L} \cap [(A^n \setminus \{\alpha\})^{[k/n]} \cdot A^{k-n[k/n]}].$$

Поэтому

$$\frac{|\mathfrak{L} \cap A^k|}{|A^k|} \leqslant \frac{(m^n-1)^{[k/n]} m^{k-n[k/n]}}{m^k} = \left(\frac{m^n-1}{m^n}\right)^{[k/n]} \to 0$$

при $k \to \infty$, ч. т. д.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{L}$ *— регулярное фрагментое покрытие* A^*. *Тогда существует имя понятия* α *такое, что для любого имени понятия* β *найдется* γ *так, что* $\alpha\beta\gamma \in \mathfrak{L}$ *{иначе:* $\alpha A^* \subseteq \pi(\mathfrak{L})$, *где* $\pi(\mathfrak{L})$ *— множество всех префиксов имен понятий* $\mathfrak{L}$).

Доказательство. Предположим, что такого α, как в заключении теоремы, не существует. Пусть Г — сокращенный *А*-источиик, порождающий $\mathfrak{L}$, $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_{N-1}\}$ — множество его состояний. Тогда для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$ существует имя понятия β_i такое, что $\varphi_\Gamma(\beta_i, q_i) = \varnothing$.

Положим

$$\varphi_\Gamma(\beta_0, q_1) = q_{i(1)},$$

$$\varphi_\Gamma(\beta_0\beta_{i(1)}, q_2) = q_{i(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_\Gamma(\beta_0\beta_{i(1)} \ldots \beta_{i(s-1)}, q_s) = q_{i(s)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_\Gamma(\beta_0\beta_{i(1)} \ldots \beta_{i(N-2)}, q_{N-1}) = q_{i(N-1)},$$

$$\beta = \beta_0\beta_{i(1)} \ldots \beta_{i(N-1)}.$$

Возьмем произвольные имена понятий $\alpha, \gamma \in A^*$. Пусть $\varphi_\Gamma(\alpha, q_0) = q_s$. Тогда имеем

$$\varphi_\Gamma(\alpha\beta\gamma, q_0) = \varphi_\Gamma(\beta\gamma, q_s) =$$

$$= \varphi_\Gamma(\beta_0\beta_{i(1)} \ldots \beta_{i(s-1)}\beta_{i(s)} \ldots \beta_{i(N-1)}\gamma, q_s) =$$

$$= \varphi_\Gamma(\beta_{i(s)} \ldots \beta_{i(N-1)}\gamma, q_{i(s)}) =$$

$$= \varphi_\Gamma(\beta_{i(s+1)} \ldots \beta_{i(N-1)}\gamma, \varphi_\Gamma(\beta_{i(s)}, q_{i(s)})) =$$

$$= \varphi_\Gamma(\beta_{i(s+1)} \ldots \beta_{i(N-1)}\gamma, \varnothing) = \varnothing.$$

Таким образом, $\mathfrak{L} \subseteq A^*(\beta)$ и, следовательно, $\Phi(\mathfrak{L}) \subseteq A^*(\beta)$, что противоречит предположению о том, что $\mathfrak{L}$ есть фрагментное покрытие A^*. Теорема доказана.

10. Рассмотрим вопрос о роли букв в регулярных языках понятий и возможности *алфавитной редукции.* Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ и $\mathfrak{L} \subseteq A^*$.

Буква $a_i \in A$ называется *фиктивной* в $\mathfrak{L}$, если отображение $\alpha \to \alpha' \Rightarrow \binom{a_i}{\lambda}\alpha$, состоящее в замене a_i пустым признаком λ во всех вхождениях a_i в α, таково, что из $\alpha, \beta \in \mathfrak{L}$ и $\alpha \neq \beta$ следует $\alpha' \neq \beta'$. В противном случае буква a_i называется *существенной.*

Буквы a_i и a_j называются *контекстно различимыми* в языке понятий $\mathfrak{L}$, если отображение $\alpha \to \alpha' \Rightarrow \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} \alpha$ таково, что из $\alpha, \beta \in \mathfrak{L}$ и $\alpha \neq \beta$ следует $\alpha' \neq \beta'$.

Язык понятий $\mathfrak{L}$ называется *неприводимым,* если все его буквы существенные и попарно контекстно неразличимы, в противном случае будем говорить, что $\mathfrak{L}$ допускает *алфавитную редукцию* (т. е. взаимно однозначное отображение $\mathfrak{L}$, состоящее в элиминации фиктивной буквы, либо в отождествлении какой-нибудь пары контекстно различимых букв).

Для регулярных языков понятий задачи выявления фиктивных букв и контекстно различимых пар букв допускают алгоритмическое решение. Можно показать что *результат любой алфавитной редукции регулярного языка понятий есть регулярный язык понятий,* поэтому после конечного числа применений соответствующих алгоритмов можно найти все неприводимые языки понятий, к которым можно свести данный регулярный язык понятий последовательностью алфавитных редукций.

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma)$ и Г — регулярный (N, m)-источник.

Букву $a_i \in A$ назовем циклической, если в $G(\Gamma)$ есть цикл, всем ребрам которого приписана буква a_i. В противном случае букву a_i назовем ациклической. Если a_i — ациклическая, то пусть $l(a_i)$ — максимальное число ее последовательных вхождений в имена понятий $\mathfrak{L}$.

Лемма. *Если буква a_i циклическая, то она существенная.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \beta a_i^s \gamma \in \mathfrak{L}$, где вхождение a_i^s порождается циклом порождающего пути. Тогда $\delta = \beta\gamma \in \mathfrak{L}$, так как $\varphi_\Gamma(\alpha, q_0) = \varphi_\Gamma(\delta, q_0)$, и $\alpha' = \delta'$, т. е. a_i — существенная, ч. т. д.

Теорема 1. *Если a_i — существенная буква, то найдутся* $\alpha, \beta \in \mathfrak{L}$ *такие, что*

$$\alpha \neq \beta, \ \alpha' = \beta' \ \text{ и } \ |\alpha| \leqslant |\beta| \leqslant 2N^3.$$

Доказательство. Согласно лемме можно предположить, что a_i — ациклическая. Построим A-источник Γ_1 над алфавитом

$$\left\{ \frac{a_j}{a_j} \middle| j = \overline{1, m} \right\} \cup \left\{ \frac{b_j^\nu}{b_j^\mu} \middle| j = \overline{1, m}, j \neq i, \mu, \nu \leqslant l(a_i) \right\},$$

где $b_i^\nu \Rightarrow a_j a_i^\nu$.

(Символ a_i/a_i, а также еще и символы вида a_i^j/a_i^k $(j,k \geq 0)$ могут быть приписаны только ребрам, идущим из начального состояния.)

Состояния Γ_1: $\{q_0/q_0,\ q_0/q_1,\ \ldots,\ q_i/q_j,\ \ldots,\ q_{N-1}/q_{N-1}\}$, их N^2, начальное — q_0/q_0, и функция следующего состояния определяются посредством

$$\varphi_{\Gamma_1}\left(\frac{x}{y}, \frac{q_i}{q_k}\right) = \frac{\varphi_\Gamma(x,\ q_i)}{\varphi_\Gamma(y,\ q_k)},\ \text{где}\ \varphi_\Gamma(b_j^\nu, q_k) \Rightarrow \varphi_\Gamma(a_j a_i^\nu,\ q_k).$$

Множество заключительных состояний пусть будет

$$Q_1' = \left\{\frac{q_i}{q_k} \middle| q_j \in Q',\ q_k \in Q'\right\}.$$

Некоторые ребра в графе источника Γ_1 выделим (скажем, изобразим двойной стрелкой: ребро выделено, если ему приписана пара a_i^ν/a_i^μ или b_j^ν/b_j^μ с $\mu \neq \nu$).

Легко проверить, что буква a_i существенная в $\mathfrak{L}$ в том и только том случае, если в Γ_1 найдется путь из начального состояния в заключительное, содержащий выделенное ребро (такой путь порождает пару различных имен понятий $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ такую, что

$$\alpha_1 \Rightarrow \alpha \in A^+ \text{ и } \beta_1 \Rightarrow \beta \in A^+,\ \alpha,\ \beta \in \mathfrak{L},\ \alpha \neq \beta,\ \alpha' = \beta').$$

Кратчайший из таких путей может содержать не более одного цикла, следовательно, его длина не превосходит $2N^2$ (причину, по которой может случиться, что без цикла обойтись нельзя, иллюстрирует рис. 10).

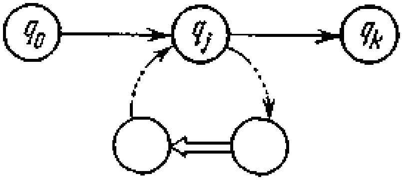


Рис. 10.

При возвращении к алфавиту A от пары имен понятий, порожденной Γ_1, буквы b_j^ν будут превращаться в имена понятий длины не более $l(a_i)+1 \leq N$, поэтому каждое из имен понятий будет иметь длину не более $2N^3$. Теорема доказана.

Алгоритм определения фиктивных букв следует непосредственно из теоремы 1. Самое простое — это рассмотреть все пары имен понятий языка понятий длины $\leq 2N^3$, но это привело бы к несообразному объему работы. В действительности результат дается много легче. Скажем, если язык понятий конечно перечислим, то все буквы, имеющие вхождение хотя бы в одно имя понятий языка понятий, существенные: это следует из того, что в конечно перечислимое множество вместе с каждым именем понятия входят и все его префиксы. В любом случае заметно проще построить все m источников $\Gamma_1(a_i)$ $(i = \overline{1, m})$. При этом индуктивное построение часто не придется доводить до конца, останавливаясь по получении какой-нибудь одной из искомых пар имен понятий. Например, для языка понятий, порожденного источником, изображенным на рис. 11, соответствующие построения представлены на рис. 12 (в построении $\Gamma_1(a)$ нет необходимости, так как a — циклическая и, по лемме, существенная). Вывод: буквы a, b, d — существенные, c — фиктивная.

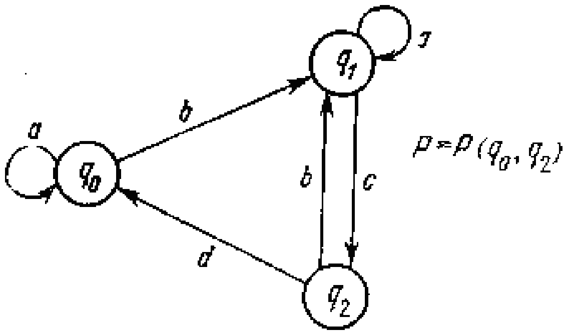


Рис. 11.

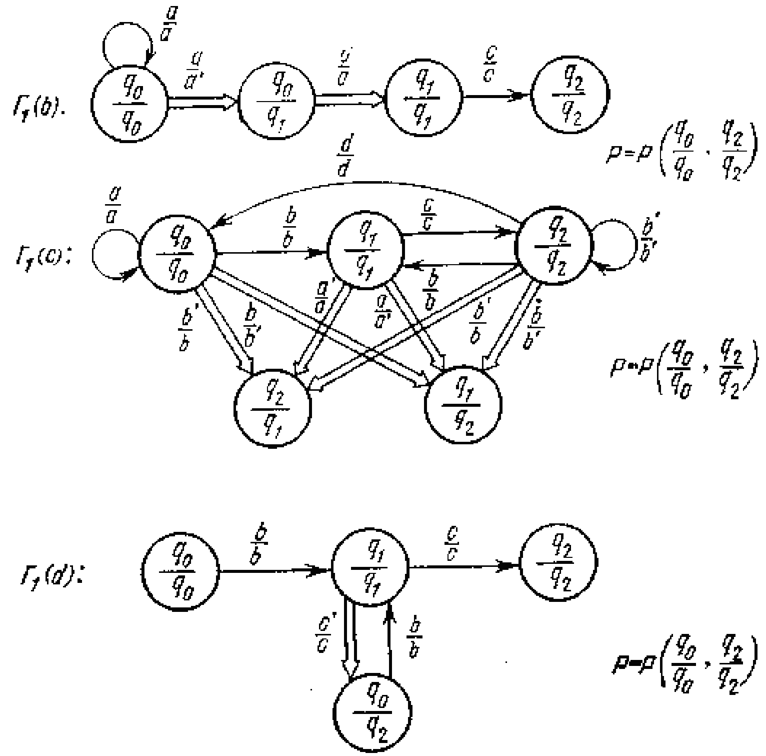


Рис. 12.

Теорема 2. *Если a_i и a_j - контекстно неразличимы, то найдутся имена понятий* $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ *такие, что*

$$\alpha \neq \beta,\ \alpha' = \beta' \text{ и } |\alpha| = |\beta| \leqslant 2N^2.$$

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему, но несколько проще построение вспомогательного источника Γ_1 (а оценка несколько лучше) за счет того, что здесь искомые имена понятий могут быть только одинаковой длины и алфавит Γ_1 есть $\left\{\frac{a_k}{a_k} \middle| k = \overline{1, m}\right\} \cup \left\{\frac{a_i}{a_j}, \frac{a_j}{a_i}\right\}$, а выделяют те и только те ребра, которым приписаны символы

$$\frac{a_i}{a_j},\ \frac{a_j}{a_i}.$$

Так, в предыдущем примере (источник на рис. 11) любая пара букв, кроме *{a, b}*, контекстно различима. Для пары *{b, d}* подтверждающий это источник $Г_1$(*b, d)* изображен на рис. 13.

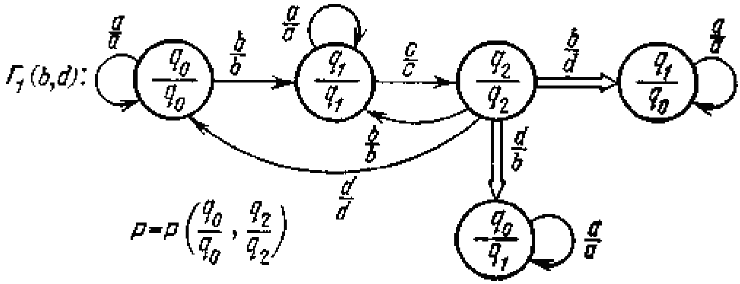


Рис. 13.

Другой источник изображен на рис. 14, *а)*.

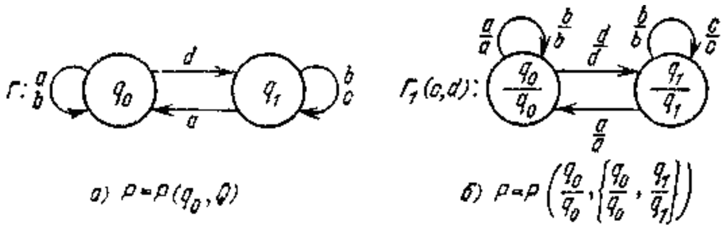


Рис. 14.

Можно проверить, что в порожденном им языке понятий есть только две контекстно различимые буквы *c* и *d*, источник $Г_1$(*c, d)* показан на рис. 14, б): в нем нет ни одного выделенного ребра.

11. Регулярные источники могут быть полезны для представления отношений на множествах понятий, как в п. 10, если пары имен понятий рассматривать как имена понятий в алфавите дробей $\left\{\frac{a_i}{\lambda}, \frac{\lambda}{a_i}\right\}_{i=1}^{m}$. Например, отношение префиксности на множестве имен понятий {*a*, *b*}* допускает очевидное регулярное представление источником, изображенным на рис. 15.

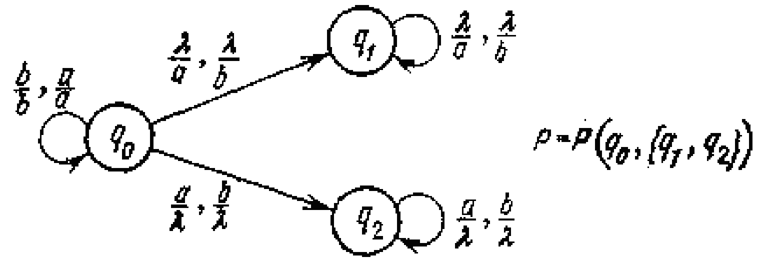


Рис. 15.

Методы теории регулярных языков понятий применимы и при изучении *регулярных отношений между признаками предметов и понятиями.* Например, для произвольного регулярного множества $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma)$ отношение $\Delta_{\mathfrak{L}}$ равенства на множестве имен понятий $\mathfrak{L}$ получаем в виде $\mathfrak{L}(\Gamma_1)$, где Γ_1 есть результат преобразования каждого ребра Г по правилу, показанному на рис. 16.

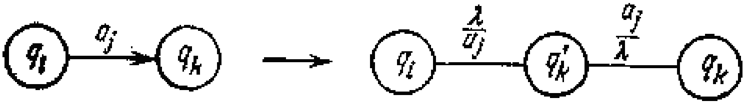


Рис. 16.

Теорема 1. *Пусть* ρ — *регулярное отношение на* A^*, *порождаемое источником* Γ *с* N_Γ *состояниями,* $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma_1) \subseteq A^*$ — *регулярный язык понятий, порождаемый A-источником* Γ, *с* $N_{\mathfrak{L}}$ *состояниями, и* $\rho|\mathfrak{L} \Rightarrow \rho \cap (\mathfrak{L} \times \mathfrak{L})$ — *ограничение отношения* ρ *на множество* $\mathfrak{L}$. *Тогда* $\rho|\mathfrak{L}$ — *регулярное отношение, порождаемое источником, число состояний которого не превосходит* $N_\Gamma \cdot N_{\mathfrak{L}}^2$.

Доказательство состоит в индуктивном построения источника Γ_2, порождающего $\rho|\mathfrak{L}$. Пусть

$$Q(\Gamma) = \{q_0, q_1, \ldots, q_{N_\Gamma - 1}\} \text{ и } Q(\Gamma_1) = \{r_0, r_1, \ldots, r_{N_{\mathfrak{L}} - 1}\}.$$

Возьмем $\left\langle q_0, \frac{r_0}{r_0} \right\rangle$ в качестве начального состояния Γ_2 и

определим функцию следования посредством

$$\varphi_{\Gamma_2}\left(\frac{\lambda}{a}, \left\langle q_i, \frac{r_j}{r_k}\right\rangle\right) = \left\{\left\langle q_p, \frac{r_j}{\varphi_{\Gamma_1}(a, r_k)}\right\rangle \middle| q_p \in \varphi_\Gamma\left(\frac{\lambda}{a}, q_i\right)\right\},$$

$$\varphi_{\Gamma_2}\left(\frac{a}{\lambda}, \left\langle q_i, \frac{r_j}{r_k}\right\rangle\right) = \left\{\left\langle q_p, \frac{\varphi_{\Gamma_1}(a, r_j)}{r_k}\right\rangle \middle| q_p \in \varphi_\Gamma\left(\frac{a}{\lambda}, q_i\right)\right\}.$$

Состояние $\left\langle q_i, \frac{r_j}{r_k}\right\rangle$ относим к числу заключительных в Γ_2 в том и только том случае, если $q_i \in Q'(\Gamma)$ и $r_j, r_k \in Q'(\Gamma_1)$.

Остается непосредственной проверкой убедиться, что Γ_2 — искомый источник.

6. Комбинаторно-логические основания теории моделирования признаков и понятий

В широком смысле термин *информация* означает запись (расположение элементарных символов, букв) вместе с семантикой — некоторым правилом определения смысла записи. *Моделирование признаков предметов и понятий (в дальнейшем – моделирование)* — это переход от одного способа представления информации к другому. При изучении *оснований* теории моделирования мы отвлекаемся от разнообразия форм представления информации, ограничиваясь линейными записями. При этом можно сконцентрировать внимание на выявлении общих закономерностей, учитывая, что линейные записи являются наиболее универсальной формой представления информации.

Из элементов семантики, допускающих формализацию, существенным при моделировании фактором может быть *отношение синонимии* в языке сообщений (понятий). Под *языком* же понимаем произвольное множество слов в некотором алфавите, либо некоторую более реалистическую модель, как регулярные множества. *Грамматика* языка является другим фактором, имеющим значение при моделировании.

Основные факторы, характеризующие моделирование,— это *реализуемость* и *адекватность.* Обеспечение адекватности связано с введением в записи избыточности, но рост избыточности ухудшает шансы на реализуемость. Поэтому большое значение имеет проблема *сжатия информации,* т. е. устранения естественной избыточности с целью замены неуправляемой избыточности на управляемую, повышающую адекватность.

Различные вопросы и подходы к их решению рассматриваются на двух моделях. Это — *алфавитное моделирование* и *равномерное моделирование* — специальные виды автоматных отображений.

6.1. Модель канала связи и проблематика теории моделирования признаков предметов и понятий

1. Многие задачи математической лингвистики можно сформулировать в соответствии со следующей схемой. Даны *языки понятий* $L_1 = <\mathsf{L}_1, S_1>$ и $L_2 = <\mathsf{L}_2, S_2)$, где L_i (i= 1, 2) — собственно язык понятий, т. е. множество признаков, а $S_i \subseteq \mathsf{L}_i \times \mathsf{L}_i$ — отношение *синонимии* в нем. Предполагается, что $<\alpha, \beta> \in S_i$, означает, что информация о признаках α и β языка L_i - примерно одинакова, следовательно, S_i рефлексивно и симметрично, но не обязательно транзитивно. Язык L_i называется *простым,* если S_i есть равенство, тогда $L_i = \mathsf{L}_i$. Пусть задано *ограничение* φ — отображение L_1 в 2^{L_2} и имеется функция *C,* сопоставляющая элементам L_2 действительные числа *(веса).* Требуется найти в некотором классе отображений $\mathsf{F} = F \cap \mathsf{L}_2^{\mathsf{L}_1}$ *моделирование признака* f: $\mathsf{L}_1 \to \mathsf{L}_2$, т. е. такое отображение, что

(а) $f(\alpha) \in \beta(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathsf{L}_1$,

(б) если $< f(\alpha), f(\beta)> \in S_2$, то $<\alpha, \beta> \in S_1$.

Предположим, что для каждого $\alpha \in \mathsf{L}_1$ существует $\mu(\alpha) \Rightarrow \min \{C(\beta): \beta \in \varphi(\alpha) \cap \{g(\alpha): g \in F\}\}$. Тогда моделирование f называется *оптимальным,* если в дополнение к (а) — (б) выполняется

(в) $C(f(\alpha)) = \mu(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathsf{L}_1$.

Заметим, что в этой схеме неявно присутствует предположение о существовании *семантики* языков (отображения признаков в некоторое множество значений их параметров). С семантикой связано и ограничение на синтаксис (т. е. исключение из рассмотрения признаков вне L_1) и ослабление условия взаимной однозначности моделирования (б) в случае нетривиальных отношений синонимии в языках (условие (б) требует только, чтобы при моделировании не происходило потерь информации). Кроме того, ограничение φ интерпретируется как требование сохранения при моделировании смысла информации. Например, если L_1 — множество всех формул *u* алгебры логики над некоторым базисом, g'_u— функция, заданная формулой *u*, $<u,v>\in S_1 \Rightarrow g'_u = g'_v$, а L_2 — множество всех схем из функциональных элементов того же базиса, g''_σ — функция, реализуемая схемой σ, пара $<\sigma, \tau> \in S_2 \Rightarrow g''_\sigma = g''_\tau$ и $C(\sigma)$ — сложность схемы σ, то принимают $\varphi(u) =\{\sigma | g''_\sigma = g'_u\}$. В такой интерпретации условие (а) требует, чтобы оптимальное моделирование сопоставляло любой формуле схему минимальной сложности из реализующих ту же функцию, что и формула.

Для проблематики теории моделирования понятий и признаков характерно, что условие (а) на *f* не накладывается (что то же самое — $\varphi(\alpha) = \mathsf{L}_2$ для любого $\alpha \in \mathsf{L}_1$). С другой стороны, накладываются сильные ограничения на класс допустимых отображений *F*.

2. Прежде чем уточнять математические модели, изучаемые в теории моделирования понятий и признаков, сформулируем некоторые необходимые условия существования моделирования понятий и/или признаков в классе *F*. Они являются следствиями условия (б).

Пусть *f* — моделирование понятий и/или признаков и $M\subseteq \mathsf{L}_1$. Информационно различные элементы *M* должны отображаться в информационно различные элементы *f(M).* Поэтому образом всякого независимого множества графа $<M_1, S_1>$ должно быть независимое множество графа $<f(M), S_2>$ той же мощности, что и прообраз, в частности,

$$\alpha(<M, S_1>) \le \alpha(<f(M), S_2>). \tag{1}$$

Прообразами элементов $f(M)$могут быть только полные подграфы $<M, S_1>$, следовательно, граф $<M_1, S_1>$ разбит на $\le|f(M)|$ полных подграфов, а дополнительный $<M, S_1>$ — на столько же независимых множеств. Поэтому должно выполняться

$$\gamma(<M, \overline{S}_1>) \le |f(M)|. \tag{2}$$

(1) и (2) называются *локальными мощиостиыми неравенствами относительно М.* Для совокупности M подмножеств L_1 мы, таким образом, получим *систему локальных мощностных неравенств.*

В случае, когда S_1 есть отношение эквивалентности, мы имеем $\gamma(<M, \overline{S}_2>)=\alpha(<M_1, S_1>)$ и ввиду того, что $\alpha(<f(M), S_2>)\le|f(M)|$, неравенство (2) является следствием неравенства (1). Если же S_1 и S_2 являются отношениялш равенства (т. е. для простых языков), то (1), (2) эквивалентны

$$|M| \leq |f(M)|. \qquad (3)$$

Системы локальных мощностных неравенств могут в одних случаях сократить перебор при поиске оптимального моделтрования, в других случаях дополпительное исследование позволяет получить из них необходимое и достаточное условие существования моделтрования в классе F.

3. Начнем с содержательного описания элементов модели *канала связи.* По каналу поступает информация

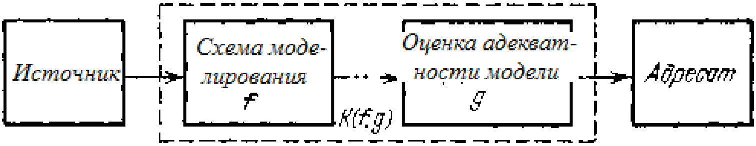


Рис. 1.

от *источника* к *адресату.* Вход канала есть вход *схемы моделирования* f, выход канала — выход *оценки адекватности модели* g, $K_U(f, g)$ — канал с данными f и g из некоторого класса управляющих систем U (рис. 1).

Пусть B_1 — *алфавит языка источника* признаков $L_1 = <L_1, S_1>$, B_2 — *алфавит языка адресата* $L_2 = <L_2, S_2>$, $A = \{a_1, ..., a_q\}$—*алфавит канала* (т. е. перечень различимых элементарных сигналов (значений параметров признаков), которые могут передаваться по каналу), f: $B_1^+ \to A^+$, g: $A^+ \to B_2^+$. В канале модель признака может подвергаться искажениям, если имеется некоторый *источник помех* — определенным образом организованных или случайных. В последнем случае моделирование f можно рассматривать как случайную функцию. При этом связанные с f отношения тоже становятся случайными. Пусть $f'(\alpha)$—множество тех моделей признаков, которые могут быть получены на входе оценки адекватности модели, когда передана модель признака α.

Так же, как это делается при построении формальных систем в логике, для каждого рассматриваемого языка мы будем постулировать только существование семантики (понимая ее как отображение k множества информационных записей в множество значений θ, общее для различных языков), не задаваясь вопросом, как она задана. Практическое значение может иметь лишь проявление семантики в форме отношения синонимии на множестве признаков, удовлетворяющего условию:

из $<\alpha, \beta> \in S$ следует $k(\alpha) = k(\beta)$.

Должно также выполняться условие согласованности языков

$$k_1(\alpha) = k_2(g(f(\alpha))) \text{ для любого } \alpha \in L_1, \qquad (4)$$

которое означает, что в канале $K_U(f, g)$ при общении источника с адресатом не происходит потерь информации.

Будем предполагать, что с L_1 на $L_г$ и обратно существует *перевод (преобразование)* с сохранением значений, не уточняя, в каком классе преобразований он реализован. Более того, в функционировании схемы оценки адекватности модели мы выделяем два этапа: *локализацию информации* в модели признака (т. е. выделение в ней информационно законченных фрагментов) и собственно оценку адекватности модели — *определение достоверности информации.* Второй этап считаем тривиально реализуемым, если $L_1 = L_2$, в противном случае — с добавлением схемы перевода. Общих вопросов перевода с одного языка на другой мы здесь не касаемся и будем обычно понимать под оценкой адекватности модели локализацию информации схемой g в модели признака.

Из сказанного следует, что при построении математических моделей каналов связи рассмотрение языка адресата L_2 можно заменить рассмотрением *языка канала* $L_к = <A^+, S_K>$ (и даже ограничить его до $<f(L_1), S_K>$). Здесь A^+ или $f(L_1)$ — возможные модели признаков, а S_K — полная синонимия канала:

$$\langle \alpha, \beta \rangle \in S_K \Rightarrow \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle \in S'_K \text{ или } f(\alpha) = f(\beta),$$

где S'_K — внутренняя синонимия канала:

$<x, y> \in S'_K$ - «существует такое z, что $z \in f'(x) \cap f'(y)$ и $x \neq y$».

Условие взаимной однозначности (4) эквивалентно тогда условию

$$S_К \subseteq S_1 \qquad (5)$$

(словами: *отождествляться при передаче могут только синонимы).*

В описанной модели при подходящей детализации могут быть представлены самые разнообразные обстоятельства, которые мы интуитивно склонны рассматривать как случаи моделирования: модели, возникающие в технике связи, преобразования информации в памяти ЭВМ, стенография, криптография, многие формы социальной коммуникации. К проблемам, которые характерны для любых детализаций модели и составляют основу углубленного исследования, относятся *проблема взаимной однозначности моделирования* (т. е. обозрения тех схем моделирования, для которых выполняется (5)) и *проблема сложности реализации канала связи* или его элементов при заданных условиях.

С проблемой взаимной однозначности моделирования тесно связана проблема *описания отношения синонимии канала* S_h. От умения описывать S_K зависит, в какой форме мы должны представить (или аппроксимировать) естественную синонимию для ее эффективного использования в канале связи. Проблема описания S_K в ряде случаев имеет и самостоятельный интерес, так как оценки адекватности модели в канале связи может и не требоваться, но на синонимию есть определенные ограничения (например, при адресации информационных массивов в памяти ЭВМ.

4. Чтобы сделать моделирование признаков и/или понятий объектом математической теории, на модель канала связи накладываются дополнительные ограничения. Основным объектом, который систематически изучается, является *алфавитное моделирование* — простейший вид *автоматного моделирования,* при котором память не используется. Исключение составляет п.5.5, в котором трактуются вопросы *помехоустойчивого моделирования* на модели *равномерного моделирования.* Эта модель является тоже конечно автоматной, но в ней использование памяти существенно.

Модель алфавитного моделирования получается в результате ограничения класса моделирующих отображений побуквенными преобразованиями признаков входного языка. Алфавитное моделирование $f = f_V$ задается схемой $\mathfrak{S}$:

$$\begin{aligned} &b_1 \to v_1,\\ &b_2 \to v_2,\\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ &b_m \to v_m, \end{aligned} \tag{6}$$

множество значений признаков $V=\{v_1, ..., v_m\}$ в алфавите канала A называется *моделью признака,* определяющим f_V, модели признаков v_i, называются элементарными моделями признаков. Схема (6) задает f на множестве B_1, и для признаков $x_1x_2,... x_k$ $(x_i \in B_1, i \leq k = 1,2,...)$ полагают

$$f(x_1x_2,... x_k) = f(x_1)\, f(x_2)...\, f(x_k). \tag{7}$$

Таким образом, f_V есть гомоморфизм свободной полугруппы B^+_1 в полугруппу A^+, индуцированный схемой (6) и правилом (7). При этом сама схема $\mathfrak{S}$ описывает образ порождающего множества.

Центральным в модели алфавитного моделирования является понятие модели признака и/или понятия. Это понятие и его взаимосвязи с другими понятиями главным образом и изучаются в основаниях теории поделирования признаков и/или понятий.

5. В основном мы рассматриваем модели признаков и/или понятий как *упорядоченные языки* в соответствии с урорядочением входного алфавита. В некоторых случаях, однако, модель можно рассматривать и как неупорядоченное множество признаков и/или понятий, именно — если рассматриваются такие свойства, которые сохраняются при любом переупорядочении модели признака и/или понятия (например, взаимная однозначность f_V на всем множестве $B^+{}_1$).

Пусть

$$\mathfrak{D}(L) = \mathfrak{D}_q(L)$$

— *множество всех q-ичных моделей, для которых f_V взаимно однозначно на L. Частотной характеристикой* признака α называется вектор-распределение частот $\mathcal{P}_\alpha = \langle p_1(\alpha), \ldots, p_m(\alpha) \rangle$, где

$$p_i(\alpha) = \frac{|\alpha|_i}{|\alpha|} \; (i = \overline{1, m})$$

— отношение числа вхождений b_i в α к длине α. Тогда

$$C(V, \alpha) = C(V, \mathcal{P}_\alpha) \Rightarrow \frac{|f_V(\alpha)|}{|\alpha|} = \sum_{i=1}^{m} p_i(\alpha) \cdot |v_i|$$

называется *значимостью (весом)* моделирования признака α отображением f_V, а *значимость* наилучшего моделирования α определяется как

$$C(L, \alpha) = C(L, \mathcal{P}_\alpha) \Rightarrow \inf_{V \in \mathfrak{D}(L)} \{C(V, \alpha)\} \qquad (\alpha \in \mathfrak{L}). \tag{8}$$

Значимость (вес) моделирования признака α выражает среднее количество символов соответствующей этому значению параметров признаков модельной комбинации, приходящееся на один символ значения параметра признака. При этом вся информация о признаке α, по которой определяется значимость (вес) моделирования, сосредоточена в $\mathcal{P}_\alpha$. Таким образом, наилучшее моделирование для α одновременно является наилучшим для всех признаков, у которых частотная характеристика совпадает с $\mathcal{P}_\alpha$.

Моделирование называется *оптимальным,* если для него достигается нижняя граница.

Оптимальное алфавитное моделирование одновременно для всех признаков языка $\mathfrak{L}_1$ (в смысле п. 1, если под *F* понимать класс всех алфавитных отображений в множество *A*)* может и не существовать. Однако, если существует типичная для языка $\mathfrak{L}_1$ частотная характеристика $\mathcal{P}$ (т. е. большинство признаков $\mathfrak{L}_1$ имеет частотную характеристику $\mathcal{P}$), то в классе алфавитных отображений существует статистически оптимальное моделирование.

6. Пусть $\mathfrak{D}^0(L)$— *множество всех моделей, которые могут оказаться оптимальными хотя бы для одного признака* $\alpha \in \mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{D}^0(L) = \{V \mid V \in \mathfrak{D}(L),\ \exists \alpha C(V, \mathcal{P}_\alpha) = C(L, \mathcal{P}_\alpha)\}.$$

Очевидно, что различные спектры моделей из $\mathfrak{D}^0(L)$ попарно несравнимы. Учитывая, что существует лишь конечное число g-ичных моделей, имеющих данный спектр длин элементарных моделей, по теореме Диксона получаем следующий результат.

Теорема 1. *Для любого языка L множество* $\mathfrak{D}^0(L)$ *конечно.*

В силу этой теоремы, inf в (8) можно заменить на min:

$$C(L, \mathcal{P}_\alpha) = \min\{C(V, \mathcal{P}_\alpha) \mid V \in \mathfrak{D}^0(L)\}.$$

Из нее, таким образом, следует, что *оптимальное моделирование для любого признака в любом языке существует.*

Пусть М *(L)* — матрица с *m* столбцами $\|d_{ij}\|$, строками которой являются все различные спектры длин моделей признаков из $\mathfrak{D}^0(L)$: $<d_{i1}, ..., d_{im}> = \tilde{d}_i$ (будем предполагать, что строки лексикографически упорядочены). Из теоремы 1 следует, что *M(L)* конечна для любого языка *L*. *M (L)* называется *матрицей оптимального моделирования* для языка *L*.

Алгоритм оптимального моделирования включает в себя два этапа:

$$\mathfrak{A}:\quad \mathcal{P}_\alpha \xrightarrow{\mathfrak{A}_1} \tilde{d}_i(\mathcal{P}_\alpha) \xrightarrow{\mathfrak{A}_2} V(\tilde{d}_i).$$

Первое отображение осуществляет выбор спектра $\tilde{d}_i \in M(L)$, на котором достигается минимум линейной формы $\sum_{j=1}^{m} d_{ij} p_j(\alpha)$. Второе есть алгоритм построенния модели $V \in \mathfrak{D}^0(L)$, имеющей спектр *D(V)*= $\tilde{d}_i$. Матрица оптимального моделирования является основой всего алгоритма.

С оптимальным моделированем связаны две проблемы: во-первых, *построение матрицы* М*(L)* и, во-вторых, задача *минимизации линейной формы на конечном множестве наборов с неотрицательными целыми компонентами.* Первая из них в полной мере относится к теории моделирования признаков и/или понятий. Вторая — универсальная переборная проблема. Вполне эффективное ее решение удается лишь в *отдельных* случаях, например, в статистически типичном случае (п.6.2 раздела 7).

Прямолинейная реализация моделирования на основе алгоритма $\mathfrak{A}$ (т. е. отображение $f(\alpha)=f_{\mathfrak{A}(\mathscr{P}_\alpha)}(\alpha))$ может оказаться не взаимно однозначным отображением на множестве всех признаков $\mathfrak{L}_1$. Для различных признаков α, $\beta\in\mathfrak{L}_1$ может получиться $f_{V_1}(\alpha)=f_{V_2}(\beta)=\gamma$, где $V_1=\mathfrak{A}(\mathscr{P}_\alpha), V_2=\mathfrak{A}(\mathscr{P}_\beta)$. В таком случае для оценки адекватности модели γ необходимо знать — какая именно была использована модель. Возможно, что такая пара α, β найдется для любого алгоритма оптимального моделирования $\mathfrak{A}$, и тогда оптимальное моделирование (в смысле п. 1) в классе алфавитных отображений не существует. Однако *асимптотически оптимальное* моделирование $\tilde{f}$ (т. е. такое, что для любой достаточно длинной модели признака α выполняется $|f(\alpha)|\sim\mu(\alpha))$ на основе алгоритма $\mathfrak{A}$ всегда может быть реализовано в классе кусочно алфавитных отображений — расширении класса алфавитных отображений.

Пусть имеется *r* схем алфавитного моделирования, $V_1, ..., V_r$ — соответствующие им модели и $\mathsf{L}_1=\bigcup_{i=1}^{r}\mathsf{L}_1^{(r)}$ есть разбиение языка L_1 такое, что f_{V_i} взаимно однозначно на $\mathsf{L}_1^{(i)}$ для всех $i=1,\dots,r$. Пусть $\nu(i)$ есть *q*-ичное разложение значения параметра признака $i=1,\dots,r$ в записи длины $]\log_q r[$ и $n(\alpha)$ есть номер того куска L_1, в котором содержится $\alpha:\alpha\in\mathsf{L}_1^{(n\alpha))}$. Тогда кусочно алфавитное моделирование задается отображением $\tilde{f}$: $\tilde{f}(\alpha)=\nu(n(\alpha))\,f_{V_{n(\alpha)}}(\alpha)$ для любого $\alpha\in\mathsf{L}_1$. Ясно, что $\tilde{f}$ взаимно однозначно на L_1. Если в качестве $V_1, ..., V_r$ выбраны все модели, которые могут быть получены в результате применения алгоритма $\mathfrak{A}$ (здесь *r* — число строк матрицы *M(L)),* а $\mathfrak{L}_1^{(i)}=\{\alpha/\alpha\in\mathfrak{L}_1,\ \mathfrak{A}(\alpha)=V_i\}$, то для $\tilde{f}$ и любого $\alpha\in\mathfrak{L}_1$ будем иметь

$$C(\tilde{f}(\alpha))=\frac{]\log_q(r)[}{|\alpha|}+C(L,\alpha)=\mu(\alpha)+O\left(\frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Кусочно алфавитное моделирование может предоставлять и дополнительные возможности для сжатия информации по сравнению с теми, которые здесь использованы. Они могут возникнуть при удачном разбиении языка на конечное число «кусков».

Задача построения матрицы оптимального моделирования в свою очередь распадается на две.

(А) Матрица М *(L)* может быть задана характеристической функцией в некоторой *k*-значной логике.

Пусть

$$k(L) = \max\{d_{ij} \in \mathsf{M}(L)\}$$

есть *значность* этой логики (максимум длины модельного слова по всем оптимальным моделям). Первая задача состоит в том, чтобы ограничить класс векторов, которые могут входить в М(*L*), указав *оценку сверху для k*(*L*)**.**

(Б) По данной моделе *V* выяснить — принадлежит ли она множеству $\mathfrak{D}(L)$ или нет? Пусть $X_L(V)$ — длина кратчайшего нетождественного соотношения в $R(V) \backslash S(L)$, если такое существует, в противном случае не определено. Тогда задача состоит в *получении оценки сверху для* $X_L(V)$.

Так как модели множества $\mathfrak{D}^0(L)$ являются в точности экстремальными унтер-решениями системы *S(L)* уравнений в признаках, из теоремы 5.5.1 об алгоритмической неразрешимости проблемы перечисления всех экстремальных унтер-решений уравнений в признаках получаем аналогичный факт, относящийся к оптимальному моделированию.

Теорема 2. *Не существует алгоритма, вычисляющего по конечному множеству соотношений* ρ *матрицу оптимального моделирования М (L) для языка* $L=\langle B^+, S\rangle$, *где S* = s*(ρ) — *отношение конгруэнтности на* B^+, *порожденное отношением* ρ.

Заметим, что даже из алгоритмической разрешимости задачи (А) еще не следует разрешимость (Б) (В случае, когда (Б) разрешима, задача построения матрицы М*(L)* есть задача расшифровки монотонной функции в счетнозначной логике, а когда разрешима и задача (А) — в *k*(L)-значной логике.). С другой стороны, для широкого класса *простых регулярных связных языков* проблема оптимального моделирования признаков и/или понятий может быть решена полностью. Проблема оптимального моделирования признаков и/или понятий *для языков* $L=\langle \mathsf{L}, S\rangle$ с нетривиальной синонимией *S* равносильна той же проблеме *для классов языков* $\{\mathsf{L}_i\}$ — всевозможных независимых множеств графа $\langle \mathsf{L}, S\rangle$. Поэтому, как следствие разрешимых случаев для простых языков, получаются положительные результаты и для некоторых языков с нетривиальной синонимией.

Существует связь между задачами локализации информации и оценки адекватности модели в модели алфавитного моделирования. *Локализация информации* здесь состоит в нахождении *скобочной* *записи* некоторого разложения значений параметров моделей признаков в произведение значений параметров признаков из модели *V,* а *оценка адекватности модели* — в нахождении и оценки *поименной записи* этого разложения. Переход от первой формы ко второй может быть выполнен конечным автоматом.

Задача оптимального моделирования при заданном ограничении на сложность и достоверность *оценки адекватности модели* приводит к *конструктивному подходу к проблеме взаимной однозначности моделирования.* При этом используются достаточные условия однозначности разложения значения параметров признаков в произведение элементарных моделей. Примером такого условия является префиксность модели. Тогда проверка принадлежности *V* к некоторому классу моделей заменяется проверкой выполнения данного условия. Этим, по крайней мере в принципе, снимается проблема (Б) при построении матрицы оптимального моделирования.

7. *Надежность* (*достоверность*) *информации* в первую очередь зависит от надежности носителя информации. Это так называемая аппаратурная надежность, она достигается техническими средствами. В теории моделирования признаков и/или понятий изучаются математические методы повышения надежности информации, т. е. повышения надежности информации за счет *рационального ее представления.*

Вопросы помехоустойчивости рассматриваются в двух постановках, в соответствии с классификацией возможных помех. Первый тип — *замещения символов* в некоторых позициях модельных комбинаций. Их будем называть *аддитивными ошибками,* так как результат их действия можно изобразить прибавлением некоторого вектора-ошибки (поразрядно) к модельной комбинации. Второй тип — *синхронизационные помехи,* результатом которых является рассогласование схемы моделирования и схемы оценки адекватности модели.

Средством повышения надежности представления информации является в каждом случае введение в записи некоторой *избыточности.* Все же некоторую способность к локализации влияния ошибок могут иметь и оптимальные модели (самосинхронизация в п.6. 4 раздела 7).

Основными формами помехоустойчивости канала связи являются способность *обнаруживать некоторое количество ошибок,* либо более сильная способность — *исправлять ошибки.* Эти эффекты и методы, приводящие к ним, прослеживаются на модели равномерного моделирования.

Равномерное моделирование с параметрами *k* и *n* определяется следующим образом. Сообщение (модель признака) *x* разбивается на блоки длины *k:*

$$x = (x_1 \ldots x_k)(x_{k+1} \ldots x_{2k}) \ldots (x_{sk+1} \ldots x_{sk+r}),$$

где $r \leq k$ (последний блок может быть короче, в таком случае способ его моделирования специально оговаривается). Блоки длины *n* рассматриваем теперь как буквы алфавита и моделируются их признаками длины *n* в соответствии со схемой $\mathfrak{S}_{k,n}$:

$$\alpha_1 \to \beta_1,$$

$$\alpha_2 \to \beta_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_{m^k} \to \beta_{m^k}.$$

Избыточностью на символ сообщения (признака) называется величина $R = \frac{n-k}{k} = \frac{n}{k} - 1$. В схеме $\mathfrak{S}_{k,n}$ желательно иметь каждый из параметров *k* и *n* как можно меньше *(k* характеризует *сложность моделирования).*

Канал связи характеризуется моделью источника помех, параметрами *k* и *n* и подходом к оценке адекватности модели. Канал связи называется *надежным,* если любые ошибки обнаруживаются или исправляются в соответствии с избранной целью оценки адекватности модели.. При статистическом подходе характеристикой надежности канала является *вероятность неправильного оценивания адекватности модели* (т. е. вероятность принятия неправильного решения — не соответствующего замыслу).

6. 2. Условия взаимной однозначности алфавитного моделирования

1. Разрешимость проблемы принадлежности модели *V* к $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ равносильна существованию *конечного теста* — множества

$$\mathfrak{B}_{N,M,\mathfrak{L}} \subseteq B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^M$$

такого, что если $\sum_{i=1}^{m} |v_i| \leqslant N$ и f_V взаимно однозначно на $\mathfrak{B}_{N,M,\mathfrak{L}}$, то f_V взаимно однозначно на всем $\mathfrak{L}$. Величина $X_{\mathfrak{L}}(V)$ — минимум суммы $|\mu|+|\nu|$ по всем нетождественным соотношениям $\frac{\mu}{\nu} \in R_1(V) \cap \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ (неопределена, если таких соотношений не существует) — называется *грубой характеристикой модели V;* $X^1_{\mathfrak{L}}(V)$

— минимум | f_V (μ)|=| f_V (ν)| на этом же множестве соотношений — *точная характеристика модели.* Первая из них ограничивает длину слов $\mathfrak{B}_{N,M,\mathfrak{L}}$, вторая — число сравнений букв (знаков) *A(V)* при одной проверке, входящей в тест. Положим

$$X_{\mathfrak{L}}(N, m) = \sup\left\{X_{\mathfrak{L}}(V) \,|\, |V| = m,\ \sum_{i=1}^{m} |v_i| \leqslant N\right\},$$

$$X'_{\mathfrak{L}}(N, m) = \sup\left\{X'_{\mathfrak{L}}(V) \,|\, |V| = m,\ \sum_{i=1}^{m} |v_i| \leqslant N\right\}.$$

Вместо X_{B+}, X'_{B+} будем писать просто X, X', опуская индекс.

2. Для простого языка всех сообщений B^+ решение проблемы взаимной однозначности f_V является развитием условий единственности разложения значений параметров признаков в произведение по модели *V:* условия, полученные в 6.5.1, не дают алгоритмического решения вопроса, в то время как в теории моделирования признаков и/или понятий основное значение имеет алгоритмическое описание классов моделей $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ и, в частности, $\mathfrak{D}(B^+)$.

Далее предполагаем, что все v_i различны, отличны от λ и $\sum_{i=1}^{m} |v_i| \geq m \geq 2$, так как если среди модельных признаков есть пустой признак, то проверки с его участием тривиальны, а если *V* состоит из одного непустого признака, то взаимная однозначность f_V очевидна.

Теорема 1. *X(N,* 2) = 4 *при N* ≥ 5.

Доказательство. Если между признаками модели понятия есть нетождественное соотношение между двумя признаками, то в силу теоремы 1 п.6.5.1, есть соотношение $v_1v_2 = v_2v_1$, т. е. *X(F)*≤4. Равенство следует из того, что при $N \geq 5$ существует модель понятия в однобуквенном алфавите <l1, 111>, для которого, как легко проверить, *X(V)*=4. Теорема доказана.

Теорема 2. *X(N, m) = N — m + 2, исключая m* = 2, *N* ≥ 5.

Доказательство. 1) Легко проверить, что *X(m, m)* = 2, *X(m* +1, *m*) = 3, *X*(4, 2) = 4 (в последнем случае *X*(<1, 111> =4).

2) Пусть $N \geq m + 2 \geq 5$. Для произвольных *N, m* возьмем $0 < i < N - m$, и пусть

$$W = W_{N,m,i} \Rightarrow \{b_1 \Rightarrow a_1,\ b_2 \Rightarrow a_1^i a_2,$$

$$b_3 \Rightarrow a_2 a_1^{N-i-m},\ b_4 \Rightarrow a_3, \ldots, b_m \Rightarrow a_{m-1}\}.$$

Имеем $\dfrac{b_1^i b_3}{b_2 b_1^{N-i-m}} \in R_1(W)$, откуда *X(W)*≤*N*-*m* + 2.

В п. 3 рассмотрим пример, в котором перечислено R_i (W) и показано, что $X(W) = N - m + 2$. Модель понятия W содержит m признаков, и

$$\sum_{i=1}^{m} |w_i| = N,$$ следовательно, $X(N, m) \geq N - m + 2$.

3) Остается показать, что $X(N, m) \leq N — m + 2$. Мы покажем, что если нетождественное соотношение в $R_1(V)$ существует, то такое соотношение найдется и среди удовлетворяющих данной оценке. Рассмотрим нетождественное соотношение

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{x_1^0 \ldots x_{l(0)}^0}{x_1^1 \ldots x_{l(1)}^1}. \tag{1}$$

Имена элементарных моделей понятий , участвующие в соотношении (1) характеризуются парами индексов $<i, \tau>$, где $\tau = 0,\ldots, 1$, $i=1,\ldots, i(\tau)$. Пусть для пары $< i, \tau >$ помер $n< i, \tau >$ находится из условия

$$f_V\left(x_1^{\bar\tau} \ldots x_{n-1}^{\bar\tau}\right) < (\pi)\, f_V\left(x_1^{\tau} \ldots x_i^{\tau}\right) \leqslant (\pi)\, f_V\left(x_1^{\bar\tau} \ldots x_n^{\bar\tau}\right) \tag{2}$$

(здесь $<(\pi) \Longrightarrow$ «левая часть есть префикс правой»), и пусть $F(x^\tau_i)=\sigma^\tau_i$ — суффикс $f_V(x^{\bar\tau}{}_n)$ (отличный от самого признака!) определяется из уравнения (рис. 2)

$$f_V\left(x_1^{\tau} \ldots x_i^{\tau}\right) \sigma_i^{\tau} = f_V\left(x_1^{\bar\tau} \ldots x_n^{\bar\tau}\right), \tag{3}$$

а $\{\sigma^\tau_i\}$ — множество позиций, занятых фрагментом $F(x^\tau_i)$. Так как (1) неразложимо, согласно (3) имеем:

$\sigma^\tau_i = \lambda$ в том и только том случае, если $i = t(\tau)$, а также

$$f_V\left(x_{i+1}^{\tau} \ldots x_{l(\tau)}^{\tau}\right) = \sigma_i^{\tau} f_V\left(x_{n+1}^{\bar\tau} \ldots x_{l(\bar\tau)}^{\bar\tau}\right). \tag{4}$$

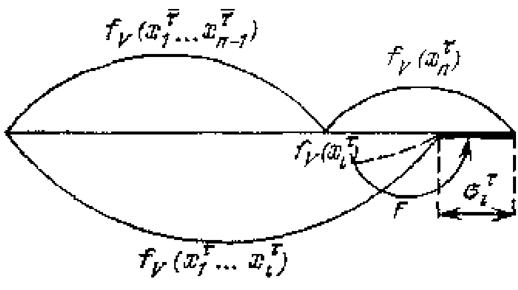


Рис 2.

Легко проверить, что весь признак $f_V(\mu/\nu)$, кроме наибольшего общего префикса f_V $(x^0{}_1)$, f_V $(x^1{}_1))$, покрыт суффиксами σ^τ_i. Существенно, что отрезки $\{\sigma^{\tau}{}_i\}$ и $\{\sigma^{\tau'}{}_j\}$ либо не пересекаются, либо один из них является суффиксом другого, так как они могут иметь общую позицию только при условии $\tau = \tau'$ и $n(i, \tau)=n(j, \tau)$, а в таком случае оба являются суффиксами $f_V(x^{\bar{\tau}}{}_n)$.

Пусть $\sigma_i^{\tau} = \sigma_j^{\tau'} = \sigma \neq \lambda$, но $\langle i, \tau\rangle \neq \langle j, \tau'\rangle$, скажем, $\{\sigma^{\tau}{}_i\}$ расположен левее $\{\sigma^{\tau'}{}_j\}$. Тогда

$$i + n(i, \tau) < j + n(j, \tau') \tag{5}$$

— действительно, если $\tau = \tau'$, то $i<j$ и $n(i, \tau) \le n(j, \tau')$, а если $\tau \neq \tau'$, то (рис. 3) $n(i, \tau) \le j$, $i< n(j, \tau')$ и, складывая эти неравенства, получаем (5).

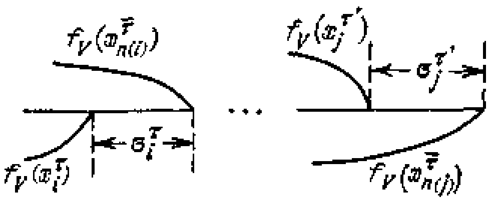


Рис. 3.

Согласно (3) и (4)

$$f_V\left(x_1^{\tau}\cdots x_i^{\tau}\right)\sigma = f_V\left(x_1^{\bar{\tau}}\cdots x_{n(i,\tau)}^{\bar{\tau}}\right),$$

$$f_V\left(x_{j+1}^{\tau'}\cdots x_{t(\tau')}^{\tau'}\right) = \sigma f_V\left(x_{n(j,\tau')+1}^{\bar{\tau}'}\cdots x_{t(\bar{\tau}')}^{\bar{\tau}'}\right)$$

и ввиду квазитождества

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma}, \frac{\delta}{\beta\varepsilon} \to \frac{\alpha\delta}{\gamma\varepsilon},$$

которое выполняется в свободной полугруппе, имеем

$$\frac{\mu'}{\nu'} = \frac{x_1^{\tau}\cdots x_i^{\tau} x_{j+1}^{\tau'}\cdots x_{t(\tau')}^{\tau'}}{x_1^{\bar{\tau}}\cdots x_{n(i,\tau)}^{\bar{\tau}} x_{n(j,\tau')+1}^{\bar{\tau}'}\cdots x_{t(\bar{\tau}')}^{\bar{\tau}'}}. \tag{6}$$

Получено нетождественное соотношение, так как уже $x^{\tau}{}_1 \neq x^{\tau'}{}_1$, и, учитывая (5), имеем

$$X\left(\frac{\mu'}{\nu'}\right) = i + t(\tau') - j + n(i, \tau) + t(\bar{\tau}') - n(j, \tau') <$$

$$< t(\tau') + t(\bar{\tau}') = X\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Следовательно, в кратчайшем соотношении все $\sigma^{\tau}{}_i$ различны и непусты для $\tau=0, 1$, $i<t(\tau)$. Поэтому F отображает множество всех X-2 признаков, участвующих в соотношении, кроме двух последних, взаимно однозначно в множество собственных суффиксов элементарных признаков. Число таких суффиксов не превосходит

$|v_1|$ — 1+ ...+$|v_m|$ —1≤N—m, откуда X≤N—m + 2. Теорема доказана.

Проиллюстрируем переход от (1) к (6) в доказательстве теоремы на примере. Пусть $b_1 \Rightarrow 10$, $b_2 \Rightarrow 001$, $b_3 \Rightarrow 100$, $b_4 \Rightarrow 0101$, $b_5 \Rightarrow 011$, $b_6 \Rightarrow 0010$. Возьмем неразложимое соотношение

$$\frac{b_1 b_1 b_2 b_7 b_1}{b_3 b_1 b_1 b_5 b_6} \in R(V).$$

На рис. 4 выделены суффиксы σ^{τ}_i и показано отображение F.

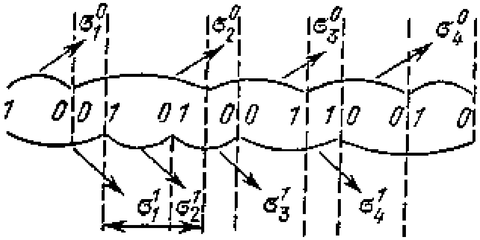


Рис. 4

Находим: (а) $\sigma^0_1 = \sigma^0_2 = 0$, (б) $\sigma^1_2 = \sigma^0_3$ —1 и соответственно более короткие соотношення:

$$\text{(а)}\ \frac{v_1 0}{v_3},\ \frac{v_2 v_3 v_1}{0 v_5 v_6} \to \frac{v_1 v_2 v_3 v_1}{v_3 v_5 v_6} \to \frac{b_1 b_2 b_3 b_1}{b_3 b_5 b_6} \in R(V),$$

$$\text{(б)}\ \frac{v_1 v_4}{v_4 v_1 1},\ \frac{v_3 v_1}{1 v_6} \to \frac{v_1 v_1 v_6}{v_3 v_1 v_3 v_1} \to \frac{b_1 b_4 b_6}{b_3 b_1 b_3 b_1} \in R(V).$$

3. Докажем, что отношение синонимии модели $R(V)$ регулярно. Регулярное представление этого отношения приводит к условным тестам распознавания взаимной однозначности f_V на регулярных языках.

A-источник $\Gamma(V)$ над алфавитом $B_1 = \left\{\frac{\lambda}{b_1}, \ldots, \frac{\lambda}{b_m}, \frac{b_1}{\lambda}, \ldots, \frac{b_m}{\lambda}\right\}$ определим индуктивно. Возьмем в качестве начального состояния $q_0 = \frac{\lambda}{\lambda}$ и определим функцию следующего состояния так:

$$\varphi_\Gamma\left(\frac{\lambda}{b_i}, q_0\right) = \frac{\lambda}{v_i} \qquad (i = \overline{1, m})$$

и, в остальных случаях,

$$\varphi_{\Gamma}(\eta, q) = \begin{cases} \left[\frac{v_i}{\alpha}, \text{ если } i \in u_V(\alpha), \ q = \frac{\lambda}{\alpha}, \ \eta = \frac{b_i}{\lambda}, \right. \\ \left[\frac{\alpha}{v_i}, \text{ если } i \in u_V(\alpha), \ q = \frac{\alpha}{\lambda}, \ \eta = \frac{\lambda}{b_i}, \right. \end{cases}$$

где $u_V(\alpha)$ — множество всех i, для которых v_i находится в отношении префиксности с α.

Поскольку любой суффикс соответствует не более чем двум состояниям, источник $\Gamma(V)$ конечен:

$$|Q(\Gamma)| \leqslant 1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} (|v_i| - 1). \tag{7}$$

Пара μ/ν, где $\mu, \nu \in B^*$, называется соотношением префиксности относительно V (для краткости — (π, V)-соотношением), если $f_V(\mu)$ и $f_V(\nu)$ находятся в отношении префиксности. Пара признаков $\operatorname{def}\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \Rightarrow \left[\frac{f_V(\mu)}{f_V(\nu)}\right.$ называется дефицитом (π, V)-соотношения μ/ν.

Соотношения $R(V)$ являются (π, V)-соотношениями с дефицитом $\frac{\lambda}{\lambda}$.

(π, V)-соотношение μ/ν называется *критическим,* если:

(а) $\mu = \mu' b$, $b \in B$ и $f_V(\mu') < (\pi) f_V(\nu) \leqslant (\pi) f_V(\mu)$,

или

(б) $\nu = \nu' b$, $b \in B$ и $f_V(\nu') \leqslant (\pi) f_V(\mu) < (\pi) f_V(\nu)$.

Пусть $\mathfrak{L}(q)$—язык, порожденный источником $\Gamma(V)$ при $P = P(q_0, q)$.

Теорема 1. $\mathfrak{L}(q)$ *состоит из критических (π, V)-соотношений с дефицитом q.*

Доказательство. Пусть $\varphi_{\Gamma}(\eta_1 \ldots \eta_k, q_0) = q$, где $\eta_i \in B_1$, $i = 1, \ldots, k$. Индукция по k. Если k — 1, то $\varphi_{\Gamma}(\eta_1, q_0)$ определено только для $\eta_1 = \frac{\lambda}{b_j}$, которое является критическим (π, V)-соотношением. Пусть утверждение справедливо для признаков в B^+_1 длины, меньшей k. Мы имееем:

$$\varphi_{\Gamma}(\eta_1 \ldots \eta_{k-1}\eta_k, q_0) \Rightarrow \varphi_{\Gamma}(\eta_k, \varphi_{\Gamma}(\eta_1 \ldots \eta_{k-1}, q_0)),$$

поэтому $\varphi_{\Gamma}(\eta_1 \ldots \eta_{k-1}, q_0) = q'$ определено и по предположению индукции $\eta_1 \ldots \eta_{k-1}$— критическое (π, V)-соотношение с дефицитом q'. Но, коль скоро определено $\varphi_{\Gamma}(\eta_k, q_0)$, $\eta_1 \ldots \eta_{k-1}\eta_k$ — тоже (π, V)-соотношение.

Оно критическое: если $\eta_1 \cdots \eta_{k-1} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{x_1 \cdots x_t}{y_1 \cdots y_{k-1-1}}$, то возможны следующие случаи:

1) $q' = q_0$, тогда $\eta_k = \dfrac{\lambda}{b_j}$ и для $\dfrac{\mu}{\nu b_j}$ — имеет место

$f_V(\nu) = f_V(\mu) < (\pi)\, f_V(\nu b_j)$ — случай (б).

2) $q' = \dfrac{\lambda}{\beta}, \beta \neq \lambda, \eta_k = \dfrac{b_j}{\lambda}, |v_j| < |\beta|, q = \left[\dfrac{v_j}{\beta}\right.$ — тогда

$f_V(y_1 \cdots y_{k-i-2}) < (\pi)\, f_V(x_1 \cdots x_i b_j) < (\pi)\, f_V(y_1 \cdots$
$\cdots y_{k-i-1})$ — случай (б).

3) $q' = \dfrac{\lambda}{\beta}, \beta \neq \lambda, \eta_k = \dfrac{b_j}{\lambda}, |v_j| \geqslant |\beta|, q = \left[\dfrac{v_j}{\beta}\right.$ — тогда

$f_V(x_1 \cdots x_i) < (\pi)\, f_V(y_1 \cdots y_{k-i-1}) \leqslant (\pi)\, f_V(x_1 \cdots x_i b_j)$

— случай (а).

4) $q' = \dfrac{\beta}{\lambda}, \beta \neq \lambda, \eta_k = \dfrac{\lambda}{b_j}, |v_j| < |\beta|, q = \left[\dfrac{\beta}{v_j}\right.$ — тогда

$f_V(x_1 \cdots x_{i-1}) < (\pi)\, f_V(y_1 \cdots y_{k-i-1} b_j) < (\pi)\, f_V(x_1 \cdots x_i)$

— случай (а).

5) $q' = \dfrac{\beta}{\lambda}, \beta \neq \lambda, \eta_k = \dfrac{\lambda}{b_j}, |v_j| \geqslant |\beta|, q = \left[\dfrac{\beta}{v_j}\right.$ — тогда

$f_V(y_1 \cdots y_{k-i-1}) < (\pi)\, f_V(x_1 \cdots x_i) \leqslant (\pi)\, f_V(y_1 \cdots$
$\cdots y_{k-i-1} b_j)$ — случай (б).

Теорема доказана.

Представление критического (π, V)-соотношения μ/ν в виде признака $\eta_1 \ldots \eta_p$ в алфавите B_1 называется стандартным, если все префиксы $\eta_1 \ldots \eta_i$ (($i = 1, \ldots, p$ — 1) являются критическими (π, V)-соотношениями.

Теорема 2. *Если*

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{x_1 \cdots x_k}{y_1 \cdots y_l}$$

— *критическое* (π, *V*)*-соотношение, то оно имеет единственное стандартное представление* $\eta_1\eta_2 \ldots \eta_{k+1}$. *При этом, если*

$\eta_1 \cdots \eta_{i+j} = \dfrac{x_1 \cdots x_i}{y_1 \cdots y_j}$ *и i + j<k + l, то*

$$\eta_{i+j+1} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{y_{j+1}}, & \textit{если } \operatorname{def}(\eta_1 \cdots \eta_{i+j}) \in \dfrac{A^*}{\lambda}, \\ \dfrac{x_{i+1}}{\lambda}, & \textit{если } \operatorname{def}(\eta_1 \cdots \eta_{i+j}) \in \dfrac{\lambda}{A^+}. \end{cases}$$

Пример. $b_1 \Rightarrow 1$, $b_2 \Rightarrow 10$, $b_3 \Rightarrow 01010$, $\dfrac{b_1 b_3 b_1 b_3}{b_2 b_1 b_3 b_2} \in \mathfrak{C}\left(\dfrac{10}{\lambda}\right)$,

$$f_V(b_1b_3b_1) < (\pi)\ f_V\ (b_2b_1b_3b_2) < (\pi)\ f_V(b_1b_3b_1b_3)$$

(случай (а)). Находим стандартное представление:

$$\frac{b_1b_3b_1b_3}{b_2b_1b_3b_2} = \frac{\lambda}{b_2}\frac{b_1}{\lambda}\frac{b_3}{\lambda}\frac{\lambda}{b_1}\frac{\lambda}{b_3}\frac{b_1}{\lambda}\frac{b_3}{\lambda}\frac{\lambda}{b_2}.$$

Доказательство. Так как x_1/λ критическим не является, $\eta_1 = \lambda\ /y_1$ для любого стандартного представления μ/ν, если такое существует. Покажем индукцией по $i + j$, что η_{i+j+1} при $i + j < k + l$ можно и необходимо выбирать именно по указанному правилу. Пусть при $i + j < p$ это так и

$$\eta_1 \cdots \eta_{p-1} = \frac{x_1 \cdots x_i}{y_1 \cdots y_j}$$

— критическое (π, V)-соотношенпе, полученное после $p - 1 < k + l$ шагов, т. е. для него выполнено (а) или (б). Если

$$f_V(x_1 \ldots x_{i-1}) < (\pi) f_V(y_1 \ldots y_j) \leqslant (\pi) f_V(x_1 \ldots x_i), \quad \text{(а)}$$

то

$$\frac{x_1 \cdots x_i x_{i+1}}{y_1 \cdots y_j}$$

— некритическое, а $\eta_p = \eta_{i+j+1} = \frac{\lambda}{y_{j+1}}$, как можно проверить, взять можно. Аналогично, если

$$f_V(y_1 \ldots y_{j-1}) \leqslant (\pi) f_V(x_1 \ldots x_i) < (\pi) f_V(y_1 \ldots y_j), \quad \text{(б)}$$

то можно взять $\eta_p = \frac{x_{i+1}}{\lambda}$, а $\frac{\lambda}{y_{j+1}}$ не годится. Таким образом, утверждение справедливо и при $i + j = p$. Теорема доказана.

Имея в виду результат теоремы 2, критическое (π, V)-соотношение μ/ν можно рассматривать как однозначно определенный признак в алфавите B_1 длины | μ/ν | = | μ | + | ν |.

Теорема 3. *Если* μ/ν — *критическое* (π, V)-*соотношение, то* $\varphi_\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}, q_0\right)$ *определено и равно* def (μ/ν).

Доказательство. Индукция по | μ/ν |. При | μ/ν | = l утверждение следует из определения Г(V). Пусть оно справедливо при | μ/ν | <k и μ/ν = $\eta_1\eta_2 \ldots \eta_k$. Тогда

$$\varphi_\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}, q_0\right) = \varphi_\Gamma(\eta_k, \varphi_\Gamma(\eta_1 \cdots \eta_{k-1}, q_0)).$$

По предположению индукции $\varphi_\Gamma(\eta_1 \ldots \eta_{k-1}, q_0) = q$ определено и равно dof $(\eta_1\eta_2 \ldots \eta_{k-1})$. Поэтому

$$\varphi_\Gamma\left(\frac{\mu}{\nu}, q_0\right) = \varphi_\Gamma(\eta_k, q) = [q f_V(\eta_k) =$$
$$= [\operatorname{def}(\eta_1 \ldots \eta_{k-1}) f_V(\eta_k) = \operatorname{def}(\eta_1 \ldots \eta_k) = \operatorname{def}(\mu/\nu)$$

и при $|\mu/\nu| = k$ утверждение справедливо. Теорема доказана.
Непосредственно из теорем 1 и 3 получается

Теорема 4. $L(q_0) = R(V)$.

Независимо от V источник $\Gamma(V)$ для каждого $i = 1,\ldots, m$ содержит цикл $\left(q_0, \frac{\lambda}{v_i}\right)\left(\frac{\lambda}{v_i}, q_0\right)$, порождающий тождественное соотношение b_i/b_i, эти m циклов называются тривиальными, как и все циклы, составленные только из них. Задача нахождения кратчайшего нетождественпого соотношения в $R(V)$, таким образом, эквивалентна задаче нахождения кратчайшего нетривиального элементарного цикла, проходящего через q_0 в $\Gamma(V)$. Как следствие теоремы 4 и теоремы 1.11.6.5, получается решение проблемы взаимной однозначности f_V на произвольном регулярном языке L.

На рис. 5 изображен $\Gamma(W_{N,\, m,\, N-m})$ для модели из п. 2.

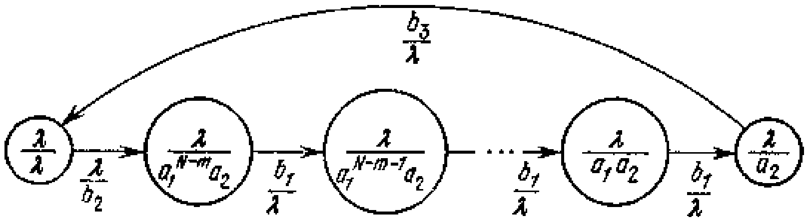


Рис 5.

Тривиальные циклы на рисунке опущены. Имеется единственный нетривиальный элементарный цикл, проходящий через $\frac{\lambda}{\lambda}$. Он порождает соотношение $\frac{b_1^{N-m} b_3}{b_2} \in R(W)$, которое и является кратчайшим из нетождественных в $R(W_{N,\, m,\, N-m})$.

В качестве условного теста распознавания взаимной однозначности f_V можно ограничиться построением сокращенного источника $\Gamma'(V)$. При этом, учитывая симметрию (π, V)-соотношений, использованную в доказательстве теоремы 2.2, и симметрию соотношений относительно расположения правой и левой частей, в построении $\Gamma'(V)$ отождествляются состояния λ/α и α/λ, а из начального состояния выводятся только ребра, соответствующие символам λ/b_i, для которых существует такое f, что $v_i \leq(\pi) v_j$. Кроме того, ребрам $\Gamma'(V)$ вместо символов λ/b_i и b_i/λ из B_1 приписываются элементарные модели v_i ($i=$ 1,…, m) либо предшествующие состояния. Источник $\Gamma'(V)$ порождает значения параметров признаков, допускающие более одного разложения на множители по V, длина кратчайшего из них есть $X'(V)$. Из теоремы 1.2 следует, что $X'(N, 2) \leq N$. Известно, что $X'(N. 3) \sim N^2/8$. Из очевидного неравенства $X'(N, m) \leqslant \frac{1}{2} NX(N, m) \leqslant \frac{1}{2} N^2$ и примера, который рассмотрен ниже, следует, что при $m \geq 3$ имеет место

$$c_1 N^2 \leqslant X'(N, m) \leqslant c_2 N^2. \qquad (8)$$

Пример. Пусть V_k — модель признака, соответствующая схеме

$$b_1 \to a,$$
$$b_2 \to (ab)^{k+1},$$
$$b_3 \to (ba)^{k+2}.$$

Сокращенный источник Γ' (V_k) изображен на рис. 6.

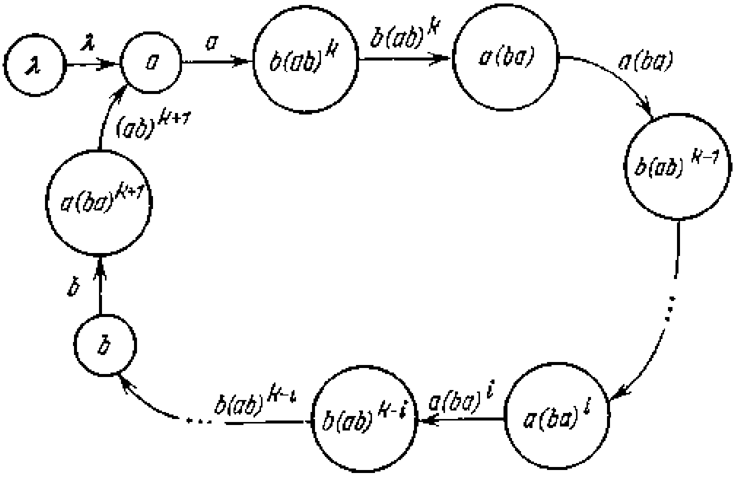


Рис. 6.

В нем имеется единственный нетривиальный элементарный цикл, проходящий через начальное состояние. Он порождает признак

$$\prod_{i=0}^{k}\left(a\,(ba)^{i}\,b\,(ab)^{k-i}\right)(ab)^{k+1}a=$$

$$=\prod_{i=0}^{k}(ab)^{k+1}(ab)^{k+1}a=(ab)^{k^2+3k+2}a.$$

Мы имеем

$$\sum_{i=1}^{3}|v_i|=4k+7,\ X'(V_k)=2k^2+6k+5.$$

Пусть N'— ближайшее снизу к N натуральное число вида $4(k+1)+3$. Тогда

$$X'(N,3)\geqslant X'(N',3)\geqslant X'(V_k)\geqslant\frac{(N-5)^2}{8},$$

откуда следует (8).

4. Регулярное отношение всегда имеет своего рода конечное представление — регулярным источником. Показано, что отношение синонимии модели семантически конечно определено и найден соответствующий синтаксис (как отмечалось в 7.5.1, $R(V)$ может не быть конечно определенным в обычном смысле). Следующая теорема устанавливает другое синтаксическое описание $R(V)$ на основе конечного множества соотношений.

Теорема 1. *Любая* F*-полугруппа конечно определена относительно* s^**, где* s *— правило вывода, основанное на квазитождестве Мальцева.*

Доказательство. Пусть $P=P(q_0,\ q_0)$ — множество всех циклов, порождающих L $(\Gamma(V))$, p_{ij} — произвольный путь из q_i в q_j. Путь p_{ij} назовем *коротким,* если для любого другого пути p_{ij} имеет место
$|p'_{ij}|\geq|p_{ij}|$ (длина пути — число ребер в нем — длина порождаемого им признака в $\Gamma(V)$).

Цикл назовем *коротким,* если он имеет вид $q_0, q_1, \dots\ \dots, q_t, q_0$ и для каждого $j=1,\dots,t$ по крайней мере один из путей $q_0, q_t, \dots, q_j$, или $q_j, q_{j+1},\dots,q_t, q_0$ — короткий. Остальные пути назовем *длинными.* Короткий путь в P не может содержать более одного внутреннего элементарного цикла (т. е. не проходящего через q_0), поэтому множество $\overline{\mathsf{P}}$ всех коротких путей в P конечно. Следовательно, конечно и множество $\overline{\mathsf{L}}$ порожденных им соотношений.

Покажем, что $V^+=\Pi\langle B|s^*(\overline{\mathfrak{L}})\rangle$. Пусть μ/ν — соотношение, порождаемое длинным путем p_{00}. Найдем в p_{00} разделяющую вершину q_j, т. е. такую, что $p_{00}=q_{0j}q_{j0}$ и q_{0j} и q_{j0} — длинные пути. Найдем соответствующие им короткие пути: q'_{0j} и q'_{j0}. Пусть пары $\frac{\mu_1}{\nu_1}$,

$\frac{\mu_2}{\nu_2}$, $\frac{\mu_1'}{\nu_1'}$ и $\frac{\mu_2'}{\nu_2'}$ порождаются путями q_{0j}, q_{j0}, q'_{0j} и q'_{j0} соответственно. Тогда справедлива диаграмма (см. 1.5.4)

$$\frac{\mu_2}{\nu_2} \leftarrow \frac{\mu_1'}{\nu_1'} \rightarrow \frac{\mu_2'}{\nu_2'} \leftarrow \frac{\mu_1}{\nu_1},$$

следовательно,

$$\frac{\mu_1'\mu_2}{\nu_1'\nu_2},\ \frac{\mu_1'\mu_2'}{\nu_1'\nu_2'},\ \frac{\mu_1\mu_2'}{\nu_1\nu_2'} \vdash \frac{\mu_1\mu_2}{\nu_1\nu_2} \equiv \frac{\mu}{\nu}$$

по правилу Мальцева. Здесь посылки, возможно, и не являются определяющими соотношениями из $\overline{L}$, но длина любого из них меньше, чем длина следствия μ/ν. Отсюда следует, что, используя конечное число итераций правила s, можно μ/ν вывести из $\overline{L}$. Теорема доказана.

Пример. $V = \{a \Rightarrow 1,\ b \Rightarrow 10,\ c \Rightarrow 01,\ d \Rightarrow 00\}$. Источник $\Gamma(V)$ изображен на рис. 7.

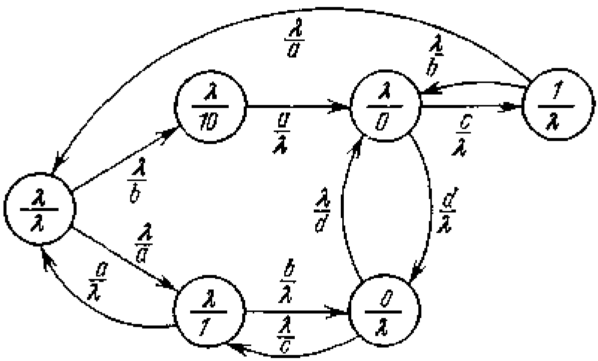


Рис 7.

Находим множество определяющих соотношений $\overline{L}$:

$$\left\{\frac{ba}{ac},\ \frac{bc}{ada},\ \frac{bda}{adc},\ \frac{bcc}{adba}\right\}.$$

Заметим, что V^+ не является конечно определенной в обычном смысле.

5. Следующее необходимое условие взаимной однозначности, которому должна удовлетворять структурная функция модели, обобщает условие (А) в замечании 2.4.4.4.

Пусть

$$F_V(z_1, \ldots, z_q) = \sum_{v \in V} z_1^{|v|_1} \ldots z_q^{|v|_q}$$

— структурный полином модели V.

Теорема 1. *Если f_V взаимно однозначно, то*

$$F_V(z_1, \ldots, z_q) \leqslant 1 \tag{9}$$

при $z_1 + \ldots + z_q = 1$, $z_i > 0$ ($i = 1, \ldots, q$).

Доказательство. По теореме 2.2.5.4 для любого N выполняется

$$F_{(V^N)}(z_1, \ldots, z_q) = (F_V(z_1, \ldots, z_q))^N.$$

$F_{(V^N)}$ можно записать в виде

$$F_{(V^N)}(z_1, \ldots, z_q) = \sum_{\langle i_1, \ldots, i_q \rangle} c_{i_1 \ldots i_q} z_1^{i_1} \ldots z_q^{i_q},$$

где

$$c_{i_1 \ldots i_q} \leqslant \binom{i_1 + \ldots + i_q}{i_1, \ldots, i_q},$$

так как это есть число признаков V^N с i_1 вхождениями a_1, i_2 вхождениями a_2, ..., i_q вхождениями a_q, которые все должны быть различны. Очевидно, что $i_1 + \ldots + i_q \leqslant N \cdot d(V) \left(d(V) \Rightarrow \max_{1 \leqslant r \leqslant m} |v_i| \right)$.

Следовательно,

$$(F_V)^N = F_{V^N} \leqslant \sum_{\substack{\langle i_1, \ldots, i_q \rangle \\ i_1 + \ldots + i_q \leqslant N d(V)}} \binom{i_1 + \ldots + i_q}{i_1, \ldots, i_q} z_1^{i_1} \ldots z_q^{i_q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N d(V)} (z_1 + \ldots + z_q)^j = N \cdot d(V).$$

Отсюда $(F_V(z_1, \ldots, z_q))^N \leqslant N \cdot d(V)$ при любом N, где $d(V)$ не зависит от N. Но экспонента может быть ограничена линейной функцией только при условии (9). Теорема доказана.

Если в (9) положить $z_1 = \ldots = z_q = 1/q$, то как следствие теоремы получаем, что неравенство Мак-Миллана

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-|v_i|} \leqslant 1$$

является необходимым условием взаимной однозначности f_V.

Обратим внимание на то, что (9) является прямым следствием локальных мощностных неравенств.

6. Дадим описание матрицы оптимального двоичного *(q=2)* моделирования *M(B*).*

Теорема 1. *Если* $\sum_{i=1}^{m} 2^{-d_i} < 1$ *и* $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m$, *то*

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-d_i} \leqslant 1 - 2^{-d_m}. \qquad (10)$$

Доказательство. По теореме 5.4.4.4 существует префиксная модель $V = (v_1 \ldots, v_m)$ такая, что $|v_i| = d_i$ для всех $i = 1,\ldots, m$. По теореме 6.4.4.4 ее можно включить в тупиковую V' с $d(V') = d(V)$. Для V' выполняется неравенство Мак-Миллана, откуда следует (10). Теорема доказана.

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{i=1}^{m} 2^{-d_i} = 1 \text{ и } d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m,$$

то $d_{m-1} = d_m$.

Доказательство. Существует тупиковая префиксная модель с длинами слов $<d_1, \ldots, d_m>$. Утверждение непосредственно следует из п. (г) теоремы 2.4.4.4. Теорема доказана.

Теорема 3. *Строками* М *(B*) являются все целочисленные векторы* $<d_1, \ldots, d_m>$, *для которых* $\sum_{i=1}^{m} 2^{-d_i} = 1$, *и только они.*

Доказательство. Неравенство Мак-Миллана является необходимым условием, но если оно строгое, то по теореме 1 спектр не минимален. С другой стороны, если $\sum_{i=1}^{m} 2^{-d_i} = 1$, то спектр $<d_1, \ldots, d_m>$ является единственным минимизирующим существенность (стоимость) для частотной характеристики $\mathscr{P} = \langle 2^{-d_1}, \ldots, 2^{-d_m} \rangle$. $C(\tilde{d}, \mathscr{P}) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} d_i 2^{-d_i} = H(\mathscr{P}) \Rightarrow - \sum_{i=1}^{m} p_i \log_2 p_i$$

есть минимум (доказательство в теореме 1.3.6). Единственность можно доказать индукцией по *m,* используя теоремы 1 и 2. Теорема доказана.

Матрица М(B*) вместе с любой строкой содержит любую ее перестановку. Поэтому ее можно задавать в сокращенной форме SМ(B*) = SM *(m):* из каждого класса перестановочных векторов-строк включаем один, тот, в котором числа расположены в порядке неубывания слева направо. Таким образом,

$$SM(2) = \| 1 \quad 1 \|, \quad SM(3) = \| 1 \quad 2 \quad 2 \|,$$

$$SM(4) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{Vmatrix}, \quad SM(5) = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$$

и т. д.

Рассмотрим алгоритм оптимального моделирования при $m = 5$. Имеем (предполагая $p_1 \geq p_2 \geq p_3 \geq p_4 \geq p_5$)

$$C_1 \Rightarrow C(\tilde{d}_1, \mathscr{P}) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 4p_4 + 4p_5,$$

$$C_2 \Rightarrow C(\tilde{d}_2, \mathscr{P}) = p_1 + 3p_2 + 3p_3 + 3p_4 + 3p_5,$$

$$C_3 \Rightarrow C(\tilde{d}_3, \mathscr{P}) = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 + 3p_4 + 3p_5.$$

Проверки (с учетом $p_ё + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$)

$$C_1 \leqslant C_2 \sim p_4 + p_5 \leqslant p_2,$$

$$C_1 \leqslant C_3 \sim p_3 + p_4 + p_5 \leqslant p_1,$$

$$C_2 \leqslant C_3 \sim p_2 + p_3 \leqslant p_1$$

дают полную информацию о минимизирующем спектре длин. Таким образом, $\mathcal{A}_1$ можно взять в виде условного теста или в виде безусловного (соответственно рис. 8 и таблица 1).

Таблица 1

	$\tilde{d}_1$	$\tilde{d}_2$	$\tilde{d}_3$
$p_4 + p_5 \leqslant p_2$	+	−	
$p_3 + p_4 + p_5 \leqslant p_1$	+		−
$p_2 + p_3 \leqslant p_1$		+	−

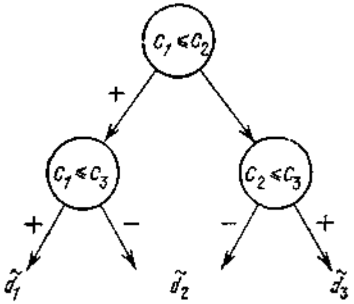


Рис. 8.

Строки в таблице 1 соответствуют проверкам, а столбцам — исходы, минимизирующие спектры. Плюс означает положительный ответ, а минус — отрицательный. Алгоритм $\mathcal{A}_2$ построения префиксной модели $V(\tilde{d})$ по спектру $\tilde{d}$ содержится в доказательстве теоремы 5.4.4.4.

Сложность условного теста с ростом m увеличивается не очень быстро, этот вопрос подробно рассмотрен в § 2 раздела 6. Сложность же безусловного теста растет с m экспоненциально.

Теорема 4. *Число строк матрицы* S*M(m)*:

$$c^m \leqslant |SM(m)| \leqslant 2^m,$$

где c > 1.

Доказательство. Пусть $\langle d_1, \ldots, d_m \rangle \in SM(m)$, причем $d_1 < \ldots < d_i = d_{i+i} = \ldots = d_m$. Сопоставим этому вектору вектор $SM(m-1)$: $\langle d_1, \ldots, d_i - 1, d_{i+2}, \ldots, d_m \rangle$.

Можно проверить, что таким образом множество строк S*M(m)* будет отображено на множество всех строк *SM(m*— 1) и при этом никакая строка *SM(m*— 1) не может иметь более двух прообразов. Поэтому $|SM(m)| \leqslant 2|SM(m-1)|$, откуда $|SM(m)| \leqslant 2^m$.

Для получения нижней оценки установим взаимно однозначное соответствие между SM (*m* — 1) $\bigcup$ S*M(m* — 3) и частью SM (*m*), состоящей из векторов вида <1, d_2, ..., d_m> и <2, 2, 2, d_4, ..., d_m>. Именно, пусть

$$\langle 1, d_2, \ldots, d_m \rangle \leftrightarrow \langle d_2 - 1, \ldots, d_m - 1 \rangle \in SM(m-1),$$

$$\langle 2, 2, 2, d_4, \ldots, d_m \rangle \leftrightarrow \langle d_1 - 2, \ldots, d_m - 2 \rangle \in SM(m-3).$$

Следовательно, $|SM(m)| \geqslant |SM(m-1)| + |SM(m-3)|$ при $m \geq 5$ и $|SM(2)| = |SM(3)| = 1$, $|SM(4)| = 2$.

т. е. $|SM(m)| \geq F(m)$, где *F(m)* определяется рекуррентностью

$$F(m) = F(m-1) + F(m-3)$$

при тех же начальных условиях. Стандартный анализ этой рекуррентности (см. пример (г) в п. 3.3.4) дает $F(m) \sim c^m$, где $c \approx 1{,}46...$ — наибольший по модулю корень уравнения $x^3 - x^2 - 1 = 0$ (его единственный действительный корень). Теорема доказана.

7. Неравенство Мак-Миллана есть частный случай *спектрального неравенства,* которое является необходимым условием взаимной однозначности алфавитного моделирования на произвольном регулярном множестве (так как *B** — один из регулярных языков).

Мы рассматриваем простой регулярный язык L в случае тривиальной внутренней синонимии канала (S_2 — равенство). Предполагаем, что все буквы L — существенные. В таком случае при построении М(L) достаточно рассматривать только спектры, состоящие из положительных целых чисел — нахождение остальных спектров М(L), если L приводим, сводится к решению серии таких задач, возникающих после возможных алфавитных редукций.

Пусть $D(V)$ = $\tilde{d}$, f_V — алфавитное моделирование, взаимно однозначное на $\mathfrak{L}$, и $D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N)$— множество всех понятий из $\mathfrak{L}$, которые моделируютя словами длины N:

$$D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N) \Rightarrow \{\alpha | \alpha \in \mathfrak{L}, \ |f_V(\alpha)| = N\}.$$

Система локальных мощностных неравенств для совокупности $\mathfrak{M} \Rightarrow \{D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N)\}_{N=1}^{\infty}$ имеет вид (3) из п. 2.1. Учитывая, что $|f_V(D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N))| \leqslant q^N$ при любом N = 1, 2, ..., имеем для любого N = 1, 2, ...

$$|D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N)| \leqslant q^N. \tag{11}$$

Пусть $\mathfrak{L}$ = $\mathfrak{L}$ (Г), где Г есть сокращенный *А*-источник с *n* состояниями $(q_0, q_1, ..., q_{n-1})$ и $P = P(q_0, Q')$ (рис. 9).

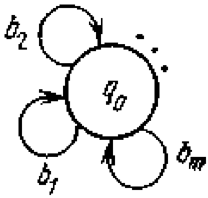


Рис. 9

Очевидно, что $\psi(N) \Rightarrow |D(\mathfrak{L}, \tilde{d}, N)|$ равно числу упорядоченных разбиений $N = d_{i_1} + ... + d_{i_t}$ таких, что $d_{i_k} \in \tilde{d}$ для всех k = 1,..., t и $b_{i_1} \ldots b_{i_t} \in \mathfrak{L}$ (т. е. $\varphi_\Gamma(b_{i_1} \ldots b_{i_t}, q_0) \in Q'$). Разбиения, соответствующие различным именам понятий и/или признаков $\mathfrak{L}$, считаются различными. Обозначим через $\psi_i(N)$ число упорядоченных разбиений $N = d_{i_1} + ... + d_{i_t}$ таких, что $d_{i_k} \in \tilde{d}$ для k = 1,…,t и $\varphi_\Gamma(b_{i_1} \ldots b_{i_t}, q_0) = q_i \ (i = \overline{0, n-1})$. Тогда

$$\psi(N) = \sum_{q_i \in Q'} \psi_i(N).$$

Функции ψ_i, удовлетворяют начальным условиям $\psi_i(N)$ = 0 при N<0 (i = 0, 1,…, n-1), $\psi_i(0)$=0 для i=1,…, n — 1, $\psi_0(0)$=1 (так как $\varphi_\Gamma(\lambda, q_0) = q_0$ и $|\lambda| = 0$) и системе n линейных рекуррентных соотногоеиий вида (11) 3.3.4 из примера (г):

$$\psi_i(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\{j | \varphi_\Gamma(b_j, q_k) = q_i\}} \psi_k(N - d_j)$$

$$(N \geqslant 1, i = \overline{0, n-1}). \tag{12}$$

Стандартным способом (см. пример (г) в 3.3.4) получаем систему уравнений для производящих функций $F_i(x) = \sum_{N=0}^{\infty} \psi_i(N)\, x^N$:

$$\begin{aligned}
&(1-P_{00})F_0 - P_{10}\cdot F_1 - \ldots - P_{n-1,\,0}\cdot F_{n-1} = 1,\\
&-P_{01}\cdot F_0 + (1-P_{11})F_1 - \ldots - P_{n-1,\,1}\cdot F_{n-1} = 0, \qquad 3)\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&-P_{0,\,n-1}\cdot F_0 - P_{1,\,n-1}\cdot F_1 - \ldots + (1-P_{n-1,\,n-1})F_{n-1} = 0,
\end{aligned}$$

где $P_{k,i} = P_{h,i}(x) \Rightarrow \sum_{\{j \mid \varphi_\Gamma(b_j,\, q_k)=q_i\}} x^{d_j}$. Тогда

$$F_i(x) = \frac{\delta_i(x)}{\delta_{\mathfrak{g},\tilde{d}}(x)},$$

где

$$\delta(x) = \delta_{\mathfrak{g},\tilde{d}}(x) = \det\begin{vmatrix} -P_{00} & -P_{10} & \ldots & -P_{n-1,0} \\ -P_{01} & 1-P_{11} & \ldots & -P_{n-1,1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -P_{0,n-1} & -P_{1,n-1} & \ldots & 1-P_{n-1,n-1} \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

а $\delta_i(x)$ есть алгебраическое дополнение элемента 1-го столбца из верхней строки (14). Тогда

$$F(x) \Rightarrow \sum_{N=0}^{\infty} \psi(N)\, x^N = \sum_{q_i \in Q'} F_i(x).\ \delta_{\mathfrak{g},\tilde{d}}(x)$$

называется индикатором языка L относительно $\tilde{d}$.

Рассмотрим следующие два свойства.

$$\psi_i(N) \le q^N \text{ для любого } N=1,2,\ldots\,. \quad (i = 0, 1,\ldots, n-1). \qquad (15)$$

Пусть L_i— язык, порожденный Г с множеством путей $P = P(q_i, Q')$, а L_{ij} — с множеством $P = P(q_i, q_j)$.

Тогда

$$f_V \text{ взаимно однозначно на всех } L_i \text{ и } L_{ij} \text{ для } i, j = 0, 1,\ldots, n-1. \qquad (16)$$

Теорема l. Если f_V *взаимно однозначно на* L, то

$$\delta(1/q) \ge 0. \qquad (17)$$

Доказательство. Учитывая (16), достаточно доказать, что если f_V взаимно однозначно на всех $\mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}_{ij}$ то $\delta(x)$ не имеет нулей внутри круга $|x| < 1/q$ и выполнено (17). Индукция по *n.* При n=1 имеем

$$\delta(x) = 1 - \sum_{i=1}^{m} x^{d_i}, \quad \delta_0(x) \equiv 1 \quad \text{и} \quad F(x) = 1 \Big/ \left(1 - \sum_{i=1}^{m} x^{d_i}\right).$$

Вследствии (15), этот ряд сходится при всех комплексных x внутри круга $|x|<1/q$ (признак сравнения рядов). Следовательно, функция $1 - \sum_{i=1}^{m} x^{d_i}$ не имеет нулей в круге $|x|< 1/q$. Так как $\delta(0) = 1$ и функция непрерывна, получаем утверждение теоремы. Пусть $n > 1$ и для меньших значений n утверждение справедливо. Как и в предыдущем случае, $F_0(x)$ не имеет особых точек в круге $|x|<1/q$. Следовательно, если $\delta(x_0) = 0$ и $|x_0|<1/q$, то x_0 должно быть корнем $\delta_0(x)$ не меньшей кратности, чем у $\delta(x)$. Но $\delta_0(x)$ является индикатором языка $\mathcal{L}'=\mathcal{L}(\Gamma')$, где Γ' получается из Γ удалением q_0 $(P' = P(q_1, Q' \setminus \{q_0\})$ и $\varphi_{\Gamma'}$ есть ограничение φ_Γ на $Q\{q_0\}$). Очевидно, что f_V взаимно однозначно на всех $\mathcal{L}'_i$, $\mathcal{L}'_{ij}$, так как $\mathcal{L}'_i \subseteq \mathcal{L}_i$ и $\mathcal{L}'_{ij} \subseteq \mathcal{L}_{ij}$. Получено противоречие с предположением индукции и теорема доказана.

Неравенство Мак-Миллана есть (17) при $\mathcal{L} = B^*$. Следующий пример показывает, что *и при* $\mathcal{L} \neq B^*$ (17) *может представлять не только необходимое, но и достаточное условие реализуемости спектра* $\tilde{d}$*, моделью из* $\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Пусть $\mathcal{L} = B^*(b^2_0)$ — фрагментно ограниченный язык понятий над алфавитом $B = \{b_0, b_1, ..., b_{m-1}\}$ с единственной запрещенной диграммой $b^2_0 = b_0 b_0$. Язык $\mathcal{L}$ регулярен, он порождается источником с двумя состояниями (рис. 10).

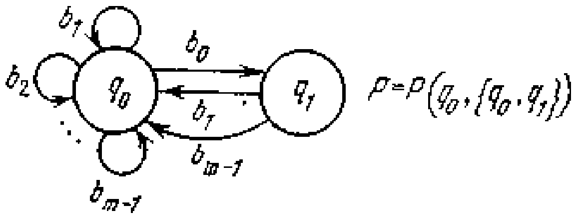


Рис 10.

Для этого языка имеем

$$\delta(1/q) = \det\begin{vmatrix} 1 - \sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} & -q^{-d_0} \\ -\sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - \sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} - q^{-d_0}\sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} =$$

$$= 1 - \left(1 + q^{-d_0}\right)\sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} \geqslant 0,$$

что равносильно $\sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} \leqslant \frac{1}{1+q^{-d_0}} = 1 - \frac{1}{1+q^{d_0}}$,

или $\frac{1}{1+q^{d_0}} + \sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} \leqslant 1$. Можно проверить, что равенсаво в последнем соотношении возможно только при $d_0 = 0$. Так как все буквы L существенные, спектрами моделей из D(L) могут быть лишь наборы положительных целых чисел. Поэтому условие (17) для L можно записать в виде

$$\frac{1}{1+q^{d_0}} + \sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} < 1. \qquad (18)$$

Так как (18) симметрпчпо относительно $d_1, \ldots, d_{m-1}$, не ограничивая общности, будем предполагать, что $d_1 \leq \ldots \leq d_{m-1}$.

Модель $V = \{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$ называется *обобщенной префиксной,* если $\{v_0, \ldots, v_{m-1}\}$ модель, слова которой не являются префиксами v_0, а из $v_i = v_0\alpha$, $i = 1, \ldots, m—1$, следует $\alpha = v^j_0\,\alpha'$, где j нечетно и α' находится в отношении антипрефиксностн с v_0.

Теорема 2. *Пусть* $\tilde{d} = \langle d_0, d_1 \ldots, d_{m-1}\rangle$ — *вектор с положительными целыми компонентами, для которого выполнено* (18). *Тогда существует обобщенная префиксная модель V такая, что D(V) =* $\tilde{d}$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предположить, что

$$\sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{q^{d_i}} > 1,$$

в противном случае спектр $\tilde{d}$ реализуем префиксной моделью. Очевидно, должно выполняться

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{q^{d_i}} < 1,$$

так как f_V должно быть взаимно однозначным на всем $\{B\backslash\{b_0\})^*$. Докажем два вспомогательных утверждения.

Лемма А. *Существует такое n, что* $\sum_{i=0}^{n} q^{-d_i} = 1.$

Согласно сделанным замечаниям можно найти $n < m - 1$ такое, что $\sum_{i=0}^{n} q^{-d_i} \leqslant 1$, а $\sum_{i=0}^{n+1} q^{-d_i} > 1.$ Покажем, что это n — искомое. Если $\sum_{i=0}^{n} q^{-d_i} < 1$, то $d_{n+1} < d_0$, так как $d_{n+1} < \max\{d_i | i = 0,1,\ldots, n)$, а этим максимумом тогда может быть только d_0 (рассуждение аналогично доказательству теоремы 1.6). Но это невозможно: из $\sum_{i=1}^{n+1} q^{-d_i} < 1$ следует, что $\sum_{i=1}^{n+1} q^{-d_i} + q^{-d_{n+1}} \leqslant 1$ и тем более было бы $\sum_{i=1}^{n+1} q^{-d_i} + q^{-d_0} \leqslant 1.$ Противоречие доказывает лемму А.

Лемма Б. $d_{n+1} \geq 2d_0 + 1$.

Действительно, мы имеем

$$1 > \frac{1}{1+q^{d_0}} + \sum_{i=1}^{m-1} q^{-d_i} = \sum_{i=0}^{n} q^{-d_i} + \sum_{i=n+1}^{m-1} q^{-d_i} + \frac{1}{1+q^{d_0}} -$$

$$- \frac{1}{q^{d_0}} = 1 + \sum_{i=n+1}^{m-1} q^{-d_i} - \frac{1}{q^{d_0}\left(1+q^{d_0}\right)} \geqslant$$

$$\geqslant 1 + q^{-d_{n+1}} - \frac{1}{q^{d_0}\left(1+q^{d_0}\right)}.$$

Отсюда $q^{-d_{n+1}} < \frac{1}{q^{d_0}\left(1+q^{d_0}\right)}$, что равносильно $q^{d_{n+1}-d_0} > 1 + q^{d_0}$.

Следовательно, $d_{n+1} - d_0 > \log_q (1 + q^{d_0}) > d_0$ и лемма Б доказана. Докажем теперь теорему индукцией по m. Пусть для $i = \overline{n+1, m-1}$ $d'_i = d_i - 2d_0$. По лемме Б все d'_i положительны. Как в доказательстве леммы Б, находим

$$q^{-2d_0} \cdot \sum_{i=n+1}^{m-1} q^{-d'_i} < \frac{1}{q^{d_0}\left(1+q^{d_0}\right)},$$

откуда $\frac{1}{1+q^{d_0}} + \sum_{i=n+1}^{m-1} q^{-d'_i} < 1.$

Мы доказываем теорему с дополнительным условием, что v_0 может быть выбрано произвольно. По предположению индукции существует обобщенная префиксная модель $V' = \{v_0, v'_{n+1}, \ldots, v'_{m-1}\}$, реализующая спектр $\langle d_0, d'_{n+1}, \ldots, d'_{m-1}\rangle$. Пусть $< v_0, v_1, ..., v_n >$ — тупиковая префиксная модель, реализующая $<d_0, d_1, ..., d_n>$. Можно проверить, что тогда $V = \langle v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0v_0v'_{n+1}, \ldots, v_0v_0v'_{m-1}\rangle$

является обобщенной префиксной моделью, реализующей спектр $\tilde{d}$. Теорема доказана.

Для сравнения с М *(В*)* приведем матрицы оптимального моделирования М ($\mathfrak{L}$) для m = 3, 4 (в сокращенной записи, с учетом перестановочности всех столбцов, кроме первого):

$$SM(\mathfrak{L}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad SM(\mathfrak{L}_4) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

8. Приведем некоторые сведения о том, *насколько эффективно можно использовать те или иные свойства языка понятий для сжатия информации при алфавитном моделировании.* Ниже приводится ряд сведений, проясняющие этот вопрос.

Пусть $\mathfrak{C}_m$— класс всех языков понятий над алфавитом *В,*

$\mathfrak{C}_m^H$ — подкласс всех неприводимых языков понятий над *В*. Непосредственно из определений получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* f_V *взаимно однозначно на L.* Если $v_i = \lambda$, *то* b_i — *фиктивная буква в L. Если* $v_i = v_j$, *то* b_i *и* b_j *различимы контекстно в L. Если* $L \in \mathfrak{C}_m^H$, *то все слова модели V попарно различны и отличны от* λ.

Если допустимы произвольные взаимно однозначные отображения, то легко понять, что чем медленнее растет последовательность

$\{|\mathfrak{L} \cap B^n|\ | N = 1, 2, ...\}$, тем больше может быть сжата в среднем запись понятий в этом языке. Но если мы ограничим сложность отображений и допустим только алфавитное моделирование, то для некоторых языков мощностный фактор может вообще не оказать никакого влияния на сжатие информации.

Теорема 2. *Существует язык понятий* $\mathfrak{L} \subseteq B^*$ *такой, что* $|\mathfrak{L} \cap B^N| \leqslant 2$ *при любом* $N = 1, 2, \ldots$ *и* $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{D}(B^*)$.

Доказательство. Очевидно, что если для любой пары слов $\alpha, \beta \in B^*$ найдется такое $i(\alpha, \beta)$, что $b_1^i\alpha, b_1^i\beta \in \mathfrak{L}$, то $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{D}(B^*)$.

Достаточно, если это свойство выполняется для пар слов одинаковой длины: если $\mu \neq \nu$, но $f_V(\mu) = f_V(\nu)$, то возьмем $\alpha = b_1^{i(\mu\nu,\nu\mu)}\mu\nu$, $\beta = b_1^{i(\mu\nu,\nu\mu)}\nu\mu \in \mathfrak{L}$ и будет $\alpha \neq \beta$, $|\alpha| = |\beta|$ и $f_V(\alpha) = f_V(\beta)$—взаимная однозначность f_V нарушается и на словах из L одинаковой длины. Определим язык L, удовлетворяющий как этому, так и второму условию теоремы.

Упорядочим линейно все пары слов одинаковой длины так, что пары более коротких слов предшествуют парам более длинных, а пары слов одинаковой длины упорядочим лексикографически: $\langle\mu_1, \nu_1\rangle \leqslant \langle\mu_2, \nu_2\rangle \Rightarrow$ «$\mu_1 \leqslant \mu_2$ или $\mu_1 = \mu_2$, но $\nu_1 \leqslant \nu_2$». Положим $\mathfrak{L}_1 \Rightarrow \{b_1, b_2\}$, $\mathfrak{L}_2 \Rightarrow \{b_1b_1, b_1b_3\}$, ...

$$\ldots, \mathfrak{L}_N \Rightarrow \{b_1^{N-|\alpha_i|}\alpha_i, b_1^{N-|\beta_i|}\beta_i\}, \ldots,$$

и пусть

$$\mathfrak{L} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathfrak{L}_N. \ \mathfrak{L}$$

— искомый, и теорема доказана.

Таким образом, для использования мощностных соображений в целях увеличения сжатия информации может потребоваться усложнение класса моделирующих отображений.

Пусть $\mathfrak{M} = \{\mathsf{M}(\mathfrak{L}) \mid \mathfrak{L} \subseteq B^*\}$ — множество всех матриц оптимального моделирования. На W определяется отношение частичного порядка:

М ≤ М' $\Rightarrow$ «для любой частотной характеристики $Þ$ и для любого спектра $\tilde{d}$, из М' найдется спектр $\tilde{d} \in M$ такой, что $C(\tilde{d}, Þ) < C(\tilde{d}_1, Þ)$».

Пусть $\mathfrak{L}_1 \sim \mathfrak{L}_2\ (\varepsilon) \Rightarrow \mathsf{M}(\mathfrak{L}_1) = \mathsf{M}(\mathfrak{L}_2)$. Тогда фактор-множество S_m/ε изоморфно W и ψ_ε: $\mathsf{L} \to$ М(L) есть гомоморфизм S_m на W и S^H_m на некоторое подмножество W^H множества W.

По сравнению с $C(B^*, \alpha)$ — значимостью оптимального моделирования α без использования информации о языке, которому оно принадлежит,— полезная информация о языке понятий L обратно пропорциональна коэффициенту сжатия

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{L}, \alpha) \Rightarrow \frac{C(\mathfrak{L}, \alpha)}{C(B^*, \alpha)}. \tag{19}$$

Очевидно, что для языков, допускающих алфавитную редукцию, коэффициент сжатия может быть как угодно близок к нулю. Максимум полезности дополнительной информации, которая может содержаться в языке понятий за вычетом алфавитной редукции, характеризует величина

$$Z(m) = \inf \{Z(\mathfrak{L}, \alpha) \mid \alpha \in \mathfrak{L}, \mathfrak{L} \in \mathfrak{C}_m^H, q \geq 2\}.$$

Теорема 3. *При m>q множество* W^H *бесконечно, содержит наибольший элемент* $M_{max}=M(B^*)$ *и наименьший элемент* M_{min}. *Мощность* $\varphi_\varepsilon^{-1}(M_{min})$ *равна континууму.*

Доказательство. Утверждение о наибольшем элементе тривиально $SM_{min} = \left| 1^{(q)}, 2^{(q^2)}, \ldots, p^{(q^p)}, \ldots \right|$ (перестановочная по всем столбцам матрица). Действительно, этот спектр мажорируется любым, который реализуется моделью для неприводимого языка (теорема 1). Остается вопрос: непусто ли множество $\varphi_\varepsilon^{-1}(M_{min})$? Рассмотрим континуальный класс языков $\{\mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}} = \mathfrak{L}_1 \cup \mathfrak{L}_2\}$, где $\mathfrak{L}_1 = \{b_1 b_1, b_2 b_2, \ldots, b_m b_m\}$, $\beta = b_1^{k_1} b_2^{k_2} \ldots \ldots b_m^{k_m}$, — произвольное подмножество множества натуральных чисел и $\mathfrak{L}_2 = \{\beta^i b_1^{k_1} \ldots b_{j-1}^{k_{j-1}} b_j^l \mid i \in \mathfrak{N}$, $1 \leq j \leq m$, $l \leq k_j\}$. Если все $k_j > 0$, то все буквы b_j (j=1, 2,…, m) существенные и попарно контекстно неразличимы: $\beta^i b_1^{k_1} \ldots b_{j-1}^{k_{j-1}} \in \mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}}$ и $\beta^i b_1^{k_1} \ldots b_{j-1}^{k_{j-1}} b_j \in \mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}}$, поэтому каждая буква $b_j \in B$ существенная, а если $i \neq j$, то при отождествлении b_i и b_j слова $b_i b_i$ и $b_j b_j$ из L_1 совпадут, т. е. b_i и b_j контекстно неразличимы. Если $\min\{i \mid i \in \mathsf{N}\}$ взять достаточно большим, то очевидно, что для взаимной однозначности f_V необходимо и достаточно, чтобы все элементарные модели V были попарно различными непустыми словами. Следовательно, все $\mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}}$ входят в $\varphi_\varepsilon^{-1}(M_{min})$. Частотная характеристика достаточно длинных слов в понятиях $\mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}}$ есть $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i=1}^m$, где

$$p_i \sim \frac{k_i}{k_1 + \cdots + k_m},$$

т. е. в языках $\mathfrak{L}_{\beta,\mathfrak{N}}$ имеются сообщения с частотной характеристикой, сколь угодно близкой к произвольному распределению вероятностей на B.

Для доказательства бесконечности W^H построим бесконечную возрастающую цепь матриц оптимального моделирования. Пусть $\mathfrak{L}_h \Rightarrow B^*(b_0^h)$ — фрагментно ограниченный язык с единственным запрещенным фрагментом b_0^k, $k \geq 2$. L_k регулярен, он порождается A -источником с k состояниями, изображенным на рис. 11 (где $B' = B \setminus \{b_0\} = \{b_1, \ldots, b_{m-1}\}$).

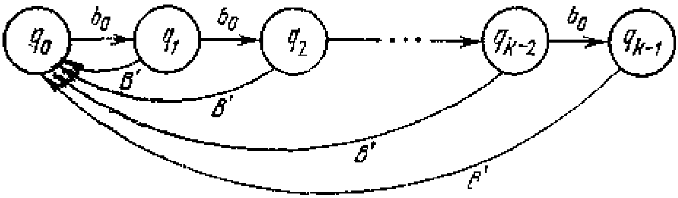


Рис. 11.

Необходимое условие взаимной однозначности (17) для L_k приводится к виду

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{q^{d_i}} + \frac{q^{(k-1)d_0} - 1}{q^{kd_0} - 1} < 1$$

и является одновременно достаточным для реализуемости спектра $<d_0, d_1, ..., d_{m-1}>$ моделью из $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}_k)$ (доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 2.7 для случая $k = 2$). Можно убедиться, что $\mathrm{M}(\mathfrak{L}_2) < \mathrm{M}(\mathfrak{L}_3) < \cdots < \mathrm{M}(\mathfrak{L}_k) < \cdots$ Например, при $m = 3$, $q = 2$ имеем

$$S\mathrm{M}(\mathfrak{L}_k) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & k+1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$\mathrm{M}(\mathfrak{L}_k) \leqslant \mathrm{M}(\mathfrak{L}_{k+1})$ следует из того, что $\mathfrak{L}_k \subset \mathfrak{L}_{k+1}$. В действительности неравенство везде строгое: для распределения частот $\mathscr{P}_N = \langle 1/2,\ 1/2 - 1/Nk,\ \ 1/Nk \rangle$ при $N \geq 3$ имеем

$$C(\mathfrak{L}_k, \mathscr{P}_N) = 1 + 1/N < C(\mathfrak{L}_{k+1}, \mathscr{P}_N) = 1 + 1/N + 1/Nk.$$

Теорема доказана.

В доказательствах следующих теорем нам потребуется вычислять суммы вида $\varphi_N(x) \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} i \cdot x^i$. Если положить

$$\psi_N(x) \Rightarrow \sum_{i=0}^{N} x^i = \frac{x^{N+1} - 1}{x - 1},$$

то, очевидно,

$$\varphi_N(x) = x \cdot \psi'_N(x) = \frac{(N+1)(x-1)\, x^{N+1} - x^{N+2} + x}{(x-1)^2}. \qquad (20)$$

Теорема 4. $\mathrm{Z}(m) = \frac{1}{2}\left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right).$

Доказательство. Пусть $\langle d_1^0, \ldots, d_m^0\rangle = \langle 1^{(q)}, 2^{(q^2)}, 3^{(q^3)}, \ldots\rangle$ — спектр $M_{\min}$ и $d_1^0 \leqslant d_2^0 \leqslant \cdots \leqslant d_m^0$ (т.е. $d_i^0 = [\log_q(1+(q-1)\,i)]$). Положим $d_i' \Rightarrow 2d_i^0$ $(i=\overline{1,m})$.Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} q^{-d_i'} = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-2d_i^0} = \sum_{i=1}^{\infty} q^i \cdot q^{-2i} = \frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\cdots\right) = \frac{1}{q-1} \leqslant 1,$$

так как $q \geq 2$. Следовательно, спектр $< d'_1, ..., d'_m>$ реализуем моделью из $\mathfrak{D}(B^*)$.

Для произвольной частотной характеристики $\mathscr{P} = < p_1, ..., p_m>$, где $p_1 \geq ... \geq p_m$, произвольного языка $\mathfrak{L} \in \mathfrak{C}_m^{\mathrm{H}}$ и языка $\mathfrak{L}_0 \in \varphi_\varepsilon^{-1}(M_{\min})$, допускающих эту частотную характеристику, имеем

$$C(B^*, \mathscr{P}) - 2C(\mathfrak{L}, \mathscr{P}) \leqslant$$

$$\leqslant C(B^*, \mathscr{P}) - 2C(\mathfrak{L}_0, \mathscr{P}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i(d_i - 2d_i^0)$$

для любого спектра $< d_1, ..., d_m>$, реализуемого моделью из $\mathfrak{D}(B^*)$. Согласно предыдущему, здесь можно взять $d_i = d_i'$ $(i=\overline{1,m})$, тогда $C(B^*, \mathscr{P}) - 2C(\mathfrak{L}, \mathscr{P}) \leq 0$, т. е.

$$Z(\mathfrak{L}, \mathscr{P}) = \frac{C(\mathfrak{L}, \mathscr{P})}{C(B^*, \mathscr{P})} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Остается показать, что при растущем m коэффициент сжатия может быть сколь угодно близок к 1/2. Рассмотрим двоичное моделирование для частотной характеристики $\mathscr{P}'_m = \{p_{1/a}, \ldots, p_{m/a}\}$, где $a =$

$$= \frac{4^k}{4^k - 2^k + l},\ m = 2 + 2^2 + \cdots + 2^k + l,\ 0 \leqslant l < 2^{k+1},$$

$\{p_1, \ldots, p_m\} = \left\langle \frac{1^{(2)}}{4}, \ldots, \frac{1^{(2^{k-1})}}{4^{k-1}}, \frac{1^{(2^k+l)}}{4^k} \right\rangle$. Как следует из примера (в) 5.2.6 и теоремы 3.4.2.6,

$$C(B^*, \mathscr{P}'_m) = \left(4 - \frac{2k+5}{2^k} + \frac{(2k+1)\,l}{4^k}\right) \cdot a.$$

Пусть $\mathfrak{L}_0$ — один из языков $\varphi_\varepsilon^{-1}(M_{\min})$, в которых имеются понятия с частотной характеристикой $\mathscr{P}'_m$. Находим

$$C(\mathfrak{L}_0, \mathscr{P}'_m) =$$

$$= a\left(2\cdot 1\cdot\frac{1}{4} + 2^2\cdot 2\cdot\frac{1}{4^2} + \cdots + 2^k\cdot k\cdot\frac{1}{4^k} + l(k+1)\frac{1}{4^k}\right) =$$

$$= a\left(1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \frac{l(k+1)}{4^k}\right) =$$

$$= a\left(2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{l(k+1)}{4^k}\right).$$

В результате получаем

$$\mathrm{Z}(m) \leqslant \mathrm{Z}\left(\mathfrak{L}_0, \mathscr{P}'_m\right) = \frac{C\left(\mathfrak{L}_0, \mathscr{P}'_m\right)}{C\left(B^*, \mathscr{P}'_m\right)} = \frac{2 - \frac{k+2}{2^k} + \frac{l(k+1)}{4^k}}{4 - \frac{2k+5}{2^k} + \frac{(2k+1)l}{4^k}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2^k + l}{2^{2k+2} - (2k+5)\,2^k + (2k+1)\,l}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{24}{m}\right),$$

так как

$$\frac{(2^k + l)(2^{k+1} - 2 + l)}{2^{2k+2} - (2k+5)\,2^k + (2k+1)\,l} < \frac{3\cdot 2^k \cdot 2 \cdot 2^{k+1}}{2^{2k+2} - (2k+5)2^k} =$$

$$= \frac{12\cdot 2^k}{2^{k+2} - (2k+5)} \leqslant 24.$$

Теорема доказана.

Зависимость коэффициента сжатия от частотной характеристики подтверждает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $\mathscr{P}_m = \{1/m, \ldots, 1/m\}$ *и для последовательности языков* $L_m \in \mathfrak{C}^{H}_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *определены все* $Z(L_m, \mathscr{P}_m)$*. Тогда* $\lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{Z}(L_m, \mathscr{P}_m) = 1$.

Доказательство. Согласно (2) 5.2.6, $C(B^*, \mathscr{P}_m) =\leq 1 + \log_q m$. Пусть $\mathfrak{L}$ — язык из $\varphi_\varepsilon^{-1}(\mathrm{M_{min}})$, допускающий сообщения с частотной характеристикой $\mathscr{P}_m$. Представим m в виде $m = q + q^2 + \ldots + q^k + s$, где $0 \leq s \leq q^{k+1}$. Тогда $k > \log_q m - 2$ и

$$C(\mathfrak{L}, \mathscr{P}_m) = \frac{1}{m}\left(q + 2q^2 + \cdots + kq^k + s(k+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\frac{kq^{k+2} - (k+1)\,q^{k+1} + q}{(q-1)^2} + s(k+1)\right) =$$

$$= k - \frac{1}{q-1} + \frac{(k+s)\,q}{m\,(q-1)} \geqslant k - 1 > \log_q m - 3.$$

Отсюда следует, что

$$1 \geqslant \mathrm{Z}(\mathfrak{L}, \mathscr{P}_m) = \frac{C(\mathfrak{L}, \mathscr{P}_m)}{C(B^*, \mathscr{P}_m)} \geqslant \frac{\log_q m - 3}{\log_q m + 1} \to 1 \text{ при } m \to \infty.$$

Теорема доказана.

6.3. Условия полноты моделей и построение матриц оптимального моделирования понятий и признаков предметов

1. Задача построения матрицы оптимального моделирования понятий и признаков предметов для языка $\mathfrak{L}$ разрешима, если разрешима проблема принадлежности моделей понятий и признаков предметов (в дальнейшем – моделей) V к $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ и существует оценка $k(\mathfrak{L})$-значности логики, в которой может быть описана М($\mathfrak{L}$) (т. е. максимальной длины модельных слов в моделях из $\mathfrak{D}^0(\mathfrak{L})$). С решением второго вопроса связана проблема полноты моделей относительно данного языка — $\mathfrak{L}$-полноты (под полнотой далее понимается полнота относительно B^*, т. е. *B^*-полнота).*

Пусть имеется частичная модель $V = V_{B'} = < \ldots v_{i_1} \ldots v_{i_2} \ . \ . \ . v_{i_k} \ldots >$ в q-ичном алфавите *A,* задающий алфавитное моделирование на подмножестве $B' = \{b_{i_1}, \ \ldots \ \ldots, b_{i_k}\} \subset B = \{b_1, \ \ldots, \ b_m\}$, и пусть $\mathfrak{L}'$— ограничение языка $\mathfrak{L}$ на B', т. е. $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} \cap (B')^*$. Без ограничения общности в дальнейшем предполагается, что $B' = \{b_1, \ldots, b_k\}$ и $V_{B'} = <v_1, \ldots, v_k, \ldots>$.

Модель $V_{B'}$ называется $\mathfrak{L}$-полной, если $V_{B'} \in \mathfrak{G}(\mathfrak{L}')$, но не существует q-ичной модели $<v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_m>$, включающей $V_{B'}$ и содержащейся в $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$.

Если частичная модель содержится в некоторой двоичной моделе из $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$, то она называется $\mathfrak{L}$-пополнимой.

В этом параграфе решается проблема полноты для связных регулярных языков понятий, как следствие получим оценку $k(\mathfrak{L})$ для языков этого класса, затем рассматриваются некоторые вопросы полноты относительно B^*.

2. Пусть $\mathfrak{L}$ — неприводимый регулярный язык, порожденный *A*-источником Г с *n* состояниями, связным. Тогда $\mathfrak{L}'$ также порождается *A*-источником Г' с не более чем *n* состояниями — частью Г, но не обязательно связной. Пусть алфавитное моделирование f_V взаимно однозначно на $\mathfrak{L}'$. Очевидно, что $f_V(\mathfrak{L}')$— регулярное множество (как любой образ регулярного множества при алфавитном моделировании).

Теорема 1. *Если* $f_V(\mathfrak{L}')$ *— фрагментов покрытие A*, то существует такое слово* α, *что для любого* β *найдется* γ *такое, что* $\alpha\beta\gamma \in f_V(\mathfrak{L}')$, *причем* $|\alpha| \leqslant 2^{mnd(V)}$.

Доказательство. Существование такого α следует из теоремы 2.9.6.4. Установим оценку. Пусть α — одно из кратчайших слов, удовлетворяющих условию. Каждому префиксу *α′* слова α сопоставим множество пар $T(\alpha') = \{\langle\beta,\ j\rangle\}$, допускаемых условиями

$$\alpha'\beta = v_{i_1} \ldots v_{i_s}, \quad |\beta| < |v_{i_s}|,$$

$$\varphi_\Gamma(b_{i_1} \ldots b_{i_s}, q_0) = q_j, \quad b_{i_1} \ldots b_{i_s} \in \pi(\mathfrak{L}').$$

Каждая пара <β, *j*> есть элемент прямого произведения множества суффиксов слов *V* на множество номеров состояний Г, поэтому их число не превосходит *m·d(V)·n.* Значит, число различных *T(*α'*)* не превосходит $2^{nmd(V)}$. Но если $\alpha = \alpha'\alpha''\alpha'''$ и $T(\alpha') = T(\alpha'\alpha'')$, то $\alpha'\alpha'''x \in f_V(\mathfrak{L}')$ в том и только том случав, если α*x* ∈ f_V (L '), т. е. α'α''' тоже удовлетворяет условию. Последнее невозможно, так как |α'α'''| < | α |. Следовательно, все *T(*α'*)* различны для различных префиксов α′ слова α, откуда вытекает оценка. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если* f_V(L ') *имеет нетривиальное фрагментно ограниченное приближение, то существует слово z такое, что*

$$f_V(\mathfrak{L}') \subseteq A^*(z) \quad u \quad |z| \leqslant 2^{2mnd(V)}.$$

Доказательство. Для слова α пусть *T(*α*)* определено, как в доказательстве предыдущей теоремы. По условию для любого α существует *F(*α*)* такое, что $T(\alpha F(\alpha)) = \varnothing$ (в противном случае f_V(L ') было бы фрагментным покрытием *A*).* Пусть ρ_T—отношение эквивалентности на A^*: $(\alpha,\ \beta) \in \rho_T \Rightarrow T(\alpha) = T(\beta)$ и *s* — число классов этой эквивалентности. Ясно, что $s \leqslant 2^{mnd(V)}$. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s\}$— множество представителей всех классов A^*/ρ_T, по одному от каждого класса. Положим

$$h(\alpha_1) \Rightarrow F(\alpha_1), h(\alpha_2) \Rightarrow F(\alpha_2 h(\alpha_1)), \ldots$$

$$\ldots, h(\alpha_s) \Rightarrow F(\alpha_s h(\alpha_1) h(\alpha_2) \ldots h(\alpha_{s-1})) \quad \text{и}\ z \Rightarrow h(\alpha_1)h(\alpha_2)\ldots h(\alpha_s).$$

Так как для любого α слово *F(*α*)* можно выбрать с условием |*F(*α*)*|≤ *s*-1, можно считать $|z| \leqslant \leqslant s(s-1) < s^2 \leqslant 2^{2mnd(V)}$. Убедимся, что

*T(*αzβ) = ø при любых α*,* β. Пусть (α, α*k)* ∈ ρ_T. Тогда

$$T(\alpha z\beta) = T(\alpha_k z\beta) =$$

$$= T(\alpha_k h(\alpha_1)\ldots h(\alpha_{k-1}) F(\alpha_k h(\alpha_1)\ldots h(\alpha_{k-1})) h(\alpha_{k+1})\ldots$$

$$\ldots h(\alpha_s)\beta) = T(uF(u)\gamma) = \varnothing,$$

так как *T(uF(u))* = ø*,* а из *T(x)* = ø следует *T(xy)=*ø для любого *y.* Теорема доказана.

Теорема 3. f_V(L ') *является фрагментно ограниченным языком в том и только том случае, если*

$$\delta_{\mathfrak{L}',\widetilde{a}}(1/q) > 0.$$

Доказательство. Здесь используются обозначения из п. 7.2. Если f_V ($\mathfrak{L}$ ') фрагментно ограниченный,

$$\frac{|D(\mathfrak{L}', \tilde{d}, N)|}{q^N}$$

стремится к нулю экспоненциально. Следовательно, ряд

$$F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} |D(\mathfrak{L}', \tilde{d}, N)| \cdot x^N$$

сходится при $x = 1/q$, поэтому $\delta_{\mathfrak{L}', \tilde{d}}(1/q) \neq 0$. В силу теоремы 1.7.2 заключаем, что $\delta_{\mathfrak{L}', \tilde{d}}(1/q) > 0$.

Пусть теперь f_V($\mathfrak{L}$ ') — фрагментное покрытие *A**, т. е. для некоторого слова α при любом *N* выполняется $\alpha A^N \subseteq \pi(f_V(\mathfrak{L}'))$. В таком случае по некоторой бесконечной последовательности {*N*}

$$\frac{|D(\mathfrak{L}', \tilde{d}, N)|}{q^N} \to c,$$

где *c* > 0 — некоторая константа. Но тогда ряд *F(x)* расходится при *x* = 1/*q*, т. е. $\delta_{\mathfrak{L}', \tilde{d}}(1/q) = 0$. Теорема доказана.

Доопределим f_V на $\mathfrak{L}$, полагая $f_V(b_{k+i}) = b_{k+i}$ *(i* =1, 2,…, *m* — *k).* Модель *V* называется *безнадежной,* если доопределение f_V не взаимно однозначно на $\mathfrak{L}$. Очевидна $\mathfrak{L}$-полнота любой безнадежной модели. Распознавание безнадежности *V* выполняется в два этапа. Построим граф на множестве пар q_i/q_j, состояний Г: из q_i/q_j, проводим ориентированное ребро в q_k/q_j, если найдутся α, β∈ *(B')** такие, что $\varphi_\Gamma(\alpha, q_i) = q_k$, $\varphi_\Gamma(\beta, q_j) = q_l$ и $f_V(\alpha) = f_V(\beta)$, либо найдется $b_s \in B \setminus B'$ такая, что $\varphi_\Gamma(b_s, b_i) = q_k$, $\varphi_\Gamma(b_s, b_j) = q_l$. Для этого построения воспользуемся алгоритмами регулярного представления отношений типа 3.2. Второе: *V* в том и только том случае безнадежна, если в графе есть путь из q_i/q_j в некоторую вершину q_i/q_j, где q_i, q_j — заключительные в Г.

Теорема. *Пусть V* не безнадежна *и* $\mathfrak{L}$ '' —*ограничение множества всех фрагментов слов* $\mathfrak{L}$ *на (B')*. Для* $\mathfrak{L}$*-полноты модели V необходимо и достаточно, чтобы* f_V($\mathfrak{L}$ '') *было фрагментным покрытием A*.*

Доказательство. Необходимость. Модель *V* имеет свойство $\mathfrak{L}$-полноты. Если предположить, что для f_V($\mathfrak{L}$ '') имеется запрещенный фрагмент, то придем к противоречию, построив $\mathfrak{L}$-пополнепие модели *V*.

Пусть a и $\bar{a}$ — различные буквы A. Возьмем произвольные слова $\beta_1, \ldots, \beta_{m-k}$ длины $]\log_q(m - k)[$ в алфавите A, все различные. Положим $v_{k+i} \Rightarrow a^{l+1}\bar{a}\beta_i z\bar{a}a\bar{a}$ ($i = 1, 2, \ldots, m - k$), где l — максимальное число последовательных вхождений буквы a в слова β_j,z (i=l,… m — k). Тогда $\langle v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_m\rangle \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L})$. Действительно, слова $v_{k+1}, \ldots, v_m$ образуют модель без перекрытий (т. е. никакой из префиксов этих слов не совпадает ни с каким из суффиксов этих слов) и все они содержат запрещенный для слов f_V(L ") фрагмент z. Следовательно, эти слова не могут участвовать ни в каких неразложимых соотношениях между словами языка L, поэтому $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L})$. Учитывая, что $l \le |z| +]\log_q(m - k)[$, замечаем, что длина присоединяемых слов не превосходит

$$l + 1 +]\log_q(m - k)[+ |z| + 3 \leqslant$$

$$\leqslant 2(]\log_q m[+ 2 + 2^{2mnd(V)}) \leqslant 4^{1+mnd(V)}.$$

Достаточность. Пусть f_V(L ") — фрагментное покрытие A^*. Докажем L -полноту V. Предположим, что нашлось L -пополнение $v_{k+1}, \ldots, v_m$ до V_1. Получим противоречие, найдя пару слов $\mu, \nu \in \mathfrak{L}$ такую, что $\mu \neq \nu$, но $f_{V_1}(\mu) = f_{V_1}(\nu)$.

Возьмем α по теореме 1. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\mathfrak{L}'_{0i} \subset \mathfrak{L}''$, $\alpha = f_{V_1}(\beta)$, $|\alpha| > d(V)$, $\beta \in \pi(\mathfrak{L})$, $\varphi_\Gamma(\beta, q_0) = q_0$ и в β входит по крайней мере одна буква из $B \backslash B'$ (в противном случае к α можно было бы дописать подходящий суффикс — здесь существенно предположение о связности Г). Выберем γ и $\bar{\gamma}$ так, чтобы $\varphi_\Gamma(\gamma, q_0) \in Q'$ и $\bar{\gamma} = f_V(\gamma)$.

Рассмотрим бесконечную периодическую последовательность αα... α ... Она раскладывается в произведение слов из V, так как начинается с α, т. е. может быть представлена в виде $v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_l} \ldots$ ($b_{i_1} b_{i_2} \ldots b_{i_l} \ldots$ — поименная запись этого разложения). Пусть $\{\langle\delta_j, p_j\rangle\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность пар суффиксов слов V и номеров состояний Г, определяемых из условий

$$v_{i_1} \ldots v_{i_{l-1}} < (\pi)\, \alpha^j \delta_j = v_{i_1} \ldots v_{i_l},\ \varphi_\Gamma(b_{i_1} \ldots b_{i_l}, q_0) = q_{p_j}$$

(возможно и $\delta_j = \lambda$).

Бесконечная последовательность $\{\langle\delta_j, p_j\rangle\}$ составлена из конечного числа элементов, следовательно, в ней имеются повторения. Пусть $\langle\delta_{j+l}, p_{j+l}\rangle = \langle\delta_j, p_j\rangle$ ($j, l >$ > 0, $q_{p_j} = q_{p_{j+l}} = q_k$). Тогда $\alpha^{j+l}\delta_{j+l} = v_{i_1} \ldots v_{i_{t+s}} \times$

$\times\ (q_h) = \alpha^l \alpha^j \delta_j = \alpha^l (q_0) v_{i_1} \ldots v_{i_l} (q_h)$, так как $\alpha^j \delta_j =$ $= (q_0) v_{i_1} \ldots v_{i_l} (q_k)$ в V. Отсюда следует, что $b_{i_1} \ldots$ $\ldots b_{i_{l+s}} \varepsilon\gamma = \beta^l b_{i_1} \ldots b_{i_l} \varepsilon\gamma$, где ε таково, что $\varphi_\Gamma(\varepsilon, q_k) = q_0$, — нетождественное соотношение между словами L (так как $l > 0$, число вхождений букв из $B \backslash B'$ в левой части меньше, чем в правой). Теорема доказана. Резюме теорем 3 и 4 составляет следующая

Теорема 5. *Пусть* $V \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}')$*— частичная не безнадежная модель. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *V полна относительно* L ;

2) $\delta_{\mathfrak{L}', \tilde{d}}(1/q) = 0$;

3) $f_V(L')$ — *фрагментное покрытие A*.*

Замечание. Если не предполагать связности, то из условий 2), 3) уже не следует L-полнота, как показывает следующий пример. Рассмотрим источник Г, изображенный на рис. 12, и двоичное моделирование языка L (Г).

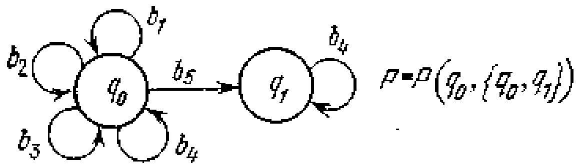


Рис. 12.

Пусть $B' = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$. Частичная модель V=<10, 00, 01, 11, ->$\in D(L')$. Как легко проверить, она удовлетворяет условиям 2) и 3), по может быть L-пополнен:

$$V_1 = \langle 10,\ 00,\ 01,\ 11,\ 0\rangle \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L}).$$

Покажем теперь, что проблема оптимального моделирования для связных регулярных языков понятий разрешима, указав оценку сверху $k(L)$.

Пусть $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle \in \mathfrak{D}^0(\mathfrak{L})$ и $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m$. Покажем, что существует функция $k_i(m, n, q)$ такая, что

$$d_i \leqslant k_i(m, n, q). \tag{1}$$

Из этого будет следовать, что $k(\mathfrak{L}) \leqslant k_m(m, n, q)$. Определим $k_i(m, n, q)$ рекурсивной схемой $k_i(m, n, q)=[\log_q m]$ и $k_{i+1}(m, n, q) = 4^{1+k_i(m,n,q)}$ для i=1, 2,…,m—1. Неравенство (1) очевидно при $i = 1$. Предположим его справедливым для $i \leq j$—1, и пусть $i = j$. Если $d_j > k_j(m, n, q)$, а следовательно, и для $l>j]$ $d_l > k_j(m, n, q)$, то частичную модель $\langle v_1, \ldots\ldots, v_{j-1}, - \ldots -\rangle$ можно было бы пополнить, как в доказательстве необходимости теоремы 4, словами, более короткими, чем у пополнения V. Но это невозможно, так как по предположению $V \in \mathfrak{D}^0(\mathfrak{L})$. Следовательно, (1) выполняется при любом $i = 1, 2, \ldots, m$ и имеет место

Теорема 6. $k(\mathcal{L}) \leq k_m(m, n, q)$.

Оценка теоремы 6 имеет скорее качественное, принципиальное значение, чем количественное. В действительности алгоритм построения матрицы оптимального моделирования М($\mathcal{L}$) целесообразно осуществлять, основываясь на идее упорядоченного перебора спектров, удовлетворяющих спектральным условиям, начиная с минимальных и постепенно увеличивая значения в разрядах. Обычно результат достигается гораздо быстрее. Мы уже встречали примеры, когда спектральное неравенство являло собой необходимое и достаточное условие реализуемости спектра моделью из $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ — в таких случаях перебор спектров ограничивается перебором минимальных решений спектрального неравенства. Рассмотрим еще один пример такого рода.

Источник Г изображен па рис. 13.

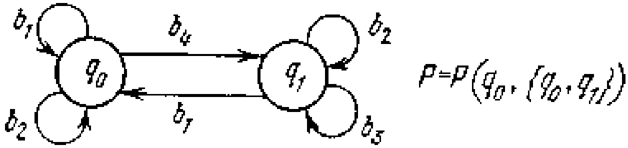


Рис. 13

$\mathcal{L} = \mathcal{L}$(Г) конечно перечислим, следовательно, все буквы $\mathcal{L}$ существенные и элементами М($\mathcal{L}$) могут быть только положительные целые числа. Заметим еще, что буквы b_3 и b_4 контекстно различимы, значит, они могут моделироваться одной элементарной моделью (но, как показывает этот пример, пользоваться этим выгодно не всегда!).

$A = \{0, 1\}$.

Спектральное неравенство

$$\delta_{\mathfrak{L},\tilde{d}}\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 1 - 2^{-d_1} - 2^{-d_2} & -2^{-d_4} \\ -2^{-d_1} & 1 - 2^{-d_2} - 2^{-d_3} \end{vmatrix} \geqslant 0$$

после небольших преобразований можно представить в виде

$$\frac{\left(1 - 2^{-d_1} - 2^{-d_2}\right)}{2^{-d_4}} \cdot \frac{\left(1 - 2^{-d_2} - 2^{-d_3}\right)}{2^{-d_1}} \geqslant 1. \qquad (2)$$

Все минимальные решения (2) оказываются реализуемыми моделями из $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ и в совокупности как раз составляют матрицу М($\mathcal{L}$):

$$\mathsf{M}(\mathfrak{L}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{D}^0(\mathfrak{L}) = \begin{vmatrix} 1, & 10, & 0, & 100 \\ 1, & 00, & 01, & 01 \\ 1, & 100, & 0, & 01 \\ 1, & 001, & 000, & 0 \\ 1, & 1001, & 00, & 0 \\ 00, & 1, & 01, & 01 \\ 01, & 00, & 1, & 1 \\ 001, & 1, & 10, & 0 \end{vmatrix}.$$

Замечаем, что контекстной различимостью букв b_3 и b_4 мы здесь можем воспользоваться (и пользуемся) лишь в трех из восьми случаях.

3. О полноте моделей относительно свободной полугруппы приведем без доказательства две теоремы. Первая является обобщением соответствующего результата для префиксных моделей (надо заметить, что префиксная модель полна в том и только том случае, когда она тупиковая).

Пусть $F_V(z_0, z_1, \ldots, z_{q-1})$— структурный полином модели V.

Теорема 1. *Пусть f_V взаимно однозначно на B^*. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *V полна;*

2) *$f_V(B^*)$ — фрагментное покрытие A^*;*

3) $F_V(z_0, z_1, \ldots, z_{q-2}, 1 - z_0 - z_1 - \ldots - z_{q-2}) = 1$;

4) $F_V(z_0, z_1, \ldots, z_{q-1}) = 0$ *для некоторых* $z_0, z_1, \ldots, z_{q-1}$, *удовлетворяющих* $z_i > 0$ ($i = 0, 1, \ldots, q-1$) и

$$\sum_{i=0}^{q-1} z_i = 1.$$

Ее можно получить как следствие теорем из п. 2. Приемы доказательства утверждений о структурных полиномах вполне аналогичны приемам, применявшимся при изучении спектральных неравенств. Как отмечалось в замечании 2.4.4.4, эта теорема не может быть обобщена на бесконечные модели. Выполнение любых двух из следующих трех условий влечет выполнение третьего: 2), 4) и $V \in \mathsf{D}(B^*)$.

Следствие. *Пусть V_1 — префиксный код и $V_3 = V_1 \cup V_1 \cdot V_2$ — полная модель. Тогда*

$$V_2 = \varnothing. \tag{3}$$

Доказательство. По теореме 1

$$1 \equiv F_{V_3}(z_0, \ldots, z_{q-2}, 1 - z_0 - \ldots - z_{q-2}) = \\ = F_{V_1}(1 + F_{V_2}).$$

Но F_{V_1} и F_{V_2} — полиномы с целыми коэффициентами, поэтому являются константами. *А* так как $0 < F_{V_1} \leq 1$, имеем $F_{V_1} \equiv 1$, откуда $F_{V_2} \equiv 0$, т. е. $V_2 = \varnothing$ и утверждение доказано.

Другой факт относится к вопросу о пополнении моделей. Всякую префиксную модель можно включить в конечную полную (тупиковую) префиксную модель в том же алфавите и без увеличения максимума длин элементарных моделей (теорема 6.4.4.4). Можно было бы ожидать, что нечто подобное имеет место и для произвольных свободных моделей. На самом деле при таком расширении класса моделей картина существенно меняется.

Теорема 2. *Свободная модель* $V = \{1, 01, 100, 00000\}$ *не может быть включена в конечную полную двоичную свободную модель.*

6.4. Вопросы демоделирования и конструктивная взаимная однозначность алфавитного моделирования

1. С вопросом о восстановлении определений понятия по ее модели — демоделировании — связаны две задачи. Первая — это задача *локализации элементарных моделей,* т. е. нахождения подходящего скобочного разложения модели понятий в произведение слов модели. Вторая — задача собственно *демоделирования,* т. е. перехода от скобочного представления разложения к его поименной записи. В случае демоделирования на регулярные языки каждая из этих задач решается на машине Тьюринга за линейное по отношению к длине модели понятия время (поэтому можно ограничиться специальным классом машин Тьюринга). Вопрос о возможности демоделирования с помощью конечного автомата (в общем случае — *автомата Глебского*, т. е. асинхронного) для алфавитного моделирования уже не всегда решается положительно. Требованием возможности конечно автоматного демоделирования класс допустимых моделей сужается (условие *конечности задержки демоделирования).* Новое сужение класса возникает, если накладываются дополнительные ограничения на сложность демоделирования, измеряемую задержкой. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением всех вопросов в случае языка всех понятий B^* и новых эффектов, возникающих при моделировании нетривиальных языков.

2. Пусть алфавитное моделирование f_V взаимно однозначно на всем множестве B^*. Рассмотрим пару двойственных операций *разметки*

слов в A^*. Каждая из этих операций может выполняться конечным автоматом, а их суперпозиция приводит к локализации всех элементарных моделей, если входное слово является неотъемлниой частью модели понятия (по предположению существует единственный способ локализации).

Пусть $\alpha = x_1 \ldots x_n,\ x_i \in A,\ i = \overline{1,\ n}.$ Если префикс $x_1 \ldots x_i$ слова α разложим по V, то букву x_i пометим стрелкой (ориентированной слева направо), а префикс $x_1 \ldots \vec{x}_i$ назовем *помеченным.* Если в слове α все разложимые префиксы помечены, то скажем, что слово α *размечено слева.* Размеченное слева слово обозначим через $\vec{\alpha}$.

Алгоритм левой разметки слова аналогичен рекуррентной процедуре перечисления всех разложений слова в произведение слов V: см. (6) в п. 2.5.4. Он состоит из |α| шагов.

1-й ш а г. Помечаем все префиксы α, входящие в V. В результате префикс x_1 будет размечен (хотя и не обязательно помечен).

После i—1 шагов префикс $x_1 \ldots x_{i-1}$ размечен. Если $i \le n$, то

i-й ш а г. Префикс $x_1 \ldots x_i$ помечаем в том и только том случае, если для некоторого $j<i$ префикс $x_1 \ldots \vec{x}_j$ помечен и $x_{j+i} \ldots x_i \in V$. Это выясняется после проверки принадлежности к V суффиксов слова $x_1 \ldots x_i$ ДЛИНЫ не более

$$d(V) = \max_{1 \le i \le m} |v_i|.$$

Правая разметка слова и выполняющий ее алгоритм определяются двойственно: вместо всех слов рассматриваем их обращения (т. е. записываем или читаем их справа налево), для пометок используем ←, т. е. стрелку, ориентированную справа налево. Левые пометки символов у входного слова при выполнении правой разметки во внимание не принимаются. В результате правой разметки знаком ← будут помечены все первые буквы суффиксов α, разложимых по коду V.

Размеченное справа слово обозначим через $\overleftarrow{\alpha}$.

Пусть $A_л$ — алгоритм левой разметки, $A_п$ — алгоритм правой разметки слов. Тогда очевидно, что суперпозиция этих алгоритмов (скажем, соответствующих машин Тьюринга) $A = A_л \cdot A_п$ решает проблему локализации информации в следующем смысле. В слове $\overleftrightarrow{\alpha}$ всюду, где встречаются фрагменты $\vec{x}_i \overleftarrow{x}_{i+1},\ \vec{x}_i \overleftrightarrow{x}_{i+1},\ \overleftrightarrow{x}_i \overleftarrow{x}_{i+1},\ \overleftrightarrow{x}_i \overleftrightarrow{x}_{i+1}$ ставим разделительный знак между x_i и x_{i+1} (т. о. границы элементарных моделей понятий находятся в точности между буквами, помеченными навстречу друг другу).

Например, если V = {1, 01, 100, 0100, 0000} и α =10001, то $\vec{\alpha} = \vec{1}0\vec{0}0\vec{1}$, $\overleftrightarrow{\alpha} = \overleftrightarrow{1}0\overleftrightarrow{0}\vec{0}\overleftarrow{\overleftrightarrow{1}}$; и α = /100/01/ и в поименной записи — b_3b_2.
Резюмируем изложенное в этом пункте в двух теоремах.

Теорема 1. *Если* f_V *взаимно однозначно, то существует машина Тьюринга, локализующая информацию в моделях понятий за время, не превосходящее* 3 · |α|.

Теорема 2. *Если* f_V *взаимно однозначно, то существует машина Тьюринга с выходной лентой, демоделирующая понятия* α $\in V^*$ *за время, не превосходящее* 3 • |α|.

3. Очевидно, что если V — префиксная модель понятия, то левая разметка уже локализует информацию в понятиях (разделительные знаки должны стоять в концах всех помеченных префиксов). Следовательно, в качестве демоделирующей машины Тьюринга можно взять конечный автомат Глебского. Если требуется взаимная однозначность на всем множестве B^*, то оптимальное моделирование всегда может быть реализовано с помощью префиксной модели. Однако методика с незначительным и изменениями применима при моделировании произвольных регулярных языков, а в этом случае среди оптимальных моделей могут быть такие, которые не эквивалентны спектрально никаким моделям, имеющим свойство конечности задержки демоделирования.

Легко понять, что задержка с локализацией информации при чтении модели понятия слева направо связана с (π, V)-соотношениями (см. п. 3.2), которые порождают неопределенность для локализации первой элементарной модели в понятиях. Если (π, V)-соотношения могут быть сколь угодно длинным, то конечный автомат не может справиться с демоделированием во всех случаях, так как во внутренней памяти может накапливать только ограниченное количество информации. Действительно, если μ/ν есть (π, V)-соотношение, несократимое слева, причем | μ | < | ν |, и на вход схемы демоделирования поступило слово α=f_V (μ), то информации для локализации первой элементарной модели еще не достаточно: первая буква понятия могла быть как первой буквой μ, так и первой буквой ν, а эти буквы по предположению различны. Но если и следующий момент на вход схемы демоделирования не поступает сигнала, т. е. определение понятия закончено, следовательно, было μ, то автомат должен, не возвращаясь к тексту понятия, напечатать слово μ на выходе. Но для всякого конечного автомата существует константа c такая, что длина слов, которые автомат может напечатать, не получая входной информации, не превосходит c (способность конечных автоматов производить автономно бесконечные периодические последовательности здесь никакого значения не имеет). Поэтому длина (π, V)-соотношений должна быть ограничена. Поскольку множество всех критических (π, V)-соотношений конечно перечислимо и порождается источником $\Gamma(V)$ из п. 3.2. эффективный критерий существования конечного демоделирующего автомата состоит в том, что источник $\Gamma(V)$ не содержит нетривиальных циклов (и, следовательно, порождает конечное множество несократимых слева (π, V)-соотношений).

Резюмируем сказанное точной формулировкой.

Задержкой демоделирования называется величина

$$T_{(V)} \Rightarrow \left\{ |\mu| \,|\, f_V(\mu) < (\pi)\, f_V(\nu),\ \frac{\mu}{\nu} \text{ несократимо слева} \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть f_V взаимно однозначно на B^*. Любое из следующих двух условий является необходимым и достаточным для существования конечного демоделирующего автомата:*

1) $T_{(V)} < \infty$;

2) *граф источника T(V) не содержит нетривиальных циклов.*

Доказательство достаточности, которое состоит в построении демоделирующего конечного автомата, стандартно и здесь опускается.

4. Чтобы обеспечивать оптимальное алфавитное моделирование, взаимно однозначное на B^*, достаточно пользоваться только префиксными моделями. В двоичном случае эти модели должны быть полными, в недвоичном — близкими к полным, как показано в § 2 раздела 6. Во многих случаях существуют спектрально им эквивалентные модели, непрефиксные и не обращения префиксных, т. е. есть целесообразность использования префиксных моделей — простое демоделирование — но не необходимость.

В случае двоичного моделирования необходимость префиксности модели для оптимального моделирования появляется уже, как только мы наложим требование конструктивной взаимной однозначности, т. е. конечности задержки демоделирования для f_V. Мы докажем здесь теорему для произвольного основания $q \geq 2$, из которой это вытекает.

Как известно, класс взаимно однозначных отображений замкнут относительно суперпозиции, класс конечно автоматных отображений тоже замкнут относительно этой операции, алфавитное моделирование — конечно автоматное отображение веса 1 и алфавитные отображения образуют замкнутый подкласс. Следовательно, и класс алфавитных отображений, имеющих свойство конечности задержки демоделирования, замкнут относительно суперпозиции (пересечение замкнутых классов). Заметим, что префиксные модели тоже образуют замкнутый класс (модель, определяющая суперпозицию отображений, будем называть также суперпозицией моделей) — для префиксных моделей $T_{(V)}=0$. Частным случаем суперпозиции является операция возведения в степень $V^N = \binom{B}{V} B^N$. Поведение задержки демоделирования при возведении в степень, как легко проверить, выражается следующим соотношением:

$$T_{(V^N)} = \left]\frac{T_{(V)}}{N}\right[. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть V — полная свободная модель. Тогда f_V имеет свойство конечности задержки демоделирования в том и только том случае, если она префиксная.*

Доказательство. Достаточность тривиальна, докажем необходимость. Предположим противное: $0<T_{(V)}<\infty$ и V—полная свободная модель. Пусть $N = T_{(V)}$ и $W = V^N$. Ввиду (1), $T_{(W)} = 1$ и W— полная модель, так как для структурных полиномов имеем $F_w=(F_V)^W=1$. Пусть $W_0 \Rightarrow W \backslash W \cdot A^+ = \{w_1, \ldots, w_k\}$. W_0 — префиксная модель, и W можно представить в виде

$$W = W_0 \cup w_1 W_1 \cup \ldots \cup w_k \cdot W_k,$$

где по крайней мере одно из множеств W_j непусто. Положпм $\overline{W}_j \Rightarrow W_0 \cup W_0 \cdot W_j$ для $j = 1, 2, \ldots, k$. Покажем, что $T_{\overline{W}_j} \leqslant 1$.

Действительно, если $T_{\overline{W}_j} > 1$, то существует $(\pi, \overline{W}_j)$-соотношенне $w_i \alpha w_s \beta < (\pi) w_j \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in W_j$, $w_i\alpha$, $w_s\beta$, $w_i\gamma \in \overline{W}_j$, либо $(\pi, \overline{W}_j)$-соотношенне $\frac{(w_i\alpha)(w_s\beta)}{(w_1\gamma)(w_t\delta)}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in W_j$. Но тогда в первом случае существует (π, W)-соотношенне $\frac{(w_j\alpha)(w_s)}{(w_j\gamma)}$, во втором $\frac{(w_j\alpha)(w_q)}{(w_j\gamma)(w_t)}$, оба несократимы слева, т. е. $1=T_{(W)}\geq 2$ — противоречие.

Пусть $\sum_{i=0}^{q-1} z_i = 1$, $z_i > 0$ и $F_{W_{j_0}} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant k} F_{W_j}(z_0, \ldots, z_{q-1})$. Так как какое-то $W_i \neq \varnothing$, имеем $F_{W_{j_0}} > 0$. Но

$$1 \geqslant F_{\overline{W}_{j_0}}(z_0, \ldots, z_{q-1}) =$$

$$= F_{W_0}(1 + F_{W_0}) \geqslant F_{W_0} + \sum_{s=1}^{k} F_{W_s} \cdot F_{W_s} = F_W = 1,$$

откуда $F_{\overline{W}_{j_0}}(z_0, \ldots, z_{q-1}) = 1$, т. е. $\overline{W}_{j_0}$ — полная свободная модель. Это невозможно в силу следствия теоремы 1 из п. 3.3. Противоречие, и теорема доказана.

5. Пусть $\mathfrak{D}_N(\mathfrak{L})$— множество моделей из $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ таких, что для них задержка демоделирования не превосходит *N*. Модели из $\mathfrak{D}_0(\mathfrak{L})$ называются локально префиксными.

Пусть $\mathfrak{D}_N^0(\mathfrak{L})$— подмножество тех моделей из $\mathfrak{D}_N(\mathfrak{L})$, которые могут быть оптимальными хотя бы для одной частотной характеристики из допустимых в $\mathfrak{L}$. Пусть $\mathsf{M}_N(\mathfrak{L})$ — матрица спектров моделей из $\mathfrak{D}_N^0(\mathfrak{L})$.

Очевидно, что

$$\mathsf{M}_0(\mathfrak{L}) \geqslant \mathsf{M}_1(\mathfrak{L}) \geqslant \ldots \geqslant \mathsf{M}_i(\mathfrak{L}) \geqslant \ldots \qquad (2)$$

Пусть $\mathfrak{D}_*(\mathfrak{L})$— множество всех моделей *V* из $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$, для которых $T_{(V)}<\infty$, т. е. $\mathfrak{D}_*(\mathfrak{L}) = \bigcup\limits_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{D}_N(\mathfrak{L})$, и $\mathfrak{D}_*^0(\mathfrak{L})$ — подмножество тех моделей из $\mathfrak{D}_*(\mathfrak{L})$, которые могут быть оптимальными хотя бы для одной частотной характеристики, допустимой в L, а $\mathsf{M}_*(\mathfrak{L})$— матрица спектров моделей из $\mathfrak{D}_*^0(\mathfrak{L})$, т. е. матрица оптимального моделирования со свойством конечности задержки демоделирования. Через $k_*(L)$ обозначается наименьшая значность логики, в которой может быть описана матрица $M^*(L)$ т.е. $k_*(\mathfrak{L}) = \max\{d_i, \in \mathsf{M}_*(\mathfrak{L})\}$. Используя теоремы 1.11.6.4 п 1.3, можно оценить сверху $T_{(V)}$ для произвольной модели $V \in \mathfrak{D}_*^0(\mathfrak{L})$, если L — регулярный язык, порожденный *A*-источником с *n* состояниями.

Теорема 1. *Если* $V \in \mathfrak{D}_*^0(\mathfrak{L})$ *и* $D(V) = \langle d_1, \ldots\ldots, d_m\rangle$, *то*

$$T_{(V)} \leqslant n^2\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\right).$$

Действительно, источник $\Gamma_1 = \Gamma_{(V,L)}$, порождающий конечно перечислимое множество — ограничение всех (π, *V*)-соотношений на язык L,— можно построить индуктивно на основе упомянутых теорем. Возьмем начальное состояние $\left|\frac{\lambda}{\lambda}\right|\frac{q_0}{q_0}\right|$ и определим функцию следующего состояния:

$$\varphi_{\Gamma_1}\left(\frac{\lambda}{b_i}, \left|\frac{\lambda}{\lambda}\right|\frac{q_0}{q_0}\right|\right) = \left|\frac{\lambda}{v_i}\right|\frac{q_0}{\varphi_\Gamma(b_i, q_0)}\right|,$$

если $\varphi_\Gamma(b_i, q_0)$ определено,

$$\varphi_{\Gamma_1}\left(\frac{\lambda}{b_i}, \left|\frac{\alpha}{\lambda}\right|\frac{q_j}{q_k}\right|\right) = \left|\left[\frac{\alpha}{v_i}\right|\frac{q_j}{\varphi_\Gamma(b_i, q_k)}\right| \ (\alpha \neq \lambda),$$

$$\varphi_{\Gamma_1}\left(\frac{b_i}{\lambda}, \left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|\frac{q_k}{q_j}\right|\right) = \left|\left[\frac{v_i}{\alpha}\right|\frac{\varphi_\Gamma(b_i, q_k)}{q_j}\right|,$$

если $\varphi_\Gamma(b_i, q_k)$ определено, а α и v_i находятся в отношении префиксности, и не определена в остальных случаях. По предположению Γ_1 не содержит нетривиальных циклов. Заметим еще, что в Γ_1 не существует путей между состояниями вида

$$\left|\frac{\alpha}{\lambda}\right|\frac{q_1}{q_j}\right|$$

и

$$\left|\frac{\lambda}{\alpha}\right|\frac{q_j}{q_1}\right|$$

при $\alpha\neq\lambda$: если есть путь из первого во второе, порождающий μ/ν, то должен найтись и путь из второго в первое, порождающий ν/μ, а вместе эти пути составляют цикл, отличный от тривиального. Отсюда следует, что число состояний в пути Γ_1 не может превосходить $n^2\left(\sum_{i=1}^{m} d_i\right)$ и справедлива оценка теоремы.

Теорема 2. *Если* $\mathfrak{L}$ *— регулярный связный язык, порожденный А-источником с n состояниями, то* $k_*(\mathfrak{L}) \leqslant k_m(m, n, q)$, *где* $k_m(m, n, q)$ *— функция, определенная в п.* 2.3.

Для доказательства достаточно заметить, что при построении пополнения в доказательстве теоремы 4.2.3 свойство конечности задержки демоделирования сохраняется, если оно было у пополняемой модели. Прямым следствием теорем 1 и 2 является

Теорема 3. *Если* $\mathfrak{L}$ *— регулярный связный язык, порожденный А-источником с n состояниями, то существует такое* $t = t(\mathfrak{L})$, *что* $t \leqslant n^2 \cdot m \cdot k_*(\mathfrak{L})$ *и*

$$\mathsf{M}_t(\mathfrak{L}) = \mathsf{M}_{t+1}(\mathfrak{L}) = \ldots = \mathsf{M}_*(\mathfrak{L}).$$

Действительно, если $V \in \mathfrak{D}_*^q(\mathfrak{L})$, то ввиду того, что

$$T_{(V} \leqslant n^2 \cdot m \cdot \sum_{i=1}^{m} d_i \leqslant n^2 \cdot m \cdot k_*(\mathfrak{L}),$$

Имеем

$$V \in \mathfrak{D}^q_{n^2 m k_*(\mathfrak{L})}.$$

Как показывает следующий пример, возможно, что

$$\mathsf{M}_*(\mathfrak{L}) \neq \mathsf{M}(\mathfrak{L}) \text{ (т. е. } \mathsf{M}_*(\mathfrak{L}) > \mathsf{M}(\mathfrak{L})).$$

Пример. Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ (Г), источник Г изображен па рис. 14, q = 2.

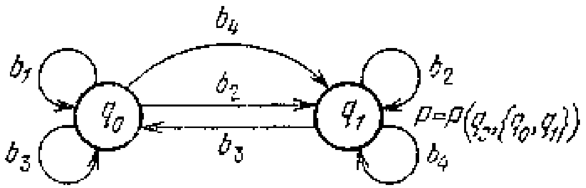


Рис 14.

Все буквы алфавита $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ существенные и попарно контекстно неразличимы относительно $\mathfrak{L}$, поэтому все элементы матриц оптимального моделирования положительны. Спектральное неравенство

$$\begin{vmatrix} 1-2^{-p_1}-2^{-d_3} & -2^{-d_3} \\ -2^{-d_2}-2^{-d_4} & 1-2^{-d_2}-2^{-d_4} \end{vmatrix} =$$
$$= \left(1-2^{-d_1}-2^{-d_3}\right)\left(1-2^{-d_2}-2^{-d_4}\right)-2^{-d_3}\left(2^{-d_2}+\right.$$
$$\left.+2^{-d_4}\right) \geqslant 0$$

приводится к виду $2^{d_3}\left(1-2^{-d_1}\right)\left(1-2^{-d_2}-2^{-d_4}\right) \geqslant 1,$ оно симметрично относительно d_2 и d_4. Находим минимальные решения этого неравенства в положительных целых и убеждаемся, что они составляют матрицу оптимального моделирования $M(\mathfrak{L})$, найдя модели из $\mathfrak{D}(\mathfrak{L})$, реализующие все спектры (в пятом столбце матрицы $\mathfrak{D}^0(\mathfrak{L})$ указаны задержки демоделирования для соответствующих двоичных моделей):

$$SM(\mathfrak{L}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad -3$$

$$\mathfrak{D}^0(\mathfrak{L}) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 011, & 01/1 \\ 1, & 00, & 01, & 10/\infty \\ 00, & 1, & 01, & 100/1 \\ 01, & 00, & 1, & 0001/1 \\ 01, & 001, & 1, & 000/0 \\ 001, & 01, & 1, & 000/0 \end{vmatrix}$$

(матрицы симметричны относительно второго и четвертого столбцов).

Непосредственная проверка показывает, что в D(L) только две модели (с точностью до переобозначения 1 $\rightleftarrows$ 0) реализуют спектр <1, 2, 2, 2> — включенный выше в D^0(L) и еще <1, 10, 01, 00>. Оба они имеют бесконечную задержку демоделирования (источник $\Gamma_{(V, L)}$), перечисляющий (π, V)-соотпошенпя для V = <1, 10, 01, 00>, изображен на рис. 15, где сокращены некоторые цепочки и опущены тривиальные циклы).

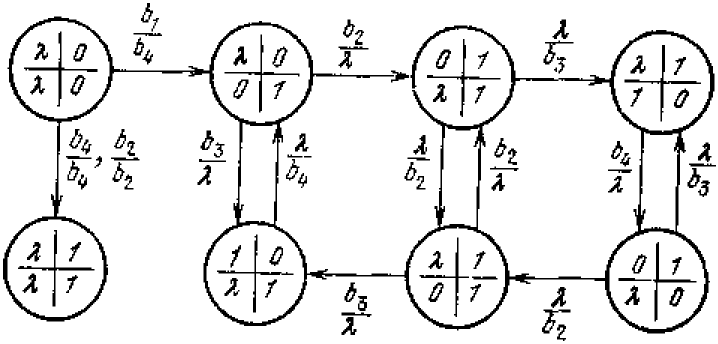


Рис 15.

Спектр <1, 2, 2, 2> имеет существенное значение в матрице оптимального моделирования: например, для частотной характеристики $\mathscr{P} = \langle 1/4,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/6\rangle$ значение $C(\mathfrak{L}, \mathscr{P}) = 1{,}75$ достигается только на этом спектре. Следовательно, $\mathrm{M}_*(\mathfrak{L}) \neq \mathrm{M}(\mathfrak{L})$.

Очевидно, что $\mathrm{M}_0(\mathfrak{L}) = \mathrm{M}(B^*)$, так как локальная префиксность в состоянии q_0 является требованием префиксности всей модели. Определим M_1 (L). Так как в M(L) все спектры, кроме <1, 2, 2, 2>, реализуются моделями с $T_{(V)} \leq 1$, остается найти минимальные спектры, покрывающие этот и реализуемые моделями из $\mathfrak{D}_1^0(\mathfrak{L})$. Добавляя по единице в каждом разряде, получаем <2, 2, 2, 2> — реализуемый префиксной моделью <1, 2, 3, 2>, мажорирующий <1, 1, 3, 2> из M (L) и <1, 3, 2, 2> и симметричный ему <1, 2, 2, 3>. Последние имеют реализации с задержкой $T_{(V)}$ = 1: <1, 001, 00, 01> и <1, 01, 00, 001> соответственно. Следовательно,

$$SM_1(\mathfrak{L}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

и мы имеем $M_0 > M_1 = M_* > M$.

Остановимся на задаче построения *матрицы оптимального локально префиксного моделирования* $M_0(\mathfrak{L})$.

Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Gamma)$ и Г — сокращенный *А*-источник с *n* состояниями над алфавитом $B = \{b_1, \ldots, b_m\}, \mathrm{E} = \{\mathrm{E}_i = \mathrm{E}(q_i) | i = \overline{1, n}\}$ — множество *алфавитных окрестностей* состояний Γ: $\mathrm{E}(q_i) = \{b_j | \varphi_\Gamma(b_j, q_i) \neq \varnothing\}$. Тогда $V = \{v_1, \ldots, v_m\} \in \mathfrak{D}_0(\mathfrak{L})$ в том и только том случае, если все $V_i := \{v_j | j \in \mathrm{E}_i\}$ $(i = \overline{1, n})$ суть *q*-ичные префиксные модели.

Если $n = 2$, то построение $M_0(\mathfrak{L})$ возможно уже на основе локальных мощностных условий. Очевидно необходимое условие

$$\sum_{i \in \mathrm{E}_0} q^{-d_i} \leqslant 1, \quad \sum_{i \in \mathrm{E}_1} q^{-d_i} \leqslant 1. \tag{3}$$

Теорема 4. *Если выполнены условия* (3), *то спектр* $\tilde{d}$ *реализуем локально префиксной относительно* $\mathfrak{L}$ *моделью.*

В доказательстве используем следующий *q*-ичный аналог (как по формулировке, так и по доказательству) теорем 1, 2 из § 6 п. 2.

Лемм а. *Если* $0 < d_1 \leqslant \ldots \leqslant d_j < d_{j+1} = \ldots = d_m = d$,

$h = \min\{q, m - j\}$ *и* $\sum_{i=1}^{m} q^{-d_i} \leqslant 1$, *то* $\sum_{i=1}^{m-h} q^{-d_i} + q^{-(d-1)} \leqslant 1$.

Доказательство теоремы 4. Индукция по $N = \sum_{i=1}^{m} d_i$. Если $N < q$, то утверждение очевидно. Пусть $N > q$ и

$$\mathrm{E}_0 = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_{r+s}\},$$

$$\mathrm{E}_1 = \{b_1, \ldots, b_r, b_{r+s+1}, \ldots, b_{r+s+t}\},\ d = \max_{1 \leqslant i \leqslant r+s+t} \{d_i\}.$$

Если $d=1$, т. е. $d_1 = \ldots = d_n = 1$, то из (3) имеем $(r + s) \leq q$ и $(r + t) \leq q$, следовательно, всем буквам E_0 и всем буквам E, можно сопоставить различные символы *q*-ичного алфавита. Если же $d > 1$, то пусть E'_0 — множество всех букв из E_0, а E'_1 — из E_1 которым сопоставлено *d*. Выберем $p = \min\{q, |\mathrm{E}'_0 \cap \mathrm{E}'_1|\}$ букв из $\mathrm{E}'_0 \cap \mathrm{E}'_1$, и если $p<q$, то

пусть E''_0 получается из $E'_0 \cap E'_1$ добавлением некоторых букв E'_0 так, чтобы $|E''_0| = h_0 = \min\{q, |E'_0|\}$, а E'_1 получается из $E'_0 \cap E'_1$ добавлением некоторых букв E'_1 так, чтобы $|E''_1| = h_1 = —\min\{q, |E'_1|\}$. Отождествим все буквы $E''_0 \cup E''_1$ и новой букве b сопоставим число d — 1. По лемме для нового языка выполняются локальные условия (3), но N для него меньше. Значит, по предположению индукции для этого языка с сопоставленным ему спектром существует локально префиксная модель.

Пусть v — элементарная модель, сопоставленная букве b. Тогда выберем множества букв $A_0, A_1 \subseteq A$ так, что $|A_0|=h_0$, $|A_1|=h_1$, $|A_{01}|=p$, где $A_{01}= A_0 \cap A_1$, и сопоставим буквам $E'_0 \cap E'_1$ слова $v \cdot A_{01}$, а буквам $E''_0 \setminus E''_1$ и $E''_1 \setminus E''_0$ соответственно слова $v \cdot (A_0 \setminus A_{01})$ и $v \cdot (A_1 \setminus A_{01})$. Полученная модель является локально префиксной для L и реализует спектр $\tilde{d}$. Теорема доказана.

Замечание. При $n \geq 3$ аналог теоремы 2 не имеет места. Достаточно рассмотреть двоичное моделирование языка $L = L(\Gamma)$ (источник Г изображен на рис. 16).

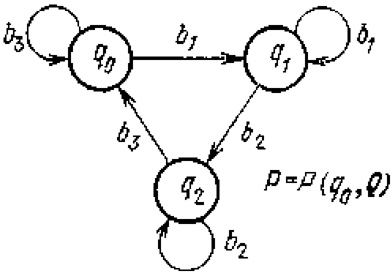


Рис. 16.

Локальным мощностным условиям, а также и спектральному неравенству

$$\begin{vmatrix} 1-2^{-d_3} & 0 & -2^{-d_3} \\ -2^{-d_1} & 1-2^{-d_1} & 0 \\ 0 & -2^{-d_2} & 1-2^{-d_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(1-2^{-d_1}\right)\left(1-2^{-d_2}\right)\left(1-2^{-d_3}\right) - 2^{-d_1-d_2-d_3} \geq 0$$

удовлетворяет спектр <1, 1, 1>, который нереализуем моделью из $D(L)$ (так как все буквы существенные и попарно контекстно неразличимы).

В общем случае задача построения $M_0(\mathfrak{L})$ относится к числу универсальных переборных проблем. Если алгоритм $\mathcal{A}$ вычисляет $M_0(\mathfrak{L})$, то, в частности, он решает вопрос о принадлежности спектра <1, 1, ..., 1> к $M_0(\mathfrak{L})$. Но спектр $\langle 1, 1, \ldots, 1\rangle \in M_0(\mathfrak{L})$ в том и только том случае, если возможно локально префиксное моделирование букв *B* буквами *q*-ичного алфавита. Последнее условие равносильно тому, что гиперграф *G* = <*B*, E> допускает правильную раскраску в *q* цветов (т. е. раскраску вершин, при которой в любом ребре E_i все вершины имеют различные цвета). Оно равносильно также тому, что граф

$$G' = \left\langle B, \bigcup_{i=1}^{n} K(\mathbf{E}_i) \right\rangle$$

допускает правильную раскраску в *q* цветов (здесь $K(E_i)$ — полный граф на множестве вершин E_i). Мы, таким образом, сопоставили задачу оптимального локально префиксного моделирования с проблемой: «существует ли правильная раскраска данного графа с *m* вершинами в *q* цветов?», уже заслужившей репутацию универсальной переборной проблемы. Уточнение этого сопоставления дает

Теорема 5. *Если существует алгоритм, вычисляющий* $M_0(\mathfrak{L})$ *за время* $\le F(m, n, q)$, *то существует алгоритм, решающий проблему правильной раскраски графа с m вершинами в q цветов за время* $\le F(m, m^2, q)$.

Необходимое сведение читатель легко выполнит самостоятельно.

6. Специфическую модель двоичного алфавитного моделирования, связанную с конструктивным подходом к обеспечению взаимной однозначности, представляют *временные модели*. Информация в такой модели — это последовательность импульсов, разделенных определенными временными интервалами. Особенностью модели является требование осуществимости демоделирования *монотонным демоделятором*. Элементарные модели описываются двоичными словами, в которых единицы представляют моменты появления импульсов, нули — моменты отсутствия импульсов. Подпоследовательность α локализуется в последовательности β(α)γ как элементарная модель всякий раз, когда $\alpha \ge \nu$, где ν — некоторая элементарная модель. Поэтому к временным моделям предъявляется требование, более сильное, чем префиксность.

Перейдем к стандартной постановке задачи. Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — информационный алфавит языка понятий и $0 \notin B$. Понятиями являются слова в алфавите $B \bigcup \{0\}$, которые рассматриваются в той же системе отсчета времени, что и в алфавите канала связи. Символы из *B* записываются в тех позициях, которые соответствуют моментам наступления событий, обозначенных этими символами (предполагается, что в каждый момент может произойти не более одного события из *B).* Язык понятий $\mathfrak{L}(\tilde{n}) = \{b_1 0^{n_1-1}, \ldots, b_m 0^{n_m-1}, 0\}^*$ определяется набором задержек $\tilde{n} = \langle n_1, \ldots, n_m \rangle$, где все n_i — положительные целые. Через $\mathfrak{L}(N)$ обозначается язык с фиксированной задержкой $\langle N, \ldots, N \rangle$. Содержательно введение в язык системы задержек означает регулирование темпа передачи информации и является требованием определенной паузы после каждого переданного элементарного сигнала. Значением понятия α называется слово $\mathfrak{z}(\alpha)$, которое получается после вычеркивания из α всех вхождений нуля, например,

$$\mathfrak{z}(0b_2 00 b_1 b_3) = \mathfrak{z}(b_2 b_1 00 b_3 0) = \mathfrak{z}(b_2 b_1 b_3) = b_2 b_1 b_3.$$

Схема алфавитного моделирования $f = f_V^{\tilde{n}}$ задается временной моделью $V = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$, где все слова двоичные, начинаются и кончаются единицей и удовлетворяют условиям $n_i \geqslant |v_i|$ $(i = \overline{1, m})$. Смысл последних условий состоит в том, чтобы моделирование каждого информационного символа в понятии начиналось сразу же с момента его появления, но не раньше, чем закончено моделирование предыдущего символа. Тогда полагают

$$f(0^a b_i 0^c) = 0^a v_i 0^{c-|v_i|+1} \text{ для } i = \overline{1, m}$$

и $f(\alpha_1\alpha_2) = f(\alpha_1) f(\alpha_2)$ для произвольных $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{L}(\tilde{n})$.

Демоделирование $g = g_V$ для временной модели V есть определяемое ниже отображение множества всех двоичных последовательностей в слова алфавита $B \bigcup \{0, ?\}$. Будем говорить, что t является *моментом принятия* (соответственно *осмысления)* информации при поступлении на вход схемы демоделирования g слова $\alpha = x_1 x_2 \ldots x_k \in E^k$ в том и только том случае, если для некоторого $i = 0, 1, \ldots, t-1$ и некоторого $j = 1, \ldots, m$ (соответственно единственного $j = j(t, \alpha) = \overline{1, m}$) имеет место

$$x_{i-1} \ldots x_t \geqslant v_j.$$

Момент принятия, который не является моментом осмысления информации, будем называть *моментом неопределенности.* Тогда $g(\alpha) = y_1 \ldots y_k$, где для $t = 1, \ldots, k$:

$$y_i = \begin{cases} b_j, \textit{если } j \text{ — } \textit{момент осмысления и} \quad j(t, \alpha) = j, \\ ?, \ \textit{если } t \text{ — } \textit{момент неопределенности}, \\ 0 \ \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Моделирование $f^n{}_V$ называется взаимно однозначным, если для любого понятия $\alpha \in \mathfrak{L}(\tilde{n})$ имеет место $\mathfrak{z}(g(f(\alpha))) = \mathfrak{z}(\alpha)$. В частности, для взаимной однозначности необходимо, чтобы при демоделировании не могло возникать моментов неопределенности. Мы ограничимся здесь случаем моделирования языка $\mathsf{L}(N)$ с фиксированной задержкой и рассмотрим вопрос о максимальной мощности М(N) временной модели V, обеспечивающей взаимную однозначность $f^N{}_V$. |

Элементарные модели будем представлять в виде $v_i' = v_i 0^{N-|v_i|}$, тогда временная модель представляется подмножеством E^N, в котором все слова начинаются с единицы.

Пусть

$$\overline{\alpha} = \begin{cases} \beta, \text{ если } \alpha = 0^i\beta 0^j, \ \beta \in E^* \setminus (0E^* \cup E^*0 \cup \{\lambda\}), \\ \lambda \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$\alpha_1 \sim \alpha_2 := \overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_2,$$

$$\alpha_1 \lesssim \alpha_2 := \langle\!\langle \text{существует } \beta \text{ такое, что } \alpha_1 \sim \beta \text{ и } \beta \leqslant \alpha_2 \rangle\!\rangle.$$

Непосредственно из определении следует

Теорема 1. *Для взаимной однозначности* $f^N{}_V$ *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) *множество* V *состоит из попарно несравнимых по отношению* $\lesssim$ *элементов;*

2) *если* $v_i = xy$, $v_j = zw$ *и* $\alpha \leq y0^kz$; *то* $\alpha \notin V$.

Замечание. Очевидно, что 1) есть необходимое и достаточное условие взаимной однозначности $f^\infty{}_V$.

Из условия 2) следует, что если $f^N{}_V$ взаимно однозначно, то в V не может содержаться периодических слов (так как если $\alpha' \in V$, $i > 1$, то $\alpha^{i-1} \bullet \alpha \in V$ и $\alpha \bullet \alpha^{i-1} \in V$). Тогда для любого $v \in V$ согласно (17) 5.2.4

$$|C(v)| = N.$$

Теорема 2. *Если* $f^N{}_V$ *взаимно однозначно, то множество* $\bigcup_{v \in V} C(v)$ *состоит из попарно несравнимых по отношению* $\leq$ *элементов.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha\beta, \gamma\delta \in V$ и $\beta\alpha \geqslant \delta\gamma$. Возможны случаи: $|\beta| \geqslant |\delta|$ и $|\beta| < |\delta|$.

В первом случае $\beta = \beta_1\beta_2$, где $|\beta_1| = |\delta|$, и $\beta_2\alpha\beta_1 \geqslant \gamma\delta$, где β_2 — суффикс $\alpha\beta$, а $\alpha\beta_1$ — префикс $\alpha\beta$ и не выполнено 2), либо $\beta_2 = \lambda$ и не выполнено 1). Во втором случае $\delta = \delta_1\delta_2$, $|\delta_1| = |\beta|$ и $\alpha_2\beta\alpha_1 \geqslant \gamma\delta$, где $\alpha_2\beta$ — суффикс $\alpha\beta$, α_1 — префикс $\alpha\beta$, т. е. не выполнено 2). Теорема доказана.

Теорема 3. $M(N) \leqslant \frac{1}{N}\binom{N}{\lfloor N/2 \rfloor}$.

Доказательство. Если $f^N{}_V$ взаимно однозначно, то согласно *(4)* имеем $\left|\bigcup_{v\in V} C(v)\right| = N\cdot|V|$.

По теореме 2 $\bigcup_{v\in V} C(v)$ состоит из попарно несравнимых элементов. Тогда по теореме Шпернера (теорема 2.3.4.4) имеем $N\cdot|V|\leqslant\binom{N}{[N/2]}$, откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 4. $\mathsf{M}(N)\sim\frac{1}{N}\binom{N}{[N/2]}$, *причем при нечетном N имеет место* $\mathsf{M}(N)=\frac{1}{N}\binom{N}{[N/2]}$.

Доказательство. Пусть НОД *(N, k)* = 1. Рассмотрим множество $E^N{}_2(k)$ двоичных последовательностей длины *N* и веса *k* и для $\alpha\in E_2^N(k)$ положим $F(\alpha)=\frac{N}{k}\|\alpha\|-|\alpha|$. Из теоремы 2 в примере (д) 8.5.4 следует, что в каждом циклоклассе $C(\alpha)\subseteq E_2^N(k)$ существует единственное положительное слово (т. е. слово, у которого значение *F* для всех префиксов положительно). Пусть $V = V_{N,\ k}$ — подмножество всех положительных слов $E^N{}_2\ (k)$. Очевидно, что

$$|V|=\frac{1}{N}\binom{N}{k}.$$

Покажем, что $f^N{}_V$ взаимно однозначно. Условие 1) здесь очевидно. Пусть $\alpha\beta\in V$ и α′ — суффикс α, а β' — префикс β, причем $|\alpha'|=|\beta'|=i$. Тогда $\beta'\leqslant\alpha'$ невозможно (а из этого уже следует 2)). Действительно, если $\beta'\leqslant\alpha'$, то $\|\beta'\|\leqslant\|\alpha'\|$ и мы получаем противоречие:

$$0<F(\beta')=\|\beta'\|\cdot\frac{N}{k}-i\leqslant\|\alpha'\|\cdot\frac{N}{k}-i=F(\alpha')<0.$$

При нечетном *N* = *2s* + 1 возьмем *k* = *s*. НОД (2*s* +1, s) = 1, и для этого случая теорема доказана. Если же *N* = *2s*, то при четном *s* НОД (2*s*, *s* — 1) = 1, а при нечетном *s* НОД (2*s*, *s* — 2) = 1. Возьмем в первом случае *k* = *s* — 1, а во втором *k* = s — 2 и получим временные модели $V_{N,\ k}$ асимптотически максимальной мощности. Мы имеем при четном s:

$$1\geqslant\frac{|V_{2s,s-1}|}{\mathsf{M}(2s)}\geqslant\frac{(2s)^{-1}\binom{2s}{s-1}}{(2s)^{-1}\binom{2s}{s}}=\frac{s}{s+1}\to1\quad\text{при } s\to\infty,$$

а при нечетном s:

$$1 \geqslant \frac{|V_{2s,s-2}|}{\mathrm{M}(2s)} \geqslant \frac{(2s)^{-1}\binom{2s}{s-2}}{(2s)^{-1}\binom{2s}{s}} = \frac{s(s-1)}{(s+1)(s+2)} \to 1$$

при $s \to \infty$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из теоремы 3.3.4.4 следует, что при нечетном N максимальная мощность временной модели для $\mathsf{L}(N)$ может достигаться только на равновесной модели.

Замечание 2. Модели $V_s \Rightarrow V_{2s+1,s}$ можно описать рекуррентно: положим $V_0 = \Rightarrow\{0\}$ и для $s > 0: V_s = \bigcup_{j=0}^{s-1} 1 \cdot V_j \cdot V_{s-1-j}$.

Например, V_1 = {100), V_2 = {11000, 10100}, V_3 = {1110000, 1101000, 1100100, 1011000, 1010100} и т. д.

6. 5. Помехоустойчивое моделирование понятий и признаков предметов

1. В этом параграфе рассматриваются модель двоичного равномерного моделирования и две детерминированные модели источников помех. *Источник аддитивных ошибок* описывается множеством $P_a(N, t)$ двоичных векторов-ошибок, состоящим из всех двоичных последовательностей $x_t x_2 \ldots x_s$, у которых вес любого фрагмента $x_i x_{i+1} \ldots x_{i+p-1}$ не превосходит t, если длина фрагмента $p \le N$. Это означает, что если по каналу связи передана модель понятия α, то на входе схемы демоделирования может быть получено любое слово из множества $\{\alpha \oplus \beta \mid \beta \in P_a(N, t), \ |\alpha| = |\beta|\}$.

Источник синхронизационных ошибок в модели равномерного моделирования $\mathfrak{S}_{k,n}$ с параметрами k и n описывается подмножеством $P_c(n)$ множества {1, 2, ..., n — 1}. При этом подразумевается, что если была передана модель понятия $x_1x_2 \ldots x_i \ldots$, то на вход схемы демоделирования может поступить любое слово из

$$\{x_{sn+i+1}x_{sn+i+2}\ldots \mid s \geqslant 0,\ i \in P_c(n)\}.$$

Заметим, что получение сообщения вида $x_{sn+1}x_{sn+2}\ldots$ с $s > 0$ не является синхронизационной ошибкой, а является безвозвратной потерей информации, которая может быть восстановлена лишь в случае достаточной избыточности языка понятий по контексту.

Поскольку проблема локализации информации в модели равномерного моделирования тривиальна, обнаружение ошибок состоит в обнаружении несовпадения локализованной группы n символов ни с какой элементарной моделью. Если в результате ошибки элементарная модель перейдет в другую элементарную модель, то ошибка не будет обнаружена. Иногда возможно и исправление ошибки. Если группа локализована правильно (синхронизационной ошибки не было), то для этого необходимо и достаточно, чтобы искаженная группа была синонимом единственной элементарной модели. В случае синхронизационной ошибки исправление с задержкой T состоит в нахождении правильного способа локализации, т. е. в определении значения t по модулю n на основе отрезка $x_t x_{t+1} \ldots x_{t+T=1}$, полученной модели понятия.

Канал связи называется *надежным,* если любые ошибки обнаруживаются или исправляются в соответствии с поставленной целью демоделирования. Далее приводятся построения моделей, обеспечивающих надежность простейших каналов связи.

2. На множестве $E_2^n (E_2 = \{0, 1\})$ определим функцию двух переменных, называемую *расстоянием Хемминга* $\rho(X, Y) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i \oplus y_i)$ (число разрядов, в которых X и Y не совпадают). Скалярное произведение векторов $X, Y \in E_2^n : (X, Y) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ есть число разрядов, в которых X и Y совпадают и равны 1. Легко проверить следующие соотношения:

$$\rho(X, 0) = \|X\| = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (0 = \langle 0, 0, \ldots, 0 \rangle), \tag{1}$$

$\rho(X, Y) = \|X \oplus Y\|$, где $X \oplus Y$ — поразрядное сложение по модулю два, (2)

$$\rho(X \oplus Z, \ Y \oplus Z) = \rho(X, Y), \tag{3}$$

$$\rho(X, Y) = \|X\| + \|Y\| - 2(X, Y), \tag{4}$$

$$\rho(X, Y) = \\ = \rho(X, Z) + \rho(Y, Z) - 2 \cdot ((X, Y), \bar{Z}) - 2 \cdot ((\bar{X}, \bar{Y}), Z), \tag{5}$$

где для $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ через $\bar{X}$ обозначен $\langle \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \rangle$.

Аксиомы *метрики:* $\rho(X, Y) \geq 0$, причем $\rho(X, Y) = 0$ в том и только том случае, если $X = Y$, и $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ очевидны, а неравенство треугольника $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geqslant \rho(X, Z)$ следует непосредственно из (5). Метрика Хеммннга является удобным математическим средством для формулировки условий надежности моделирования в условиях аддитивных ошибок. Пусть равномерное моделирование имеет параметры k и n, а источник помех есть $P_a(n, t)$. Пусть схема $\mathfrak{S}_{k,n}: \alpha_i \to \beta_i \ (i = \overline{1, 2^k})$ определяется моделью $V = \{\beta_1, \ldots, \beta_{2^k}\} \subseteq$

$\subseteq E_2^n$. Модельным расстоянием для модели V называется величина

$$\rho(V) = \min\{\rho(X, Y) \mid X, Y \in V, X \neq Y\}.$$

В этих условиях имеет место

Теорема 1. 1) *Для обнаружения любых ошибок необходимо и достаточно ρ(V)>t.*

2) *Для исправления любых ошибок необходимо и достаточно ρ(V)>2t.*

Доказательство. 1) Пусть *ρ(V)>t.* Если $X \in V$, $Y \in P_a(n, t)$, $Y \neq 0$, то $\rho(X, X \oplus Y) = \rho(0, Y) = \|Y\| \leqslant t$, следовательно, $X \oplus Y \notin V$ и ошибка Y обнаруживается. Обратно: если $\rho(X, Y) \leq t$ и $X, Y \in V$, $X \neq Y$, то $Z = X \oplus Y \in P_a(n, t)$, так как $\|X \oplus Y\| = \rho(X, Y) \leqslant t$, поэтому $X \oplus Z = Y$, т. е. ошибка Z в элементарной моделе X не может быть обнаружена.

2) Пусть *p(V)>2t.* Если $X \in V$ и $Z \in V$ $P_a(n, t)$, то X есть единственная элементарная модель из V, которая может перейти в результате ошибки в $X \oplus Z$. Действительно, если бы существовал $Y \neq X$ такой, что $Y \in V$ и $Y \oplus Z_1 = X \oplus Z$ для некоторого $Z_1 \in P_a(n, t)$, то мы имели бы (добавляя к левой и правой частям $X \oplus Z_1$) $X \oplus Y = Z_1 \oplus Z$. Но $\|X \oplus Y\| = \rho(X, Y) > 2t$, а $\|Z_1 \oplus Z\| \leqslant \|Z_1\| + \|Z\| \leqslant 2t$. Обратно: если $\rho(X, Y) \leq 2t$ для некоторых различных $X, Y \in V$, то $\|X \oplus Y\| \leqslant 2t$ и существуют Z_1 и Z_2 такие, что $\|Z_1\| \leqslant t$ и $\|Z_2\| \leqslant t$ (т. е. в $P_a(n, t)$) и $X \oplus Y = Z_1 \oplus Z_2$. Но это равносильно $X \oplus Z_1 = Y \oplus Z_2 = W$, т. е. по получении искаженной элементарной модели W невозможно определить, X или Y был передан в действительности. Теорема доказана.

Приведем геометрическую интерпретацию.

Множество $S_t^*(X) \Rightarrow \{Y \mid \rho(X, Y) \leq t)$ называется *шаром радиуса t с центром в точке X.*

Теорема 2. 1) *Для обнаружения любых ошибок необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in V$ шар $S_t^*(X)$ не содержал других элементарных моделей, кроме X.*

2) *Для исправления любых ошибок необходимо и достаточно, чтобы для любых различных $X, Y \in V$ имело место $S_t^*(X) \cap S_t^*(Y) = \varnothing$.*

3. Равномерное моделирование $S_{k,n}$: $\alpha_i \to \beta_i$, (i=l, 2^k) называется *систематическим,* если можно выделить множество k разрядов $I=\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, называемых *информационными,* так, что если $\beta_i = x_1 .. .x_n$ (i = 1, 2^k), то $\alpha_i = x_{i_1} ... x_{i_k}$. Остальные разряды в таком случае называются *контрольными.*

Равномерное моделирование $\mathfrak{S}_{k,n}$: $\alpha_i \to \beta_i$, (i=l, 2^k) называется *линейным* (или *групповым),* если модель V= $\{\beta_1, ..., \beta_{2^k}\}$ образует подгруппу $E^n{}_2$ относительно операции $\oplus$ поразрядного сложения векторов по модулю два. В таком случае модель V является одновременно линейным подпространством пространства $E^n{}_2$ над полем E_2. Если $V = V_1 \oplus \alpha$, где $\alpha \in E^n{}_2$, а V_1 — линейная модель, то моделирование называется *квазилинейным.* Как следует из (3), в таком случае $\rho(V)=\rho(V_1)$. Все линейные и квазилинейные модели — систематические.

Линейные модели допускают более простое задание, чем модели общего типа. Достаточно перечислить образующие группы V. Их можно представить матрицей с k строками и n столбцами $G(V)$ — базисом векторного пространства V. Матрица $G(V)$ называется порождающей матрицей модели V.

Двойственность, связывающая ортогональные подпространства, приводит к еще одному способу задания линейных моделей. Векторы X, $Y \in E^n{}_2$ называются ортогональными, если $(X, Y) \equiv 0 (\mathrm{mod} 2)$. Ортогональное подпространство $V^{\perp}=\{X|(X, V) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}2)\}$ для линейной модели V называется *двойственной моделью* для V. Ее размерность равна $n — k$, и модель $V^{\perp}$ определяет двойственную схему алфавитного моделирования $\mathfrak{S}_{n-k,n}$. Матрица $H(V) \Rightarrow G(V^{\perp})$ — порождающая матрица модели $V^{\perp}$ — называется *проверочной матрицей* модели V: мы имеем $X|(X, H) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}2)\}$ — *двойственный способ задания линейной модели V проверочной матрицей H(V).* Легко проверить, что если $G(V) = [J_k A]$, где J_k — единичная $k \times k$ матрица, то $H(V) = [A^{\mathrm{T}} J_{n-k}]$, где A^{T} — транспонированная матрица. Отсюда следует, что если I — множество информационных разрядов для модели V, то в качестве множества информационных разрядов для двойственной модели $V^{\perp}$ можно взять $\overline{I} = \{1, 2, ..., n\}\backslash I$.

Пример. Для линейной модели V =\{000, 011, 10], 110), определяющей схему линейного равномерною моделирования $\mathfrak{S}_{2,3}$

$$00 \to 000, \quad 01 \to 011, \quad 10 \to 101, \quad 11 \to 110$$

с информационными разрядами $I=\{1, 2\}$, имеем

$$G(V) = \begin{bmatrix} 101 \\ 011 \end{bmatrix}, \quad H(V) = [111], \quad V^{\perp} = \begin{bmatrix} 000 \\ 111 \end{bmatrix},$$

и двойственную схему $\mathfrak{S}_{1,3}$:

$$0 \to 000, \quad 1 \to 111.$$

Для модельного расстояния линейных моделей выполняется равенство

$$\rho(V) = \min\{\|X\| \mid X \in V,\ X \neq 0\} \qquad (6)$$

(6) следует из того, что 0 содержится в любой линейной моделе и

$$\min\{\rho(X,\ Y) \mid X,\ Y \in V,\ X \neq Y\} =$$
$$= \min\{\rho(0,\ X \oplus Y) \mid 0 \neq X \oplus Y \in V\}.$$

4. Следующие модели понятий построены для обнаружения и для исправления ошибок при t=1. Эти модели — линейные, они имеют наименьшую избыточность, возможную при данном k.

(а) Модель $H_{об}(n)$ для обнаружения ошибок в канале связи с источником помех $P_a(n,\ 1)$ определяется для любого n:

$$H_{об}(n) \Rightarrow \{X \mid X \in E_2^n,\ \|X\| \equiv 0 \pmod 2\}.$$

Модель $H_{об}(n)$ — линейная, так как если $X,\ Y \in H_{об}(n)$, то $\|X \oplus Y\| = \|X\| + \|Y\| - 2(X,\ Y) \equiv -2(X,\ Y) \equiv 0 \pmod 2$, т. е. $X \oplus Y \in H_{об}(n)$. Согласно (6) $\rho(H_{об}(n))$ =2, следовательно, любая ошибка обнаруживается. В качестве информационных разрядов для модели $H_{об}(n)$ можно взять любые n —1 разрядов, так как значение в любом разряде слова $\langle x_1,\ \ldots,\ x_n\rangle \in H_{об}(n)$ однозначно определяется по значениям в остальных разрядах из уравнения $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$. Имеем

$$H(H_{об}(n)) = [1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1], \quad H_{об}^{\perp}(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

В качестве одной из порождающих матриц можно взять

$$G(H_{об}(n)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если выбрать I={1, 2, ..., n — 1}, то получим соответствующую схему равномерного моделирования $\mathfrak{S}_{n-1,\ n}$:

$$\langle x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\rangle \to \langle x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}\rangle.$$

Избыточность при использовании $H_{об}(n)$: R =+$(n$— $1)^{-1}$.

В этой модели наиболее явным образом воплощена идея проверки на четность.

(б) Модели для исправления ошибок в канале связи с источником помех $P_a(n,\ 1)$ строятся для подпоследовательности значений n= 2^s — 1 (s =2, 3, ...). Эти модели $H_{исп}(n)$ задаются проверочной матрицей с s строками и 2^s — 1 столбцами. Столбцами являются всевозможные ненулевые двоичные наборы длины s. Их удобно расположить так, чтобы i-й слева столбец h, представлял собой двоичное разложение числа i (старшие разряды сверху):

$$H(H_{\text{исп}}(n)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Например,

$$H(H_{\text{исп}}(3)) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$H(H_{\text{исп}}(7)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это расположение связано с выбором в качестве контрольных разрядов множества тех, у которых номера есть степени двойки: $I = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^{s-1}\}$. Таким образом,

$$H_{\text{исп}}(n) = \{X \mid (X, H) \equiv 0 \pmod 2, X \in E_2^n\} =$$

$$= \left\{ X \mid x_1 \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{s1} \end{pmatrix} \oplus \dots \oplus x_n \begin{pmatrix} h_{1n} \\ h_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (7)$$

Покажем, что $\rho(H_{\text{исп}}(n)) \geq 3$, т. е. $H_{\text{исп}}(n)$ обеспечивает исправление любых ошибок. Действительно, если $X \neq 0$ и $X \in H_{\text{исп}}(n)$, то $\|X\| \neq 1$, так как все столбцы ненулевые, и $\|X\| \neq 2$, так как если X содержит единицы только в двух разрядах, скажем, $x_i = x_j = 1$, $i \neq j$, то $h_i \oplus h_j = 0$, что равносильно $h_i = h_j$, а все столбцы матрицы различны. Следовательно, наименьший вес ненулевого вектора $H_{\text{исп}}(n)$ не менее трех и, согласно (6), $\rho(H_{\text{исп}}(n)) \geq 3$.

Пусть в элементарной моделе $X \in H_{\text{исп}}(n)$ произошла ошибка в i-м разряде: $X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \to X' = X \oplus e_i = \langle x_1, \dots, x_i \oplus 1, \dots, x_n \rangle$. Тогда $(X', H) = (X \oplus e_i, H) \equiv (X, H) \oplus h_i \equiv h_i \pmod 2$, так как $(X,H) = 0 \pmod 2$. Отсюда следует, что если локализована группа символов $X \in E^n_2$, то достаточно определить вектор $(X, H) \pmod 2$: если он нулевой, то ошибки не было, в противном случае он представляет двоичное разложение номера разряда, в котором произошла ошибка.

Пусть, например, при $n = 7$ локализована группа <0110010>. Находим

$$(X, H) \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Заключаем, что была ошибка в седьмом разряде элементарной модели <0110011>, из которой выделяем информационную группу <1011>. Избыточность при использовании $H_{исп}(n)$ тем меньше, чем больше n:

$$R = \frac{n}{k} - 1 = \frac{2^s - 1}{2^s - s - 1} - 1 = \frac{s}{2^s - s - 1}.$$

Если $n \neq 2^s - 1$, то строится *укороченная модель.* Ее задают проверочной матрицей, которая образована первыми n столбцами проверочной матрицы модели $H_{исп}(n_1)$, где n_1 — наименьшее целое из больших n, имеющее вид $2^s - 1$. Ясно, что все предыдущие рассуждения сохраняют силу и для укороченной модели.

Замечание 1. Пусть $m(n, d)$ — максимальная мощность модели в E^n_2 с модельным расстоянием d. Как следует из (а), (б), $m(n, 2) \geqslant 2^{n-1}$, $m(2^s - 1, 3) \geqslant 2^{2^s - s - 1}$. Покажем, что в действительности $m(n, 2) = 2^{n-1}$ и $m(2^s - 1, 3) = 2^{2^s - s - 1}$.

(а) Очевидно, что $m(2, 2) = 2$, так как в множестве {00, 01, 10, 11} любой вектор имеет ровно один на расстоянии два. Индукцией по n покажем, что $m(n, 2) \leq 2^{n-1}$. Пусть утверждение верно при $n < N$. Рассмотрим модель $C_N \subseteq E^N_2$ такую, что $\rho(C_N) \geq 2$. Представим ее в виде $C_N = C'_{N-1}\, 0 \cup C''_{N-1} \bullet 1$. Тогда $\rho(C'_{N-1}) \geqslant \rho(C_N) \geqslant 2$ и $\rho(C''_{N-1}) \geqslant \rho(C_N) \geqslant 2$, так как $\rho(Xa, Ya) = \rho(X, Y)$. Но $|C'_{N-1}| \leqslant 2^{N-2}$ и $|C''_{N-1}| \leqslant 2^{N-2}$ по предположению индукции, откуда $|C_N| = |C'_{N-1}| + |C''_{N-1}| \leqslant 2^{N-2} + 2^{N-2} = 2^{N-1}$, что и требовалось доказать.

(б) Если $\rho(V) \geq 3$, то по теореме 2.2 в E^n_2 содержится $|V|$ попарно непересекающихся шаров с центрами в точках V радиуса 1. Так как единичный шар содержит $n + 1$ точек, имеем $(n + 1) \bullet |V| \leq 2^n$, откуда $|V| \leqslant \frac{2^n}{n+1}$ и при $n = 2_s - 1$ получается $|V| \leqslant 2^{2^s - 1 - s}$.

При $n \neq 2^s - 1$ значение $m(n, 3)$ может уже не достигаться на линейной модели.

Замечание 2. Определим параметры двойственной модели $H^{\perp}_{исп}(n)$. Очевидно, что $|H^{\perp}_{исп}(n)| = 2^s$ и $k = s$. Покажем, что $\rho(H^{\perp}_{исп}(n)) = \frac{n+1}{2} = 2^{s-1}$.

Действительно, элементарные модели $H^{\perp}_{исп}(n)$ можно рассматривать как векторные записи линейных функций алгебры логики от s переменных, равных нулю на нулевом наборе. Так как линейная функция принимает значение 1 ровно на половине наборов значений переменных, т. е. на 2^{s-1}, имеем $\|X\|=2^{s-1}$ для любой ненулевой элементарной модели $X \in \Pi^{1}_{\text{исп}}(n)$.

5. Для исправления синхронизационных ошибок с задержкой *n* в канале связи с источником помех $P_c(n) = \{1, 2, ..., n - 1\}$ может быть реализована схема равномерного моделирования $\mathfrak{S}_{k,n}$, в которой параметр *k* таков, что избыточность будет сколь угодно мала, если *n* достаточно велико. Одну из конструкций подходящих моделей дают так называемые *модели без перекрытий,* у которых множество суффиксов элементарных моделей не имеет общих элементов с множеством префиксов элементарных моделей. Такими, в частности, являются модели $V_{2s+1,s}$ из п. 6.4. Отсутствие перекрытий для этих моделей очевидно: все префиксы их элементарных моделей положительны, а все суффиксы отрицательны. Построим последовательность схем равномерного моделирования $\mathfrak{S}_{k,n}$, реализуемую с помощью моделей $V_{2s+1,s}$. Согласно теореме 4.6.4 имеем

$$|V_{2s+1,s}| = \frac{1}{2s+1}\binom{2s+1}{s} = \frac{1}{s+1}\binom{2s}{s}.$$

Индукцией по s убеждаемся, что

$$\binom{2s}{s} \geqslant \frac{2^{2s-1}}{s}. \qquad (8)$$

При *s*=1 здесь выполняется равенство. Предположим, что (8) справедливо при $s \le N$. Тогда

$$\binom{2(N+1)}{N+1} = \frac{2(2N+1)}{N+1}\binom{2N}{N} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2(2N+1)}{N+1}\cdot\frac{2^{2N-1}}{N} = \frac{(2N+1)}{2N}\cdot\frac{2^{2(N+1)-1}}{N+1} \geqslant \frac{2^{2(N+1)-1}}{N+1}$$

и (8) доказано для всех $s > 1$.

Для $s \ge 5$ пусть $k_s = 2^s - s^2$ и $n_s = 2^s - 1 = 2(2^{s-1} - 1) + 1$. Тогда, используя (8), легко показать, что

$$2^{k_s} = 2^{2^s - s^2} \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}\binom{2(2^{s-1}-1)}{2^{s-1}-1} = \left|V_{n_s, 2^{s-1}-1}\right|.$$

Следовательно, из модели без перекрытий $V_{n_s, 2^{s-1}-1}$ можно выбрать любые 2^{k_s} различных элементов и сопоставить их словам $E_2^{k_s}$, получая $\mathfrak{S}_{k_s,n_s}$. Избыточность при этом будет $R = (1 - s^2)(2^s - s^2)^{-1} \to 0$ при $s \to \infty$.

7. Статистические характеристики моделирования понятий и признаков предметов

Этот раздел посвящен следующим четырем проблемам.
1. Статистическая характеристика структуры языковых групп $\mathfrak{C}_m/\varepsilon$.
2. Оптимальное алфавитное моделирование в условиях, когда учитывается только вероятностная модель языка понятий, и статистическая эффективность использования дополнительной информации о языке понятий.
3. Улучшение характеристик моделирования за счет использования памяти.
4. Статистическая помехоустойчивость моделирования.

7.1. Статистическая характеристика структуры языковых групп, связанных с алфавитным моделированием понятий

1. Имеется континуум $\mathfrak{C}_m$ всех языков понятий над понятийным алфавитом $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ ($m \geq = 2$). Это множество отношением эквивалентности ε, введенным в 8.2.5**,** разбито на счетное число классов $\mathfrak{C}_m/\varepsilon$ (два языка попадают в одни класс в том и только том случае, если у них одинаковая матрица оптимального моделирования). Классы $\mathfrak{C}_m/\varepsilon$ представляют собой группы языков понятий, у которые полезная информация для оптимизации алфавитного моделирования одинакова. Возникает вопрос: как языки распределены по группам и каково типичное значение коэффициента сжатия информации в предположении о равновероятности языков? Грубо говоря, ответ таков: *почти все языки понятий эквивалентны B* и потому типично* $\zeta(\mathfrak{L}, \alpha) = 1$.
2. Уточним постановку вопроса. Пусть слова B^+ упорядочены лексикографически: $B^+ = \langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_i, \ldots \rangle$, где

$$\alpha_1 = b_1,\ \alpha_2 = b_2,\ \ldots,\ \alpha_m = b_m,$$
$$\alpha_{m+1} = b_1 b_1,\ \alpha_{m+2} = b_1 b_2,\ \ldots$$

Множество языков $\mathfrak{C}_m = 2^{B^+}$ (за исключением счетного множества конечных языков) можно привести во взаимно однозначное соответствие с множеством действительных чисел отрезка [0, 1], сопоставляя языку L его двоичную характеристическую последовательность $s(\mathfrak{L}) = s(\alpha_1)s(\alpha_2)\ldots s(\alpha_i)\ldots,$

$$s(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_i \notin \mathfrak{L}, \\ 1, & \text{если } \alpha_i \in \mathfrak{L}, \end{cases}$$

а s(L) рассматривая как двоичное разложение

$$0, s(\alpha_1)\, s(\alpha_2) \ldots s(\alpha_i) \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} s(\alpha_i) \cdot 2^{-i} = s(\mathfrak{L})$$

некоторого числа в [0, 1]. (Различным языкам L 1 и L 2 может соответствовать одно число только при условии,

$$s(\mathfrak{L}_1) = 0,\ s_1 \ldots s_i 011 \ldots, \qquad s(\mathfrak{L}_2) = 0,\ s_1 \ldots s_i 100 \ldots,$$

т. е. если один из них конечный).

Любой класс языков L можно представить в виде $L^{\infty} \bigcup L^{\mathrm{fin}}$, где L^{∞}— подкласс бесконечных языков L, а L^{fin} — не более чем счетный подкласс всех конечных языков L. Учитывая сказанное, естественно определить *меру* μ, *для классов языков L,* полагая

$$\mu(L) = \mu(L^{\infty}) \Rightarrow \mathscr{M}(\{s(\mathfrak{L}) \mid \mathfrak{L} \in L^{\infty}\}),$$

где M — внешняя мера множества на прямой.

Теорема 1. *Пусть* $L=\varepsilon(B^*)$ *— наибольший элемент* $\mathfrak{C}_m/\varepsilon$*.Тогда* μ($L$)= 1.

Доказательство. Для любого двоичного слова π обозначим через I_π интервал $\{x|0, \pi\, 00... < x < 0, \pi 11...\}$, длина этого интервала равна

$$|I_\pi| = s(\pi) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(|\pi|+j)} - s(\pi) = 2^{-|\pi|}.$$

Достаточно доказать, что мера множества языков $\mathfrak{L} \in L_1 \Rightarrow \mathfrak{C}_m \backslash L$, для которых $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{D}(B^*)$, равна нулю.

Для произвольной пары слов α, β пусть $L_{\alpha,\beta}$ — класс всех языков L , в которых при любом γ либо $\alpha\gamma \notin \mathfrak{L}$, либо $\beta\gamma \notin \mathfrak{L}$. Если $\mathfrak{L} \notin L$, то $\mathfrak{D}(\mathfrak{L}) \neq \mathfrak{D}(B^*)$, т. е. существует модель $V \in \mathfrak{D}(\mathfrak{L})$ такая, что для некоторых различных α и β имеет место $f_V(\alpha) = f_V(\beta)$ и, следовательно, для любого слова γ имеет место $f_V(\alpha\gamma) = f_V(\beta\gamma)$, т. е. $\mathfrak{L} \in L_{\alpha,\beta}$, ибо в противном случае f_V не было бы взаимно однозначно на L . При этом, не ограничивая общности, можно, очевидно, предполагать, что |α|= |β|. Таким образом, имеем

$$L_1 \subseteq \bigcup_{(\alpha,\beta)} L_{\alpha,\beta},$$

где в правой части стоит объединение счетного числа множеств по всевозможным парам слов из B^+ одинаковой длины. Следовательно,

$$\mu(L_1) \leqslant \sum_{(\alpha,\beta)} \mu(L_{\alpha,\beta})$$

и остается показать, что для любых α, β имеет место $\mu(L_{\alpha,\beta}) = 0$.

Пусть $|\alpha| = |\beta| = t$ и $h_k \Rightarrow m + m^2 + \ldots + m^k$. Перечислим двоичные слова π длины h_k, для которых возможно $I_\pi \cap s(L_{\alpha,\beta}) \neq \varnothing$.

Пусть $\pi = 0, s_1 \ldots s_{h_1} s_{h_1+1} \ldots s_{h_2} \ldots s_{h_{k-1}+1} \ldots s_{h_k}$. Отрезок $s_1 \ldots s_{h_{t-1}}$ может быть любым из $2^{h_{t-1}}$. Следующие блоки должны быть такими, чтобы в позициях, соответствующих αγ и βγ при любом γ, не располагались две единицы. Таким образом, из m^j позиций можно выделить m^{j-t} упорядоченных пар, в каждой из которых размещена какая-либо из трех пар <0, 0>, <0, 1> или <1, 0>, в то время как в остальных m^j - $2m^{j-t}$ позициях 0 и 1 расположены произвольно. Следовательно, число интервалов длины 2^{-h_k}, покрывающих $L_{\alpha,\beta}$, не превосходит

$$2^m \cdot 2^{m^2} \ldots 2^{m^{t-}} \cdot \prod_{j=t}^{k}\left(2^{m^j-2m^{j-t}} \cdot 3^{m^{j-t}}\right).$$

Следовательно, для покрытия $\{ I_\pi \}$ имеем

$$\sum_{\pi} | I_\pi | \leqslant \prod_{j=t}^{k} \frac{2^{m^j-2m^{j-t}} \cdot 3^{m^{j-t}}}{2^{m^j}} = \prod_{j=t}^{k} 2^{-2m^{j-t}} \cdot 3^{m^{j-t}} =$$

$$= \prod_{j=t}^{k} \frac{3^{m^{j-t}}}{4^{m^{j-t}}} = \prod_{j=0}^{k-t} \left(\frac{3}{4}\right)^{m^j} = \left(\frac{3}{4}\right)^{1+m+\cdots+m^{k-t}} =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{m^{k-t+1}-1}{m-1}} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

откуда $\mu(L_{\alpha,\beta}) = 0$. Теорема доказана.

7.2. Алгоритм статистически оптимального моделирования понятий

1. Как следует из теоремы, доказанной в предыдущем параграфе, алгоритмы оптимального моделирования, основанные на матрице *M(B*),* имеют особое значение, так как относятся к почти всем языкам. Во многих случаях они являются статистически оптимальными и еще в одном отношении.

Предположим, что на множестве букв алфавита $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ задано распределение вероятностей $\mathscr{P} = \{p_1 = p(b_1), \ldots, p_m = p(b_m)\}$, описывающее типичную статистическую структуру сообщений. Это означает, что если мы возьмем достаточно длинное сообщение $\alpha \in L$, то почти наверняка можно утверждать, что $|\alpha|_i/|\alpha| \cong p_i$ для всех $i = 1,2\ldots, m$. Это явление часто имеет место как для естественных, так и для искуственных языков. Вероятностная модель языка, в которой иная информация, кроме частотных закономерностей, не учитывается,— одна из наиболее популярных. Но в таком случае однократное применение алгоритма оптимального моделирования, основанного на М*(В*),* к типичной частотной характеристике находит наибольшее сжатие с известным приближением для всего языка.

В этом параграфе описана реализация оптимального q-ичного $(q \geq 2)$ моделирования для языков, эквивалентных B^*,— алгоритм Хаффмана.

2. Согласно теоремам 1.5.2.5 и 5.4.4.4, неравенство Мак-Миллана

$$\sum_{i=1}^{m} q^{-d_i} \leqslant 1$$

является необходимым и достаточным условием существования модели $V \in \mathfrak{D}(B^*)$ такой, что $D(V) = \langle d_1, \dots\dots, d_m \rangle$. V можно выбирать в классе префиксных моделей и, следовательно, оптимальную модель всегда можно выбрать в этом же классе. Часть A_2 алгоритма оптимального моделирования описана в доказательстве теоремы 5.4.4.4. Алгоритм A_1 нахождения спектра $\tilde{d} \in \mathrm{M}(B^*)$, минимизирующего стоимость $C(B^*, \mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{m} p_i d_i$ по произвольному распределению $\mathscr{P}$, извлекается из анализа свойств оптимальной префиксной модели. Этот анализ мы осуществим в настоящем пункте.

Пусть $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$, $C_0 = \min\limits_{\tilde{d} \in \mathrm{M}(B^*)} C(\mathscr{P}, \tilde{d})$ и этот минимум достигается на префиксной моделе $V = \{v_1, \dots\dots, v_m\}$, где $|v_i| = d^0_i$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

(а) $d_1^0 \leqslant d_2^0 \leqslant \dots \leqslant d_m^0$ очевидно, так как при любой перестановке $d_1^0, d_2^0, \dots, d_m^0$, нарушающей монотонность, значение $C(\mathscr{P}, \tilde{d})$ увеличивается.

(б) Если $\alpha \in A^j$ и $j < d^0_m$, то α находится в отношении префиксности с каким-то из слов V: в противном случае любое из модельных слов максимальной длины d^0_m можно было бы заменить на α, сохраняя префиксность модели и уменьшая стоимость моделирования.

(в) Пусть $V_j = V \cap A^j$, $V = V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_l} \cup V_{\bar{D}}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_l < \bar{D}$ и $|V_{\bar{D}}| = kq + v$, где $1 \leq v \leq q$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что

$$V_{\bar{D}} = \bigcup_{i=1}^{k} \alpha_i A \cup \alpha_{k+1} \cdot \tilde{A},$$

где $\tilde{A} \subseteq A$, $|\tilde{A}| = v > 1$, причем $(V \backslash \alpha_{k+1} \cdot \tilde{A}) \cup \{\alpha_{k+1}\}$ — тупиковая префиксная модель. В противном случае можно было бы указать модель с таким же спектром, как и у V, для которой это выполнено.

Пусть, скажем, $V_D = \alpha_1 \cdot A_1 \cup \ldots \cup \alpha_i \cdot A_i,\ A_j \subseteq A,\ j = \overline{1,\ i}$. Так как $|A_j| \leq q$, имеем $k < i$. Следовательно, можно взять $V'_D = \alpha_1 A \cup \cdots \cup \alpha_k \cdot A \cup \alpha_{k+1} \cdot \widetilde{A}$, где $\widetilde{A} = \{a_1,\ \ldots,\ a_\nu\}$.

Тогда для $V' = V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_l} \cup V'_D$, очевидно, $D(V) = D(V')$ и V' — префиксная модель. Если бы при этом оказалось $\nu = |\widetilde{A}| = 1$, то $(V' \backslash \alpha_{k+1} \widetilde{A}) \cup \{\alpha_{k+1}\}$ была бы префиксной моделью меньшей стоимости, что невозможно. Наконец, если бы модель $(V \backslash \alpha_{k+1} \widetilde{A}) \cup \{\alpha_{k+1}\}$ не была тупиковой, т. е. некоторое слово γ не находилось в отношении префиксности с ее словами, то префикс γ_1 этого слова длины $|\alpha_{k+1}| = D - 1$ имел бы это же свойство, что противоречит (б),

(г) Пусть $\{v_{m-\nu+1},\ \ldots,\ v_m\} = \alpha_{k+1} \cdot \widetilde{A},\ \ |v_{m-\nu+1}| = \ldots = |v_m| = D,\ \ \beta \Rightarrow \alpha_{k+1}$ и $p'_{m-\nu+1} = p_{m-\nu+1} + \ldots + p_m$.

Тогда $V' = \{v_1,\ \ldots,\ v_{m-\nu},\ \beta\}$ — тупиковая префиксная модель, оптимальная для распределения вероятностей $\mathscr{P}' = \{p_1, \ldots, p_{m-\nu}, p'_{m-\nu+1}\}$, причем $|V'| < |V|$.

Предтположим, что V' не оптимальна для распределения $\mathscr{P}'$ и спектр $\{d'_1, \ldots, d'_{m-\nu}, d'\}$ обеспечивает меньшую стоимость:

$$C' = \sum_{i=1}^{m-\nu} p_i d'_i + p'_{m-\nu+1} d' < \sum_{i=1}^{m-\nu} p_i d_i^0 + (D-1)\, p'_{m-\nu+1}.$$

Пусть $\{v'_1,\ \ldots,\ v'_{m-\nu},\ v'\}$ — соответствующая модель, $|v'_i| = d'_i\ (i = \overline{1, m-\nu}),\ |v'| = d'$. Тогда для модели $V'' = \{\widetilde{v}'_1,\ \ldots,\ v'_{m-\nu},\ v'\widetilde{A}\}$ и исходного распределения $\mathscr{P}$ имеем

$$C'' = \sum_{i=1}^{m-\nu} p_i d'_i + (d'+1)\, p'_{m-\nu+1} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-\nu} p_i d'_i + d' p'_{m-\nu+1} + p'_{m-\nu+1} < \sum_{i=1}^{m-\nu} p_i d_i^0 +$$

$$+ (D-1)\, p'_{m-\nu+1} + p'_{m-\nu+1} = \sum_{i=1}^{m} p_i d_i^0 = C_0,$$

что невозможно по определению C_0. Противоречие доказывает (в), так как другие свойства V' тривиальны.

(д) Учитывая, что V'—тупиковая префиксная модель, причем $|V'| = m - \nu + 1$, по теореме 3(а) 4.4.4 $q - 1$ должно быть делителем $m - \nu$. Следовательно, $\nu = m - k_0(q - 1)$, где k_0 определяется однозначно из соотношения

$$\frac{m-1}{q-1} - 1 \leqslant k_0 < \frac{m-1}{q-1}.$$

Отсюда также следует, что V есть тупиковая префиксная модель в том и только том случае, если q—1 является делителем m— 1. В частности, оптимальное двоичное моделирование всегда имеет это свойство (ср. теорема 3.6.2.5).

Непосредственно из (г) получаем рекуррентное соотношение для стоимости оптимального моделирования:

$$C_0 = C_0' + p'_{m-\nu+1}, \qquad (1)$$

где C'_0 — стоимость оптимального моделирования для распределения $\{p_1, \ldots, p_{m-\nu}, p'_{m-\mu+1}\}$ и $C_0 = 1$ при $m \le q$.

3. Из рекуррентности (1) ясно, что если найдем спектр оптимальной модели для распределения $\mathcal{P}'$, скажем, $\langle d_1', \ldots, d'_{m-\nu+1}\rangle$, то искомый спектр, на котором достигается C_0 для распределения $\mathcal{P}$, получается преобразованием

$$\langle d_1' \ldots, d'_{m-\nu}, d'_{m-\nu+1}\rangle \to$$
$$\to \langle d_1', \ldots, d'_{m-\nu}, \underbrace{d'_{m-\nu+1}+1, \ldots, d'_{m-\nu+1}+1}_{\nu\ \text{раз}}\rangle.$$

Повторяя редукцию, мы придем к задаче оптимального моделирования для $m = q$, когда единственный оптимальный спектр есть <1, 1, ..., 1>. Эти соображения приводят к следующей реализации алгоритма $\mathcal{A}_1$.

Для $B' \subseteq B$ полагаем $p(B') \Rightarrow \sum_{b \in B'} p(b)$. Алгоритм начинает работу с разбиения B на одноэлементные подмножества $\rho_1 = \{\{b_1\}, \ldots, \{b_m\}\}$. На каждом шаге формируем повое разбиение, объединяя ν классов с наименьшими вероятностями из предыдущего разбиения в один класс (начиная со второго шага $\nu = q$). При этом каждый раз запоминаем, какие буквы B участвовали в объединении (каждое участие буквы в объединении отмечаем единицей в отдельной таблице). Процесс закончен, когда получено разбиение B, состоящее из одного класса. Если b_i участвовала в объединениях d_i раз, то d_i — длина соответствующей ей элементарной модели.

Например, для m = 10, q = 3 и

$$\mathcal{P} = \{0{,}2;\ 0{,}18;\ 0{,}15; 0{,}14; 0{,}13; 0{,}06; 0{,}05; 0{,}04; 0{,}03; 0{,}02\},$$

C_0 = 1, 9 достигается на спектре

$$\langle 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4\rangle$$

(процесс нахождения показывает таблица 1, где звездочкой в строках помечены объединяемые группы букв); в качестве одноой из оптимальных моделей можно взять

$$V = \langle 1, 01, 00, 02, 20, 21, 220, 221, 2220, 2221\rangle.$$

Таблица 1

ρ_1	$\nu\downarrow$	$\{b_1\}\ \{b_2\}\ \{b_3\}\ \{b_4\}\ \{b_5\}\ \{b_6\}\ \{b_7\}\ \{b_8\}\ \{b_9\}^*\ \{b_{10}\}^*$	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}
$P(\rho_1)$	2	0,2; 0,18; 0,15; 0,14; 0,13; 0,06; 0,05; 0,04; 0,03; 0,02									1	1
ρ_2		$\{b_1\}\ \{b_2\}\ \{b_3\}\ \{b_4\}\ \{b_5\}\ \{b_6\}\ \{b_7\}^*\ \{b_8\}^*\ \{b_9, b_{10}\}^*$										
$P(\rho_2)$	3	0,2; 0,18; 0,15; 0,14; 0,13; 0,06; 0,05; 0,04; 0,05							1	1	1	1
ρ_3		$\{b_1\}\ \{b_2\}\ \{b_3\}\ \{b_4\}^*\ \{b_5\}^*\ \{b_6\}^*\ \{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$										
$P(\rho_3)$	3	0,2; 0,18; 0,15; 0,14; 0,13; 0,06; 0,14				1	1	1				
ρ_4		$\{b_1\}\ \{b_2^*\}\ \{b_3\}^*\ \{b_4, b_5, b_6\}\ \{b_7, b_8, b_9, b_{10}\}^*$										
$P(\rho_4)$	3	0,2; 0,18; 0,15; 0,33; 0,14		1	1				1	1	1	1
ρ_5		$\{b_1\}\ \{b_2, b_3, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}\ \{b_4, b_5, b_6\}$										
$P(\rho_5)$	3	0,2; 0,47; 0,33	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		спектр→	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4

4. Здесь докажем еще несколько свойств оптимального моделирования. Пусть $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_m = d(V)$ и $<d_h$ ..., $d_m y$ — спектр длин слов оптимальной q-ичной модели.

Теорема 1.

$$d(V) \leqslant \left]\frac{m-1}{q-1}\right[.$$

Доказательство. Индукция по m. При $m \leq q$ утверждение тривиально. Согласно (г) 2 утверждение справедливо для V': $d(V') \leqslant \frac{m-\nu}{q-1}$. Если $k > 0$, то $d(V) = d(V')$ и утверждение справедливо для V, так как $\frac{m-\nu}{q-1} \leqslant \left]\frac{m-1}{q-1}\right[$. Если же $k = 0$, то $d(V') =$

$$= d(V) - 1 \leqslant \left]\frac{m-\nu}{q-1}\right[= \frac{m-\nu}{q-1}$$

— целое, так как V' — тупиковая префиксная модель. Следовательно, $d(V) \leqslant$

$$\leqslant 1 + \frac{m-\nu}{q-1} = \left]\frac{m-\nu}{q-1} + \frac{\nu-1}{q-1}\right[= \left]\frac{m-1}{q-1}\right[.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *В последовательности $<d_1, ..., d_m>$ можно выбрать подпоследовательность $<l_1, ..., l_t>$ такую, что*

1) $\{d_1, \ldots, d_m\} = \{l_1, \ldots, l_t\}$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{t} 2^{-l_i} = 1$;

3) *любую частичную двоичную модель V такую, что $D(V) = \{l_1, ..., l_t\}$, можно расширить до q-ичной модели V' такой, что $D(V')=\{d_1, ..., d_m\}$.*

Доказательство. Индукция по m. Если $m \leq q$, то утверждение тривиально. Пусть $m > q$. Рассмотрим $\langle d_1, \ldots, d_{m-\nu}, d_m - 1\rangle$ — спектр некоторой оптимальной q-ичной модели, которая по (в)2 тупиковая и содержит меньше слов. По предположению индукции для нее существует искомая подпоследовательность, скажем, $\langle l_1, \ldots, l_{t-1}\rangle$, где $l_{t-1} = d_m - 1$. Тогда $\langle l_1, \ldots, l_{t-2}$, $l_{t-1} + 1,\ l_{t-1} + 1\rangle$ удовлетворяет, как легко проверить, 1) и 2). Любая двоичная (тупиковая) префиксная модель V, реализующа ее, содержит слова α0 и α1 длины l_{t-1}+1. Тогда $(V \setminus \{\alpha 0, \alpha 1\}) \cup \{\alpha\}$ по предположению можно расширить до W, реализующей $\langle d_1, \ldots, d_{m-2}$, $d_{m-1} - 1,\ d_m - 1\rangle$, и взять $V' = (W \setminus \{\alpha\}) \cup \{\alpha 0, \alpha 1\}$, для которой, очевидно, $D(V') = \langle d_1, \ldots, d_m\rangle$. Теорема доказана.

Легко проверить следующее свойство.

Теорема 3. *Если* $\sum_{i=1}^{m} p_i = a$, $p_i' = p_i/a$ *и* $\mathcal{P}' = \{p_1', \ldots, p_m'\}$, *то минимум линейной формы* $\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot d_i$ *на*М*(B*) равен* $a \cdot C(B^*, \mathcal{P}')$, *достигается на тех же* $\tilde{d}$ *, на которых достигается* $C(B^*, \mathcal{P}')$ *и применение алгоритма Хаффмапа к* $\mathcal{P}$ *дает вектор* $\tilde{d} \in M(B^*)$, *на котором достигается этот минимум.*

5. Рассмотрим некоторые примеры.

(а) Пусть $q = 2$ и $\mathcal{P}_m = \{1/2, 1/2^2, \ldots, 1/2^{m-2}, 1/2^{m-1}, 1/2^{m-1}\}$. Вычислим $C(m) \Rightarrow C(B^*, \mathcal{P}_m)$ с помощью рекуррентного соотношения (1). Имеем $C(2) = 1$ и

$$C(m) = \frac{1}{2^{m-2}} + C(B^*, \mathcal{P}_{m-1}) = \frac{1}{2^{m-2}} + C(m-1)$$ при $m>2$.

Отсюда

$$C(m) = \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + C(m-2) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-3}} + \ldots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{2^{m-2}}.$$

(б) Рассмотрим $\mathcal{P}_m = \{1/m, 1/m, \ldots, 1/m\}$. В таком случае

$$C(B^*, \mathcal{P}_m) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d_i$$

и для определения этой величины надо найти минимум суммы длин элементарных моделей q-ичной префиксной модели, состоящей из m слов.

Замечая, что если $\langle d_1, \ldots, d_m \rangle$ удовлетворяет неравенству Мак-Миллана и $d_i + 1 < d$, $(i < j)$, то $\langle d_1, \ldots \ldots, d_i + 1, \ldots, d_j - 1, \ldots, d_m \rangle$ тоже удовлетворяет неравенству Мак-Миллана, а сумма длин при таком пребразовании не меняется, заключаем, что спектр вида

$$\langle \underbrace{i, \ldots, i}_{k}, \underbrace{i+1, \ldots, i+1}_{m-k} \rangle$$

имеется среди тех, на которых достигается минимум $C(B^*, \mathcal{P}_m)$. Из неравенства Мак-Миллана имеем $k \cdot q^{-i} + (m-k) \cdot q^{-(i+1)} \leqslant 1$, откуда $k \leqslant \frac{q^{i+1} - m}{q-1}$, а из условия минимальности суммы длин $(k+1)q^{-i} + (m-k-1)q^{-(i+1)} > 1$, откуда $\frac{q^{i+1} - m}{q-1} < k + 1$. В результате получаем $k = \left[\frac{q^{i+1} - m}{q-1}\right]$ и наименьшее i, при котором такое k существует, есть $i = [\log_q m]$. Следовательно,

$$C(B^*, \mathscr{P}_m) = 1 + [\log_q m] - \frac{1}{m}\left[\frac{q^{1+[\log_q m]} - m}{q-1}\right],$$

откуда получаем оценку

$$C(B^*, \mathscr{P}_m) \leqslant 1 + \log_q m. \qquad (2)$$

(в) Пусть

$$\mathscr{P}_{k,l} = \left\langle \frac{1^{(2)}}{4}, \frac{1^{(2^2)}}{4^2}, \ldots, \frac{1^{(2^{k-1})}}{4^{k-1}}, \frac{1^{(2^k+l)}}{4^k} \right\rangle,$$

$0 \leq l \leq 2^k$ (верхние индексы показывают число вхождений числа в множество). Здесь

$$a = \sum p_i = \frac{4^k}{4^k - 2^k + l}.$$

Покажем, что при $q = 2$

$$\frac{1}{a} \cdot C\left(\mathscr{P}'_{k,l}\right) = C(B^*, \mathscr{P}_{k,l}) = 4 - \frac{2k+5}{2^k} + \frac{(2k+1)l}{4^k}. \qquad (3)$$

Назовем числа вида $1/4^i$ правильными, остальные — испорченными. Наряду с $\mathscr{P}_{k,l}$ будем рассматривать испорченные частотные характеристики $\mathscr{P}^*_{k,l}$ вида

$$\left\langle \frac{1^{(2)}}{4}, p'_1, \ldots, p'_{i_1}, \frac{1^{(2^2)}}{4^2}, p''_1, \ldots, p''_{i_2}, \ldots, p_1^{(k-1)}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, p_{i_{k-1}}^{(k-1)}, \frac{1^{(2^k+l)}}{4^k} \right\rangle,$$

где $p_i^{(j)}$ — испорченные числа.

Лемма. *Для любой $\mathscr{P}^*_{k,l}$ существует оптимальная модель V такая, что $d(V) = 2k$.*

Доказательство. Индукция по k. При $k = 1, 2$ утверждение проверяется непосредственно. Пусть $k \geq 3$. Применяем алгоритм Хаффмана. Первая серия объединений касается букв с вероятностями $1/4^k$. При этом формируется по крайней мере $2^{k-1} + [l/2]$ групп с вероятностями $2/4^k$. Одна из них, возможно, объединяется с какой-либо из букв с испорченной вероятностью $p^{(k-1)}$, остальные объединяются попарно между собой, производя не менее

$$[(2^{k-1} + [l/2] - 1)/2] \geqslant 1$$

групп с вероятностями $1/4^{k-1}$. Одну из них помечаем. Возникший хвост испорченных вероятностей (из $p^{(k-1)}$ и, быть может, оставшейся $2/4^k$) частично перейдет в группы с вероятностями $1/4^{k-1}$, частично — в группы с испорченными вероятностями $p^{(k-2)}$ и, возможно, одна группа останется в хвосте — с наименьшей испорченной вероятностью или с вероятностью $2/4^k$. Последнюю, если такая существует, в согласии с алгоритмом Хаффмана, объединим с одной из непомеченных групп с вероятностью $1/4^{k-1}$. После этого шага получаем испорченную характеристику $\mathscr{P}^*_{k-1,l'}$ с некоторым l'. Для нее по предположению индукции найдется оптимальную модель V_i, с $d(V_i) = 2(k — 1)$. Так как слова максимальной длины можно сопоставить любым из наименьших вероятностей, сопоставим какое-то из них помеченной группе. В результате слова, соответствующие буквам этой группы, будут иметь длину $2(k — 1) + 2 = 2k$ (так как каждая из этих букв до попадания в помеченную группу участвовала в двух объединениях). Следовательно, утверждение справедливо и для $\mathscr{P}^*_{k,l}$.

Лемма доказана.

Мы имеем

$$C(B^*, \mathscr{P}_{k,l}) \geqslant \frac{1+2k}{4^k} + C(B^*, \mathscr{P}_{k,l-1}) \text{ при } l > 0,$$

$$C(B^*, \mathscr{P}_{k,0}) = \frac{1}{2^{k-1}} + C(B^*, \mathscr{P}_{k-1\, 2^{k-2}}). \qquad (5)$$

(4) следует из того, что $\langle v_1,...,u_{m-1}\rangle$ не является тупиковой, поэтому не оптимальна для $\mathscr{P}_{k,l-1}$ и

$$\sum_{i=1}^{m-1} p_i \cdot |v_i| \geqslant C(B^*, \mathscr{P}_{k,l-1}) + \frac{1}{4^k}, \text{ а } p_m \cdot |v_m| = \frac{2k}{4^k},$$

так как $|v_m| = d(V) = 2k$. (5) получается непосредственным применением рекуррентности (1).

Из (4) и (5) легко получается оценка

$$C(B^*, \mathscr{P}_{k,l}) \geqslant 4 - \frac{2k+5}{2^k} + \frac{(2k+1)\,l}{4^k}, \qquad (6)$$

и равенство (3) следует из существования модели V, имеющей спектр

$$\langle 2^{(2)}, 4^{(2^2)}, 6^{(2^3)}, \ldots, 2(k-1)^{(2^{k-1})}, 2k-1^{(2^k-l)}, 2k^{(2l)}\rangle. \qquad (7)$$

Действительно, (7) реализуем, так как для нее выполняется неравенство Мак-Миллапа:

$$2 \cdot 2^{-2} + 2^2 \cdot 2^{-4} + \ldots + 2^{k-1} \cdot 2^{-(2k-2)} +$$
$$+ (2^k - l)2^{-(2k-1)} + 2l \cdot 2^{-2k} =$$
$$= 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-(k-1)} + 2^{-(k-1)} = 1.$$

В то же время стоимость соответствующего моделирования достигает нижней границы (6):

$$C = \frac{2\cdot 2}{4} + \frac{2^2\cdot 4}{4^2} + \ldots + \frac{2^{k-1}\cdot 2(k-1)}{4^{k-1}} + \frac{(2^k - l)(2k-1) + 2k\cdot 2l}{4^k} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{k-1}{2^{k-1}}\right) + \frac{2k-1}{2^k} + \frac{(2k+1)\,l}{4^k} = 4 - \frac{2k+5}{2^k} + \frac{l\,(2k+1)}{4^k}.$$

Таким образом, (3) доказано.
Этот пример использован в 8.2. 5.

7.3. Статистическая характеристика эффективности автоматного моделирования

1. Использование памяти при моделировании повышает эффективность моделировании (увеличивает сжатие). Оно проводится также на модели языка B^* с распределением вероятностей на буквах алфавита B: $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$. Здесь важную роль играет функция распределения вероятностей

$$H(\mathcal{P}) = -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_q p_i,$$

называемая энтропией источника сообщений.

Теорема 1. $C(B^*, \mathcal{P}) > H(\mathcal{P})$.

Доказательство. Учитывая, что $\log_q x \leq (x - 1) \log_q e$ при всех положительных x (что равносильно $x \leq e^{x-1}$), и то, что для реализуемого спектра $\langle d_1, d_2, ..., d_m\rangle$ выполняется неравенство Мак-Миллана, имеем

$$H - C = -\sum p_i \log p_i - \sum p_i \cdot d_i = \sum p_i\left(\log \frac{1}{p_i} - d_i\right) = \sum p_i\left(\log \frac{1}{p_i} + \log q^{-d_i}\right) = \sum p_i \log\left(\frac{q^{-d_i}}{p_i}\right) \leqslant \sum p_i\left(\frac{q^{-d_i}}{p_i} - 1\right)\log e = \log e\cdot\left(\sum q^{-d_i} - \sum p_i\right) = \log e\cdot\left(\sum q^{-d_i} - 1\right) \leqslant 0,$$

следовательно, $H \leq C$ и теорема доказана.

Теорема 1 справедлива и для бесконечных алфавитов при условии, что энтропия соответствующего распределения вероятностей существует

При некоторых распределениях стоимость $C(B^*, \mathcal{P})$ может достигать нижней оценки. Так, для распределения $\mathcal{P}_m$ из примера (а) 5.2 имеем

$$H(\mathscr{P}_m) = -\sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2^i}\log_2\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{m-1}}\log_2\frac{1}{2^{m-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i}{2^i} + \frac{m-1}{2^{m-1}} = 2 - \frac{m+1}{2^{m-1}} + \frac{m-1}{2^{m-1}} = C(m).$$

В общем же случае $C=H+\varepsilon(\mathscr{P})$, где $0\leq\varepsilon(\mathscr{P})<1$, как показывает следующая теорема.

Теорема 2. $C(B^*, \mathscr{P}) < 1 + H(\mathscr{P})$.

Доказательство. Возьмем $d_i =]-\log_q p_i[,\ i=\overline{1, m}.$ Тогда $q^{-d_i} \leqslant p_i < q^{-(d_i-1)}$, откуда $\sum_{i=1}^{m} q^{-d_i} \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$ Следовательно, спектр $<d_1, ..., d_m>$ реализуем. Но $d_i < -\log_q p_i + 1$, откуда $p_i d_i < -p_i \log_q p_i + p_i$ и, суммируя по i, получаем

$$C(B^*, \mathscr{P}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i d_i < -\sum_{i=1}^{m} p_i \log_q p_i + \sum_{i=1}^{m} p_i = H(\mathscr{P}) + 1.$$

Теорема доказана.

Стоимость оптимального моделирования может быть как угодно близка и к верхней оценке из теоремы 2. Для распределения $\mathscr{P}_m$ из примера (б) 5.2 при $q = k^k,\ m = k^{k+i}$ имеем

$$H(\mathscr{P}_m) = \log_{(k^k)} k^{k+1} = (k+1)\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{k},$$

$$C(\mathscr{P}_m) = 1 + \left[1 + \frac{1}{k}\right] - \frac{1}{k^{k+1}}\left[\frac{k^{k\left(1+\left[1+\frac{1}{k}\right]\right)} - k^{k+1}}{k^k - 1}\right] =$$

$$= 2 - \frac{1}{k^{k+1}}\left[\frac{k^{2k} - k^{k+1}}{k^k - 1}\right] = 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^k}.$$

Следовательно, $\varepsilon(\mathscr{P}_m) = 1 - \frac{2}{k} + \frac{1}{k^k} \to 1$ при $k \to \infty$.

2. Дополнительные возможности сжатия могут возникать при автоматном моделировании. Вместо того чтобы моделировать каждую букву, разобьем понятие на блоки длины N, которые и будем моделировать как буквы нового алфавита $B_N \Rightarrow B^N$.

Пусть $\mathscr{P}_N$ — распределение вероятностей на B_N, которое индуцируется распределением $\mathscr{P}$ на B:

$$p_{i_1 \ldots i_N} \Rightarrow P\left(b_{i_1} \ldots b_{i_N}\right) = p_{i_1} \ldots p_{i_N}.$$

Теорема 1. $H(\mathscr{P}_N) = NH(\mathscr{P})$.

Доказательство. Индукция по N. Утверждение тривиально при $N = 1$, предположим его верным и при $N = 2, ..., k - 1$. Тогда

$$H(\mathscr{P}_k) = -\sum_{\langle i_1,\dots,i_k\rangle} p_{i_1}\dots p_{i_k}\log_q p_{i_1}\dots p_{i_k} -$$

$$-\sum p_{i_1}\dots p_{i_k}\log_q p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}} - \sum p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}\log_q p_{i_k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} p_j\left(-\sum p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}\log_q p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}\right) -$$

$$-\sum_{j=1}^{m} p_j\log_q p_j\left(\sum p_{i_1}\dots p_{i_{k-1}}\right) =$$

$$= H(\mathscr{P}_{k-1})\cdot\sum_{j=1}^{m} p_j + H(\mathscr{P})\cdot\sum_{j=1}^{m^{k-1}} p_j^{(k-1)} =$$

$$= H(\mathscr{P}_{k-1}) + H(\mathscr{P}) = (k-1)\,H(\mathscr{P}) + H(\mathscr{P}) =$$

$$= k\cdot H(\mathscr{P}).$$

Теорема доказана.

Покажем теперь, что, выбирая длину блока N достаточно большой, можно сделать стоимость моделирования на одну букву сообщения $C_N(B^*, \mathscr{P}) \Rightarrow \frac{1}{N} C\left(B_N^*, \mathscr{P}_N\right)$ сколь угодно близкой к $H(\mathscr{P})$.

Теорема 2. $H(\mathscr{P}) \leqslant C_N(B^*, \mathscr{P}) < H(\mathscr{P}) + \frac{1}{N}$.

На основании предыдущих теорем этого параграфа имеем

$$N\cdot H(\mathscr{P}) = H(\mathscr{P}_N) \leqslant C\left(B_N^*, \mathscr{P}_N\right) =$$

$$= N\cdot C_N(B^*, \mathscr{P}) < H(\mathscr{P}_N) + 1 = N\cdot H(\mathscr{P}) + 1.$$

Отсюда после деления на N получаем

$H(\mathscr{P}) \le C_N(B^*, \mathscr{P}) < H(\mathscr{P}) + (1/N)$

Теорема доказана.

7.4. Статистический подход к помехоустойчивости моделирования

1. При наиболее распространенной статистической модели источника помех, действующего в двоичном канале связи, характеристикой источника помех принимают вероятность p, с которой в любом разряде независимо от других разрядов может произойти аддитивная ошибка. Такая модель канала связи называется двоичным симметричным каналом с вероятностью ошибки p (ДСК (p)). Предполагаем, что в канале реализуется схема равномерного моделирования $S_{k,n}$.

В ДСК(p) при любом способе демоделирования остается вероятность $p_{\text{ош}}$ неправильного демоделирования. Если принцип повышения надежности канала состоит в обнаружении ошибок при демоделировании, то $p_{\text{ош}}$ понимается как вероятность необнаружения ошибки в блоке. Если же задача состоит в исправлении ошибок (и, таким образом, каким-либо способом, например, по принципу максимального правдоподобия, демоделируется любое двоичное слово длины n), то $p_{\text{ош}}$ есть вероятность неправильного демоделирования в обычном смысле.

2. Рассмотрим вопрос о том, как связана $p_{\text{ош}}$ в ДСК *(p)* с избыточностью, если в канале используется код Хемминга V_{n-1} для обнаружения ошибок.

$V_{n-1,\, n}$ — линейная модель, поэтому, если $\alpha \in V_{n-1,\, n}$, то $\alpha \oplus x \in V_{n-1,\, n}$ в том и только том случае, если $x \in V_{n-1,\, n}$. Таким образом, ошибки в переданном сообщении α ие будут обнаружены в том и только том случае, если вектор-помеха $x \in V_{n-1,\, n} \setminus \{\bar{o}\}$. Это означает, что $p_{\text{ош}}$ есть вероятность вектора-помехи четного веса (т. е. вероятность четного числа ошибок в n разрядах). Следовательно,

$$p_{\text{ош}} = \binom{n}{2} p^2 (1-p)^{n-2} + \binom{n}{4} p^4 (1-p)^{n-4} + \ldots =$$

$$= \sum_{j=1}^{[n/2]} \binom{n}{2j} p^{2j} (1-p)^{n-2j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(1 + (-1)^i\right) p^i (1-p)^{n-i} -$$

$$- (1-p)^n = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \times$$

$$\times p^i (1-p)^{n-i} - (1-p)^n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2} - (1-p)^n.$$

В таблице 2 приведены значения $p_{\text{ош}}$ и избыточности R для p = 0, 1 и n = 2,3,…,8. Естественно, с уменьшением избыточности $p_{\text{ош}}$ возрастает.

Таблица 2

n	R_n	$p_{\text{ош}}$
2	1	0,01
3	1/2	0,027
4	1/3	0,048
5	1/4	0,073
6	1/5	0,099
7	1/6	0,126
8	1/7	0,153

3. К случаю демоделирования с исправлением ошибок можно доказать теорему существования, которую приведем здесь без доказательства для ДСК *(р).*

Предположим, что символы 0, 1 появляются в сообщениях, подлежащих передаче, с равными вероятностями. Пусть $v_{\mathcal{K}}$ — скорость передачи сигналов по каналу связи $\mathcal{K}$, т. е. число двоичных символов, которые могут быть переданы в единицу времени. Скорость передачи информации по каналу связи $\mathcal{K}$, в котором используется равномерное моделирование по схеме $\mathfrak{S}_{k,n}$, равна $v_{\mathcal{K}}(\mathfrak{S}_{k,n}) = k \cdot v_{\mathcal{K}}/n$ (k информационных символом требуют передачи *п* двоичных сигналов и, следовательно, $n/v_{\mathcal{K}}$ единиц времени, поэтому передача одного символа требует в среднем $n/k \cdot v_{\mathcal{K}}$ единиц времени).

Величина $\mathfrak{C}_{\mathcal{K}} = v_{\mathcal{K}}$ (1 + *p* log$_2$ *p* + (1 — *p)* log$_2$ (1 — *p))* называется пропускной способностью канала связи $\mathcal{K}$=ДСК(*р*).

Если *р(α)* — вероятность неправильного демоделирования, когда передан блок *α,* то

$$p_{\text{ош}} = 2^{-k} \sum_{\alpha \in E^k} p(\alpha)$$

— средняя вероятность ошибки по всем блокам.

Теорема 1. *Для любых* ε>0 *и* δ>0 *существуют* k, *п такие, что* $v_{\mathcal{K}}(\mathfrak{S}_{k,n}) \geqslant \mathfrak{C}_{\mathcal{K}} - \varepsilon$ *и* $p_{\text{ош}} < \delta$.

Для любого ε > 0 *существует* δ > 0 *такое, что при любых* k, n *из* $v_{\mathcal{K}}(\mathfrak{S}_{k,n}) > \mathfrak{C}_{\mathcal{K}} + \varepsilon$ *следует* $p_{\text{ош}} \geq \delta$.

4. Алгоритм оптимального моделирования оставляет больший или меньший произвол как при выборе спектра $\tilde{d}$ М (*В**), так и в выборе модели *V,* реализующей этот спектр. Безразличный с точки зрения стоимости моделирования, этот выбор иногда может обеспечить некоторую помехоустойчивость моделирования и без введения дополнительной избыточносш. Характер такой помехоустойчивости — статистически типичная локальность влияния ошибок (так называемая самосинхронизация).

Самосинхронизация с задержкой *Т* состоит в том, что если с позиции *t* информация локализуется неправильно, то не позже чем с позиции *t* + *Т* элементарные модели на основании накопленной к этому моменту информации локализуются уже правильно. В разделе 5 § 5 п. 5 было показано, как самосинхронизация обеспечивается за счет введения избыточности. Рассмотрим пример другого рода. Пусть алфавитное моделирование задано схемой

$$a \to 1, \quad b \to 01, \quad c \to 00$$

и в сообщении 00/1/01/1/01 (косая черга использована для локализации элементарных моделей) произошла ошибка в первом разряде, т. е. на вход схемы демоделирования поступила последовательность 10101101. Локализация элементарных моделей в этой последовательности будет выполнена так: 1/01/01/1/01. Ошибка локализовалась здесь с задержкой 2 и неправильно будут демоделированы только две первые буквы сообщения: $\underline{ab}bab$ вместо $\underline{c}abab$.

Слово α называется *синхронизатором* слова β относительно модели *V,* если $\beta\alpha \in V^*$. Слово α называется синхронизатором для множества слов *W,* если оно является синхронизатором для каждого слова из этого множества. Слово α называется синхронизатором для модели *V,* если оно является синхронизатором для любого суффикса слов из *V.*

В связи с предыдущим примером легко проверить, что слово «1» является синхронизатором для модели <1, 01, 00>.

Если α — синхронизатор для *V,* то схема демоделирования после любой ошибки будет неправильно локализовать информацию не дольше чем встретится вхождение синхронизатора. Поэтому сообщения, у которых задержка синхронизации больше *T,* в префиксах длины *T* не имеют вхождений синхронизатора α (здесь имеются в виду сообщения, у которых неправильно локализована первая элементарная модель).

Модель может иметь синхронизатор только при условии, что она тупиковая префиксная. Однако, если частичная модель, порожденная подалфавитом алфавита канала, имеет синхронизатор, то и вся префиксная модкль, включающая в себя данную частичную, имеет синхронизатор в следующем расширенном смысле: для любого слова β в алфавите канала *A* либо $\beta\alpha \in V^*$, либо $\beta\alpha A^* \cap V^* = \varnothing$. Мы далее рассматриваем только «чистую» задачу самосинхронизации и, следовательно, только тупиковые модели. В действительности оптимальные модели всегда относятся к этому классу, если q — 1 является делителем m — 1, в частности, при двоичном моделировании.

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1.9.6.4, показывают, что для тупиковой префиксной модели доля сообщений длины *N,* у которых неправильно локализована первая элементарная модель и задержка синхронизации больше *T,* не превосходит $(1 - 1/q^s)^{T/s}$ ($s = |\alpha|$). А так как $(1 - 1/q^s)^{T/s} \to 0$ при $T \to \infty$, имеет место

Теорема 1. *Если существует синхронизатор модели V, то доля промоделированных сообщений с неправильной локализацией первой* *элементарной модели и задержкой синхронизации, большей T, стремится к нулю при возрастании T.*

Таким образом, если *V* имеет синхронизатор, то почти всегда влияние ошибки локализуется в конечной области (самосинхронизация происходит с конечной задержкой). Поэтому модели, имеющие синхронизатор, будем называть также почти всегда самосинхронизирующимися.

Имеется необходимое спектральное условие существования синхронизатора у модели $V = \{ v_1, \dots, v_m\}$:

$$d \Rightarrow \text{НОД}\,(d_1, \dots, d_m) = 1. \qquad (1)$$

Действительно, если $d > 1$, то, каково бы ни было слово α длины *s*, оно не может синхронизировать слова длины *f* при $j + s \not\equiv 0 \pmod d$.

Другим необходимым условием, как уже отмечалось, является

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{q^{d_i}} = 1. \qquad (2)$$

На самом деле (1), (2) составляют необходимое и достаточное условие существования модели, имеющей спектр длин слов $<d_1, \dots, d_m>$ и обладающей синхронизатором. Последующая часть этого параграфа относится к доказательству этого факта, включая алгоритм построения моделей, обладающих синхронизатором.

5. Здесь установим критерии, относящиеся к самосинхронизации. Пусть *V* — тупиковая префиксная модель в алфавите канала связи $A = \{0, 1, \dots, q — 1\}$. На множестве всех слов A^* определим отображение $\alpha \to \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ однозначно определяется из условий: $\alpha \in V^* \cdot \alpha$ и $\bar{\alpha}$ — префикс некоторого слова *V* или $\bar{\alpha} = \lambda$.

Для произвольного слова α определим преобразование ψ_α множества A^* в множество префиксов *V*, включающее λ: $\psi_\alpha\beta \Rightarrow \psi_\alpha(\beta) = \overline{\beta\alpha}$.

Учитывая, что $v_i\alpha = \alpha$, непосредственно из определений следует

Теорема 1. *Слово* α *является синхронизатором для V в том и только том случае, если* $\psi_\alpha(A^*) = \psi_\alpha(\pi(V) \cup \{\lambda\}) = \{\lambda\}$.

Следовательно, свойство α быть синхронизатором тестируется на конечном множестве слов. Вопрос о существовании синхронизатора для модели *V* также допускает алгоритмическое решение. Из того, что

$$\psi_{\alpha\beta}(\gamma) = \overline{\gamma\alpha\beta} = \overline{\overline{\gamma\alpha}\beta} = \psi_\beta(\overline{\gamma\alpha}) = \psi_\beta(\psi_\alpha(\overline{\gamma})),$$

заключаем, что множество всех ψ_α образует конечную полугруппу преобразований множества $\pi(V) \cup \{\lambda\}$ в себя, порожденную образующими ψ_i: $i = \overline{0,\ q-1}$. Если $|\pi(V) \cup \{\lambda\}| = k$ (очевидно, что

$$k \leqslant \sum_{i=1}^{m} d_i \leqslant md(V) \Big),$$

то число элементов этой полугруппы не превосходит k^k — числа всех преобразований этого множества в себя. Но из $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha$ следует $\psi_{\alpha\beta\gamma} = \psi_\gamma\psi_{\alpha\beta} = \psi_\gamma\psi_\alpha = \psi_{\alpha\gamma}$, поэтому всякое ψ_α представимо через образующие ψ_i словом длины не более k^k. Эта величина характеризует сложность вычисления всей полугруппы сверху (при таком вычислении, в частности, выяснится вопрос о существовании синхронизаторов для *V*).

В действительности вопрос о существовании синхронизаторов для *V* решается несколько проще с помощью регулярного представления множества *S(V)* всех синхронизаторов модели *V*. Определим индуктивно регулярный источник Г. Начальное состояние берем $q_0 \Rightarrow \pi(V) \cup \{\lambda\}$ и функцию следующего состояния опроделяем как

$$\varphi_\Gamma(\psi_i, q) = \{\overline{\alpha \cdot i} | \alpha \in q\}.$$

Единственным заключительным состоянием является $\{\lambda\}$. Число состояний источника Г, очевидно, не превосходит 2^k.

Теорема 2. L (Г)=*S(V). Если S(V)≠Ø, то длина кратчайшего из синхронизаторов не превосходит* 2^k.

Слова L (Г) представляют собой преобразования, записанные через образующие (в этой записи преобразования произведения выполняются слева направо). Легко понять, что источник Г автоматный, полностью определенный $\psi_{i_1} \dots \psi_{i_k} = \psi_{i_1 \dots i_k}$ и

$$\varphi_\Gamma(\psi_\alpha, q_0) = \varphi_\Gamma(\psi_{i_1} \dots \psi_{i_k}, q_0) = \overline{A^* \cdot \alpha}.$$

В дальнейшем будет полезно следующее достаточное условие существования синхронизатора.

Теорема 3. *Пусть V — тупиковая префиксная модель и* $0^i \in V$. *Если существует синхронизатор для множества* $\{\lambda, 0, 00, \dots, 0^{i-1}\}$, *то существует синхронизатор и для V*.

Доказательство. Если $\overline{\{\lambda, 0, \dots, 0^{i-1}\} \cdot \alpha} = \{\lambda\}$, то достаточно взять $\beta = 0^{d(V)} \cdot \alpha$ в качестве синхронизатора для *V:* имеем тогда $\overline{A^* \cdot \beta} = \overline{\{\lambda, 0, \dots, 0^{i-1}\} \cdot \alpha} = \{\lambda\}$, и теорема доказана.

Следующий пример показывает, что выбор модели при заданном спектре, удовлетворяющем (1), (2), имеет существенное значение для решения вопроса о самосинхронизации.

Пусть $q = 2$, $\vec{d} = \langle 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4\rangle$. Следующая модель реализует этот спектр, но не имеет синхронизаторов:

$$\langle 01, 000, 100, 110, 111, 0010, 0011, 1010, 1011\rangle.$$

Дело в том, что это так называемая *бипрефиксная* модель (т. е. модель, полученная обращением всех ее слов, тоже префиксная) и слова, не принадлежащие V^*, относительно этой модели не могут синхронизироваться. Возьмем другую реализацию этого же спектра:

$$\langle 01,\ 000,\ 001,\ 100,\ 101,\ 1100,\ 1101,\ 1110,\ 1111 \rangle.$$

Кратчайший путь, по которому в источнике Г из начального состояния достигается заключительное, показан на рис. 1.

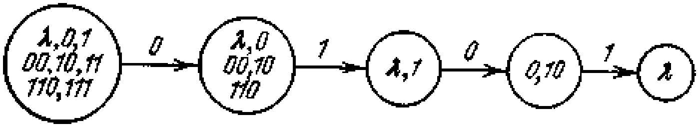


Рис. 1.

Этот путь порождает кратчайший синхронизатор 0101.

6. **Теорема 1.** *Если для спектра* $d_1 \le d_2 \le \ldots \ldots \le d_m$ *выполнены условия* (1), (2), *то существует модель, реализующая этот спектр и имеющая синхронизатор.*

Доказательство. Если $d_1 = 1$, то утверждение теоремы тривиально: любая модель с данным спектром имеет синхронизатор $v^{d_1^m}$. Поэтому будем предполагать, что $2 \le d_1 \le d_2 \le \ldots \ldots \le d_m = D$. Также, ввиду теоремы 2.4.2 и сказанного в п. 4, теорему достаточно доказать для двоичных моделей и далее считаем $q = 2$.

Алгоритм построения искомой модели состоит в следующем. Рассмотрим треугольную таблицу с D строками и D столбцами (таблица 3).

Таблица 3

1						
1 0	0 1					
$1\ 0^2$	0 1 0	$0^2\ 1$				
$1\ 0^3$	$0\ 1\ 0^2$	$0^2\ 1\ 0$	$0^3\ 1$			
....	....	....	.....	.....	......	......
10^{D-1}	$01\ 0^{D-2}$	$0^2 1\ 0^{D-3}$	$0^3 1\ 0^{D-4}$	...	$0^{D-2}10$	$0^{D-1}1$

Заметим, что два слова из этой таблицы находятся в отношении префиксности в том и только том случае, если они находятся в одном столбце. Пусть $\{d_1, \ldots, d_m\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Строим

$V = V_{i_1} \cup \ldots \cdots \cup V_{i_k}$, где $V_j = V \cap A^j$— блок слов длины j. Пусть n_j — число вхождений j в $\{d_i, ..., d_m\}$. Блок V_{i_1} выбираем из строки с номером i_1 слева направо. Если $n_{i_1} > i_1$, то строку дополняем до V_{i_1} произвольным подмножеством слов длины i_1 не включая только 0^{i_1}. Столбцы, содержащие слова, включенные в модель, в дальнейшем построении не участвуют. V_{i_2} выбираем теперь из строки с номером i_2 слева направо, начиная с первого неиспользованного столбца; если n_{i_2} больше, чем число имеющихся в строке слов, то пополняем произвольным подмножеством слов длины i_2, так чтобы выполнялось свойство префиксности и 0^{i_2} не входило в V_{i_2}, если $2 < k$. Аналогично строим следующие блоки, на последнем k-м шаге выбор блока V_D определен однозначно и $0^D \in V_D$. Например, одна из моделей, соответствующих этому построению, для спектра <2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4> есть <10, 010, 001, 111, 011, 0001, 0000, 1100, 1101) (один из синхронизаторов этой модели - 01010).

Модель V содержит по элементу из каждого столбца, поэтому для каждого j = 0, 1,…, D — 1 в нем имеется слово $w_j \Rightarrow 0^j 10^{r_j - j - 1}$ и $w_D \Rightarrow 0^D \in V$. Очевидно, что $D \geqslant |w_j| = r_j \geqslant 1 + j$ и по условию $\text{НОД}(r_0, r_1, \ldots, r_{D-1}) = 1$.

Покажем, что из слов $u \Rightarrow 0$ и $v \Rightarrow 10^D$ можно сконструировать синхронизатор для V. Согласно теореме 3.2 достаточно указать синхронизатор для множества слов $\{\lambda, 0, 0^2, \ldots, 0^{D-1}\}$. Словам $\alpha = \alpha(u, v)$ соответствуют отображения ψ_α этого множества в себя. Сопоставляя словам 0^j (j = 0, 1, 2, ..., D — 1) натуральные числа j, мы можем рассматривать ψ_α как преобразования $I \Rightarrow \{0, 1, 2, ..., D - 1\}$ в себя. ψ_u и ψ_v будем обозначать для краткости через u, v. В полугруппе $П = П(u, v)$ преобразований I в себя, порожденной образующими u, v, существует элемент μ такой, что $I\mu \equiv 0$, — докавательство этого утверждения содержится в следующем пункте. Но, в силу теорем 2, 3 п. 5, разложение μ по 0 и 10^D является в таком случае синхронизатором для V. Теорема доказана.

7. Через $[t]_D$ будем здесь обозначать наименьший неотрицательный вычет i по модулю D, через $[t]'_D$ — наименьший положительный вычет i по модулю D. Легко проверить справедливость следующих соотноше-ний:

$$[[i]_D + j]_D = [i + j]_D,\ [i]_D = [i \pm D]_D,$$
$$[D]'_D = [0]'_D = D.$$

Учитывая, что в разложениях $\alpha(u, v)$ по V могут участвовать только элементарные модели w_0 (i =0, 1,…, D), преобразования u и v множества I в себя можно определить следующими формулами: для произвольного $j \in I$

$$ju = [j + 1]_D,$$
$$jv = D - (r_j - j - 1) = [j + 1 - r_j]_D.$$

Лемма. *В полугруппе* $\Pi = \Pi(u, v)$, *порожденной преобразованиями u и v, содержится элемент* μ *такой, что* $I\mu \equiv 0$.

Доказательство. Пусть $I_p \Rightarrow \{D - 1, D - 2, \ldots$

$\ldots, D - p\}$ $(p = 1, D)$, $I_D = I$.

(А) $|I_D \cdot v| < |I_D|$. Действительно, так как $r_{D-1} = D$, имеем $(D - 1)v = 0$. Значит, если $|I_D \cdot v| = |I_D|$, то $iv \neq 0$ при $i < D - 1$, т. е. при $i < D - 1$ имеет место $iv = D - (r_i - i - 1)$. Пусть t — такое, что $r_{t-1} < r_t = \ldots \ldots = r_{D-1} = D$ (такое $t > 0$ существует, так как иначе все $r_i = D$ и $\text{НОД}(r_0, r_1, \ldots, r_{D-1}) = D = 1$). Тогда для всех $i = t, D - 2$ имеем $iv = i + 1$ и, следовательно,

$$\{t, t + 1, \ldots, D - 1\}v = \{t + 1, \ldots, D - 1, 0\}.$$

Но $(t - 1)v = D + t - r_{t-1} > t$, так как $r_{t-1} < D$, т. е. для какого-то $j \in \{t, t + 1, \ldots, D - 1\}$ имеем $jv = (t - 1)v$ — противоречие, и (А) доказано.

Пусть Π_n — подполугруппа Π, состоящая из всех преобразований f, отображающих I в I_n и тождественных на I_n.

(Б) $\Pi_n \neq 0$ при некотором $n < D$. Действительно, рассмотрим элемент vu^{D-1}. Имеем $ivu^{D-1} = [[i - r_i +$

$$+ 1]_D + D - 1]_D = \begin{cases} i & \text{при } i \in I_{D-t}, \\ i + D - r_i > i & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где t выбрано в доказательстве (А). Но тогда найдется l такое, что $(vu^{D-1})^l \in \Pi_{D-t}$, $D-t<D$, и (Б) доказано.

Пусть $d = \min\{n | \Pi_n \neq \varnothing\}$. Так как Π_1 состоит из единственного отображения f: $If = D - 1$ (если непусто) и $Ifu = (D - 1)u \equiv 0$, то для доказательства леммы достаточно доказать, что $d = 1$. Для этого займемся анализом Π_d.

(В) Π_d состоит из единственного элемента f такого, что

$$(D - i) f = D - [i]'_d. \qquad (3)$$

Предположим противное: $g \in \Pi_d$ и $g \neq f$. Для $i = 1, 2, \ldots, d$ (3) выполняется и для g — в этом случае $i = [i]'_d$, и потому

$(D-i)\,g = D-i = D-[i]'_d$. Но, так как $g \neq f$, существует наименьшее j ($j > d$) такое, что

$$(D-j)\,g \neq D-[j]'_d.$$

(B_1) Можно предполагать, что $j = d+1$.

Рассмотрим $u^x g$ с $x = D-(j-d-1)$. Очевидно, $Iu^x g \subseteq I_d$, а если $D-i \in I_d$, то $1 \le i \le d$ и

$$(D-i)u^x = [D-i+D-j+d+1]_D = D-(i+j-d-1).$$

Но $i+j-d-1 < j$ и по предположению о j имеем

$$(D-i)\,u^x g = D-[i+j-d-1]'_d \in I_d.$$

Когда i пробегает значения от 1 до d, $[i+j-d-1]'_d$ пробегает это же множество значений, следовательно, $u^x g$ есть перестановка на I_d, а значит, некоторая степень $u^x g$, скажем, $h = (u^x g)^l \in \Pi_d$. Но для h мы имеем $(D-d-1)h \neq D-1$, т. е. для h выполнено $j = d+1$. Действительно, если $(D-d-1)\,h = D-[d+1]'_d = D- -1$, то

$$(D-1)\,u^x g = (D-1+D-j+d+1)\,g =$$
$$= (D-(j-d))\,g = D-[j-d]'_d = D-[j]'_d,$$
$$(D-d-1)\,u^x g = (D-d-1+D-j+d+1)g =$$
$$= (D-j)\,g,$$

откуда

$$(D-d-1)\left(u^x g\right)h = (D-d-1)\,h\left(u^x g\right) = (D-1)u^x g =$$
$$= D-[j]'_d = ((D-j)\,g)\,h = (D-j)\,g,$$

так как $(D-j)g \in I_d$, а h тождественна на I_d. Но тогда $D-[j]'_d = (D-j)\,g$, а это противоречит минимальности j, и (B_1) доказано.

(B_2) Из (B_1) следует, что $(D-d-1)g = D-d'$, где $d'>1$ и $d \ge d'$, так как $D-d' \in I_d$. Пусть $I' = \{D-d-1,\ D-d,\ \ldots,\ D-d'-1\}$, где $|I'| = d-d'+1 > 0$. Учитывая, что $Igu^{D-1} = \{D-d-1,\ \ldots,\ D-2\}$, а из $i \in I_d$ следует $igu^{D-1} = iu^{D-1} = i-1$, заключаем, что $g \cdot u^{D-1}$ на I' есть циклический сдвиг

$$\begin{pmatrix} D-d-1 & D-d & \ldots & D-d'-1 \\ D-d'-1 & D-d-1 & \ldots & D-d'-2 \end{pmatrix},$$

а так как все элементы I_d преобразованием gu^{D-1} отображаются в строго меньшие, некоторая степень $g \cdot u^{D-1}$, скажем, $h \Rightarrow (g \cdot u^{D-1})^t$, отображает I в I' и тождественна на I'.

Из (B_2) следует, что $u^{D-d'}\,hu^{d'} \in \Pi_{d-d'+1}$, где

$d — d' + 1 < d$, чго противоречит минимальности d. Этим доказано (В).

(Г) d является делителем D. Предположим, чго $D = ad+b$, где $0 < b < d$. На I_b преобразование $u^b g$ есть тождественное отображение, а для всех $i \notin I_b$ имеет место $iu^b g > i$. Следовательно, какая-то степень $u^b \cdot g$ должна принадлежать Π_b с $b < d$, что невозможно. (Г) доказано.

Рассмотрим vu^{D-1}g. Так как $vu^{D-1} \in \Pi_i$, имеем $vu^{D-1}g \in \Pi_{\bar{d}}$. Следовательно, $g = vu^{D-1}g$, т. е. для любого $i \in I$ выполняется $ig = ivu^{D-1}g$. Отсюда $i \equiv ivu^{D-1} \equiv D - r_1 + i \pmod d$ и, значит, $r_1 \equiv D \equiv 0 \pmod d$ и $d = \text{НОД}(r_0, r_1, \ldots, r_{D-1}) = 1$. Доказательство леммы закончено.

8. Понятие как понятийная система

8.1. Общие положения понятийной системы

Обычно **для выражения своих мыслей люди пользуются <u>интуитивно выбираемыми словами и словосочетаниями разговорного языка</u>.** Однако интуитивный подход для разработки понятий научной дисциплины неприемлем, так что приходится устанавливать границы применимости и точный смысл каждого слова или выражения в рамках данной научной или специальной области. При этом одни понятия используются только в узкоспециальных областях (например, сопротивление продольному изгибу). Другие понятия, часто выражаемые общеупотребительными словами, применяются в различных смыслах, причем часто их значения близки к обиходным, но иногда могут иметь значение, совершенно отличное от общепринятого (например, такие технические термины, как «журавль», «баба»).

Другая проблема связана с выбором наиболее точных назваий для таких понятий, т. е. имен (терминов). Так, даже отыскание общего выражения (определения) для понятия «машинный продукт» является сложной задачей. Здесь всегда нужно прислушиваться к критике, собенно со стороны тех, кто уже рассматривал аналогичные проблемы, тем более если при известных условиях было выбрано другое выражение для обозначения аналогичного содержания, риск неудачи здесь тем меньше, чем тщательнее и объективнее проведены сопоставление имеющихся данных, их обсуждение и **<u>необходимая унификация</u>**. Например, для машиностроения, как и для техики вообще, это справедливо в особенности, поскольку здесь развитие шло

от практики к теории. В соответствии с установившейся традицией понятия в технике чаще всего принимались интуитивно, без их точного определения. Например, понятие «машина», являющийся основой целого ряда других понятий, имеет различное содержание в зависимости от специальной области, времени и места использования.
Понятийные трудности еще более усиливаются в связи с различиями смысла понятий в разных языках. Так, например, немецкий термин Technik (тешка) не совпадает с английским technique (методика, технический прием, оборудование), а немецкое слово Konstrukteur (конструктор, строитель, создатель) не адекватно соответствующему английскому designer (конструктор, проектировщик, художник).
Следует отметить, что даже в фундаментальных науках пока еще не достигнуто полное единство относительно множества понятий. Такое положение наблюдается в кибернетике и теории систем — науках, которые имеют для нас основополагающее значение. Отсутствие единства по понятийным вопросам не позволяет сослаться на соответствующую литературу и вынуждает рассматривать некоторые элементарные, но важные понятия.
В основу определения используемых в данной работе названий для обозначения понятий положены следующие принципы:
— широкое применение понятий в их укоренившемся значении, которое может быть лишь уточнено;
— ориентация в понятийном плане на фундаментальные науки, такие, как познания и созидания, теория систем, теория информации, математика и другие, с учетом того, что вводимые понятия должны охватывать множество фундаментальных наук;
— применение, где это возможно, международной терминологии, что облегчает понимание на международном уровне.
При определении понятий будем использовать также многие уже принятые имена понятий.
Кроме того, для различных понятий наряду с их определениями и названиями, будут рекомендованы также буквенные и другие символы для их обозначения. Использование символов, с одной стороны, соответствует целям установления общепринятой понятологии, а с другой — позволяет сократить записи и затраты твоческого труда. Определение понятий будет осуществляться в два этапа. Сначала будут даны определения наиболее важных основных понятий. Специальные понятия теории понятийных систем будут приведены позже, в порядке обсуждения соответствующих тем. Для облегчения ориентации основные понятия обобщаются в соответствующие группы, например множество, система, тип системы и т. д. Отношения между этими отдельными понятиями в группах определяются

последовательно. Например, при определении понятия «система» используется понятие «множество», следовательно, определение системы вытекает из определения множества.

Для определения понятий и установления их имен здесь будут использованы не все возможности. Так, например, мы не воспользуемся возможностями математической логики, исчисления высказываний и предикатов, несмотря на то что для наших целей понятия упомянутых областей знания были бы очень подходящими.

Смысл системного подхода при исследовании процессов разработки понятий в теории понятий заключается в рассмотрении любого **<u>понятия</u> как <u>системы</u> взаимосвязанных элементов (признаков), образующих единое целое**. Такое образование мы будем называть ***<u>понятийной системой</u>***. К элементам понятийной системы будем относить отчительные признаки объекта или процесса, взаимосвязанная совокупность которых образует понятие. Линия развития и образования понятия представляет собой совокупность нескольких узловых точек — понятийных систем, резко отличающихся друг от друга (если их сравнивать только между собой). Между узловыми точками лежит множество промежуточных понятий — понятийных систем с небольшими изменениями по сравнению с предшествующим шагом развития. Понятийные системы как бы «перетекают» одна в другую, медленно эволюционируя, отодвигаясь все дальше от исходного понятия, преображаясь — иногда до неузнаваемости. Мелкие изменения накапливаются и становятся причиной крупных качественных преобразований понятия. Чтобы познать эти закономерности, необходимо определить, что такое понятийная система, из каких элементов она состоит, как возникают и функционируют связи между частями, каковы последствия от действия внешних и внутренних факторов и т. д. Несмотря на огромное разнообразие, **понятия как понятийные системы обладают рядом общих свойств, признаков и структурных особенностей, что позволяет считать их единой группой объектов.**

Каковы основные признаки понятийных систем?

К ним можно отнести следующие:

— понятийные системы состоят из частей, элементов - отличительных признаков, то есть имеют структуру; одним из средств формального описания структуры понятия является *математическая решетка*;

— понятийные системы создаются для каких-то целей, то есть выполняют функции; **<u>базовыми функциями</u>**, которые несут в (на) себе понятия, являются: **истинность, достоверность, доказуемость, однозначночть толкования смысла понятия;**

истинность определяется *степенью* истинности понятия; *достоверность* определяется *уровнем* достоверности понятия; *доказуемость* определяется *необходимостью, достаточностью, полнотой; смысл* определяется *доступностью* его понимания;

— элементы (части) понятийной системы имеют связи друг с другом, соединены определенным образом, организованы в пространстве и времени; в качестве связей выступают *отношения* между отличительными признаками (элементами);

— каждая понятийная система в целом обладает каким-то особым качеством, не равным простой сумме свойств составляющих ее отличительных признаков (элементов), иначе пропадает смысл образования понятия (цельного, функционирующего, организованного).

Способы представления (отображегия) понятия:

- звуком,
- мимикой,
- жестом,
- знаком,
- иконо-знаком,
- символом,
- словом,
- словосочетанием,
- выражением.

Только функционально точно связанные отличительные признаки понятия дают главное качество понятия (и оправдывают его существование). Точно так же набор букв (например, *а, л, к, е)*, соединившись только определенным образом, дает новое качество (например, слово *елка).*

Понятие как понятийная система (ПС) — это совокупность упорядоченно взаимодействующих отличительных признаков, обладающая свойствами, не сводящимися к свойствам отдельных отличительных признаков, и предназначенная для однозначного семантического толкования смысла понятия.

Другими словами:

понятийная система — это организованная в структуру совокупность отличительных признаков и свойств предмета, обеспечивающая процесс образования понятия.

Таким образом, понятийная система имеет четыре главных (базовых, фундаментальных) признака: **функциональность, целостность (структура), организация, системное качество понятия.**

Отсутствие хотя бы одного признака не позволяет считать объект понятием как понятийной системой. Ниже эти признаки будут рассмотрены подробнее.

Между элементами понятийной системы существуют определенные *отношения.* Возможны также понятийные системы, включающие изолированные элементы (или группы элементов), которые не имеют отношений с другими элементами понятийной системы.

Элемент и понятийная система являются *относительными* понятиями. Элемент может одновременно являться понятийной системой меньших элементов, а понятийной система в свою очередь может быть элементом некоторой большей понятийной системы. Например, понятие «машина» — это понятийная система, образованная своими элементами, и в то же время это понятие «машина» может быть элементом некоторого более сложного понятия. Понятийная система может быть декомпозирована на понятийные подсистемы различной *сложности.*

8.2. Функциональность понятия

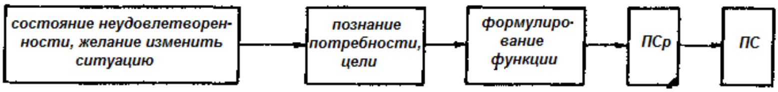
8.2.1. Цель — функция

В основе любого процесса, в том числе процесса разработки понятия, лежит понятие цели. Бесцельно разрабатываемого понятия не существует. В понятийных системах цель задается человеком, и они предназначены для отражения выполняемых функций объектным или процесным понятием. **<u>Цель</u> — воображаемый итог, ради которго образовывают новое понятие.** Таким образом, **<u>синтез понятия</u> как понятийной системы (ПС) — это <u>целенаправленный процесс</u>**.

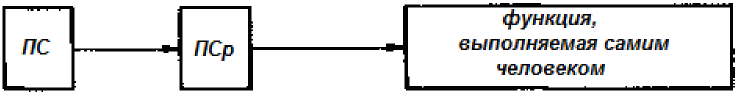
Появление цели разарботки нового понятия — это результат осознания потребности разарботки нового понятия. Человек отличается от других живых существ тем, что ему свойственны повышенные притязания — намного выше возможности естественных органов. **Потребность (<u>постановка задачи</u>) — это то, что нужно иметь (сделать), а <u>функция</u> — <u>реализация потребности в новом понятии</u>**.

Потребность может быть удовлетворена несколькими функциями, например, потребность в понятии «обмен продуктами труда» — натуральный обмен, по эквивалентам, денежная система Так же и выбранная функция может быть воплощена в нескольких понятиях реальных объектов, например, деньги — медь, золото, бумага, зубы акулы и т. д. И, наконец, любое понятие реального объекта может быть разработано (синтезировано) несколькими путями или его разработка может быть основана на разных научных принципах, например, при разработке понятия «процесс получения бумаги» следует учитывать, что бумагу можно получить различными способами, рисунок нанести краской, в виде голограммы и т. д. Таким образом, понятийные системы, в принципе, имеют множественные пути развития. Специалист все же каким-то образом выбирает одну дорогу воплощения потребности разработки понятия.

Возникновение потребностей, осознание цели и формулировка функции понятия — это процессы, происходящие внутри человека. Но реально действующая функция — это воздействие на предмет труда (изделие) или служение человеку. То есть не хватает промежуточного звена — **понятийного средства (ПСр)**. Это и есть носитель функции понятия в чистом виде. *ПСр — функционально базовая часть понятийной системы* Все остальные части ПС вспомогательны. ПС возникали на первых этапах как понятийные средства (взамен и в дополнение органов чувств). И только потом, для увеличения полезной функции, к понятийному средству «пристраивались» другие части, подсистемы, вспомогательные системы. Этот процесс можно изобразить так:



Представим себе (пока умозрительно), что возможен и обратный ход — как продолжение данного.



Первая половинка процесса — развертывание понятия, вторая свертывание. То есть человеку, в общем-то, нужна функция, а не ее носитель.

Для облегчения перехода от функции к ее носителю — понятийному средству будущей ПС — необходима точность в описании функции понятия. Чем конкретнее описана функция понятия, чем больше дополнительных условий, тем уже диапазон средств для ее реализации, тем определеннее ПС и ее структура. Мощным ограничителем вариантности служат выявленные закономерности развития понятийных средств в составе ПС.

Функционирование понятия — это изменение свойств, характеристик и качеств понятийной системы в пространстве и времени. *Функция — это способность ПС проявлять свойства понятия (потребность, достоверность, истинность) при определенных условиях и содействовать использованию понятия в процессе преобразования предмета труда (изделие) в требуемую форму или величину.*

Для определения функции понятия необходимо ответить на вопрос: что делает эта ПС? (для существующих ПС), или — что должна делать ПС? (для синтезируемых ПС).

8.2.2. Иерархия функций понятия

Каждая ПС может нести в себе несколько функций, из которых только одна базовая, ради которой она и существует, остальные — вспомогательные, сопутствующие, облегчающие выполнение базовой. Определение базовой функции понятия (БФП) иногда вызывает затруднение. Это объясняется множественностью требований, предъявляемых к данному понятию со стороны смежных, близко находящихся по смыслу и прочих понятий. Отсюда кажущаяся бесконечность определений БФП (принципиальная неохватность всех отличительных признаков, их свойств и связей).

Пример: иерархия функций понятия «кирпич».

БФП-1 для определения понятия отдельного кирпича: держать свою форму, не разваливаться, иметь определенный вес, структуру, твердость. Требование со стороны смежных (соседних) понятий (других кирпичей и раствора в будущей стене): иметь прямоугольные грани, схватываться с раствором. БФП-2 для определения понятия «стена»: нести себя, быть вертикальной, не деформироваться при изменении температуры, влажности, нагрузки, ограждать что-то, нести нагрузку от чего-то. Определение понятия «кирпич» должено соответствовать части требований БФП-2. БФП-3 для определения понятия «дом»: должен создавать определенные условия для внутренней среды, защиту от атмосферных воздействий, иметь определенный внешний вид. Кирпич должен выполнять часть и этих требований. БФП-4 для определения понятия «город»: определенный архитектурный облик, климатические и национальные особенности и т. д. Кроме того, требования и к самому понятию «кирпич» постоянно увеличиваются: он не должен впитывать грунтовую влагу, должен иметь хорошие теплоизоляционные свойства, звукопоглощающие свойства, быть радиопрозрачным и т. п.

Таким образом, БФП данной понятийной системы — это *выполнение требований базовой (вышестоящей) понятийной системы* Все остальные требования, по мере удаления иерархического уровня, от которого они исходят, оказывают все меньшее влияние на базовое понятие. Эти над- и подсистемные требования к базовому понятию могут быть выполнены и другими предметами, не обязательно данной понятийной системой. Например, свойство прочности кирпича может быть достигнуто различными добавками в исходную массу, а свойство эстетичности — приклеиванием декоративной плитки на готовую стенку, для БФП кирпича (выполнять «требования» стены) это безразлично. То есть БФП элемента *определяется системой,* в которую он включается. Тот же кирпич может быть включен во множество других систем, где его БФП будет совершенно непохожей, а то и противоположной приведенной выше.

Пример. Определить БФП для определения понятия «калорифер». Для чего калорифер? — Нагревать воздух в доме. Для чего нагревать воздух? — Чтобы его температура не упала ниже допустимой величины. Почему нежелательно падение температуры? — Чтобы обеспечить комфортные условия для человека. Для чего нужны комфортные условия человеку? — Чтобы уменьшить риск заболеть и т. д.

Это путь вверх по иерархии целей — в надсистему. Называемая на каждом этапе функция (цель) может быть выполнена и другой ПС. Калорифер входит в систему: «дом — воздух — человек — калорифер» и выполняет ее «требования».

Можно спуститься вниз по иерархии:

— что нагревает воздух? — тепловое поле;

— что производит тепловое поле? — нагревательная спираль;

— что действует на спираль для получения тепла? — электрический ток;

— что подводит электрический ток к спирали? — провода и т. д.

Итак, «требование» ПС для калорифера — нагревать воздух.

А что делает калорифер (его рабочий орган — спираль)? — Производит тепло, тепловое поле. Вот это и есть БФП калорифера — производство тепла, как «ответ» на «требование» надсистемы. Здесь тепловое поле — изделие, «выпускаемое» технической системой «Калорифер». БФП надсистемы — обеспечение комфортных условий для человека.

8.3. Структура понятия

Функционирование понятия задается его структурой. Относительно замкнутая понятийная система с заданной структурой «функционирует» однозначно, т. е. ее структура полностью определяет способ «функционирования» понятия. С другой стороны, функционирование не определяет структуру понятия однозначно. Одна и та же функция может быть реализована различными структурами понятий.

Понятие *структура* (Str) характеризует внутреннюю организацию, порядок и построение понятийной системы. Таким образом, **<u>структура понятия</u> — это совокупность требуемых и необходимых признаков предмета и отношений между ними.**

Если $E=\{e_1,e_2, ...,e_n\}$ есть множество признаков предмета, а $R=\{r_1, r_2,..., r_n\}$ — множество отношений, то структура понятия $Str=\{E, R\}$ представляет собой множество, состоящее из E и R. Один и тот же предмет может быть определен несколькими понятиями и, следовательно, несколькими структурами. Так, например, для человеческого тела можно определить костную систему (структуру костей и связей между ними), систему кровообращения, нервную систему, систему пищеварения и т. д. Структура наряду с функционированием является наиболее важным свойством понятийной системы. В нашем понимании понятие «структура» отличается от соответствующего понятия в философии, где оно используется для обозначения только множества отношений в системе.

Совокупность (целостность) элементов и свойств — неотъемлемый признак понятийной системы. Соединение элементов в единое целое необходимо для получения (образования, синтеза) базовой функции понятия, то есть для выполнения поставленной цели.

Если определение функции (цели) понятия в какой-то мере зависит от человека, то структура — наиболее объективный признак понятия, она зависит только от вида и состава используемых в ПС элементов, а также от общих законов мира, диктующих определенные способы соединения, виды связи и принципы «функционирования» элементов в структуре понятия. В этом смысле структура понятия — это способ взаимного соединения элементов в понятийной системе. Составление структуры понятия — это программирование понятийной системы, задание поведения ПС с целью реализации в результате базовой функции. Требуемая функция и выбранный физический принцип ее осуществления в определении понятия однозначно задают структуру понятия.

Структура понятия — это совокупность признаков (элементов) и связей (отношений) между ними, которые определяются принципом осуществления требуемой базовой функции понятия.

Структура остается неизменной в процессе функционирования понятия, то есть при изменении состояния, пределов устойчивости, отображения функций и любых других действий.

Главное в структуре понятия: элементы, связи, неизменность во времени.

8.3.1. Отличительный признак предмета как элемет структуры понятия

Элемент (отличительный признак предмета), система (понятийная система) — относительные понятия, любая система может стать элементом системы более высокого ранга, также и любой элемент можно представить как систему элементов более низкого ранга. Например, болт (винт + гайка) — элемент двигателя, который в свою очередь является структурной единицей (элементом) в системе автомобиля и т. д. Винт состоит из зон (геометрических тел), таких, как головка, цилиндр, резьба, фаска; материал болта — сталь (система), состоящая из элементов железа, углерода, легирующих добавок, которые в свою очередь состоят из молекулярных образований (зерен, кристаллов), еще ниже — атомы, элементарные частицы.

Элемент (отличительный признак) — относительно целая часть системы, обладающая некоторыми свойствами, не исчезающими при отделении от системы. Однако в понятийной системе свойства отличительного признака предмета не равны свойствам отдельно взятого отличительного признака предмета.

Сумма свойств отличительного признака предмета в понятийной системе может быть больше или меньше суммы его свойств вне понятийной системы. Иначе говоря, часть свойств отличительного признака предмета, включаемого в понятийную систему, теряется или к отличительному признаку предмета добавляются новые свойства. В подавляющем большинстве случаев часть свойств отличительного признака предмета нейтрализуется в понятийной системе, как бы исчезает (растворяется). В зависимости от величины этой части говорят о степени потери индивидуальности отличительного признака предмета, включенного в понятийную систему.

Понятийная система обладает частью свойств отличительного признака предмета ее составляющих, но ни один отличительный признак предмета бывшей понятийной системы не обладает свойством всей понятийной системы (системным эффектом, качеством). Когда понятие «песок» перестает быть песком? — На ближайшем верхнем или нижнем «этаже»: песок — пыль — молекулы — атомы —...; песок — камень — скала...; у понятия «песчаные» свойства частично сохраняются при движении вверх и сразу исчезают при движении вниз по «этажам».

Отличительный признака предмета — минимальная единица понятийной системы, характеризующий некоторую функцию в описании определения понятия. Многие понятийные системы начинались с одного отличительного признака предмета, предназначенного для выполнения одной элементарной функции. С увеличением БФП начинается увеличение (усиление) каких-то свойств отличительного признака предмета. Затем идет дифференциация отличительного признака предмета, то есть разделение отличительного признака предмета на зоны с разными свойствами. Из моноструктуры отличительного признака предмета (камень, палка) начинают выделяться другие отличительного признака предмета. Например, при превращении каменного резца в нож выделились рабочая зона и зона ручки, а затем усиление специфических свойств каждой зоны потребовало применения разных материалов (составные инструменты). Из рабочего органа (РО) выделилась и развилась трансмиссия (Тр). Затем к РО и Тр добавляются двигатель (Дв), орган управления (ОУ), источник энергии (ИЭ). Понятийная система разрастается за счет усложнения своих элементов, добавляются вспомогательные подсистемы. Понятийная система становится высокоспециализированной, но наступает момент развития, когда она начинает принимать на себя функции соседних понятийных систем, не увеличивая количества своих элементов. Понятийная система становится все более универсальной при неизменном, а затем и сокращающемся количестве элементов.

8.3.2. Связи в структуре понятийной системы

Связь — это отношение между отличительными признаками предмета понятийной системы.

Отношением (R) называется взаимозависимость или взаимодействие двух и более отличительных признаков предмета либо явлений абстрактного или конкретного типа. При образовании понятия существенны объективные, определенные отношения, которые поддаются описанию в соответствии с физическими или логическими законами. Отношения связывают отдельные отличительные признаки предмета в различные понятийные системы. Выражение «отличительный признак предмета *X* находится в отношении *R* к отличительному признаку предмета *Y»* символически обозначается *R(X, Y).* Отношение может быть рефлексивным, симметричным или транзитивным. Эти типы отношений можно охарактеризовать следующим образом:

а) рефлексивность — каждое понятие (отличительный признак предмета) эквивалентно самому себе;

б) симметричность — если одно понятие (отличительный признак предмета) эквивалентно второму, то второе понятие (отличительный признак предмета) эквивалентно первому;

в) транзитивность — два понятия (отличительных признака предмета) эквивалентны между собой, если они по отдельности эквивалентны третьему.

Если выполняются все три условия, то отношение называется *отношением эквивалентности.* Отношение между двумя понятиями (отличительными признаками предмета) будет также называться корреляцией.

Корреляция — это математическая модель отношения в обобщенной форме.

Виды отношений

Подобие. *Подобие* — это отношение сходства между двумя или более понятийными системами (объектами, процессами, понятиями,), определяемое некоторыми общими свойствами. Вообще говоря, возможен диапазон степеней подобия понятий от полного равенства *(идентичности)* до частного *сходства.* Можно говорить о функциональном, структурном и других видах подобия понятия. Будем понимать подобие понятий как одинаковость формы (но, как правило, не равенство по величине). Отношение подобия понятия имеет большое значение при математическом и лингвистическом описании понятия, а также при моделировании понятий. Законы подобия позволяют определить условия, при выполнении которых результаты модельных экспериментов справедливы для реальных условий. Например, течения газа или жидкости подобны при равных числах Рейнольдса. Область подобия может быть определена как пересечение множеств свойств, участвующих в данном отношении.

Аналогия. Соответствие существенных признаков, свойств, структур или функций понятийных объектов, процессов или явлений будем называть *аналогией.* Этот термин часто употребляется в том же смысле, что и подобие.

Гомоморфизм. Отношение между двумя понятийными системами (понятиямия), когда каждую составную часть и каждое отношение одной понятийной системы можно отобразить на некоторую составную часть и некоторое отношение второй понятийной системы (но не обратно), называется *гомоморфизмом.* В этом случае выполнение соответствующих условий подобия позволяет перенести результаты модельных экспериментов на натуру. Область подобия может быть определена как пересечение множеств свойств понятия.

Изоморфизм. *Изоморфизмом* называется отношение между двумя понятийными системами, когда каждой составной части одной понятийной системы может быть поставлена в соответствие определенная составная часть другой понятийной системы и наоборот (**симметричность**), а также, когда для каждого отношения между двумя соответствующими составными частями имеется такое же отношение в другой понятийной системе и наоборот.

Идентичность. Это отношение между понятийными объектами или процессами, характеризующимися одинаковыми свойствами (признаками). *При абсолютной идентичности* должны быть одинаковыми все свойства, при *относительной* — только некоторые (в этом случае имеет место подобие).

Эквивалентность. Понятийные объекты или процессы называются эквивалентными, если между ними имеется отношение эквивалентности, т.е. равноценности. Эквивалентность полнее идентичности, так как для последней характерна только рефлексивность. Применительно к науке и технике оба понятия будут использоваться как синонимы, т. е. **под <u>эквивалентностью</u> будет подразумеваться <u>абсолютная идентичность</u>**.

Математические функции. Важный класс отношений выражают *математические функции* как закономерные зависимости от переменной: $y=f(x)$. Такого рода математические функции выражают точно установленное отношение между x и y, т. е. **детерминированную связь** в понятии.

Причинность. Между причиной и вызванным ею следствием существует асимметричное отношение. **Причина вызывает следствие**. Существует строгая (детерминированная типа «если . , то») или ослабленная форма причинного отношения. Причинная цепь имеет место, если следствие выступает в качестве причины дальнейших следствий.

Связь. Если определенные выходы отличительного признака предмета (понятия) одновременно являются входами какого-либо отличительного признака предмета (понятия), то такого рода отношение называется *связью.* Связь может быть прямой (последовательной либо параллельной), обратной или комбинированной (рис. 1); она может быть материальной, энергетической или информационной.

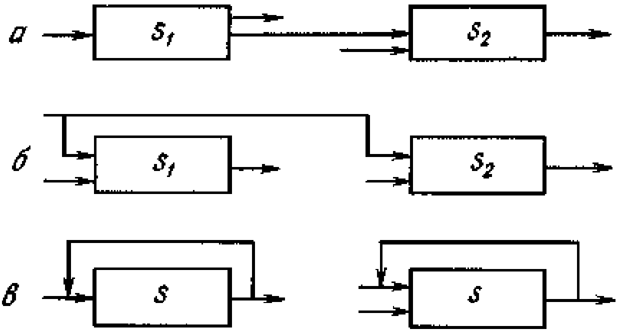


Рис. 1. Виды связей между отличительными признаками предмета (понятия): *а*—последовательная, *б*—параллельная, *в* — обратная и комбинированная связи

Отношение цель — средство. Это — двухместное асимметричное отношение между системой целей (назначением, задачей) и средством их реализации.

Пространственное отношение. Отношение такого рода характеризует взаимное положение отличительных признаков предмета (понятий) отношения в пространстве. Пространственные отношения используются при образовании понятий в топологии.

Логическое отношение. Логическим отношением (в логике — двух- или многоместным предикатом) называется отношение между объектами типа «l_1 меньше, чем l_2», или «l_3 находится около l_4». Известными константами (функторами) являются: И; ИЛИ; И-ИЛИ; НЕ-ИЛИ; ТАК, ЧТО; ИЛИ-ИЛИ; ЕСЛИ-ТО; ТОЛЬКО ЕСЛИ-ТО; ТОЛЬКО ТОГДА-КОГДА; РАВНО. Из этого перечисления ясно, что многие описанные выше отношения являются также логическими отношениями. В ЭВМ реализация отношений такого рода осуществляется логическими элементами.

Временно́е отношение. Отношение такого рода описывает упорядочение понятийных процессов и событий во времени.

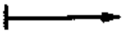
При формировании понятия часто будем понимать связь между отличительными признаками предмета как «разность информиционных потенциалов» между отличительными признаками предмета, то есть ***градиент информации*** (отклонение от информационного равновесия — принцип А.Кононюка). При

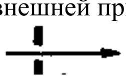
градиенте возникает информационное следствие, вызывающая поток *информации:*
— градиент информации о температуре — поток информации о теплоте,
— градиент информации о концентрации — поток информации о веществе (диффузия),
— градиент информации о скорости — поток информации об импульсе,
— градиент информации об электрическом поле — поток информации об электрический ток, а также градиенты информации о давлении, магнитном поле, плотности и т. д.
Часто в задачах образования понятий требуется образовать поток информации при градиенте информации «не своего» поля. Например, поток информации о веществе (нитиноловых пустотелых шариков) при градиенте информации о температуре в задаче о выравнивании температуры по глубине бассейна.
Основные характеристики понятийной связи: информационное наполнение и мощность. *Информационное наполнение* — это вид информационного потенциала, используемого в понятийной связи. *Мощность* — интенсивность информационного потока. Мощность понятийногй связи должна быть больше мощности внепонятийных связей, выше пороговой — уровня шума внешней среды.
Связи в понятийной системе могут быть: функционально необходимые, для выполнения БФП**;** вспомогательные, увеличивающие смысл понятия; вредные, лишние, избыточные.
По типу соединения понятийные связи бывают: линейные, кольцевые, звездные, транзитные, разветвленные и смешанные.

Основные виды связей, используемые при образования понятия (понятийной системы)

1. Элементарные:

 — *односторонняя* (полупроводниковая);

 — *рефлексивная* (возникающая под действием внешней причины);

 — *селективная* (отсеивающая ненужные потоки);

 — *запаздывающая* (с задержкой по времени);

 — *положительная* (увеличивающая мощность при увеличении «разности информационных потенциалов»);


— *отрицательная* (уменьшающая мощность при увеличении «разности информационных потенциалов»);

 — *нейтральная* (безразличная к направлению информационного потенциала);

 — *нулевая;*

 — *проектируемая* (желаемая).

2 Комбинированные:

 — *двусторонняя* (полностью проводящая),


— *контрсвязь* (пропорционально зависимая от состояния отличительных признаков предмета, между которыми осуществляется связь, например, при образовании понятий «полюса магнита» или «потенциалы источника тока»);

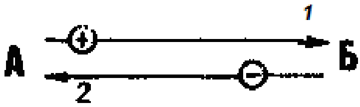

— *положительная обратная* (при увеличении мощности одной связи увеличивается мощность другой), механизм взаимной стимуляции функций ведет к нарастанию понятийных процессов;


— *отрицательная обратная* (при увеличении мощности одной связи уменьшается мощность другой), стабилизирующий механизм ведет к устойчивому информационному равновесию или к колебаниям вокруг точки информационного равновесия;


— *двойная отрицательная обратная,* или обратная связь типа взаимного угнетения (при уменьшении мощности одной связи уменьшается также мощность другой), ведет к неустойчивому информационному равновесию, кончающемуся усилением одной из сторон и подавлением другой.

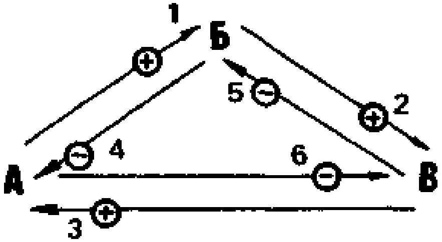
При использовании комбинированных понятийных связей у понятия появляются новые свойства. Рассмотрим, например, понятийную систему из двух отличительных признаков с отрицательной обратной понятийной связью:

При увеличении информационного потенциала *А* «мощность» положительной связи *1* возрастает, что приводит к увеличению информационного потенциала *Б.* Но отрицательная связь *2* подавляет информационный потенциал *А.* Понятийная система быстро приходит в состояние устойчивого равновесия.



При обрыве связи *2* информационный потенциал *А* увеличивается без подавления со стороны *Б.* При обрыве связи *2* информационный потенциал *А* увеличивается и одновременно увеличивается информационный потенциал *Б* (положительная связь).

В понятийной системе же из трех отличительных признаков появляется еще более сильное качество понятия.



При увеличении информационного потенциала *А* увеличивается *Б,* но по связи *4* подавляется *А;* по связи *2* увеличивается *В,* но по связи *5* уменьшается *Б,* а по связи *6* уменьшается В и т. д. То есть вывод любого отличительного признака из состояния информационного равновесия быстро взаимно подавляется. При обрыве любой связи взаимное подавление также происходит быстро по другим связям. То же — при обрыве двух связей. В понятийной системе создается устойчивое информационное равновесие, при котором описанное состояние отличительного признака может быть лишь незначительно сдвинуто от информационного равновесия.

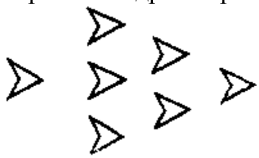
Здесь приведен пример с одинаковой комбинированной связью (отрицательной). Другие, еще более необычные, эффекты возникают с разнородными связями, с большим количеством отличительных признаков, с появлением перекрестных связей (начиная с диагональной в квадрате). Необходима разработка по «наложению» этих типов связей на анализ понятий.

Увеличение степени организации понятийной системы прямо зависит от числа связей между отличительными признаками. Развитость связей — это раскрытие истинности понятия (увеличение степени истинности понятия). Как увеличить количество связей в понятии? — Двумя путями: 1) включение отличительных признаков понятийной системы в связи с надсистемами, 2) задействование более низких уровней организации понятийной подсистемы. При увеличении числа связей, приходящихся на один отличительный признак, увеличивается количество «полезно работающих» свойств отличительных признаков.

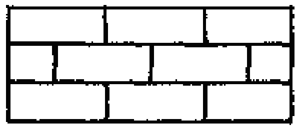
8.3.3. Типы структур понятий и их свойства

Выделим несколько наиболее характерных структур понятий:

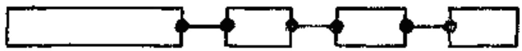
1. **Корпускулярная.** Состоит из одинаковых отличительных признаков, слабосвязанных между собой, исчезновение части отличительных признаков почти не отражается на смысловой функции понятия. Примеры: эскадра кораблей, песчаный фильтр.



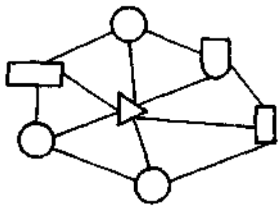
2. **«Кирпичная».** Состоит из эквивалентных отличительных признаков жесткосвязанных между собой элементов. Примеры: стена, арка, мост.



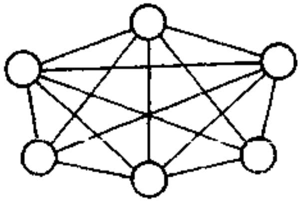
3**. Цепная**. Состоит из однотипных «шарнирно» связанных отличительных признаков. Примеры: гусеница, поезд.



4. **Сетевая**. Состоит из разнотипных отличительных признаков, связанных между собой или непосредственно, или транзитом через другие, или через центральный (узловой) отличительный признак (звездная структура). Примеры: телефонная сеть, телевидение, библиотека, система теплоснабжения.



5. **Многоовязняя**. Включает множество перекрестных связей в сетевой модели.



6. **Иерархическая**. Состоит из разнородных отличительных признаков, каждый из которых является составным отличительным признаком более высокого ранга и имеет связи по «горизонтали» (с отличительными признаками одного уровня) и по «вертикали» (с отличительными признаками разных уровней). Примеры: станок, автомобиль, винтовка.

По типу развития во времени структуры бывают:

1. **Развертывающиеся** — с течением времени при увеличении БФП растет количество отличительных признаков.
2. **Свертывающиеся** — с течением времени при росте или неизменном значении БФП количество отличительных признаков уменьшается.
3. **Редуцирующие** — в какой-то момент времени начинается уменьшение количества отличительных признаков при одновременном уменьшении БФП.
4. **Деградирующие** — уменьшение БФП при уменьшении связей, мощности, эффективности.

Определение понятия можно задать структурой. Относительно замкнутая понятийная система с заданной структурой определяется однозначно, т. е. ее структура полностью определяет способ формирования определения понятия. С другой стороны, определение понятия не определяет структуру однозначно. Одно и то же определение может иметь различные структуры.

Окружение (окружающая среда, *Umg)* структуры понятия теоретически включает все, что не входит в определение понятия. Практически же мы ограничимся окружением, состоящим из структур понятий, включающих хотя бы один отличительный признак, выход которого является в то же время входом (определения этих понятий будут даны позднее) некоторого отличительного признака структуры понятия, либо отличительный признак, вход которого является одновременно выходом некоторого отличительного признака структуры понятия. Такое «непосредственное» окружение будет называться *реальным окружением.* Полное окружение структуры понятия включает следующие составные части: геосфера, атмосфера, биосфера (включая людей), техносфера и астросфера.

Вход (In) структуры понятия представляет внешнее отношение: окружающая среда→структура понятия. Входная величина отличительного признака может быть в зависимости от вида структуры понятия действием, связью (отношением) или параметром состояния объекта действия (операнда). Совокупность всех входов составляет обобщенный вход (который может быть представлен как вектор отдельных входов).

Выход (Ou) структуры понятия представляет внешнее отношение: структура понятия→окружающая среда. Выходная величина отличительного признака может быть в зависимости от вида структуры понятия действием, связью или параметром состояния операнда. Совокупность всех выходов может быть сведена к обобщенному выходу (вектору выхода). Выход структуры понятия есть множество выходов всех отличительных признаков, которые не являются входами других отличительных признаков структуры понятия. Входная и выходная величины являются единственными связями структуры понятия с окружающей средой. Входы и выходы структуры понятия включают все виды связей с окружающей средой: желательные и нежелательные (помехи), связи материального (S), энергетического *(En)* и информационного (*I*) характера. Необходимо заметить, что еще не сложилось единство мнений относительно использования понятий входа структуры понятия и выхода структуры понятия. Можно рассматривать вход и выход соответственно как входные (рецепторы) и выходные (эффекторы) описания отличительных признаков или определений структуры понятия. В этом случае через них проходят воздействия на структуру понятия (влияние окружения) и проявляются ее реакции (влияние структуры понятия на окружение). Для других мнений вход и выход — это соответственно то, что поступает в структуру понятия и выходит из нее, т. е. то же самое, что пища и отходы для биологических систем. Подобные толкования понятий «вход» и «выход» основаны на рассмотрении целей и представлений, исходя из которых создается структура понятия.

Свойства структуры понятий и их оценки

Каждая структура понятия, ее отличительные признаки и отношения обладают *свойствами (E)*, присущими этому понятию и точно его определяющими, такими как размеры, масса, скорость, форма, стабильность, а также технологичность, транспортабельность и особенно **способность что-либо делать, т. е. <u>функционировать</u>**.

Необходимо сделать замечание относительно терминологии в этой области. В исчислении предикатов со свойствами связаны соответствующие однозначные предикаты. **В языке предикаты используются для описания свойств**. В раде научных дисциплин **существенные свойства** называются **атрибутами**. Для характеристики существенных свойств предметов используется понятие «**параметр**», определяющее в некотором отношении функцию соответствующего объекта.

Свойством **является всякий существенный признак предмета**. **Предметов, как и понятий, без свойств не существует**. Однако степень воплощения этих свойств может быть различной. Например, одним из свойств людей является рост. Если рост определенного человека 170 см, то можно сказать, что мера этого свойства (роста) равна 170 см (при использовании сантиметра как единицы измерения). В этой связи мы сталкиваемся с проблемой количественного определения (измерения, квантификации) свойства.

Для совокупной характеристики предмета, например при его оценке, выбирают существенные свойства этого предмета. В этих случаях будем говорить о *частной, обобщенной* и *совокупной оценках,* обобщенном *качестве* или ценности (смысл понятий, применяемых здесь, отличается от их смысла, например, в философии или психологии). Для получения совокупной оценки необходимо измерить отдельные свойства предмета, а частные оценки превратить в обобщенные.

Совокупность значений свойств системы в определенный момент времени называется «*состоянием»* понятия. Аналогично качеству «состояние» понятия можно определить вектором, имеющим в качестве компонентов отдельные свойства. При определении качества или состояния абстрагируются от большей части несущественных или не представляющих интереса свойств.

Два «состояния» понятия могут быть одинаковыми или различными. Различие между состояниями называется их *разностью.* Разность возникает при переходе системы из одного состояния в другое. Разность может быть дифференциальной (когда имеет место непрерывный переход к следующему состоянию) либо дискретной.

Структура понятия может быть представлена ее моделью. На рис. 2, представлена модель структуры понятия, которая наглядно иллюстрирует приведенные выше определения и их взаимосвязи.

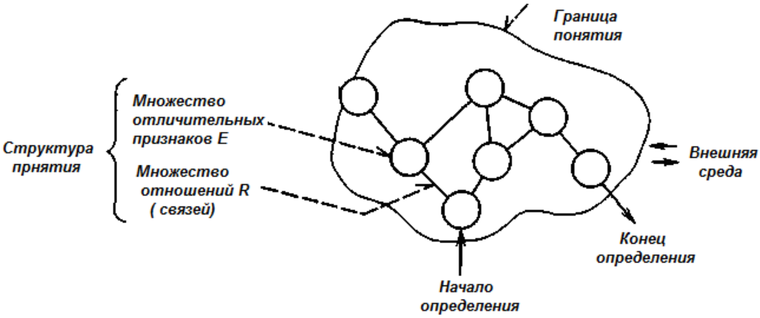


Рис. 2. Модель структуры понятия.

Используя различные критерии**,** можно установить большое количество понятий, которые описывают различные типы систем**.** Рассмотрим понятия описывающие системы, которые проклассифицированы следующим образом:

а) По положению системы в иерархии:
— надсистема, система, подсистема.
б) По связям с окружением:
— открытые (с определенным окружением, т. е. по крайней мере с одним входом или выходом);
— замкнутые (без связей с окружением).
в) По изменению состояния:
— динамические (состояние изменяется во времени);
— статические (состояние не изменяется во времени).
г) По характеру функционирования:
— детерминированные (в зависимости от состояния системы можно однозначно судить о ее функционировании);
— стохастические (можно только высказать предположение относительно различных возможных вариантов функционирования).
д) По типу элементов (в смысле их конкретности):
— конкретные (элементами являются реальные объекты);
— абстрактные (элементами являются отвлеченные объекты).
е) По происхождению системы:
— естественные (созданные природой);
— искусственные (созданные людьми).
ж) По характеру зависимости выходов:
— комбинаторные (выход зависит только от входа);
— секвентивные (выход зависит от входа и других величин).

з) По степени сложности структуры:
— предельно сложные (например, мозг, народное хозяйство);
— очень сложные (например, полностью автоматизированное предприятие, производственный комплекс);
— сложные (например, легковой автомобиль, библиотека университета);
— простые (например, семейная библиотека, болтовое соединение).
и) По виду элементов:
— системы типа «объект» (элементами являются предметы, например дом, двигатель, машина);
— системы типа «процесс» (элементами являются операции, например изготовление, фильтрация, перегонка, приготовление пищи).

Символическое представление понятия

Символически понятие мы будем изображать четырехугольником, кругом или их комбинацией, используя для систем типа «объект» *(О)* и систем типа «процесс» *(Р)* различные символы (рис. 3).

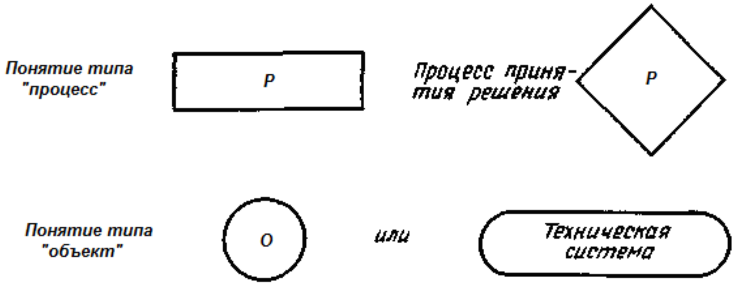


Рис. 3. Графическое обозначение двух типов понятий.

Понятие типа «объект» не требует особых пояснений, поэтому мы остановимся более подробно на понятии типа «процесс».

Вообще говоря, понятие «процесс» означает, что что-то происходит, совершается, т. е. изменяется с течением времени. В природе нескончаемо что-нибудь происходит. Естественным изменениям, т. е. таким процессам, как старение, выветривание, эрозия, подвержены даже такие объекты, которые нам кажутся очень стабильными, неизменными, например скалы и горы. То же самое относится и к процессу существования живого существа.

Наряду с естественными процессами человек создает искусственные процессы с целью осуществления необходимых или желательных для него изменений. Такие изменения служат удовлетворению человеческих потребностей. Хотя человек и подчиняется законам природы, все же он может ускорить, усилить или улучшить некоторые природные процессы или их свойства.

Целенаправленное изменение определенных объектов имеет для людей жизненную важность. Искусственные процессы, в которых те или иные свойства объекта действия (операнда) претерпевают соответствующие изменения при участии людей и технических средств, вследствие чего достигается желаемое состояние операнда, будем называть *преобразованиями*.

Понятие «операнд» *(Od)* здесь выбран в качестве общего названия всех предметов и их состояний, подвергаемых целенаправленному преобразованию. Преобразование есть следствие определенных воздействий, основанных на физических, химических или биологических явлениях и описываемых некоторой инструкцией — рецептом, алгоритмом, технологией. Науками, исследующими преобразования в какой-либо определенной области, являются, например, термодинамика, технология производства.

Воздействия на операнд выполняются *операторами.* Эти воздействия являются *выходами* операторов. На рис. 4 представлена общая модель процесса преобразования.

Рис. 4. Модель процесса преобразования.

Воздействия операторов осуществляются в виде потоков материи (S), энергии *(En)* и информации (*I*).

Нужно пояснить еще одно важное понятие — *алгоритм.* Процесс преобразования представляет собой совокупность *операций* (O); **алгоритм — это однозначно определенная последовательность операций, которая либо устанавливается один раз заранее и действительна в течение всего процесса преобразований, либо меняется в зависимости от результата выполненной операции.** Таким образом, алгоритм можно определить аналогично структуре процесса как упорядоченное множество операций, их отношений и условий перехода от одной операции к другой. Значительное сходство имеется между понятиями алгоритма и технологического процесса, представляющего собой последовательность операций изготовления продукта.

Довольно типичными видами процессов в технике являются *управление* и *регулирование.* Управление — это процесс в системе, посредством которого одна или несколько входных величин действуют желательным образом на другие, считающиеся выходными. Регулирование — это процесс, посредством которого некоторые изменяемые (регулируемые) величины непрерывно сопоставляются с эталонными (управляющими), причем на регулируемые величины оказывается воздействие с целью приведения соответствующих отклонений к нулю.

8.3.4. Принциы построения структуры понятия

Главный ориентир в процессе синтеза понятия — получение будущего системного свойства понятия (истинность, достоверность, однозначность толкования, доказанность определения понятия). Важное место в этом процессе занимает этап построения структуры понятия.

«Формула» понятийной системы:

функция + **структура** + **организация** = **системный эффект (истинность)**

Одно и то же понятие можно представить несколькими структурами — в зависимости от выбранного способа описания БФ. Выбор способа описания БФ должен основываться на минимизации отличительных признаков, используемых при образовании понятия, (массы, габаритов, энергоемкости и др.) при сохранении смысла понятия.

Формирование структуры понятия — основа синтеза понятия. Среди принципов формирования структуры понятия: принцип функциональности, принцип причинности, принцип полноты частей, принцип дополнительности.

Принцип функциональности понятия отражает примат функции понятия над структурой понятия. Структура понятия обуславливается предыдущим выбором:

функция понятия → отличительный признак → структура понятия.

Выбор отличительного признака однозначно определяет структуру понятия, поэтому их надо рассматривать вместе. Отличительный признак (структура) — это отражение цели понятия — функции. По выбраным отличительным признакам следует составить функциональную схему понятия. Функциональная схема понятия строится по принципу причинности, так как любая ПС подчиняется этому принципу. Функционирование ПС — это цепочка: отличительные признаки предмета-определение понятия.

Каждое определение понятия имеет одну (или несколько) причин и само является причиной последующих определений понятий. Все начинается с причины, поэтому важный момент — обеспечение «запуска» (включения) причины. Для этого необходимо наличие следующих условий: 1) обеспечить внешние условия, не препятствующие проявлению отличительного признака, 2) обеспечить внутренние условия, при которых проявляется отличительный признак, 3) обеспечить извне повод, толчок, «искру» для проявления отличительного признака.

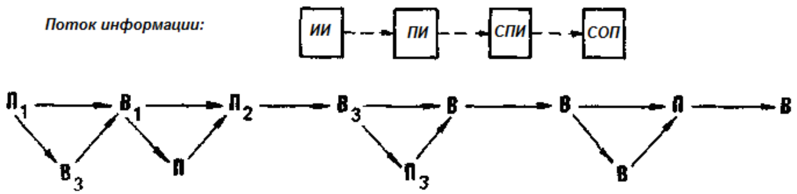
Главный смысл в выборе отличительного признака — лучшее осуществление принципа причинности. Надежный способ выстраивания цепочки отличительных признаков — от конечного отличительного признака к начальному. Конечный отличительный признак — это действие, полученное на понятийном органе, то есть осуществление функции ПС.

Главное требование к структуре понятия — минимальные потери смысла понятия и однозначность толкования понятия (исключение ошибки), то есть хорошая информационная проводимость и надежность причинно-следственной цепочки.

При решении задач образования понятия, после формулировки функциональных признаков образовываемого понятия возникают затруднения при переходе к его определению. Здесь поможет принцип причинности. Функциональные признаки образовываемого понятия — это заказ, конечное действие, от него требуется выстроить цепочку причин-следствий до понятийного эффекта.

Принцип полноты частей понятия (закон полноты частей понятийной системы) может быть взят за основу при пачальном построении функциональной схемы понятия. Возможна следующая последовательность шагов:

1. Формулируется БФ.
2. Определяется принцип построения определения понятия.
3. Отбирается или синтезируется прототип понятия.
4. К прототпу понятия «пристраивается» трансмиссия, двигатель, источник информации (ИИ), преобразователь информации (ПИ), система передаци информации (СПИ), средства образования понятия (СОП).
5. Строится в первом приближении функциональная схема образования понятия:



6. Выявляются недостатки и возможные сбои в схеме образования понятия. Разрабатываются более подробные схемы образования понятия с учетом иерархии понятийных подсистем. Понятийные подсистемы, недостаточно хорошо выполняющие функции, достраиваются новыми отличительными признаками. Например:

Это обычный путь развертывания ПС, увеличение БФ за счет добавления новых полезнофункциональных понятийных подсистем.

Некоторое увеличение БФ возможно за счет уменьшения вредных связей и эффектов в понятийных подсистемах (без их усложнения).

Наиболее радикальный путь — идеализация ПС.

Принцип дополнительности, заключается в особом способе соединения отличительных признаков при включении их в определения понятия. Отличительные признаки должны быть не только согласованы по форме и свойствам (для того, чтобы иметь принципиальную возможность взаимного соединения), но и дополнять друг друга, взаимно усиливаться, складывать полезные свойства и взаимно нейтрализовать вредные. Это основной механизм возникновения системного эффекта (качества).

8.3.5. Форма понятия

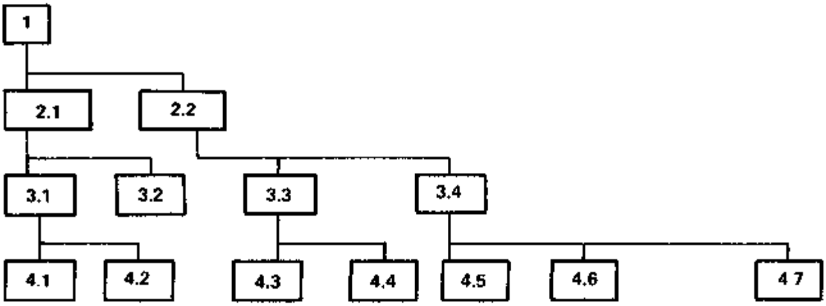
Форма — это внешнее проявление структуры понятия, а структура понятия — внутреннее содержание формы понятия. Эти два понятия тесно взаимосвязаны. В понятийной системе может преобладать одно из них и диктовать условия воплощения другой (например, форма крыла самолета обуславливает его структуру). Логика построения структуры понятия в основном определяется внутренними принципами и функциями понятия. Форма в большинстве случаев зависит от требований понятийной надсистемы.

8.3.6. Иерархическая структура понятия

Иерархический принцип организации структуры понятия возможен только в многоуровневых понятийных системах и заключается в упорядочении взаимодействий между уровнями в порядке от высшего к нижнему. Каждый уровень выступает как управляющий по отношению ко всем нижележащим и как управляемый (подчиненный) по отношению к вышележащему. Каждый уровень специализируется также на выполнении определенной функции понятия (БФ уровня). Абсолютно жестких иерархий не бывает, часть понятийных систем нижних уровней обладает меньшей или большей автономией по отношению к вышележащим уровням. В пределах уровня отношения отличительных признаков предмета равны между собой, взаимно дополняют друг друга, им присущи черты самоорганизации (закладываются при формировании структуры понятия).

Становление и развитие иерархических структур понятий не случайно, так как это один из путей увеличения истинности, достоверности и устойчивости определения понятия в понятийных системах средней и высокой сложности. В простых понятийных системах иерархия не требуется, так как взаимодействие отличительных признаков предмета осуществляется по непосредственным связям между отличительными признаками предмета. В сложных понятийных системах непосредственные взаимодействия между всеми отличительными признаками невозможны (требуется слишком много связей), поэтому непосредственные контакты сохраняются лишь между отличительными признаками предмета одного уровня, а связи между уровнями резко сокращаются.

Пример иерархической структуры понятия:



Основные свойства иерархических структур понятий

1. *Двойственность качеств отличительных признаков в структуре понятия* — отличительный признак предмета одновременно обладает индивидуальными и системными качествами. Входя в понятийную систему, отличительный признак предмета теряет свое исходное качество. Системное качество как бы забивает проявление собственных качеств отличительного признака предмета. Но полностью это не происходит никогда. Химические соединения, имея системные физико-химические свойства, сохраняют и свойства входящих в них элементов. На этом основаны все методы анализа состава соединений (спектральный, ядерно-магнитный резонанс, рентгеновский и т. д.). Чем сложнее иерархическая структура (организация) понятийной системы, тем выше индивидуальные качества понятия, тем четче они выступают в понятийной надсистеме, тем менее она связана с другими отличительными признаками (понятийными системами) понятийной надсистемы На более низких уровнях происходит упрощение отличительных признаков предмета (понятийным системам не нужны «сложные» отличительные признаки предмета, нужна простая полезная функция). В результате этого отличительные признаки предмета утрачивают часть своей первоначальной значимости, конкретную индивидуальность, становятся безразличными к своей понятийной индивидуальной форме.

Утрата индивидуальности — это цена, «заплаченная» отличительными признаками предмета за приобретенную ими способность выражать отдельные стороны системных связей в иерархии. (Как в обществе: человек на производстве не субъект, не неповторимая индивидуальность, не творец своих обстоятельств, он — функция, объект, вещь). Это свойство иерархических понятийных систем является причиной распространенного вида психинерции разработчика понятия - он видит одно (главное, системное) свойство отличительного признака предмета и не видит множества его прежних индивидуальных свойств.

2. *Диктат верхних уровней над нижними* — основной порядок иерархии (аналог в обществе: единоначалие, авторитарное руководство).

Самый нижний уровень иерархии — средства образования понятия (СОП) или их реализующая часть, зона, поверхность (в каждой понятийной подсистеме свои средства образования понятия). Поэтому все управляющие воздействия (сигналы) и информация обязательно доходят до средств образования понятия, заставляя их функционировать строго определенным образом. В этом смысле средства образования понятия — самый подчиненный элемент понятийной системы. Напомним, что их роль при синтезе понятия прямо противоположна: они диктуют структуру понятия для выполнения БФ.

Часто диктат верхних уровней простирается еще ниже средства образования понятия. А что находится ниже средства образования понятия? — определение понятия.

3. *Нечувствительность верхних уровней к изменениям на нижних и наоборот, чувствительность нижних к изменениям на верхних.* Изменения на уровнях понятийных систем и понятийных подсистем низшего ранга не отражаются на системном свойстве (качестве) ПС — ПС высших рангов.

Пример. Принцип телевидения был воплощен уже в первых механических системах. Новое системное свойство (передача изображения на расстояние) принципиально не изменилось при переходе на ламповые, транзисторные, микромодульные элементы. Увеличивалась БФ, но системное свойство принципиально не менялось. Главное для понятийной надсистемы — выполнение понятийными подсистемами своих функций, а на каких информационных принципах — безразлично. Это положение имеет важное следствие для образования понятия. Допустим, возникла задача образовать понятие «обеспечение эффективного теплоотвода от работающего трансформатора в телевизоре» (потребляемая мощность 400 ватт). Разработчик понятия может долго и различными путями искать отличительные признаки, характеризующие способ теплоотвода, образовывать новые понятийные подсистемы, и т. д. Однако, если подняться на уровень выше (блок питания), то задача образования понятия может быть решена совершенно иным способом (например, импульсный режим питания), а при изменении на верхнем уровне (например, замена ламповой схемы на транзисторную) может вообще исключить эту задачу — в ней просто отпадет необходимость (мощность снизится, допустим, до 100 ватт).

4. *Отфильтровывание (выделение) полезных функций понятия на уровнях иерархии.* Правильно организованная иерархическая структура понятия выделяет на каждом уровне полезную функцию, эти функции складываются (взаимоусиливаются) на следующем уровне. При этом неэффективные функции на каждом уровне подавляются или, по крайней мере, к ним не добавляются новые.

Основной вклад в БФ происходит на нижних уровнях, начиная со средства образования понятия. На последующих уровнях следует более или менее существенное дополнение (усиление) полезной функции. С увеличением количества уровней рост БФ замедляется, поэтому понятийные системы с большим количеством иерархических уровней неэффективны. Самый верхний уровень иерархии выполняет обычно только согласовательные функции, таких уровней не должно быть больше одного.

Чем выше уровень иерархии, тем мягче структура понятия, менее жесткие связи между отличительными признаками, их легче переставлять и заменять. На нижних уровнях более жесткая иерархия и связи, структура понятия строго определена требованием выполнения БФ.

8.3.7. Исспользование метода решеток для формализованного синтеза структуры понятий

8.3.7.1. Основные понятия и определения решеток

Используем для формализованного описания определения понятия математическую структуру, называемую решеткой. Но прежде рассмотрим некоторые положения из теории решеток.

Некоторые из решеток имеют важное значение в абстрактной теории понятий, фрагменты которой возникли из понятия аппроксимации. Формализованное определение понятия аппроксимирует лингвистическое определение понятия, если оно однозначно интерпретирует те же самые отличительные признаки, которые описаны лингвистически, на подмножестве отличительных признаков, доступных тому определению понятия. Если же рассматривать отличительные признаки понятия как множество, то одно понятие аппроксимирует другое, когда для некоторых отличительных признаков оно предлагает в качестве определения понятия подмножество $B \subseteq A$, где A — множество отличительных признаков второго определения понятия. Это достаточно простые и, вероятно, очевидные способы аппроксимации понятий. При этом возникает множество элементов (отличительных признаков), связанных некоторым отношением порядка.

Для общности рассмотрений свойства отличительных признаков надо выводить не в терминах рассматриваемого понятия, а в терминах языка, используемого для записи понятий.

Решетки. Напомним, что бинарное отношение ρ на множестве S является частично упорядоченным отношением, если оно рефлексивно, транзитивио и антисимметрично. Следовательно, (S, ρ) — частично упорядоченное множество, и, если не возникает двусмысленности, ρ можно записать как $\leq$, а $(\leq , \rho)$ обозначить просто через S. Частично упорядоченное множество называется *линейно упорядоченным* (или *цепью),* если для любых $x, y \subseteq S$ или $x \leq y$, или $y \leq x$, или же выполнены оба эти отношения. На самом деле любой частичный порядок можно представить в виде объединения линейных порядков. Поэтому возникает естественный и полезный способ изображения отношений порядка.

Заметим, что любое конечное, линейно упорядоченное множество $(A, \leq)$ можно представить следующим образом:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n;$$

здесь рефлексивность и транзитивность не требуют доказательств. Легко видеть, что рис. 1 является «очевидным» представлением $(A, \leq)$. Другими словами, мы записываем A как $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

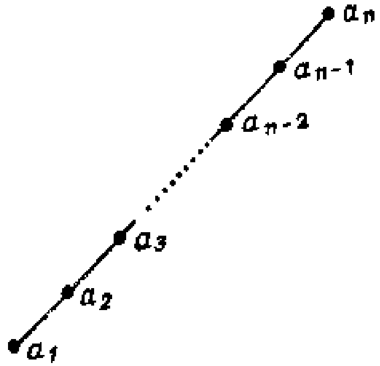


Рис. 1

Предложение. *Частичное упорядочение на конечном множестве может быть представлено как объединение линейных порядков на некоторых подмножествах.*

Используя этот результат, можно представить любой частичный порядок (конечный или бесконечный, однако бесконечные отношения сложно изобразить на конечных листах бумаги за конечное время!) изображением множества соответствующей цепей. Полученная диаграмма называется *диаграммой Хасса.*

Пример 1. Отношение $\rho = \{(x, y): x$ — множитель $y\}$, определенное на множестве $\{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$, дает диаграмму Хасса (изображенную на рис. 2) и может быть разбито на линейно упорядоченные подмножества $\{(1, 2, 4, 12), (1, 3, 6, 12), (2, 6), (4, 20), (2, 10, 20)\}$.

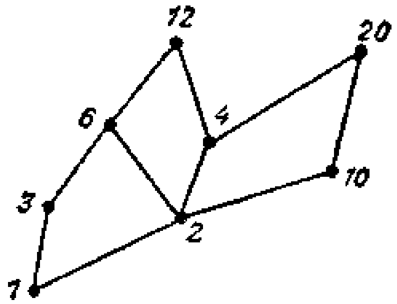


Рис. 2

Этому разбиению эквивалентно следующее множество линейных порядков: $\{(2, 6, 12), (1, 3, 6), (1, 2, 10, 20), (2, 4, 20), (4, 12)\}$. Заметим, что хотя $1\rho x$ для всех $x \in \{1, 2, 3, 4, 6, 10, 12, 20\}$, на этом рисунке отсутствуют восемь стрел, выходящих из 1. Это достигается *неявным* представлением свойств рефлексивности и транзитивности.

Пусть дано $(A, \leq)$ и $B \subseteq A$. Можно задать вопрос: будет ли B ограничено сверху (снизу) элементами множества A? Далее мы можем искать наименьшую верхнюю грань (наибольшую нижнюю грань), которая обозначается sup (inf) (читается супремум (инфимум)). Будем их использовать для характеристики решетки.

Определение. *Решетной* называется частично упорядоченное множество $(A, \leq)$, в котором каждая пара элементов имеет супремум и инфимум. Для заданных $x, y \in A$ эти грани будем записывать следующим образом:

$$x \wedge y = \inf(\{x, y\}), \quad x \vee y = \sup(\{x, y\}).$$

Не всякое частично упорядоченное множество является решеткой. Например, частично упорядоченное множество из примера 1 не является решеткой, поскольку $12 \vee 20$ не определено.

Определив операции $\wedge$ и $\vee$ между парами элементов в частично унорядочепном множестве, расширим это понятие естественным образом. Положим

$$\wedge X = \wedge_{x \in X}\, x = \inf X, \qquad \vee X = \vee_{x \in X}\, x = \sup X,$$

Это обозначает sup X и inf X конечного непустого множества X.

Можно показать, что существует много специальных видов решеток, в которых можно производить различные операции формального определения понятий. Ограничимся рассмотрением трех таких типов.

Определение. Решетка L, обозначаемая $(L, \wedge, \vee)$, *дистрибутивна,* если она подчиняется дистрибутивным законам

$$x \wedge (y \vee z)=(x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$
$$x \vee (y \wedge z)=(x \vee y) \wedge (x \wedge z)$$

для ясех $x, y, z \in L$.

Не все решелш являются дистрибутивными,

Пример 2. Решетка, изображенная на рис. 3, не является дистрибутивной, поскольку

$$b \wedge (d \vee c) = b \wedge c = b,$$

тогда как

$$(b \wedge d) \vee (b \wedge c)=a \vee a=a.$$

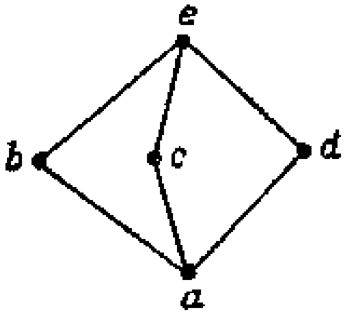


Рис. 3

Предложение. *Пусть в дистрибутивной решетке* $(L, \wedge, \vee)$ *выполнены соотношения*

$$x \vee y = x \vee z, \quad x \wedge y = x \wedge z.$$

Тогда $y = z$.

Доказательство. Сначала заметим, что из определения inf и sup

а) $a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a;$

б) $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$;

в) $(a \wedge b) \vee a = a, \quad a \wedge (a \vee b) = a.$

Поэтому

$$y = y \vee (y \wedge x) = y \vee (z \wedge x)=(y \vee z) \wedge (y \vee x)=$$
$$=(z \vee y) \wedge (z \vee x)= z \vee (y \wedge x)= z \vee (z \wedge x)=z$$

Определение. Предположим, что $(L, \wedge, \vee)$ — решетка и $0, 1 \in L$ такие, что $0 \leq x \leq 1$ для всех $x \in L$ (об элементах 0 и 1 скажем немного позже). Тогда

$$x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \wedge 0 = 0, \quad x \vee 0 = x$$

для любого $x \in L$. Такая решетка называется решеткой с дополнениями, если для любого $x \in L$ существует $\overline{x} \in L$ такой, что

$$x \wedge \overline{x} = 0, \quad x \vee \overline{x} = 1$$

($\overline{x}$ называют дополнением *x).*

Предложение. *Если* (L, $\wedge$, $\vee$) *— дистрибутивная решетка с дополнениями, то дополнения единственны.*

Доказательство. Предположим, что $x, y, z \in L$ и

$$x \vee y = x \vee z(=1), \quad x \wedge y = x \wedge z(=0).$$

Тогда из предыдущего предложения следует, что $y = z$.

Третий, и последний специальный тип решеток, который мы определим, необычен в том смысле, что он не дает нам ничего нового для конечных решеток. Чтобы подчеркнуть ключевой момент исследования, дадим другое определение решетки в форме предложения.

Предложение. *L является решеткой тогда и только тогда, когда $\vee X$ и $\wedge X$ существуют для любого непустого конечного подмножества X из L.*

(Этот факт можно доказать индукцией по числу элементов множества X.)

Если L — решетка и в ней определен элемент $\wedge L$, то он обозначается символом 0 и называется наименьшим элементом L. Аналогично, если в L существует элемент $\vee L$, то он обозначается символом 1 и называется наибольшим элементом L; по определению $\vee \varnothing = 0$.

Определение. Решетка L называется *полной,* если $\vee X$ и $\wedge X$ существуют для *всех* подмножеств X из L.

Все конечные решетки являются полными. Рассмотрим, однако, множество $\mathbf{Q}$ с обычным отношением порядка $\leq$ и бесконечное множество аппроксимаций числа π, каждое из которых имеет на один десятичный знак больше. Верхняя грань этой последовательности, очевидно, есть π, однако $\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, и, следовательно, ($\mathbf{Q}$, $\leq$) не является полной решеткой. Решетка ($\mathbf{R}$, $\leq$) является полной, и $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$.

Любая решетка может быть расширена до полной решетки.

8.3.7.2. Решение задач функционольного и структурного синтеза понятий

При синтезе структуры понятия разработчик понятия, как правило, определяет множество функциональных компонент (отличительных признаков), из которых состоит понятие, вводит отношения между определенными компонентами и принимает это как начальное описание понятия.

Далее перед разработчиком возникает задача полноты определенного множества функциональных компонент, которые образуют структуру понятия, их неизбыточности и согласованности по параметрам. В терминах общей теории понятий это сводится к ***решению проблемы синтеза структуры понятия***, которая представляется следующим образом: ***задана понятийная система, включающая в себя множество компонент структуры понятия - отличительных признаков и отношения между ними; необходимо идентифицировать (определить) наилучшее представление этого понятия с помощью его структуры, элементы которого связаны с подмножествами переменных, описывающих компоненты - отличительные признаки.***

Процедура решения такой задачи состоит из генерации наиболее приемлемых с точки зрения начального определения понятия структурных предположений рассматриваемой проблемы образования понятия, анализа каждого из них на основе заданной понятийной системы и начальной структуры (описания) понятия и сравнения результатов анализа с исходными компонентами с использованием различных критериев оценки сформулированного структурного предположения понятия.

Например, при формировании понятия «Система автоматизированного конструирования (САК)» можно выделить четыре существенные компоненты образования данного понятия: ***управление, диалог, поиск, вычисления.*** Для каждого конкретного понятия САК, которое следует рассматривать как проблему синтеза понятия, эти компоненты могут быть реализованы (описаны) различными способами образования понятия.

Всего для этих компонент можно получить 2^{2n} образования структур понятий САК. Естественно, не все образованные понятия этого множества приемлемы для более детального анализа (уточнение параметров выделенных компонент понятия и определение требований к связям между этими компонентами).

Задачей синтеза понятий в данном случае является формирование рекомендаций по выбору структуры понятия из множества возможных структур понятий. Для осуществления синтеза структур понятий необходимо сформировать некоторую начальную структуру понятия, т. е. выделить компоненты понятия и определить отношения между ними. Далее, используя метод, изложенный ниже, можно синтезировать понятия для получения новых структур понятий. Однако проводить синтез структур понятий, не зная, как оценивать синтезируемые структуры, бессмысленно. Следовательно, необходимо иметь рекомендованный метод, который позволял бы оценивать структуры понятий и выбирать наиболее приемлемые для последующего анализа и синтеза понятий. Чтобы этот метод использовался при решении задачи синтеза структур понятий, он должен обладать инвариантными свойствами и обеспечивать формальное описание понятия.

Для структурных предположений понятий введем частичный порядок. В этом случае множество структурных предположений понятий вместе с частичным порядком образуют решетку, которая позволяет проводить процесс поиска «наилучшего» структурного предположения понятия не по всему множеству возможных структурных предположений, а только по ограниченной части его.

Определим структуру понятия как семейство подмножеств множества переменных **V** отличительных признаков предмета понятия. Множеством всех возможных структур понятий по отношению к множеству **V** будет множество

$$\mathbf{S} = \{\mathbf{S}_i | \mathbf{S}_i \in \mathbf{P}(\mathbf{V})\},$$

где **P**(**V**) — мощность множества **V**.

Проведем классификацию введенного множества S. Определим отображение

$$\mathbf{r}:\mathbf{S}\rightarrow\mathbf{R},$$

где **R** — множество всех симметричных бинарных отношений, определенных на множестве **V**, и $\mathbf{r}(\mathbf{S}_i)$ — бинарное отношение, в котором переменные (отличительные признаки) v_i и v_j связаны тогда и только тогда, когда они обе принадлежат, по крайней мере, одному из подмножеств множества **V**, через которое определена $\mathbf{S}_i$:

$$\mathbf{r}(\mathbf{S}_i)=\{(v_i, v_j)| \; v_i, v_j \in \mathbf{V}, \; \exists \; (\mathbf{E}_a \in \mathbf{S}_i)(\; v_j \in \mathbf{E}_a, \; v_i \in \mathbf{E}_a)\},$$

где $\mathbf{E}_a$ — понятийная подсистема структуры понятия $\mathbf{S}_i$.

Отображение **r** невзаимооднозначное, так как $\mathbf{S}_i \equiv \mathbf{S}_j$, если $\mathbf{r}(\mathbf{S}_i)=\mathbf{r}(\mathbf{S}_j)$. Будем использовать символ **S/r** для обозначения эквивалентных классов понятий в **S** посредством **r**.

Некоторые структуры понятий из множества **S** могут не сохранять первоначального понятия об объекте исследования, следовательно, необходимо, введя некоторые ограничения на множество **S**, сузить множество всех возможных структур понятий до множества значимых структур понятий, дающих полное представление о предмете понятия. Введем эти ограничения:

— множество связанных переменных структуры понятия должно быть полным;

— каждый элемент (отличительный признак) структуры понятия должен быть определен непустым множеством переменных;

— не должно существовать элемента (отличительного признака), который состоял бы только из переменных, включенных полностью в некоторый другой элемент этой же структуры понятия.

В результате получается множество $\boldsymbol{S}_G$, называемое множеством приемлемых структур понятия:

$$\mathbf{S}_G = \left\{ \mathbf{S}^i{}_G \mid \mathbf{S}^j{}_G \subset \mathbf{P}(\mathbf{V}),\ \bigcup \mathbf{E}_a = \mathbf{V}, \mathbf{E}_a \not\subset \mathbf{E}_b, \forall \mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b \in \mathbf{S}^i{}_G\ (a \neq b) \right\}$$

Пусть требуется разработать комплекс программ, который позволял бы генерировать понятия по созданию всего множества приемлемых структур понятий и оценивать их для заданного множества переменных. Как отмечалось ранее, множество приемлемых структур понятий вместе с определенным на этом множестве частичным порядком образуют решетку. Рассмотрим подробно понятие «частичный порядок» для множества приемлемых структур понятий.

Предположим, что $\mathbf{S}^i{}_G$ и $\mathbf{S}^j{}_G$ принадлежат множеству $\mathbf{S}_G$, где $\mathbf{S}^i{}_G \leq \mathbf{S}^j{}_G$ тогда и только тогда, когда для каждого множества $\mathbf{E}_a \in \mathbf{S}^i{}_G$ существует множество $\mathbf{E}_b \in \mathbf{S}^j{}_G$ такое, что $\mathbf{E}_a \subseteq \mathbf{E}_b$. Если $\mathbf{S}^i{}_G \leq \mathbf{S}^j{}_G$, то будем называть $\mathbf{S}^i{}_G$ «уточнением» структуры понятия $\mathbf{S}^j{}_G$ и, наоборот, $\mathbf{S}^j{}_G$ «агрегатом» $\mathbf{S}^i{}_G$. Кроме того, $\mathbf{S}^i{}_G$ — непосредственное «уточнение» $\mathbf{S}^j{}_G$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{S}^i{}_G \leq \mathbf{S}^j{}_G$ и не существует такой $\mathbf{S}^k{}_G$, что $\mathbf{S}^i{}_G \leq \mathbf{S}^k{}_G$ и $\mathbf{S}^k{}_G < \mathbf{S}^j{}_G$. Аналогично определяется непосредственный «агрегат».

Определим отображение как

$$\mathbf{r}_G : \mathbf{S}_G \rightarrow \mathbf{R}^*,$$

где $\mathbf{R}^*$ — множество всех симметричных и рефлексивных бинарных отношений, определенных на множестве $\mathbf{V}$. Это множество можно интерпретировать как множество ненаправленных графов с петлями. Символом $\mathbf{S}_G/\mathbf{r}_G$ обозначим множество классов эквивалентности, определенных на множестве приемлемых структур понятий посредством $\mathbf{r}_G$. Каждому классу эквивалентности соответствует единственная каноническая структура понятия, содержащая минимальное число элементов (отличительных признаков). Между множеством канонических структур $\mathbf{S}_C$ и множеством ненаправленных графов, определенных на данном множестве переменных, существует взаимно однозначное соответствие. Каноническая структура понятия всегда будет агрегатом для структур понятий, принадлежащих классу эквивалентности, определяемому этой структурой. Введем также структуры понятий, которые будут являться уточнением для любой структуры понятия из определенного класса эквивалентности. Они построены так же, как пары переменных, которые связаны в графе, представляющем класс эквивалентности, и как единичные переменные, которые изолированы в графе. Будем называть введенные структуры понятий соответственно **C**- и **P**-структуры. Очевидно, что $\mathbf{C} \geq \mathbf{P}$ и все остальные структуры (из определяемого этими структурами класса эквивалентности) будут всегда находиться между **C** и **P**.

Из этого следует, что структурные предположения понятий, не входящие в указанное множество $\mathbf{S}_G$, могут быть игнорированы без каких-либо потерь для множества анализируемых синтезированных структурных предположений понятий.

Процесс синтеза структурных предположений понятия можно проводить различными способами в зависимости от ограничений, накладываемых разработчиком понятия на начальную структуру понятия.

Во-первых, если разработчик считает, что все связи между функциональными компонентами понятия, заданными в начальной структуре понятия, «жесткие», т. е. удаление какой-либо связи повлечет за собой коренное изменение в функциональной принадлежности начально определенных агрегатов компонент структуры понятия, то процесс синтеза новых структурных предположений понятия необходимо проводить в рамках выделенного класса эквивалентности, соответствующего начальной структуре понятия. В этом случае механизм синтеза структурных предположений понятия заключается в агрегировании либо в декомпозиции элементов начальной структуры понятия.

Во-вторых, если разработчик считает, что удаление связей возможно и даже необходимо, то процесс синтеза понятия основывается на переходе из одного класса эквивалентности структурных предположений понятия в другой, причем связи можно и удалять и добавлять.

Для правильного понимания физического смысла таких понятий, как «удаление связей», «добавление связей», «агрегирование и декомпозиция элементов» и т. д., необходимо уяснить одно из центральных понятий структурного синтеза — поведение системы, которое описывается следующим образом:

— определяется множество переменных, через которые наблюдается система — множество **V** (например, множество функциональных компонент, необходимых для образования понятия);

— каждой переменной задается определенное состояние из множества состояний данной переменной. Совокупность состояний множества переменных — множество **X** (например, конкретные реализации понятий);

— на множестве **V** определяется функция *f*, ставящая в соответствие каждой переменной (функциональной компоненте) определенное состояние (конкретную реализацию) ;

— определяется множество агрегатов состояний **A** (в данном случае — множество возможных конфигураций структуры понятия);

— вводится отображение *b*, ставящее в соответствие каждому агрегату состояний некоторое число их [0, 1], в данном случае — назначение каждой конфигурации синтезируемой структуры понятия определенной вероятности (если сложно выделить приоритеты различных конфигураций понятия, то возможные конфигурации принимаются равновероятными).

Описав таким образом «поведение» понятия, нетрудно проследить качественные изменения, происходящие в процессе синтеза понятия новых структурных предположений.

В качестве исходных данных для процедур синтеза понятия имеется начальная структура понятия, а также сформулированное описанным способом «поведение» понятия. Используя процедуры генерации, можно получить множество новых структурных предположений понятий в рассматриваемой проблеме синтеза понятия и оценить эти сгенерированные структурные предположения.

Для проведения оценки качества определения понятия (его истинности) необходимо выяснить, как соотносятся эти сгенерированные структурные предположения понятия с начальным «поведением» структуры понятия. Предлагается использовать структурное предположение понятия (совокупность подмножеств множества переменных или отличительных признаков понятия) в качестве некоторой маски, накладываемой на начальное определение понятия (множество реализаций рекомендаций) для получения нового определения, соответствующего сгенерированному структурному предположению понятия. Далее эти оба определения (новое и начальное) можно сравнить по множеству агрегатов определений **А** и значению вероятностей появления данного конкретного агрегата в определении понятия, определенном структурным предположением. Естественно, новое определение, соответствующее сгенерированному структурному предположению понятия, может иметь агрегаты определения (возможные конфигурации структуры понятия), которые не были описаны в начальном определении понятия. В этом случае к рассмотрению этих агрегатов определений необходимо подойти с особой внимательностью, и если полученные агрегаты определений представляют собой допустимые конфигурации структуры понятия, то целесообразно включить эти агрегаты определений в начальное определение и последующие итерации проводить уже с модифицированным начальным определением. ***Таким образом, структура понятия и начальное определение понятия определяют определение понятия, имеющей эту структуру***. Следовательно, одним из критериев выбора структуры понятия может являться факт сохранения начального определения понятия для сгенерированного структурного предположения. Сохранение означает совпадение у начального и нового определения агрегатов определений и значений вероятностей появления этих агрегатов.

В этом случае структурные предположения понятия, полученные в результате первой итерации и сохранившие начальное определение, выбираются в качестве начальных структур понятия для последующей итерации и т. д.

В конкретных реализациях сформированных рекомендаций, естественно, кроме критерия выбора структур понятий для последующих итераций используется и ряд других критериев, например минимизация количества элементов (отличительных признаков) в структуре понятия и т. п.

Учитывая тот факт, что совокупность структурных предположений понятий образует решетку, можно определить направление синтеза новых структурных предположений понятий.

С чисто практической точки зрения наиболее интересным является синтез структурных предположений понятий в рамках определенного класса эквивалентности. Как правило, разработчик считает свою модель понятия (начальное определение и структуру) «жесткой», т. е. установленные им связи (отношения между состояниями переменных) неизменными. На самом деле, начальное определение структуры понятия в большинстве случаев избыточно и содержит различного рода противоречия. Для того, чтобы корректно задать начальное определение и структуру понятия, необходимо на первом шаге промоделировать исходное структурное предположение. Используя метод интерпретирующего структурного моделирования, можно выделить компоненты связанности в проблеме синтеза понятия, проверить структуру понятия на «достижимость» переменных, определить уровни иерархии понятий и т. д. Только после проведенного таким образом анализа начальной структуры понятия можно приступать к синтезу новых структурных предположений понятия.

Например, формируя рекомендации для образования понятия «Система документирования», на вход которой поступает информация от других систем, и необходимо сформировать на выходе этой системы описания свойств, спецификацию компонент в виде таблицы, а также построить структурную схему. Представим, что состояние информации в системе описывается четырьмя переменными **V** = (v_1, v_2, v_3, v_4):

$$v_1 = \begin{cases} 1 \text{ — наличие входной информации;} \\ 0 \text{ — отсутствие входной информации;} \end{cases}$$

$$v_2 = \begin{cases} 0 \text{ — отсутствие описания;} \\ 1 \text{ — описание свойств;} \\ 2 \text{ — описание свойств и элементов;} \\ 3 \text{ — описание свойств и внутренних связей;} \\ 4 \text{ — описание свойств, элементов и внутренних} \\ \quad \text{связей;} \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{cases} 0 \text{ — отсутствие спецификации компонентов;} \\ 1 \text{ — наличие таблицы спецификации;} \end{cases}$$

$$v_4 = \begin{cases} 0 \text{ — отсутствие структурной схемы;} \\ 1 \text{ — наличие структурной схемы.} \end{cases}$$

Пусть в результате предварительного анализа было получено требуемое поведение системы, представленное табл. 1.

Таблица 1

v_1	v_2	v_3	v_4
0	0	0	0
1	1	0	0
1	2	1	0
1	3	0	1
1	4	1	1

Появление каждого агрегата в этом поведении принимается равновероятным с вероятностью, равной 0,2.

Пусть в качестве начальной структуры выбрана структура вида

$$\mathbf{S}_0=(v_1, v_2, v_3, v_4).$$

Это означает, что $\mathbf{S}_0$ состоит из одного элемента и все переменные попарно связаны. Далее, применяя процедуры декомпозиции данной структуры на подсистемы, получаем новые структурные предположения.

В соответствии с начальным поведением для каждой синтезированной структуры вычисляются поведение, а также степень отличия вычисленного поведения от начального. Например, для структур

$$\mathbf{S}_1 = (v_1, v_2, v_3)(v_2, v_3, v_4);$$

$$\mathbf{S}_2 = (v_1, v_2, v_4)(v_2, v_3, v_4);$$

$$\mathbf{S}_3 = (v_1, v_2, v_3)(v_1, v_2, v_4)$$

вычисленное поведение совпадает с начальным и степень отличия равна нулю. Взяв эти структуры в качестве исходных для последующих итераций синтеза понятий и применив процедуру декомпозиции, получаем множество структур понятий, в которых изменились связи между переменными по сравнению с исходными структурами. Для полученных структур понятия также формируется определение понятия и сравнивается с исходным.

Структуры, выделенные из множества синтезированных структур, согласно критерию сохранения определения понятия показаны на рис. 4.

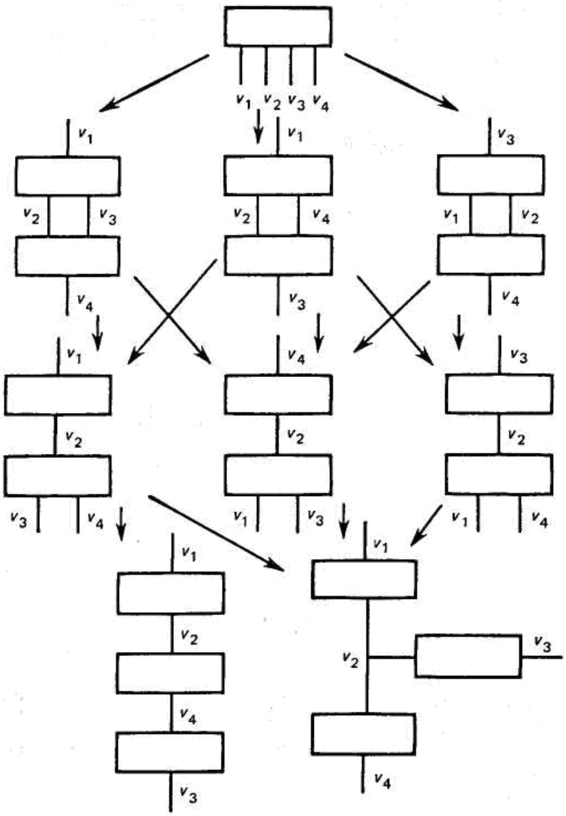


Рис. 4. Возможные структуры понятия «Система документирования»

В качестве структуры образовываемого понятия можно принять любую из этих структур, но необходимо также учитывать некоторые другие критерии, по которым можно сузить это множество, например критерий минимума подструктур в системе определений понятий или минимума связей между подструктурами понятий. Проведенный анализ синтезированных структур понятий показал, что начальному определению понятия удовлетворяют и наиболее приемлемы структуры, изображенные на рис. 5.

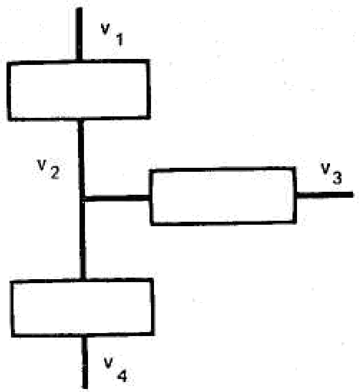


Рис. 5. Структуры определений понятия, удовлетворяющие начальному определению

Литература

1. Горский Д. П. Вопросы абстракции и образование понятий. М. : Изд-во АН СССР, 1961. С. 19.

2. Шептулин А. П. Диалектика единичного, особенного и общего. М. : Высшая школа, 1973. С. 174.

3. Ветров А. А. Семиотика и ее основные проблемы. М. : Политиздат, 1968. С. 42–59.

4. Богуславский В. М. Материя и сознание // Философия, основные идеи и принципы. М., 1985. С. 77.

5. Богуславский В. М. Слово и понятие // Мышление и язык. М., 1957. С. 16.

6. Терентьев С. И. Интерсубъективная природа понятий. Дис. ... канд. филос. наук. Чебоксары. 2004. С. 53.

7. Лотте Д. С. Некоторые принципиальные вопросы отбора и построения научно-технических терминов. М.; Л., 1941.

8. Лотте Д. С. Основы построения научно-технической терминологии. М.: АН СССР, 1961.

9. Wills W. Fachsprache und Übersetzung // Terminologie als angewandte Sprachwissenschaft. München; New York; London; Paris, 1979.

10. Гринев С. В. Введение в терминоведение. — М., Изд-во МГУ, 1993, 309 с.

11. Лейчик В. М. Терминоведение: предмет, методы, структура. — М., КомКнига, 2006, 256 с.

12. Беляева Л. Н., Маюрина Л. В. Моделирование перевода сложных терминов с помощью тезауруса. — В кн.: Управление и диагностика. Рига. Изд-во Риж. Политехн. Инст., 1982, с 124-128.

13. Лесохин М. М., Лукьянениов К. Ф., Пиотровский Р. Г. Введение в математическую лингвистику. Минск: Наука и техника, 1982. 264 с

14. Марчук Ю. Н. Проблемы машинного перевода М . Наука, 1983. 232 с.

15. Попа К. Теория определения. М . Пргресс, 1976. 248 с.

16. 1. Горский Д. П. Определение. М. : Изд-во Мысль, 1974. 312 с.

Теория тезауруса.

Тезаурус – онтогенез.

Вернемся снова к словарям. Теперь о них можно сказать больше, пользуясь изученными семиотическими моделями. Действительно, двуязычные словари устанавливают отношения знак-знак в разных языках. Толковые словари описывают отношение знак-денотат. Но есть еще один важный вид словарей - тезаурусы. Часто они играют важную роль в современных ИС и значительно повышают их эффективность. Термин «тезаурус» по происхождению лингвистический. Начнем с его происхождения (онтогенеза). Сначала в средние века ученые собирали слова (лексическое богатство) латинского языка. Тезаурус по-латински и есть богатство. В нем были примеры употреблений самых редких латинских слов латинских авторов. Назовем это тезаурус-1 (Т1). Но следующей была уже простая мысль - упорядочить эти слова по их денотатам просто по крайней мере классифицировать их в иерархические структуры. Тогда это будет уже тезаурус другого типа – ближе к тому, который употребляется в информатике. Назовем это тезаурус-2 или Т2 и далее подразумевать под этим тезаурус в наших рассуждениях. Но тогда можно сделать новое важное движение - от классификации (по сути - от денотата) нам требуется найти нужный знак. Важность этого вида словарей не сразу бросается в глаза, но, поняв его функции, их эффективность трудно переоценить. Действительно, мы можем, двигаясь по понятной нам классификации, найти любое нужное нам слово (хотя бы латинского языка), не зная его. Но это не все. При помощи тезауруса можно интегрировать и упорядочить очень сложную человеческую деятельность. Вспомним пример про тезаурус НАСА. Он содержит миллионы терминов по самой ракетной и космической технике и сопряженных с ними понятий и терминов. Это огромная проблема эффективной коммуникации в процессе производственной деятельности. Ведь часто люди не знают как называются многие объекты, понятия или процессы или называют по-разному одинаковые детали в сложных механизмах. А шутки, что русский скажет товарищу – подай-ка мне ту штуковину часто оказываются горькими. Космическую гонку мы проиграли. Тезауруса как у НАСА у нас не было и нет до сих пор. А американцы все «штуковины» ракетной техники систематизировали в единый тезаурус.

Итак, зачем нужен тезаурус он помогает интеграции знаний и повышению эффективности трудовой деятельности за счет оптимизации процесса коммуникации. Поэтому следует рассмотреть его подробнее. Но сначала определим, что такое тезаурус.

^

Тезаурус - определение

Итак, тезаурус (от греч. thesuarus "сокровище, сокровищница"):

1. словарь, в котором максимально полно представлены все слова языка с исчерпывающим перечнем примеров их употребления в текстах;

2.

идеографический словарь, в котором показаны семантические отношения (родо-видовые, синонимические и др.) между лексическими единицами, то есть отношения между денотатами, которые они обозначают.

Тезаурус в первом значении в полном объеме осуществим лишь для мертвых языков, например, "Thesaurus Lingue Latine". К этому типу приближается, также, "Словарь польского языка XVI в. ".

Структурной основой для тезауруса во втором значении обычно служит иерархическая система понятий, то есть денотатов, обеспечивающая поиск от смыслов к лексическим единицам, т.е. поиск слов, исходя из понятия.

^

Популярные тезаурусы и их особенности.

Каждая национальная традиция создала свою особенную разновидность тезауруса. Для того чтобы увидеть как действует тезаурус, в чем его польза и уникальность его свойств, обратимся к популярному немецкому тезаурусу DUDEN. На каждой его странице нарисован какой-либо вид человеческой деятельности в картинках. Например, железная дорога. От каждой картинки, изображающей ж-д пути, вокзалы, вагоны и т.п. отходят стрелочки с номерами. На соседней странице около каждого номера прописано его название на немецком, русском, английском языке. Для того, чтобы представить себе, в чем особенности поиска слов при помощи тезауруса, вообразим себе, что мы не знаем какой-либо части ж-д оборудования даже на родном русском языке. Но эту часть мы можем найти по картинке, а затем прочитать его название на нужном нам языке в списке на соседней странице.

Видно, что здесь мы идем не от слова (знака) к его значению, как в толковом словаре, а в обратном направлении – от денотата к знаку. Эта принципиальная разница часто скрыта от пользователя особенностями структуры словарей, но она достаточно ясно прослеживается в словарях-тезаурусах разных видов. Действительно, если мы, встретив в тексте, не знаем слова «фижмы», мы ищем его в толковом словаре по алфавиту на букву «Ф». Это деталь женской одежды XIX века. Но, если мы видим эту женскую одежду (например, в музее) и хотим узнать, как называется эта деталь, то мы в тезаурусе DUDEN находим страницу с картинками одежды разных эпох и по указателю находим название любой детали и не только на родном языке. Именно с такой ситуацией сталкиваются люди, участвующие в какой-либо сложной совместной деятельности. Часто проблемой является однозначное понимание, то есть обозначение разных ее объектов. Для оптимизации этих процессов в области аэрокосмических исследований был создан тезаурус НАСА.

Самый известный французский тезаурус – это знаменитый Larousse, у англичан это Roget's. Огромные ассигнования выделяются на создание специализированных (часто многоязычных) тезаурусов, как правило, реализованных уже на машинных носителях с программной поддержкой для пользователей. Например, в медицине это тезаурус SNOMED.

^

Теория тезауруса и семиотика

Рассмотрим, как реализуется функциональность тезауруса с точки зрения семиотики. Действительно, как уже говорилось выше, в толковом словаре мы ищем объяснение слова, т.е. движемся от знака к денотату -

S ---> D

Это значит, что денотат у нас есть функция от знака:

$D = f(S)$

В тезаурусе же реализуется обратная функция -

D ---> S

То есть знак есть функция денотата -

$S = F(D)$

Видно, что для того, чтобы реализовать типичную для тезауруса функцию нахождения слова (знака) по его значению (денотату), нужно найти этот денотат среди других ему подобных. Это заставляет создателей тезаурусов представить пользователю структурированную картину мира, чтобы он мог в ней найти свой денотат. Создатели словаря DUDEN решили эту проблему проще всего – изобразили наиболее популярные виды человеческой деятельности на нескольких сотнях картинок, на каждой из которых читатель может найти интересующий его объект. Создатели словаря Roget's структурировали мир иерархически – идя от общего к частному. От изначальных понятий мир-человек, живая-неживая природа, мир техники и т.д. читатель спускается к нужному ему денотату, после чего находит его название (часто вместе с набором синонимов). Такая структурированная иерархическая картина мира денотатов легла в основу современных тезаурусов, реализованных на компьютерах.

^

Теория тезауруса и информатика

Зачем нужен тезаурус в информатике? Во-первых – это информационный поиск (ИП). Действительно, если мы ищем что-то в Интернете простейшей "искалкой", то мы найдем только те тексты, которые включают в себя заданные в запросе ключевые слова. Можно представить, что я ищу информацию о цветах. Мой запрос принесет мне тексты с этим словом. А теперь представим себе, что есть нужные мне тексты о розах или гвоздиках, в которых ни разу не встречается слово "цветы". Тогда эти тексты НИКОГДА не будут найдены, несмотря на любые увеличения скорости процессора. Если же этот запрос пропустить через простейший тезаурус, то он развернет поисковое слово в необходимых подробностях, опустившись на один уровень ниже в денотатной структуре своего поискового тезауруса. Спустившись по этой структуре на уровень ниже денотата «цветы», программа поддержки тезауруса найдет тамразвернутую картину мира цветов с их названиями. То есть данном случае запрос может быть автоматически расширен - в него могут быть добавлены названия разных цветов и поиск будет вестись по всем этим названиям. Довольно ясно видно, что результаты такого поиска будут гораздо более полными.

Зачем нужен тезаурус во-вторых. Как уже говорилось выше - это интеграция знаний и повышение эффективности трудовой деятельности за счет оптимизации процесса коммуникации. Все денотаты любого вида деятельности могут быть сведены в понятную пользователю структуру, в которой он легко находит нужный ему денотат, затем его названиеи пользуется им.

^

Тезаурус - парадигматика.

Как указывалось выше, тезаурус - это прежде всего стуктурированный мир денотатов какого-либо вида деятельности. Чаще всего это иерархическая классификация. Она нужна, чтобы найти сначала нужный денотат, а затем его знак. Действительно, если я вижу гайку и не знаю как она называется даже на моем родном языке, тезаурус предлагает мне такую схему поиска по дереву: Гайка - это идея или материальная сущность. Затем - гайка - это природой созданный предмет или создан человеком и т.д. Мы движемся по дереву, пока не достигнем своего денотата, а потом видим, как он называется.

Поэтому для любой словарной статьи тезауруса нужно указать в какие более общие понятия, конструкции и т.п. интегрируется описываемый ею объект (денотат) - т.е. где вышестоящая обобщающая статья. Аналогичное рассуждение справедливо и в обратную сторону. Эта стройная иерархическая классификация дополняется перекрестными связями самого разного рода - чаще всего синонимическими или антонимическими, различного рода ассоциативными связями. Так реализуются тезаурусные функции, описывающие семантические связи между денотатами.

^

Тезаурусная терминология.

Навигация по денотатной структуре тезауруса и семантические связи между денотатами описываются англоязычной терминологией. Даже на английском - современной имперской латыни тезаурусная терминология содержит два наиболее употребительных синонимических набора терминов - один с более научным уклоном, другой – с более практическим или техническим предназначением.

Разберем наиболее употребительные из них. Так, вышестоящий термин по отношению к текущей словарной статье называется гиперонимом (hyperonym). Но в информатике (в частности в программной системе, позволяющей раелизовать свой тезаурус - MULTITES) этот термин называется BT - Broader Term (как бы - более широкий термин). Для денотата «дерево» гиперонимом будет «растение».

И наоборот - нижележащий термин - соответственно - гипоним (hyponym) или его программно-технический синоним называется NT (Narrower Term). Для нашего примера с деревом это будут денотаты «ель», «береза» и т.д. Более подробно эта терминология описана на сайте MULTITES.

^

Популярные тезаурусы и их особенности.

В чистом виде тезаурус встречается редко - как и движение без трения или чистый кремний. В реальных тезаурусах происходит упрощение исходной идеи или добавление посторонней, но потенциально нужной его пользователю информации. Это можно проследить очень кратко на известных, уже упоминавшихся тезаурусах.

Roget's. Наиболее популярный Т. Организован вниз вплоть до набора синонимов в каждой словарной статье. Поэтому он часто, используется для того, чтобы подыскать более подходящий синоним к слову. К тому же он и дополнен грамматическими сведениями в каждой своей статье. Очень удобный инструмент для любого пишущего человека. Сейчас многие компьютерные редакторы кроме возможностей орфографической проверки слов (так называемыми «спеллчекерами») укомплектованы также тезаурусами, позволяющими работать со значениями слов (денотатами), - то есть подбирать синонимы, антонимы и т.п.

DUDEN. Идея поиска названия денотата реализована наиболее просто и наглядно. DUDEN -это книга с картинками на правой стороне (по разным ПО) с тщательно пронумерованными мельчайшими их деталями. На правой стороне этот нумерованный список сопровождается названиями (даже на двух языках). Например - на целой странице нарисованы ж.д. техника, станции, пути и т.п. Справа можно найти названия стрелок, семафоров, костылей.

SNOMED. Это огромный компьютеризированный тезаурус медицинской терминологии. Ссылка на его сайт дает хорошее представление о его возможностях.

Тезаурус НАСА. Как и SNOMED - этот тезаурус - одно из больших свершений в области лингвистики. Систематизированный свод терминов по ракетной технике и смежным областям. НАСА сделала прекрасный сайт. Можно посмотреть этот тезаурус в оригинальном динамическом графическом интерфейсе.

MULTITES. Это популярное средство создания словарей. Позволяет самому через графический интерфейс, следуя простым инструкциям построить свой тезаурус для конкретной ПО и сразу получить его в виде программного продукта.

WORDNET - интеллектуальный компьютерный тезаурус. Создан в Принстонском университете и свободно распространяется. Основной материал о нем расположен на его сайте. Основные особенности WORDNET. Слова в нем сгруппированы в синонимические группы (синсеты - synsets). Они разбиты на 4 словаря - существительные, прилагательные, глаголы и наречия. Синсеты объединены как в иерархические связи (гипонимы и гиперонимы), так и в отношение антонимии и также меронимии (быть частью чего-л или состоять из частей). Решена также проблема морфологии - слово после обращения к этому тезаурусу возвращается в исходной нормализованной грамматической форме. Описанный таким образом словарный состав английского (а сейчас уже и русского) языка позволяет решать с его помощью любые, самые сложные информационные задачи.