

**Парадигма развития науки**

**Методологическое обеспечение**

**А. Е. Кононюк**

**СИСТЕМОЛОГИЯ**

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМ**

**Книга 2**

**Общая теория структур**

**Часть 1**

**Организация структур**

**Киев**

**Освіта України**

**2014**

**УДК 51 (075.8)**  
**ББК В161.я7**  
**К213**

Рецензент:

*Н. К. Печурин* — д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

**Кононюк А. Е.**

**К213 Системология. Общая теория систем.** — В 4-х кн. Кн 2. Ч.1—  
К.: Освіта України. 2014. — 558 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 2)

В предлагаемом многотомном научно-учебном издании предпринята попытка раскрыть с единой идеологической и методологической точки зрения чрезвычайно сложную научную проблему - общую теорию систем. В работе достаточно полно, на взгляд автора, раскрыты методы системного подхода и системного анализа, используемые при анализе и синтезе различного класса систем. Определяются основные (базовые) понятия теории систем, раскрывается содержание системного анализа, его технология.

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

**УДК 51 (075.8)**  
**ББК В161.я7**

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание) © Кононюк А. Е., 2014  
ISBN 978-966-373-694-5 (книга 2) © Освіта України, 2014

## **Оглавление**

Введение.....	7
1. Основы теории организации. Раскрытие ее смысла.....	10
1.1. Основные понятия и определения теории организации.....	10
1.2. Теория организации и ее место в системе научных знаний.....	23
1.3. Организация как система.....	39
1.4. Отличительные признаки как основания .....	47
1.5. Принципиальные отличительные признаки организации объектов.....	62
2. Формальное определение структур и их моделей.....	73
2.1. Введение.....	73
2.2. Абстрактная модель структуры.....	74
2.3. Топологическая модель структуры.....	77
2.3.1. Определение топологической структуры.....	77
2.3.2. Основные топологические структуры.....	80
2.3.3. Классы подобия топологических структур.....	82
2.4. Топологические полугруппы как средство описания топологических моделей структур.....	86
2.4.1. Начальные определения.....	86
2.4.2. Дуги и полугруппы.....	87
2.4.3. Построение полугрупп.....	95
2.4.4. Некоторые соображения о компактных группах.....	100
2.4.5. Индуцированные отношения Грина.....	107
3. Модели физических структур и их представление блочными группами и графами.....	110
3.1. Структуры, обеспечивающие передачи сигналов (директив, команд, действий) .....	110
3.2. Сетевые структуры.....	113
3.3. Полюсные графы и обобщение понятия структуры.....	115
3.3.1. Структуры с сосредоточенными компонентами.....	115
3.3.2. Полюсные графы. ....	117
3.3.3. Примеры структур, описываемые полюсными графами.....	119
3.3.4. Механические поступательные системы. ....	122
3.3.5. Механические вращательные системы. ....	125
3.3.6. Пневматические системы.....	127
3.3.7. Аналогии. ....	129
3.3.8. Нелинейные и параметрические компоненты.....	131
4. Блочные группы как средство описания структур.....	135
4.1. Понятия блочных групп и операции над ними.....	135
4.2. Свойства блочных групп.....	140
4.2.1. Делители нуля .....	140

---

4.2.2. Делимость блочных групп.....	141
4.3. Геометрическое изображение блочной группы.....	146
4.4. Дополнительная блочная группа и геометрическое обратное изображение.....	149
4.5. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы .....	153
4.6. Детерминантная функция блочной группы.....	156
4.7. Функция совпадения блочной группы.....	157
4.8. Понятие ряда и последовательности блочных групп.....	162
5. Блочные группы и графы высших рангов .....	164
5.1. Определение блочной группы второго ранга.....	165
5.1.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы второго ранга.....	168
5.2. Блочные группы k-го ранга.....	170
5.2.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы k-го ранга .....	173
5.2.2. Геометрическое изображение блочной группы k-го ранга.....	175
5.3. Правила организации контурных графов.....	177
5.4. Правила организации сечений графа.....	179
5.5. Блочная группа графа с замкнутыми вершинами.....	180
5.6. Блочная группа разомкнутого графа.....	184
6. Преобразование графов.....	186
6.1. Преобразование графа .....	186
6.2. Графы второй категории (модуль-графы) .....	192
6.2.1. Определение модуль-графа .....	192
6.2.2. Блочная группа модуль-графа.....	194
6.2.3. Дерево второго ранга.....	204
6.2.4. Модуль-граф с выделенными элементами.....	211
6.2.5. Преобразования модуль-графов.....	216
6.2.6. Перемещение нижних индексов.....	221
6.2.7. Графы k-й категории.....	225
7. Многополюсные компоненты моделей структур .....	227
7.1. Полюсный граф многополюсника.....	227
7.2. Уравнения многополюсника.....	228
7.3. Модель транзистора.....	231
7.4. Модель трансформатора.....	232
7.5. Представление механических структур многополюсниками.....	235
7.6. Дифференциальный редуктор.....	238
7.7. Двигатель постоянного тока.....	239
7.8. Гидромеханические многополюсники.....	240
7.9. Структурные модели многополюсных компонентов.....	243
8. Полные блочные группы и замещающие графы.....	246
8.1. Полные блочные группы.....	247



8.2. Замещающие графы.....	255
8.3. Полная блочная группа модуль-графа .....	271
8.4. Деревья и деревья высших рангов модуль-графа.....	288
9. Основы представления элементов структур.....	296
9.1. Общие положения.....	296
9.2. Понятие об энергии и основные ее формы.....	298
9.3. Обобщенные силы, действующие в системе.....	300
9.4. Различные формы понятия сопротивления.....	306
9.4.1. Сопротивление как функция времени.....	308
9.4.2. Сопротивление как функция геометрических координат системы.....	310
9.4.3. Сопротивление как функция абсолютной величины обобщенной скорости.....	311
9.4.4. Неэлектрические сопротивления.....	312
9.5. Метод электромеханических аналогий.....	313
9.6. Четные и нечетные эффекты и их связь с линейностью систем.....	325
10. Формы математических моделей систем и их структур.....	328
10.1. Общие положения .....	328
10.2. Различные формы математических моделей преобразовательных систем.....	330
10.3. Соотношения взаимности и коэффициенты преобразования.....	339
11. Топологические и компонентные уравнения как математические модели структур.....	347
11.1. Математические модели структур физических систем.....	347
11.2. Топологические уравнения.....	348
11.3. Компонентные уравнения.....	353
11.4. Уравнения сечений.....	355
11.5. Уравнения контуров.....	357
11.6. Преобразование источников .....	359
11.7. Структура транзисторной схемы.....	361
11.8. Структура электромеханической системы.....	368
11.9. Узловые уравнения.....	372
11.10. Уравнения ячеек.....	374
11.11. Системы с двумя сторонами.....	378
11.12. Уравнения основных типов структур электромеханических преобразователей.....	381
11.13. Уравнения термоэлектрического преобразователя.....	393
12. Определение основных параметров структур преобразователей.....	400
12.1. Коэффициенты преобразования.....	402
12.2. Сопротивления преобразователей.....	405
12.3. Чувствительность структур преобразователей.....	416

12.4. Основные критерии эффективности передачи мощности от преобразователя к нагрузке.....	423
13. Базовые структурные элементы, их функции и характеристики.....	433
13.1. Начальные сведения о структурных элементах .....	433
13.2. Примеры использования структурных элементов.....	436
13.3. Входные величины структурных элементов и способы преобразования их в выходные сигналы.....	443
13.4. Характеристики и параметры структурных элементов.....	444
13.5. Погрешности элементов.....	466
13.6. Преобразование непрерывных характеристик элементов в релейные.....	472
13.7. Элементы дискретного действия.....	475
13.8. Надежность, микроминиатюризация, унификация и стандартизация элементов.....	480
13.9. Метод выбора структурных элементов систем.....	489
14. Неоднородный координатный базис.....	493
14.1. Формирование уравнений структур.....	493
14.2. Преобразование компонентной матрицы.....	495
14.3. Гидромеханическая система.....	496
14.4. Иерархия дуг.....	499
14.5. Переменные состояния.....	500
14.6. Уравнения переменных состояния структуры.....	501
14.7. Линейные структуры системы.....	504
14.8. Структуры нелинейных систем.....	510
14.9. Выходное уравнение.....	517
14.10. Ограничения и обобщения.....	517
14.11. Исключение зависимых дифференциальных переменных.....	520
15. Сокращенный координатный базис.....	527
15.1. Введение в координатный базис.....	527
15.2. Уравнения в сокращенном координатном базисе.....	529
15.3. Матрично-векторные параметры.....	531
15.4. Оптимальное разбиение дуг.....	533
15.5. Определение матрично-векторных параметров.....	534
15.6. Операции над столбцами.....	537
15.7. Уравнения переменных состояния.....	540
15.8. Особенности сокращенного координатного базиса.....	546
15.9. Обобщенная процедура.....	548
15.10. Введение реактивных параметров.....	551
15.11. Разделение переменных.....	553
Литература.....	556

## **Введение**

Люди и все, что их окружает, так или иначе организованы. Более того, все планируемые и осуществляемые действия человека, их непосредственные и опосредованные результаты также выражают собой, прежде всего, суть организации. Наконец, сознание, вся совокупность представлений об окружающем мире могут формироваться, сохраняться, развиваться и использоваться только при условии определенной самоорганизации. Этим обусловлены фундаментальное значение науки организации в теории и практике формирования, функционирования и развития цивилизации, непреходящая актуальность проведения исследований организации и применения их результатов.

Любой человек начинает познание окружающего его мира с исследования того, как все организовано. Изначальное, порой неосознанное стремление узнать «...что это, как устроено, как действует?» исторически являлось одним из основных двигателей прогресса. Со временем человек стремился упорядочить этот процесс, систематизировал объекты, предметы, методологию, инструменты, язык исследования, что и явилось предтечей формирования и становления всеобщей организационной науки.

Общество состоит из множества организаций, с которыми связаны все аспекты и проявления человеческой жизнедеятельности. Теория организации призвана ответить на вопросы: зачем организации нужны? как они создаются? функционируют и изменяются? почему члены организаций действуют именно так, а не иначе?

**Теория организации** – наука, изучающая принципы, законы и закономерности возникновения организации как явления, ее эволюции, механизмы функционирования, взаимодействия ее частей и элементов между собой, а также с внешней средой для достижения намеченных и/или проектирования новых целей.

Овладение знаниями об этом позволяет обоснованно и профессионально подходить к формированию протекающих в организациях процессов, к определению курса действий и руководству его реализацией в интересах достижения поставленных целей.

**Предмет теории организации** составляют организационные отношения людей в процессе совместной деятельности и закономерности их развития.

Организацией как объектом исследования занимаются техника, менеджмент, экономика, социология, психология, политология и другие науки. Каждая из этих дисциплин рассматривает лишь часть процессов, происходящих в организации. Так, менеджмент рассматривает вопросы, связанные с элементами организации и процесса управления, коммуникациями, с организацией взаимодействия и полномочий, построения организаций. Экономика изучает элементы организации и оплаты труда; организации производства; экономические законы развития, в том числе пропорционального и планомерного развития, соответствия производственных отношений характеру производительных сил. Психология изучает психическое отражение человеком различных аспектов организационных отношений. Политология рассматривает отношение людей к политическим организациям, проблемам внутренней и внешней политики. Однако это лишь элементы, составляющие организацию в целом как процесс и как объект. Предпринимались попытки объединить усилия перечисленных наук в области исследования организаций как больших систем посредством кибернетики, теории управления. Так, теория управления изучает следующие проблемы, касающиеся организации: производство как система, типы отношений управления, организационная структура управления, линейные и функциональные связи, организационно-распорядительные методы управления, организация процесса управления, организация управленческого труда. Дальнейшее развитие исследований в области теории управления способствовало выделению теории организации как самостоятельной новой науки. Она призвана интегрированно подходить к ключевым процессам, происходящим в формальных и неформальных объединениях людей и их коммуникациях.

Поскольку теория организации является самостоятельным разделом общей теории систем, она изучает общие свойства организации как единого целого. Вместе с тем в зависимости от языка описания (экономического, юридического, социологического, технического и др.) можно получить разное представление об организации как об объекте управления. Поэтому, в частности, организация остается не до конца понятным объектом, представляющим собой, как говорят специалисты, «черный ящик».

Чтобы преодолеть такую неопределенность, необходимо использовать междисциплинарный подход к рассмотрению вопросов управления организацией, т. е. системный подход. В научной дисциплине «Теория организации» рассматривается не только суть системного подхода, но и основы теории структур систем: модели структур систем, классификации структур систем и типы способов управления. Особое внимание уделяется системному анализу и синтетическим методам исследования структур систем.

Данная работа знакомит читателя с моделью состава структур систем. Здесь даны классификации организационных структур и классификации самих организаций. Если же в основу классификации положить отношение к собственности, то можно сформировать модель состава системы управления собственностью в масштабах страны, а также построить модели состава систем управления экономикой на уровне страны, региона, муниципального образования и управления организациями всех форм собственности. В работе изучаются модели структур систем. Определяются процедуры формирования моделей состава проблем и целей организации на разных стадиях ее развития. Показано, что структура системы управления организацией зависит не столько от содержания проблем и целей, сколько от связей внутри их и между собой. Среди проблем в первую очередь заслуживают внимания те из них, которые являются причиной возникновения других более мелких проблем. Организация, обладая многоцелевой структурой, может быть представлена многоцелевым конфигуратором, демонстрирующим взаимосвязи целей организации.

# 1. Основы теории организации. Раскрытие ее смысла

Научной основой парадигмы развития науки является (должно являться) открытие законов организации видов материи, в частности, законов организации физических, химических и биологических видов материи.

Каждый вид материи существует до тех пор, пока существует его индивидуальная организация. С разрушением организации вида материи наступает его гибель и он переходит в другой вид материи (другие виды материй).

Будем различать следующие типы (виды, классы) организаций:

- элементная ( на уровне химических элементов – атомов),
- видовая (на уровне видов материи: молекулы, соединения молекул в виде неорганических соединений, соединения молекул в виде органических соединений и др.),
- межвидовая ( на уровне совокупности видов материи (планетарные системы, пчелы, муравьи и др.)),
- клановая (прайдовая, семейная) ( на уровне организации одного клана (прайда, семьи) ,
- межклановая (на уровне организации совокупности кланов (семей) (люди и др.)
- стайная (стадная) (виды насекомых, виды птиц, виды животных и др.)

Закон индивидуальной представимости вида материи: каждый вид материи представим.

## 1.1. Основные понятия и определения теории организации.

**Организации** — одно из самых старых образований во Вселенной. Вселенная существует благодаря своей организации.

**Организация** (от лат. organize — сообща, стройный вид, устраиваю) как **процесс** — это совокупность действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого; как **явление** — это объединение элементов для реализации программы или цели и действующих на основании определенных правил и

процедур. **Организация социума**— это социальная система, которая реализует себя в производстве товаров, услуг, информации и знаний.

**Теория организации** — наука, которая изучает принципы, законы и закономерности для создания, функционирования, развития и ликвидации организации. Это научная организация организаций.

**Закон теории организации** — зависимость, которая либо зафиксирована в законодательных документах (конституции, законодательных актах, уставах и т.д.), либо является общепринятой нормой для большой группы людей и организаций, либо получила признание и поддержку авторитетных ученых (синергия, пропорциональность и композиция и т.д.).

**Цели работы:** изучение принципов построения организации как системы; изучение и практическое применение принципов, законов и закономерностей организации; изучение методов построения и развития организации; получение сведений об организационном аудите; освоение практических навыков по оргпроектированию, формированию организационных процессов и оценке их состояния.

Организация рассматривается как процесс и как явление. **Как процесс организация** — это совокупность действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого. **Как объект организация** — это объединение элементов для реализации программы или цели и действующих на основании определенных правил и процедур.

Теория организации изучает принципы, законы и закономерности для создания, функционирования, развития и ликвидации организации. Теория организации — это научная организация организаций.

Организационные отношения — это взаимодействие или противодействие между элементами организации внутри и вне ее при создании, функционировании, развитии и разрушении организации.

Внешняя среда включает условия и организации, в том числе политические, экономические и экологические условия; конкурирующие организации, поставщиков и потребителей, социальную инфраструктуру и т.д.

Общие черты организаций: наличие по крайней мере одного человека; наличие хотя бы одной цели, направленной на удовлетворение потребностей или интересов человека или общества; получение прибавочного продукта в различных формах (материальной, духовной, информационной).

Основой теории организации является теория систем. Признаки системы: множество элементов, единство главной цели для всех элементов, наличие связей между ними, целостность и единство элементов, структура и иерархичность, относительная самостоятельность, четко выраженное управление. Подсистема — это набор элементов, представляющих автономную область внутри системы (например, экономическая, организационная подсистема).

Основные свойства системы: стремление сохранить свою структуру (основано на объективном законе организации — законе самосохранения; потребность в управлении (существует набор потребностей человека, животного, общества, стада животных и большого социума); наличие сложной зависимости от свойств входящих в нее элементов и подсистем (система может обладать свойствами, не присущими ее элементам, и может не иметь свойств своих элементов). Каждая система имеет входное воздействие, систему обработки, конечные результаты и обратную связь (рис. 1.1.).

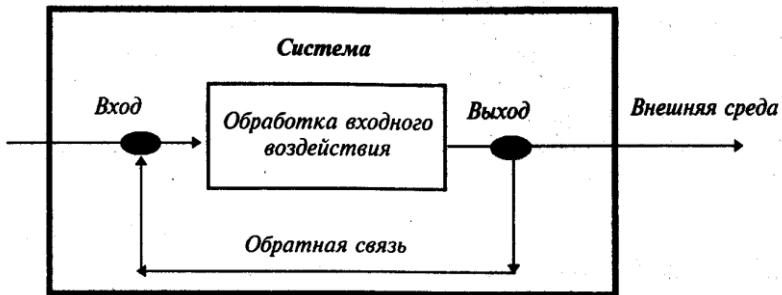


Рис. 1.1. Схема функционирования системы

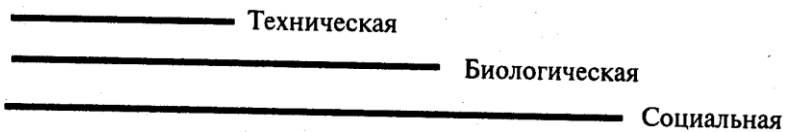
Основная классификация систем — разделение их на три подсистемы: техническую, биологическую и социальную.



*Техническая подсистема* — это совокупность упорядоченно взаимодействующих элементов, обладающая свойствами, не сводящимися к свойствам отдельных элементов, и предназначенная для выполнения определенных полезных функций.

*Биологическая подсистема* включает флору и фауну планеты, в том числе относительно замкнутые биологические подсистемы, например, муравейник, человеческий организм и др. Эта подсистема обладает большим разнообразием функционирования, чем техническая. Набор решений в биологической системе также ограничен из-за медленного эволюционного развития животного и растительного мира. Тем не менее, последствия решения в биологических подсистемах часто оказываются непредсказуемыми. Например, решения врача, связанные с методами и средствами лечения пациентов; решения агронома о применении тех или иных химикатов в качестве удобрений. Решения в таких подсистемах предполагают разработку нескольких альтернативных вариантов решений и выбор лучшего из них по каким-либо признакам. Профессионализм специалиста определяется его способностью находить лучшее из альтернативных решений, т. е. он должен правильно ответить на вопрос: что будет, если...?

*Социальная (общественная) подсистема* характеризуется наличием человека в совокупности взаимосвязанных элементов. В качестве характерных примеров социальных подсистем можно привести семью, производственный коллектив, неформальную организацию, водителя, управляющего автомобилем, и даже одного отдельного человека (самого по себе). Эти подсистемы существенно опережают биологические по разнообразию функционирования. Набор решений в социальной подсистеме характеризуется большим динамизмом как в количестве, так и в средствах и методах реализации. Это объясняется высоким темпом изменения сознания человека, а также нюансов в его реакциях на одинаковые и однотипные ситуации. Перечисленные виды подсистем обладают различным уровнем неопределенности (непредсказуемости) в результатах реализации решений).



*Соотношение неопределенностей в деятельности различных подсистем*

Социальная (общественная) подсистема характеризуется наличием человека как субъекта и объекта управления в совокупности взаимосвязанных элементов. Социальная система может включать биологическую и техническую, а биологическая — техническую. Системы подразделяются также на: искусственные и естественные, открытые и закрытые, детерминированные и стохастические, жесткие и мягкие.

- Каждая организация должна обладать всеми признаками системы. Выпадение хотя бы одного из них неизбежно приводит организацию к ликвидации.

Существенную трудность для теории организации составляет проблема количественного измерения организационных параметров. В настоящее время в основном оперируют с качественными измерениями типа: хороший и плохой; высокий, средний и низкий; большой и маленький; эффективно и неэффективно. Например, как измерить живучесть организации или пропорции ее частей? Математическая база теории еще находится в начальном состоянии и ждет своих исследователей.

Не случайно в мировой практике легче получить статус профессионала в технической подсистеме, значительно труднее — в биологической и чрезвычайно трудно — в социальной.

Можно привести очень большой список общепризнанных выдающихся конструкторов, изобретателей, рабочих, физиков и других специалистов-техников; значительно меньше — выдающихся врачей, ветеринаров, биологов и т.д.; на пальцах можно перечислить выдающихся руководителей государств, организаций, глав семей и т.д.

Среди выдающихся персоналий, работавших с технической подсистемой, достойное место занимают: И. Кеплер (1571—1630) — немецкий астроном; И. Ньютон (1643—1727), английский математик, механик, астроном и физик; М.В. Ломоносов (1711—1765) — российский естествоиспытатель; П.С. Лаплас (1749—1827) — французский математик, астроном, физик; А. Эйнштейн (1879—1955) — физик-теоретик; С.П. Королев (1906—1966) — конструктор ракет и др.

Среди выдающихся персоналий, работавших с биологической подсистемой, можно назвать следующих: Гиппократ (ок.460 — ок. 370 до н. э.) — древне-греческий врач, материалист; К. Линней (1707—1778) — шведский естествоиспытатель; Ч.Р. Дарвин (1809—1882) — английский естествоиспытатель; В.И. Вернадский (1863—1945) — естествоиспытатель, гео- и биохимик и др.

Среди персоналий, работавших в социальной подсистеме, нет общепризнанных лидеров. Хотя по ряду признаков к ним относят российского царя Петра I, американского бизнесмена Г. Форда и других личностей.

Социальная система может включать биологическую и техническую подсистемы, а биологическая — техническую (рис. 1.2.).

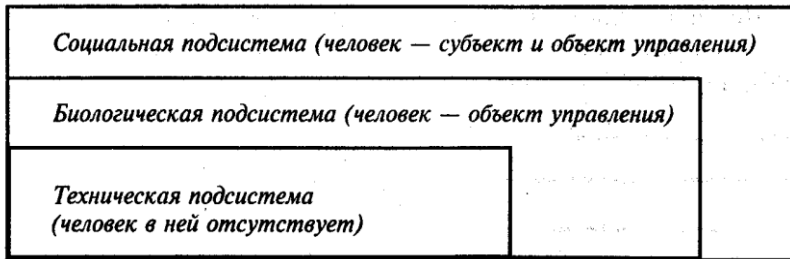


Рис. 1.2. Взаимодействие подсистем

Кроме основной, системы имеют следующую классификацию:

- искусственные и естественные,
- открытые и закрытые,
- детерминированные и стохастические,
- жесткие и мягкие.

В дальнейшем каждый подвид системы будем именовать также системой ввиду большого набора организаций, включаемых в них.

Таким образом мы будем говорить о технической, биологической, социальной, искусственной и других системах.

*Искусственные системы* создаются человеком для реализации заданных программ или целей. Например, конструкторское бюро, клуб любителей пива, компьютер, спутниковый комплекс.

*Естественные системы* создаются природой для реализации целей мирового существования. Например, система мироздания, циклическая система землепользования, муравейник.

*Открытые системы* характеризуются открытым характером связей с внешней средой и сильной зависимостью от нее. Например, коммерческие фирмы, средства массовой информации.

*Закрытые системы* характеризуются преимущественно внутренними связями и создаются для удовлетворения потребностей своего персонала и учредителей. Например, профсоюзы, политические партии, семья на Востоке.

*Детерминированные (предсказуемые) системы* функционируют по заранее заданным правилам, с заранее определенным результатом. Например, обучение студентов в институте, производство типовой продукции.

*Стохастические (вероятностные) системы* характеризуются трудно предсказуемыми входными воздействиями внешней и (или) внутренней среды и выходными результатами. Например, исследовательские подразделения, предпринимательские компании, игра в русское лото.

*Мягкие системы* характеризуются высокой чувствительностью к внешним воздействиям, а вследствие этого — слабой устойчивостью. Например, система котировок ценных бумаг, новые организации, человек при отсутствии твердых жизненных целей.

*Жесткие системы* — это обычно авторитарные, основанные на высоком профессионализме небольшой группы руководителей, организации. Такие системы обладают большой устойчивостью к внешним воздействиям и слабо реагируют на небольшие воздействия. Например, церковь, авторитарные государственные режимы.

Кроме того, системы могут быть простыми и сложными, активными и пассивными.

Каждая организация должна обладать всеми признаками системы. Выпадение хотя бы одного из них неизбежно приводит организацию к ликвидации. Таким образом, системный характер организации — это необходимое условие ее деятельности. Проанализируем далее, к чему может привести организацию отсутствие данных признаков системы (табл. 1.1).

**Таблица 1.1. Возможные результаты при нарушении целостности системы**

<i>Наименование отсутствующего признака</i>	<i>Возможный результат в деятельности организации</i>
Множество элементов	Нехватка ресурсов, не все составляющие технологического процесса имеются в наличии
Единство главной цели у всех элементов	Отсутствие единой сплоченной команды
Связи между элементами системы	Каждый элемент организации будет обособлен от общего дела (нет возможности проявления закона синергии)
Относительная самостоятельность элементов системы (касается персонала)	Отсутствие возможности проявления творческого подхода (не реализуется потребность в самовыражении, самопроявлении)
Четко выраженное управление	Наличие хаоса и анархии в производственной деятельности

С понятием системы связана широта подхода при анализе и синтезе различных организационных образований. Речь идет о системном, комплексном и аспектом подходах. Системный подход требует учета всех ключевых элементов (внутренних и внешних), влияющих на принятие решений. Комплексный подход требует составления

приоритетов ключевых элементов и учета наиболее важных элементов. Аспектный подход довольствуется учетом отдельных ключевых элементов при анализе или синтезе организационных образований.

Системный подход требует наибольших затрат ресурсов и времени. Если это оправдано, то его использование целесообразно. Соответственно комплексный и аспектный подходы более дешевые, но увеличивается погрешность при обработке недостаточных данных и в результатах решения.

В основе теории организации лежат методы организации устойчивого состояния структур. В теории организации будем различать: физическую организацию, химическую организацию, биологическую организацию.

### **Связи.**

Связь - это отношение между элементами системы.

***Связь - реальный физический (вещественный или полевой) канал для передачи Э (энергии), В (вещества), И (информации); причем информации нематериальной не бывает, это всегда Э или В.***

Главное условие работы связи - "разность потенциалов" между элементами, то есть градиент поля или вещества (отклонение от термодинамического равновесия - принцип Онзагера). При градиенте возникает движущая сила, вызывающая поток Э или В:

- градиент температуры - поток теплоты (теплопроводность),
- градиент концентрации - поток вещества (диффузия),
- градиент скорости - поток импульса,
- градиент электрического поля - электрический ток,

а также градиенты давления, магнитного поля, плотности и т.д.

Часто в изобретательских задачах требуется организовать поток при градиенте "не своего" поля. Например, поток вещества (нитиноловых пустотелых шариков) при градиенте температуры - в задаче о выравнивании температуры по глубине бассейна.

*Основные характеристики связи: физическое наполнение и мощность.* Физическое наполнение - это вид вещества или поля, используемого в связи. Мощность - интенсивность потока В или Э. Мощность связи должна быть больше мощности внесистемных связей, выше пороговой - уровня шума внешней среды.

Связи в системе могут быть:

- функционально необходимые - для выполнения ГПФ,
- вспомогательные - увеличивающие надежность,
- вредные, лишние, избыточные.

По типу соединения связи бывают: *линейные, кольцевые, звездные, транзитные, разветвленные и смешанные.*

### **Основные виды связей в технических системах:**

#### ***1. Элементарные***

а) *односторонняя* (полупроводниковая),

б) *рефлексивная* (возникающая под действием внешней причины),

в) *селективная* (отсеивающая ненужные потоки),

г) *запаздывающая* (с задержкой по времени),

д) *положительная* (увеличивающая мощность при увеличении "разности потенциалов"),

е) *отрицательная* (уменьшающая мощность при увеличении "разности потенциалов"),

ж) *нейтральная* (безразличная к направлению),

з) *нулевая*,

и) проектируемая (желаемая).

## **2. Комбинированные.**

л) *двусторонняя* (полностью проводящая),

м) *контрсвязь* (пропорционально зависима от состояния элементов, между которыми осуществляется связь; например, полюса магнита или потенциалы источника тока),

н) *положительная обратная* связь. (при увеличении мощности одной связи увеличивается мощность другой), механизм взаимной стимуляции функций, ведет к нарастанию процессов;

о) *отрицательная обратная* связь. (при увеличении мощности одной связи уменьшается мощность другой), стабилизирующий механизм, ведет к устойчивому равновесию или к колебаниям вокруг точки равновесия,

п) *двойная отрицательная обратная* связь, или обратная связь типа взаимного угнетения (при уменьшении мощности одной связи уменьшается также мощность другой), ведет к неустойчивому равновесию, кончающемуся усилением одной из сторон и подавлением другой.

При использовании комбинированных связей у системы появляются новые свойства. Рассмотрим, например, систему из двух элементов с отрицательной обратной связью:

При увеличении потенциала А мощность положительной связи 1 возрастает, что приводит к увеличению потенциала Б. Но отрицательная связь 2 подавляет потенциал А. Система быстро приходит в состояние устойчивого равновесия. При обрыве связи 1 потенциал А увеличивается без подавления со стороны Б. При обрыве связи 2 потенциал А увеличивается и одновременно увеличивается потенциал Б (положительная связь).



В системе из трех элементов появляется еще более сильное качество.

При увеличении потенциала А, увеличивается Б, но по связи 4 подавляется А; по связи 2 увеличивается В, но по связи 5 уменьшается Б, а по связи 6 уменьшается В и т.д. То есть, вывод любого элемента из состояния равновесия быстро взаимно подавляется.

При обрыве любой связи, взаимное подавление также происходит быстро по другим связям. То же при обрыве двух связей.

В системе создается устойчивое равновесие, при котором состояние элемента может быть лишь незначительно сдвинуто от равновесия.

Здесь приведен пример с одинаковой комбинированной связью (отрицательной). Другие, еще более необычные, эффекты возникают в системах с разнородными связями, с большим количеством элементов, с появлением перекрестных связей (начиная с диагональной в квадрате). Необходима разработка по "наложению" этих типов связей на вепанализ.

Увеличение степени организации системы прямо зависит от числа связей между элементами. Развитость связей - это раскрытие веполей (увеличение степени вепольности). Как увеличить количество связей в веполе? Двумя путями:

1. включение элементов системы в связи с надсистемами,
2. задействование более низких уровней организации подсистемы или вещества.

При увеличении числа связей на один элемент, увеличивается количество полезно работающих свойств элементов.

Одно из важных свойств организации - возможность управления, то есть изменения или поддержания состояния элементов в процессе функционирования системы. Управление идет по специальным связям и представляет собой последовательность команд во времени. Управление по отклонению величины является наиболее распространенным и достоверным способом.

### **Факторы разрушающие организацию.**

К таким факторам относятся три группы вредных воздействий:

- внешние (надсистема, природа, человек),
- внутренние (форсирование или случайное взаимоусиление вредных свойств),
- энтропийные (саморазрушение элементов из-за конечности срока жизни).

Внешние факторы разрушают связи, если их мощность превышает мощность внутрисистемных связей.

Внутренние факторы изначально есть в системе, но с течением времени из-за нарушений в структуре их количество увеличивается.

Примеры энтропийных факторов: износ частей (вынос из системы части вещества), перерождение связей (усталость пружин, ржавчина).

В любой теории используются два основных метода исследования: **дедукция и индукция**. Дедукция — это переход от общего к частному. **Сначала создается теория или методология, а затем объясняются или предсказываются единичные или групповые события**. Например, по теории космогонических взаимодействий была вычислена новая звезда, а затем через несколько лет она была найдена в заданном районе Вселенной. Индукция — это переход от частного к общему. **Сначала набирается обширный материал, а затем создается теория**, могущая объяснить любые происходящие события из данной типологии, например закон **Ома**.

Каждый метод опирается на комплекс эмпирических гипотез (предположений). Гипотеза становится теорией, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- осмысленностью введенных категорий и понятий,
- непротиворечивостью одних понятий другим,
- возможностью проведения проверки или повторения результатов,

- возможностью обобщения на другие классы событий,
- наличием ограничений на ее применение (технических, социальных и т.д.).

## **1.2. Теория организации и ее место в системе научных знаний**

### **Структура научной теории**

В цикле развития науки выделяют шесть этапов:

- наблюдение за происходящими процессами и попытка их анализа с помощью известных из других наук методов;
- формализация и систематизация наблюдаемых процессов, составление их типологии;
- разработка прикладных научных основ для анализа и синтеза наблюдаемых процессов;
- обобщение знаний и создание теоретических основ науки (принципы, зависимости, законы и закономерности);
- создание методологии исследования процессов заданной типологии;
- накопление статистических данных об эффективности предложенной методологии и корректировка ее (рис. 1.3).

Социальный характер взаимоотношения людей определяется их потребностями и интересами. Потребности человека носят объективный, устойчивый характер. Поэтому организация как процесс и как явление может быть объектом исследования. Важность данного объекта исследования для менеджера и собственника компании не вызывает сомнения.

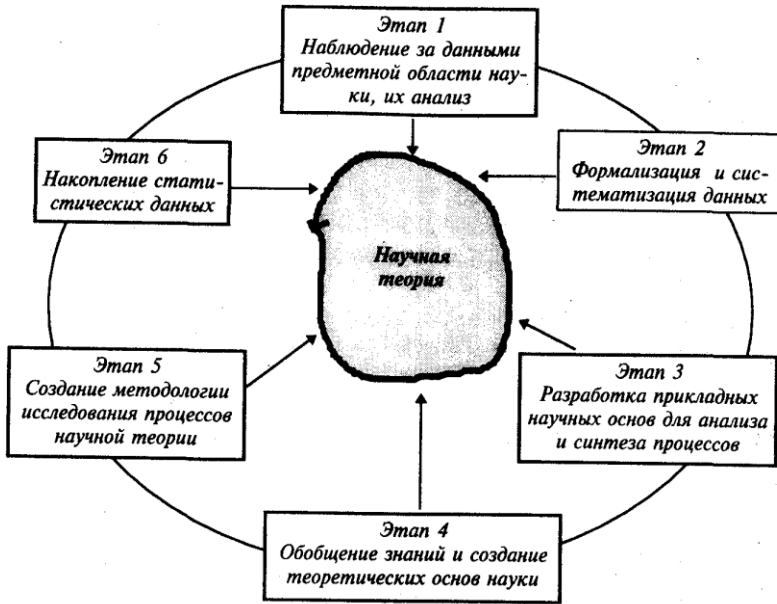


Рис. 1.3. Циклический процесс формирования научной теории

В рамках теории организация должна рассматриваться как большая система, в которой необходимо учитывать особенности социальных, биологических и технических систем. Каждый человек сталкивается в своей деятельности со всеми этими системами или воплощает их в себе. Например, в группе некоторой организации хорошо работают три программиста. Может случиться много событий, которые приведут к существенному изменению их производительности и даже к распаду группы, например:

- в компьютере завелся вирус и испортил все ключевые программы,
- в питьевой воде оказались болезнетворные бактерии и все работники надолго заболели,
- вовремя не выдали заработную плату работникам и плохое настроение привело к увеличению количества ошибок,

- начальник из-за домашних неприятностей стал груб с подчиненными, что несомненно усилило противодействие с их стороны.

Организацией как объектом исследования занимаются экономика, социология, психология, политология и другие науки. Реально каждая из них рассматривает лишь часть этой большой системы (социума). Так, экономика рассматривает экономические коммуникации в организации, психология изучает психическое отражение действительности человеком и т.д. Многие науки пытались объединить усилия других в области исследования больших систем, например кибернетика, теория управления. Однако полностью это не удалось еще ни одной из них. Возможно, такая ситуация связана с отсутствием нужного исследовательского инструментария, а возможно, наше общество еще не созрело для решения этой задачи.

Развитие любой науки характеризуется двумя процессами: **дифференциацией и интеграцией знаний**. **Дифференциация знаний** характеризуется поиском своей ниши (своего объекта исследования) для возможности проведения углубленных исследований. **Интеграция знаний** основана на стремлении ученого исследовать проблему с разных сторон, формировать приоритеты влияния той или иной процедуры на ситуацию в целом.

У теории организации как развивающейся науки имеются также два альтернативных пути:

- объединить на базе системного подхода основные научные воззрения экономики, социологии, политологии и др. и создать общий подход при анализе и синтезе социальной организации;
- создать свою локальную область исследования части социума и развивать ее, например, как экономика.

Научные силы в области теории организации небольшие и поэтому ее развитие идет по второму пути как обособленной науки. Существенную трудность для теории организации составляет проблема количественного измерения организационных параметров. В настоящее время в основном оперируют с качественными измерениями типа: хороший и плохой; высокий, средний и низкий; большой и маленький; эффективно и неэффективно. Например, как измерить живучесть организации или пропорции ее частей? Математическая

база теории еще находится в начальном состоянии и ждет своих исследователей.

В любой теории используются два основных метода исследования: дедукция и индукция. Дедукция — это переход от общего к частному. Сначала создается теория или методология, а затем объясняются или предсказываются единичные или групповые события. Например, по теории космогонических взаимодействий была вычислена новая звезда, а затем через несколько лет она была найдена в заданном районе Вселенной. Индукция — это переход от частного к общему. Сначала набирается обширный материал, а затем создается теория, могущая объяснить любые происходящие события из данной типологии, например закон **Ома**.

Каждый метод опирается на комплекс эмпирических гипотез (предположений). Гипотеза становится теорией, если она удовлетворяет следующим требованиям:

- осмысленностью введенных категорий и понятий,
- непротиворечивостью одних понятий другим,
- возможностью проведения проверки или повторения результатов,
- возможностью обобщения на другие классы событий,
- наличием ограничений на ее применение (технических, социальных и т.д.).

### **Предмет теории организации**

Выше организация была определена нами как процесс и как объект. Теория организации формирует систему научных знаний в области анализа и синтеза социальных организаций. Аналогично общему подходу к развитию научной теории, состоящей из цикла, включающего шесть этапов (см. выше), развитие теории организации включает шесть конкретных этапов:

- сбор фактов, явлений, прогнозов, исторических и фольклорных сведений, например, из данных археологии, легенд и мифов Древней Греции;
- систематизация их и составление типологии, например, по времени существования тех или иных организаций или по их эффективности;
- создание понятийного аппарата: категории, термины, их взаимосвязь, классы терминов, синонимы, например, босс, бюрократизм, иерархия, организатор, организованность, социум, чиновник, управляемость;
- нахождение зависимостей между изменяемыми параметрами, формулирование законов и закономерностей, например, зависимость между профессионализмом работников и производительностью труда, закон развития организации, закон синергии;
- привлечение знаний сопутствующих наук для расширения понимания своих собственных проблем, например, психология Зигмунда Фрейда, кибернетика Винера;
- обобщение отрывочные сведений о теоретических разработках и практическом применении отдельных положений теории организации.

Выполнение перечисленных этапов должно проводиться в приведенной последовательности: пропуски каких-либо этапов недопустимы (рис. 1.4).

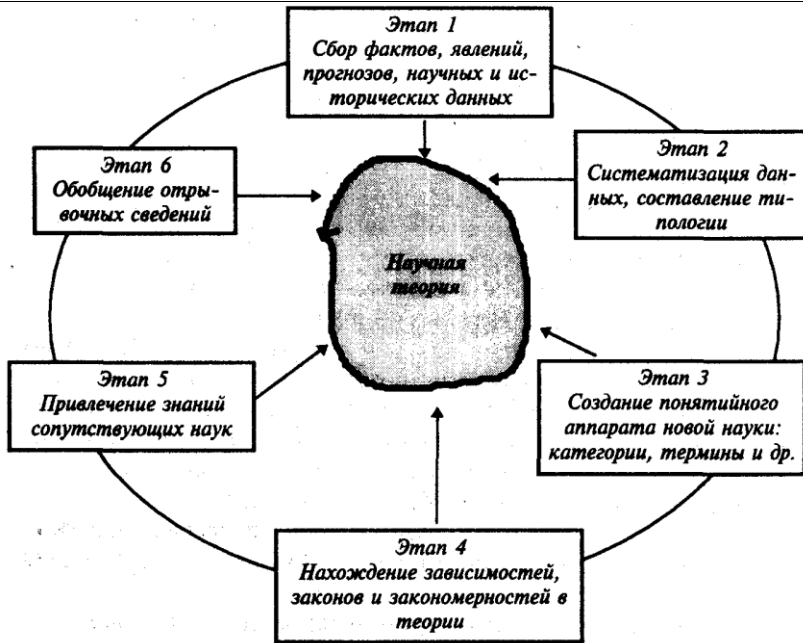


Рис. 1.4. Циклический процесс формирования научной теории

Предмет теории организации составляют организационные отношения между организационными объектами как по горизонтали, так и по вертикали. К организационным объектам относятся люди и образования, в которых они функционируют, в том числе:

- страны мирового содружества;
- организации страны (заводы, концерны, банки и т.д.);
- структурные подразделения организаций (цеха, отделы);
- первичные образования (бригады, группы);
- человек и интеллектуальная система (техническая, био логическая).

Организационные отношения включают воздействия, взаимодействия и противодействия при создании, функционировании, реорганизации и



прекращении деятельности организационных объектов, в дальнейшем для краткости будем говорить “организаций”. Принята следующая классификация организационных отношений: структурные и процессорные.

К *структурным* относятся: воздействия, взаимодействия и противодействия.

К *процессорным* относятся:

- массовые и единичные,
- равенства и подчинения,
- зависимые и независимые,
- постоянные и случайные,
- последовательные и параллельные (т.е. одновременное воздействие на один объект нескольких),
- непрерывные и дискретные,
- межорганизационные и внутриорганизационные,
- экономические, политические, правовые и др.

*Воздействие* определяется как однонаправленное действие по передаче приказа, распоряжения, совета, просьбы от одного объекта (субъекта) управления к другому. Например, руководитель выдает работу исполнителю — это воздействие от субъекта к объекту; или мастер цеха просит главного инженера организации помочь ему — это воздействие от объекта к субъекту.

*Взаимодействие* — это положительное действие обратной связи (положительная реакция) со стороны человека (объекта управления) на воздействие.

*Противодействие* — это отрицательное действие обратной связи со стороны человека на воздействие. Общая типология организационных отношений приведена на рис. 1.5.

Классификация оказывает влияние на особенности методик формирования организационных отношений. Так, организация массовых мероприятий существенно отличается от подготовки к единичным коммуникациям.

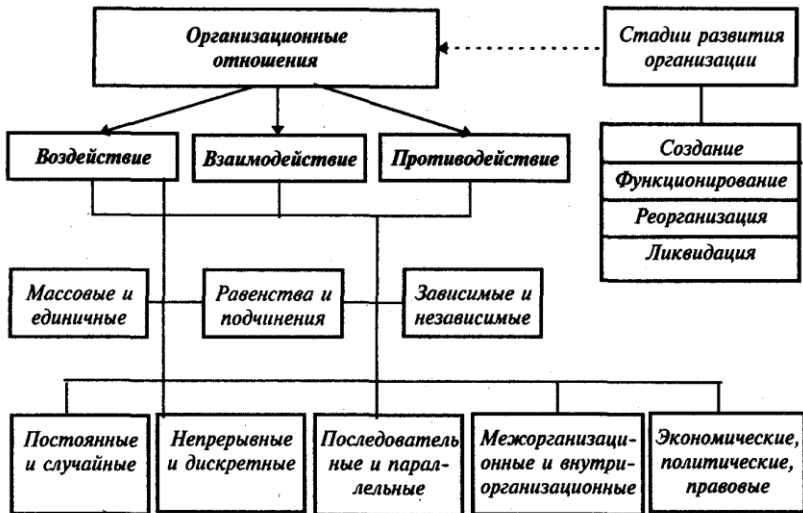


Рис. 1.5. Типология организационных отношений

В основе организационных отношений лежит порядок, т. е. принятый или установленный свыше регламент нахождения объекта во времени и в пространстве. Порядки бывают: алфавитный, номерной, должностной, сложившийся, ведомственный, особый (при чрезвычайных ситуациях), уставный, по законодательству и др.

Принятый порядок обычно входит в традицию организации и для его замены, если это требуется, необходимы большие усилия. Прежде чем формировать устойчивые связи, каждому потенциальному контрагенту необходимо выявить ключевой набор порядков в данной организации. Соблюдение принятого порядка в чужой организации — это

обязанность любого человека. А иначе — “в чужой монастырь со своим уставом”.

### **Пример создания элементов научной теории для малого бизнеса**

Малый бизнес рассматривается как явление и как процесс. В качестве явления — это государственные, частные или смешанные организации с численностью работников в среднем до 20 человек. В качестве процесса — это деятельность преимущественно в одной сфере предпринимательства (например, торговля с ограниченной номенклатурой товаров; ремонт телевизоров и радиоприемников; выпечка и продажа горячего хлеба).

**Первый этап.** Наблюдение за происходящими процессами и попытка их анализа с помощью методов, известных из других наук.

Исходя из практики малого бизнеса составим перечень возникающих ситуаций:

- 1) многим желающим создать свое дело не хватает начального капитала;
- 2) в процессе деятельности возникают трудности с поставщиками;
- 3) в процессе начальной деятельности не хватает средств для развития;
- 4) финансовая и бухгалтерская деятельность оказываются не под силу;
- 5) между учредителями часто возникают непреодолимые разногласия о текущей и перспективной деятельности организации;
- 6) существуют большие проблемы с помещениями;
- 7) большинство организаций через 5 лет после регистрации ликвидируется.

Попытка анализа:

- с помощью экономической науки можно проанализировать только 1, 3 и 5 пункты;

- с помощью теории и практики финансов можно проанализировать только 1, 3 и 4 пункты;
- с помощью информатики можно проанализировать только пункт 2 и т.д.

Все семь ситуаций в комплексе не могут быть проанализированы ни одной из перечисленных выше наук.

**Второй этап.** Формализация и систематизация наблюдаемых процессов, составление их типологии.

Наблюдаемые процессы могут быть систематизированы следующим образом:

- по количеству вновь образованных и ликвидируемых организаций;
- по стадиям функционирования исходя из кривой жизненного цикла. Для организаций основными стадиями являются: создание, рост, стабилизация, спад и ликвидация. Этапы рост, стабилизация и спад относят к функционированию организации (рис. 1. 6). В рамках функционирования выделяют этап “реорганизация” в случае, когда организация, сохраняя в основном свою систему управления и производства (статус 1), параллельно формирует дополнительные структуры (статус 2) для перехода на выпуск новой продукции (рис. 1.7). Этап реорганизации составляет время  $T_1 + T_2$ .

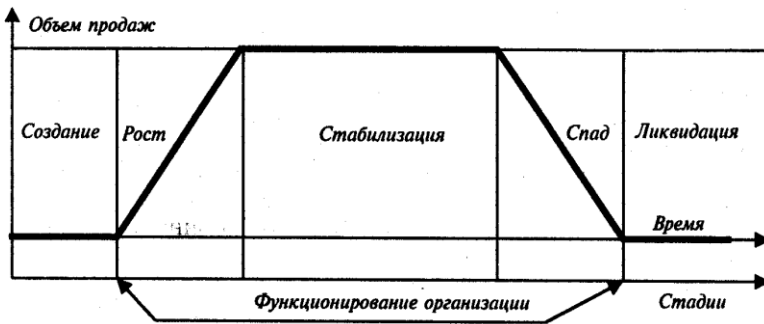


Рис. 1.6. Упрощенный жизненный цикл организации

На стадии функционирования могут быть следующие варианты:

- сразу спад и ликвидация,
- рост и сразу спад,
- рост, стабилизация и спад,
- рост, стабилизация и рост (см. рис. 1.7);
- рост и обширная стабилизация.

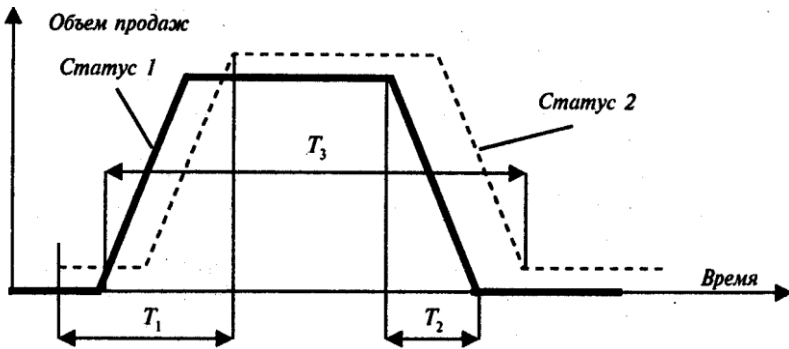


Рис. 1.7. Схема продления этапа функционирования организации

Этап реорганизации составляет  $T_1 + T_2$ , этап функционирования —  $T_3$ ;

- по профессионализму персонала:

на уровне здравого смысла,

под контролем профессионалов,

профессионально;

- по достижению целей:

перспективные (своих личных и организации),

неперспективные.

**Третий этап.** Создание понятийного аппарата новой науки (категории, термины и др.).

В практике рыночных отношений весьма распространены термины менеджер, руководитель (босс), менеджер-консультант, чиновник, конституционный работник, предприниматель, предпринимательский риск, бизнесмен. Что они означают? В понимании приведенных слов часто бывают разночтения, а наука требует однозначного понимания ключевых терминов. Сгруппируем однотипные слова:

менеджер — руководитель (босс) — менеджер-консультант,

предприниматель — бизнесмен — предпринимательский риск,

чиновник — конституционный работник.

Начнем с первой пары взаимосвязанных слов.

**Менеджер** — это наемный (приглашенный) работник аппарата управления, имеющий в подчинении нескольких специалистов, непосредственно занятых в обслуживающей или производственной деятельности, и выполняющий вместе с ними поставленную цель. Менеджер не является собственником пригласившей его организации. Например, декан факультета или его заместители являются менеджерами, глава семьи также является менеджером. Таким образом, менеджеры могут быть либо профессионалами с соответствующей подготовкой, либо практиками. Обычно практики долго доходят до уровня профессионалов, так что терять время на самообучение нет смысла.

**Руководитель** — это также наемный работник, имеющий в своем подчинении несколько менеджеров (количество подчиненных определяется нормой управляемости), его иногда называют боссом, т. е. это менеджер менеджеров. Босс также не является собственником. Например, ректор университета или другого учебного заведения является боссом, так как ему подчиняются несколько менеджеров, среди них деканы, заведующие кафедрами, главный бухгалтер и руководители других подразделений. Руководители получают установленную контрактом заработную плату и материально не

отвечают за убытки этой организации, если не доказана их прямая вина.

**Консультант-менеджер** — это работник консультационной фирмы, который может совмещать работу специалиста в области управления и временного руководителя или менеджера какого-либо подразделения организации. Как консультант он производит диагностику, разрабатывает набор предложений по совершенствованию объекта договора и согласовывает их с руководством организации. Как менеджер он может стать у руля процесса внедрения этих предложений. Консультант-менеджер является активизатором и методистом в коллективной работе со специалистами данной организации для выработки инновационных решений.

Профессиональный менеджер — это довольно прибыльная, интересная и престижная специальность.

Предприниматель и бизнесмен — это прежде всего собственники, владельцы или совладельцы имущества организации. Это на их средства создается и функционирует организация. Например, три гражданина решили организовать производство и продажу устройств для телефонов — АОН. Они рассчитали, что нужно внести в это дело по 2 тыс. ам. долл., т. е. всего 6 тыс. ам. долл. На эти средства они создали ООО — общество с ограниченной ответственностью. Три гражданина — собственники (совладельцы) этой организации и несут материальную ответственность за ее работу. Сами владельцы могут и не участвовать в деятельности ООО, пригласив (наняв) профессионального менеджера и соответствующих специалистов. Вся прибыль, полученная организацией, идет не менеджеру, а владельцам. И воля владельцев — поделиться с менеджером прибылью или нет.

**Предприниматель** организует свое дело в какой-то одной сфере, например, продажа продуктов в собственной или арендованной палатке, производство клипов, выращивание цветов и т.д. Характерной чертой такой деятельности является высокий риск быстрого обогащения, так и быстрого разорения, вплоть до банкротства. Хотя в настоящее время все-таки преобладает разорение, тем не менее это не отпугивает людей от попыток найти свою нишу и разбогатеть. Таким образом, предприниматель всегда находится в области неустойчивого дела. Он много переживает, все время ищет новые пути развития своего дела. Те люди, которые вступили на путь предпринимательства,

создания своего дела, очень редко с него сворачивают на тихие пути жизни.

**Предпринимательство — это источник прогресса во всем мире.**

**Бизнесмен** организует свое дело в нескольких разноплановых сферах деятельности. Например, строительство коттеджей, финансовая деятельность в страховой компании и дилерская деятельность с иномобильными по продаже мехов в супермаркете. Характерная черта такой деятельности — низкий суммарный риск. Если в одной сфере деятельности дела стали идти плохо, то это обычно перекрывается ростом в других сферах деятельности. Получается как бы взаимное страхование от убытков. При этом общая вероятность краха и быстрого обогащения невелика. Таким образом, аура бизнесмена более спокойная и привлекательная. Не каждый предприниматель может стать бизнесменом, но стремиться к этому нужно, особенно в расцвет предпринимательской деятельности.

Предприниматель или бизнесмен может быть одновременно и менеджером или боссом в своей организации, если бремя управления он полностью или частично возьмет на себя. Таким образом, менеджер работает в команде либо предпринимателя, либо бизнесмена. Менеджер — это ресурс, с помощью которого бизнесмен надеется наладить работу своей организации и получать прибыль. Каждый собственник старается получить наилучший ресурс и соответственно оплатить его труд.

**Предпринимательский риск** — это вероятность (обычно оцениваемая в процентах) достижения или недостижения запланированных результатов в инициативной самостоятельной деятельности. Например, риск “50 на 50” означает равную вероятность положительного и отрицательного результата. Так, в Японии часто начинают свое дело при риске “30 на 70”, т. е. 30% — вероятность положительного исхода и 70% — вероятность отрицательного. Как правило, риск связывают с производственной, управленческой, инвестиционной, кредитной и рыночной деятельностью.

**Чиновник** — это государственный служащий, нанимаемый в федеральные или муниципальные органы управления. На чиновников распространяется одинаковый в пределах государства набор привилегий, обязанностей и ответственности. Например, в РФ



чиновники обязаны декларировать свои годовые доходы, даже если они не превышают минимального уровня для декларирования. В ряде стран чиновники должны декларировать также и свои расходы.

**Конституционный работник** — это человек, занимающий должность, предусмотренную конституцией государства. Например, человек в должности президента страны, председателя правительства, председателя конституционного суда и т.д. Деятельность такого работника определяется государственными регламентами.

**Четвертый этап.** Разработка прикладных научных основ анализа и синтеза наблюдаемых процессов. Обобщение знаний и создание теоретических основ науки (принципы, зависимости, законы и закономерности).

Стадии функционирования хорошо описываются в экономической теории. Наша задача на базе этого цикла создать теорию развития организации, с помощью которой руководитель или консультант смогли бы обеспечить условия не только для процветания организации, но и для своевременной ее реорганизации и даже прекращения ее деятельности. Эта теория базируется на законах организации и законах для организаций. Процессы коммуникаций также хорошо разработаны в ряде наук (психологии и социологии, управлении персоналом, менеджменте и др.).

**Пятый этап.** Создание методологии исследования процессов заданной типологии.

## **Инновационные методики прорывов**

Научная теория воплощается для практического применения в виде методологии и методик. Они позволяют с хорошей вероятностью создать преуспевающие организации (организации, обреченные на успех). Большое значение для реализации этого процесса имеют инновационные методики прорыва для перевода организаций на новые рубежи. Прорывы обычно носят кратковременный характер. Занятия проводятся с группой специалистов 7—15 человек в течение 3—10 дней один раз в 3—5 лет в зависимости от желаемого уровня получения результатов и управленческого уровня подготовки специалистов. Эти методики можно сравнить с ускорителями на самолетах или космических аппаратах при взлете или переходе на

другую орбиту с последующей работой на постоянной технологии управления до следующего прорыва. Главной целью таких методик является преодоление:

- шаблонов мышления,
- консервативных методов производства и управления,
- эгоизма и недоверия,
- страха и напряженности,
- позиции “ждать и догонять”,
- состояния “винтика”.

Методики базируются на коллективной работе с назначенной или выбранной по тесту группой специалистов организации или ее подразделений. Потенциал работников организации и методика консультантов всегда дают хорошие результаты, которые включают:

- обучение группы специалистов практическим приемам инновационной деятельности;
- создание творческой опоры для руководства организации;
- разработку пакета предложений “О развитии организации” (социальном, экономическом, управленческом, технологическом, экологическом и т.п. в зависимости от контингента специалистов организации). Авторское право на эти предложения принадлежит организации;
- самостоятельное участие специалистов в реализации пакета предложений в случае принятия их руководством организации.

В зависимости от особенностей организации (истории, традиций, выпускаемой продукции, экономического и финансового положения) методики прорывов предусматривают различную последовательность и объем ее реализации.

### 1.3. Организация как система

#### Основные определения

**Организация** — это одно из самых древних общественных образований на Земле. Так, по сведениям археологов, при раскопках древнего Шумера (существовавшего ок. 3 тыс. лет до н.э.) были найдены глиняные таблички, на которых записаны сведения о коммерческой деятельности организованных групп людей.

Развитие организаций шло медленно, постепенно накапливался опыт их создания, появлялись известные в мире заводы, фабрики; талантливые руководители, фабриканты, заводчики и т.д. Постепенно расширялся состав общественных организаций. Первый научный подход к анализу организаций и процессу управления ими приписывают Фредерику Тейлору (США), который в 1911 г. опубликовал книгу “Принципы научного управления”. С этого времени устойчивый общественный интерес к управлению социальными системами способствовал развитию всех направлений научных исследований в данной сфере, в том числе и организаций. Постепенно в наборе управленческих наук формируется новое научное направление — теория организации (рис. 1.8).

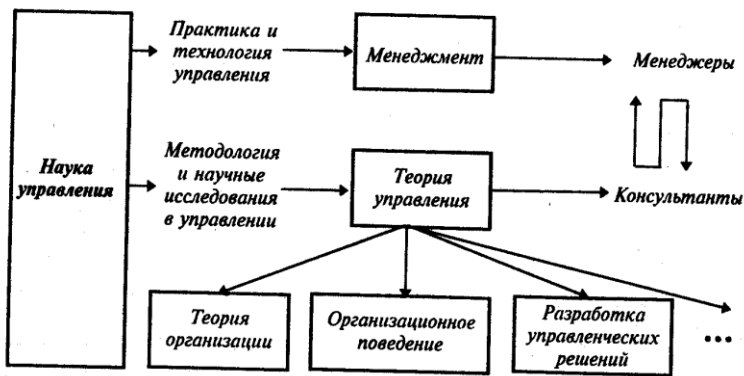


Рис. 1.8. Место научной дисциплины “Теория организации” в системе наук

*Задача теории организации - раскрытие закономерности синтеза, функционирования и развития систем. Организация - важнейший элемент во всех трех периодах существования системы. Организация возникает одновременно со структурой. В сущности, организация это алгоритм совместного функционирования элементов системы в пространстве и времени.*

Французский биолог 18 в. Бонне писал: "Все части, составляющие тело, настолько непосредственно многообразно и многообразно связаны друг с другом в области своих функций, что они неотделимы друг от друга, что родство их предельно тесно и что они должны были появиться одновременно. Артерии предполагают наличие вен; функции как тех, так и других предполагают наличие нервов; эти предполагают в свою очередь наличие мозга, а последний - наличие сердца; каждое отдельное условие - целый ряд условий" .

***Организация возникает, когда между элементами возникают объективно закономерные, согласованные, устойчивые во времени связи (отношения); при этом одни свойства (качества) элемента выдвигаются на первый план (работают, реализуются, усиливаются), а другие ограничиваются, гасятся, маскируются. Полезные свойства трансформируются в процессе работы в функции - действия, поведение.***

Главное условие возникновения организации - связи между элементами и/или их свойствами должны превышать по мощности (силе) связи с несистемными элементами.

С возникновением организации снижается энтропия в возникшей системе по сравнению с внешней средой. Внешняя среда для ТС - это чаще всего другие технические системы. Так что энтропия - это ненужная для данной ГПФ (потребности) организация ("чужая" организация).

Степень организованности отражает степень предсказуемости поведения системы при осуществлении ГПФ. Абсолютная предсказуемость невозможна, или возможна только для неработающих ("мертвых") систем. Полная непредсказуемость - когда системы нет, дезорганизация. Сложность организации характеризуется числом и разнообразием элементов, числом и разнообразием связей, числом уровней иерархии.

*Сложность организации возрастает при развертывании ТС и уменьшается при свертывании организация, как бы, "загоняется" внутрь вещества. При развертывании на полезно-функциональных подсистемах, отрабатываются принципы организации (условия взаимодействия, связи и функции), затем организация переходит на микроуровень (функция подсистемы выполняется веществом).*

Теория организации изучает принципы, законы и закономерности для создания, функционирования, реорганизации и ликвидации организации.

**Теория организации — это научная организация организаций.**

**Цели научной дисциплины «научная организация»:**

1. Изучение принципов построения организации как системы.
2. Изучение и практическое применение принципов, законов и закономерностей организации.
3. Изучение методов построения и развития организации.

Организацию можно рассматривать как процесс и как объект. Термин “организация” происходит от лат. organize — сообща, стройный вид, устраиваю. *Как процесс* организация — это совокупность действий, ведущих к образованию и совершенствованию взаимосвязей между частями целого. *Как объект* организация — это объединение элементов для реализации программы или цели, действующей на основании определенных правил и процедур.

Типология организаций может быть представлена схемой рис. 1.9.



Рис. 1.9. Типология организаций

## Организационные отношения

Термин “организация” имеет множество производных, например, организация производства, организованный человек, организатор, профсоюзная организация, дезорганизация и др.

*Организация производства* — это форма, порядок соединения труда с вещественными элементами производства в целях обеспечения выпуска высококачественной продукции, достижения высокой производительности труда на основе лучшего использования производственных фондов и трудовых ресурсов.

*Организационные отношения* — это взаимодействие или противодействие между элементами организации внутри и вне нее (рис. 1.10) при создании, функционировании, реорганизации и разрушении организации.

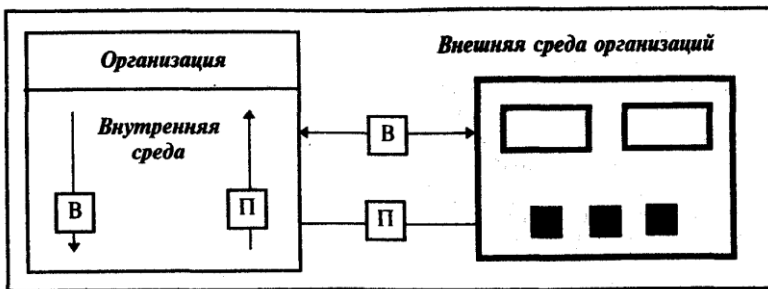


Рис.1.10. Среда организационных отношений

(В - взаимодействие, П - противодействие)

Организационные отношения могут быть трех уровней:

- здравого смысла;
- взаимного уничтожения;
- заранее спроектированного взаимодействия.

Внешняя среда включает условия и организации, в том числе политические, экономические и экологические условия; конкурирующие организации, поставщиков и потребителей, социальную инфраструктуру и т.д. Так, для учебного института внешней средой будет город, где он расположен, отношение общества к образованию и др. Внешние организационные отношения возникают

с чиновниками различных муниципальных и федеральных служб, спонсорами, поставщиками и потребителями и т. д. Внутренней средой для учебного института являются все его подразделения, в том числе кафедры, деканаты, хозяйственные службы, персонал, студенты.

Создание благоприятной атмосферы взаимодействия организации с внешней средой и во внутренней среде — это задача профессионального управления.

Город со множеством организаций также имеет внешнюю и внутреннюю среду. Методология деятельности специалиста по организации не зависит от интеграции (сложности) организации.

В организации может быть вертикальное (по уровням управления) и горизонтальное (по выполняемым функциям) разделение труда.

### **Организации составляют основу мира менеджеров.**

Обычно рассматриваются три формы организации:

- юридическое лицо;
- неюридическое лицо;
- неформальная организация граждан.

Общие черты для всех форм организации:

- наличие по крайней мере одного человека;
- наличие хотя бы одной цели, направленной на удовлетворение потребностей или интересов человека или общества;
- получение прибавочного продукта в различных формах

(материальной, духовной, информационной).

Деятельность всякой организации включает преобразование ресурсов, основные из которых:



- потенциал работников, финансы,
- здания и оборудование,
- технология, материалы и информация.

## **Общие понятия систем. Классификация**

Основой теории организации является теория систем.

**Система** — это целое, созданное из частей и элементов, для целенаправленной деятельности.

Признаки системы: множество элементов, единство главной цели для всех элементов, наличие связей между ними, целостность и единство элементов, структура и иерархичность, относительная самостоятельность, четко выраженное управление.

Система может быть большой и ее целесообразно разделить на ряд подсистем. *Подсистема* — это набор элементов, представляющих автономную внутри системы область (например, экономическая, организационная, техническая подсистема).

Свойства систем:

- система стремится сохранить свою структуру (это свойство основано на объективном законе организации — законе самосохранения;
- система имеет потребность в управлении (существует набор потребностей человека, животного, общества, стада животных и большого социума);
- в системе формируется сложная зависимость от свойств входящих в нее элементов и подсистем (система может обладать свойствами, не присущими ее элементам, и может не иметь свойств своих элементов). Например, при коллективной работе у людей может возникнуть идея, которая бы не пришла в голову при индивидуальной работе; коллектив, созданный педагогом Макаренко из беспризорных детей, не воспринял воровства, матерщины, беспорядка, свойственных почти

всем его членам. Каждая система имеет входное воздействие, систему обработки, конечные результаты и обратную связь (рис. 1.11.).

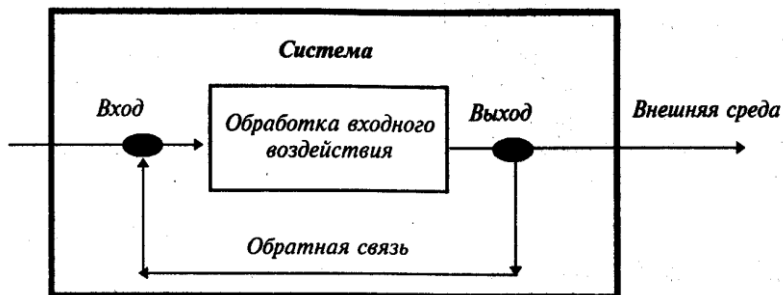


Рис. 1.11. Схема функционирования системы

Классификация систем может быть проведена по различным признакам, однако основной является группировка их в трех подсистемах: технической, биологической и социальной.

*Техническая подсистема* включает станки, оборудование, компьютеры и другие работоспособные изделия, имеющие инструкции для пользователя. Набор решений в технической системе ограничен и последствия решений обычно predetermined. Например, порядок включения и работы с компьютером, порядок управления автомобилем, методика расчета мачтовых опор для ЛЭП, решение задач по математике и др. Такие решения носят формализованный характер и выполняются в строго определенном порядке. Профессионализм специалиста, принимающего решения в технической системе, определяет качество принятого и выполненного решения. Например, хороший программист может эффективно использовать ресурсы компьютера и создавать качественный программный продукт, а неквалифицированный — может испортить информационную и техническую базу компьютера.

*Биологическая подсистема* включает флору и фауну планеты, в том числе относительно замкнутые биологические подсистемы, например, муравейник, человеческий организм и др. Эта подсистема обладает большим разнообразием функционирования, чем техническая. Набор решений в биологической системе также ограничен из-за медленного эволюционного развития животного и растительного мира. Тем не менее, последствия решения в биологических подсистемах часто

оказываются непредсказуемыми. Например, решения врача, связанные с методами и средствами лечения пациентов; решения агронома о применении тех или иных химикатов в качестве удобрений. Решения в таких подсистемах предполагают разработку нескольких альтернативных вариантов решений и выбор лучшего из них по каким-либо признакам. Профессионализм специалиста определяется его способностью находить лучшее из альтернативных решений, т. е. он должен правильно ответить на вопрос: что будет, если...?

*Социальная (общественная) подсистема* характеризуется наличием человека в совокупности взаимосвязанных элементов. В качестве характерных примеров социальных подсистем можно привести семью, производственный коллектив, неформальную организацию, водителя, управляющего автомобилем, и даже одного отдельного человека (самого по себе). Эти подсистемы существенно опережают биологические по разнообразию функционирования. Набор решений в социальной подсистеме характеризуется большим динамизмом как в количестве, так и в средствах и методах реализации. Это объясняется высоким темпом изменения сознания человека, а также нюансов в его реакциях на одинаковые и однотипные ситуации.

## **1.4. Отличительные признаки как основания**

Все объекты характеризуются: формой, отличительными признаками, свойствами, состоянием, устойчивостью с помощью которых их можно отличить от окружающей среды. Непосредственные знания ( а лучше познания, которые нами понимаются, как **понимание знаний**) об окружающей среде являются результатом наших ощущений. Человек также может запоминать, обрабатывать и использовать информацию, полученную из окружающей среды, и тем самым усиливать свою способность к восприятию. Это позволяет человеку принимать решения и действовать соответствующим образом.

Ученый, в процессе своей работы, взаимодействует с различными объектами, причем это взаимодействие для любого объекта обычно ограничивается несколькими представительными свойствами - признаками. Хотя подобное взаимодействие может становиться все разнообразнее по мере того, как ученый все глубже исследует объект, оно всегда существенно ограничивается пределами восприятия человека, его способностью к действию и другими возможностями.

Ученых, активно работающих в любой из традиционных отраслей науки, техники или в других областях (медицине, праве и т. д.), интересует в их профессиональной деятельности достаточно определенные типы объектов. Так, например, экологи занимаются такими объектами, как озера, реки и леса; музыковеды — музыкальными сочинениями и композиторами; психологи изучают отдельных людей и малые социальные группы; инженеры занимаются всевозможными объектами, созданными человеком, например электростанциями, автомобилями, самолетами, компьютерами и тому подобным; врачи имеют дело с пациентами, а ветеринары — с больными животными; криминалисты расследуют преступления, а биологи изучают различные явления в живой природе.

В дальнейшем будем понимать под **объектом** часть окружающего мира (сущность), выделяемую как единое целое в течение определенного отрезка времени, облеченного в форму (имеющего форму), наделенного признаками (как общими, так и отличительными), обладающего совокупностью свойств, находящегося в (устойчивом) состоянии.

Согласно такому определению объекты могут быть как материальными, так и абстрактными.

*Материальные объекты* будем разделять на *естественные* (такие, как кусок скалы, клетка организма, солнце или группа животных) и *созданные человеком (искусственные)* (такие, как аэропорт, вычислительный центр, город или больница). *Абстрактные объекты* (такие, как музыкальное сочинение, стихотворение или конституция страны) обычно создаются человеком, однако некоторые из них можно рассматривать и как естественные, по крайней мере до некоторой степени (например, естественный язык общения людей).

Объекты обладают практически бесконечным множеством признаков, любой из которых можно изучать и познавать, и, как следствие, объект невозможно изучить и познать полностью. Это означает, что необходимо отобрать ограниченное (и обычно достаточно малое) число признаков, наилучшим образом описывающих исследуемый объект как явление. После того, как мы отобрали совокупность признаков, которые, на наш взгляд, наиболее полно характеризуют исследуемый объект, необходимо определить процедуру измерения (наблюдения) каждого отобранного признака, который, в свою очередь, задает абстрактную переменную, представляющую наш образ (наше отображение) соответствующего признака.

Будем говорить, что исследуемый объект задается набором соответствующих признаков объекта и назначением каждому из них

определенной переменной (с помощью процедуры измерения). Таким образом, объект всегда рассматривается не как реальная вещь, а как абстрагирование или отображение некоторых свойств объекта.

Важное различие между понятием объекта и понятием системы хорошо описал У. Росс Эшби: «...Теперь нужно пояснить то, как следует определить систему. Первое, что приходит в голову, это указать на маятник и сказать, что «система — это такая-то вещь, находящаяся там-то». Однако этот метод имеет существенный недостаток: всякий материальный объект включает бесконечное число переменных и, следовательно, бесконечное число возможных систем. Реальный маятник, например, характеризуется не только длиной и положением, но и массой, температурой, электропроводностью, кристаллической структурой, химическими примесями, радиоактивностью, скоростью, коэффициентом отражения, пределом прочности на растяжение, бактериальной зараженностью, поглощением света, упругостью, формой, удельным весом и т. д. и т. п. Нереально было бы исследовать все эти параметры, да такие попытки никогда и не делаются. Нужно выделить и изучить параметры, относящиеся к некой главной проблеме, которая уже определена. Таким образом, **система — это не предмет, а список переменных.**»

Как мы уже говорили, термин «переменная» используется нами для обозначения абстрактного образа признака. Поэтому, чтобы можно было определить его точно, нужно сначала разобраться, что же такое **признак**.

Заметим, что с каждым признаком связано множество его проявлений. Так, например, если признаком является относительная влажность в определенном месте Земли, то множество проявлений — это всевозможные значения относительной влажности (определяемые некоторым определенным способом) в диапазоне 0—100%; если признаком является количество гормона эстрогена в 1 см<sup>3</sup> женской крови, то определенное количество этого гормона является проявлением этого признаком; если признак — это цвет светофора на перекрестке, регулирующего движение транспорта в определенном направлении, то проявлениями этого признака обычно бывают красный, желтый и зеленый цвета.

При единичном наблюдении признак имеет одно конкретное проявление. Для определения возможных изменений его проявлений требуется осуществить множество наблюдений данного признака. Для этого необходимо, чтобы отдельные наблюдения признака, осуществляемые с помощью одной и той же процедуры наблюдения, каким-то образом отличались одно от другого. Любой отличительный признак, используемый для определения различий в наблюдениях одного и того же признака, будем называть **основанием**. Выбор этого

термина объясняется тем, что всякая различающая особенность распознаваемого объекта, какой бы она ни была, является своего рода основанием, с которой наблюдается признак.

Типовым основанием, пригодным практически для любого признака, является *время*. В этом случае разные наблюдения одного признака отличаются друг от друга тем, что они сделаны в разные моменты времени. Например, относительную влажность в определенном месте можно измерять в разные моменты времени, например, каждый час. Аналогично множество замеров объема лейкоцитов в  $1 \text{ см}^3$  крови одного пациента можно получить, делая анализ в разное время, например, в  $8^{00}$  и  $20^{00}$  ежедневно в течение всего периода исследования.

В некоторых случаях разные наблюдения одного и того же признака по времени неразличимы (т. е. либо сделаны одновременно, либо время вообще не имеет значения), но при этом отличаются положением в *пространстве*, в которых сделаны наблюдения. Например, различные признаки, характеризующие качество акустики, можно наблюдать в один и тот же момент времени в разных точках концертного зала. В некоторых научных направлениях **пространство как основание** играет особенно важную роль, например в кристаллографии, строительстве, оптике, изобразительном искусстве, анатомии и др. Понятие пространства не ограничивается одно-, двух- или трехмерным евклидовым пространством. Например, пространство, образуемое точками сферы с римановой геометрией на ней, может оказаться подходящим основанием для некоторых признаков (например, для геологических, климатических и географических характеристик Земли). **Последовательность слов в некотором тексте также может рассматриваться как одномерное (абстрактное) пространство**; такие свойства, как позиция и функция слова в любом предложении, число букв в отдельном слове и т. д. могут наблюдаться в каждой точке (в любом слове) этого текста.

Время и пространство не единственные возможные основания. Множественные наблюдения одного и того же признака могут различаться друг от друга по индивидам (элементам) *группы*, на которой определен данный признак. Это может быть математическая группа, социальная группа, набор производимых товаров определенного типа, множество слов в каком-то стихотворении или рассказе, множество стран, популяция лабораторных мышей и т. д. Например, при любой переписи населения такие признаки, как возраст, пол, доход, занятость, научные знания и т. д., наблюдаются одновременно у всех людей, составляющих население страны.

Основания **трех основных типов** — *время, пространство, группа* — можно комбинировать. Хотя в принципе возможны любые комби-

нации, особенно важны комбинации время — пространство и время — группа. Приведем некоторые примеры.

*Время — пространство.* Примером данной комбинации является видеофильм, особенно если он используется в исследованиях (изучение микробиологических процессов, роста растений или дорожных ситуаций на загруженных перекрестках и т. п.); большая часть признаков в метеорологии (относительная влажность, температура, скорость и направление ветра, типы облаков и т. д.) наблюдаются во многих местах Земли и в разное время; другим примером такой комбинации баз является последовательность позиций на шахматной доске.

*Время — группа.* Признаки, характеризующие состояние экономики, политики и общества разных стран, наблюдаются различными организациями, например ООН; ежедневно проводятся наблюдения за популяцией лабораторных мышей, за их физиологическим состоянием и поведением, а также за признаками, находящимися под контролем исследователя (стимуляция, медикаментозное и хирургическое лечение); за такими характеристиками, как число опубликованных книг и журналов определенной категории, средняя цена книги и среднее число подписчиков журнала, суммарный доход и за множеством других ежегодно следит группа издателей.

Помимо особого использования времени, пространства и групп в качестве оснований, *они могут выступать и как признаки.* Например, при ежедневном наблюдении времени восхода и захода Солнца в разных местах Земли, *признаком является время, а его основаниями — время и пространство;* рекордные значения времени в каком-либо спорте, например, в плавании на 400 м вольным стилем, являются наблюдениями признака, различающегося во времени (например, датами установления рекордов); время является основанием для наблюдения за таким признаком, как местоположение судна; можно наблюдать за значениями времени, необходимого для решения задачи пакетом программ, работающих на одном и том же компьютере.

Приведенные примеры показывают, что выбор требуемых оснований, используемых в теории организации, достаточно гибок, однако не совершенно произволен. Ограничения при этом выборе достаточно точно выражены в описанных ниже требованиях, которым должны удовлетворять правильно выбранные основания; эти ограничения могут служить руководящими принципами в процессе определения организации системы на познаваемом объекте.

Во-первых, *основания должны быть применимы ко всем признакам познаваемой организации системы, для которой они определены.* Например, ни время, ни пространство не могут быть использованы для

отличия испытаний продукции определенного типа (не имеет значения, когда и где были проведены эти испытания); ни пространство, ни группа не применимы в качестве оснований для признаков, характеризующих музыкальное сочинение; ни время, ни группу нельзя использовать при описании мозаики.

Во-вторых, *основания признаков познаваемой организации системы должны отвечать назначению, для которого определяется данная организация система.* Так, например, при наблюдении за выздоровлением пациента после хирургической операции наблюдают за соответствующими признаками. Ясно, что единственным подходящим для этого основанием является время. Но если целью является создание медицинской базы данных, то те же самые характеристики будут различаться не только по времени, но и по фамилиям и другим характеристикам пациентов, находящихся на одной стадии выздоровления, данные о которых и будут заноситься в базу данных. Таким образом, в данном случае применимыми в качестве оснований оказываются и время и группа.

В-третьих, *наблюдения всех отличительных признаков познаваемой организации системы должны однозначно определяться основаниями признаков организации системы,* т. е. каждый элемент множества оснований (значение определенного момента времени, точка пространства, элемент группы или соответствующая комбинация элементов) **определяет одно и только одно проявление из заданной совокупности признаков.** Например, при исследовании признаков слов текста (позиция и функция слова в предложении, число букв в слове и т. д.) вполне достаточным основанием организации является группа слов, входящих в этот текст. Очевидно, что такое основание организации применимо к этим признакам и соответствует цели исследования. Однако оно не удовлетворяет требованию однозначного различения наблюдений. В самом деле, одно и то же слово может находиться в одной и той же позиции и иметь ту же функцию в нескольких предложениях в данном тексте, но в нем будет одно и то же число букв. Для того чтобы отличить любое наблюдение, нам нужно обратиться в данном случае к одномерному абстрактному пространству, точкой которого является положение слова в тексте.

Если смысл признаков и оснований и их взаимоотношения поняты правильно, то ясно, как формально определить познаваемую организацию систему, заданную на объекте, иначе, систему организации объекта. Она представляет собой **множество выбранных (существенных) признаков, с каждым из которых связано множество его проявлений, и множество необходимых оснований, с каждым из которых связано множество ее элементов.**

Формально познаваемая организация системы — это



$$O = U \setminus \bar{O} = a_i, A_{ik} \mid i, k \in N^*, b_j, B_{jl} \mid j = 1, 2, 3; l \in N^* \quad (1)$$

где:  $O$  — познаваемая организация системы, множество выбранных признаков и оснований системы;

$\bar{O}$  — множество невыбранных признаков и оснований системы;

$U$  — универсум системы;

$N^* = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество ненулевых натуральных чисел;

$a_i$  и  $A_{ik}$  соответственно признак и множество его проявлений, где  $i$  — номер признака,  $k$  — номер проявления  $i$ -того признака;

$b_j$  и  $B_{jl}$  — основание и множество его элементов, где  $j$  номер основания,  $l$  — элемент  $j$ -того основания.

Для некоторых признаков и оснований множества  $A_{ik}$  и  $B_{jl}$  из выражения (1) определяются достаточно удовлетворительно. Например, если в качестве основания организации используется группа (социальная группа или группа животных, продукция определенного типа или группа стран), множество  $B_{jl}$  достаточно четко определено. Аналогично хорошо определено множество проявлений  $A_{ik}$  для таких признаков  $a_i$ , как ежемесячный доход человека, цвета светофора, число букв в слове или пассажиров в полете. В науке, однако, во многих случаях эти множества неизвестны и могут быть определены только с помощью рассуждений. Тем не менее, независимо от обстоятельств, их можно связать с хорошо определенными множествами с помощью конкретных процедур наблюдения или измерения. Эти хорошо определенные множества представляют собой **образы множеств  $A_{ik}$  и  $B_{jl}$**  в терминах этих множеств и формулируются знания о признаках и их организациях.

Само существование признаков, оснований и, соответственно, множеств  $A_{ik}$ ,  $B_{jl}$  как атрибутов познаваемых организаций объектов является предметом теории организации. На этот счет могут быть разные точки зрения — от полного реализма, безоговорочно принимающего их существование, до крайних форм операционализма (или инструментализма), отрицающего их существование и **утверждающего, что содержание любого научного понятия целиком и полностью определяется спецификацией процедуры измерения**.

Мы должны понимать, что независимо от отношения к проблеме, существования множества  $A_{ik}$  и  $B_{jl}$  часто бывают неизвестны. В подобных случаях познаваемая организация объекта смысла не имеет и может приобрести содержание только благодаря заданию конкретных процедур наблюдения или измерения, с помощью которых создаются образы признаков. Таким образом, познаваемая организация объекта должна рассматриваться как компонент большей познаваемой

организации системы; рассматривать познаваемую организации объекта саму по себе практически бесполезно.

Перейдем теперь к определению переменной и параметра в теории организации.

**Переменной** будем называть операционное представление признака, т. е. **образ признака**, определяемый конкретной процедурой наблюдения или измерения. Каждая переменная имеет определенное **имя** (метку), отличающее ее от других рассматриваемых переменных, и связывается с определенным **множеством величин**, через которые она себя проявляет. Эти величины будем называть **состояниями** (или **значениями**) переменной, а все множество — **множеством состояний** (**значений**).

Аналогично **параметром** будем называть операционное представление основания. Каждый параметр имеет уникальное **имя**, и с ним связывается определенное **множество**; будем называть его **параметрическим множеством**, а его элементы — **значениями параметра**.

По аналогии с признаками и основаниями предполагается, что разные наблюдения одной и той же переменной различаются по значениям параметров. Если используются два и более параметра, то их общим параметрическим множеством является декартово произведение отдельных параметрических множеств. Необходимо, чтобы каждое конкретное значение параметра (из общего параметрического множества) позволяло познавать **одно и только одно наблюдение** соответствующих переменных.

На отдельных множествах состояний или параметрических множествах могут быть определены некоторые **математические отношения**, такие как, **отношение порядка или расстояния**. Они отражают **фундаментальные характеристики признаков и оснований в той степени**, в какой они присущи соответствующим измерительным процедурам. Различия в подобных признаках среди переменных или параметров, которые имеют существенное принципиальное значение, будем называть **принципиальными отличиями**.

В дополнение к **конкретным переменным и параметрам**, представляющим соответственно определенный признак или основание, будем также рассматривать **обобщенные переменные и параметры**. Последние представляют собой абстрактные величины, т. е. величины, не определенные через какие-либо признаки или основания. Их множества состояний и параметрические множества, а также различные отношения, определенные на этих множествах, представляются некоторым стандартным образом.

Обобщенной переменной дадим такую интерпретацию: **множество ее состояний** отображается изоморфно (т. е. **отображается один в один** с сохранением всех существенных математических отношений, определенных на нем) в **элементы множества состояний** конкретной переменной; то же относится к обобщенным и конкретным параметрам и их параметрическим множествам. Любое изоморфное отображение такого рода будем называть **конкретизацией** обобщенной переменной (или обобщенного параметра), а обратное отображение назовем **абстрагированием** конкретной переменной (или конкретного параметра). Именно такой подход позволяет решать как прямую, так и обратную задачу познания организации с использованием понятий **переменной, параметра и состояния**.

Для формализации понятий обобщенных и конкретных переменных и их параметров введем следующие обозначения:  $s_i, S_i, \zeta_i$  означающие соответственно обобщенную переменную, ее множество состояний и множество математических свойств, определенных на  $s_i$ . Обозначим через  $s'_i, S'_i, \zeta'_i$  те же характеристики конкретной переменной, являющиеся конкретизацией переменной  $s_i$ . Обозначим через  $p_j, P_j, \mathcal{P}_j$  соответственно обобщенный параметр, его множество состояний и множество математических признаков, определенных на параметре  $p_j$ , а через  $p'_j, P'_j, \mathcal{P}'_j$  — те же характеристики конкретного параметра, полученные конкретизацией параметра  $p_j$ .

Назовем *действием наблюдения* любую операцию, вводящую конкретную переменную как образ признака. Действие наблюдения, с помощью которого признак  $a_i$  представляется переменной  $s'_i$ , реализуется функцией

$$f_i: A_{ik} \rightarrow S'_i. \quad (2)$$

Эта функция гомоморфна относительно предполагаемых признаков множеств  $A_{ik}$  и  $S'_i$ . Аналогичная функция, например

$$\varphi_i: B_{il} \rightarrow P'_i \quad (3)$$

задает представление основания  $b_i$  параметром  $p'_i$ , оно также должно быть гомоморфным относительно соответствующих признаков основания (например, времени) и признаков множества  $\mathcal{P}'_i$ .

Для некоторых признаков и оснований действия наблюдения могут представлять собой явно заданные функции  $f_i$  и  $\varphi_i$ . Однако в других случаях, когда множества  $A$  и  $B$  неизвестны, возможно явно задать эти функции, не прибегая к абстрактным допущениям. При этом представления признаков и оснований вводятся физически (операционно), а не с помощью математических определений.

За исключением тривиальных случаев, когда функции  $f_i$  и  $\varphi_i$  определены явно, средство действия наблюдения должно представлять собой физическое устройство и процедуру, описывающую его

применение. Это устройство будем называть измерительным прибором или инструментом. Процедура представляет собой набор команд, определяющих то, как следует использовать инструмент в разных условиях.

Термин *измерительный инструмент* будем понимать широко. В некоторых областях, таких, как психология, общественные науки или этика, сам исследователь (или его группа) рассматривается в качестве инструмента или вместо него самого для оценки таких признаков, как мнения, позиции или способности людей, используются анкеты или тесты. Любой измерительный инструмент должен иметь возможность взаимодействовать с измеряемым признаком и преобразовывать это взаимодействие в вид, непосредственно представляющий состояния соответствующей переменной (например, показания указателя на шкале буквенно-цифрового дисплея или просто запись значений).

Несмотря на то, что измерительные инструменты и процедуры, образующие действия наблюдения, должны соответствовать некоторым общим принципам измерения, они существенно зависят от того, что они измеряют. Теория и практика измерений, как и техника, медицина, управление и т. д., является частью традиционных областей науки и не входит напрямую в сферу решения задач теории организации. Поэтому действия наблюдения будут учитываться в схеме задач теории организации только как компоненты, необходимые для достаточного определения (установления) реально познаваемой организации системы. Действия наблюдения непосредственно связаны с конкретными явлениями и в этом качестве должны изучаться и разрабатываться в рамках традиционных дисциплин.

Как правило, при решении задач теории организации, будем давать предпочтение работе с обобщенными переменными и параметрами. Заданная обобщенная переменная  $s_i$  конкретизируется переменной  $s'_i$  тогда и только тогда, когда функция

$$e_i: S_i \rightarrow S'_i \tag{4}$$

существует и изоморфна относительно математических признаков  $\zeta_i$ .

Аналогично обобщенный параметр  $p_j$  конкретизируется параметром  $p'_j$  тогда и только тогда, когда функция

$$\varepsilon_j: P_j \rightarrow P'_j \tag{5}$$

существует и изоморфна относительно  $\mathcal{P}_j$ . Каждый конкретный изоморфизм  $e_i$  (или  $\varepsilon_j$ ) задает конкретизацию  $s_i$  с помощью  $s'_i$  (или соответственно  $p_j$  с помощью  $p'_j$ ). Функции, обратные  $e_i$  и  $\varepsilon_j$ , т. е.

$$e_i^{-1}: S'_i \rightarrow S_i, \tag{6}$$

$$\varepsilon_j^{-1}: P'_j \rightarrow P_j, \tag{7}$$

задают абстрагирование соответственно  $s'_i$  и  $p'_j$ .

**Пример 1.** Для иллюстрации введенных понятий положим, что  $a_i$  — это установленный ежегодный доход налогоплательщика Украины за последний год, как сообщается в его налоговой декларации за этот год. Тогда  $A_i$  — это всевозможные суммы денег (в гривнах) от нуля до максимально представимой суммы, например, до 100 000.00 грн. Это множество конечно, так как минимальная имеющая хождение денежная единица — 1 копейка. Мы понимаем также, что это множество полностью (линейно) упорядочено. Для вычисления подоходного налога достаточно рассматривать только диапазоны облагаемого налогом дохода, где каждому диапазону соответствует определенный процент дохода, который следует выплатить в качестве подоходного налога. Для упрощения будем этими диапазонами считать диапазоны 0—4,999.99, 5,000.00 — 9,999.99, ..., 90,000.00 — 94,999.99, 95,000.00— 100,000.00 и пусть множеством состояний  $S'_i$  конкретной переменной  $s'_i$ , представляющей свойство  $a_i$ , будет множество минимальных значений этих диапазонов. Содержательное представление  $a_i$  с помощью  $s'_i$  можно ввести с помощью функции  $f_i$ , которая для каждого диапазона любому значению из диапазона присваивает минимальное значение в этом диапазоне, например  $f_i(52357) = 50\ 000$  или  $f_i(796) = 0$ . Очевидно, что функция  $f_i$  гомоморфна относительно полного упорядочения  $A_i$ , так как для любой пары  $\alpha, \beta \in A_i$ , если  $\alpha \leq \beta$ ,  $f_i(\alpha) \leq f_i(\beta)$ . Из методических соображений обобщенная переменная  $s_i$  может быть для конкретной переменной  $s'_i$  определена с помощью абстрагирующей функции  $e_i^{-1}: S'_i \rightarrow S_i$ . Эта функция должна быть изоморфной относительно упорядочения на  $S'_i$ . Предположим, что нужно, чтобы множество  $S_i$  представляло собой набор значений целых чисел. Тогда  $e_i^{-1}$  можно задать следующим уравнением:

$$e_i^{-1}(5000k) = k \quad (k=0, 1, \dots, 19).$$

Основанием в этом примере является множество украинских налогоплательщиков определенной категории, например, множество жителей г. Киева. Данное множество не обладает никакими математическими свойствами. Таким образом,  $\varphi: B_j \rightarrow P'_j$  может быть любой взаимно однозначной функцией, которая каждому налогоплательщику ставит в соответствие уникальный идентификатор, например, номер его идентификационного кода. Представим абстрагирование  $\varepsilon_j^{-1}: P'_j \rightarrow P_j$  в виде взаимно однозначной функции, ставящей в соответствие целым числам из множества  $N_n$ , где  $n$  — число налогоплательщиков в этой группе, значения номеров их идентификационных кодов.

Остановимся более подробно на понятии действие наблюдения. До сих пор мы его определяли через функции  $f_i$  и  $\varphi_i$ , определенные

соответственно в уравнениях (2) и (3). Эти функции индуцируют разбиения множеств  $A_{ik}$  и  $B_{ij}$ , например, разбиения  $A_{ik}/f_i$  и  $B_{ij}/f_j$ . Элементы любого блока в этом разбиении эквивалентны в том смысле, что они не различаются с точки зрения введенной процедуры наблюдения. В таком разбиении каждый блок целиком представляет одно состояние переменной  $s'_i$  или одно значение параметра  $p'_i$ . Когда действие наблюдения признака  $a_i$  проводится при некотором значении параметра, то наблюдаемый признак получает определенное проявление (значение) из множества  $A_{ik}$ . Это проявление является элементом **одного и только одного блока разбиения**  $A_{ik}/f_i$ . Функция  $f_i$  присваивает его определенному состоянию переменной  $s'_i$ . Таким образом, предполагается, что любое действие наблюдения позволяет нам определить, к какому блоку из  $A_{ik}/f_i$  принадлежит данное проявление, даже если отдельное проявление и нельзя достоверно распознать.

Предположение о том, что различие блоков  $A_{ik}/f_i$  может быть обнаружено по результатам действия наблюдений, является достоверным только в том случае, когда ошибки действия наблюдения исключены. Подобные случаи, как показано в примере 1, встречаются достаточно редко. Тем не менее это предположение можно считать практически оправданным и в других случаях, когда блоки  $A_{ik}/f_i$  существенно больше ожидаемых значений ошибок действия наблюдения. При этом блок  $A_{ik}/f_i$  достоверно определяется во всех случаях, кроме тех, когда фактическое проявление оказывается близко от границы между блоками, т. е. в пределах ожидаемой ошибки действия наблюдения. Поскольку признаки (по крайней мере некоторые из них) не контролируются исследователем, невозможно предотвратить проявления признаков в нежелательной близости от границ между блоками в  $A_{ik}/f_i$  и, следовательно, можно только сократить возможность определения неправильных блоков по действиям наблюдения благодаря правильному выбору действия наблюдения  $f_i$ . Исключить такую возможность полностью нельзя.

В результате появления возможности получения ошибок измерения в районе границ между блоками в  $A_{ik}/f_i$  связана определенная недостоверность наблюдения. Будем различать два варианта интерпретации этой недостоверности.

1. Блоки разбиения, определенные на множестве  $A_{ik}$ , рассматриваются как множества без четких границ. В терминологии теории нечетких множеств эти блоки представляют собой нечеткие подмножества множества  $A_{ik}$ . Предполагается, что множество  $A_{ik}$  является четким. Каждый элемент множества  $A_{ik}$  принадлежит любому его нечеткому подмножеству с определенной степенью при-

надлежности. Согласно такому подходу подмножества определяются только степенями принадлежности, а не функцией  $f_i$ .

2. Разбиение множества  $A_{ik}$  задается функцией  $f_i$ . Это то же самое разбиение  $A_{ik}/f_i$ , что рассматривалось выше. Очевидно, что его блоки являются четкими подмножествами  $A_{ik}$ . Достоверно неизвестно, к какому блоку  $A_{ik}/f_i$  принадлежит заданный элемент  $A_{ik}$ . Эта недостоверность может быть задана функцией, сопоставляющей любой паре (элемент  $A_{ik}$ , блок  $A_{ik}/f_i$ ) число (обычно между 0 и 1). Определенное таким образом число в заданном контексте выражает степень достоверности того, что данный элемент принадлежит данному блоку.

Мы будем придерживаться второго варианта. При этом варианте требуется, чтобы сначала была задана функция  $f_i$ , как в уравнении (4). Будучи заданной, она определяет на множестве  $A_{ik}$  разбиение  $A_{ik}/f_i$ . Затем определяется функция

$$\tilde{f}_i : A_{ik} \times A_{ik}/f_i \rightarrow [0, 1], \quad (8)$$

где  $\tilde{f}_i(x, y)$  задает степень достоверности того, что  $x$  принадлежит  $y$ . Однако, поскольку каждый блок  $A_{ik}/f_i$  однозначно представляется (помечается) состоянием из множества  $S'_i$  (в соответствии с функцией  $f_i$ ), функцию  $\tilde{f}_i$  зададим в более удобном виде

$$\tilde{f}_i : A_{ik} \times S'_i \rightarrow [0, 1], \quad (9)$$

где  $\tilde{f}_i(x, y)$  задает степень достоверности того, что  $x$  принадлежит блоку из разбиения  $A_{ik}/f_i$ , представляемому состоянием  $y$  переменной  $s'_i$ .

Определенная в уравнении (9) функция  $\tilde{f}_i$  характеризует наблюдения признака  $a_i$  в смысле их недостоверности. Ее также можно рассматривать как функцию степени принадлежности, определяющей нечеткое отношение на декартовом произведении  $A_{ik} \times S'_i$ . В этом смысле  $\tilde{f}_i$  можно назвать *нечетким действием наблюдения*. Во избежание недоразумений  $f_i$  будем называть *четким действием наблюдения*.

Ясно, что для определения нечеткого действия наблюдения необходимо сначала задать четкое действие наблюдения  $f_i$ . Четкое действие наблюдения можно также рассматривать как частный случай нечеткого. В самом деле, если

$$\tilde{f}_i(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } f_i(x) = y, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

то  $\tilde{f}_i$  задает четкую функцию из  $A_{ik}$  в  $S'_i$ , идентичную  $f_i$ .

При рассмотрении оснований можно ввести функцию

$$\tilde{\varphi}_j : B_{ji} \times P'_j \rightarrow [0, 1], \quad (10)$$

подобную функции (9) и основанную на соотношении (3). Здесь

$\tilde{\varphi}_j(x, y)$  — степень достоверности того, что  $x$  принадлежит блоку разбиения  $B_{ji}/p_j$ , который представлен значением  $y$  параметра  $p'_j$ . На практике, однако, эту функцию использовать очень сложно. В самом деле, если  $B_{ji}$  — это группа, то функция  $p_j$  является взаимно однозначной, и, следовательно, недостоверность наблюдений отсутствует. Если  $B_{ji}$  является временем или пространством, то реальное наблюдение контролируется исследователем, т. е. исследователь принимает решение о том, где или когда должно быть проведено наблюдение. Такой контроль реальных наблюдений, а также относительная свобода выбора соответствующей функции  $\varphi_j$  позволяют исследователю избежать всякой недостоверности, за исключением неустраняемых ошибок при измерении времени или пространства. Если, например, он решает, что температура, относительная влажность и т. д. должны фиксироваться на метеостанции 24 раза в сутки, в половине каждого часа, он может задать функцию  $\varphi_j$  так, чтобы любой блок результирующего разбиения  $B_{ji}/\varphi_j$  представлял собой одночасовой интервал [0 ч—1 ч), [1 ч—2 ч), ... ..., [23 ч—0 ч). Тогда, если взять конкретное измерение наблюдаемых свойств, например, в 1 ч 30 мин, то, как правило, достоверно можно сказать, что это измерение представляет блок [1—2 ч). В принципе и в этом случае возможны ошибки (такие, как грубое нарушение правила измерения или поломка часов), однако такие случаи для обычного действия наблюдения не рассматриваются.

Подведем итоги нашим соображениям относительно действий наблюдения. Для любых практических надобностей достаточно использовать четкое действие наблюдения  $\varphi_{ji}$  для оснований, будь то группа, время или пространство. Однако для признаков применимы как четкие, так и нечеткие действия наблюдения ( $f_i$  и  $\tilde{f}_i$ ), и при разных обстоятельствах более подходящим может быть тот или иной тип действия.



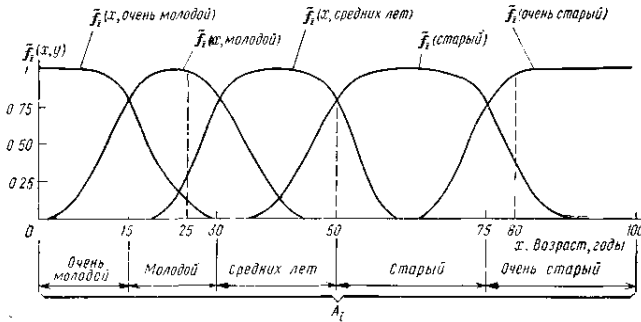


Рис. 1.12. Четкое и нечеткое действия наблюдения для полностью упорядоченного признака «возраст человека»

**Пример 2.** Пусть признаком  $a_i$  является возраст человека из группы  $B_{ij}$ . И пусть элементами  $A_{ik}$  будут номера лет в диапазоне от 0 до 100. Положим, что

$S'_i = \{\text{очень молодой, молодой, средних лет, старый, очень старый}\}$ , и пусть  $f_i$  — это взаимно однозначная функция  $A_{ik}/f_i \rightarrow S'_i$ , определенная следующим образом:

$\{0, 1, \dots, 14\}$ - очень молодой,

$\{15, 16, \dots, 29\}$ - молодой,

$\{30, 31, \dots, 49\}$ - средних лет,

$\{50, 51, \dots, 74\}$ - старый,

$\{75, 76, \dots, 100\}$ - очень старый.

При использовании четкого действия наблюдения очень плохо описываются люди, чей возраст близок к границам между блоками  $A_{ik}/f_i$ . Например, 49-летний человек помечается как человек средних лет, а 50-летний, как старый. При использовании нечеткого действия  $f_i$  например такого, какой описан на рис. 1.11, приведен оказывается более подходящим, поскольку не дает таких резких скачков. Важно отметить, что нечеткое действия наблюдения дает не одно состояние  $S'_i$  для одного действия наблюдения, как четкий канал, а набор значений  $(x, y)$  для всех  $y \in S'_i$ . Так, например, при наблюдении 25-летнего человека посредством нечеткого действия будут получены следующие 5 значений:

$$\tilde{f}_i(25, \text{очень молодой})=0,1$$

$$\tilde{f}_i(25, \text{молодой})=0,97$$

$$\tilde{f}_i(25, \text{старый})=0$$

$$\tilde{f}_i(25, \text{очень старый})=0.$$

## 1.5. Принципиальные отличительные признаки организации объектов

Когда мы говорим, что признак имеет выраженную структуру, то имеем в виду, что организация структуры определена эмпирическими отношениями между эмпирическими объектами. Чем больше отношений принимается во внимание при определении шкалы значений, тем больше значения шкалы говорят нам о реальном мире. Построить шкалу, гомоморфную относительно отношения порядка, но не сохраняющую отношение аддитивности, которое можно определить эмпирически, значит потерять информацию об организации объекта.

Рассмотрим понятие термина *«принципиальные отличительные признаки»*. Этот термин мы будем использовать для описания особенностей задач организации, по которым следует различать равные типы задач организации внутри одной эпистемологической категории задач. Принципиальные отличительные признаки присущи как организуемым объектам, так и требований к ним. Такие модификации, как введение в организуемый объект нового принципиального отличительного признака, его удаление или замена одного принципиального отличительного признака другим, не изменяют эпистемологического уровня организуемого объекта. Но они могут повлиять на множества принципиальных отличительных признаков, подходящих к различным требованиям. Таким образом, принципиальные отличительные признаки для организуемых объектов следует выбирать до того, как такие отличительные признаки будут выбраны для требований.

Типы задач организации разнятся только некоторыми принципиальными отличительными признаками, используют разные методы решения, но имеют один и тот же статус (занимают одно и то же положение) в эпистемологической иерархии организуемых объектов. Таким образом, можно сказать, что принципиальные отличительные признаки представляют собой вторичные критерии классификации задач организации. Они служат дополнением к первичной классификации по эпистемологическим критериям. Эпистемологических типов задач организации слишком много для всякого конкретного методологического исследования организуемых объектов. Поэтому принципиальные отличительные признаки используются для уточнения типов методологически разрешимых задач организации.

Множество приписываемых в рамках определенной концептуальной схемы принципиальных отличительных признаков организуемым объектам связан с множеством принятых эпистемологических типов организуемых объектов отношением «применимо к»; аналогичное отношение имеется и для требований. В то время как одни принципиальные отличительные признаки присущи только к определенным эпистемологическим типам, другие присущи для всем. Здесь мы будем рассматривать принципиальные отличительные признаки, которые относятся к переменным и их параметрам. Так как переменные и параметры являются компонентами любого организуемого объекта независимо от его эпистемологического уровня, эти эпистемологические отличительные признаки присущи организуемым объектам всех эпистемологических уровней.

Принципиальные отличительные признаки для переменных и параметров — это характеристики их множеств состояний и, соответственно, параметрических множеств. Если переменная (или параметр) представляет признак (или основание), то эти признаки не могут быть произвольными. Характеристики, которые не подходят признаку или основанию, не следует выделять и в соответствующем множестве состояний или параметрическом множестве. Однако некоторые предполагаемые характеристики признака (или основания), не имеющие отношения к рассматриваемой задаче организации, также не будем признавать свойствами соответствующей переменной (или параметра).

Для прояснения смысла понятия принципиальные отличительные признаки приведем следующее замечание для самого нижнего эпистемологического уровня — уровня признаков, оснований и их абстрактных аналогов (переменных и параметров). Для решения задач организации принципиальные отличительные признаки определяются на нижнем эпистемологическом уровне только для переменных и параметров (как конкретных, так и общих), а не для соответствующих признаков и оснований. Таким образом, на нижнем эпистемологическом уровне принципиальные отличительные признаки определены в **терминах математических признаков множеств состояний и параметрических множеств**. При этом необходимо быть уверенным, что выделенные признаки отражают фундаментальные характеристики соответствующих признаков и оснований.

Всякая переменная связана с одним или несколькими параметрами, и изменения состояний переменной наблюдаются на полном параметрическом множестве. Таким образом, **комбинация признаков множества состояний и полного параметрического множества определяет самый элементарный тип принципиальных отличительных признаков**.

Если при организации объекта используется более одного параметра, то полное параметрическое множество организуемого объекта представляет собой декартово произведение отдельных параметрических множеств. Для представления признаков этого декартова произведения признаки отдельных параметров должны сочетаться соответствующим образом. **Эти признаки полного параметрического множества (декартового произведения) совместно с признаками соответствующего множества состояний используются затем для описания элементарного принципиального отличительного признака.** Если все отдельные параметрические множества имеют одни и те же признаки, то их легко скомбинировать, и полученные общие признаки будут однородны на всем декартовом произведении. Вызывают некоторые сложности, когда отдельные параметрические множества имеют разные признаки. В этих случаях некоторые общие признаки не распространяются на все декартово произведение.

Будем сначала для простоты считать, что мы имеем дело с одним параметрическим множеством независимо от того, является оно отдельным параметрическим множеством или декартовым произведением нескольких, и что выделенными признаками обладают все это множество.

Одним из фундаментальных методологических отличий является *отсутствие математических признаков* у множества состояний или соответствующего параметрического множества. Это крайний случай, и он плохо подходит для переменной (или параметра), предназначенной для представления признака (или основания) и имеющей явно выраженные и существенные для задачи организации характеристики. Однако во многих случаях организации объектов такое предельное методологическое отличие приемлемо и даже необходимо. Такие, например, переменные как семейное положение (одиноким, женат, разведен, вдовец), политическая принадлежность (демократ, социалист, независимый), группа крови (*A, B, O, AB*) или пол (мужской, женский), заданные на элементах определенной общественной группы, демонстрируют существенность этого методологического отличия. В литературе по измерениям переменные такого рода обычно называют *переменными с номинальной шкалой*.

Наиболее фундаментальным из выделяемых свойств множеств состояний и параметрических множеств является *упорядоченность*. Методологически будем различать два типа упорядоченности — частичную и линейную.

*Частичная упорядоченность* — это бинарное отношение на множестве (в нашем случае на множестве состояний или параметри-

ческим), являющееся рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

*Линейная упорядоченность* сильнее частичной, так как это частичная упорядоченность, обладающая свойством связности (т. е. любая пара элементов множества так или иначе упорядочена).

Формально частичная упорядоченность  $Q$ , например, множества  $S_i$  — это бинарное отношение

$$Q \subset S_i + S_i,$$

удовлетворяющее следующим требованиям:

1.  $(x, y) \in Q$  (рефлексивность);
2. если  $(x, y) \in Q$  и  $(y, x) \in Q$ , то  $x=y$  (антисимметричность);
3. если  $(x, y) \in Q$  и  $(y, z) \in Q$ , то  $(x, z) \in Q$  (транзитивность).

Если  $(x, y) \in Q$ , то  $x$  называется *предшественником*  $y$ , а  $y$  — *преемником*  $x$ . Если  $(x, y) \in Q$  и не существует  $z \in Q$ , такого, что  $(y, z) \in Q$  и  $(z, x) \in Q$ , то  $x$  называется *непосредственным предшественником*  $y$ , а  $y$  — *непосредственным преемником*  $x$ . В дополнение к требованиям рефлексивности, антисимметричности и транзитивности отношение линейной упорядоченности удовлетворяет следующему требованию связности: для всех  $x, y \in S_b$ , если  $x \neq y$ , то или  $(x, y) \in Q$ , или  $(y, x) \in Q$ .

Примерами переменных с частично упорядоченным множеством состояний являются служебное положение или образование человека (определенные, например, на группе государственных служащих). Примерами переменных с линейно упорядоченными множествами состояний являются шкала твердости Мооса, высота как характеристики звука или экзаменационные оценки, определенные на группе студентов. Примером упорядоченности параметрического множества является время. Хотя в большинстве случаев такое упорядочение линейно, имеют смысл и частично упорядоченные временные множества, например при исследовании отдельных пространственно разделенных процессов (таких, как распределенные вычислительные машины, которые обмениваются друг с другом информацией и для которых задержка при передаче сообщения сравнима со временем изменения состояний переменных из отдельных процессов). Возникает потребность определять упорядочение и для некоторых групп. Например, группа людей может быть упорядочена по таким отношениям, как «быть старше», «быть потомком», «занимать более высокое положение по работе». Как правило, частичные упорядочения и их существенность зависят от характера группы и всего контекста задачи организации. Переменные с линейно упорядоченными множествами состояний называются *переменными с упорядоченной шкалой*.

Кроме частичных или линейных упорядочений мы будем использовать и другие математические признаки, определение которых для множеств состояний или параметрических множеств оказывается во многих случаях очень полезным. Одним из наиболее существенных признаков является **расстояние между парой элементов организуемого множества объектов**. Эта мера определяется функцией, сопоставляющей любой паре элементов этого множества число, определяющее, на каком расстоянии друг от друга находятся эти элементы с точки зрения некоторого фундаментального упорядочения, используемого в методах организации.

Для данного множества, скажем множества  $S_i$ , расстояние определяется функцией  $\delta$  вида

$$\delta: S_i \times S_i \rightarrow \mathbf{R}.$$

Однако для того, чтобы эта функция отвечала интуитивному представлению о расстоянии, она должна удовлетворять следующим условиям для всех  $x, y, z \in S_i$ :

( $\delta 1$ )  $\delta(x, y) \geq 0$  (условие неотрицательности);

( $\delta 2$ )  $\delta(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$  (условие нулевого расстояния, называемое также условием невырожденности);

( $\delta 3$ )  $\delta(x, y) = \delta(y, x)$  (симметричность);

( $\delta 4$ )  $\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)$  (неравенство треугольника).

Любая функция, удовлетворяющая условиям ( $\delta 1$ ) — ( $\delta 4$ ), называется *метрическим расстоянием* на множестве  $S_i$ , а пара  $(S_i, \delta)$  — *метрическим пространством*. Метрическое расстояние можно определить как на множестве состояний, так и на параметрическом множестве.

Примерами переменных с выраженными и существенными метрическими расстояниями являются почти все переменные в физике, например длина, масса, давление, электрическая проводимость, напряжение, сила звука, однако и помимо физики есть множество примеров таких переменных, например, количество денег, объемы производства, число дефектов, число несчастных случаев и т. д. Вполне очевидно, что и **пространство, и время — это параметры, к которым вполне применимо понятие метрического расстояния**. Однако **сложно определить метрическое расстояние на группах**. Одним из таких примеров является группа студентов, линейно упорядоченная по показателям их успеваемости. При этом расстояние для каждой пары студентов определяется как абсолютное значение разницы между их позициями в упорядоченном списке. Переменные, с множеством состояний которых связано метрическое расстояние, обычно называются *метрическими переменными*.

Еще одним свойством множеств состояний и параметрических множеств, имеющим большое значение при организации объектов,

является *непрерывность*. Это понятие хорошо известно из математического анализа, и нет необходимости рассматривать его здесь подробно. Тем не менее следует привести несколько замечаний относительно некоторых аспектов непрерывности, которые будут использоваться нами в дальнейшем в соответствующих методах организации.

**Необходимым условием непрерывности множества является его упорядоченность.** Так как линейная упорядоченность является частным случаем частичной упорядоченности, то **предпочтительнее определить непрерывность через частичную упорядоченность.** Это можно сделать несколькими способами. Одно из определений непрерывного частичного упорядочения опирается на понятие разреза частично упорядоченного множества: *разрез частично упорядоченного множества*, например, множества  $S_i$ , это разделение этого множества на два непустых подмножества, например,  $X$  и  $Y = S_i - X$ , такое, что или никакой элемент  $X$  не является предшественником (согласно частичному упорядочению, определенному на  $S_i$ ) никакого элемента из  $Y$  и некий элемент  $Y$  является предшественником какого-либо элемента  $X$ , или никакой элемент из  $X$  не является преемником никакого элемента из  $Y$  и некоторый элемент  $Y$  является преемником некоторого элемента  $X$ . *Непрерывное частичное упорядочение  $S_i$*  определяется как частичное упорядочение, для которого любой разрез  $X, Y$  множества  $S_i$  характеризуется определенным элементом из  $X$ , являющимся предшественником элемента из  $Y$ , такого, что или наибольшая верхняя граница  $X$  принадлежит  $Y$ , или наименьшая нижняя граница  $Y$  принадлежит  $X$ .

Наилучшим примером непрерывного частичного упорядочения является отношение «меньше или равно», определенное на множестве действительных чисел или на его декартовых произведениях. Фактически само понятие *непрерывной переменной* (или *непрерывного параметра*) опирается на требование, чтобы соответствующее множество состояний (или параметрическое множество) было **изоморфно множеству действительных чисел.**

Из этого следует, что множество состояний любой непрерывной переменной или параметрическое множество любого параметра **бесконечно и несчетно.** Тем самым альтернативой непрерывным переменным и параметрам являются **переменные и параметры, заданные на конечных множествах или, возможно, на бесконечных счетных множествах.** Последние называют **дискретными переменными или параметрами.**

**Непрерывные переменные и параметры представляются действительными числами, а их дискретные аналоги удобно представлять целыми числами.** Это особенно существенно, если множе-

ство состояний или параметрическое множество значений дискретной переменной или параметра линейно упорядочено и, следовательно, изоморфно соответствующим множествам значений целых чисел. Для работы с некоторыми переменными и параметрами при организации объектов будем использовать метрическое расстояние, определяемое естественным образом как абсолютное значение разницы между целыми, а также целая арифметика.

Такие признаки, как упорядоченность, метрическое расстояние и непрерывность множеств состояний и параметрических множеств, представляют основу для определения наиболее существенных методологических отличий при организации объектов на уровне переменных и параметров. Приведем список перенумерованных альтернатив для этих признаков:

<i>Упорядоченность:</i>	0 — упорядоченности нет 1 — частичная упорядоченность 2 — линейная упорядоченность
<i>Расстояние:</i>	0 — не определено 1 — определено
<i>Непрерывность:</i>	0 — дискретно 1 — непрерывно

Статус (положение) любой переменной (или параметра) для этих трех признаков может быть однозначно охарактеризован триплетом (упорядоченность, расстояние, непрерывность), в котором каждый признак представляется его определенным значением (или его идентификатором). Так, например, триплет (2, 1, 0) описывает дискретную переменную с линейно упорядоченным множеством состояний, на котором определено метрическое расстояние.

Хотя данные три свойства в принципе определяют 12 возможных комбинаций, три из них (0, 0, 1), (0, 1, 0) и (0, 1, 1) смысла не имеют. В самом деле, если на множестве не определена упорядоченность, то на нем нельзя ни содержательно определить метрическое расстояние, ни рассматривать его как непрерывное. Таким образом, имеется девять осмысленных комбинаций. Будем называть эти комбинации *методологическими типами* переменных и параметров. Они могут быть частично упорядочены с помощью отношения «быть методологически более определенным чем». На рис. 1.12,а это частичное упорядочение, образующее решетку, представлено в виде диаграммы Хассе. Упрощенная решетка на рис. 1.12,б задает схему для свойств упорядоченности и расстояния, но без непрерывности.



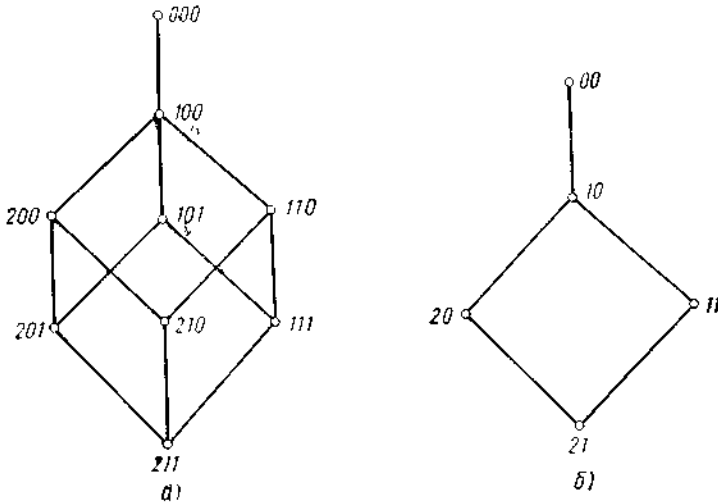


Рис. 1.12. Решетки методологических типов переменных или параметров

На уровне переменных и параметров методологическое отличие одной переменной представляет собой сочетание методологических типов этой переменной и соответствующих оснований. Каждая из них имеет девять типов. Следовательно, если есть только одно основание или требуется, чтобы все основания, входящие в комбинацию, имели один методологический тип (наиболее часто встречающийся случай), то число методологических отличий будет равно 81 (так как методологические типы переменных и параметров не накладывают ограничений друг на друга). Если к тому же в нашей схеме будут учитываться только дискретные переменные и параметры, методологические типы которых приведены на рис. 1.12,б, то число методологических отличий сократится до 25.

Теперь предположим, что имеется два или более, например  $m$ , параметров. Они могут быть одного, двух, трех (независимо от порядка) и т. д. типов. Предположим, что  $m \leq 9$ , тогда общее число методологических типов полного параметра определяется суммой

$$\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{m}.$$

При сочетании этой суммы с девятью методологическими типами

переменных мы получим общее число возможных методологических отличий одной переменной и ее параметра, это число определяется формулой

$$9 \times \sum_{i=1}^m \binom{9}{i}.$$

Теоретические модели организации объектов обычно содержат непрерывные функции или бесконечные последовательности, хотя подтверждающие их данные по существу в высшей степени дискретны и конечны.

Как уже говорилось выше, в формулировку методологических отличий на уровне переменных и параметров входит дихотомия непрерывных и дискретных множеств. В схеме решения задач организации определяются и те, и другие. Однако, если говорить о реализации решаемых задач организации, то мы будем рассматривать в основном дискретные объекты, т. е. объекты с дискретными переменными и дискретными параметрами. Мы будем лишь в необходимых случаях касаться вопросов, связанных с непрерывными объектами.

Хотя может показаться, что непрерывные объекты в равной степени подходят для описания архитектуры решения задач организации, однако, для этой цели во многих случаях больше подходят дискретные объекты. Выскажем по этому поводу некоторые соображения:

1. Независимо от того, считаем ли мы мир по существу дискретным, непрерывным или смешанного типа, факт остается фактом, что с большинством, если не со всеми наблюдениями связана некоторая **неисключаемая конечная ошибка**. Значение этой ошибки определяет некую конкретную верхнюю границу уровня разрешения для данных, собираемых посредством определенных действий наблюдения. **Это означает, что данные всегда оказываются дискретными независимо от философских убеждений или состояния технологии.**

2. В случаях, когда эмпирические соображения, описанные п. (1), оказываются несущественными и желательно использовать непрерывные переменные, всегда можно выбрать определяющий дискретные переменные конечный уровень разрешения, позволяющий **аппроксимировать непрерывные переменные с наперед заданной точностью**; точно так же можно **аппроксимировать и непрерывные параметры**. Этот подход очень наглядно излагается в ряде работ, в которых показано, что как и классическая, и релятивистская физика могут быть переформулированы в терминах **дискретных**

переменных, и что в этой формулировке могут быть получены результаты, сколь угодно близкие к результатам, полученным в традиционной формулировке, основанной на непрерывных переменных и дифференциальных уравнениях.

3. Известно, что дискретные переменные (и параметры) всегда могут быть заданы так, чтобы аппроксимировать непрерывные переменные с требуемой точностью, тогда как непрерывные переменные применимы только к определенному типу признаков (атрибутов). В частности, множество проявлений соответствующих атрибутов должно иметь структуру, изоморфную множеству действительных чисел. Это очень строгое ограничение. Таким образом, область применения дискретных переменных и параметров оказывается существенно шире области применения их непрерывных аналогов.

4. Если явления реального мира и описываются с помощью непрерывных переменных и параметров (обычно в виде набора дифференциальных уравнений), то редко оказывается так, что для работы с этими описаниями удастся использовать методы непрерывной математики. Дифференциальные уравнения, описывающие явления реального мира, обычно или не могут быть решены аналитически (т. е. это нелинейные дифференциальные уравнения), или их аналитическое решение чересчур трудоемко. Следовательно, или по необходимости, или для удобства приходится для их решения использовать численные методы и цифровые вычислительные машины, что требует, чтобы непрерывные переменные и параметры были преобразованы в свои дискретные аналоги.

Обычно при получении научных знаний сначала проводятся эксперименты, дающие дискретные наборы данных. Затем теоретики анализируют эти данные и в классическом духе вводят непрерывные модели. Если уравнения в этих моделях нелинейны, они решаются численными методами на компьютерах, и результатами снова являются дискретные данные. Средний этап этой работы идеологически несовместим с первым и третьим. В самом деле, было бы проще и удобней вывод непрерывной модели заменить выводом дискретной и таким образом совершенно отказаться от понятия бесконечности. Понятие бесконечности и логически следующие из него понятия предела, производной и интеграла приемлемы в чисто математическом исследовании действительных чисел и действительных функций, однако они *не подходят* для моделирования физических понятий и явлений методами теории организации.

5. Работа с непрерывными переменными и параметрами имеет ряд чисто математических сложностей и ограничений, которые требуют не

только более высокой подготовки, но, что еще важнее, затемняют реальные понятия.

6. Легко заметить, что характерное для докомпьютерной эры главенство методов непрерывной математики постоянно сокращается с тех пор, как в 1950-х гг. появились первые универсальные цифровые вычислительные машины. Непрерывно возрастающая мощность вычислительных машин превосходит возможности аналитического исчисления. Процесс этот продолжается и сейчас, и в результате в системных исследованиях по организации будут доминировать объекты, построенные на дискретных переменных.

7. В то время как точность созданных человеком непрерывных систем (например, аналоговых вычислительных машин или результатов) ограничена и никакими средствами не может быть поднята выше определенного предела, точность созданных человеком дискретных систем (цифровых компьютеров, регуляторов, систем связи и т. д.) является, видимо, только вопросом стоимости.

8. Созданные человеком дискретные системы могут быть в силу своей природы спроектированы так, чтобы они обладали свойствами самокоррекции, что невозможно для созданных человеком непрерывных систем.

9. Дискретные функции (например, выражающие зависимости переменных от их параметров или от других переменных) более гибки, чем их непрерывные аналоги в смысле способа представления. Это положение хорошо описано Э. Барто: «очень удобно использовать символьные выражения для задания дискретных функций... Можно также определить операторы для этих функций через символьные преобразования этих формул. Однако преимущество использования символьных выражений состоит *не только* в возможности полностью специфицировать функции, как в случае с непрерывными переменными. Дискретные функции полностью определяются списком своих значений, например, с помощью запоминания в памяти ЭВМ так, что «адресам» соответствуют аргументы функции, а «содержанию» — ее значения. Можно также задать алгоритм, входом которого является аргумент функции, а выходом — ее значение... Прimitивные команды, используемые при спецификации алгоритмов (например, цикл или условное ветвление), позволяют кратко определять функции, которые невозможно или очень неудобно определяются с помощью обычных алгебраических средств».

## 2. Формальное определение структур и их моделей

### 2.1. Введение

Одним из основных понятий теории систем служит понятие «структура». Однако оно иногда формулируется недостаточно ясно и понимается в большинстве случаев интуитивно. Чисто интуитивное толкование понятия «структура» может привести к недоразумениям и противоречиям. Поэтому необходимо сформулировать строгое, но вместе с тем достаточно общее определение структуры, которое легло бы в основу аксиоматического метода в теориях систем и структур.

**Структура** (от лат. *structura* — строение, расположение, порядок) — совокупность устойчивых связей и отношений объекта, обеспечивающих его целостность и тождественность самому себе, т.е. сохранение основных свойств при различных внешних и внутренних изменениях.

Структуру можно определить набором входящих в нее элементов.

Аналогично другим физическим теориям целесообразно создать абстрактную теорию структур, которой можно впоследствии дать определенную физическую и геометрическую интерпретацию, причем в физической интерпретации выделить понятие «конкретная структура», приближенно отображающее рассматриваемую физическую структуру. Таким образом получаем три основные модели структур, приведенные на рис. 1.

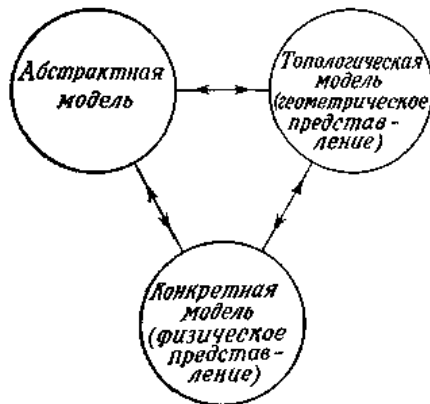


Рис. 1. Модели структуры.

Эти модели не случайны и имеют аналогии и в других теориях.

Придавая понятию «структура» различные смысловые значения и физические интерпретации, можно применять теорию структур при решении разнообразных задач, например в экономике, биологии и т. д. Такой подход, в частности, используется при решении проблем кибернетики. Необходимо подчеркнуть огромные заслуги кибернетики, которая дала возможность исследовать с одних и тех же позиций многие проблемы как технических, так и биологических структур.

## 2.2. Абстрактная модель структуры

Построение абстрактной модели структуры основано на теории множеств и теории отношений. Пусть дано счетное множество  $M$ , определенное в евклидовом пространстве  $E^n$ . На множестве  $M$  определим бинарное отношение  $R$  как подмножество декартова произведения  $M \times M$

$$R \subset M \times M. \quad (1)$$

Следовательно, отношение  $R$  представляет собой множество упорядоченных пар  $(x, y)$  некоторых элементов множества  $M$ . Если пара  $(x, y)$  — элемент множества  $R$ , то это множество можно записать в виде  $xRy$  и назвать пару  $(x, y)$  парой, приведенной в отношение. Таким образом, имеем

$$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R. \quad (2)$$

Если пара  $(x, y)$  не приведена в отношение, то можно записать « $x$  не  $Ry$ », т. е.

$$x \text{ не } Ry \Leftrightarrow (x, y) \notin R. \quad (3)$$

Можно также сказать, что « $x$  находится в отношении  $R$  к  $y$ » для случая  $xRy$  и « $x$  не состоит в отношении  $R$  к  $y$ », если  $x \text{ не } Ry$ . Левосторонней областью  $d_l R$  отношения  $R$  называется множество предыдущих элементов пар, принадлежащих  $R$ . Правосторонней областью  $d_p R$  отношения  $R$  называется множество последующих элементов пар, принадлежащих  $R$ . Сумму этих областей определим как поле отношения  $R$  и обозначим через  $f R$ . Следовательно,

$$f R = d_l R \cup d_p R. \quad (4)$$

Для выделения понятия предыдущего и последующего элементов в паре  $(x, y)$  используем обозначения

$$r = (x, y) \Rightarrow x = d_l r; \quad y = d_p r. \quad (5)$$

Тогда

$$d_l r \in d_l R; \quad d_p r \in d_p R \quad (6)$$

и  $d_l r$  служит элементом левосторонней области, а  $d_r r$  — элементом правосторонней области отношения  $R$ . Введем следующие определения.

*Определение 1.* Бинарное отношение  $R$  называется *структурным отношением* на множестве  $M$  тогда и только тогда, когда для каждой пары таких непустых множеств  $X$  и  $Y$  выполняются соотношения

$$X \cup Y = M, \quad X \cap Y = \emptyset \quad (7)$$

и существуют элементы  $x \in X$  и  $y \in Y$ , для которых справедливо по крайней мере одно из отношений

$$xRy \text{ или } yRx, \quad (8)$$

Понятие структурного отношения будет полезно при определении структуры.

*Определение 2.* Бинарное структурное отношение  $R$  на множестве  $M$  в евклидовом пространстве называется *абстрактной* или *теоретико-множественной структурой*. Элементы отношения  $R$  называются элементами теоретико-множественной структуры.

Согласно этому определению, понятие «структура» идентично по сути «структурное отношение». Из определения 2 следует, что **структура не может содержать изолированных элементов (в отличие от графа)**, т. е. каждый элемент множества  $M$  состоит в определенном отношении  $R$  по крайней мере еще с одним элементом множества  $M$ . Таким образом, **множество  $M$  служит полем структурного отношения  $R$**

$$M = f R. \quad (9)$$

Элементы поля отношения  $R$ , т. е. элементы множества  $M$ , назовем вершинами структуры  $R$ . Естественно, что каждая вершина структуры есть элемент по крайней мере одной из областей  $d_l R$  или  $d_r R$ . Если элемент  $r$  представляет собой пару  $(x, y)$ , то  $x$  будем считать началом, а  $y$  концом элемента  $r$ , т. е.

$$r = (x, y) \Rightarrow x \text{ — начало элемента } r; \quad y \text{ — конец элемента } r. \quad (10)$$

Необходимо выделить некоторые основные виды структур, которые наиболее часто встречаются на практике.

*Определение 3.* Абстрактная структура называется *ориентированной*, если определяющее ее отношение антисимметрично, т. е. если выполняется следующее условие:

$$x, y \in M \Rightarrow (xRy \Rightarrow y \text{ не } Rx). \quad (11)$$

Если условие  $xRy \Rightarrow y \text{ не } Rx$  выполняется не для всех элементов  $x, y$  множества  $M$ , то структуру будем считать ориентированной частично.

Структура называется неориентированной, если определяющее ее отношение симметрично на множестве  $M$ , т. е. если

$$x, y \in M \Rightarrow (xRy \Rightarrow yRx). \quad (12)$$

С другой стороны, структура считается ориентированной в случае, когда  $R$  представляет собой слабо симметричное отношение на множестве  $M$ , т. е. когда

$$x, y \in M \Rightarrow (xRy \text{ и } yRx \Rightarrow x = y). \quad (13)$$

*Определение 1.4.* Абстрактная структура называется *замкнутой*, если определяющее ее отношение связно, т. е. если выполняется условие

$$x, y \in M \Rightarrow (xRy \text{ или } yRx) \quad (14)$$

Из этого определения следует, что каждые две вершины такой структуры одновременно служат вершинами одного из элементов структуры.

*Определение 5.* Абстрактная структура содержит собственные элементы в том случае, когда для некоторых  $x \in M$  имеет место отношение

$$xRx \quad (15)$$

Примером такой структуры служит структура, определенная при помощи рефлексивного отношения, удовлетворяющего условию

$$x \in M \Rightarrow xRx. \quad (16)$$

*Определение 6.* Вершины абстрактной структуры, которые представляют собой только начала ее элементов, называются входами структуры, тогда как вершины, представляющие собой только концы ее элементов, называются выходами структуры.

Введем понятие граничных вершин и границы структуры.

*Определение 7.* Входы и выходы абстрактной структуры называются граничными вершинами структуры; остальные вершины структуры называются внутренними вершинами. Множество граничных вершин называется границей структуры. Если обозначить:  $X$  — множество входов,  $Y$  — множество выходов,  $B$  — граница структуры, то получим

$$\begin{aligned} X &= d_l R - d_p R, \\ Y &= d_p R - d_l R, \\ B &= d_l R \triangleq d_p R, \end{aligned} \quad (17)$$

Где знаком  $\triangleq$  обозначена симметричная разность множеств, определенная в виде

$$d_l R \triangleq d_p R = (d_l R - d_p R) \cup (d_p R - d_l R). \quad (18)$$

*Определение 8.* Абстрактная структура, имеющая выходы и не имеющая входов, называется *возбуждающей* структурой. Структура, имеющая только входы, называется *конечной* структурой, а структура, имеющая как входы, так и выходы, определяется как *относительно обособленная* структура. Структура, не имеющая границы, называется *обособленной* структурой.

Таким образом, структура возбуждающая, если

$$d_l R - d_p R = \emptyset, \quad (19a)$$



конечная, если

$$d_p R - d_l R = \emptyset, \quad (19б)$$

относительно обособленная, если

$$d_p R - d_l R \neq \emptyset \text{ и } d_l R - d_p R \neq \emptyset, \quad (19в)$$

и обособленная, если

$$d_l R \triangleq d_p R = \emptyset. \quad (19г)$$

## 2.3. Топологическая модель структуры

### 2.3.1. Определение топологической структуры

Под одномерным симплексом будем понимать гомеоморфное преобразование отрезка (геометрического симплекса). На рис. 2 показано несколько одномерных симплексов с вершинами (вершины симплекса обозначены кружками).

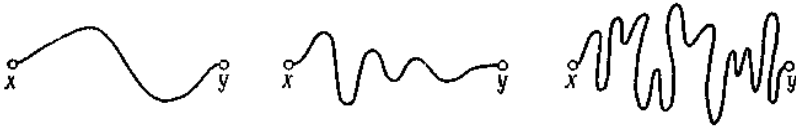


Рис. 2. Одномерные симплексы.

Одномерный симплекс с вершинами  $x, y$  обозначим символом  $(x, y)$ . Пусть задана абстрактная (теоретико-множественная) структура  $R$ ; определим преобразование

$$\Gamma(R) = \sum_{r \in R} \Gamma(r), \quad (20)$$

устанавливающее взаимно однозначное соответствие между элементами  $r = (x_r, y_r)$  структуры и непустым подмножеством  $S_r$  одномерных симплексов с концами в точках  $x_r$  и  $y_r$ . Преобразование  $\Gamma$  будем называть геометрической интерпретацией структуры  $R$ . Обозначив

$$S = \Gamma(R), \quad (21)$$

можно выразить преобразование  $\Gamma$  формулой

$$S = \Gamma(R) \Rightarrow \Gamma(r) = S_r \subset S; \quad S_r \neq \emptyset, \quad (22)$$

где  $S$  — множество одномерных симплексов со свойствами

$$s_r \in S_r \Leftrightarrow s_r = (x_r, y_r); \quad r = (x_r, y_r). \quad (23)$$

*Определение 9.* Множество  $S$  одномерных симплексов со свойствами, выраженными формулами (22) и (23), называется *топологической структурой*, определенной на структурном отношении  $R$ .

Очевидно, что в некоторых случаях подмножество  $S_r$  в выражении (22) может содержать лишь один элемент. Тогда элементу  $r$  ставится в соответствие только один симплекс.

Симплексы  $s \in S$  называются ребрами или элементами топологической структуры, а вершины симплексов — вершинами структуры.

Топологическую структуру будем считать ориентированной (частично ориентированной), если все (некоторые) симплексы  $s$  связного множества  $S$ , представляющего эту структуру, ориентированы. Если ни один из симплексов  $s \in S$  не ориентирован, то структуру будем считать неориентированной. Все понятия, введенные для абстрактной структуры  $R$ , распространяются на ее геометрическую интерпретацию  $S = \Gamma(R)$ . Таким образом, если структура  $R$  возбуждающая, конечная, обособленная, относительно обособленная и т. д., то топологической структур  $S = \Gamma(R)$  приписываем те же самые понятия.

Подобно абстрактной структуре  $R$ , множество всех вершин топологической структуры, представляющих собой только входы элементов ориентированной структуры  $S$ , будем обозначать  $d_i S$ , а множество вершин-выходов элементов обозначим  $d_p S$ .

На множестве топологических структур можно определить некоторые операции, например сложение и умножение. Под суммой и произведением

$$S_1 \cup S_2, \quad S_1 \cap S_2 \quad (24)$$

двух топологических структур  $S_1$  и  $S_2$  будем понимать соответствующие операции алгебры множеств. Очевидно, что сумма  $S_1 \cup S_2$  представляет собой структуру только тогда, когда она образует связное множество (по определению 1), в противном случае она представляет собой пару структур.

Понятие топологической структуры близко к понятию графа или мультиграфа, но не равнозначно им. Согласно определению Бержа, граф — это упорядоченная пара  $(X, G)$  множества  $X$  вершин и многозначного преобразования  $G(x) \subset X$ , трансформирующего начала ребер в их концы. Очевидно, что, согласно этому определению, ориентированная топологическая структура всегда представляет собой граф или мультиграф. **Однако не каждый гриф (мультиграф) представляет собой структуру, так как для него не обязательно требуется условие связности.** Существуют графы, которые не являются структурами в том смысле, в котором здесь потребляется это понятие.

Согласно принятому определению одномерного симплекса, ребра структуры можно произвольно растягивать, не изменяя топологических свойств, определяемых только способом соединений ее элементов. Структура, чаще всего понимаемая чисто интуитивно,

определяется способом соединений, не изменяющимся при любых непрерывных преобразованиях ребер. На рис. 3 изображено несколько топологических структур представленных с одинаковой так называемой мостовой структурой.

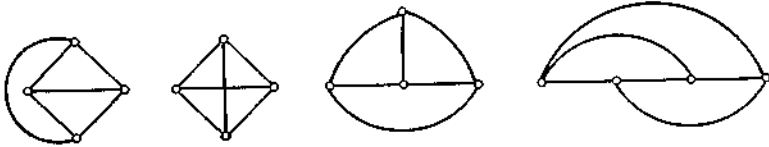


Рис. 3. Топологические структуры представленные мостовой структурой.

Уточним теперь понятие структуры на основании свойства гомеоморфных преобразований.

Две структуры  $S_1$  и  $S_2$  называются гомеоморфными, если существует однозначная функция  $\sum_{s \in S}$

$$f(S) = \sum_{s \in S} f(s), \quad (25)$$

непрерывная и имеющая непрерывное обратное значение  $f^{-1}$ , которая отображает  $S_1$  на  $S_2$ , т. е.

$$S_2 = f(S_1).$$

Все структуры можно классифицировать по признаку гомеоморфности. Эти классы назовем структурными типами или, короче, структурами и обозначим через  $\bar{S}$ .

*Определение 10.* Структурный тип топологической структуры, или структура, представляет собой объект  $\bar{S}$ , обозначающий класс гомеоморфных структур, удовлетворяющих условию

$$\bar{S}_1 = \bar{S}_2 \Leftrightarrow (\text{структуры } S_1 \text{ и } S_2 \text{ гомеоморфны}). \quad (26)$$

Следовательно, структура  $\bar{S}$  — инвариант гомеоморфных преобразований структуры.

Гомеоморфное преобразование структуры (25) будем также называть изоструктурным преобразованием, а гомеоморфные структуры — изоструктурными структурами. Изоструктурные структуры характеризуются одинаковой структурой. Любое негомеоморфное преобразование структуры называется структурным преобразованием.

Пусть имеются две изоструктурные структуры  $S_1$  и  $S_2$ . Легко заметить, что каждое свойство структуры  $S_1$ , выраженное с помощью логических понятий и отношений, определяющих эту структуру, будет полностью

также и свойством изоструктурной структуры  $S_2$ . Следовательно, изоструктурные структуры не отличимы по свойствам, выраженным с помощью логических понятий и определяющих их отношений.

### 2.3.2. Основные топологические структуры

Важным понятием теории организации структур в топологических моделях служат понятия пути, цикла, звезды и дендрита, которые приводятся ниже.

В соответствии с терминами алгебраической топологии одномерной последовательностью называется выражение вида

$$L = \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_n s_n, \quad (27)$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — одномерные ориентированные симплексы;  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  — целые числа. Последовательность (27) представляет собой линейную комбинацию переменных  $s_1, \dots, s_n$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Принимаем, что умножение симплекса на  $-1$  означает изменение его ориентации, т. е.  $-1(x, y) = (y, x)$ . Заметим, что выражение (27) представляет собой коммутативную (абелеву) группу. Границей одномерного симплекса  $s = (x, y)$  называется нульмерная последовательность вида

$$ds = y - x, \quad (28)$$

а граница последовательности (27) определяется формулой

$$\partial L = \sum_i \lambda_i \partial s_i. \quad (29)$$

Операция определения границы представляет собой гомеоморфизм, преобразующий группу одномерных последовательностей в группу нульмерных последовательностей.

Рассмотрим подмножество  $P$  элементов структуры  $S$ , обозначив через  $P^*$  последовательность вида

$$P^* = \sum_{p_i \in P} p_i. \quad (30)$$

*Определение 11.* Если для подмножества  $P$  элементов топологической структуры  $S$  справедливы условия

$$\partial P^* = y - x; \quad dp_i \neq 0, \quad (31)$$

где

$$P^* = \sum_{p_i \in P} p_i, \quad x \in d_1 p, \quad y \in d_p p,$$

то подмножество  $P$  называется *путем* структуры  $S$ . Геометрическое изображение пути — граф — показано на рис. 4.

Следовательно, путь в топологическом смысле представляет собой кривую, составленную из некоторого числа симплексов.

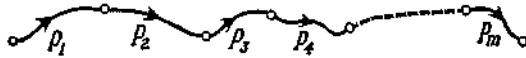


Рис. 4. Геометрическое изображение пути.

Если подмножество  $P \subset S$  образует путь после изменения ориентации некоторых его элементов, то такое множество называется мнимым путем.

С понятием пути связано важное понятие правильной ориентации структуры. Условимся называть структуру правильно ориентированной, если существует путь из каждой его внутренней вершины и каждому из его выходов.

*Определение 12.* Если путь  $C$  топологической структуры  $S$  удовлетворяет условию

$$\partial C^* = 0, \quad (32)$$

то такой путь называется циклом (рис. 5).



Рис. 5. Пример цикла

Если путь  $C$  становится циклом лишь при изменении ориентации некоторых его элементов, то такой цикл называется мнимым и обозначается  $C^p$ . Цикл, содержащий два элемента, называется бинарным

$$C = \{C_1, C_2\}.$$

*Определение 13.* Если все элементы структуры  $S$  имеют общее начало (конец) и структура не содержит мнимых циклов, то такая структура называется расходящейся звездой (или сходящейся (рис. 6)).

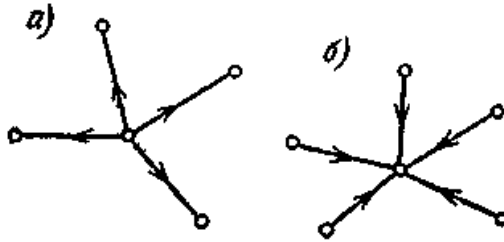


Рис. 6. Примеры структур, соединенных звездой: а) расходящаяся звезда; б) сходящаяся звезда.

*Определение 14.* Структура, не содержащая циклов и мнимых циклов, называется *дендритом* (рис. 7, а). Структура, не содержащая циклов, но содержащая мнимые циклы, называется *псеводендритом* (рис. 7,б).

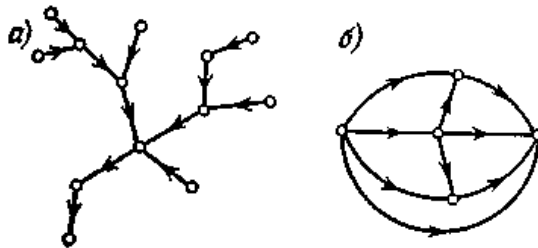


Рис. 7. Пример дендрита (а) и псеводендрита (б).

Примером псеводендрита служит структура, определенная с помощью транзитивного отношения  $R$ :

$$xRy, yRz \Rightarrow xRz \text{ для произвольных } x, y, z \in M. \quad (33)$$

### 2.3.3. Классы подобия топологических структур

Исследователи, изучающие теорию цепей, хорошо знают, что электрическую цепь с определенными динамическими характеристиками, например корректирующее устройство или электрический фильтр, можно реализовать различным образом с помощью цепей с разными структурами (мостовой, цепной и т. д.). Это следует из общего принципа, согласно которому цепи с различной топологической структурой могут иметь одинаковые свойства, например идентичным образом преобразовывать сигнал (действие). С этой точки зрения для большинства задач организации структур

представляет интерес не столько проблема реализации той или иной структуры, сколько определение классов структур, для которых выполняются заданные условия. В большинстве задач как синтеза, так и анализа организации структур для определения классов структур необходимо исследовать способ разложения этих структур на дендриты. Дальнейшие рассуждения рассматривают именно эту проблему.

На связном множестве  $S$  одномерных симплексов, определяющих топологическую структуру, определим многозначную функцию  $f$  со значениями из множества  $N$  натуральных чисел

$$f: S \rightarrow N. \quad (34)$$

Следовательно, функция  $f$  ставит в соответствие симплексам  $s_i \in S$  натуральные числа  $\alpha_i$

$$f(s_i) = \alpha_i \quad (35)$$

таким образом, что каждому симплексу соответствуют различные числа  $s_i$ .

Многозначную функцию (35) назовем *описывающей* функцией, а топологическую структуру, для которой определена такая функция, будем называть *детерминированной* структурой. В этом случае можно также говорить о «детерминированном графе».

Детерминированные структуры далее будем обозначать прописными буквами  $A, B, C$  т. д. В соответствии с этим такие структуры можно рассматривать как упорядоченные пары

$$A = (S, f) \quad (36)$$

множества  $S$  одномерных симплексов и описывающей функции  $f$ .

Дендрит, для которого определена описывающая функция, называется *детерминированным дендритом* или *деревом*.

Два дерева

$$\mathcal{D}_1 = (S_1, f_1) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_2 = (S_2, f_2)$$

будем считать подобными, записывая  $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$ , если  $f_1(S_1) = f_2(S_2)$ , т. е.

$$\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow f_1(S_1) = f_2(S_2). \quad (37)$$

Другими словами, два дерева подобны, если прообразы описывающих их функций составляют одно и то же подмножество множества натуральных чисел. На рис. 8 изображены два примера подобных деревьев.

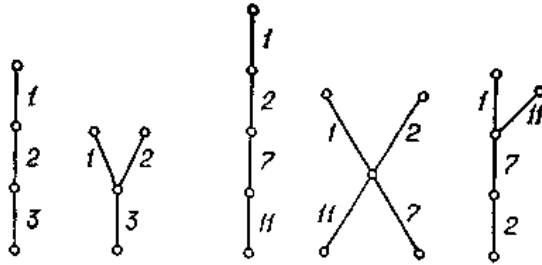


Рис. 8. Примеры подобных деревьев.

Из принятого определения подобных деревьев следует, что подобные деревья должны иметь одинаковое число ребер, т. е.

$$\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2 \Rightarrow [\mathcal{D}_1] = [\mathcal{D}_2]. \quad (38)$$

(Здесь обозначения  $[\mathcal{D}_1] = [\mathcal{D}_2]$  представляют собой мощность множеств  $\mathcal{D}_1$  и  $\mathcal{D}_2$ )

Действительно, в каждой дискретной детерминированной структуре можно выделить некоторое семейство деревьев, образованных ребрами этой структуры и соединяющих все его вершины. Если дерево  $\mathcal{D}_i$  образовано ребрами структуры  $A$ , то его можно назвать деревом структуры  $A$  и написать

$$\mathcal{D}_i \in A. \quad (39)$$

Получение всех деревьев данной структуры назовем разложением структуры на деревья. Введем понятие подобных структур.

Две детерминированные структуры

$$A = (S_1, f_1) \text{ и } B = (S_2, f_2) \quad (40)$$

можно считать подобными, записывая  $A \sim B$ , если их разложения на деревья содержат исключительно подобные деревья, точнее

$$A \sim B \Leftrightarrow (\mathcal{D}_A \in A \Leftrightarrow \mathcal{D}_B \in B) \wedge (\mathcal{D}_A \sim \mathcal{D}_B). \quad (41)$$



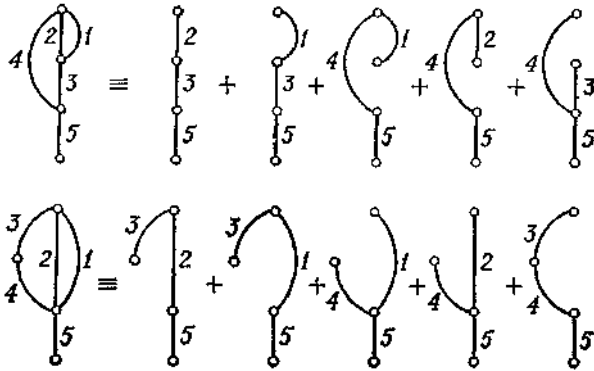


Рис. 9. Две подобные структуры и их разложение на деревья.

Отметим, что отношение подобия структур рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

$$\begin{aligned}
 A &\sim A, \\
 A \sim B &\Leftrightarrow B \sim A, \\
 A \sim B, B \sim C &\Rightarrow A \sim C.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

Следовательно, подобие структур представляет собой отношение эквивалентности.

Таким образом, отношение подобия приводит к разделению множества детерминированных структур на отдельные классы подобных

структур. Классы подобных структур обозначим символами  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , приняв следующее определение.

*Определение 15.* Классом подобия детерминированных топологических

структур называется объект  $\bar{A}$ , обозначающий семейство подобных структур  $A$ , удовлетворяющих условию

$$\bar{A} = \bar{B} \text{ (структуры } A \text{ и } B \text{ подобны)}.
 \tag{43}$$

На рис. 9 приведен пример две подобные структуры и их разложение на деревья.

## 2.4. Топологические полугруппы как средство описания топологических моделей структур

### 2.4.1. Начальные определения

Теория топологических полугрупп базируются на *свойствах компактности, локальной компактности или дискретности*.

Всякая алгебраическая полугруппа оказывается топологической, если ввести на ней дискретную топологию (любое множество открыто). В этой топологии все функции непрерывны. В частности, конечная полугруппа будет компактной топологической полугруппой.

Поскольку при дальнейшем изложении используются некоторые сведения из теории топологии, мы будем применять обозначение  $A^*$ ,  $A \setminus B$  и  $\square$  для замыкания множества, разности двух множеств и пустого множества соответственно. Элемент  $x$  и точечное множество  $\{x\}$  мы не будем различать. Терминам топологии будем отдавать преимущество перед терминами алгебры там, где из контекста не возникает недоразумений. Все рассматриваемые в этом разделе полугруппы будут топологическими. Многие ранее полученные результаты для конечных полугрупп распространяются на топологические полугруппы.

Когда мы говорим, что множество *замкнуто*, это значит, что оно замкнуто в топологическом пространстве и это не означает, что оно замкнуто относительно полугрупповой операции (т.е. есть подполугруппой).

**Определение.** *Полугруппой* называется непустое, хаусдорфовое топологическое пространство  $S$  с заданным на нем непрерывным ассоциативным законом умножения

$$S \times S \rightarrow S,$$

который обычно не обозначается никаким символом и записывается просто с помощью последовательного размещения элементов.  $S$  называется *пространством полугруппы*, и если из контекста не следует двусмысленности, связанной с законом умножения, мы говорим, что  $S$  является полугруппой.

Для подмножеств  $A, B \subset S$   $AB$  обозначает множество  $\{ab | a \in A, b \in B\}$  и  $A^2$  обозначает множество  $\{aa' | a, a' \in A\}$ . Два факта из общей топологии будут важны в дальнейшем. Первый из них заключается в том, что произведение компактных пространств компактно, а второй — в том, что образ при непрерывном отображении компактного пространства тоже будет компактным. Так как  $A$  и  $B$  — компактные подмножества полугруппы  $S$ , то  $AB$  — также компактное

подмножество, и, в частности, если множество  $A$  компактно, то для любого элемента  $x \in S$   $xA$  и  $Ax$  тоже компактны.

В топологии *гомеоморфизмом* называется взаимно однозначное сюръективное непрерывное отображение, обратное к которому также непрерывно. Для полугрупп *изомерфизмом* будем называть отображение, что является гомеоморфизмом пространств и изоморфизмом соответствующих алгебраических полугрупп.

Минимальный идеал полугруппы  $S$  будем обозначать символом  $K(S)$ . Для компактной полугруппы  $S$   $K(S)$  существует и его построение полностью известно. На языке алгебраических полугрупп  $K(S)$  есть полностью простым. В частности,  $K(S)$  компактен и представляет собой дизъюнктивное объединение семейства компактных групп (см. теорему 8).

Множество всех идемпотентов полугруппы  $S$  будем обозначать символом  $E(S)$ . *Подгруппой* полугруппы  $S$  называется подмножество  $G$  в  $S$ , которое является группой (в алгебраическом смысле) с операцией, унаследованной от полугруппы  $S$ . Закон умножения в подгруппе  $G$ , очевидно, будет непрерывным, и если  $G$  локально компактна, то операция взятия обратного элемента также будет непрерывной, поэтому  $G$  окажется топологической группой. Для каждого идемпотента  $e \in E(S)$  существует максимальная группа в  $S$ , единицей которой является элемент  $e$  (см. лемму 1).

*Бингом* называется компактная связная полугруппа, *кланом* называется компактная связная полугруппа (бинг) с единицей. На рис. 10 показанные некоторые простые примеры полугрупп с обычным для каждого примера законом умножения: действительный отрезок  $[0, 1]$ , единичный круг  $D$  в комплексной плоскости и для фиксированного  $n \geq 1$  выпуклое подмножество в  $D$ , содержащее корни  $n$ -й степени из единицы  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  (все это изображено для случая  $n = 3$ ).

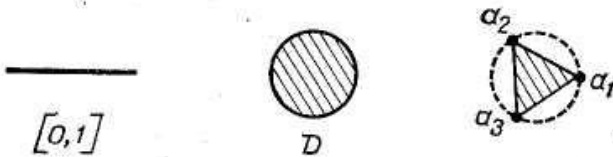


Рис. 10.

Заметим, что каждая из этих полугрупп представляет собой клан.

### 2.4.2. Дуги и полугруппы

*Нитью* называется полугруппа, пространство которой является дугой, т.е. хаусдорфовым множеством мощности континуум, каждая

точка которого разрезает само множество, а две точки, которые не разрезают множество, концевые. (Замкнутый действительный интервал  $[a, b]$  с  $a < b$  представляет собой дугу с концевыми точками  $a$  и  $b$ .) *Стандартной нитью* или *I полугруппой* называется нить, одна концевая точка которой является нулем (т.е. нулевым элементом полугруппы), а другая — единицей.

Строение нитей важно само по себе, а также потому, что многие из известных сейчас нитей (особенно это относится к *I* полугруппам) лежат в больших полугруппах. Фосе доказал, что *I* полугруппа, которая не имеет внутренних (не концевых) идемпотентов, должна быть гомеоморфна действительному интервалу  $[0, 1]$ . (Однако в общем случае *I* полугруппа не обязательно должна быть метрической; она может быть «слишком длинной».) Фосе получил дальнейшие результаты в направлении характеристики *I* полугрупп, эта работа была завершена Мостертом и Шайлдом, когда они использовали результаты своего исследования некоторых кланов на компактных поверхностях с границей. Клиффордом получены более общие результаты о нитях, которые полностью описывают построение нитей с идемпотентными концами, а Коэн и Вэйд охарактеризовали метризуемые нити с нулем и единицей. Одним из наиболее важных результатов относительно *I* полугрупп является то, что все они абелевы. Мы опишем их строение, но сперва приведем некоторые определения.

**Определение 1.** 1) *Единичной нитью* называется полугруппа, изоморфная полугруппе  $[0, 1]$  с обычным законом умножения.  
2) *Ниль-нитью* называется полугруппа, которая изоморфна полугруппе  $[1/2, 1]$  с законом умножения, определенным соотношением  $xy = \max\{1/2, \text{обычное произведение элементов } x \text{ и } y\}$ .  
3) *Мин-нитью* называется дуга, для которой задано упорядочение разделяющих точек, а закон умножения определяется соотношением  $xy = \min\{x, y\}$ . (На дуге  $A$  упорядочение разделяющих точек определяется следующим образом: выбирается одна концевая точка  $a$  и для  $x, y \in A$  кладется  $x \leq y$  тогда и только тогда, когда  $x = a$  или  $x = y$ , или  $x$  разделяет точки  $a$  и  $y$  в  $A$ . В литературе доказано, что этот порядок линеен.)

Пусть  $S$  является *I* полугруппой. Зададим упорядочение разбивающих точек, выбрав в качестве минимального элемента нуль. Тогда  $E(S)$  замкнуто и для  $x, y \in E(S)$   $xy = \min\{x, y\}$ . Дополнение  $E(S)$  будет объединением не имеющих общих элементов открытых интервалов и если  $P$  — один из них, то  $P^*$  будет подполугруппой в  $S$ , являющейся единичной нитью или ниль-нитью. И, если  $x \in P$  и  $y \notin P$ , то  $xy = \min\{x, y\}$ . В частности,  $S$  — абелева полугруппа.

Не все нити являются абелевыми полугруппами, неабелевыми могут быть даже те из них, концевые точки которых идемпотентны. Это видно из следующего примера.

**Пример 1.** Пусть  $S$  — подмножество в плоскости, определяемое соотношением

$$S = ([0, 1] \times 0) \cup (0 \times [0, 1]) \quad (\text{см. рис. 11}).$$

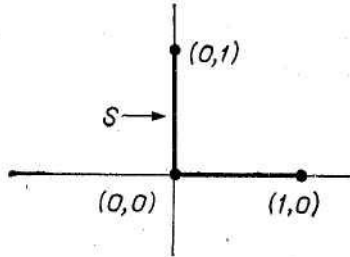


Рис. 11

Определим умножение в  $S$ , полагая

$$(x, y) (x', y') = (xx', xy' + y).$$

Мы получили неабелеву нить с единицей, но без нуля. Однако каждый элемент  $p$ , принадлежащий вертикальному сегменту, *будет левым нулем*, т.е.  $pS=p$ . Заметим, что горизонтальный сегмент является единичной нитью.

В соответствии с приведенным выше утверждением отметим, что нить только с двумя идемпотентами — концевыми точками (т.е.  $I$  полугруппа, которая не имеет внутренних идемпотентов), является или единичной нитью или ниль-нитью.

Рассмотрим, что собой представляет структура полугруппы, если ее пространство есть произвольная  $n$  клетка для  $n > 1$  и если потребовать, чтобы множество идемпотентов совпадало с границей? В частности, обладает ли 2-клетка строением соответствующей полугруппы?

В примере 3(3) будет представлена полугруппа, пространство которой есть 2-клетка и идемпотентами которой являются граничные точки и еще одна внутренняя точка. Однако нет стандартной процедуры, которая бы исключила внутренний идемпотент из этой полугруппы. В общем случае определить построение полугруппы с необходимыми геометрическими свойствами на пространстве  $S$  очень трудно, как правило, несколько легче подобрать непрерывную функцию  $S \times S \rightarrow S$  с этими свойствами, но получить еще при этом закон ассоциативности тяжело. Поэтому примеры обычно строятся с помощью уже известных полугрупп; приемы построения этих примеров будут описаны в разделе 2.4.3.

При этом отметим, что из ряда работ следует, что нетривиальный гомоморфизм из действительной  $I$  полугруппы сохраняет размерность, хотя в общем случае мало что известно об изменении размерности при гомоморфизмах полугрупп.

Под размерностью мы будем понимать индуктивную или топологическую размерность.

**Определение 2.** *Однопараметрической полугруппой в  $S$  называется функция  $\sigma: [0, 1] \rightarrow S$ , которая непрерывна, взаимно однозначна и удовлетворяет соотношению  $\sigma(x + y) = \sigma(x) \sigma(y)$  всегда, когда  $x, y, x + y \in [0, 1]$ .  $\sigma([0, 1])$  есть дуга как подпространство в  $S$ , поскольку  $[0, 1]$  компактен,  $S$  хаусдорфово, а  $\sigma$  непрерывна и взаимно однозначна, откуда следует, что  $\sigma$ -гомеоморфизм  $[0, 1]$  в  $S$ . Как правило, мы будем называть образ отрезка  $[0, 1]$  относительно отображения  $\sigma$  *однопараметрической полугруппой*. Отметим, что этот образ не обязан быть подполугруппой в  $S$ , так как отрезок  $[0, 1]$  не замкнут относительно сложения. В качестве примера однопараметрической полугруппы, которая не является подполугруппой, возьмем интервал  $[1/2, 1]$  действительной оси, где  $S$  есть единичный комплексный круг с обычным комплексным умножением (см. рис. 12).*

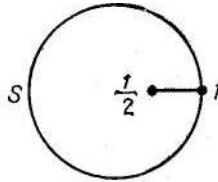


Рис. 12

**Утверждение 1.** Если  $e \in E(S)$ , то существует максимальная подгруппа  $H(e)$  полугруппы  $S$ , содержащая  $e$ , и  $H(e) = \{x \in eSe \mid xx' = e = x'x \text{ для некоторого}$

$$x' \in Se\} = \{x \in S \mid x \cup x = e \cup eS \text{ и } x \cup Sx = e \cup Se\}.$$

Дуга  $A$  в  $S$  *выходит из идемпотента  $e \in S$*  тогда и только тогда, когда  $A \cap H(e) = e$ . Пример однопараметрической полугруппы, данный в определении 2 служит также примером дуги, которая выходит из идемпотента.

**Утверждение 2.** Пусть  $S$  — локально компактная полугруппа с единицей 1. Предположим, что существует компактная подгруппа  $G$  в  $H(1)$ , открытая в  $H(1)$ , но не являющаяся открытой в  $S$ . Предположим, что существует окрестность 1, не содержащая других идемпотентов.

Тогда  $S$  содержит однопараметрическую полугруппу, которая выходит из 1.

Но это утверждение требует строгого доказательства.

**Определение 3.** Произведением полугрупп  $S$  и  $W$  называется декартово произведение пространств  $S \times W$  с покоординатным законом умножения, т.е.  $(x, y) (x', y') = (xx', yy')$ .

**Пример 2.** Пусть  $I=[0,1]$  — действительный отрезок с обычным умножением,  $C$  — единичная окружность, а  $D$  — единичный круг в комплексной плоскости с обычным комплексным умножением.

1)  $I \times C$  — полугруппа, пространство которой есть боковая поверхность цилиндра, с единицей  $(1,1)$  и минимальным идеалом  $0 \times C$ . Положим

$$S = (0 \times C) \cup \{(e^{-t}, e^{2\pi i t}) | 0 \leq t < \infty\},$$

так что  $S$  есть базисная окружность  $0 \times C$  вместе с бесконечной спиральной обмоткой вокруг нее (см. рис. 13).

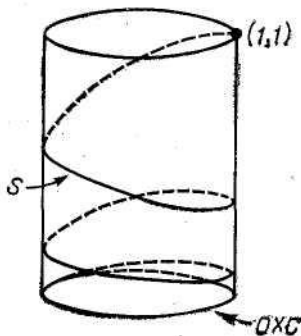


Рис. 13

Заметим, что  $S$  является кланом с единицей  $(1,1)$  и  $K(S)=0 \times C$ . Любая дуга в  $S$ , что выходит из  $(1,1)$ , есть однопараметрическая полугруппа, но наименьший подбинг, содержащий такую дугу, есть вся полугруппа  $S$ . Следовательно, не существует такой дуги, которую можно было бы продолжить до нити в  $S$ . Мы будем называть полугруппу  $S$  единичной спиральной полугруппой.

2)  $I \times D$  есть полугруппа, пространство которой — цилиндр, с единицей  $(1,1)$  и минимальным идеалом  $(0,0)$  (см. рис.14).

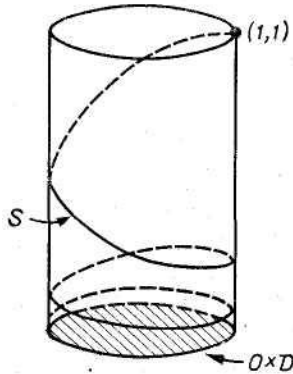


Рис. 14

Спиральная полугруппа  $S$ , определенная в пункте 1, будет подполугруппой в  $I \times D$ ;  $T = S \cup (0 \times D)$  также будет подполугруппой.  $T$  есть объединения спиральной обмотки, которая начинается с нижнего основания цилиндра плюс это основание. Заметим, что  $T$  является кланом с единицей  $(1,1)$  и нулем,  $K(T) = (0,0)$ . Таким образом, мы опять получаем, что любая дуга, выходящая из точки  $(1,1)$ , является однопараметрической полугруппой, но ее нельзя продолжить до нити в  $T$ .

3) Этот пример принадлежит Хантеру. Мы получим клан  $T'$ , в котором нет дуг, выходящих из единицы, и вообще единица не лежит в дуге. И дуга, конечно, не будет открытой в  $E(T')$ . В пространстве  $E^3$  рассмотрим круг  $D_i$ , определяемый соотношениями  $x^2 + y^2 \leq (1/i)$  и  $z = 1 - (1/i)$ , где  $i = 1, 2, 3, \dots$ , так что круги  $D_i$  сходятся к точке  $u = (0, 0, 1)$ . Из центра круга  $D_{i+1}$  проводим криволинейный луч  $A_i$ , который остается в пределах конуса, определяемого центром круга  $D_{i+1}$  и границей круга  $D_i$  и обматывается над границей  $D_i$ , как в примере 2. Положим  $T_i = A_i \cup D_i$  и для каждого  $i = 1, 2, 3, \dots$  зададим в  $T_i$  умножение так же, как оно определялось для  $T$  в примере 2. Тогда центр круга  $D_i$  будет нулем для  $T_i$ . Пусть  $T_\infty = u$  и  $T' = \bigcup \{T_i \mid i = \infty, 1, 2, \dots\}$ . Дополним определение умножения в  $T'$  следующим образом: будем считать, что  $\infty$  больше любого целого числа и если  $x \in T_i$ ,  $y \in T_j$  и  $i < j$ , то положим  $xy = yx = x$ . Тогда  $T'$  будет кланом с нулем  $K(T) = (0, 0, 0)$  и единицей  $u$  и в  $T'$  нет дуги, содержащей точку  $u$  (см. рис. 15).



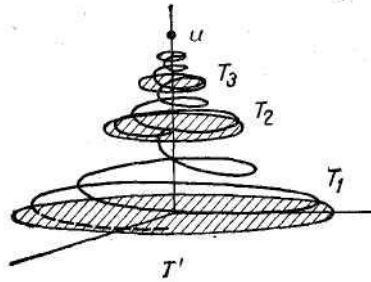


Рис. 15

Следует проверить непрерывность умножения для каждого  $i$  на  $T_i \cap T_{i+1}$ , а также ассоциативность умножения в  $T'$ . Это умножение не было бы непрерывным, если бы начало спирали полугруппы  $T_i$  находилось бы в единице круга  $D_{i+1}$ , а не в его нуле. Заметим, что  $T'$  строится из однотипных спиралей по аналогии с тем, как  $I$  полугруппы строятся с единичных, ниль- и мин-нитей (см. определение 4). Заметим также, что в каждой окрестности точки  $u$  имеются невырожденные связные группы (границы кругов  $D_i$  при достаточно большом  $i$ ), и интуитивно ясно, что их наличие препятствует построению дуги, которая выходит из  $u$ . Это следует из теоремы Коха.

**Теорема Коха.** Если  $S$  есть бинг, в котором каждая подгруппа вполне несвязна, то для каждого идемпотента  $e \in S \setminus K(S)$  существует подполугруппа  $I$  в  $S$ , которая содержит  $e$  в качестве единицы, пересекает  $K(S)$  и является  $I$  полугруппой.

**Определение 4.** *Неприводимой полугруппой* называется клан  $T$ , в котором нет собственного континуального подмножества, содержащего единицу полугруппы  $T$ , пересекающего  $K(T)$  и являющегося также подполугруппой.

Возможна ситуация, когда неприводимая полугруппа не будет топологически неприводимым пространством, для ее единицы и минимального идеала, т.е. может существовать собственное континуальное подмножество, которое соединяет единицу и минимальный идеал, хотя соединяющей их собственной континуальной подгруппы нет. Например,  $S$ ,  $T$  и  $T'$  в примере 2 — неприводимые полугруппы, но  $T$  и  $T'$  тем не менее не являются топологически неприводимыми. Была выдвинута гипотеза, что неприводимые полугруппы должны быть абелевыми. Кох и Уоллес показали, что топологически неприводимый клан является абелевым. Хофманн и Мостерт доказали, что неприводимая полугруппа абелева,

их доказательство не элементарно. Формулировка основной теоремы приводится далее.

Пример полугруппы  $T'$  в примере 2(3) показывает, что неприводимые полугруппы могут быть значительно более сложными, чем нити или просто одна спираль; в действительности, они строятся из базисных блоков (которые Хофманн и Мостерт назвали *цилиндрическими полугруппами*), вводимых вместе методом, более сложным, но похожим на метод, которым  $I$  полугруппы строятся из единичных ниль- и мин-нитей.

Строение неприводимых полугрупп имеет особое значение, так как большинство бингов содержит их согласно следующему положению.

**Утверждение 3.** Если  $S$  — бинг и  $e \in S \setminus K(S)$ , то  $S$  содержит неприводимую полугруппу, которая пересекает  $K(S)$  и имеет единицей элемент  $e$ .

Заметим, что  $\{eSe\}$  есть семейство кланов, которые содержат  $e$  и пересекают  $K(S)$ . Это семейство линейно упорядочено по включению (семейство имеет только один член). По лемме Цорна такое семейство имеет максимальный элемент и тогда его пересечение — неприводимая полугруппа.

Следующая теорема — центральный аспект в исследовании Хофманна и Мостерта о неприводимых полугруппах.

**Теорема.** Неприводимая полугруппа будет абелевой и неприводимые полугруппы представляют собой кланы, для которых  $S/\mathcal{H}$  обладает естественным строением  $I$  полугруппы, где  $\mathcal{H}$  — отношение эквивалентности на  $S$ , которое определяется соотношением

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in S \times S \mid x \cup Sx = y \cup Sy \text{ и } x \cup xS = y \cup yS\}.$$

Отношение  $\mathcal{H}$ , определенное здесь, есть одно из *отношений Грина* на  $S$  и согласно определению 3 максимальная подгруппа  $H(e)$ , содержащая элемент  $e$ , является  $\mathcal{H}$  классом для  $e$ .  $S/\mathcal{H}$  есть пространство, получаемое в результате отождествления точек в каждом  $\mathcal{H}$  классе и, в частности, при этом подгруппы из  $S$  стягиваются в точки, поэтому  $S/\mathcal{H}$  не содержит невырожденных связных групп.

Рассмотрим, например, единичную спираль  $S$  из примера 2 (1).  $\mathcal{H}$  классом каждого элемента  $x \in S \setminus (0 \times C)$  будет сам  $x$  и единственным другим  $\mathcal{H}$  классом будет базисная окружность. Следовательно,  $S/\mathcal{H}$  есть  $S$ , у которой базисная окружность стянута в точку. Очевидно, что мы получили дугу. Аналогично для  $T$  из примера 2(2):  $\mathcal{H}$  классами являются множества, которые были описаны раньше, кроме того, каждая окружность в круге  $0 \times D$  радиуса  $r$ ,  $0 \leq r \leq 1$ , с центром в  $(0, 0)$  тоже будет  $\mathcal{H}$  классом (см. рис. 16).

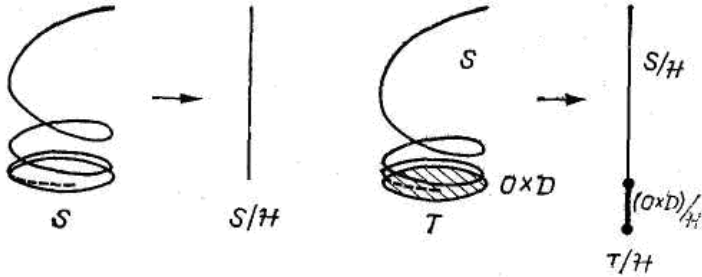


Рис. 16

Отношение  $\mathcal{H}$  можно определить для любой полугруппы  $S$  и оно будет отношением эквивалентности, так что пространство  $S/\mathcal{H}$  определено корректно, и если  $S$  — компактная, то  $S/\mathcal{H}$  — хаусдорфово пространство (можно пользоваться несколько более слабыми условиями, чем компактность, чтобы пространство  $S/\mathcal{H}$  было хаусдорфовым). Однако в общем случае  $S/\mathcal{H}$  не обладает естественной структурой полугруппы, т.е. произведение (в  $S$ ) двух  $\mathcal{H}$  классов может не содержаться в другом  $\mathcal{H}$  классе. Это можно выразить, сказав, что  $\mathcal{H}$  может не быть отношением *конгруэнтности*. Если полугруппа  $S$  *нормальна*, т.е.  $xS = Sx$  для каждого  $x \in S$ , то  $S/\mathcal{H}$  будет обладать естественной структурой полугруппы. Если  $S$  — абелева, то  $S$  нормальна, и это одна из причин, по которой очень важно знать, является ли полугруппа абелевой. Например, Хантер доказал, что если  $S$  — нормальная неприводимая полугруппа, то  $S/\mathcal{H}$  будет  $I$  полугруппой. Но это не было известно для произвольных неприводимых полугрупп, пока Мостерт и Хофманн не доказали их абелевость.

### 2.4.3. Построение полугрупп

Определение произведения полугрупп (см. определение 3) представляет один из основных способов построения новых полугрупп из имеющихся. Другая основополагающая идея состоит в замене части заданной полугруппы на что-то другое. Этот метод описан в определении 5 и в пункте "Склеивание полугрупп", посвященном методу склеивания.

**1. Определение фактор-полугруппы.** Пусть  $S$  — компактная полугруппа и  $I$  — *замкнутый* идеал. Пусть  $S/I$  обозначает обычное фактор-пространство, получаемое в результате отождествления всех точек из  $I$ , а  $\phi: S \rightarrow S/I$  — каноническое отображение. Тогда  $S/I$  есть

полугруппа с умножением, определяемым равенством  $\phi(x) \phi(y) = \phi(xy)$ , такая фактор-полугруппа называется *фактор-полугруппой*.

Поскольку  $I$  — идеал, умножение в  $S/I$  определено корректно. Компактность  $S$  и замкнутость  $I$  применяются для доказательства непрерывности умножения и хаусдорфовости пространства  $S/I$ .

**Примеры фактор-полугрупп** 1) Ниль-нитка является фактор-полугруппой единичной нити. Действительно, из пункта 2 определения 1 видно, что ниль-нитка есть  $[0, 1] / [0, 1/2]$ , где в  $[0, 1]$  рассматривается обычное умножение действительных чисел.

2) Несвязная полугруппа может быть преобразована в связную, если существует замкнутый идеал, который пересекает все ее компоненты. Пусть, например,  $W$  — конечная полугруппа с  $n$  элементами и  $I = [0, 1]$  — обычный единичный отрезок. Тогда  $W \times I$  — компактная полугруппа с  $n$  компонентами; множество  $W \times 0$  будет замкнутым идеалом, который пересекает все компоненты, поэтому  $W \times I / W \times 0$  будет связным веером. На рис. 17 изображен случай для  $n = 2$ .



Рис. 17

3) Пусть  $S^1$  — полугруппа на одномерной сфере, а  $I = [0, 1]$  будет  $I$  полугруппа. Обозначим через  $T = S^1 \times I$  произведение полугрупп. Очевидно  $T$  представляет собой пустой цилиндр. Множество  $I_r = S^1 \times [0, r]$  является идеалом полугруппы  $T$  для  $r \in [0, 1)$  и фактор-полугруппа  $T/I_r$  топологически есть 2-клетка, граничная сфера которой будет подполугруппой (см. рис. 18).

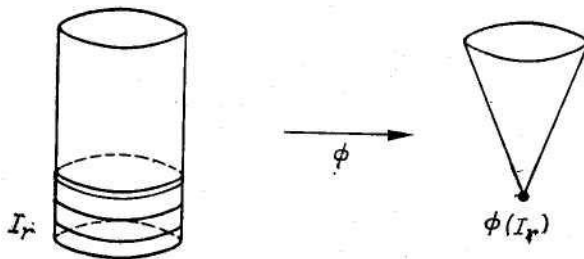


Рис. 18

Описанную в пункте 3 ситуацию можно обобщить, если вместо  $S^I$  рассмотреть  $S^{n-1}$ , где  $n \geq 2$ . Мы получим строение полугруппы на  $n$  клетке, которая содержит граничную  $(n-1)$  сферу как полугруппу. Существует теорема, которая принадлежит Мостерту и Шайлдзу, из которой следует, что клан на  $n$ -клетке с нулем, граница которой есть подполугруппа, должен быть фактор-полугруппой цилиндра. Эта теорема приводится далее. Она является более общей, поскольку формулируется для  $L$  полугрупп. По определению  $L$  полугруппой называется клан на компактной поверхности, такой, что граница этой поверхности есть подбинг. Для доказательства теоремы о  $L$  полугруппах Мостерт и Шайлдз дополнили работу Фосе об  $I$  полугруппах и доказали первый вариант своей теоремы об однопараметрической полугруппе. Об этих результатах говорилось ранее.

**Теорема.** Если  $S$  есть  $L$  полугруппа с границей  $B$ , то  $B$  будет компактной группой Ли;  $B$  действует на  $S$  с помощью левых переносов; пространство орбит  $S'$  является  $I$  полугруппой и в  $S$  существует  $I$  полугруппа  $J$ , которая будет также сечением для  $S'$ ; следовательно,  $S = JB$ . Если  $S$  содержит нуль, то полугруппа  $S$  изоморфна  $(J \times B)/K$ , где  $K$  — идеал  $J \times B$ . Умножение в  $S$  дифференцируемо тогда и только тогда, когда  $S'$  — единичная нить. Например, можно показать, что единичный комплексный круг имеет вид  $(I \times C)/K$ , где  $I$  — стандартная единичная нить,  $C$  — группа вращений окружности и  $K = (0 \times C)$  (см. рис. 13).

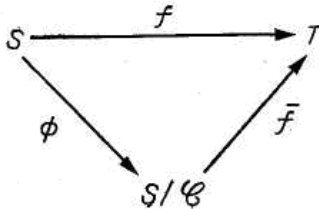
Ранее в определении 1 п.2.4.1 мы указали, почему хорошо сжимать замкнутый идеал в точку, или, что то же самое, почему фактор-пространство оказывается полугруппой. Формально фактор-полугруппа компактной полугруппы представляет собой случай общего приема выделений замкнутой конгруэнтности, которая приводит к полугруппе в соответствии со следующей теоремой. Большое значение при этом имеет связь между конгруэнтностями и гомоморфизмами, поэтому мы формулируем предложение в полной общности. Отметим, что оно остается справедливым, если прилагательные «компактный» и «компактный хаусдорфовый» заменить на прилагательное «дискретный».

**Теорема.** Предположим, что  $S$  — компактная (дискретная) полугруппа и  $\mathcal{C}$  — замкнутое отношение эквивалентности на  $S$ . Пусть  $\phi : S \rightarrow S/\mathcal{C}$  — каноническое отображение. Тогда множество  $S/\mathcal{C}$  будет компактным и хаусдорфовым (дискретным) в фактор-топологии, множество  $U$  в которой открыто по определению тогда и только тогда, когда открыто множество  $\phi^{-1}(U)$ .

Если  $\mathcal{C}$  есть еще и конгруэнтностью, то множество  $S/\mathcal{C}$  обладает естественным строением полугруппы, причем отображение  $\phi$  будет гомоморфизмом. Следовательно, замкнутое отношение конгруэнтности на  $S$  индуцирует гомоморфизм полугруппы  $S$  на другую полугруппу. Наоборот, если  $f: S \rightarrow T$  есть гомоморфизм из  $S$  на  $T$ , то отношение

$$\mathcal{C} = f \{ (s, s') \in S \times S \mid f(s) = f(s') \}$$

будет замкнутой конгруэнтностью на  $S$  и полугруппа  $S/\mathcal{C}$  изоморфна  $T$ , изоморфизм  $\bar{f}: S/\mathcal{C} \rightarrow T$  определяется равенством  $\bar{f} \phi = f$ :



Ниже приводится процесс склеивания полугрупп. Склеенная полугруппа, как и фактор-полугруппа, получается в результате применения приведенной выше теоремы, но другим способом. Фактор-полугруппа заменяет идеалы на точки, тогда как метод склеивания описывает условия, при которых подполугруппа может быть заменена другой полугруппой. Эта простая вариация метода склеивания с помощью непрерывной функции, предложенного К. Борсуком.

**Склеивание полугрупп.** Пусть  $S$  — компактная полугруппа и  $A$  — замкнутая подполугруппа в  $S$ . Предположим, что  $f: A \rightarrow T$  — сюръективный гомоморфизм. Обозначим как  $\Delta(S) = \{ (x, x) \mid x \in S \}$  диагональ полугруппы  $S$ . Положим

$$\mathcal{E} = \Delta(S) \cup \{ (a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2) \}.$$

Тогда  $\mathcal{E}$  есть замкнутое отношение эквивалентности на  $S$ , и если  $\mathcal{E}$  — конгруэнтность, то и  $S/\mathcal{E}$  будет полугруппой и ее можно рассматривать как полугруппу  $S$ , у которой вырезана подполугруппа  $A$  и разрез заклеен полугруппой  $T$ , причем правила склеивания определяются отображением  $f$ . Если  $A$  — идеал полугруппы  $S$ , то  $\mathcal{E}$  будет отношением конгруэнтности, когда  $f(xa_1) = f(xa_2)$  и  $f(a_1x) = f(a_2x)$  для каждого  $x \in S$ .

**Пример 3.** 1) Фактор-полугруппа. Пусть  $A$  — замкнутый идеал компактной полугруппы  $S$  и  $T$  — одноточечная полугруппа, а  $f$  — отображение  $A$  в  $T$ .

2) Клан на листе Мебиуса. Пусть  $C$  и  $I$  такие, как в примере 2. Положим

$$S = I \times C, A = 0 \times C \text{ и } T = C.$$

Определим отображение  $f: A \rightarrow T$ , полагая  $f(0, z) = z^2$ . Легко видеть, что в результате склеивания отождествляются только противоположные точки на базисной окружности полугруппы  $S$ , а остальная часть  $S$  остается без изменения. Для того чтобы представить себе геометрически, что пространство, полученное в результате склеивания, действительно является листом Мебиуса, можно: 1) разрезать вертикально  $S$  пополам и спустить переднюю половину вниз; 2) повернуть переднюю половину на  $180^\circ$ ; 3) склеить два смежных края вместе, это даст нам 2-клетку с отождествленными противоположными точками на базисной окружности полугруппы  $S$ , исключая угловые точек; 4) снова соединить края разреза так, как они были первоначально, что завершит отождествление противоположных точек базисной окружности полугруппы  $S$ . Теперь получится пространство склейки, в то же время процесс построения этого пространства есть стандартный способ получения листа Мебиуса из клетки (см. рис. 19).

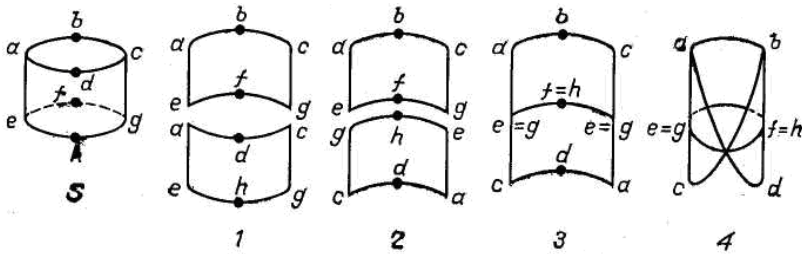


Рис. 19

3) Клан на зонтике. Пусть множество  $D$  такое же, как в примере 2,  $A = \{z \in D \mid |z| \leq 1/2\}$ ,  $T = [0, 1/2]$  с действительным умножением. Определим  $f: A \rightarrow T$ , полагая  $f(z) = |z|$  (см. рис. 20).

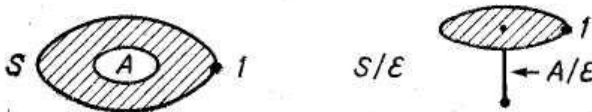


Рис. 20

4) Пусть  $S$  — единичная спираль примера 2(1) и  $\{a, b\}$  — полугруппа, которая состоит из двух элементов. [Например, умножение может быть тривиальным слева, или  $\{a, b\}$  может быть

циклической группой из двух элементов.] Пусть  $T$  — базисная окружность полугруппы  $S$ , а  $W = \{a, b\} \times S$  — обычное произведение полугрупп (см. определение 3 п. 2.4.2). Полугруппа  $W$  компактна, поскольку таковыми являются полугруппы  $\{a, b\}$  и  $S$ . Пусть  $A = \{a, b\} \times T \subset W$ , определим отображение  $f: A \rightarrow T$  как проекцию. Тогда условия требований склеивания выполняются и в результате склеивания получаем двойную спираль (см. рис. 21).

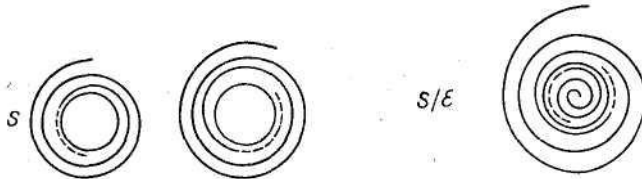


Рис. 21

Так как для любой конечной (или более обще, компактной) полугруппы  $X$ ,  $X \times S$  — компактная полугруппа, можно таким же способом склеить множество спиралей, мощность которого есть мощность множества  $X$ . Сравните этот пример с примером (2) с примеров с фактор-полугрупп.

Во всех предыдущих примерах отображение  $f$  должно было выбираться каждый раз так, чтобы индуцированное им отношение эквивалентности оказывалось замкнутой конгруэнтностью.

#### 2.4.4. Некоторые соображения о компактных группах

В этом разделе предметом обсуждения будут элементарные, но в тот же время наиболее часто применяемые факты о компактных полугруппах. Предварительно мы приведем несколько простых, однако достаточно важных результатов из топологии, которая нам понадобится в дальнейшем.

**Замечания по общей топологии.** Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  обозначают хаусдорфовы топологические пространства.

1) Если  $A$ ,  $U \subset X$  и  $U$  — открытое множество, то из  $A^* \cap U \neq \emptyset$  следует, что  $A \cap U \neq \emptyset$ .

В пунктах 2 и 3 символ  $\mathcal{A}$  будет обозначать непустое семейство подмножеств из  $X$ , которое является *башией*, т.е. для каждого  $A, B \in \mathcal{A}$  или  $A \subset B$  или  $B \subset A$ . Условимся что символ  $\bigcap \mathcal{A}$  обозначает множество  $\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$ .

2) Если каждый элемент  $A \in \mathcal{A}$  семейства  $\mathcal{A}$  есть компактное, непустое множество, то  $\bigcap \mathcal{A}$  также компактно и непусто.



3) Пусть  $f: X \rightarrow Y$  - непрерывное отображение, тогда  $f(\bigcap \mathcal{A}) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ , и если каждое  $A \in \mathcal{A}$  компактно, то  $f(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ . Следовательно, если  $X$  - полугруппа и  $\mathcal{A}$  — башня компактных подмножеств из  $X$ , то  $x(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \{xA \mid A \in \mathcal{A}\}$  для каждого элемента  $x \in X$ .

4) Для любого непрерывного отображения  $f: X \rightarrow Y$  и множества  $A \subset X$  имеется включение  $f(A^*) \subset f(A)^*$ , и если множество  $A$  компактно в  $X$ , то  $f(A^*) = f(A)^*$ . Следовательно, если  $A$  и  $B$  — подмножества полугруппы, то  $A^*B^* \subset (AB)^*$ , и если  $A^*$  и  $B^*$  еще и компактны, то  $A^*B^* = (AB)^*$ .

5) Если  $A \subset X$ ,  $A$  компактно и  $z \notin A$ , то существует такое открытое множество  $W$ , что  $A \subset W$  и  $z \notin W$ .

6) Если  $A$  и  $B$  компактны,  $A \times B \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$  - непрерывное отображение и  $f(A \times B) \subset W$ , где  $W$  - открытое множество, то существуют открытые множества  $U$  и  $V$ , такие, что  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  и  $f(U \times V) \subset W$ . Следовательно, если  $X = Y = Z$  есть полугруппа и  $AB \subset W$ , где  $W$  — открытое множество, то существуют открытые множества  $U$  и  $V$ , такие, что  $A \subset U$ ,  $B \subset V$  и  $UV \subset W$ .

**Определение.** Для элемента  $x \in S$  положим  $\Gamma_n(x) = \{x^p \mid p \geq n\}^*$ ,  $\Gamma(x) = \Gamma_1(x)$  и  $N(x) = \bigcap \{\Gamma_n(x) \mid n \geq 1\}$ .

Приведенная ниже теорема была сформулирована Кохом и Намакурой.

**Теорема.** Если  $x \in S$  и  $\Gamma(x)$  — компактное множество, то  $N(x)$  будет идеалом  $\Gamma(x)$  и  $N(x)$  — группа. Следовательно, для элемента  $x$  в компактной полугруппе степени  $x$  скапливаются к некоторому идемпотенту, в частности компактная полугруппа содержит идемпотент.

**Доказательство.** Замкнутое подмножество компактного пространства само компактно, поэтому  $N(x)$  есть пересечение непустой башни непустых компактных множеств. Тогда, в соответствии с пунктом 2 вышеприведенных замечаний, множество  $N(x)$  компактно и непусто. Непустое пересечение подполугрупп полугруппы опять будет полугруппой, поэтому  $N(x)$  — полугруппа.

Для того чтобы доказать, что  $N(x)$  является идеалом  $\Gamma(x)$ , покажем, что  $x^r N(x) = N(x)$  для каждого  $r \geq 1$ . Следовательно,  $\{x^r \mid r \geq 1\} N(x) \subset N(x)$ . Тогда согласно пунктам 1 и 4 вышеприведенных замечаний  $\Gamma(x)N(x) \subset N(x)$ . Имеется дуальное включение:  $N(x)\Gamma(x) \subset N(x)$ . Пусть поэтому  $r \geq 1$ . Выполним некоторые вычисления:  $x^r N(x) = x^r(\bigcap \{\Gamma_n(x) \mid n \geq 1\})$  и в соответствии с пунктом 3 вышеприведенных замечаний это равно  $\bigcap \{x^r \Gamma_n(x) \mid n \geq 1\}$ ; согласно пункту 4 вышеприведенных замечаний  $x^r \Gamma_n(x) = (x^r \{x^p \mid p \geq n\})^*$ , что равно  $\{x^{r+p} \mid p \geq n\}^* = \Gamma_{r+n}$ .

Следовательно,

$$x^r N(x) = \bigcap \{ \Gamma_{r+n}(x) \mid n \geq 1 \} = \bigcap \{ \Gamma_n(x) \mid n \geq r+1 \},$$

что равно  $N(x)$ , так как  $\Gamma_{r+1}(x) \subset \dots \subset \Gamma_1(x)$ .

Так как  $N(x)$  — полугруппа, для того чтобы доказать, что она является группой, достаточно показать, что  $yN(x) = N(x)y = N(x)$  для каждого элемента  $y \in N(x)$ . Было показано предварительно, что для каждого  $r \geq 1$   $x^r N(x) = N(x)x^r = N(x)$ , интуитивно ясно, что последовательности  $x^r$  сходятся к точкам множества  $N(x)$  и из этого должны бы следовать нужные равенства. Для справедливости этих рассуждений необходима компактность. Перейдем к доказательству. Положим  $A = \{ a \in \Gamma(x) \mid aN(x) = N(x) \}$ . Если бы было известно, что  $A^* \subset A$ , то, поскольку  $\{ x^r \mid r \geq 1 \} \subset A$ , мы должны были бы иметь  $\Gamma(x) \subset A^* \subset A$  и, в частности,  $N(x) \subset A$ , что и требуется. Для того чтобы доказать, что  $A^* \subset A$ , положим  $y \in A^*$  и предположим методом от противного, что  $y \notin A$ . Тогда  $yN(x) \not\subset N(x)$ , поэтому существует  $z \in N(x) \setminus yN(x)$ . Так как  $y$  и  $N(x)$  компактны,  $yN(x)$  — также компактное множество, следовательно, из пункта 5 вышеприведенных замечаний следует, что существует открытое множество  $W$ , такое, что  $z \notin W$  и  $yN(x) \subset W$ . [Отметим, что  $N(x) \not\subset W$ ]. Согласно пункту 6 вышеприведенных замечаний существуют открытые множества  $U$  и  $V$ , такие, что  $y \in U$ ,  $N(x) \subset V$  и  $UV \subset W$ . Но в соответствии с пунктом 1 вышеприведенных замечаний, поскольку  $y \in U \cap A^*$ , существует некоторый элемент  $a \in U \cap A$ ; если  $a \in U$ , то  $aN(x) \subset UV \subset W$ , если  $a \in A$ , то  $aN(x) = N(x)$ , но  $a \in A \cap U$ , т.е.  $a \in U$  и  $a \in A$ . Мы получили противоречие. Поэтому предположения, что  $y \notin A$ , неверно, следовательно,  $A^* \subset A$ .

Из дуальных рассуждений вытекает, что множество  $A' = \{ a \in \Gamma(x) \mid N(x)a = N(x) \}$  замкнуто и, следовательно,  $\Gamma(x) \subset A'$ , поэтому  $\Gamma(x) \subseteq A \cap A' = \{ a \in \Gamma(x) \mid aN(x) = N(x) \text{ и } N(x)a = N(x) \}$ , в частности  $N(x) \subset A \cap A'$ . Теорема доказана.

Прежде чем идти дальше, отметим, что доказательство замкнутости  $A$  зависело только от компактности  $N(x)$ , и точно таким же способом можно доказать, что для любого компактного подмножества  $N(x)$  полугруппы  $S$  множества  $\{ x \in S \mid xN \supset N \}$ ,  $\{ x \in S \mid xN \subset N \}$ ,  $\{ x \in S \mid Nx \subset N \}$  и  $\{ x \in S \mid Nx \supset N \}$  замкнуты.

**Определение.** Действием называется полугруппа  $S$ , пространство  $X$  и непрерывное отображение

$$S \times X \rightarrow X,$$

которое, как правило, не обозначается никаким символом (образ пары элементов  $s$  и  $x$  обозначается просто как  $sx$ ) и удовлетворяющее соотношению

$$t_1(t_2x) = (t_1t_2)x$$

для любых  $t_1, t_2 \in S$  и любого  $x \in X$ .

Можно обнаружить, что действие есть непрерывный автомат. Следующая лемма представляет собой достаточно полезный инструмент для изучения строения топологических полугрупп. Она носит несколько неестественное название - лемма об опухоли (опухоловой леммы).

**Лемма\*.** Предположим, что  $S$  действует на  $X$ ,  $x \in S$  и  $\Gamma(x)$  компактно. Пусть  $A$  — такое компактное подмножество в  $X$ , что  $x \supset A$ . Тогда  $xA = A$  и для каждого элемента  $y \in \Gamma(x)$  отображение  $a \rightarrow ya$  является гомеоморфизмом  $A$  на  $A$ . Следовательно, идемпотент в  $\Gamma(x)$  есть элемент, действующий как единица на  $A$ .

**Доказательство.** Так как  $xA \supset A$ , то  $x^2A \supset xA \supset A$ , и по индукции  $x^nA \supset A$  для всех  $n \geq 1$ . Следовательно,  $\{x^n \mid n \geq 1\} \subset \{y \in S \mid yA \supset A\}$  и последнее множество замкнуто (см. замечание после доказательства предыдущей теоремы), поэтому  $\Gamma(x) \subset \{y \in S \mid yA \supset A\}$ . Так как  $\Gamma(x)$  — компактное множество, то по предыдущей теореме существует идемпотент  $e \in N(x)$  и согласно предыдущему предложению  $eA \supset A$ . Из этого следует, что для каждого  $a \in A$  выполняется равенство  $ea = a$  (так как если  $a \in eA$ , то  $a = eb$  для некоторого  $b \in A$  и, следовательно,  $ea = e^2b = eb = a$ ). Поэтому  $a \rightarrow ea$  — тождественное отображение множества  $A$  и, в частности,  $eA = A$ .

Для того чтобы убедиться, что  $yA = A$  для любого элемента  $y \in \Gamma(x)$ , необходимо еще доказать, что  $yA \subset A$ . Для этого заметим, что  $yA = yeA$ ,  $ye \in N(x)$ , так как  $N(x)$  — идеал в  $\Gamma(x)$  и  $N(x)$  — группа. Тогда существует элемент  $(ye)^{-1} \in N(x)$ , такой, что  $(ye)(ye)^{-1} = e$ . Известно, что  $(ye)^{-1}A \supset A$ , следовательно,  $(ye)(ye)^{-1}A \supset yeA$ , т.е.  $A \supset yeA$ . Таким образом,  $yA = A$ . Наконец,  $a \rightarrow ya$  такое же отображение, что и  $a \rightarrow yea$ , это отображение является гомеоморфизмом, так как оно отображает  $A$  на  $A$  и обратное ему отображение  $a \rightarrow (ye)^{-1}a$  непрерывно.

**Приложения леммы.** 1) Предположим, что  $S$  — компактная полугруппа,  $T = S \times S$  — обычное декартово произведение и умножение в  $T$  определяется соотношением

$$(x, y)(x', y') = (xx', yy').$$

(Заметим, что умножение, определенное в полугруппе  $T$ , не совпадает с законом умножения в умножении полугрупп, введенном в определении 3 п.2.4.2, т.е.  $T$  не является произведением (умножением) полугрупп  $S$ . Полугруппа  $T$  нужна для того, чтобы определить некоторое действие.)

Очевидно, что  $T$  — компактная полугруппа и с учетом умножения, определенного в  $T$ , она действует на  $S$ , а именно

$$[(x, y), s] \rightarrow xsy.$$

Если  $A$  и  $S$  компактны,  $A \subset S$ , и если  $xAy \supset A$  для некоторых элементов  $x, y \in S$ , то  $x'Ay' = A$  для всех элементов  $(x', y') \in \Gamma(x, y)$  [здесь  $\Gamma(x, y)$  — это  $\Gamma((x, y))$  для элемента  $(x, y)$  полугруппы  $T$ ], в частности,  $S$  содержит левую и правую единицы для подмножества  $A$ .

**Доказательство.** Полугруппа  $T$  компактна, так как компактна полугруппа  $S$ . Тогда по приведенной выше лемме  $(x', y') A = A$  для каждого элемента  $(x', y') \in \Gamma(x, y)$ , т.е.  $x'Ay' = A$ . Если  $(e, f)$  — идемпотент в  $\Gamma(x, y)$ , то  $eAf = A$ , откуда получаем  $eA = A = Af$ , так что  $e$  и  $f$  — левая и правая единицы соответственно для множества  $A$ . [Здесь используется тот факт, что  $e$  и  $f$  — идемпотенты, так как, вообще говоря, из равенства  $xAy = A$  не следует, что  $xA = A$  или  $Ay = A$ . Кроме того,  $\Gamma(x, y)$  — всего лишь подмножество в  $\Gamma(x) \times \Gamma(y)$ , поэтому нельзя утверждать, что  $x'Ay' = A$  для каждых  $x' \in \Gamma(x)$  и  $y' \in \Gamma(y)$ .]

2) Компактная полугруппа  $S$  является *устойчивой*, т.е. из условий  $baS \supset aS$  для любых  $a, b \in S$  следует, что  $baS = aS$ , и из условий  $Sab \supset Sa$  для любых  $a, b \in S$  следует, что  $Sab = Sa$ .

3) Если  $S$  — компактная полугруппа и  $xS = S$  для некоторого элемента  $x \in S$ , то  $S$  содержит левую единицу — идемпотент в  $\Gamma(x)$ .

4) Если  $S$  — компактная полугруппа,  $x \in A = A^* \subset S$  и  $xA \supset A$ , то  $\Gamma(x)$  есть группа, которая содержится в  $A$ . Наиболее важная сторона этого результата заключается в том, что  $A$  не обязательно будет подполугруппой.

**Доказательство.** Если  $x \in A$ , то  $x^2 \in xA$  и  $xA = A$  по приведенной выше лемме. Следовательно,  $x^2 \in A$ . По индукции доказывается, что  $x^n \in A$  для всех  $n \geq 1$ . По условию множество  $A$  замкнуто, следовательно,  $\Gamma(x) \subset A$ . Тогда по приведенной выше лемме  $e\Gamma(x) = \Gamma(x)$ , где  $e$  — идемпотент в  $\Gamma(x)$ . Но имеется включение  $e\Gamma(x) \subset N(x)$ , поскольку  $N(x)$  — идеал в  $\Gamma(x)$ . Из этого следует, что  $\Gamma(x) = N(x)$ , следовательно,  $\Gamma(x)$  — группа.

Следующая лемма дает удобное техническое средство для изучения компактных полугрупп с разделяющими точками, а также компактных полугрупповых действий на континуумы с разделяющими точками.

**Лемма.** Предположим, что  $S$  — компактная полугруппа и  $S$  действует на континуальное множество  $X$ . Если  $H$  — подмножество в  $S$  с непустой границей  $F(H)$  и  $H^*$  содержит такую точку  $x$ , что  $Sx \subset H^*$ , то для некоторой точки  $p \in F(H)$  имеется включение  $Sp \subset H^*$ .

На интуитивном уровне строгости формулировка этой леммы означает, что если некоторая точка из множества  $H^*$  переводится всей полугруппой  $S$  внутрь  $H^*$ , но эта точка лежит в  $H^*$  достаточно глубоко, то ее можно вытянуть из внутренности  $H^*$ , т.е. имеется граничная

точка множества  $H$ , переводимая всей полугруппой  $S$  также в  $H^*$ . Эта лемма полезна, когда  $H$  имеет только одну граничную точку, она существенно применяется в доказательстве свойств (1) и (2) в применении данной леммы.

**Применение леммы.** 1) Пусть имеется действие  $S \times X \rightarrow X$ , где  $S$  и  $X$  — компактные множества. Пусть  $J$  — максимальное множество относительно свойств  $\square \neq J \subset X$  и  $SJ \subset J$ . Если  $C \subset X \setminus J$  и  $C$  есть пересечения континуальных множеств с одноточечной границей, то  $C$  содержит самое большое одну точку.

Это предложение — одно из вспомогательных средств, где рассматриваются действия  $S \times X \rightarrow X$ , для которых  $X$  является континуальным множеством с открытой плотной полупрямой, т.е.  $X$  содержит гомеоморфный образ интервала  $(0, 1]$ , который плотен в  $X$  (т.е. его замыкание равно  $X$ ), но который открыт в  $X$ . Каждая точка в образе  $(0, 1)$  является разделяющей. Единичная спираль из примера 2 (1) представляет собой континуальное множество с открытой плотной полупрямой.

2) Пусть  $S$  — компактная полугруппа, которая действует на отрезок  $I = [0, 1]$  так, что  $S0 = 0$ . Тогда множество нулей этого действия  $\{x \in I / Sx = x\}$  имеет вид  $[0, c]$  для некоторого  $c \in [0, 1]$ .

**Доказательство.** Пусть  $Z = \{x \in I / Sx = x\}$  и  $z$  есть верхняя грань множества  $Z$ ,  $z$  существует, так как  $Z \neq \square$  ( $0 \in Z$ ) и так как  $Z$  ограничено, например, числом 1. Поскольку  $S$  — компактная полугруппа, можно доказать, что множество  $Z$  замкнуто (см. доказательство леммы\*), следовательно,  $z \in Z$ . Итак,  $Z \subset [0, z]$ , и  $0, z \in Z$ . Предположим, что  $x \in (0, z)$ , тогда  $x$  — граничная точка в  $I$  как множества  $[0, x]$ , так и множества  $[x, 1]$ . Положим  $H = [0, x]$  и применим лемму\*. Мы получим, что  $Sx \subset [0, x]$ , так как  $S0=0$ . Пусть теперь  $H=[x, 1]$ , тогда снова из предыдущей леммы следует, что  $Sx \subset [x, 1]$ , так как  $z \in [x, 1]$  и  $Sz = z$ . Следовательно,  $Sx = x$  и поэтому  $x \in Z$ . Отсюда следует что  $(0, z) \subset Z$ . Таким образом, получаем  $[0, z] = Z$ .

Информация, которая содержится в следующей теореме, применяется очень часто. На языке алгебраических полугрупп она утверждает, что минимальный идеал компактной полугруппы вполне простой. Доказательство этого факта алгебраическое, компактность необходима для того, чтобы установить существование минимального левого, правого и двустороннего идеалов. Дальше топологические свойства не играют никакой роли и то, что идеал вполне простой, показывается так же, как в алгебраической полугруппе.

**Теорема\*.** Если  $S$  — компактная полугруппа, то  $S$  имеет компактный минимальный идеал  $K(S)$ , и если  $\hat{L}$  и  $\hat{R}$  — семейства всех минимальных левых и минимальных правых идеалов полугруппы  $S$

соответственно, то  $K(S) = \bigcup \hat{L} = \bigcup \hat{R}$ . Кроме того, если  $L \in \hat{L}$  и  $R \in \hat{R}$ , то  $LR = K(S)$  и  $L \cap R = H(e)$  для некоторого идемпотента  $e$ . Следовательно,  $K(S)$  является объединением непересекающихся групп которые непересекаются. Если  $x \in K(S)$ , то минимальный левый идеал, который содержит  $x$ , имеет вид  $Sx$  и минимальный правый идеал, который содержит  $x$ , имеет вид  $xS$ .

**Доказательство.** Сама полугруппа  $S$  есть компактный идеал в  $S$ , поэтому по лемме Цорна существует непустая максимальная башня  $\mathcal{T}$  компактных идеалов. Согласно пункту 2 вышеприведенных замечаний  $K = \bigcap \mathcal{T}$  — компактное непустое множество, поэтому  $K$  будет минимальным компактным идеалом полугруппы  $S$ . В то же время  $K$  — минимальный идеал, так как для любого элемента  $x \in K$  множество  $SxS$  компактно, оно является идеалом и подмножеством любого идеала, содержащего  $x$ . Аналогично  $S$  содержит минимальный левый и правый идеалы.  $K$  — единственное подмножество в  $S$  с перечисленными ранее свойствами. Действительно, если  $K'$  — другой минимальный идеал, то  $\square \neq KK' \subset K \cap K'$ . Следовательно,  $K \cap K'$  является идеалом, но тогда  $K \cap K' = K = K'$ .  $\bigcup \hat{L} \subset K$ , так как если  $L \in \hat{L}$ , то  $L$  будет левым идеалом. В то же время  $K$  — идеал и мы получаем, что  $K \hat{L} \subset L \cap K$  и  $KL$  — левый идеал. Следовательно,  $KL = L \subset K$ . Очевидно, объединение  $\bigcup \hat{L}$  есть левый идеал, поэтому если мы докажем, что он является еще и правым идеалом, то получим, что  $\bigcup \hat{L} = K$ . Для того чтобы сделать это, отметим, что  $Lx \in \hat{L}$  для каждого  $L \in \hat{L}$  и  $x \in S$ . (В самом деле  $Lx$  — левый идеал и если бы  $M$  был левым идеалом, содержащимся в  $Lx$ , то множество  $\{y \in L \mid ux \in M\}$  было бы левым идеалом, содержащимся в  $L$  и, следовательно, равным  $L$ , но тогда  $M$  равен  $Lx$ .) Поэтому

$$(\bigcup \hat{L}) = \bigcup \{LS/L \in \hat{L}\} = \bigcup \{Lx/L \in \hat{L}, x \in S\} \subset \bigcup \hat{L},$$

так что  $\bigcup \hat{L}$  есть правый идеал и  $K = \bigcup \hat{L}$ . Дуальные рассуждения доказывают, что  $K = \bigcup \hat{R}$ .

Пусть  $L \in \hat{L}$  и  $R \in \hat{R}$ . Очевидно, что множество  $LR$  будет идеалом и  $LR \subset K$ . Следовательно,  $LR = K$ . Далее заметим, что если  $x \in L$ , то  $Lx \subset L^2 \subset L$ , и из  $Lx \in L$  следует, что  $Lx = L$ . Дуальное утверждение также верно, т.е. если  $x \in R$ , то  $x = R$ . Тот факт, что множество  $R \cap L$  будет группой, доказывается следующим образом. Очевидно,  $\square \neq RL \subset R \cap L$  и  $RL$  — полугруппа. Если  $x \in RL$ , то  $Lx = L$  и  $x = R$

согласно доказанному ранее. Следовательно,  $xRL = RLx = RL$ , так что  $RL$  — группа. Наконец,  $R \cap L = (R \cap L)e \subset RL$ , где  $e$  — идемпотент в  $RL$ . Следовательно,  $R \cap L = RL$  и поэтому  $R \cap L$  есть группа.

Пусть  $x \in K$ , выберем  $L \in \hat{L}$  так, что  $x \in L$ . Очевидно,  $Sx$  — левый идеал, а также  $Sx \subset SL \subset L$ . Следовательно,  $Sx = L$ . Дуальные рассуждения доказывают, что  $x \in xS \in R$ .

### 2.4.5. Индуцированные отношения Грина

Обычные отношения Грина определяются для топологической полугруппы точно так же, как для алгебраической полугруппы. Они являются отношениями эквивалентности и будут замкнуты, если полугруппа  $S$  компактна. В случае топологических полугрупп эти отношения, как и для алгебраических полугрупп, служат одним из фундаментальных средств изучения строения полугруппы.

Пусть  $S$  — полугруппа и  $T \subset S$  обозначает подмножество. Отметим, что, вообще говоря,  $T$  не является подполугруппой полугруппы  $S$ .

**Определение.** Для элементов  $x, y \in S$  определим  $(x, y) \in \mathcal{L}_T$  тогда и только тогда, когда  $T^l x = T^l y$ ;  $(x, y) \in \mathcal{R}_T$  тогда и только тогда, когда  $x T^r = y T^r$ ;  $(x, y) \in \mathcal{F}_T$  тогда и только тогда, когда  $T^l x T^r = T^l y T^r$ ;  $\mathcal{H}_T = \mathcal{L}_T \cap \mathcal{R}_T$  и  $\mathcal{D}_T = \mathcal{L}_T \circ \mathcal{R}_T$ . Определенные здесь отношения  $\mathcal{L}_T, \mathcal{R}_T, \mathcal{H}_T, \mathcal{F}_T$  и  $\mathcal{D}_T$  называются *индуцированными отношениями Грина* полугруппы  $S$ . Если  $T=S$ , мы получим обычные отношения Грина. Нижний индекс писать не обязательно, мы используем его здесь, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются индуцированные отношения. Для элемента  $x \in S$  символы  $R_x, L_x, D_x$  и  $H_x$  обозначают  $\mathcal{R}_T$  класс,  $\mathcal{L}_T$  класс,  $\mathcal{D}_T$  класс и  $\mathcal{H}_T$  класс соответственно, что содержит  $x$ .

Согласно следующей лемме классы индуцированного отношения обеспечивают разложение классов обычного отношения Грина. Это одна из причин, по которой можно считать полезным введение индуцированных отношений, но, кроме того, они являются достаточно мощным техническим инструментом. Многие теоремы об обычных отношениях Грина обобщаются на индуцированные отношения, если  $T$  выбирается таким, что  $T = T^*$ , а также в случае, когда  $T^2 \subset T$ .

**Лемма.** Для любого подмножества  $T \subset S$  каждый класс эквивалентности обычного отношения Грина  $\mathcal{L}_S$  является объединением  $\mathcal{L}_T$  классов, т.е.  $\mathcal{L}_T \subset \mathcal{L}_S$ . Аналогично

$$\mathcal{R}_T \subset \mathcal{R}_S, \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S, \mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}_S, \mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_S.$$

**Теорема.** Если  $x, y \in S$  и  $xy \in R_x \cap L_y$ , то  $R_y \cap L_x = H_e$  для некоторого  $e \in E$  и  $H_e$  является подгруппой в  $S$ . К тому же  $H_x H_y = H_{xy} = R_x \cap L_y$ .

Если еще  $T^2 \subset T$  и  $xT \cup Ty \subset T$ , то имеет место диаграмма egg-box Клиффорда, которая изображена на рис. 22.

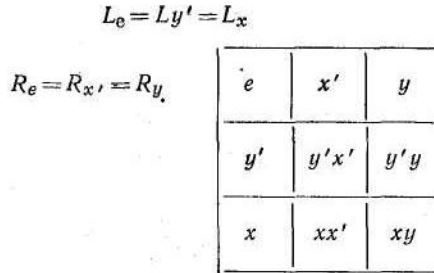


Рис. 22.

Ее строки обозначают  $\mathcal{R}_T$  классы, столбцы обозначают  $\mathcal{L}_T$  классы и все они принадлежат  $\mathcal{D}_T$  классу. Если  $e \in E$ ,  $x \in L_e$  и  $y \in R_e$ , то  $xy \in R_x \cap L_y$ . Здесь никакие допущения о множестве  $T$  не делаются.

**Теорема.** Пусть  $S$  — компактная полугруппа и  $T$  — замкнутое подмножество. Пространство  $Z = S \times S \times S$  с законом умножения, определенным из равенства  $(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$ , является полугруппой, отображение  $f : Z \rightarrow S$ , где  $f(x, y, z) = xyz$ , есть гомоморфизм. Если

$$e \in E(S) \text{ и } Z_e = (L_e \cap E) \times H_e \times (R_e \cap E),$$

то  $f|Z_e$  будет гомеоморфизмом в  $S$ . Следовательно,  $f|Z_e$  будет изоморфизмом в  $S$ .

Положим  $H = \bigcup H_f \{f \in E(S)\}$  и  $M_e = \{x \in S / ex, xe \in H\}$ . Определим  $u : H \rightarrow E$ , полагая  $u(x)$  единицей для  $H_f$ , где  $H_f$  есть  $\mathcal{H}_T$  класс, который содержит  $x$ . Отображение  $u$  непрерывно, следовательно, отображение  $g : M_e \rightarrow Z$ , задаваемое соотношением  $g(x) = [u(xe), exe, \text{ и } (ex)]$ , непрерывно и отображение  $gf|Z_e$  является обратным для  $f$ .

Если  $Z_e$  - подполугруппа (а это так, когда  $D_e \subset H$ ), то отображение  $f|Z_e$  — изоморфизм.

**Следствие.** Если  $S$  - компактная полугруппа и  $e \in E \cap K$ , то  $K$  изоморфен  $(Se \cap E) \times eSe \times (eS \cap E)$  с умножением, определяемым соотношениям  $(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$ , и  $K$  будет ретрактом  $S$ , как и  $K \cap E$ ,  $eS \cap E$ , и  $eSe$ , и  $Se \cap E$ .



**Доказательство.** По теореме\*  $eS \cup Se \subset K$ ,  $K \subset H$ , следовательно,  $M_e = S$ . К тому же по теореме\*, так как  $e \in K$ , имеем  $L_e = Se$  и  $R_e = eS$ , поэтому согласно определению  $\mathcal{H}$   $H_e = eS \cap Se$ . Так как  $e = e^2$ ,  $eS \cap Se = eSe$ , и тогда в силу предыдущей теоремы получаем, что  $Z_e = (Se \cap E) \times eSe \times (eS \cap E)$ .  $Z_e$  имеет требуемое умножение и  $f|_{Z_e}$  является изоморфизмом на  $(Se \cap E) eSe (eS \cap E)$ , последнее множество равно  $K$  согласно следующим рассуждениям. Так как  $eS = eSeS = eSe^2S$ ,  $e(eS \cap E) = eS \cap E$  и  $(Se \cap E)e = Se \cap E$ , мы видим, что  $(Se \cap E) eSe (eS \cap E) = (Se \cap E) (Se) (eS) (eS \cap E) = (L \cap E) LR (R \cap E)$ , где  $L \in \hat{L}$ ,  $R \in \hat{R}$ . По теореме\*  $(L \cap E) L = L$ ,  $R (R \cap E) = R$  и  $LR = K$ .

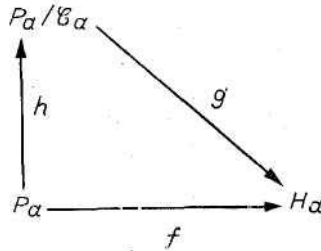
Отображение  $fg : S \rightarrow K$  есть ретракция  $S$  на  $K$  и  $ufg : S \rightarrow E \cap K$  есть ретракция  $S$  на  $E \cap K$ .

Рассматривая композиции  $g$  с проекциями на соответствующие сомножители  $Z_e$ , получаем ретракции  $S$  на  $Se \cap E$ ,  $eSe$  и  $eS \cap E$ .

**Теорема.** Пусть  $S$  — компактная полугруппа,  $T = T^*$  и для элемента  $a \in S$  положим

$$P_a = \{x \in S \mid xH_a = H_a\} \text{ и } \mathcal{C}_a = \{(x, y) \in P_a \times P_a \mid xa = ya\}.$$

Если мощность множества  $H_a$  больше 1, то  $P_a$  будет замкнутой подполугруппой,  $\mathcal{C}_a$  — замкнутое отношение конгруэнтности на  $P_a$  и существует следующая коммутативная диаграмма:



где  $h$  — каноническая проекция,  $f(x) = xa$ ,  $g$  — гомеоморфизм и  $P_a/\mathcal{C}_a$  — компактная группа. Если  $a^2 = a$ , то  $f$  есть гомоморфизм и  $g$  будет изоморфизмом. Независимо от того, верно или нет равенство  $a^2 = a$ , существует единственная группа  $G$ , гомеоморфная  $H_b$  для каждого  $b \in D_a$  и изоморфная  $H_b$ , если  $H_b$  содержит идемпотент.

Приведем еще одну структурную теорему, которая представляет определенный интерес.

Для множества  $T \subset S$   $J$  называется *максимальным собственным  $T$  идеалом*, если  $\square \neq J \neq S$ ,

$$T^l J T^l \subset J$$

и  $J$  есть максимальным по включению подмножеством полугруппы  $S$ , обладающим этими свойствами. Следующий результат обобщает на  $T$  идеалы (в случае, когда  $T^2 \subset T$ ) теорему о строении дополнения максимального собственного идеала.

**Теорема.** Пусть  $S$  — компактная полугруппа и  $T$  — ее замкнутая подполугруппа. Пусть  $J$  — максимальный собственный  $T$  идеал, положим  $A = S \setminus J$ . Допустим, что мощность множества  $A$  больше 1.

1) Если  $TST \subset J$ , то или  $S = J \cup T_a$  и  $A = L_a$  для каждого элемента  $a \in A$ , или  $S = J \cup aT$  и  $A = R_a$  для каждого элемента  $a \in A$ .

2) Если  $TST \not\subset J$ , то  $S = J \cup TaT$ ,  $J_a = A$ ,  $L_a = Ta \cap A$  и  $R_a = aT \cup A$  для каждого  $a \in A$ .

3) Если  $T \cap A \neq \emptyset$ , то или  $T \cap J$  — максимальный собственный идеал полугруппы  $T$ , или  $T$  — простая полугруппа.

### **3. Модели физических структур и их представление блочными группами и графами**

Физическая структура является топологической структурой, которой поставлены в соответствие некоторые физические признаки и свойства. Следовательно, физическая структура это физическая интерпретация топологической структуры. Ее можно рассматривать как более или менее точное приближение физической структуры. Сущность физических структур может быть весьма разнообразной. Это могут быть электрические цепи, тепловые, гидравлические, пневматические, химические, биологические и другие структуры. Независимо от физической сущности физические структуры можно разделить на два основных типа: структуры передачи сигнала (действия) и сетевые структуры.

Эти два типа физических структур и будут рассматриваться в дальнейшем.

#### **3.1. Структуры, обеспечивающие передачу сигналов (директив, команд, действий)**

*Определение 1.* Структурой, обеспечивающей передачу сигнала (директивы, действия) называется такая физическая структура, для

которой топологическая структура правильно ориентирована и удовлетворяет следующим условиям:

1) вершинам топологической структуры ставятся в соответствие физические величины (сигналы, директивы, команды, действия)  $x_v \in X$ , т. е. определяется функция

$$f: M \rightarrow X; \quad (1)$$

2) для  $x_v$  выполняются соотношения

$$x_{i+1} = \sum_{v=k}^1 T_v x_v, \quad (2)$$

где  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_i$  — команды, соответствующие начальным вершинам всех элементов структуры с общим концом, соответствующим команде  $x_{i+1}$  (рис. 1).

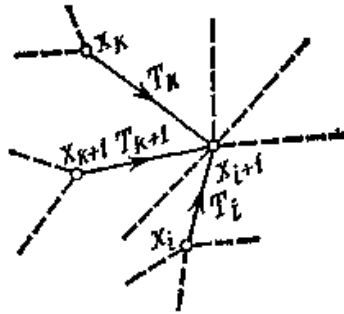


Рис. 1. Узел структуры передачи команды.

Операторы  $T_v$ , преобразующие сигналы  $x_k, x_{k+1}, \dots, x_i$  в сигнал  $x_{i+1}$ , называются передаточными функциями элементов структуры.

Принципиальное различие между сетевыми структурами и структурами передачи сигнала состоит в том, что в случае структур передачи сигнала сигналы ставятся в соответствие только вершинам структуры. Роль самих элементов структуры передачи сигнала, которая всегда правильно ориентирована, сводится лишь к преобразованию сигналов в соответствии с их операторами — передаточными функциями элементов структуры  $T_v$ .

Структуры передачи сигнала — широко распространенные типы структур. Например, любая электрическая линия, линия телепередачи, радиолития — это структуры передачи сигнала. Аналогично каждая структур автоматического регулирования, в большинстве случаев рассматриваемая как блок-схема, относится к структурам передачи сигнала. С точки зрения теории организации передачи сигнала каждый

блок такой структур представляет собой просто единичную ориентированную ветвь структуры передачи (рис. 2).

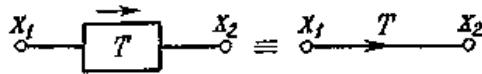


Рис. 2. Элемент структуры передачи сигнала

Такое упрощенное геометрическое представление структур в значительной мере облегчает исследование сложных структур, таких, как биологические структуры, технические структуры автоматического управления и др.

В зависимости от свойств оператора  $T$  различают большое число структур передачи сигнала. В частности, с помощью таких структур хорошо представляются логические схемы. Например, структура, изображенная на рис. 3, может представлять как элемент логического суммирования, так и элемент логического умножения.

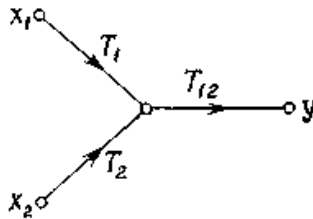


Рис. 3. Реализация логической суммы и произведения.

Очевидно, в данном случае рассматриваются дискретные сигналы с величинами 0 или 1.

Для реализации логической суммы принимаем следующее:

- 1) операторы  $T_1$  и  $T_2$  тождественны, т. е.  $T_1 = T_2 = I$ ;
- 2) оператор  $T_{12}$  определяется по формуле

$$T_{12}(x_1 + x_2) = \begin{cases} 1 & \text{для } x_1 = x_2 = 1, \\ 0 & \text{для } x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0 \end{cases}$$

Аналогично для реализации логического произведения принимаем, что  $T_1 = T_2 = I$ , а также

$$T_{12}(x_1 \cdot x_2) = \begin{cases} 1 & \text{для } x_1 = x_2 = 1, \\ 0 & \text{для } x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 0 \end{cases}$$

### 3.2. Сетевые структуры

*Определение 2.* Сетевой структурой назовем конкретную структуру, соответствующую топологической структуре, вершинам и ребрам которой поставлены в соответствие некоторые физические величины, а именно: определены функции

$$\begin{aligned} f_1: M \rightarrow X, \\ f_2: S \rightarrow Y \end{aligned} \quad (3)$$

где  $X$  и  $Y$  — множества физических величин, т. е. множества, имеющие определенные размерности в конкретной системе единиц.

Элементы множеств  $X$  и  $Y$  в основном представляют собой функции времени; условимся называть их сигналами. Элементы  $x \in X$ , соответствующие вершинам структуры, будем называть сигналами вершин, а элементы  $y \in Y$ , соответствующие элементам структуры, — сигналами элементов.

Элементы сетевой структуры в соответствии с их свойствами можно разделить на несколько категорий: унисторные элементы (унисторы), униполярные элементы, гиристорные элементы (гиристоры), а также биполярные элементы.

*Унисторным элементом* или унистором называется ориентированный физический элемент, сигнал которого представляет собой результат однозначного преобразования, произведенного над сигналом входной вершины.

Обозначение унистора приведено на рис. 4.

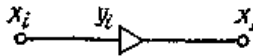


Рис. 4. Обозначение унистора

Согласно определению унистора и принятому обозначению, можно написать

$$y_i = T_i x_i \quad (4)$$

где  $T_i$  — оператор, определяющий свойства унистора.

Следует заметить, что сигнал унисторного элемента совершенно не зависит от сигнала выходной вершины.

*Униполярным элементом* называется ориентированный физический элемент, сигнал которого определяется формулой

$$y_i = \begin{cases} T_i(x_i - x_j), & x_i \leq x_j, \\ 0, & x_j > x_i. \end{cases} \quad (5)$$

Обозначение этого элемента  $y_i$  и значения величин  $x_i$  и  $x_j$  приведены на рис. 5.

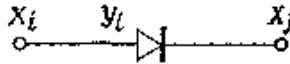


Рис. 5. Обозначение униполярного элемента.

Из определения (5) следует, что этот элемент аналогичен вентилю. Следует отметить, что сигнал этого элемента зависит как от сигнала его входа, так и от сигнала его выхода.

*Гиристорным элементом* или тиристором называется физический элемент, сигнал которого имеет вид

$$y_i = T_i (x_i + x_j), \quad (5)$$

*Биполярным (обратимым) элементом* называется такой элемент, сигнал которого равен

$$y_i = T_i (x_j - x_i). \quad (6)$$

Смысл величин  $y_i$ ,  $x_i$ ,  $x_j$  здесь тот же, что и раньше. Обозначения тиристора и биполярного элемента приведены на рис. 6.

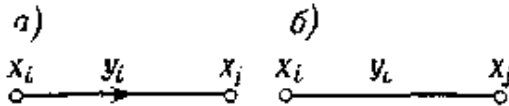


Рис. 6. Гиристор (а) и биполярный элемент (б).

Структуры, содержащие элементы одного типа, например только унисторы, гиристоры и т. д., соответственно называются унисторными, гиристорными и другими структурами. Если структура содержит различные типы элементов, то такая структура называется смешанной. Оператор  $T_i$ , определяющий свойства данного элемента сетевой структуры, называется определителем элемента.

Следует подчеркнуть, что гиристор и биполярный (обратимый) элементы представляют собой производные элементы от унистора, так как эти элементы можно рассматривать как соответствующие единения унисторов (фиг. 7).

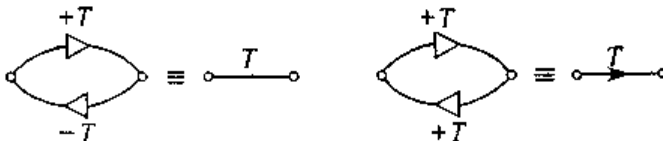


Рис. 7. Соединения унисторов.

Таким образом, гиристорные и обратимые структуры представляют собой частные случаи унисторных структур. Сетевые структуры можно классифицировать, как показано на рис. 8.

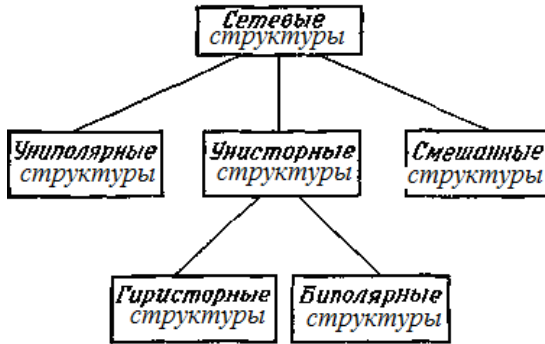


Рис. 8. Классификация сетевых структур.

Если определитель данного физического элемента удовлетворяет условию

$$T[\alpha x_1 + \beta x_2] = \alpha T x_1 + \beta T x_2 \quad (8)$$

для двух произвольных элементов множества  $X$  и для произвольных чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , то такой элемент называется линейным.

### 3.3. Полюсные графы и обобщение понятия структуры

#### 3.3.1. Структуры с сосредоточенными компонентами.

Графы широко используются как структурные модели различного типа систем, допускающих идеализированное представление в виде схем с *сосредоточенными компонентами*. Соединение компонентов между собой осуществляется путем объединения их полюсов, образующих узлы схемы. В зависимости от числа полюсов различают двухполюсные и многополюсные компоненты, которые называют соответственно *двухполюсниками* и *многополюсниками*. Так, схема рис. 9 представляет собой соединение двух трехполюсников ( $A$  и  $B$ ), четырехполюсника ( $C$ ) и трех двухполюсников ( $D$ ,  $E$ ,  $F$ ).

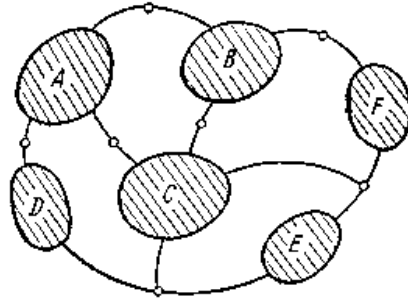


Рис 9. Схема с многополюсными компонентами.

Наиболее типичными представителями структур систем, допускающих представление схемами с сосредоточенными компонентами, могут служить электрические и электронные цепи. Резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности являются двухполюсниками, а трансформаторы, триоды и транзисторы — многополюсниками. Аналогичные компоненты можно выделить в системах различной физической природы: механических, акустических, гидравлических, тепловых, химических, биологических, экономических, социальных и т. д.

Для математического описания состава, структуры и организации системы (точнее, соответствующей ей схемы с сосредоточенными компонентами) обычно используются два типа соотношений:

- 1) *полюсные уравнения*, характеризующие индивидуальные свойства каждой компоненты безотносительно к возможным соединениям с другими компонентами;
- 2) *уравнения связей*, отражающие характер соединения различных компонент в схеме безотносительно к их индивидуальным свойствам. Компонентным уравнением двухполюсника служит функциональная зависимость между двумя физическими величинами, характеризующими его состояние (например, между током и напряжением электрического двухполюсника, силой и скоростью механического двухполюсника и т. п.). Функция, описывающая *нелинейный двухполюсник*, может задаваться аналитическим выражением, графиком или таблицей. Линейный двухполюсник характеризуется *параметром*, который является либо постоянной величиной (*стационарный двухполюсник*), либо функцией времени (*нестационарный двухполюсник*).

Многополюсник описывается системой уравнений, связывающей физические величины на его полюсах. Часто многополюсные компоненты представляются *схемной моделью*, состоящей из двухполюсных компонентов, каждый из которых описывается



ответствующей функциональной зависимостью. Но в отличие от обычных двухполюсников, такие зависимости могут содержать величины, связанные с другими компонентами схемной модели. **В конечном счете, структура с сосредоточенными компонентами всегда может быть представлена схемой, состоящей из двухполюсников.**

В роли уравнений связи обычно выступают фундаментальные физические законы, выражающие условия равновесия и непрерывности (законы Кирхгофа для электрических цепей, принцип Даламбера для механических систем и т. п.). В каждом конкретном случае эти уравнения получают из рассмотрения структуры схемы, причем они должны содержать те же величины, что и компонентные уравнения, которыми характеризуются состояния двухполюсников. Тем самым обеспечивается совместимость исходных уравнений, преобразование которых позволяет получить математическую модель структуры в требуемой форме.

### **3.3.2. Полусные графы**

Структурная схема с двухполюсными компонентами, независимо от ее конкретной физической природы, может быть представлена *полусным графом*. Между структурной схемой, состоящей из двухполюсников, и ее графом имеет место взаимно-однозначное соответствие: узлам структурной схемы соответствуют вершины, а двухполюсникам — ребра графа. Ориентация ребра связывается с направлением отсчета физических величин, характеризующих состояние двухполюсника.

**Полусный граф является универсальной топологической моделью структур с сосредоточенными компонентами.** Путь к такой модели лежит через идеализацию структуры (схема) и ее абстрагирование (полусный граф). Основная ценность топологических моделей состоит в том, что их свойства и методы использования можно изучать и разрабатывать независимо от физической природы систем. Специфика конкретной области проявляется на начальном этапе при построении графа и на заключительном этапе истолкования полученных результатов.

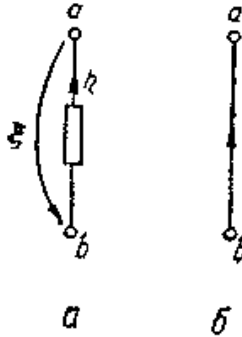


Рис. 10. Двухполюсник (а) и его полюсный граф (б).

Для любого двухполюсника (рис. 10, а) полюсным графом служит дуга с двумя концевыми вершинами (рис. 10, б). В общем случае уравнение двухполюсника  $\varphi(\eta, \xi) = 0$  содержит две переменные  $\eta$  и  $\xi$ . Одна из них, например  $\eta$ , характеризует состояние двухполюсника относительно поперечного сечения и противоположно направлена к каждому из его полюсов. Такие переменные называют *поперечными* (например, электрический ток или магнитный поток, сила или момент, расход жидкости или газа, тепловой поток и т. п.). Другая величина  $\xi$  характеризует состояние двухполюсника относительно его полюсов (например, электрическое напряжение, линейная или угловая скорость, перемещение, давление, разность температур и т. п.). Такие переменные называют *продольными* и их направления связывают с направлением пути от одного полюса к другому. Часто поперечные переменные называют *последовательными*, а продольные — *параллельными* переменными. Если уравнение двухполюсника представимо в явном виде относительно поперечной переменной  $\eta = f_\eta(\xi)$ , то соответствующая ему дуга называется *y-дугой*, причем величину  $\eta$  можно рассматривать как реакцию на воздействие  $\xi$ . Аналогично, если уравнение двухполюсника представимо в виде  $\xi = f_\xi(\eta)$ , то соответствующая ему дуга насыщается *z-дугой*, причем величину  $\xi$  можно рассматривать как реакцию на воздействие  $\eta$ . Двухполюсники, допускающие описание относительно обеих переменных, называются *взаимоопределенными*, а соответствующие им дуги — *w-дугами*.

Поскольку из двух переменных  $\eta$  и  $\xi$  одна характеризует воздействие, а другая реакцию, то их положительные направления считаются взаимно противоположными. Обычно направления дуг отождествляют с положительными направлениями отсчетов поперечных переменных, а положительные направления отсчета продольных переменных принимают обратными ориентации дуг.

Полусный граф структуры строится таким образом, чтобы обеспечивались наиболее простые отношения между его структурой и уравнениями связей. Обычно уравнения связей формируются для поперечных и продольных переменных в следующем виде:

1) алгебраическая сумма поперечных переменных для любой вершины графа равна нулю:

$$\sum \eta(t) = 0$$

2) алгебраическая сумма продольных переменных для любого контура графа равна нулю:

$$\sum \xi(t) = 0$$

При алгебраическом суммировании переменных они считаются положительными при совпадении их направлений с выбранным направлением относительно вершины или контура и отрицательными, если направления переменных противоположны с выбранными направлениями (рис. 11).

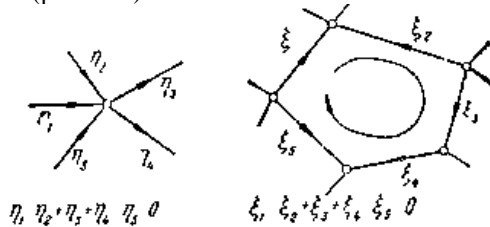


Рис. 11. Уравнения связей для вершины и контура.

Здесь рассматриваются методы построения полусных графов различных физических систем с двухполюсными компонентами. В дальнейшем эти методы обобщаются на системы с многополюсниками. Для простоты компоненты предполагаются линейными и стационарными.

### 3.3.3. Примеры структур, описываемые полусными графами

**Электрические цепи.** Существуют три типа пассивных электрических двухполюсников: сопротивление, емкость и индуктивность. Они рассеивают или накапливают энергию и поэтому называются пассивными компонентами.

*Сопротивление* (рис. 12, а) — это такой компонент, в котором происходит необратимое преобразование электрической энергии в тепло.

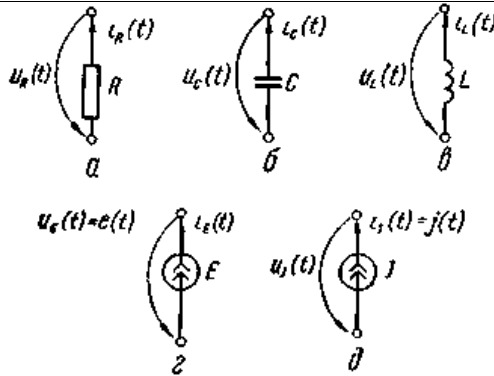


Рис. 12. Идеальные электрические двухполюсники:

*a* — резистор; *б* — конденсатор; *в* — катушка индуктивности ;  
*г* — источник напряжения; *д* — источник тока.

Зависимость между током (поперечная переменная) и напряжением (продольная переменная) может быть представлена в одной из двух форм (или в любой из них, если двухполюсник взаимопределенный):

$$i_R(t) = Gu_R(t); u_R(t) = Ri_R(t),$$

где параметры  $G$  и  $R$  называются соответственно *проводимостью* и *сопротивлением* ( $G = R^{-1}$  и  $R = G^{-1}$ ).

*Емкость* (рис. 12, б) — компонента, накапливающая электрическую энергию. Заряд  $q(t)$  связан с напряжением  $u_C(t)$  на линейной емкости соотношением  $q(t) = Cu_C(t)$ , где  $C$  — параметр, называемый *емкостью*. Ток  $i_C(t)$ , протекающий через емкость, выражается как производная заряда по времени, следовательно:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt}; \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt = S \int i_C(t) dt,$$

где  $S = C^{-1}$  называют *инверсной емкостью*.

*Индуктивность*: (рис. 12, в) — компонента, накапливающая магнитную энергию. Магнитный поток  $\psi(t)$  линейной индуктивности пропорционален протекающему в ней току  $i_L(t)$ , т. е.  $\psi(t) = Li_L(t)$ , где  $L$  — параметр, называемый *индуктивностью*. Напряжение  $u_L(t)$  на индуктивности равно скорости изменения магнитного потока во времени, следовательно:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt};$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt = \Gamma \int u_L(t) dt,$$

где  $\Gamma = L^{-1}$  называют *инверсной индуктивностью*.

Источники энергии в электрических цепях представляются идеальными двухполюсниками двух типов. *Источник напряжения*— это двухполюсник (рис. 12, *з*), напряжение в котором определяется некоторой функцией времени  $e(t)$  и не зависит от протекающего по нему тока, т. е.  $u_E(t) = e(t)$ . *Источник тока* — это двухполюсник (рис. 12, *д*), ток в котором также определяется некоторой функцией времени  $j(t)$  и не зависит от приложенного напряжения, т. е.  $i_J(t) = j(t)$

Для построения графа структурной электрической схемы достаточно ее узлы рассматривать как вершины, а каждый двухполюсник заменить ребром, сохраняя отношение инцидентности. Например, граф структурной электрической схемы (рис. 13, *а*) изображен на рис. 13, *б*.

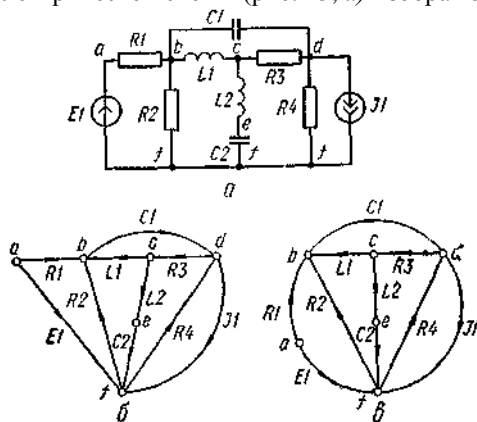


Рис. 13. Структурная электрическая схема (*а*) и ее изоморфные графы (*б* и *в*).

Следует иметь в виду, что при изображении электрических схем линии означают проводники без сопротивления, и узлы, соединенные такими линиями, являются по существу одним узлом (узел *f* на рис. 13, *а*). Узлы, с которыми связаны только два двухполюсника, на схемах обычно не отмечаются (рис. 13, *а*, узел *а*). На графах же каждая отмеченная точка рассматривается как его вершина и никаких линий, кроме дуг, не должно быть.

Направления дуг пассивных двухполюсников можно выбирать произвольно. Дуги активных двухполюсников ориентируются по направлению источника тока и противоположно направлению источника напряжения (это связано с тем, что направление дуги

указывает на положительное направление тока и противоположно положительному направлению напряжения).

Практический прием построения графа для данной схемы состоит в следующем. На схеме выделяется внешний контур и изображается замкнутой линией (например, окружностью), на которой размещаются соответствующие вершины. Затем граф дополняется теми ребрами и вершинами, которые отсутствуют во внешнем контуре. Так, на рис. 13, *в* показан изоморфный граф, построенный по этому способу.

Уравнения связей выражаются *законами Кирхгофа*, представляющими условие непрерывности для токов и условие равновесия для напряжений в любой момент времени  $t$ :

1) алгебраическая сумма токов для любой вершины равна нулю (*первый закон Кирхгофа*), т. е.

$$\sum i(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма напряжений в любом контуре равна нулю (*второй закон Кирхгофа*), т. е.

$$\sum u(t) = 0.$$

### 3.3.4. Механические поступательные системы.

Идеальные пассивные двухполюсники структур механических систем - это механическое сопротивление, масса и упругость. Перемещение  $x(t)$  и скорость  $v(t)$  являются продольными переменными, а сила  $f(t)$  — поперечной переменной.

*Сопrotивление* (рис. 14, *а*) представляет собой компоненту, которая отражает превращение механической энергии в тепло.

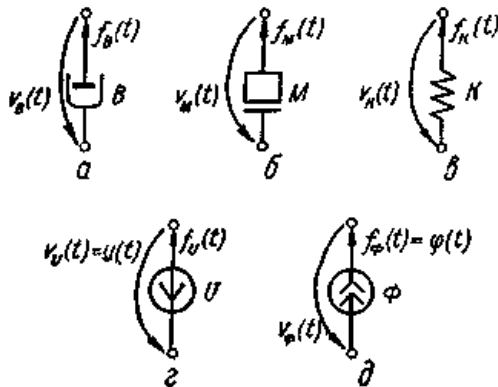


Рис 14. Идеальные механические (поступательные) двухполюсники: *а* — сопротивление; *б* — масса; *в* — упругость; *z* — источник скорости; *д* — источник силы.

В простейшем случае предполагается, что это превращение происходит в результате вязкого трения, сила которого  $f_B(t)$  пропорциональна относительной скорости  $v_B(t)$  трущихся тел, т. е.

$$f_B(t) = B \frac{dx_B(t)}{dt} = Bv_B(t); \quad v_B(t) = \frac{1}{B} f_B(t).$$

Здесь  $B$  — параметр, называемый *механическим поступательным сопротивлением*, а  $1/B$  — *инверсное сопротивление* или *податливость*. Полюсы элемента сопротивления соответствуют твердым телам, между которыми имеет место вязкое трение.

*Масса* (рис. 14, б) — компонента, накапливающая кинетическую энергию и, следовательно, обладающая механической инерцией. Зависимость между силой инерции  $f_M(t)$  и перемещением  $x_M(t)$  или скорости  $v_M(t)$  массы  $M$  относительно выбранной точки отсчета выражается соотношениями:

$$f_M(t) = M \frac{d^2 x_M(t)}{dt^2} = M \frac{dv_M(t)}{dt};$$

$$v_M(t) = \frac{1}{M} \int f_M(t) dt,$$

где  $1/M$  называется *инверсной массой*. Один из полюсов компоненты массы связан с движущимся телом, а другой — с неподвижной или равномерно движущейся системой координат (точкой отсчета перемещения и скорости).

*Упругость* (рис. 14, в) — компонента накапливающая потенциальную энергию. Этот двухполюсник можно представить как пружину, концы которой соответствуют его полюсам. В линейном случае предполагается, что такая пружина не обладает массой и сила  $f_k(t)$  реакции пропорциональна относительному перемещению  $x_k(t)$  ее концов, т. е.

$$f_k(t) = Kx_k(t) = K \int v_k(t) dt; \quad v_k(t) = \frac{1}{K} \frac{df_k(t)}{dt}.$$

где  $K$  — параметр, называемый *жесткостью*;  $1/K$  — *гибкостью*. Идеальные источники механической энергии могут быть двух типов. Задающая скорость  $u(t)$  какой-либо точки системы представляется *источником скорости* (рис. 14, з), один полюс которого связан с этой точкой, а другой — с той точкой системы, относительно которой эта скорость задается. Скорость такого двухполюсника не зависит от приложенных сил, т. е.  $v_u(t) = -u(t)$ . *Источник силы* изображается двухполюсником (рис. 14, д), полюсы которого соответствуют точкам приложения силы и ее реакции, причем сила в этом двухполюснике

определяется некоторой функцией времени  $\varphi(t)$  и не зависит от скорости, т.е.

$$f_{\varphi}(t) = \varphi(t)$$

На основании приведенных определений можно построить схему механической поступательной системы. При этом узлы схемы соответствуют соединениям компонент системы, которые могут рассматриваться как единое целое, а соединяющие линии – жестким связям между компонентами. Переход от механической схемы к ее графу, как и для электрической схемы, на основе соответствия между инцидентностью идеальных двухполюсников узлам схемы и инцидентностью дуг и вершин графа. Направления дуг для пассивных двухполюсников принимаются в соответствии с выбранной системой отсчета (противоположно направлению перемещений  $x$ ), а ориентация дуг источников определяется заданными направлениями (для источников силы они совпадают, а для источников скорости — противоположны).

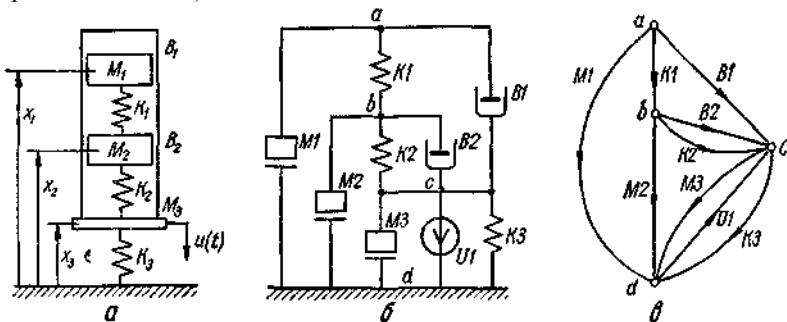


Рис. 15. Механическая поступательная система (а), ее схема (б) и граф (в).

Пусть, например, в системе (рис. 15, а), движение которой может совершаться только по вертикали, платформа массой  $M_3$  движется с заданной скоростью  $u(t)$ . Схема этой системы показана на рис. 15, б, а ее граф — на рис. 15, в. При достаточном навыке граф можно построить и непосредственно из рассмотрения условного изображения механической поступательной системы без промежуточного вычерчивания ее схемы.

Уравнения связей механической поступательной системы выражают условие равновесия сил и условие непрерывности для скоростей (или перемещений):

1) алгебраическая сумма сил для любой вершины равна нулю (*принцип Даламбера*):



2) алгебраическая сумма скоростей (перемещений) в любом контуре равна нулю:

$$\sum v(t) = 0.$$

### 3.3.5. Механические вращательные системы

Соотношения для механических вращательных систем аналогичны соотношениям для поступательных систем. Перемещению  $x(t)$  соответствует угол поворота  $\varphi(t)$ , линейной скорости  $v(t)$  — угловая скорость  $\omega(t)$ , силе  $f(t)$  — вращающий момент  $\mu(t)$ . Соответственно для механических вращательных систем имеем три пассивные компоненты и два идеальных источника, для обозначения которых можно использовать те же символы, что и для поступательных систем.

*Вращательное сопротивление* (рис. 16, а) характеризует рассеивание механической энергии в тепло за счет вязкого трения:

$$\mu_B(t) = B \frac{d\varphi_B(t)}{dt} = B\omega_B(t); \quad \omega_B(t) = \frac{1}{B} \mu_B(t),$$

где  $B$  — *крутильное сопротивление*;  $1/B$  — *инверсное сопротивление*.

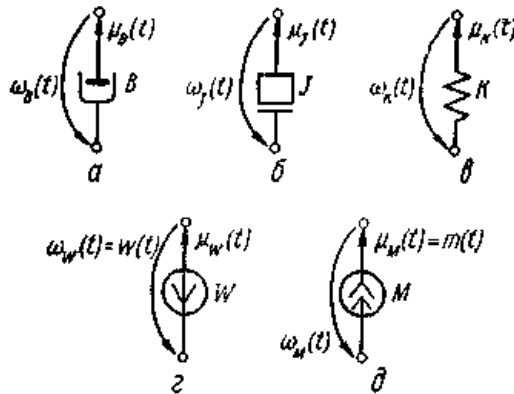


Рис. 16. Идеальные механические (вращательные) двухполюсники: а — вращательное сопротивление; б — вращающаяся масса; в — вращательная упругость; з — источник угловой скорости; д — источник момента.

*Вращающаяся масса* (рис. 16, б) — компонента, характеризующая кинетическую энергию вращательного движения:

$$\mu_J(t) = J \frac{d^2 \varphi_J(t)}{dt^2} = J \frac{d\omega_J(t)}{dt}; \quad \omega_J(t) = \frac{1}{J} \int \mu_J(t) dt,$$

где  $J$  — момент инерции.

*Вращательная упругость* (рис. 16, в) — компонента, накапливающая потенциальную энергию вращательного движения:

$$\mu_k(t) = K \varphi_k(t) = K \int \omega_k(t) dt; \quad \omega_k(t) = \frac{1}{K} \frac{d\mu_k(t)}{dt},$$

где  $K$  — *крутильная жесткость*;  $1/K$  — *гибкость*.

Идеальный источник может быть *источником угловой скорости* (рис. 16, з), характеризующимся задающей угловой скоростью  $\omega(t)$  и *источником момента* (рис. 16, д), характеризующимся задающим моментом  $m(t)$ .

Пример построения схемы и графа механической вращательной системы показан на рис. 17. Узлы графа соответствуют вращающимся массам, а направления ребер принимаются в соответствии с выбранным положительным направлением отсчета угла поворота. Параметры  $J_1$  и  $J_2$ , означают моменты инерции роторов,  $B_1$  и  $B_2$  — вязкое трение в опорах, а  $K_I$  — жесткость вала.

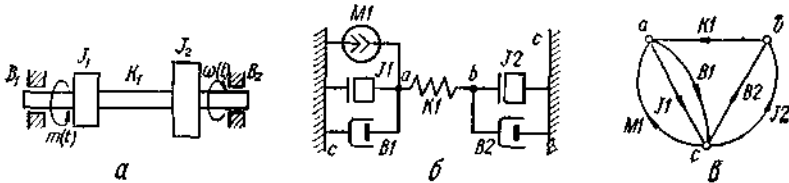


Рис. 17. Механическая вращательная система (а), ее схема (б) и граф (в).

Уравнения связей механической вращательной системы выражают условие равновесия моментов и условие непрерывности угловых скоростей (или углов поворота):

- 1) алгебраическая сумма моментов для любой вершины равна нулю:

$$\sum \mu(t) = 0;$$

- 2) алгебраическая сумма угловых скоростей (углов поворота) в любом контуре равна нулю:

$$\sum \omega(t) = 0.$$

### 3.3.6. Пневматические системы

Движение газа в ограниченной среде характеризуется зависимостью между давлением  $p(t)$  и потоком  $g(t)$ , который выражается как количество молекул, проходящих в единицу времени. Используются три пассивные двухполюсные компоненты, представляющие собой идеализированные свойства пневматических систем: сопротивление, инертность и упругость. При этом поток рассматривается как поперечная величина, а давление (разность давлений) — как продольная величина.

*Сопротивление* (рис. 18, а) — двухполюсник, учитывающий рассеивание энергии за счет вязкого трения. Его уравнение может быть представлено в одной из двух форм:

$$g_R(t) = G p_R(t); \quad p_R(t) = R g_R(t),$$

где параметры  $G$  и  $R$  называются соответственно *пневматической проводимостью* и *сопротивлением* ( $G = R^{-1}$ ,  $R = G^{-1}$ ).

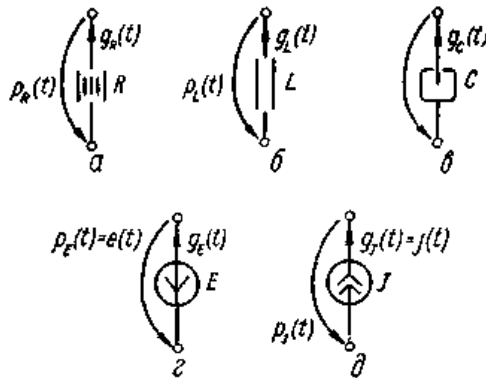


Рис. 18. Идеальные пневматические двухполюсники: а — сопротивление; б — инертность; в — упругость; z — источник давления; d — источник потока.

Величина  $p_R(t)$  представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке  $g_R(t)$ . Примерами пневматических компонент с явно выраженным сопротивлением являются трубки с тонкими отверстиями (капилляры), сужающие устройства (сопла), щели и различные препятствия на пути движения газа.

*Инертность* (рис. 18, б) является двухполюсником, который характеризует противодействие изменению потока газа в среде и описывается соотношениями:

$$p_L(t) = L \frac{dg_L(t)}{dt};$$

$$g_L(t) = \frac{1}{L} \int p_L(t) dt.$$

где  $L$  — параметр, называемый *пневматической инертностью*. Величина  $p_L(t)$  представляет собой разность давлений на концах этого двухполюсника при потоке  $g_L(t)$ . Пневматическая инертность заметно сказывается в трубопроводах при существенных изменениях потока газа во времени.

*Упругость* (рис. 18,в) - двухполюсник, характеризующий свойство идеального газа, заключенного в некотором объеме (камере): изменение концентрации молекул пропорционально изменению давления (предполагается, что процесс изотермический, т. е. происходит при постоянной температуре). Так как изменение концентрации определяется потоком газа, то для этого двухполюсника можно записать соотношения:

$$g_C(t) = C \frac{dp_C(t)}{dt};$$

$$p_C(t) = \frac{1}{C} \int g_C(t) dt.$$

где  $C$  — параметр, называемый *пневматической упругостью*. Величина  $p_C(t)$  представляет собой давление газа в объеме относительно давления, которое принимается за нулевое (например, относительно атмосферного давления или вакуума). ПОЭТОМУ ОДИН ИЗ ПОЛЮСОВ рассматриваемого двухполюсника связан с данным объемом, а второй - со средой, выбранной за начало отсчета давления.

Между пневматическими и электрическими системами существует глубокая аналогия. Поток соответствует току, давление — потенциалу, разность давлений — напряжению, избыточная концентрация молекул (по сравнению с условным уровнем) — заряду. Поэтому и соответствующие параметры пневматических и электрических двухполюсников обозначают обычно теми же буквами ( $R$ ,  $L$ ,  $C$ ). Инертность часто называют *пневматической индуктивностью*, а упругость — *пневматической емкостью*.

Источники энергии в пневматических системах представляются идеальными двухполюсниками ДПУХ типов: *источником давления* (рис. 18, з) и *источником потока* (рис. 18, д), которые определяются

соответственно задающими давлением  $e(t)$  и потоком  $j(t)$ , а также положительными направлениями этих величин.

При построении схемы пневматической системы узлы соответствуют объемам газа с различными давлениями, причем одни из них соответствует окружающей среде. На рис. 19 показан пример пневматической системы, ее схема и граф

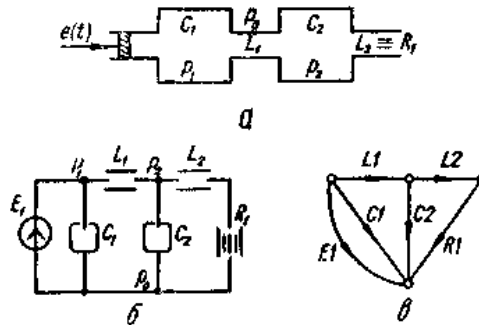


Рис. 19. Пневматическая система (а), ее схема (б) и граф (в).

Уравнения связей пневматической системы выражают условие непрерывности потоков и условие равновесия разностей давлений:

1) алгебраическая сумма потоков для любой вершины равна нулю:

$$\sum g(t) = 0;$$

2) алгебраическая сумма разностей давлений в любом контуре равна нулю:

$$\sum p(t) = 0.$$

Приведенные соотношения применимы также к акустическим и гидравлическим системам лишь с тем отличием, что поток  $g(t)$  обычно рассматривается как изменение объема в единицу времени (объемный расход). Иногда под этой величиной понимают весовой (массовый) расход.

### 3.3.7. Аналогии

Из рассмотренного выше видно, что для систем различной физической природы имеет место аналогия между их компонентами и переменными, характеризующими состояния системы. Идя по пути обобщения, лучше всего было бы принять некоторую нейтральную терминологию для поперечных и продольных величин, а также для трех типов идеальных двухполюсников. Однако из-за отсутствия единой договоренности в этом вопросе чаще всего в качестве основной принимают терминологию электрических цепей. Отсюда возникли электромеханические, электропневматические, электрогидравлические и другие аналогии (табл. 1).

**Аналоги электрических величин**

Физическая система	Переменные			
	Поперечные		Продольные	
	Ток $i(t)$	Заряд $q(t)$	Напряжение $u(t)$	Потокоусечение $\psi(t)$
	$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$	$q(t) = \int i(t) dt$	$u(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$	$\psi(t) = \int u(t) dt$
Механическая поступательная	Сила	Импульс силы	Скорость	Перемещение
Механическая вращательная	Вращающий момент	Импульс момента	Угловая скорость	Угол поворота
Пневматическая	Молекулярный поток	Концентрация молекул	Давление (разность давлений)	Импульс давления
Гидравлическая	Объемный поток	Объем жидкости	Давление (разность давлений)	Импульс давления
Тепловая	Теплоотдача (тепловой поток)	Количество тепла	Температура (разность температур)	—

Физическая система	Идеальные двухполюсники		
	Сопротивление $R$	Емкость $C$	Индуктивность $L$
		$i(t) = \frac{1}{R} u(t);$ $u(t) = R i(t)$	$i(t) = C \frac{du(t)}{dt};$ $u(t) = \frac{1}{C} \int dt i(t) dt$
Механическая поступательная	Инерсное сопротивление (демпфер)	Масса (инертность)	Упругость (пружина)
Механическая вращательная	Инерсное сопротивление	Вращающаяся масса (момент инерции)	Вращающаяся упругость
Пневматическая	Пневматическое сопротивление	Пневматическая емкость (упругость)	Пневматическая индуктивность (инертность)
Гидравлическая	Гидравлическое сопротивление	Гидравлическая емкость (резервуар)	Гидравлическая индуктивность
Тепловая	Тепловая проводимость	Теплоемкость	—

В первой строке табл. 1 приведены основные соотношения в обозначениях, принятых в теории электрических цепей. Для рассматриваемой системы соответствующие соотношения можно получить, заменив электрические величины и параметры аналогичными величинами и параметрами, которые указаны в остальных строках таблицы.

Приведенная таблица может быть расширена и на другие системы, не рассматривавшиеся выше, для этого необходимо на основе законов равновесия выяснить, какие величины являются поперечными и какие продольными. Затем, сравнивая компонентные уравнения двухполюсников данной системы с уравнениями электрических двухполюсников, установить аналогии между соответствующими компонентами.

### 3.3.8. Нелинейные и параметрические компоненты

Характер компонентных уравнений не влияет на вид полюсного графа структуры, но методы использования этого графа при построении математической модели структуры в значительной мере определяются свойствами компонент. Поэтому уместно привести основные соотношения для нелинейных и параметрических компонент в терминах электрических цепей.

В общем случае зависимость между током и напряжением резистивной компоненты выражается функцией  $\varphi(i, u) = 0$ , которая может быть представлена в одной из двух форм:

$$i = \varphi_G(u); u = \varphi_R(i).$$

Первое соотношение описывает резистор (проводимость), представляемый напряжением и представляемый  $u$ -дугой, а второе — резистор (сопротивление), управляемый потоком, и представляемый  $i$ -дугой. На рис. 20, *а*, *б*, показаны характеристики двухполюсников, допускающих единственное представление. Если характеристика монотонно возрастающая (рис. 20, *в*), то ее можно выразить однозначной функцией как тока, так и напряжения. Соответствующий двухполюсник является взаимопределенным и представляется  $w$ -дугой.

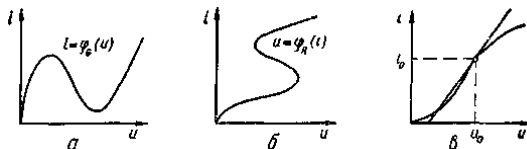


Рис. 20. Характеристики нелинейных резисторов: *а* — управляемого напряжением (*а*), током (*б*) и взаимопределенного (*в*)

Нелинейные резистивные компоненты часто используются в *квазилинейном режиме*, при котором токи и напряжения изменяются относительно некоторой точки покоя  $(i_0, u_0)$ , причем эти изменения настолько малы, что рабочий участок характеристики можно считать линейным. Разлагая функцию  $i = \varphi_G(u)$  в ряд Тейлор и ограничиваясь членом с первой производной, можно записать:

$$i = \varphi_G(u_0) + \varphi'_G(u_0)(u - u_0) = i_0 + \varphi'_G(u_0)(u - u_0)$$

или

$$\Delta i = G_D \Delta u; \quad \Delta u = \frac{1}{G_D} \Delta i = R_D \Delta i.$$

Здесь  $\Delta i = i - i_0$  и  $\Delta u = u - u_0$  - изменения тока и напряжения относительно точки покоя. Величина  $G_D$  численно равна производной функции в этой точке и называется *динамической проводимостью*, а обратная ей величина  $R_D$  — *динамическим сопротивлением*:

$$G_D = \varphi'_G(u_0) = \left( \frac{di}{du} \right)_{u=u_0}; \quad R_D = \frac{1}{\varphi'_G(u_0)} = \left( \frac{du}{di} \right)_{i=i_0}.$$

Соотношения для параметрического резистора линейны, но его проводимость и сопротивление являются функциями времени, т. е.

$$i_G(t) = G(t)u_G(t), \quad u_R(t) = R(t)i_R(t)$$

Нелинейный емкостный двухполюсник характеризуется обычно зависимостью заряда от напряжения на этом двухполюснике  $q(t) = q(u_C(t))$ . Дифференцируя по времени, получаем выражение для тока в виде:

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq(u_C)}{du_C} \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = C(u_C) \frac{du_C(t)}{dt},$$

где  $C(u_C)$  определяет *динамическую емкость*, зависящую от приложенного напряжения  $(u_C)$ . Емкость параметрического (линейного, но не стационарного) двухполюсника является функцией от времени. Поэтому, дифференцируя соотношение  $q(t) = C(t)u_C(t)$ , имеем:

$$i_C(t) = \frac{d}{dt} (C(t)u_C(t)) = \frac{dC(t)}{dt} u_C(t) + C(t) \frac{du_C(t)}{dt}.$$

Нелинейный индуктивный двухполюсник можно охарактеризовать зависимостью потокосцепления от тока в индуктивности  $\psi(t) = \psi(i_L(t))$ . Дифференцируя по времени, получаем выражение для напряжения в виде:

$$u_L(t) = \frac{d\psi(t)}{dt} = \frac{d\psi(i_L)}{di_L} \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L(i_L) \frac{di_L(t)}{dt},$$



где функция  $L(i_L)$  определяет динамическую индуктивность, зависящую от протекающего тока  $i_L$ . Индуктивность параметрического двухполюсника является функцией от времени. Поэтому дифференцируя соотношение  $\psi(t) = L(t) i_L(t)$  имеем:

$$u_L(t) = \frac{d}{dt} L(t) i_L(t) = \frac{dL(t)}{dt} i_L(t) + L(t) \frac{di_L(t)}{dt}.$$

Приведенные соотношения можно рассматривать как аналоги для нелинейных и параметрических двухполюсников любой физической природы, если понимать под входящими в эти соотношения символами величины в соответствии с табл. 1.

Структуры, о которых до сих пор шла речь, представляют собой важный и распространенный тип физических структур. Общая особенность таких структур заключается, как мы уже говорили, в возможности их интерпретации как множества двухполюсных элементов. Однако не каждая структура может быть представлена таким образом. Следовательно, возникает необходимость обобщения представленной выше теории.

Структуры из двухполюсных элементов будем называть структурами первого ранга. Введем понятие структуры второго ранга. Рассмотрим  $n$ -аргументное отношение

$$R \subset \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_{n \text{ раз}}, \quad (9)$$

где  $M$  — множество, по крайней мере счетное, в евклидовом пространстве  $E^m$ .

Отношение  $R$  (9) представляет собой множество некоторых конечных последовательностей с  $n$  членами

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \quad (10)$$

Обозначим

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R. \quad (11)$$

Число аргументов отношения  $R$  обозначим через  $\overline{\overline{R}}$ , т. е. в случае отношения (11) имеем

$$\overline{\overline{R}} = n.$$

Рассмотрим множество отношений (не обязательно с разными аргументами)

$$\{R_1, R_2, \dots, R_i\}, \quad \overline{\overline{R}}_i \leq n, \quad i = 1, 2, \dots$$

*Определение 3.* Множество отношений

$$U = \{R_1, R_2, \dots, R_i\}, \quad \overline{\overline{R}}_i \leq n, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

называется теоретико-множественной структурой второго ранга на множестве  $M$ , если для каждой пары непустых множеств  $X$  и  $Y$

$$\begin{aligned} X \cup Y &= M, \\ X \cap Y &= \emptyset \end{aligned} \tag{13}$$

существуют такие элементы  $x_1, x_2, \dots \in X; y_1, y_2, \dots \in Y$ , что имеет место хотя бы одно из отношений

$$R(x_1, \dots, y_i \dots, x_b, \dots, y_i) \tag{14}$$

или

$$R(y_1, \dots, x_1, \dots, y_i \dots, x_i).$$

Элементы отношения  $R_i \in U$  назовем элементами структуры  $U$ , а элементы поля отношения  $R_b$ , т. е. элементы множества  $M$ , — вершинами структуры  $U$ . Элементы структуры  $U$  обозначим строчными буквами и напомним  $u \in U$ .

Понятие топологической структуры второго ранга введем по аналогии с понятием структуры первого ранга.

Пусть задана теоретико-множественная структура  $U$  второго ранга; определим следующее преобразование:

$$\Gamma(R) = \sum_{u \in U} \Gamma(u), \tag{15}$$

ставящие в отношении элементами структуры  $U$  двумерный локально связанный континуум  $S$ .

Обозначим

$$S = \Gamma(R);$$

Преобразование  $\Gamma$  можно определить по формуле

$$S = \Gamma(U) \Rightarrow \Gamma(u) = C_u, \tag{16}$$

где  $C_u$  — двумерный локально связный континуум со следующими свойствами:

1) в континууме выделены некоторые граничные точки  $x_1, x_2, \dots, x_b, \dots$ , называемые вершинами, т. е.

$$C_u = (x_1, x_2, \dots, x_b, \dots);$$

2) имеет место соотношение

$$C_u = \Gamma(u) \Leftrightarrow u = \langle x_1, x_2, \dots, x_b, \dots \rangle \tag{17}$$

На рис. 21 приведен пример топологической структуры второго ранга.

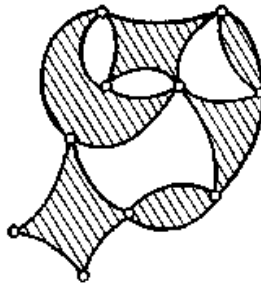


Рис. 21. Топологическая структура второго ранга.

Конкретная структура второго ранга определяется по аналогии с конкретной структурой первого ранга.

Таким образом, обобщенное понятие структуры основано на введении понятия структуры второго ранга. Это рассуждение можно повторять далее и получать, следовательно, иерархические типы структур высших рангов. Общим свойством структур, рассмотренных в предыдущих разделах, была их «дискретность». Они состояли из счетного числа дискретных элементов и назывались дискретными структурами. Несмотря на то что дискретные структуры представляют собой очень важный распространенный тип структур, они не являются единственными структурами, с которыми приходится иметь дело в теории организации.

## 4. Блочные группы как средство описания структур

### 4.1. Понятия блочных групп и операции над ними

Пусть  $X$  — подмножество абстрактного пространства  $\mathcal{P}$ . Элементы множества  $X$  обозначим

$$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \dots \in X$$

Рассмотрим систему элементов в виде матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1 1} & \alpha_{m_2 2} & \dots & \alpha_{m_n n} \end{bmatrix} \quad (1)$$

Будем рассматривать эту систему как совокупность столбцов  $a_k$ , т. е.

$$A = \{ a_1, a_2, \dots, a_k \}. \quad a_i \neq a_j \quad (i \neq j). \quad (2)$$

(Столбцы  $a_k$  в свою очередь представляют собой неупорядоченные множества элементов  $\alpha_{ik}$

$$a_k = \alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \dots, \alpha_{m_k k}, \quad \alpha_{ik} \neq \alpha_{jk}, \quad (i \neq j). \quad (3)$$

Столбцы будем считать равными, если они содержат одинаковые элементы. Положим по определению, что система (1) не содержит одинаковых столбцов. Систему типа (1) будем рассматривать как

**элемент новой алгебры — алгебры блочных групп.** Согласно определениям абстрактной алгебры, алгебру блочных групп можно отнести к категории операторных алгебр, т. е. ее можно характеризовать упорядоченной тройкой

$$\langle E, \Omega, e \rangle,$$

где  $E$  — носитель алгебры (в нашем случае семейство множеств);  $\Omega$  - двухэлементное множество операторов  $\omega_1, \omega_2$ , определяющих сумму и произведение;  $e$  — результат, т. е. функция, которая выражению  $A\omega B$  ставит в соответствие элемент  $C \in E$ , являющийся результатом действия.

Введем вспомогательное понятие, которое используем при определении блочной группы.

Рассмотрим последовательность элементов  $x_i$ , необязательно различных:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n \rangle. \quad (4)$$

Обозначим через  $r(x_k)$  — число одинаковых элементов последовательности (4).

*Блочной группой* будем называть систему элементов  $a_{ik}$  вида (1)

[с учетом (2) и (3)], удовлетворяющая следующим определениям.

*Определение 1.* Две блочные группы считаются равными ( $A = B$ ) тогда и только тогда, когда  $(a \in A) \Leftrightarrow (a \in B)$  или

$$A = B \Leftrightarrow \forall a (a \in A \Leftrightarrow a \in B). \quad (5)$$

*Определение 2.* Суммой блочных групп  $A$  и  $B$  называется блочная группа

$$C = \{x / (x \in A) \vee (x \in B), x \notin A \cap B\} = A \underline{\Delta} B; \quad (6)$$

в этом случае можно написать  $C = A + B$ .

Выражение  $A \underline{\Delta} B$  в формуле (6) означает симметрическую разность множеств  $A$  и  $B$ .

*Определение 3.* Произведением блочных групп  $A$  и  $B$  называется блочная группа

$$C = \{a \cup b \mid a \cap b = \emptyset, r(a \cup b) \in \{1, 2, \dots\}, a \in A, b \in B\}, \quad (7)$$

которое записывается в виде  $C = AB$ .

В соответствии с определением суммы при сложении блочных групп опускаются столбцы, одновременно присутствующие в обеих блочных группах  $A$  и  $B$ , а в соответствии с определением произведения при умножении блочных групп  $A$  и  $B$  опускаются те столбцы  $a \cup b$ , в которых какой-либо элемент повторяется, т. е. для которых  $a \cap b \neq \emptyset$ .

Можно заметить, что равенство блочных групп представляет собой отношение эквивалентности, т. е. является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Далее будут приведены примеры действий с блочными группами, элементы которых  $a_{ik} \in X$  представляют собой натуральные числа (этот случай имеет большое значение для применения алгебры блочных групп), а также даны словесные формулировки действий с блочными групп, которые менее точны, чем вышеприведенные, однако более понятны для читателей.

**Пример 1.** Равенство блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Две блочные группы равны, если содержат идентичные столбцы, независимо от порядка элементов в столбцах и порядка столбцов.

**Пример 2.** Сложение блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Суммой двух блочных групп  $A$  и  $B$  называется блочная группа, содержащая все столбцы чисел  $A$  и  $B$ , за исключением идентичных столбцов, и не содержащее других столбцов.

**Пример 3.** Умножение блочных групп:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Произведением двух блочных групп  $A$  и  $B$  называется блочная группа, столбцы которой представляют собой суммы (согласно понятиям теории множеств) всех возможных комбинаций столбцов  $A$  и  $B$ , за исключением наибольшего четного числа идентичных столбцов и таких столбцов, в которых какой-либо элемент повторяется (произведение других столбцов не содержит).

Из определения суммы и произведения блочных групп следует, что эти операции всегда можно выполнить на множестве этих блочных групп. Из тех же определений можно сделать вывод, что сложение и умножение блочных групп коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения.

Для трех произвольных блочных групп имеют место следующие соотношения, подобные тем, которые справедливы для элементарной алгебры:

$$\begin{aligned}
 A + B &= B + A, \\
 AB &= BA, \\
 A(BC) &= (AB)C, \\
 A(B + C) &= AB + AC.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Будем различать блочную группу  $[\emptyset]$ , содержащую один столбец, который является пустым множеством  $\emptyset$ , и блочную группу  $[\ ]$ , не содержащую ни одного столбца. Заметим, что блочная группа  $[\ ]$  служит модулем суммирования и для произвольной блочной группы  $A$  выполняется равенство

$$A + [\ ] = A,$$

поэтому блочную группу  $[\ ]$  будем обозначать символом  $0$ , записывая ее в виде

$$[\ ] = 0. \tag{9}$$

Блочная группа  $[\emptyset]$  в свою очередь есть модуль умножения, так как

$$A[\emptyset] = A, \tag{10}$$

поэтому блочную группу  $[\emptyset]$  обозначим символом  $1$ , записав

$$[\emptyset] = 1. \tag{11}$$

Для любой  $A$  имеет место соотношение

$$A[\ ] = [\ ].$$

Рассмотрим блочную группу вида

$$A = \{\emptyset, a_1, a_2, \dots, a_\lambda\}, \tag{12}$$

т. е. блочную группу, содержащую один пустой столбец.

Легко заметить, что для такой блочной группы справедливо равенство

$$AA = 1.$$

Для блочных групп, не содержащих пустого столбца,

$$AA = 0.$$

Если множество блочных групп вида (12) обозначить как  $\mathcal{A}$ , а множество всех остальных блочных групп — как  $\mathcal{B}$ , то можно написать

$$\begin{aligned}
 (A \in \mathcal{A}) &\Rightarrow AA = 1, \\
 (A \in \mathcal{B}) &\Rightarrow AA = 0.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Следовательно, легко заметить, что для произвольной блочной группы

$$\underbrace{A + A + \dots + A}_{n \text{ раз}} = \begin{cases} A & \text{при нечетном числе слагаемых } n, \\ 0 & \text{при четном } n. \end{cases}
 \tag{13a}$$

Таким образом,

$$A + A = 0. \tag{13б}$$

Из соотношения (13) следует, что равенство

$$AB = 0$$

не требует в общем случае равенств  $A = 0$  или  $B = 0$ , т. е. множество блочных групп содержит делители нуля. Пару блочных групп, для которой выполняется равенство  $AB = 0$ , назовем *особой парой*.

**Пример 4.** Особую пару представляют собой следующие блочные группы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{так как} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 0.$$

Блочная группа  $\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} = 0$  в сочетании с любой блочной группой дает особую пару.

Обобщая изложенные свойства блочных групп, можно сформулировать следующие утверждения.

**Утверждение 1.** Множество блочных групп, на котором определены операции сложения и умножения, образует коммутативное кольцо. Это кольцо обычно содержит делители нуля.

Из определения суммы и произведения следуют соотношения, справедливые для любой блочной группы:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m,k} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{m,k} \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m_k} \alpha_{ik} = \prod_{i=1}^{m_k} s_{\alpha_{ik}}, \quad (14)$$

где  $s_{i_k} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_k} \end{bmatrix}$  — одноэлементная блочная группа.

**Утверждение 2.** Блочную группу  $A$  всегда можно представить в виде

$$A = \sum_k \prod_i s_{\alpha_{ik}}, \quad (15)$$

где  $s_{\alpha_{ik}} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_k} \end{bmatrix}$ .

Отметим, что выражение (15) в алгебре блочных групп играет роль, аналогичную выражению  $z = a + ib$  в теории функций комплексного переменного, с помощью которой можно записать любое комплексное число  $z = \langle a, b \rangle$ .

Блочную группу  $s_{\alpha_{ik}} = \begin{bmatrix} \alpha_{i_k} \end{bmatrix}$  будем называть *структурной единицей*, которая служит аналогом действительной или мнимой единицы в области комплексных чисел.

Рассмотрим две произвольные блочные группы  $A$  и  $B$ . Из определения равенства и суммы блочных групп следует, что существует только одна блочная группа, удовлетворяющая равенству

$$B + X = A, \quad (16)$$

которую вследствие коммутативности суммирования блочных групп можно переписать как

$$X + B = A. \quad (16a)$$

Блочную группу  $X$ , удовлетворяющую равенствам (16) и (16a), будем называть *разностью* блочных групп  $A$  и  $B$ :

$$X = A - B.$$

Действие нахождения разности блочных групп будем называть вычитанием. Легко заметить, что разность блочных групп  $A$  и  $B$  есть блочная группа  $X = A + B$ . Действительно, подставляя в выражение (16)  $X = A + B$ , получаем уравнение

$$B + (A + B) = A,$$

которое в соответствии с (13б) представляет собой тождество. Таким образом, получаем обоснованное соотношение

$$A - B = A + B, \quad (17)$$

которое в случае  $A = 0$  записывается в виде

$$-B = B. \quad (18)$$

Из сказанного следует, что на множестве блочных групп вычитание всегда можно заменить сложением. Вычитание, следовательно, определено однозначно и всегда, выполнимо, поэтому множество блочных групп замкнуто по отношению к суммированию и вычитанию.

Подводя итог рассмотренным свойствам блочных групп, можно заключить, что кольцо блочных групп 1) не содержит степеней и 2) не содержит коэффициентов (кроме 0 и 1); а 3) сложение идентично вычитанию.

## 4.2. Свойства блочных групп

### 4.2.1. Делители нуля

Пусть  $\mathbf{A}^*$  — множество блочных групп  $X$ , удовлетворяющее уравнению

$$AX = 0,$$

где  $A$  — некоторая блочная группа, и пусть  $\mathbf{A}^*$  — элементы этого множества. Тогда

$$AX = 0 \Rightarrow X = A^*_i \in \mathbf{A}^*. \quad (19)$$

Блочные группы  $A^*_i \in \mathbf{A}^*$ , удовлетворяющие уравнению  $AX = 0$ , называются сопряженными по отношению к  $A$  или *делителями нуля*.



*Следствие.* Если две блочные группы  $X_1$  и  $X_2$  удовлетворяют равенству  $AX = 0$ , то такому же равенству удовлетворяет их линейная комбинация  $C_1X_1 + C_2X_2$ , а также произведение  $CX_1X_2$ , где  $C_1, C_2, C$  — произвольные блочные группы, включая 0 и 1. Тогда

$$X_1, X_2 \in \mathbf{A}^* \Rightarrow C_1X_1 + C_2X_2 \in \mathbf{A}^*; CX_1X_2 \in \mathbf{A}^*. \quad (20)$$

Полагая в выражении (20)  $C_1 = C_2 = C = 1$ , приходим к выводу, что к  $\mathbf{A}^*$  относятся сумма  $X_1 + X_2$  и произведение  $X_1X_2$  блочных групп  $X_1$  и  $X_2$ , удовлетворяющих уравнению  $AX = 0$ .

Множество  $\mathbf{A}^*$  решений уравнения  $AX = 0$  можно в общем случае определить с помощью выражения, записанного в символах математической логики:

$$(AX = 0) \Leftrightarrow \forall \alpha \in A, x \in X \{[a \cap x \neq \emptyset] \vee [r(a \cup x) \in \{0, 2, \dots\}]\}. \quad (21)$$

Свойство (21) следует непосредственно из определения произведения блочных групп.

### 4.2.2. Делимость блочных групп

Если для двух блочных групп  $A$  и  $B$  существует такая блочная группа  $X$ , что

$$A = XB, \quad (22)$$

то  $A$  делится на  $B$ , или  $B$  — делитель блочной группы  $A$ , т. е.

$$B \mid A \text{ и } A \neq 0. \quad (23)$$

Каждая блочная группа  $A \neq 1$  и  $A \neq 0$  имеет самое малое два делителя, а именно 1 и  $A$ ; блочная группа 1, в свою очередь, имеет лишь один кратный делитель.

Блочные группы  $A \nmid \emptyset$ , содержащие только один делитель  $A$ , называются простыми блочными группами; любая другая блочная группа называется сложным. Каждый делитель, представляющий собой однострочную блочную группу, называется основным делителем.

**Утверждение 3.** Блочная группа  $B$  представляет собой делитель блочной группы  $A$  тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $AB = 0$ ;
- 2) все столбцы блочной группы  $A$  являются подмножествами некоторых столбцов блочной группы  $B$ .

*Доказательство.* Если блочная группа  $B$  есть делитель блочной группы  $A$ , то существует такая  $X$ , что

$$BX = A.$$

Но это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда все столбцы блочной группы  $A$  представляют собой **подмножества**

некоторых столбцов блочной группы  $B$ , а  $B$  — элемент, сопряженный с  $A$ . Следовательно,

$$B|A \Leftrightarrow (AB=0) \wedge [\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (a_k \supset b_k)], \quad (24)$$

Заметим, что деление, определенное на множестве блочных групп, обладает свойством

$$A|B \quad \text{и} \quad B|C \Rightarrow A|C. \quad (25)$$

Деление также представляет собой слабо **симметричное** отношение, т. е.  $(A|B \text{ и } B|A) \Rightarrow A=B$ , что вытекает из следующего утверждения.

**Утверждение 4.** Если блочная группа  $B$  — делитель блочной группы  $A$ , а блочная группа  $A$  — делитель  $B$ , то  $A=B$ .

*Доказательство.* Положим, что одновременно имеет место  $B|A$  и  $A|B$ .

Из утверждения 3 следует, что тогда могут быть одновременно выполнены условия

$$\{\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (a_k \supset b_k)\} \wedge \{\forall b_k \in B, \exists a_k \in A (b_k \supset a_k)\}$$

что может иметь место только при  $A=B$ .

Для блочных групп имеет место правило сокращения, т. е. если  $CA=CB$ , то  $A=B$ . Это положение можно обосновать.

**Утверждение 5.** Уравнение  $AB=AX$  имеет общее решение на **множестве** блочных групп

$$X=B+A^*,$$

где  $A^*$  — произвольный сопряженный элемент  $A$ . Тогда

$$(AB=AX) \Leftrightarrow (X=B+A^*; A^* \in A^*). \quad (26)$$

*Доказательство.* Из уравнения  $AB=AX$  следует, что  $A(B+X)=0$  и  $B+X$  — блочная группа, сопряженная с  $A$ , а соответственно и  $X=B+A^*$ , где  $A^*$  — произвольный элемент множества решений уравнения  $AX=0$ . Подставляя число  $X=B+A^*$  в уравнение  $AB=AX$ , убеждаемся, что это число действительно удовлетворяет данному уравнению.

**Утверждение 6.** Каждая сложная блочная группа имеет по крайней мере один делитель, представляющий собой простую блочную группу, не равную единице.

*Доказательство.* В соответствии с определением сложной блочной группы блочная группа  $A$  имеет делители, отличные от 1 и  $A$ . Положим в таком случае, что  $B$  — один из этих делителей, т. е.

$$A=X_0B, \quad X_0 \neq 1, \quad B \neq 1. \quad (27)$$

Если  $B$  — непростая блочная группа, то ее можно представить как  $B=X_l B_l$ . При этом получим

$$A=B_l X_0 X_l X_2 \dots X_i. \quad (28)$$

Но для  $A \neq 0$  должно выполняться неравенство

$$l \leq m_A, \quad (29)$$

где  $m_A$  — число элементов в столбце блочной группы  $A$ , содержащем наименьшее количество элементов. Множество натуральных чисел  $\{1, 2, \dots, l\}$  имеет наибольший элемент  $l_{\max}$ , поэтому  $B_{l_{\max}}$  есть простой делитель блочной группы  $A$ . Для  $A = 0$  неравенство (29) не должно выполняться, но, согласно изложенному, из произвольного делителя блочной группы  $A$  (сложной, ненулевой) можно извлечь простой делитель, что и доказывает утверждение 6.

**Утверждение 7.** Каждая блочная группа представляет собой простую блочную группу или произведение простых блочных групп.

Правильность этого положения следует из утверждения 6. Действительно, если блочную группу  $A$  можно представить в виде (28) с простым делителем  $B_b$ , то на простые делители можно разложить каждый дополнительный делитель  $X_0, X_b, X_2, \dots, X_l$ . Тогда блочную группу можно всегда представить в виде произведения простых блочных групп

$$A = P_1 P_2 \dots P_r. \quad (30)$$

В случае, когда  $A$  сама будет простой блочной группой (не равной единице), произведение сводится к одному сомножителю. Разложение блочной группы  $A$  на простые блочные группы запишем тогда в следующем виде:

$$\left. \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_r \end{array} \right| A \quad (31)$$

Заметим, что блочные группы имеют следующие свойства:

1. Любая блочная группа, состоящая из разных (неповторяющихся) элементов и содержащая более одного столбца, есть простая блочная группа.
2. Каждая блочная группа, состоящая из одной строки, простая.
3. Каждая блочная группа, состоящая из одного столбца, сложная ( $n > 1$ ).
4. Сумма простых блочных групп может быть сложной блочной группой, сумма сложных блочных групп может быть простой блочной группой.

**Пример 5.**

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix} + [\alpha_1] = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} = [\alpha][\beta_1 \beta_2],$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{bmatrix}.$$

В данном примере, суммируя вначале две простые блочные группы, получаем сложную блочную группу; затем, суммируя сложную блочную группу, получаем простую блочную группу. Следствием второго свойства блочных групп является то, что множество простых блочных групп бесконечно, если бесконечно множество  $X$ , из которого взяты элементы блочных групп. Разложение блочных групп на простые имеет специфические особенности, отличные, например, от особенностей разложения в области натуральных чисел. Одна из этих особенностей рассматривается в следующем утверждении.

**Утверждение 8.** Каждая сложная блочная группа имеет бесконечное множество способов разложения на простые блочные группы.

*Доказательство.* Положим, что  $A = P_1 P_2 \dots P_r$ . Легко заметить, что величина этого произведения не изменится, если любую из блочных групп  $P_i$  дополнить столбцами, содержащими некоторые элементы всех столбцов одного из оставшихся сомножителей.

Так как число таких возможных дополнений бесконечно, то каждая сложная блочная группа может быть разложена на простые бесконечно большим числом способов.

**Пример 6.**

$$[1] [2] = [1] [2 \ 1] = [1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} = [1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{bmatrix} = \dots$$

Рассмотрим свойства блочных групп с одинаковым числом элементов в строках и одинаковым числом элементов в столбцах, которые представляют наибольший интерес для применения алгебры блочных групп в анализе и синтезе организации структур.

*Определение 4.* Разложение блочной группы с одинаковым числом элементов в строках на простые блочные группы также с одинаковым числом элементов в строках, содержащих только элементы блочной группы  $A$ , называется *каноническим разложением*.

Очевидно, что каждая сложная блочная группа число с равным числом элементов в строках имеет конечное число канонических разложений. Это имеет большое практическое значение, например, в случае применения алгебры блочных групп к синтезу структур.

**Утверждение 9.** Если блочная группа с одинаковым числом элементов в строках  $A \neq 0$  ( $s$   $t$  строками) имеет каноническое разложение

$$A = \prod_{i=1}^m P_i, \quad (32)$$

то все остальные канонические разложения блочной группы  $A$  на простые однострочные блочные группы имеют вид

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad (33)$$

где числа  $\varepsilon_{ij}$  принимают только значения 0 или 1.

*Доказательство.* Положим, существует разложение

$$A = \prod_{j=1}^m P'_j,$$

отличное от (32). Тогда, перемножая  $A$  и любое  $P'_j$ , получим

$$AP'_j = P'_j \prod_{i=1}^m P_i = 0.$$

Далее,  $P'_j = (P_1 P_2 \dots P_m)^*_{j_i}$ , т. е.  $P'_j$  — сопряженный элемент по

отношению к  $\prod_{i=1}^m P_i$ . Однако можно заметить, что в классе

однострочных блочных групп  $P_i$  справедливо соотношение

$$(P_1 P_2 \dots P_m)^*_{j_i} = \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = 0, 1. \quad (34)$$

Тогда, действительно,

$$A = \prod_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \varepsilon_{ij} P_i, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

Непосредственно из утверждения 9 следует, что двустрочная сложная блочная группа имеет лишь три возможных канонических разложения на однострочные блочные группы

$$A = P_1 P_2 = P_1 (P_1 + P_2) = P_2 (P_1 + P_2). \quad (35)$$

Несмотря на то, что известен общий вид канонического разложения, определение общего числа возможных канонических разложений  $m$ -строчной сложной блочной группы — довольно трудная комбинаторная задача.

**Утверждение 10.** Число возможных канонических разложений отличной от нуля сложной блочной группы с  $m$  строками на однострочные сомножители удовлетворяет неравенству

$$R_m < 1 + k + \frac{k(k-1)}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} + \dots + \frac{k(k-1)(k-2)\dots m}{(m-1)!}, \quad (36)$$

где  $k = m (m - 1)$ .

*Доказательство.* Если блочная  $m$ -строчная группа не имеет разложения на однострочные сомножители, неравенство (36) полностью удовлетворяется. В случае когда имеется возможное разложение, она имеет вид (33).

На основе этого разложения можно выделить  $(m - 1)^2 + 1$  множеств разложений блочных групп  $A$ , ставя в соответствие каждому отдельному множеству те разложения, которые имеют одинаковое число нулевых блочных групп  $\varepsilon_{ij}$ . В общем в выражении (33) имеем  $m^2$  блочных групп  $\varepsilon_{ij}$ , причем нулевое значение может одновременно принимать не более чем  $k = m^2 - m = m (m - 1)$  блочных групп  $\varepsilon_{ij}$ . С другой стороны, нулевое значение должно иметь минимум  $m - 1$  блочных групп  $\varepsilon_{ij}$ , так как в противном случае в разложении (33) имелись бы идентичные сомножители и  $A = 0$ . Обозначая через  $e$  число нулевых значений  $\varepsilon_{ij}$ , имеем неравенство

$$m - 1 \leq e \leq m (m - 1) = k.$$

Таким образом,  $\Delta e$  выделенных множеств разложений блочных групп  $A$  равно

$$\Delta e = (m - 1) m - (m - 1) + 1 = (m - 1)^2 + 1.$$

### 4.3. Геометрическое изображение блочной группы

До сих пор мы рассматривали блочные группы как элементы переменного кольца и его общие свойства, исходя из определения действий сложения, умножения и т. д. Дадим геометрическую интерпретацию блочной группы. Отметим, что геометрическая интерпретация встречается также и в других случаях, например в случае комплексных чисел, которым ставятся в соответствие некоторые точки плоскости Гаусса.

Геометризация блочной группы имеет для нас значение прежде всего для ее применения при анализе и синтезе организации структур.

*Определение 5.* Если столбцы блочной группы  $A$  взаимно однозначно соответствуют деревьям графа  $\Gamma$  так, что каждый столбец представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дерева, то граф  $\Gamma$  называется геометрическим изображением блочной группы  $A$  и записывается в виде

$$\Gamma = \text{ob } (A). \quad (37)$$

Следовательно, геометрическим изображением блочной группы  $A$  служит любой детерминированный граф, удовлетворяющий условию (2.39), или класс графов подобных структур. Из принятого определения следует, что геометрическое изображение блочной группы — не однозначное понятие, так как блочной группе может соответствовать многоэлементное семейство графов, составляющих класс с подобной структурой. Однако это в известном смысле может явиться достоинством метода, так как становится возможным, например в задачах синтеза организации структур, нахождение не одного, а множества вариантов организации структуры, удовлетворяющей заданным условиям.

Не каждая блочная группа изображается связным графом — топологической цепью. Определение условий, при которых существует изображение блочной группы в виде связного графа, имеет принципиальное значение для применения метода моделирования организации структур с использованием блочных групп. Эти условия будут сформулированы в утверждении 12.

**Утверждение 11.** Блочная группа  $A$  с одинаковым числом элементов в строках, геометрическим изображением которого служит связный граф с вершинами  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , равна произведению  $n - 1$  простых однострочных сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_{n-1} \quad (38)$$

причем сомножители состоят из значений описывающей функции ребер, инцидентных произвольно выбранной вершине  $p_i$  ( $p_i \neq p_j$ , если  $i \neq j$ ) графа  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Равенство (38) справедливо в случае графов с одной и двумя вершинами. Рассмотрим произвольный связный граф с  $n$  вершинами. Соединим в нем две произвольные вершины ребром  $\alpha_k$ . Положим, что выражение (38) справедливо для образованного таким образом графа  $\Gamma^*$ , т. е. что блочная группа равна

$$A^* = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1} = (P'_1 + P'_2) A^{**},$$

где

$$P_1 = P'_1 + [\alpha_k], \quad P_2 = P'_2 + [\alpha_k].$$

Найдем блочную группу

$$A' = P_1 P_2 A^{**} = (P'_1 + P'_2) A^{**} [\alpha_k] + P'_1 P'_2 A^{**} = A^* [\alpha_k] + A'' \quad (39)$$

Блочную группу  $A$  графа  $\Gamma$  с несоединенными вершинами и висячим ребром  $\alpha_k$  можно представить в виде

$$A = A^* [\alpha_k] + A^0, \quad (40)$$

поскольку множество деревьев графа  $\Gamma^*$  (с замкнутым ребром  $\alpha_k$ ), дополненное элементом  $\alpha_k$ , представляет собой множество всех деревьев графа  $\Gamma$  с ребром  $\alpha_k$ . В выражении (40) символ  $A^0$  обозначает блочную группу, составленную из всех столбцов блочной группы  $A$ , не содержащих  $\alpha_k$ . Просуммировав равенства (39) и (40), получим

$$A + A' = A^0 + A'', \tag{40a}$$

Так как левая часть этого равенства не зависит от выбора ребра  $\alpha_k$ , а правая часть не содержит  $\alpha_k$ , значит, для каждого из следующих уравнений имеем

$$\begin{aligned} A + A'_1 &= A^0_1 + A''_1 \not\equiv \alpha_1, \\ A + A'_2 &= A^0_2 + A''_2 \not\equiv \alpha_2 \\ &\dots\dots\dots \\ A + A'_n &= A^0_n + A''_n \not\equiv \alpha_n \end{aligned}$$

Отсюда левая часть равенства (40а) не содержит обозначений ребра графа  $\Gamma$  и равна нулю. Тогда

$$A = A' = P_1 P_2 \dots P_{n-1},$$

что и требовалось доказать.

Сформулируем утверждение об условиях, при которых блочная группа имеет связное изображение.

**Утверждение 12.** Необходимые и достаточные условия существования геометрического изображения блочной группы в виде связного графа состоят в том, чтобы блочная группа  $A$  имела разложение на простые однострочные сомножители

$$A = P_1 P_2 \dots P_m, \tag{41}$$

причем произвольный элемент  $\alpha_{ik}$  должен встречаться самое большее в двух простых блочных группах  $P_i, P_j$ .

*Доказательство.* Разложение (41) непосредственно следует из утверждения 11 и не требует специального обоснования. Условие того, что элемент  $\alpha_{ik}$  встречается максимум в двух блочных группах  $P_i, P_j$ , тоже очевидно, так как в графе имеют место лишь ребра с двумя концами (одномерные симплексы).

В задачах синтеза организации структур при определении алгоритма образования блочных групп на компьютерах удобно добавить к приведенным условиям следующие дополнительные условия, подтверждающие отличие блочной группы от нуля:

1) в произведении  $A = P_1 P_2 \dots P_m$  не может быть одинаковых сомножителей, т. е.

$$P_i \neq P_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (i \neq j); \tag{42}$$

2) любой сомножитель  $P_k$  произведения (41) не может быть равен сумме произвольного числа остальных сомножителей, т. е.

$$P_i \neq \sum_k P_k, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (k \neq i). \tag{43}$$

Из утверждения 12 следует, что блочная группа, у которой число элементов в строках различно, не имеет связного геометрического изображения. Условие имеет не только теоретическое значение. Оно однозначно, например, условию физического соответствия матрицы



полных проводимостей и пассивной электрической структурной цепи.

#### 4.4. Дополнительная блочная группа и геометрическое обратное изображение

*Определение 6.* Дополнительной блочной группой для данной блочной группы  $A$  называется блочная группа  $A^d$ , столбцы которой представляют собой дополнения столбцов блочной группы  $A$  до множества элементов  $\alpha_{ik}$ , из которых состоит блочная группа  $A$ .

Если обозначить множество элементов  $\alpha_{ik}$ , из которых состоит блочная группа  $A$ , через  $L$ , то столбцы  $C_i^d$  блочной группы  $A^d$  определим как разность (в смысле понятий алгебры множеств)

$$C_1^d = L - C_1, C_2^d = L - C_2, \dots, C_n^d = L - C_n \quad (44)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — столбцы блочной группы  $A$ .

Дополнительную блочную группу можно в таком случае записать в виде

$$A^d = \{b_k \mid (b_k = L - a_k) \Delta (a_k \in A)\} \quad (44a)$$

или иначе

$$A^d = \{\{\alpha_{ik}\} - a_{pk} \mid \alpha_{ik} \in L, a_k \in A\}. \quad (44b)$$

Отметим справедливость такого свойства

$$(A + B)^d = A^d + B^d, \quad L = L_A \cup L_B, \quad (45)$$

которое означает, что дополнение — операция аддитивная. Дополнительную блочную группу можно также определить по отношению к другому множеству  $L^*$ , такому, что  $L \subset L^*$ , и тогда

$$A^d_{L^*} = \{L^* - a_k \mid a_k \in A\}. \quad (44b')$$

Способ получения дополнительной блочной группы проиллюстрируем на следующем примере.

**Пример 7.** Определить блочную группу  $A^d$  по отношению к блочной группе

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 \\ 3 & 2 & 8 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}.$$

Множество элементов блочной группы  $L$  таково:

$$L = \{2, 3, 5, 6, 8, 9\}.$$

Дополнительная блочная группа равна

$$A^d = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 5 \\ 9 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Оказывается, что для блочной группы удобно иметь дуальное геометрическое изображение, поэтому введем понятие обратного изображения геометрической блочной группы.

*Определение 7.* Граф  $\Gamma$  называется обратным изображением блочной группы  $A$ , если столбцы блочной группы  $A$  взаимно однозначно соответствуют дополнениям деревьев графа  $\Gamma$  так, что столбец блочной группы  $A$  представляет собой множество значений описывающей функции соответствующего дополнения дерева. Тогда напишем

$$\Gamma = \text{cob}(A). \quad (46)$$

Нетрудно заметить, что обратное изображение дополнительной блочной группы  $A^d$  одновременно служит изображением блочной группы  $A$  и наоборот.

Обратное изображение — это граф дуальной структуры по отношению к геометрическому изображению и иной блочной группы. Связное обратное изображение существует для любой блочной группы, имеющей связное изображение.

Таким образом, блочной группе ставится в соответствие пара графов дуальной структуры. Один из них служит геометрическим изображением, другой — обратным изображением.

Приведем примеры изображений простейших блочных групп.

Примеры геометрических изображений и обратных изображений блочных групп.

Порядок группы	Блочная группа	Геометрическое изображение	Обратное геометрическое изображение
1	$[\alpha]$		
2	$[\alpha_1, \alpha_2]$		
3	$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$		
4	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$		
5	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \alpha_3, \alpha_4 \end{bmatrix}$		
6	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \\ \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \end{bmatrix}$		
7	$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$		
8	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \\ \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \end{bmatrix}$		
9	$\begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \\ \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10} \\ \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15} \end{bmatrix}$		

Для обратного изображения сформулируем следующее утверждение.

**Утверждение 13.** Блочная группа  $A$  с одинаковым числом элементов в строках, геометрическое обратное изображение которой суть связный граф  $G$ , характеризующийся цикломатическим числом  $m$ , равняется произведению  $m$  простых однострочных сомножителей

$$A = P_1 P_2 \dots P_m$$

соответствующих линейно независимым контурам графа  $G$ .

*Доказательство.* Докажем это утверждение методом индукции.

Утверждение верно для графа с одним и двумя контурами.

Такой граф всегда может быть упрощен и приведен к виду, показанному на рис.1, а или рис.1, б, где ребра 1, 2, 3 — суммы соответствующих ребер графа с двумя контурами.

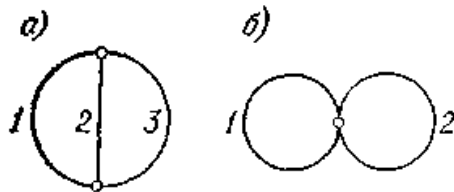


Рис.1. Граф с двумя циклами.

Для графа (рис.1, а) имеем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

т. е. действительно  $A = [1 \ 2] [1 \ 3]$ .

Для случая, изображенного на рис.1, б, утверждение также справедливо, так как

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1] [2].$$

Можно доказать, что утверждение справедливо и тогда, когда ребра 1, 2, 3 заменены последовательным соединением произвольного числа ребер.

Положим, что утверждение справедливо для графа с цикломатическим числом  $m - 1$ . Тогда можно доказать, что оно справедливо и для графа с числом контуров  $m$ .

Таким образом, утверждение справедливо для графов с произвольным числом независимых контуров и произвольной структурой.

Утверждения 11 и 13 будут особенно важны для применения метода блочных групп к анализу организационных структур. Они будут

служить основой анализа блочных групп, соответствующих заданным графам, представляющим структуру рассматриваемой блочной группы.

### **4.5. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы**

На множестве блочных групп можно определить различные операции; такой операцией является, например, — операция алгебраической производной.

*Определение 8.* Алгебраической производной блочной группы называется блочная группа  $\partial A/\partial \alpha$ , определенная как

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A \quad (47)$$

(столбцы, содержащие элемент  $\alpha$ , опущены.)

Если блочную группу представить как совокупность множеств, то производная

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \{b_k/b_k = a_k - \{\alpha\}, \alpha \in a_k, a_k \in A\}. \quad (47a)$$

Ниже приведены зависимости, аналогичные «обычной» производной:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 + A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}, \quad (48)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (A_1 A_2) = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} A_1.$$

Алгебраическую производную обозначим как  $A_\alpha$ , т. е.

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A_\alpha. \quad (49)$$

Заметим, что для одноэлементной блочной группы

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [\alpha] = 1. \quad (50)$$

**Пример 8.** Найдем алгебраическую производную блочной группы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial 4} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

По аналогии с математическим анализом нахождение производной будем называть дифференцированием.

Дифференцирование блочной группы имеет простую геометрическую интерпретацию, сформулированную ниже.

*Свойство 1.* Геометрическое изображение блочной группы  $\partial A/\partial \alpha$  представляет собой геометрическое изображение блочной группы  $A$  с замкнутым ребром  $\alpha$ .

Свойство 1 обосновано утверждениями 11 и 13. Действительно, если положить, что опорным узлом служит любой узел цепи, неинцидентный с ребром  $\alpha$ , то элемент  $\alpha$  будет встречаться в двух простых сомножителях  $P_1$  и  $P_2$ , т. е.

$$A = P_1(\alpha) P_2(\alpha) P_3(\alpha) \dots P_{n-1}(\alpha).$$

где  $n$  — число вершин графа.

Отсюда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial P_1}{\partial \alpha} P_2 \dots P_{n-1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha} P_1 P_3 \dots P_{n-1}.$$

Так как для односторонних простых чисел  $P_1$  и  $P_2$  справедливо, что  $\partial P_1/\partial \alpha = \partial P_2/\partial \alpha = 1$ , то

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = (P_1 + P_2) P_3 \dots P_{n-1}. \quad (51)$$

Это означает замыкание ребра  $\alpha$  в геометрическом изображении или отключение (или однополюсное отключение) ребра  $\alpha$  в обратном геометрическом изображении (тогда  $n - 1 = m$  — цикломатическое число графа). Поскольку величина блочной группы не зависит от выбора опорного узла, полученный результат носит общий характер.

Кроме алгебраической производной, сформулируем для блочных групп еще одно понятие (в известном смысле дуальное по отношению к производной) — понятие **обратной алгебраической производной**.

Алгебраической обратной производной блочной группы называется блочная группа  $\delta A/\delta \alpha$ , равная

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A \quad (52)$$

(столбцы, содержащие элемент  $\alpha$ , опущены.)

Воспользовавшись способом записи блочной группы в виде семейства множеств, можно записать обратную производную как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = a_k \mid \alpha \notin a_k, a_k \in A. \quad (52a)$$

Для обратной алгебраической производной имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\alpha}(A_1 + A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} + \frac{\delta A_2}{\delta\alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta\alpha}(A_1 A_2) &= \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} A_2 + \frac{\delta A_2}{\delta\alpha} A_1 + A_1 A_2. \end{aligned} \tag{53}$$

справедливые для произвольных блочных групп  $A_1$  и  $A_2$ . Кроме того,

$$\frac{\delta}{\delta\alpha}(A_1 A_2) = \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}. \tag{53a}$$

Для одноэлементной блочной группы имеем

$$\frac{\delta A}{\delta\alpha} \alpha = 0. \tag{54}$$

Соотношение алгебраических производной и обратной производной можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha}(A \alpha) = \frac{\delta A}{\delta \alpha}. \tag{53б}$$

Алгебраическую обратную будем обозначать как

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = A^\alpha. \tag{55}$$

**Пример 9.** Выполним расчет алгебраической обратной производной:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 4 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \frac{\delta A}{\delta 2} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Алгебраическая обратная производная имеет простую геометрическую интерпретацию.

*Свойство 2.* Геометрическое изображение блочной группы  $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$  представляет собой геометрическое изображение блочной группы  $A$ , в котором ребро отсоединенно в одной вершине и замкнуто в петлю. Обратное геометрическое изображение блочной группы  $\frac{\delta A}{\delta \alpha}$

представляет собой обратное изображение геометрической блочной группы  $A$  с замкнутым ребром  $\alpha$ . Правильность этого свойства следует из определений изображения, обратного изображения блочной группы и обратной производной.

Вследствие простых соотношений между алгебраическими действиями, выраженными через операции производной и обратной

производной, и действиями на графе, который является геометрической интерпретацией блочной группы, эти операции особенно важны в приложениях алгебры блочных групп, например, к анализу организации структур.

Отметим, что для блочной группы числа  $A$  всегда имеет место соотношение

$$A = \frac{\delta A}{\delta \alpha} + [\alpha] \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \quad (56)$$

где  $\alpha$  — элемент блочной группы  $A$ .

### 4.6. Детерминантная функция блочной группы

Аналогично с матричным исчислением на множестве блочных групп можно определить различные функции, например детерминантную функцию.

*Определение 9.* Детерминантной функцией блочной группы  $A$  называется функция

$$\det_Z A = \det_Z \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1 1} & \alpha_{m_2 2} & \dots & \alpha_{m_n n} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{m_k} z_{\alpha_{ik}}, \quad (57)$$

где  $Z$  — заданное множество комплексных чисел  $z_{\alpha_{ik}}$ , т. е.  $z_{\alpha_{ik}} \in Z$ .

Определение этой функции следующее. Нужно перемножить комплексные числа, поставленные в соответствие индексам столбцов, и просуммировать полученные выражения, соответствующие столбцам.

Эта функция может быть кратко названа определителем или детерминантом блочной группы.

По аналогии с теорией матриц для ее обозначения используем также символ  $\det_Z A$

$$|A| \text{ или } \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m_1 1} & \alpha_{m_2 2} & \dots & \alpha_{m_n n} \end{bmatrix} \quad (58)$$



**Пример 10.** Нахождение определителя.

Вычислить определитель блочной группы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

по отношению к комплексным числам  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8 \in \mathbb{Z}$ .

$$\det_Z A = z_1 z_3 z_7 + z_2 z_4 z_5 + z_1 z_4 z_8 + z_2 z_3 z_4.$$

Раскрытие определителя матрицы немного сложнее, чем раскрытие определителя блочной группы.

Определитель блочной группы имеет следующие свойства:

$$(A_1 = A_2) \Rightarrow (\det_Z A_2 = \det_Z A_1),$$

$$\det_Z \frac{\partial A}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left[ \det_Z A \right].$$

### 4.7. Функция совпадения блочной группы

Кроме ранее введенных операций сложения и умножения блочных групп, определим еще одну операцию — конъюнкцию.

*Определение 10.* Конъюнкцией  $A \cap B$  блочных групп  $A$  и  $B$  называется блочная группа, содержащая общие столбцы блочных групп  $A$  и  $B$  и не содержащая других столбцов.

**Пример 11.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \cap B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Определим на множестве блочных групп еще одну функцию, важную для применения алгебры блочных групп в теории организации,— функцию совпадения и обозначим

$$\text{Sim}_Z(A, B)^{\varphi\psi}, \quad z_{\alpha_{ik}} \in \mathbb{Z}.$$

Функция совпадения равна

$$\begin{aligned} \text{Sim}_Z(A, B)^{\varphi\psi} &= \det_Z(A \cap B) \text{ при } \varphi^-, \\ &\quad - \det_Z(A \cap B) \text{ при } \psi. \end{aligned} \tag{59}$$

При этом, имеется в виду случай  $A \cap B \neq 0$ .

Формула (59) дает общее определение функции совпадения, однако в прикладном значении этой функции наиболее важна частная форма записи функции совпадения: эта функция относится к блочной группе  $A$ , геометрическое обратное изображение которой содержит два ориентированных ребра  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Определение 11.* Функцией совпадения

$$Sim_z \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right), \quad z_{\alpha_k}, z_\alpha, z_\beta \in Z \quad (60)$$

блочной группы  $A$ , обратное геометрическое изображение которой имеет два ориентированных ребра  $\alpha$  и  $\beta$ , называется функция, обладающая следующими свойствами:

1) функция (60) — линейная комбинация выражений, имеющих в определителях  $\det \frac{\partial A}{\partial \alpha}$  и  $\det \frac{\partial A}{\partial \beta}$ ;

2) если исключить из обратного изображения ребра, определенные данным выражением, получим цикл, в котором ребра  $\alpha$  и  $\beta$  ориентированы согласно или встречно, то слагаемое имеет соответственно коэффициент  $+1$  или  $-1$  (рис. 2).

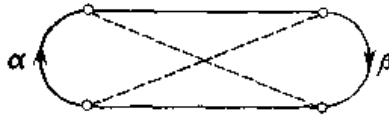


Рис. 2. Пояснение определения функции совпадения.

Функцию совпадения (60) можно в таком случае записать

$$Sim_z \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = \det_z \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$

когда ребра  $\alpha$  и  $\beta$  ориентированы согласно,

$$-\det_z \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$

когда ребра  $\alpha$  и  $\beta$  ориентированы встречно.

(61)

**Пример 12.** Определить функции совпадения блочной группы  $A$ , обратное изображение которой есть граф

$$Sim_z \left( \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \frac{\partial A}{\partial \beta} \right),$$



Столбцы, общие для  $\partial A/\partial 1$  и  $\partial A/\partial 7$ , взяты в рамки.

При рассмотрении графа на рис. 3 замечаем, что при исключении ребер 5 2 6, 5 3 6, 5 8 3, 5 8 6 граф сводится к графу с одним контуром, в котором ребра  $\alpha = 1$  и  $\beta = 7$  ориентированы согласно. С другой стороны, при исключении из графа ребер 2 3 4 в полученном контуре ребра 1 и 7 ориентированы встречно.

Поэтому выражения  $z_5z_2z_6$ ,  $z_5z_3z_6$ ,  $z_5z_8z_3$ ,  $z_5z_8z_6$  имеют знак плюс,  $z_2z_3z_4$  — знак минус.

Окончательно получим

$$\text{Sim} \left( \frac{\partial A}{\partial 1}, \frac{\partial A}{\partial 7} \right) = z_5z_2z_6 + z_5z_3z_6 + z_5z_8z_3 - z_2z_3z_4.$$

Можно также обосновать свойство, согласно которому при исключении из обратного изображения блочной группы ребер, определенных столбцами  $\partial A/\partial \alpha \cap \partial A/\partial \beta$ , граф всегда сводится к такому графу, у которого цикломатическое число  $m=1$ . Определение ориентации ребер  $\alpha$  и  $\beta$  по отношению друг к другу не встречает трудностей.

Не каждый граф отображает организационную структуру, в которой не могут присутствовать лишние элементы. Для определения класса графов, с которыми мы будем иметь дело при анализе организационных структур, введем общее определение соответственного или сильно связного графа.

*Определение 12.* Граф называется соответственным, если каждые две его вершины принадлежат хотя бы одному элементарному контуру.

Для соответственного графа справедливо следующее свойство.

*Свойство 3.* Граф (мультиграф) будет соответственным тогда и только тогда, когда он служит обратным изображением блочной группы  $A$ , удовлетворяющего условию

$$\exists \alpha \in A \forall \beta \in A \left[ \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta} \neq 0 \right]. \quad (62)$$

Это свойство следует из определения функции совпадения, согласно которому столбцы

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

соответствуют ребрам, исключение которых приводит к упрощению графа обратного изображения к одному циклу с ребрами  $\alpha$  и  $\beta$ .

На рис. 4 показано несколько графов, из которых только один граф соответственный.

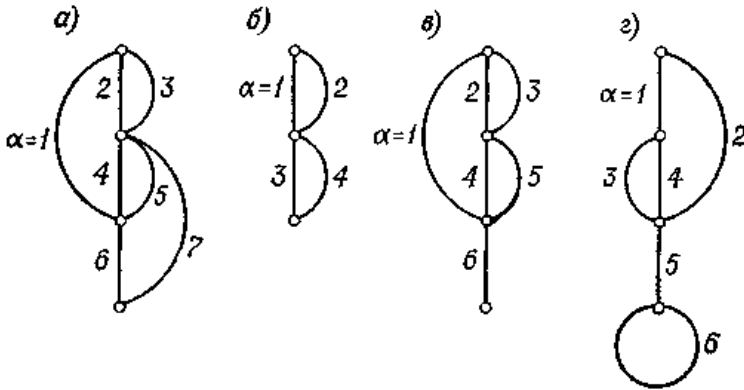


Рис. 4. Примеры графов: а) соответственный; б, в, г) несоответственные.

Если применить условие (62), например к графу, показанному на рис. 4, б, получим

$$A = [1 \ 2] [3 \ 4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 2} = [3 \ 4] \neq 0,$$

а также

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 3} = \frac{\partial A}{\partial \alpha} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} = 0.$$

т. е. условие (62) не выполняется для графа (рис. 4, б) и этот граф не соответственный. Применение условия (62) для определения характера графа излишне, если известна его структура. Из рассмотрения контуров графа можно непосредственно сделать вывод о том, выполняется ли условие (62). Это условие весьма ценно, если известно только блочная группа, не разложенная на первичные сомножители, а также для использования при синтезе организационных структур с помощью блочных групп на ЭВМ.

## 4.8. Понятие ряда и последовательности блочных групп

Если натуральным числам поставить в соответствие блочные группы, то можно сказать, что таким образом определена последовательность блочных групп, записываемая в виде

$$\langle A_n \rangle = A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$$

Понятия сходимости и пределы последовательности блочных групп основываются на понятии метрики. Положим, дана блочная группа

$$A = \{a_k \mid \alpha_{ij} \in a_k, i, j, k = 1, 2, 3, \dots\},$$

где мощность множеств  $a$  и  $A$  конечная, а  $\alpha_{ij}$  — элементы нормированного пространства.

Введем сначала понятие нормы множества  $a$ , которую обозначим как  $\|a\|$ . Введем определение

$$a = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v\} \Rightarrow \|a\| = \sqrt{\|\alpha_1\|^2 + \|\alpha_2\|^2 + \dots + \|\alpha_v\|^2}, \quad \|\emptyset\| = 0,$$

где  $\|\alpha_i\|$  — норма элемента  $\alpha_i$ .

Норму блочной группы определим как

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{\lambda} \|\alpha_{\lambda}\|^2}$$

где  $\lambda$  проходит все столбцы, имеющиеся в блочной группе  $A$ . Метрику на множестве блочных групп определим как

$$\rho(A, B) = \|A \underline{\Delta} B\|,$$

где  $\underline{\Delta}$  — означает симметричную разность множеств. Из этого определения следует, что метрика  $\rho(A, B)$  удовлетворяет следующим основным условиям:

$$\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

$$\rho(A, B) = \rho(B, A),$$

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C).$$

Для двух произвольных блочных групп справедливо неравенство

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

которое следует из неравенства Буняковского — Шварца.

Если для последовательности блочных групп  $A_n$  существует блочная группа  $A$ , удовлетворяющее равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(A_n, A) = 0,$$

то блочная группа  $A$  называется пределом последовательности блочных групп  $A_n$  и записывается в виде

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

Последовательность  $A_n$  называется сходящейся, если существует предел, и, наоборот, расходящейся, если таковой отсутствует.

Кроме сходимости по отношению к метрике, введем и другие понятия сходимости последовательности блочных групп, которые обозначаются

$$\mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } A_n \text{ и } \mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } A_n$$

и определяются с помощью изображения и обратного изображения блочной группы:

$$(\mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } A_n = A) \Leftrightarrow [\mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{ob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{ob } (A)],$$

$$(\mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } A_n = A) \Leftrightarrow [\mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} \text{cob } (A_n) = \sigma] \wedge [\sigma = \text{cob } (A)],$$

Примером сходимости последовательности  $A_n$  по отношению к обратному изображению может служить структура в виде цепи, метрический граф которой имеет ступенчатую структуру с равномерно распределенными на отрезке  $[0, 1]$  вершинами (рис. 5).

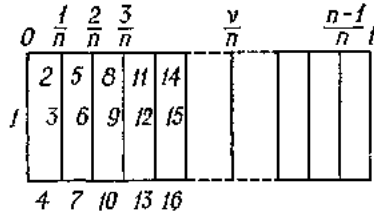


Рис. 5. Лестничный граф с равномерно распределенными вершинами.

Если увеличить число делений отрезка  $[0, 1]$ , то при  $n \rightarrow \infty$  граф преобразуется в структуру с густым (однако четным) множеством ребер. Нумеруя грани графа, например, как показано на рис. 5, можно определить следующую последовательность блочных групп:

$$A_1 = [1 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$A_2 = [1 \ 2 \ 3 \ 4] [3 \ 5 \ 6 \ 7],$$

$$A_3 = [1 \ 2 \ 3 \ 4] [3 \ 5 \ 6 \ 7] [6 \ 8 \ 9 \ 10],$$

.....

обратным изображением которой и служит граф.

Эта последовательность сходится к обратному изображению блочной группы

$$A = \text{cob}^{-1} \sigma, \quad \sigma = \mathop{\text{Lim}}_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

где  $S_n$  — последовательность цепей (метрических графов) вида изображенных на рис. 5.

Рядом блочных групп будем называть выражение

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Блочные группы  $A_1, A_2, A_3, \dots$  называются составляющими ряда, блочные группы же

$$S_1 = A_1,$$

$$S_2 = A_1 + A_2,$$

$$S_3 = A_1 + A_2 + A_3,$$

.....

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$$

есть частичные суммы ряда. Бесконечный ряд блочных групп называется сходящимся, если последовательность частичных сумм сходится. Предел последовательности частичных сумм называется суммой ряда блочных групп. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

то

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

## **5. Блочные группы и графы высших рангов**

Различного класса структуры состоят из элементов, взаимодействующих друг с другом различным образом. Например, структуры физических систем могут состоять из многополюсных элементов (многополюсников); их также можно рассматривать как структуры, состоящие из блоков или подблоков. Топологические модели таких организационных структур представим в виде графов второго ранга, построенных из двумерных континуумов (блоков) с выделенными точками, называемыми полюсами. Блоки соответствуют ребрам линейных графов первого ранга. Блочные группы блок-графов назовем блочными группами высших рангов — второго, третьего и т. д. Эти блочные группы, подобно матрицам, состоящим из блочных матриц, представляют собой семейства блочных групп низшего ранга. Основываясь на определении операций над блочными группами первого ранга, определим в соответствии с теорией множеств, теории графов и теорией математической логики операции над блочными группами высшего ранга и графами высшего ранга.



## 5.1. Определение блочной группы второго ранга

В общем определении блочных групп не уточнялись характерные черты множеств элементов, из которых состоит эта блочная группа, поэтому можно рассмотреть случаи, когда эти элементы также являются блочными группами. В связи с этим введем понятие блочная группа  ${}^2A$  второго ранга следующим образом.

*Определение 5.1.* Блочная группа второго ранга  ${}^2A$  есть семейство множеств  ${}^2a_j$

$${}^2A = \{ {}^2a_j \}_{j=1, 2, \dots, n}. \quad (5.1)$$

где

$${}^2a_j = \{ A_{ij} \}_{i=1, 2, \dots, m},$$

$A_{ij}$  — блочная группа первого ранга.

Блочную группу первого ранга можно также записать в виде

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

или

$${}^2A = [A_{ij}]_{\substack{i=1, 2, \dots, m, \\ j=1, 2, \dots, n}} \quad (5.3)$$

где элементы  $A_{ij}$  — блочные группы первого ранга.

Введем понятие замещающей блочной группы первого ранга для блочной группы второго ранга.

*Определение 5.2.* Замещающей блочной группой для блочной группы второго ранга  ${}^2A$  называется блочная группа первого ранга  $A$ , полученная применением операций алгебры блочных групп над элементами  $A_{ij}$  числа  ${}^2A$ :

$$A = \sum_{i=1}^n \prod_{i=1}^m A_{ij}, \quad {}^2A = [A_{ij}]_{\substack{i=1, 2, \dots, m, \\ j=1, 2, \dots, n}} \quad (5.4)$$

Обозначим соотношение соответствия замещающей блочной группы  $A$  блочной группе  ${}^2A$  через

$$A = {}^e {}^2A \quad \text{или} \quad {}^2A = {}^e A. \quad (5.5)$$

Поясним способ нахождения замещающей блочной группы следующим примером:

$${}^2A = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \hline [1 \ 2 \ 4] & \begin{bmatrix} 15 \\ 26 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} & [\emptyset] \end{array} \right] \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 4] \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} [\emptyset] \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 23 & 44 \\ 55 & 66 \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} A, \quad {}^2A \stackrel{e}{=} A.$$

Определим для блочной группы второго ранга понятие равенства, а также операции сложения и умножения:

$$({}^2A = {}^2B) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} (A = B), \quad (5.6)$$

$${}^2A + {}^2B \stackrel{e}{=} A + B, \quad (5.7)$$

$${}^2A \cdot {}^2B \stackrel{e}{=} AB, \quad (5.8)$$

где  $A \stackrel{e}{=} {}^2A$ ,  $B \stackrel{e}{=} {}^2B$ .

Таким образом, соотношение  $\stackrel{e}{=}$  представляет собой гомеоморфизм. Для блочных групп второго ранга справедливы следующие соотношения:

$$\{({}^2A \subset {}^2B) \wedge ({}^2B \subset {}^2A)\} \Rightarrow ({}^2A = {}^2B), \quad (5.9)$$

$$\{{}^2C = ({}^2A \underline{\underline{\Delta}} {}^2B)\} \Rightarrow ({}^2C = {}^2A + {}^2B), \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} [{}^2C = \{{}^2c \mid ({}^2c = {}^2a \cup {}^2b) \wedge ({}^2a \in {}^2A) \wedge ({}^2b \in {}^2B) \wedge ({}^2a \cap {}^2b = \emptyset) \wedge \\ \wedge (r({}^2a \cup {}^2b) = 2k - 1)\}] \Rightarrow ({}^2C = {}^2A \cdot {}^2B), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $\underline{\underline{\Delta}}$  означает симметрическую разность,  $r$  — функция повторений, а  $k$  — натуральное число.

Легко заметить, что равенство блочных групп второго ранга рефлексивно, симметрично и транзитивно, операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно по отношению к сложению.

Модуль сложения  ${}^2[ ] = 0$  блочных групп второго ранга есть всякая блочная группа второго ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем сложения  $[ ]$  блочных групп первого ранга; а модуль умножения  $[\emptyset] = 1$  блочных групп второго ранга представляет собой всякую блочную группу второго ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем умножения  $[\emptyset]$  блочных групп первого ранга. При этом справедливы следующие соотношения:

$$1. \quad [AA\dots A]_{12\dots n} = \begin{cases} = A & \text{при нечетном } n, \\ = 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (5.12)$$

$$2. \quad \left[ \begin{array}{c} n \text{ раз} \\ \left\{ \begin{array}{c} A \\ A \\ \vdots \\ A \end{array} \right\} \end{array} \right] = \begin{cases} = 0 & \text{при } A \in \mathfrak{S}, \\ = 1 & \text{при } A \in \mathfrak{S}, n \text{ четное}, \\ = A & \text{при } A \in \mathfrak{S}, n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (5.13)$$

где  $\mathfrak{S}$  — множество блочных групп вида

$$A = \{[\emptyset], a_1, a_2, \dots\} \\ 3. \quad ([A_1 \dots A_j \dots A_n = 0] \Leftrightarrow \{(A_j = [A_1 \dots A_{j-1} A_{j+1} \dots A_n]) \vee \\ \vee (A_1 = A_2 = \dots = A_j = \dots = A_n = 0)\}, \\ j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.14)$$

$$4. \quad \left( \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right] = 0 \right) / \Rightarrow (A_1 = 0 \vee A_2 = 0). \quad (5.15)$$

где  $/ \Rightarrow$  обозначает отрицание импликации

5. Равенство

$$\left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right] = 0. \quad (5.16)$$

не имеет единственного решения для  $A_1$  и  $A_2$ .

$$6. \quad \left( \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} \right] \right) / \Rightarrow (A_2 = A_3). \quad (5.17)$$

Блочную группу второго ранга  ${}^2A^d$ , элементы которой — дополнительные блочные группы  $A_{ij}^d$ , назовем дополнительной блочной группой второго ранга. Для дополнительных блочных групп второго ранга применяем те же самые операции, что и для блочных групп первого ранга, поэтому приведенные выше определения и соотношения справедливы также и для дополнительных блочных групп второго ранга  ${}^2A^d$ .

Если в блочной группе  ${}^2A$  все элементы  $A_{ij}$  заменить на их дополнительные блочные группы  $A_{ij}^d$ , то получим дополнительную блочную группу второго ранга  $({}^2A)^{d*}$ , замещающая блочная группа которой  $A^{d*}$  в общем случае не равна дополнению  $A^d$  замещающей блочной группы  $A$  для блочной группы  ${}^2A$ , т. е.

$$A^d \neq A^d, \quad A^{d*} = ({}^2A)^{d*}, \quad A = {}^e A,$$

а следовательно,

$${}^2A^d \neq ({}^2A)^{d*}.$$

### 5.1.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы второго ранга

Алгебраическую производную и обратную производную определим на основе понятий производной и обратной производной замещающей блочной группы.

*Определение 5.3.* Алгебраической (обратной) производной  $\partial({}^2A)/\partial\alpha$  [  $\delta({}^2A)/\delta\alpha$  ] блочной группы второго ранга  ${}^2A$  по элементу  $\alpha$  называется всякая блочная группа второго ранга, замещающая блочная группа которой  $\partial A/\partial\alpha$  [  $\delta A/\delta\alpha$  ] есть производная (обратная производная) замещающей блочной группы  $A$  для блочной группы  ${}^2A$  по элементу  $\alpha$ . Это определение можно представить в виде соотношений

$$\frac{\partial({}^2A)}{\partial\alpha} = \frac{\partial A}{\partial\alpha}, \quad \frac{\delta({}^2A)}{\delta\alpha} = \frac{\delta A}{\delta\alpha}, \quad {}^2A = A. \quad (5.18)$$

На основании правил для производной и обратной производной суммы и произведения блочных групп первого ранга можно написать следующие соотношения для блочных групп второго ранга:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} [A_1 A_2] = \left[ \frac{\partial A_1}{\partial\alpha} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha} \right], \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha} A_2 \\ A_2 \frac{\partial A_2}{\partial\alpha} \end{bmatrix}, \quad (5.20)$$

$$\frac{\delta}{\delta\alpha} [A_1 A_2] = \left[ \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} \frac{\delta A_2}{\delta\alpha} \right], \quad (5.21)$$

$$\frac{\delta}{\delta\alpha} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta A_1}{\delta\alpha} \\ \frac{\delta A_2}{\delta\alpha} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Следовательно, обратная производная  $\delta({}^2A)/\delta\alpha$  — операция аддитивная и мультипликативная.

На основе этих соотношений можно определить алгебраические производную и обратную производную по элементу  $\alpha$ , любой блочной группы второго ранга.

**Пример 5.1.**

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha} & A_1 & \frac{\partial A_2}{\partial \alpha} & A_2 \\ A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial \alpha} & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial \alpha} \end{bmatrix}.$$

Если, например, блочные группы  $A_1$  и  $A_2$  не содержат элемента  $\alpha$ , то

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{\partial A_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial A_4}{\partial \alpha} \end{bmatrix}.$$

По этим же правилам находятся алгебраическая производная и обратная производная дополняющих блочных групп второго ранга.

Для определения алгебраической производной блочной группы второго ранга  ${}^2A$  по элементу блочной группы первого или второго ранга принимаем следующие правила:

$$\frac{\partial A}{\partial [\alpha_1 \alpha_2]} \stackrel{df}{=} \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}} \stackrel{df}{=} \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}. \quad (5.23)$$

из которых следует

$$\begin{aligned} \frac{\partial({}^2A)}{\partial [A_1 A_2]} &= \frac{\partial({}^2A)}{\partial [A_1 + A_2]} = \frac{\partial({}^2A)}{\partial A_1} + \frac{\partial({}^2A)}{\partial A_2}, \\ \frac{\partial({}^2A)}{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}} &= \frac{\partial({}^2A)}{\partial (A_1 A_2)} = \frac{\partial^2({}^2A)}{\partial A_1 \partial A_2} \end{aligned} \quad (5.24)$$

и

$$\frac{\partial({}^2A)}{\partial({}^2B)} = \frac{\partial({}^2A)}{\partial(B)} \stackrel{e}{=} \frac{\partial A}{\partial B} = (A^d B)^d, \quad A \stackrel{e}{=} A, \quad B \stackrel{e}{=} B, \quad (5.25)$$

как естественное обобщение соотношения  $\partial A / \partial \alpha = (A^d [\alpha])^d$ , а также

$$\frac{\partial({}^2A)}{\partial A} \stackrel{e}{=} \frac{\partial A}{\partial A} = \begin{cases} 1 & \text{для нечетного количества столбцов блочной группы } A, \\ 0 & \text{для четного количества столбцов блочной группы } A, \end{cases} \quad (5.26)$$

где  $A = {}^e A$ .

**Пример 5.2.** Найдем алгебраическую производную блочной группы второго ранга

$${}^2 A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

по блочной группе первого ранга  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ .

**Решение**

$$\frac{\partial({}^2 A)}{\partial A} = \frac{\partial^2({}^2 A)}{\partial 1 \partial 2} + \frac{\partial^2({}^2 A)}{\partial 1 \partial 3} = \frac{\partial}{\partial 2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial 3} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial 1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 4 \end{bmatrix} = 4 + 4 = 0.$$

## 5.2. Блочные группы $k$ -го ранга

Блочные группы  $k$ -го ранга построим из блочных групп  $(k - 1)$ -го ранга подобно тому, как были построены блочные группы 2-го ранга. В связи с этим введем следующее определение.

*Определение 5.4.* Блочной группой  $k$ -го ранга  ${}^k A$  называется семейство множеств  ${}^k a_j$

$${}^k A = \{ {}^k a_j \}_{j=1,2,\dots,n}, \quad (5.27)$$

где

$${}^k a_j = \{ {}^{k-1} A_{ij} \}_{i=1,2,\dots,m}$$

${}^{k-1} A_{ij}$  - блочная группа  $(k - 1)$ -го ранга. Блочную группу  $k$ -го ранга можно также записать в виде

$${}^k A = \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_{11} & \dots & {}^{k-1} A_{1n} \\ {}^{k-1} A_{21} & \dots & {}^{k-1} A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ {}^{k-1} A_{m1} & \dots & {}^{k-1} A_{mn} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

или

$${}^k A = [ {}^{k-1} A_{ij} ]_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}} \quad (5.29)$$

где элементы  ${}^{k-1}A_{ij}$  — блочные группы  $(k - 1)$ -го ранга.

Введем понятие замещающей блочной группы для блочной группы  $(k - 1)$ -го ранга.

*Определение 5.5.* Замещающей блочной группой для блочной группы  $k$ -го ранга  ${}^kA$  называется блочная группа 1-го ранга  $A$ , полученная применением операций алгебры блочных групп над замещающими блочными группами для блочных групп  $(k - 1)$ -го ранга, являющимися элементами блочной группы  ${}^kA$ :

$$A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m A_{ij}, \quad {}^kA = [{}^{k-1}A_{ij}]_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}} \quad (5.30)$$

где  $A_{ij}$  — замещающая блочная группа для  ${}^{k-1}A_{ij}$ . Обозначим соотношение соответствия замещающей блочной группы  $A$  блочной группе  ${}^kA$  через

$$A \stackrel{e}{=} {}^kA \quad \text{или} \quad {}^kA \stackrel{e}{=} A. \quad (5.31)$$

Для блочной группы  $k$ -го ранга определим понятие равенства, а также операции сложения и умножения

$$\left. \begin{aligned} ({}^kA = {}^kB) &\stackrel{df}{\Leftrightarrow} A = B, \\ {}^kA + {}^kB &\stackrel{e}{=} A + B, \\ {}^kA \cdot {}^kB &\stackrel{e}{=} AB, \end{aligned} \right\} A \stackrel{e}{=} A, B \stackrel{e}{=} B. \quad (5.32)$$

Таким образом, соотношение  $\stackrel{e}{=}$  представляет собой гомеоморфизм.

Для блочной группы  $k$ -го ранга справедливы следующие соотношения:

$$({}^kA \subset {}^kB) \wedge ({}^kB \subset {}^kA) \Rightarrow ({}^kA = {}^kB), \quad (5.33)$$

$$\{{}^kC = ({}^kA \underline{\Delta} {}^kB)\} \Rightarrow ({}^kC = {}^kA + {}^kB), \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} [{}^kC = \{{}^kc \mid ({}^kc = {}^ka \cup {}^kb) \wedge ({}^ka \in {}^kA) \wedge ({}^kb \in {}^kB) \wedge ({}^ka \cap {}^kb = \emptyset) \wedge \\ \wedge (r({}^ka \cup {}^kb) = 2n - 1)\}] \Rightarrow ({}^kC = {}^kA \cdot {}^kB), \end{aligned} \quad (5.35)$$

где  $\underline{\Delta}$  есть симметричная разность,  $r$  — функция повторений, а  $n$  — натуральное число.

Формулы (5.32) можно обобщить на блочные группы разных рангов  ${}^kA$  и  ${}^mB$  ( $k > 1, m > 1$ ):

$$\left. \begin{aligned} &({}^k A = {}^m B) \stackrel{df}{\Leftrightarrow} A = B, \\ &{}^k A + {}^m B = {}^e A + B, \\ &{}^k A \cdot {}^m B = {}^e AB, \end{aligned} \right\} A = {}^e k A, B = {}^e m B. \quad (5.36)$$

Подобно блочным группам 2-го ранга, равенство блочных групп  $k$ -го ранга рефлексивно, симметрично и транзитивно, операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения. Поэтому можно написать следующие соотношения:

$$[{}^k A_1 [{}^k A_2 {}^k A_3]] = [({}^k A_1 {}^k A_2) {}^k A_3] = [{}^k A_1 {}^k A_2 {}^k A_3],$$

$$\left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 \\ [{}^k A_2 \\ {}^k A_3] \end{array} \right] = \left[ \left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{array} \right] \right] \left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \\ {}^k A_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \\ {}^k A_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 \\ [{}^k A_2 {}^k A_3] \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} {}^k A_1 {}^k A_1 \\ {}^k A_2 {}^k A_3 \end{array} \right].$$

Модуль сложения  ${}^k[\ ] = 0$  блочных групп  $k$ -го ранга есть всякая блочная группа  $k$ -го ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем сложения  $[\ ]$  блочных групп первого ранга.

Модуль умножения  ${}^k[\emptyset] = 1$  блочных групп  $k$ -го ранга представляет собой всякую блочную группу  $k$ -го ранга, замещающая блочная группа которой служит модулем умножения  $[\emptyset]$  блочных групп первого ранга. При этом справедливы следующие соотношения и соответствия:

$$1. [{}^k A {}^k A \dots {}^k A]_{12\dots n} = \begin{cases} = A & \text{при нечетном } n, \\ = 0 & \text{при четном } n. \end{cases} \quad (5.37)$$

$$2. \left[ n \text{ раз} \left\{ \begin{array}{c} {}^k A \\ {}^k A \\ \vdots \\ {}^k A \end{array} \right. \right] = \begin{cases} = 0 & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, \\ = 1 & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, n \text{ четное}, \\ = A & \text{при } {}^k A \in \mathfrak{N}, n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (5.38)$$

где  $\mathfrak{N}$  — множество блочных групп  $k$ -го ранга

$$3. ({}^k A_1 \dots {}^k A_j \dots {}^k A_n = 0) \Leftrightarrow \{({}^k A_j = [{}^k A_1 \dots {}^k A_{j-1} {}^k A_{j+1} \dots {}^k A_n]) \vee \vee ({}^k A_1 = {}^k A_2 = \dots = {}^k A_j = \dots = {}^k A_n = 0)\},$$



$$j = 1, 2, \dots, n. \tag{5.39}$$

$$4. \quad \left( \begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = 0 \right) / \Rightarrow ({}^k A_1 = 0 \vee {}^k A_2 = 0). \tag{5.40}$$

где  $/ \Rightarrow$  обозначает отрицание импликации

5. Равенство

$$\begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = 0. \tag{5.41}$$

не имеет единственного решения.

$$6. \quad \left( \begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^k A_1 \\ {}^k A_3 \end{bmatrix} \right) / \Rightarrow ({}^k A_2 = {}^k A_3). \tag{5.42}$$

Если элементы блочной группы  $k$ -го ранга  ${}^k A^d$  являются дополнительными блочными группами  $(k-1)$ го ранга  ${}^{k-1} A^d_i$

$${}^k A^d = \{ {}^k a^d_{ij} \}_{i,j=1,2,\dots,n}, \quad {}^k a^d_i = \{ {}^{k-1} A^d_{ij} \}_{j=1,2,\dots,m} \tag{5.43}$$

то блочная группа  ${}^k A^d$  называется дополнительной блочной группой  $k$ -го ранга.

Для дополнительных блочных групп  $k$ -го ранга справедливы те же операции, что и для блочных групп  $k$ -го ранга.

### 5.2.1. Алгебраическая производная и обратная производная блочной группы $k$ -го ранга

Подобно блочным группам второго ранга, определим алгебраическую производную и обратную производную блочных групп  $k$ -го ранга с помощью понятий производной и обратной производной замещающей блочной группы.

*Определение 5.6.* Алгебраической производной (обратной производной)  $[\partial({}^k A)/\partial\alpha]$   $[\delta({}^k A)/\delta\alpha]$  блочной группы  $k$ -го ранга  ${}^k A$  по элементу  $\alpha$  называется всякая блочная группа  $k$ -го ранга, замещающаяся блочная группа которой  $(\partial A/\partial\alpha)$   $(\delta A/\delta\alpha)$  есть алгебраическая производная (обратная производная) замещающей блочной группы  $A$  для блочной группы  ${}^k A$  по элементу  $\alpha$ . Это определение можно представить в виде следующих соотношений:

$$\frac{\partial({}^k A)^e}{\partial\alpha} = \frac{\partial A}{\partial\alpha}, \quad \frac{\delta({}^k A)^e}{\delta\alpha} = \frac{\delta A}{\delta\alpha}, \quad {}^k A^e = A. \tag{5.44}$$

На основании правил для производной и обратной производной суммы и произведения блочных групп первого ранга можно написать следующие соотношения для блочных групп  $k$ -го ранга:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [{}^{k-1} A_1 {}^{k-1} A_2] = \left[ \frac{\partial({}^{k-1} A_1)}{\partial \alpha} \quad \frac{\partial({}^{k-1} A_2)}{\partial \alpha} \right], \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_1 \\ {}^{k-1} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial({}^{k-1} A_1)}{\partial \alpha} & {}^{k-1} A_2 \\ {}^{k-1} A_1 & \frac{\partial({}^{k-1} A_2)}{\partial \alpha} \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} [{}^{k-1} A_1 {}^{k-1} A_2] = \left[ \frac{\delta({}^{k-1} A_1)}{\delta \alpha} \quad \frac{\delta({}^{k-1} A_2)}{\delta \alpha} \right], \quad (5.47)$$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha} \begin{bmatrix} {}^{k-1} A_1 \\ {}^{k-1} A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta({}^{k-1} A_1)}{\delta \alpha} \\ \frac{\delta({}^{k-1} A_2)}{\delta \alpha} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Из правил (5.23) для алгебраической производной блочных групп по сумме и произведению одноэлементных блочных групп имеем

$$\frac{\partial({}^{k_1} A)}{\partial({}^{k_2} A_1 + {}^{k_2} A_2)} = \left[ \frac{\partial({}^{k_1} A)}{\partial({}^{k_2} A_1)} \quad \frac{\partial({}^{k_1} A)}{\partial({}^{k_2} A_2)} \right], \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial({}^{k_1} A)}{\partial({}^{k_2} A_1 {}^{k_2} A_2)} = \frac{\partial^2({}^{k_1} A)}{\partial({}^{k_2} A_1) \partial({}^{k_2} A_2)}, \quad (5.50)$$

$$\frac{\partial({}^k A)}{\partial({}^r B)} \stackrel{e}{=} \frac{\partial A}{\partial B} = (A^d B)^d, \quad A \stackrel{e}{=} {}^k A, \quad B \stackrel{e}{=} {}^r B. \quad (5.51)$$

Эти зависимости представляют собой обобщения формул (5.24) и (5.25). Обобщения формул (5.19) и (5.20) в виде

$$\frac{\partial({}^{k_1} A_1 {}^{k_1} A_2)}{\partial({}^{k_2} A)} = \left[ \frac{\partial({}^{k_1} A_1)}{\partial({}^{k_2} A)} \quad \frac{\partial({}^{k_1} A_2)}{\partial({}^{k_2} A)} \right], \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial({}^{k_2}A)} \begin{bmatrix} {}^{k_1}A_1 \\ {}^{k_1}A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial({}^{k_1}A_1)}{\partial({}^{k_2}A)} & {}^{k_1}A_1 \\ {}^{k_1}A_2 & \frac{\partial({}^{k_1}A_2)}{\partial({}^{k_2}A)} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

также справедливы.

**Пример 5.3.**

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} {}^kA_1 \\ {}^kA_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} {}^rA_{11} & {}^rA_{12} \\ {}^rA_{21} & {}^rA_{22} \end{bmatrix}} = \frac{\partial}{\partial({}^rA_{21})} \begin{bmatrix} \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{11})} & {}^kA_1 \\ {}^kA_2 & \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{11})} \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial({}^rA_{22})} \begin{bmatrix} \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{12})} & {}^kA_1 \\ {}^kA_2 & \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{12})} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial^2({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{11})\partial({}^rA_{21})} & \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{11})} & \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{21})} & {}^kA_1 \\ \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{21})} & \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{11})} & \frac{\partial^2({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{11})\partial({}^rA_{21})} & {}^kA_2 \\ \frac{\partial^2({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{12})\partial({}^rA_{22})} & \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{12})} & \frac{\partial({}^kA_1)}{\partial({}^rA_{22})} & {}^kA_1 \\ \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{12})} & \frac{\partial({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{12})} & \frac{\partial^2({}^kA_2)}{\partial({}^rA_{12})\partial({}^rA_{22})} & {}^kA_2 \end{array} \right].$$

### 5.2.2. Геометрическое изображение блочной группы $k$ -го ранга

Обозначим  $\tilde{\Gamma}$  класс подобных графов, представляющих собой геометрическое изображение блочной группы первого ранга  $A$ , определенной на конечном множестве элементов  $a_{ij}$ , и  $\tilde{f}$  — функцию гомеоморфного преобразования (отображения).

$$\tilde{f} : \tilde{\Gamma} \rightarrow A. \quad (5.54)$$

Пусть  $A$  — множество всех равных блочных групп ранга  $k > 1$ .

$$A = \{ {}^kA \mid {}^kA = A \}, \quad k=2, 3, \dots \quad (5.55)$$

Преобразование  $\tilde{f}$  класса  $\tilde{\Gamma}$  подобных графов в множество  $A$  блочных групп определим как

$$(\tilde{\varphi} : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbf{A}) \equiv (\tilde{f} : \tilde{\Gamma} \rightarrow A), \quad A = {}^e kA. \quad (5.56)$$

Это означает, что геометрическое изображение блочной группы  $k$ -го ранга  ${}^k A$  есть граф, представляющий собой изображение замещающей

блочной группы  $A$  ( $A = {}^e kA$ ), а также что данный граф служит изображением и всех других блочных групп ранга  $k > 1$ , которые имеют ту же самую замещающую блочную группу. Известно, что преобразование пространства конечных блочных групп первого ранга в пространство конечных графов не является непрерывной функцией, поэтому не каждая блочная группа  $k$ -го ранга имеет геометрическое изображение. Очевидно, для существования геометрического изображения блочной группы  $k$ -го ранга необходимо и достаточно существование геометрического изображения ее замещающей блочной группы.

Для существования геометрического изображения блочной группы недостаточно существования изображений ее элементов. Например, блочная группа второго ранга

$${}^2 A = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 45 \\ \left[ \begin{array}{cc} 1 & 21 \\ 2 & 33 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 5 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

не имеет геометрического изображения, несмотря на то что все его элементы обладают такими изображениями, так как ее замещающая блочная группа

$$A = \left[ \begin{array}{c} 12 \\ 24 \\ 35 \end{array} \right]$$

не имеет изображения. Наоборот, блочная группа второго ранга

$${}^2 A = \left[ \begin{array}{cc} \left[ \begin{array}{c} 12 \\ 24 \\ 35 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} 12 \\ 34 \\ 45 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

обладает геометрическим изображением, так как ее замещающая блочная группа

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

имеет изображение, хотя оба ее элемента таких изображений не имеют. С точки зрения использования алгебры блочных групп в теории организации структур важны блочные группы  $k$ -го ранга  ${}^kA$ , имеющие геометрическое изображение и построенные из блочных групп, которые также имеют геометрическое изображение. В этом случае геометрическое изображение блочной группы  ${}^kA$  может рассматриваться как иерархическое изображение, состоящее из подизображений, которые в свою очередь тоже могут быть иерархическими изображениями. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в последующих разделах.

### 5.3. Правила организации контурных графов

Для произвольного контурного графа  $\Gamma$ , состоящего из ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , можно написать

$$A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k] = 0, \quad (5.57)$$

где  $A^d = C_1 C_2 \dots C_m$  — дополнительная блочная группа графа  $\Gamma$ . Это равенство следует из того, что однострочная блочная группа

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k]$$

равна одной из блочных групп  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , представляющих собой первичные сомножители блочной группы  $A^d$ , или сумме некоторых из этих блочных групп.

Заменим в выражении (5.57) дополнительную блочную группу  $A^d$  блочной группой  $A$  графа  $\Gamma$ . Для этого запишем ее в следующей форме:

$$(A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k])^d = 0$$

или

$$(A^d [\alpha_1] + A^d [\alpha_2] + \dots + A^d [\alpha_k])^d = 0,$$

тогда

$$((A^d [\alpha_1])^d + (A^d [\alpha_2])^d + \dots + (A^d [\alpha_k])^d) = 0.$$

Так как  $\partial A / \partial \alpha = (A^d [\alpha])^d$ , то последнее выражение представим в виде

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial A}{\partial \alpha_k} = 0, \quad (5.58)$$

$$\left[ \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \quad \dots \quad \frac{\partial A}{\partial \alpha_k} \right] = 0 \quad (5.59)$$

или

$$\frac{\partial A}{\partial[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k]} = 0.$$

**Пример 5.4.** Блочная группа графа, изображенного на рис. 5.1, равна

$$A = [1 \ 2] [2 \ 3 \ 4] [4 \ 5].$$

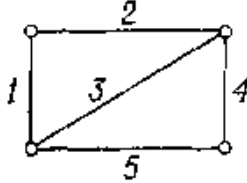


Рис. 5.1.

Для контура из ребер 1, 2, 3 имеем

$$\frac{\partial A}{\partial 1 \ 2 \ 3} = \begin{matrix} e \\ \left[ \frac{\partial A}{\partial 1} \ \frac{\partial A}{\partial 2} \ \frac{\partial A}{\partial 3} \right] \end{matrix} = \begin{bmatrix} 2 \ 3 \ 4 & 1 \ 3 \ 4 & 1 \ 2 \\ 4 \ 5 & 4 \ 5 & 4 \ 5 \end{bmatrix} = 0.$$

Если обозначения ребер произвольного контура графа записать как столбцовую блочную группу

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^k \alpha_i, \quad (5.61)$$

то можно убедиться, что

$$\frac{\partial A}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^k \alpha_i} = \frac{\partial^k A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_k} = 0, \quad (5.62)$$

а также

$$A^d \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = A^d \prod_{i=1}^k \alpha_i = 0. \quad (5.63)$$

Равенство (5.62) непосредственно следует из определения дерева, согласно которому дерево не содержит контуров; равенство же (5.63) следует из тождества

$$[\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = 0.$$

Соотношения (5.57) — (5.60) будем называть правилами организации контуров (структур) графа. Эти правила представляют собой, например, топологические эквиваленты второго закона Кирхгофа для организации контуров (структур) электрических цепей.

#### 5.4. Правила организации сечений графа

Для произвольного сечения графа  $\Gamma$  топологической сферой, пересекающей его ребра  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , справедливо равенство

$$A [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p] = 0, \quad (5.64)$$

где  $A = P_1 P_2 \dots P_m$  — блочная группа графа  $\Gamma$ . Это равенство следует из того, что однострочная блочная группа

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p]$$

равна одной из блочных групп  $P_1, P_2, \dots, P_m$ , представляющих собой простые сомножители блочной группы  $A$  или сумму некоторых из них. Аналогично правилу организации контуров (структур) графа (5.59) можно получить следующие выражения:

$$\left[ \frac{\partial A^d}{\partial \alpha_1} \frac{\partial A^d}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial A^d}{\partial \alpha_p} \right] = 0 \quad (5.65)$$

или

$$\frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p]} = 0, \quad (5.66)$$

где  $A^d$  — дополнительная блочная группа графа  $\Gamma$ .

**Пример 5.5.** Для сечения  $p$  графа топологической сферой, изображенного на рис. 5.2, на основании формул (5.64) и (5.65) запишем

$$A [1] + A [2] = 0, \text{ т.е. } A[1]=A[2],$$

а также

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} + \frac{\partial A^2}{\partial 2} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial A^d}{\partial 1} = -\frac{\partial A^2}{\partial 2},$$

где  $A$  и  $A^d$  — блочная группа и дополнительная блочная группа графа.

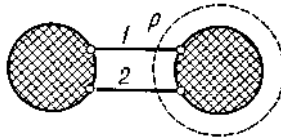


Рис. 5.2. Сечение графа топологической сферой.

Если обозначения ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  сечения графа  $\Gamma$  записать в виде столбцовой блочной группы

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^p \alpha_i, \tag{5.67}$$

то убедимся, что

$$A^d \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = A \prod_{i=1}^p \alpha_i = 0. \tag{5.68}$$

а также



$$\frac{\partial A^d}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}} = \frac{\partial A^d}{\partial \prod_{i=1}^p \alpha_i} = \frac{\partial^p A^d}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_p} = 0. \quad (5.69)$$

Эти соотношения непосредственно следуют из того, что блочная группа несвязного графа равна нулю.

Выражения (5.64) — (5.66), (5.68) и (5.69) будем называть *правилами выполнения сечений графа*. Эти правила, как пример, представляют собой топологические эквиваленты первого закона Кирхгофа для структур электрических цепей.

### 5.5. Блочная группа графа с замкнутыми вершинами

Правила организации контурных графов позволяют найти блочную группу  $A_{\mu_1 \mu_2}^d$  графа с двумя произвольными замкнутыми вершинами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Пусть произвольный путь, соединяющий вершины  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , состоит из ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ . Тогда на основании правила организации контурных графов (5.60) блочная группа  $A_{\mu_1 \mu_2}^d$  замкнутого графа равна

$$A_{\mu_1 \mu_2}^d = \frac{\partial A}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d]} = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} + \dots + \frac{\partial A}{\partial \alpha_d}, \quad (5.70)$$

где  $A$  — блочная группа незамкнутого графа. Согласно выражению (5.57), дополнительная блочная группа  $A_{\mu_1 \mu_2}^d$  замкнутого графа имеет вид

$$A_{\mu_1 \mu_2}^d = A^d [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_d], \quad (5.71)$$

где  $A^d$  — дополнительная блочная группа незамкнутого графа.

**Пример 5.6.** Рассчитаем блочную группу  $A_{\mu_1 \mu_2}$  при замыкании вершин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в графе рис. 5.3.

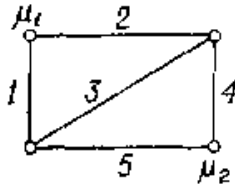


Рис. 5.3.

Блочная группа незамкнутого графа  $A = [1\ 2] [2\ 3\ 4] [4\ 5]$ , поэтому

$$A_{\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A}{\partial 1} + \frac{\partial A}{\partial 5} = [2\ 3\ 4] [4\ 5] + [1\ 2] [2\ 3\ 4] = [2\ 3\ 4] [1\ 2\ 4\ 5].$$

Тот же самый результат получим, выбирая другой путь между вершинами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

Рассмотрим случай замыкания нескольких вершин графа. Обозначим через  $d_{\mu_i\mu_j}$  произвольный путь, соединяющий вершины  $\mu_i$  и  $\mu_j$  (рис. 5.4).

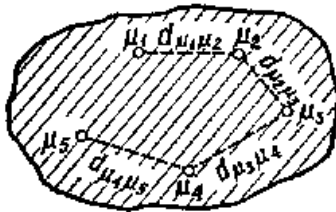


Рис. 5.4. Пути в графе,

Если этот путь состоит из ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d$ , то

$$\alpha_{\mu_i\mu_j} = [\alpha_1\alpha_2, \dots, \alpha_d] = \sum_{i=1}^d \alpha_i. \quad (5.72)$$

Замкнем в графе  $\Gamma$  вершины  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ . Обозначим  $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$  блочную группу замкнутого таким образом графа. Рассматривая поочередное замыкание вершин для блочной группы  $A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k}$ , получим

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = \frac{\partial^{k-1} A}{\partial [d_{\mu_1\mu_2}] \partial [d_{\mu_2\mu_3}] \dots \partial [d_{\mu_{k-1}\mu_k}]}, \quad (5.73)$$

где  $A$  — блочная группа незамкнутого графа,

В выражении (5.73)  $d_{\mu_1\mu_2}, d_{\mu_2\mu_3}, \dots, d_{\mu_{k-1}\mu_k}$  образуют путь, проходящий через промежуточные вершины  $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{k-1}$  и соединяющий вершины  $\mu_1$  и  $\mu_k$  незамкнутого графа  $\Gamma$ . Так как каждый из участков пути  $d_{\mu_1\mu_2}, d_{\mu_2\mu_3}, \dots, d_{\mu_{k-1}\mu_k}$  при замыкании вершин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  образует в графе  $\Gamma$  контур, дополнительная блочная группа замкнутого графа равна

$$A^d_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = A^d \left[ d_{\mu_1\mu_2} \right] \left[ d_{\mu_2\mu_3} \right] \dots \left[ d_{\mu_{k-1}\mu_k} \right]. \quad (5.74)$$

Согласно правилу организации контурных графов, для произвольного участка пути имеем

$$\frac{\partial A}{\partial \left[ d_{\mu_i\mu_j} \right]} = \frac{\partial A}{\partial \left[ d_{\mu_{i-1}\mu_i} \right]} + \frac{\partial A}{\partial \left[ d_{\mu_{i+1}\mu_j} \right]}. \quad (5.75)$$

Используя выражение (5.75), обобщим соотношения (5.73) и (5.74):

$$A_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^{k-1} d_i}, \quad (5.76)$$

$$A^d_{\mu_1\mu_2\dots\mu_k} = A^d \prod_{i=1}^{k-1} d_i, \quad (5.77)$$

где  $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$  — участки пути, образующие произвольное дерево, касающееся вершин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ . Произведение

$$D_k = \prod_{i=1}^{k-1} d_i = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{k-1} \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

представляет собой замещающую блочную группу для блочной группы второго ранга, описывающего дерево, касающееся вершин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ . Число участков пути, замыкающих граф, равно порядку производной блочной группы незамкнутого графа, будем называть порядком замыкания графа.

**Пример 5.7.** Найдем блочную группу графа  $\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ , образованную замыканием вершин  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  графа  $\Gamma$  (рис. 5.5).

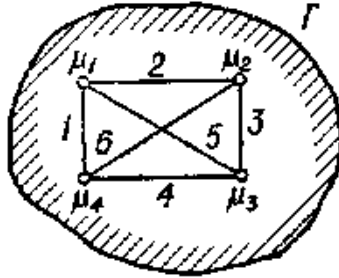


Рис. 5.5. Граф с выделенными ребрами.

Имеем

$$A_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 5} = \text{и т.д.}$$

$$A^d_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = A^d \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A^d \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \text{и т.д.}$$

Из соотношений (5.76) и (5.77) сформулируем следующие следствия.

*Следствие 5.1.* Производные блочной группы графа по блочным группам деревьев ее подграфа равны.

*Следствие 5.2.* Произведения дополнительной блочной группы графа на блочные группы ее подграфов равны.

**П р и м е ч а н и е.** Здесь подграф — связная часть графа, не имеющая общих ребер с его остальной частью.

В случае замыкания всех  $v$  вершин графа  $\Gamma$  блочная группа  $A_{(v-1)}$  равна

$$\frac{\partial A}{\partial K_i} = 1, \quad (5.79)$$

где  $K_i$  — произвольный столбец блочной группы  $A$ , а дополнительная блочная группа равна

$$A^d K_i = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ [\alpha_g] \end{bmatrix},$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  — обозначения всех ребер графа  $\Gamma$ .

## 5.6. Блочная группа разомкнутого графа

Из формулы для блочной группы  $A$  графа  $\Gamma$

$$A = P_1 P_2 \dots P_{v-1},$$

где  $P_i$  — однострочная блочная группа, состоящая из обозначений всех ветвей, инцидентных вершине  $\mu_i$ , непосредственно следует, что блочная группа разомкнутого графа, полученная из графа  $\Gamma$  отсоединением от произвольной вершины  $\mu_i$  одного конца ребра  $\alpha$ , равна

$$A = A[\alpha] = \begin{bmatrix} A \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

где  $A$  — блочная группа неразомкнутого графа  $\Gamma$ ; дополнительная же блочная группа равна

$$A^{da} = \frac{\partial A^d}{\partial \alpha}, \quad (5.81)$$

где  $A^d$  — дополнительная блочная группа  $\Gamma$ .

Таким образом, при отсоединении от вершин графа  $\Gamma$  по одному концу ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  блочная группа полученного разомкнутого графа

$\Gamma^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r}$  имеет вид

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = A \prod_{i=1}^r \alpha_i, \quad (5.82)$$

дополнительная же блочная группа имеет вид

$$A^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} = \frac{\partial A^d}{\partial \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix}} = \frac{\partial A^d}{\partial \prod_{i=1}^r \alpha_i} = \frac{\partial^r A^d}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_r}. \quad (5.83)$$

Заметим, что при отсоединении от какой-либо вершины всех инцидентных с ней ребер граф станет несвязным, а его блочная группа — равной нулю. То же самое произойдет, если от вершины графа топологической сферой отсоединить концы всех ребер произвольного сечения графа.

Рассмотрим деление вершины графа.

Пример деления вершины  $\mu$  графа  $\Gamma$  приведен на рис. 5.6.

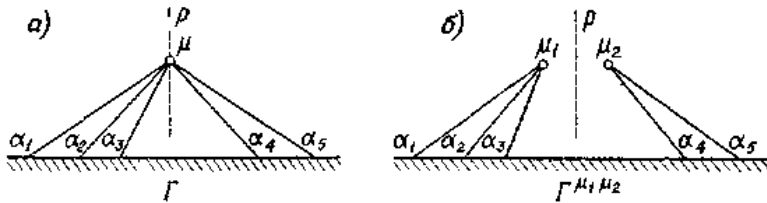


Рис. 5.6. Деление вершины графа: а) исходный граф; б) граф с разделенной вершиной.

Пусть ребра  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_p$  инцидентны вершине  $\mu$ . Осуществим деление вершины на две вершины  $\mu_1$  и  $\mu_2$  так, что вершине  $\mu_1$  остаются инцидентны ребра  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ , а вершине  $\mu_2$  —  $\alpha_j, \dots, \alpha_p$ . Согласно правилу сечения графа,

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \alpha_j, \dots, \alpha_p] = 0,$$

т. е.

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i] = A[\alpha_j, \dots, \alpha_p].$$

Следовательно, подобно случаю отсоединения одного конца ребра, для блочной группы графа  $\Gamma^{\mu_1 \mu_2}$  с разделенной вершиной  $\mu = \mu_1 + \mu_2$  имеем

$$A^{\mu_1 \mu_2} = A[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i] = A[\alpha_j, \dots, \alpha_p], \quad (5.84)$$

а для дополнительной блочной группы этого графа

$$A^{d \mu_1 \mu_2} = \frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i]} = \frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_j, \dots, \alpha_p]}. \quad (5.85)$$

**Пример 5.8.** Для графа, изображенного на рис. 5.6, б, имеем

$$A^{\mu_1 \mu_2} = A [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] = A [\alpha_4 \alpha_5], \quad A^{d \mu_1 \mu_2} = \frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]} = \frac{\partial A^d}{\partial [\alpha_4 \alpha_5]}.$$

где  $A (A^d)$  — блочная (дополнительная) группа графа, представленного на рис. 5.6, а.

## 6. Преобразование графов

### 6.1. Преобразование графа

Правила организации контурных графов и правила выполнения сечения графа, а также полученные из них соотношения для замыкания и размыкания графа позволяют определить блочную группу преобразованного графа. Рассмотрим в качестве примера следующие преобразования графов:

- а) соединение двух графов;
- б) отделение части графа;
- в) перемещение части графа.

*а) Соединение двух графов*

Пусть даны два графа  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 6.1, а), для которых известны блочные группы  $A_1$  и  $A_2$ .

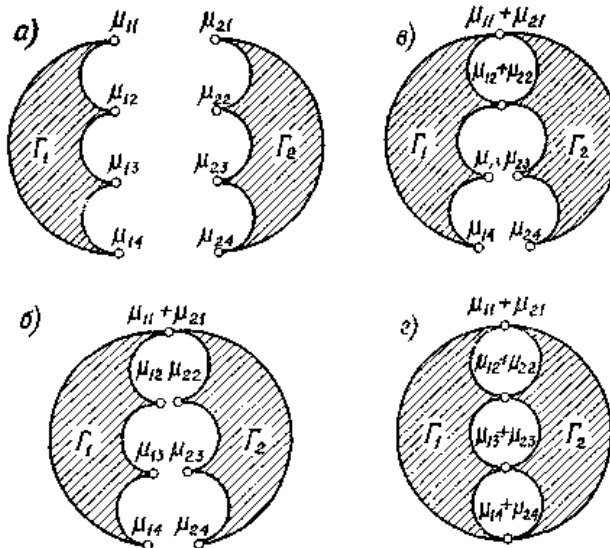


Рис. 6.1. Поочередное соединение вершин двух графов.

Соединим эти два графа, объединяя пары вершин:  $\mu_{11}$  с  $\mu_{21}$ ,  $\mu_{12}$  с  $\mu_{21}$ ,  $\mu_{13}$  с  $\mu_{23}$  и  $\mu_{14}$  с  $\mu_{24}$ .

Соединив вершины  $\mu_{11}$  и  $\mu_{21}$ , получим связный граф с одной общей точкой  $\mu_{11} + \mu_{21}$  (рис. 6.1, б), блочные группы которой равны

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}^e,$$

а дополнительная блочная группа

$$A_1^d A_2^d = \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \end{bmatrix}^e.$$

Соединив вершины  $\mu_{12}$  и  $\mu_{22}$  (рис. 6.1, в), получим граф, блочная группа которого

$$\frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \left[ \begin{bmatrix} d_{\mu_{11}\mu_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{\mu_{21}\mu_{22}} \end{bmatrix} \right]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \begin{bmatrix} d_{\mu_{11}\mu_{12}} \end{bmatrix}} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial \begin{bmatrix} d_{\mu_{21}\mu_{22}} \end{bmatrix}} \end{bmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 {}^2A &= \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] & [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \\ [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] & [d_{\mu_{22}\mu_{23}}] \\ [d_{\mu_{13}\mu_{14}}] & [d_{\mu_{23}\mu_{24}}] \end{bmatrix}} \cdot \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] & [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \\ [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] & [d_{\mu_{22}\mu_{23}}] \\ [d_{\mu_{13}\mu_{14}}] & [d_{\mu_{23}\mu_{24}}] \end{bmatrix}} \\
 &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \cdot \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \\
 &\quad + \frac{A_2}{\partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}]} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} \\
 &= \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}]} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 A_1}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}]} \cdot \frac{\partial A_1}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}]} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 A_2}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}]} \\
 &\quad + \frac{\partial^2 A_2}{\partial [d_{\mu_{11}\mu_{12}}] \partial [d_{\mu_{12}\mu_{13}}] \partial [d_{\mu_{13}\mu_{14}}]} \cdot \frac{\partial A_2}{\partial [d_{\mu_{21}\mu_{22}}] \partial [d_{\mu_{22}\mu_{23}}] \partial [d_{\mu_{23}\mu_{24}}]}
 \end{aligned}$$

где  $d_{\mu_1\mu_2}$  — произвольный путь графа  $\Gamma_1$  между вершинами  $\mu_1$  и  $\mu_2$ ,

а  $d_{\mu_2\mu_2}$  — произвольный путь графа  $\Gamma_2$  между вершинами  $\mu_2$  и  $\mu_2$ .

Соединяя пары вершин  $\mu_{13}$  с  $\mu_{23}$  и  $\mu_{14}$  с  $\mu_{24}$ , окончательно получим граф  $\Gamma$ , состоящий из двух подграфов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  (рис. 1.7, г), блочная группа которого имеет вид, представленный на стр. 141.

Аналогично можно поступить и при большем числе объединяемых вершин нескольких графов.

б) *Отделение части графа (подграфа)*

Рассмотрим отделение от графа  $\Gamma$  его части (подграфа)  $\Gamma_2$  (рис. 6.2, а). В результате получим граф  $\Gamma_1$  (рис. 6.2, в).

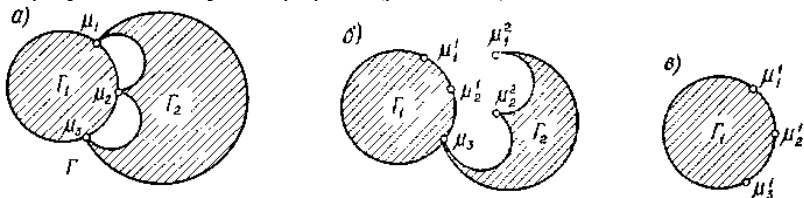


Рис. 6.2. Поочередное отделение части графа.

Если вершине  $\mu_1^2$  подграфа  $\Gamma_2$  инцидентны ребра этого подграфа  $\alpha_{11}^2, \alpha_{12}^2, \dots, \alpha_{1m}^2$ , а вершине  $\mu_2^2$  — ребра  $\alpha_{21}^2, \alpha_{22}^2, \dots, \alpha_{2m}^2$ , причем

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= [\alpha_{11}^2 \alpha_{12}^2 \dots \alpha_{1m}^2] \\ \mu_2^2 &= [\alpha_{21}^2 \alpha_{22}^2 \dots \alpha_{2m}^2] \end{aligned}$$

то, согласно правилам разделения вершин графа, блочная группа графа, полученная разделением вершин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  графа  $\Gamma$  (рис. 6.2, б), равна

$$A[\mu_1^2] [\mu_2^2] \quad (\text{или } A[\mu_1^1] [\mu_2^1]) \quad (a)$$

а дополнительная блочная группа

$$\frac{\partial^2 A^d}{\partial [\mu_1^2] \partial [\mu_2^2]} \quad (\text{или } \frac{\partial^2 A^d}{\partial [\mu_1^1] \partial [\mu_2^1]}) \quad (b)$$

где  $A$  ( $A^d$ ) — блочная (дополнительная) группа графа  $\Gamma$ .

Граф (рис. 6.2, б) имеет одну общую вершину, поэтому его блочную группу можно представить в виде произведения блочных групп  $A_1$  и  $A_2$ , а его дополнительную блочную группу — в виде произведения дополнительных блочных групп  $A_1^d$  и  $A_2^d$ . Так как оба подграфа  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  не имеют общих ребер, т. е.

$$\frac{\partial A_1}{\partial D_2} = 0, \quad \frac{\partial A_1^d}{\partial D_2^d} = 0,$$

а

$$\frac{\partial A_2}{\partial D_2} = 1, \quad \frac{\partial A_2^d}{\partial D_2^d} = 1,$$

где  $D_2$  — блочная группа произвольного дерева подграфа  $\Gamma_2$ , а  $D_2^d$  — блочная группа произвольного дополнения дерева подграфа  $\Gamma_2$ , то

$$A_1 = \frac{\partial A_1 A_2}{\partial D_2}$$

и

$$A_1^d = \frac{\partial A_1^d A_2^d}{\partial D_2^d}$$

Заменяв в этих равенствах произведения  $A_1 A_2$  и  $A_1^d A_2^d$  выражениями (а) и (б), получим

$$A_1 = \frac{\partial A \left[ \mu_1^2 \right] \left[ \mu_2^2 \right]}{\partial D_2} \quad (\text{или } A_1 = \frac{\partial A \left[ \mu_1^1 \right] \left[ \mu_2^1 \right]}{\partial D_2} ),$$

$$A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial D_2^d \left[ \mu_1^2 \right] \left[ \mu_2^2 \right]} \quad (\text{или } A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial D_2^d \left[ \mu_1^1 \right] \left[ \mu_2^1 \right]} ).$$

В общем случае, когда подграфы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  соединены  $p$  вершинами, последние выражения принимают вид

$$A_1 = \frac{\partial \left( A \prod_{i=1}^{p-1} \left[ \mu_1^2 \right] \right)}{\partial D_2} \quad (\text{или } A_1 = \frac{\partial \left( A \prod_{i=1}^{p-1} \left[ \mu_1^1 \right] \right)}{\partial D_2} ), \quad (6.1)$$

$$A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial \left( D_2^d \prod_{i=1}^{p-1} \left[ \mu_1^2 \right] \right)} \quad (\text{или } A_1^d = \frac{\partial A^d}{\partial \left( D_2^d \prod_{i=1}^{p-1} \left[ \mu_1^1 \right] \right)} ) \quad (6.2)$$

**Пример 6.1.** Найдем блочную группу графа  $\Gamma$  (рис. 6.3) при отключении узла  $\mu$  с инцидентными ребрами 1, 2, 3.

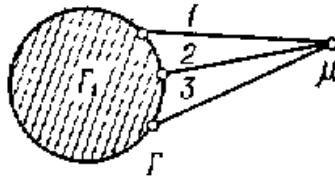


Рис. 6.3. Граф с выделенной вершиной  $\mu$ .

Согласно выражениям (6.1) и (6.2), имеем

$$A_1 = \frac{\partial \left( A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}{\partial \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} = \frac{\partial^3 \left( A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} = \frac{\partial^3 A}{\partial 1 \partial 2 \partial 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{\partial^2 A}{\partial 1 \partial 3} 1 + \frac{\partial^2 A}{\partial 2 \partial 3} 2 + \frac{\partial A}{\partial 3},$$

$$A^d_1 = \frac{\partial^2 A^d}{\partial 1 \partial 2} \quad (\text{так как } D^d_2 = 1).$$

в) *Перемещение части графа (подграфа)*

Под перемещением подграфа будем понимать изменение вершин соединения подграфа с остальной частью графа. Пример перемещения подграфа  $\Gamma_1$  показан на рис. 6.4, где пунктирной линией изображен подграф  $\Gamma_1$  после перемещения.

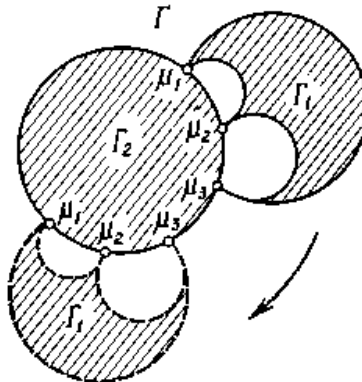


Рис. 6.4. Перемещение подграфа  $\Gamma_1$

Блочная группа графа, полученная в результате перемещения подграфа  $\Gamma_1$ , рассчитывается следующим образом: сначала определяется блочная

группа графа  $\Gamma_2$  после отключения подграфа  $\Gamma_1$  от графа  $\Gamma$ ; затем присоединяется подграф  $\Gamma_1$  к другим вершинам графа  $\Gamma_2$  и находится блочная группа образованного таким образом графа, при этом используются формулы из примеров а) и б).

Для иллюстрации этого метода приведем пример перемещения ребра  $\alpha$  графа  $\Gamma$  (рис. 6.5).

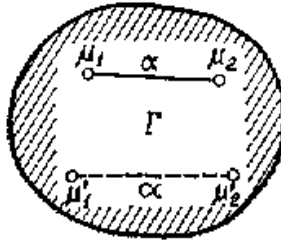


Рис. 6.5. Перемещение ребра  $\alpha$ .

Блочная группа графа  $\Gamma$  с отключенным от вершин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  ребром  $\alpha$ , согласно соотношениям (6.1), равна

$$A_1 = \frac{\partial(A \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\delta A}{\delta \alpha}.$$

После присоединения конца отключенного ребра  $\alpha$  к новой вершине  $\mu'_1$  графа  $\Gamma$  его блочная группа будет равна

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha.$$

Если присоединить другой конец ребра  $\alpha$  к вершине  $\mu'_2$ , то

$$A'^e = \frac{\partial \left( \frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha \right)}{\partial \left[ \alpha \left[ d_{\mu'_1 \mu'_2} \right] \right]} = \frac{\delta A}{\delta \alpha} + \frac{\partial \left( \frac{\delta A}{\delta \alpha} \alpha \right)}{\partial \left[ d_{\mu'_1 \mu'_2} \right]},$$

где  $d_{\mu'_1 \mu'_2}$  — произвольный путь графа  $\Gamma$  между вершинами  $\mu'_1$  и  $\mu'_2$ , а  $A'$  — блочная группа графа  $\Gamma$  с перемещенным ребром  $\alpha$ .

## 6.2. Графы второй категории (модуль-графы)

### 6.2.1. Определение модуль-графа

Если определить связный граф  $\Gamma$  как упорядоченную тройку

$$\Gamma = \langle P, U, \varepsilon \rangle \tag{6.3}$$

(где  $P$  — множество вершин графа  $G$ ,  $U$  — множество ребер графа  $G$ ,  $\varepsilon$  — двухаргументное соотношение инциденции) и выделить в этом графе его связную часть

$$G_1 = \langle P_1, U_1, \varepsilon_1 \rangle,$$

а оставшуюся часть (необязательно связную) определить как

$$G_2 = \langle P_2, U_2, \varepsilon_2 \rangle,$$

то для подграфа  $G_1$  графа  $G$  можно записать следующее определение.

*Определение 6.1.* Подграф  $G_1 = \langle P_1, U_1, \varepsilon_1 \rangle$  графа  $G = \langle P, U, \varepsilon \rangle$  есть связная часть графа  $G$ , удовлетворяющая вместе с остальной частью  $G_2 = \langle P_2, U_2, \varepsilon_2 \rangle$  этого графа следующим условиям:

$$(P_1 \cap P_2 = P_k \neq 0) \wedge (P_1 \cup P_2) \wedge (U_1 \cap U_2 = 0) \wedge (U_1 \cup U_2 = U) \wedge \\ \wedge (\varepsilon_1 \subset \varepsilon) \wedge (\varepsilon_2 \subset \varepsilon) \wedge (\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 = \varepsilon), \quad (6.4)$$

где  $P_k \subset P_{k_1} \subset P_i$ ;  $P_{k_1}$  — множество концов (выделенных вершин) подграфа  $F_1$ .

Граф может состоять из большого числа  $g$  подграфов, для которых выполняется соотношение

$$\{ \forall i, j (U_i \cap U_j = 0) \} \wedge \left( \bigcup_{i=1}^g U_i = U \right) \wedge \left( \bigcup_{i=1}^g P_i = P \right) \wedge \\ \wedge \left( \bigcup_{i=1}^g \varepsilon_i = \varepsilon \right) \wedge \{ \forall j \exists i (P_i \cap P_j \neq 0) \}, \quad i, j=1, 2, \dots, g. \quad (6.4a)$$

Подграфы будем изображать на плоскости в виде одномерных и двумерных континуумов с выделенными (по крайней мере двумя) точками, называемыми полюсами, входами, зажимами. Эти континуумы будем называть **модулями**. Описанный таким образом граф, состоящий из модулей, назовем графом второго ранга или модуль-графом и определим как упорядоченную тройку

$$G = \langle P, Z, \varepsilon \rangle, \quad (6.5)$$

где  $P$  — множество вершин графа,  $Z$  — множество модулей,  $\varepsilon$  — многоаргументное соотношение инциденции.

Рис. 6.6 иллюстрирует способ изображения модуль-графов. На рис. 6.6, а модуль  $G_1$  четырехполюсный, а модули  $G_2$  и  $G_3$  трехполюсные; на рис. 6.6, б модули  $G_1$  и  $G_5$  трехполюсные, модуль  $G_2$  двухполюсный, а двухполюсные модули  $G_3$  и  $G_4$  образуют ребра (одномерные континуумы).

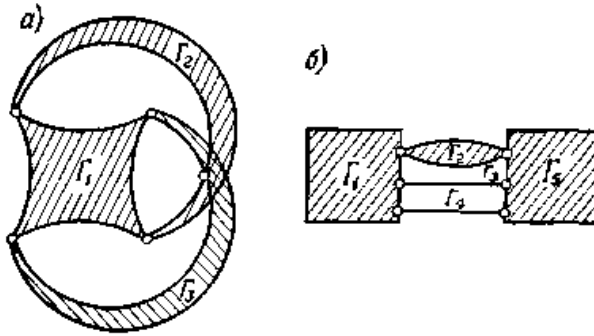


Рис. 6.6. Примеры модуль-графов.

Если все модули — одномерные континуумы и соотношение  $\varepsilon$  инциденции есть функция двух аргументов, то получаем линейный граф (первого ранга); его модули представляют собой ребра. Следовательно, линейный граф — лишь частный случай модуль-графов. Любой линейный граф можно преобразовать в модуль-граф, заменив каждое его ребро двумерным, двухполюсным модулем. Можно поступить и наоборот, т. е. модуль-граф преобразовать в линейный граф, заменив каждый его модуль линейным графом (подграфом).

**Примечание.** Модуль-граф можно преобразовать в линейный граф, если заменить каждый модуль графа вершиной линейного графа, а каждую его вершину соответствующим числом ребер линейного графа, равным числу полюсов модулей в вершине, минус единица.

### 6.2.2. Блочная группа модуль-графа

Модули  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$  модуль-графа представляют собой подграфы, блочные группы которых обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_r$ , а дополнительные блочные группы —  $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_r$ . Найдем блочную группу  $A$  и дополнительную блочную группу  $A^d$  модуль-графа с помощью блочных групп его модулей  $A_1, A_2, \dots, A_r$  или их дополнительных блочных групп  $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_r$ . С этой целью введем понятие скелета модуль-графа.

*Определение 6.2.* Скелетом  $\Gamma_0$  модуль-графа  $\Gamma$  называется граф, полученный в результате замены каждого модуля  $\Gamma_k$  графа  $\Gamma$  деревом  $D_k$ , составленным из отрезков, соединяющих полюсы и касающихся всех полюсов модуля. Ребра дерева  $D_k$  соответствуют произвольным путям между полюсами модуля  $\Gamma_k$ .

Это определение можно записать следующим образом:

$$\Gamma_0 = \langle P, Z_0, \varepsilon \rangle. \quad (6.6)$$

где  $P$  — множество вершин модуль-графа  $\Gamma$ ,  $Z_0$  — множество деревьев  $D_k$  модулей графа  $\Gamma$ ,  $\varepsilon$  — многоаргументное соотношение инциденции графа  $\Gamma$ .

В качестве примера (рис. 6.7) изображены скелеты: модуль-графов, показанных на рис. 6.6.

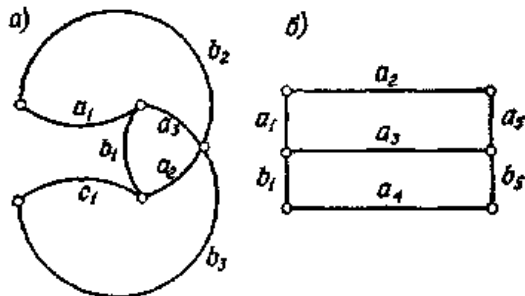


Рис. 6.7. Скелеты модуль-графов, изображенных на рис. 6.6.

Ребра  $a_1, b_1, c_1$  (рис. 6.7, а) образуют дерево  $D_1$  модуля  $\Gamma_1$ , ребра  $a_2, b_2$  — дерево  $D_2$  модуля  $\Gamma_2$ , а ребра  $a_3, b_3$  — дерево  $D_3$  модуля  $\Gamma_3$  графа (рис. 6.6, а).

Число ребер, образующих дерево  $D_k$  модуля  $\Gamma_k$ , равно  $v_k - 1$ , где,  $v_k$  — число полюсов этого модуля.

Скелет графа  $\Gamma$  имеет  $p$  ребер, причем

$$p = \sum_{k=1}^g (v_k - 1), \quad (6.7)$$

где  $g$  — число модулей графа  $\Gamma$ .

Цикломатическое число  $M$  скелета графа  $\Gamma$  равно

$$M = \sum_{k=1}^g (v_k - 1) - (v - 1) = \sum_{k=1}^g v_k - v - g + 1, \quad (6.8)$$

где  $v$  — число вершин графа  $\Gamma$ . Например, для графа, изображенного на рис. 6.6, а, цикломатическое число скелета  $\Gamma_0$

$$M = (4 + 3 + 3) - 5 - 3 + 1 = 3.$$

Для заданного графа можно найти  $T_0$  различных скелетов, причем на основании формулы трента для полного графа (многогранного)

$$T_0 = \prod_{k=1}^g (v_k^{v_k - 2}) \quad (6.9)$$

для графа, изображенного на рис. 6.6, а

$$T_0 = 4^2 \cdot 3^1 \cdot 3^1 = 144.$$



Следует отметить, что не всегда  $T_0 \leq \prod_{i=1}^g T_i$ , где  $T_i$  - число деревьев

подграфа  $\Gamma_i$ .

Заметим, что для всех скелетов модуль-графа  $\Gamma$  число ребер  $p$ , число вершин  $v$  и цикломатическое число  $M$  постоянны.

Как следует из формулы (6.9), для линейного (состоящего из ребер) графа можно построить лишь один скелет ( $T_0 = 1$ ), который изоморфен рассматриваемому графу. Лишь один скелет также соответствует графу, состоящему из двухполюсных модулей.

Представление пути  $d$  ребром  $a$  скелета  $\Gamma_0$  выражается в виде  $[a] = [d]$ .

Например, для ребра дерева  $D_k$  (рис. 6.8, пунктирная линия) напомним

$$[a_k] = [1\ 2\ 3\ 4],$$

$$[b_k] = [4\ 6\ 7] \text{ (рис. 6.8, а) или } [b_k] = [4\ 3\ 5\ 7] \text{ (рис. 6.8, б),}$$

$$[c_k] = [8\ 9] \text{ (рис. 6.8, а) при } [c_k] = [8\ 10\ 11\ 12] \text{ (рис. 6.8, б).}$$

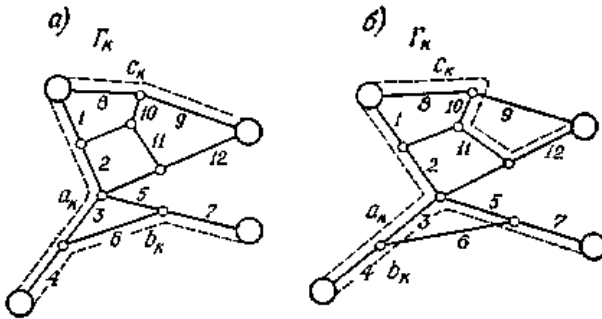


Рис. 6.8. Представление ребра подграфа  $\Gamma_k$  ребрами дерева  $D_k$  (пунктир), концы подграфа выделены.

Приведем утверждение для модуль-графов.

**Утверждение 6.1.** Блочную группу  $A$  модуль-графа  $\Gamma$  всегда можно записать в виде

$$A = \frac{\prod_{i=1}^g A_i}{\partial A_0^{\partial}}, \quad (6.10)$$

а дополнительная блочная группа  $A^d$  этого графа в виде

$$A^d = A_0^d \prod_{i=1}^g A_i^d, \quad (6.11)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_g$  — блочные группы модулей  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$  графа  $\Gamma$ ;  $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_g$  — дополнительные блочные группы модулей  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$  графа  $\Gamma$ ;  $A^d_0$  — дополнительная блочная группа скелета графа  $\Gamma$ ;  $g$  — число модулей графа  $\Gamma$ .

Докажем утверждение методом полной математической индукции.

Скелет  $\Gamma_0$  графа  $\Gamma$  преобразуем в граф  $\overset{1}{\Gamma}_0$ , не содержащий контуров. Для этого выполним однополюсное отключение  $M$  ребер  $l_1, l_2, \dots, l_M$  произвольного дополнения графа  $\overset{1}{\Gamma}$ . Блочная группа  $\overset{1}{A}$  графа  $\overset{1}{\Gamma}$ , полученная путем преобразования модуль-графа  $\Gamma$  (подобно преобразованию графа  $\Gamma_0$  в граф  $\overset{1}{\Gamma}_0$ ), равна

$$\overset{1}{A} = \prod_{i=1}^g \overset{1}{A}_i, \tag{a}$$

так как граф  $\overset{1}{\Gamma}$  имеет общие точки, соединяющие отдельные модули. В этом выражении  $A_1, A_2, \dots, A_g$  — блочные группы модулей  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_g$  рассматриваемого графа  $\Gamma$ . Заметим, что произведение  $\prod_{i=1}^g \overset{1}{A}_i$  не имеет так называемого дефекта произведения, так как блочные группы  $A_1, A_2, \dots, A_g$  не содержат общих элементов.

В графе  $\overset{1}{\Gamma}_0$  будем поочередно присоединять отключенные ранее концы ребер дополнения. Присоединив концы ребра  $l_1$ , получим первый контур, состоящий из последующих ребер графа  $\overset{2}{\Gamma}_0$ :

$$l_1, l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1\alpha}$$

Блочная группа  $\overset{2}{A}$  соответственно преобразованного графа  $\overset{2}{\Gamma}$  [согласно выражению (6.70), при замыкании вершин графа] равно

$$\overset{0}{A} = \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_1} + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{11}} + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{12}} + \dots + \frac{\partial \overset{1}{A}}{\partial l_{1\alpha}}, \tag{б}$$

а дополнительная блочная группа  $\overset{2}{A^d}_0$  графа  $\overset{2}{\Gamma}_0$  равна

$$A_0^d = [l_1 l_{11} l_{12} \dots l_{1a}]. \quad (b)$$

Учитывая в равенстве (б) соотношения (а) и (в), получим

$$A = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial A_0^d}.$$

Граф  $\Gamma_0^{M-1}$ , образованный путем присоединения  $M - 1$  ребер дополнения  $l_1, l_2, \dots, l_{M-1}$ , имеет  $M - 1$  независимых контуров.

Пусть для преобразованного таким образом графа  $\Gamma^{M-1}$  блочная группа  $A^{M-1}$  равна

$$A^{M-1} = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial A_0^{M-1}},$$

где  $A_0^{M-1} = C_1 C_2 \dots C_{M-1}$ ;  $C_1, C_2, \dots, C_{M-1}$  — блочные группы независимых контуров графа  $\Gamma_0^{M-1}$ .

**Замечание.** Блочная группа контура графа — однострочная блочная группа, элементы которой представляют собой обозначения всех ребер этого контура.

Присоединив последнее ребро  $l_M$ , получим скелет  $\Gamma_0$  графа  $\Gamma$ . Ребро  $l_M$  замыкает  $M$ -ый независимый контур, состоящий из ребер

$$l_M, l_{M_1}, l_{M_2}, \dots, l_{M_\zeta}.$$

На основании формулы замыкания вершин графа блочная группа  $A$  графа  $\Gamma$  равна

$$A = \frac{\partial A^{M-1}}{\partial l_M} + \frac{\partial A^{M-1}}{\partial l_{M_1}} + \frac{\partial A^{M-1}}{\partial l_{M_2}} + \dots + \frac{\partial A^{M-1}}{\partial l_{M_\zeta}},$$

а дополнительная блочная группа  $A_0^d$  скелета  $\Gamma_0$  равна

$$A_0^d = A_0^{M-1} [l_M l_{M_1} l_{M_2} \dots l_{M_\zeta}]. \quad (e)$$

Учитывая равенство (г) и (е), из выражения (д) получим

$$A = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial \left( A_0^d [l_M l_{M_1} l_{M_2} \dots l_{M_g}] \right)} = \frac{\partial \prod_{i=1}^g A_i}{\partial A_0^d},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать формулу (6.11) для дополнительной блочной группы  $A^d$  модуль-графа  $\Gamma$ .

Выражения (6.10) и (6.11) можно записать в виде блочных групп второго ранга

$$A^e = {}^2A = \frac{\partial}{\partial A_0^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

$$A^d = {}^e {}^2A^d = A_0^d \begin{bmatrix} A_1^d \\ A_2^d \\ \vdots \\ A_g^d \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Этот способ записи более нагляден и удобен на практике.

Сравнивая блочные группы  ${}^2A$  и  ${}^2A^d$  произвольного модуль-графа, заметим, что их элементы связаны соотношением

$$(A_{ij})^d = A_{ij}^d.$$

Тогда

$$({}^2A)^d = {}^2A^d,$$

т. е.

$$A^d = A^d, A = {}^2A, A^d = {}^e {}^2A^d, (A)^d = ({}^2A)^d.$$

Проиллюстрируем способ расчета блочной группы модуль-графа на примере.

**Пример 6.2.** Найдем блочную группу модуль-графа рис. 6.9, а, скелет  $\Gamma_o$  которого приведен на рис. 6.9, б.

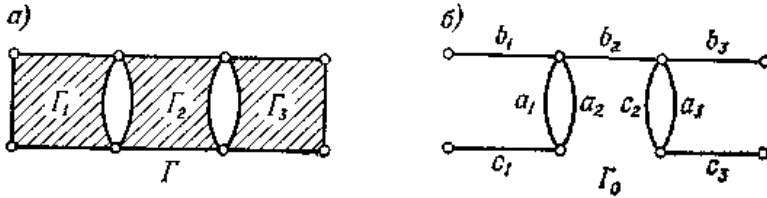


Рис. 6.9.

Дополнительная блочная группа модуль-графа скелета  $\Gamma_0$  равна

$$A^d_0 = a_1 a_2 \quad c_2 a_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ c_2 & a_3 & c_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

а блочная группа  $A$  графа  $\Gamma$  равна

$$A^e = {}^2 A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & A_1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_2 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial c_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \\ A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} \end{bmatrix}.$$

Для первого столбца этой блочной группы второго ранга найдем алгебраическую производную

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \begin{bmatrix} a_1 \\ c_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} &= \frac{\partial^e (A_1 A_2 A_3)}{\partial a_1 \partial c_2} = \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \frac{\partial (A_1 A_2 A_3)}{\partial c_2} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial a_1} \left\{ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_1 A_3 + A_2 \frac{\partial (A_1 A_3)}{\partial c_2} \right\} \end{aligned}$$

Так как путь  $c_2$  принадлежит только модулю  $\Gamma_2$ , то

$$A_2 \frac{\partial (A_1 A_3)}{\partial c_2} = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left( \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_1 A_3 \right) = \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 + A_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \left( \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 \right)$$

Поскольку путь  $a_1$  принадлежит только модулю  $\Gamma_1$ , то

$$A_1 \frac{\partial}{\partial a_1} \left( \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 \right) = 0$$

и последнее выражение приводится к виду

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_1} \frac{\partial A_2}{\partial c_2} A_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} \\ A_3 \end{bmatrix}.$$

На основании этого примера алгебраическую производную

$$\frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}$$

можно определить, применяя следующие правила:

1) Если обозначить столбцы дополнительной блочной группы  $A^d_0$  скелета модуль-графа как  $K^d_1, K^d_2, \dots, K^d_{T_s}$ , то

$$\frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial}{\partial K^d_1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial K^d_2} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \dots \frac{\partial}{\partial K^d_{T_s}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \right].$$

Следовательно, блочная группа второго ранга  ${}^2A$  имеет  $g$  строк, где  $g$  — число модулей графа  $\Gamma$ .

2. Столбцы  $K^d_i$  дополнительной блочной группы  $A^d_0$  содержат элементы, представляющие собой обозначения путей в отдельных модулях графа  $\Gamma$ , и не содержат путей, общих для разных модулей.

Поэтому если предположить, что произвольный столбец  $K^d_i$  содержит элементы

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1k_1}$  — из модуля  $\Gamma_1$ ,

$a_{21}; a_{22}, \dots, a_{2k_2}$  — из модуля  $\Gamma_2$ ,

.....

$a_{g1}, a_{g2}, \dots, a_{gk_g}$  — из модуля  $\Gamma_g$ ,

причем число элементов некоторых модулей может быть равно нулю ( $k_i=0$ ), то

$$\frac{\partial}{\partial K^d_i} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{k_1} A_1}{\partial a_{11} \partial a_{12} \cdots \partial a_{1k_1}} \\ \frac{\partial^{k_2} A_2}{\partial a_{21} \partial a_{22} \cdots \partial a_{2k_2}} \\ \vdots \\ \frac{\partial^{k_g} A_g}{\partial a_{g1} \partial a_{g2} \cdots \partial a_{gk_g}} \end{bmatrix}.$$

Для  $k_i = 0$  примем  $(\partial^0 A_i / \partial 0) = A_i$ .

Из этого выражения вытекают следующие следствия.

*Следствие 6.3.* Число столбцов блочной группы второго ранга  ${}^2A$  модуль-графа  $\Gamma$  равно числу столбцов дополнительной блочной группы  $A^d_0$  скелета графа  $\Gamma$ .

*Следствие 6.4.* Сумма порядков производных блочных групп модуль-графа  $\Gamma$  в каждом столбце блочной группы второго ранга  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  одинакова и равна числу строк дополнительной блочной группы  $A^d_0$  скелета графа  $\Gamma$  (или цикломатическому числу этого скелета).

Вернемся к примеру 6.2. Найдем дополнительную блочную группу второго ранга  ${}^2A^d$  модуль-графа рис. 6.9, а. Согласно (6.13),

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ c_2 & a_3 & c_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^d & a_1 & A_1^d & a_1 & A_1^d & A_1^d \\ A_2^d & c_2 & A_2^d & A_2^d & a_2 & c_3 & A_2^d & a_2 \\ A_3^d & A_3^d & a_3 & A_3^d & A_3^d & A_3^d & a_3 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что блочная группа второго ранга  ${}^2A^d$  имеет те же свойства, что и блочная группа  ${}^2A$ , с той лишь разницей, что вместо производных блочных групп модулей ее элементы есть произведения дополнительных блочных групп и путей отдельных модулей графа. Как следует из (6.94), для модуль-графа можно составить один или несколько скелетов  $\Gamma_0$ , поэтому из утверждения 6.1 вытекает следующее.

*Следствие 6.5.* Блочная группа  $A$  модуль-графа  $\Gamma$  не зависит от выбора скелета  $\Gamma_0$ , т. е. она тождественно равна для всех  $\Gamma_0$  скелетов данного графа  $\Gamma$ .

**Пример 6.3.** Найти блочную группу  $A$  графа рис. 6.10, а по двум разным его скелетам  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_0^*$  (рис. 6.10, б и в).

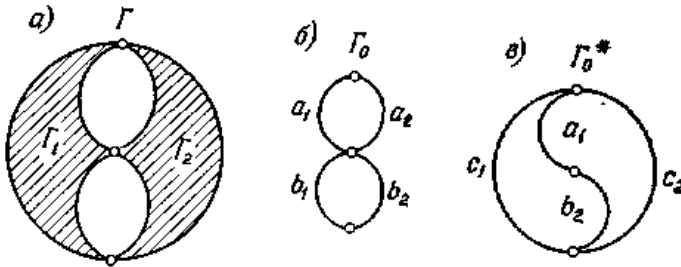


Рис. 6.10.

**Решение.**

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A_0^d} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \end{bmatrix}.$$



$$\begin{aligned}
 {}^2A^* &= \frac{\partial}{\partial A_0^{**}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} [a_1 & b_2 & c_1] \\ [a_1 & b_2 & c_2] \end{bmatrix}} = \frac{\partial \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}{\partial \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & c_1 & c_1 & c_1 \\ c_2 & c_2 & a_1 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & \frac{\partial^2 A_1}{\partial c_1 \partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial c_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial c_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial b_2 \partial c_2} & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial c_2} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На основании правила построения контактных графов напомним

$$\frac{\partial A_1}{\partial c_1} = \frac{\partial A_1}{\partial a_1} + \frac{\partial A_1}{\partial b_1},$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial c_2} = \frac{\partial A_2}{\partial a_2} + \frac{\partial A_2}{\partial b_2},$$

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial c_1} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1},$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial b_2 \partial c_2} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2}.$$

Подставив эти соотношения в выражения блочной группы  ${}^2A^*$ , получим

$$\begin{aligned}
 {}^2A^* &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} A_1 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$${}^2A = {}^2A^*.$$

### 6.2.3. Дерево второго ранга

Геометрическое изображение столбца блочной группы первого ранга представляет собой дерево, а геометрическое изображение дополнительной блочной группы — дополнение дерева или дерево обратного изображения блочной группы.

Столбец блочной группы второго ранга  ${}^2A$  модуль-графа  $\Gamma$  можно рассматривать как блочную группу — столбец второго ранга, геометрическое изображение которого будем называть деревом второго ранга. Скелет дерева второго ранга назовем обобщенным деревом скелета  $\Gamma_0$ . В качестве примера рассмотрим модуль-граф рис. 6.11, а, скелет которого представлен на рис. 6.11, б.

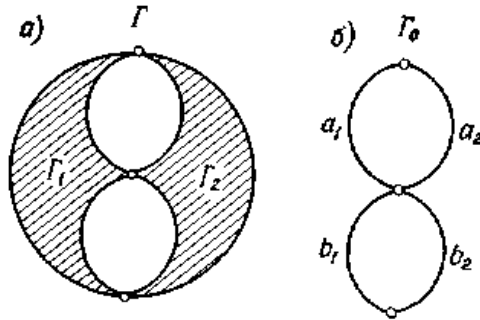


Рис. 6.11.

Блочная группа второго ранга  ${}^2A$  этого графа равна

$${}^2A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \end{bmatrix}.$$

На рис. 6.12, а изображены деревья второго ранга графа  $\Gamma$ , представляющие собой геометрические изображения отдельных столбцов блочной группы  ${}^2A$ , а на рис. 6.12, б — обобщенные деревья скелета графа  $\Gamma$ .

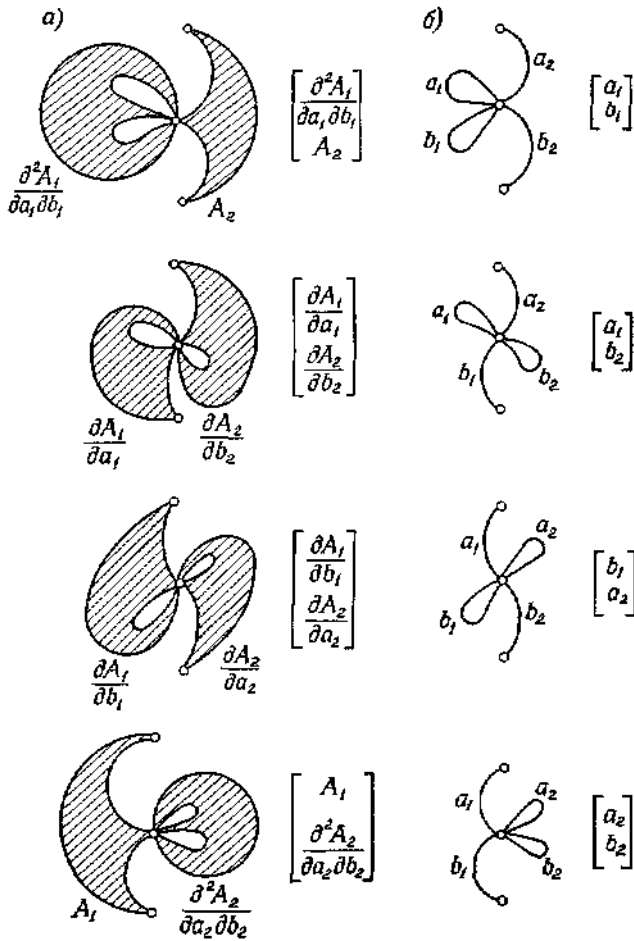


Рис. 6.12.

Учитывая, что модули графа  $\Gamma$  не содержат общих ребер, определим дерево второго ранга.

*Определение 6.9.* Деревом второго ранга графа  $\Gamma$  или геометрическим изображением столбца блочной группы второго ранга  ${}^2A$  этого графа называется связный граф, имеющий  $g - 1$  общих точек, соединяющих  $g$  модулей, которые служат геометрическими изображениями (или обратными изображениями) блочных групп, составляющих столбцы блочной группы  ${}^2A$ . Блочные группы дерева второго ранга

представляют собой модули графа  $G$ , по-разному преобразованные путем замыкания их полюсов.

Так как модули дерева второго ранга можно соединять общими точками разными способами, то столбец блочной группы  ${}^2A$  как блочная группа второго ранга соответствует классу деревьев второго ранга. Поэтому под числом деревьев второго ранга  $T$  графа  $G$  понимается число классов этих деревьев.

Очевидно, что при преобразовании графа в дерево второго ранга постоянны следующие величины:  $g$  — число модулей,  $v$  — число вершин и  $M$  — цикломатическое число графа, в то время как при преобразовании графа в дерево первого ранга постоянно лишь число вершин  $u$ .

Аналогично определим обобщенное дерево скелета графа  $G$ .

*Определение 6.10.* Обобщенное дерево скелета  $G_0$  есть связный граф, имеющий  $g - 1$  общих точек, соединяющих  $g$  графов, полученных путем соответствующего преобразования деревьев отдельных модулей, входящих в состав дерева второго ранга.

Подобно дереву второго ранга графа  $G$ , под числом  $T$  обобщенных деревьев скелета  $G_0$  понимается число классов этих деревьев.

Как и ранее, при преобразовании скелета  $G_0$  в обобщенное дерево постоянны:  $g$  — число ребер,  $v$  — число вершин,  $M$  — цикломатическое число скелета.

Число  $T$  классов подобных деревьев второго ранга графа  $G$ , равно числу классов подобных обобщенных деревьев скелета  $G_0$  (а также числу деревьев скелета  $G_0$ ), можно определить на основании формулы Трента, применимой к скелету  $G_0$

$$T = \text{Det}|\varepsilon \cdot \varepsilon_t| = \text{Det}(U^{v-1}_{v-1}), \quad (6.14)$$

где  $\varepsilon$  — матрица инцидентий вершин (матрица соединений вершин) скелета  $G_0$ ,  $\varepsilon_t$  — транспонированная матрица  $\varepsilon$ ,  $U^{v-1}_{v-1}$  — квадратная симметричная матрица порядка  $v-1$ , элементы которой удовлетворяют равенству

$$u^i_j = -(-1)^{-\delta_{ij}} \text{card}(\{P_{\mu_i}\} \cap \{P_{\mu_j}\}) = \begin{cases} +\text{card}\{P_{\mu_i}\} & | i = j, \\ -\text{card}(\{P_{\mu_i}\} \cap \{P_{\mu_j}\}) & | i \neq j, \end{cases}$$

где  $b_{ij}$  — символ Кронекера,  $\{P_{\mu_i}\} \cap \{P_{\mu_j}\}$  — множество ребер, инцидентных вершине  $\mu_i$  ( $\mu_j$ ) скелета  $G_0$ ,  $v$  — число вершин скелета.

Для планарных скелетов число  $T$  можно определить по формуле

$$T = \text{Det}(U_M^M), \quad (6.15)$$

где  $U_M^M$  — квадратная симметричная матрица порядка  $M$ , элементы которой

$$u^i_j = -(-1)^{-\delta_{ij}} \text{card}(\{C_i\} \cap \{C_j\}) = \begin{cases} +\text{card}\{C_i\} & | i = j, \\ -\text{card}(\{C_i\} \cap \{C_j\}) & | i \neq j, \end{cases}$$

где  $\{C_i\}$  ( $\{C_j\}$ ) — множество ребер, составляющих контур  $i$  ( $j$ ) скелета  $\Gamma_0$ ,  $M$  — цикломатическое число скелета.

**Замечание.** Вышеприведенные формулы справедливы для любых линейных графов.

Следует отметить, что для различных скелетов  $\Gamma_0$  данного графа  $\Gamma$  число  $T$  может быть разным. Однако существует наименьшее число  $T_{\min}$  для графа  $\Gamma$ , которое соответствует скелету  $\Gamma_0$ , дополнительная блочная группа которого  $A^d_0$  содержит наименьшее количество столбцов.

Если граф содержит только двухполюсные модули, то ему соответствует один скелет, каждое ребро которого служит деревом для двухполюсного модуля. Пример такого графа  $\Gamma$  и его скелета  $\Gamma_0$  приведен на рис. 6.13.

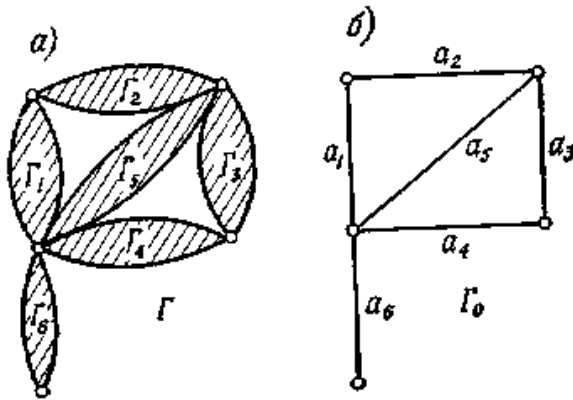


Рис. 6.13. Граф, состоящий из двухполюсных модулей; а) граф; б) скелет графа.

**Пример 6.4.** Найти для графа рис. 6.13, а блочную группу  ${}^2A$ .  
Имеем

$$A^d_0 \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_2 & a_5 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_3 & a_4 & a_5 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},$$

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^a_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & A_2 & A_2 \\ \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 \\ A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} & A_4 & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} & A_4 & A_4 & \frac{\partial A_4}{\partial a_4} \\ A_5 & A_5 & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & A_5 & A_5 & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} & \frac{\partial A_5}{\partial a_5} \\ A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 & A_6 \end{bmatrix}.$$

Столбцы этой блочной группы представляют собой деревья второго ранга графа  $\Gamma$ ; первые два столбца вместе с соответствующими обобщенными деревьями скелета  $\Gamma_0$  изображены на рис. 6.14.

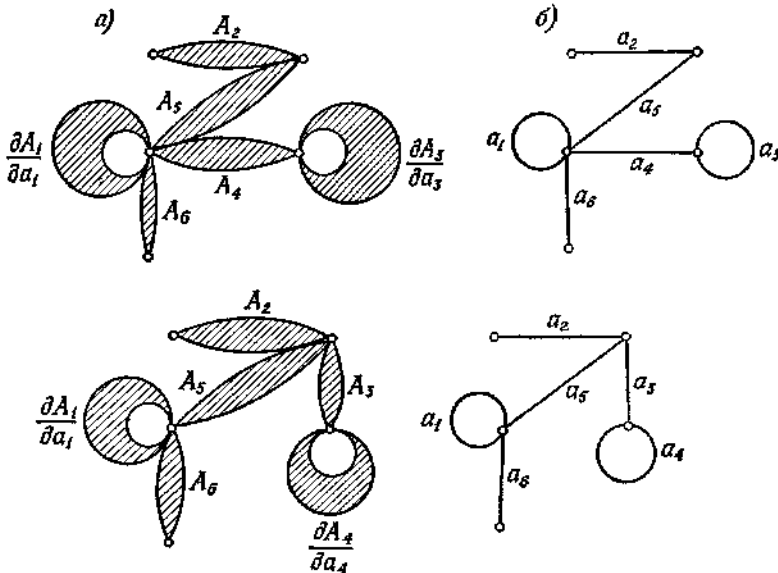


Рис. 6.14. Деревья второго ранга модуль-графа: а) деревья графа рис. 6.13, а; б) обобщенные деревья скелета графа рис. 6.13, б.

Если предположить, что двухполюсные модули графа  $\Gamma$  (рис. 6.13, а) — ребра, то деревья второго ранга этого линейного графа будут изоморфны обобщенным деревьям скелета  $\Gamma_o$ , два из которых приведены на рис. 6.14, б. Блочные группы  $A$  и  $A^d$  для линейного графа, изоморфного его скелету (рис. 6.13, б), соответственно равны

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \emptyset & \emptyset & \emptyset & 2 & 2 \\ \emptyset & 3 & 3 & \emptyset & 3 & 3 & \emptyset & 3 \\ 4 & \emptyset & 4 & 4 & \emptyset & 4 & 4 & \emptyset \\ 5 & 5 & \emptyset & 5 & 5 & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix},$$

так как  $\frac{\partial A_1}{\partial a_1} = \frac{\partial}{\partial 1} 1 = \emptyset = 1, \frac{\partial}{\partial 2} 2 = \emptyset = 1$  и т. д.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \\ 3 & \emptyset & \dots \\ \emptyset & 4 & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \\ \emptyset & \emptyset & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix},$$

так как  $A^d_1 = \emptyset, \frac{\partial A^d_1}{\partial a_1}$  и т. д.

Как следует из примера 6.12, формулы для блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа справедливы также и для линейных графов с двухаргументным соотношением инцидентности  $s$ . Столбцы полученной блочной группы соответствуют обобщенным деревьям, представляющим собой деревья с присоединенными петлями дополнения.

**6.2.4. Модуль-граф с выделенными элементами**

При организации структур часто возникает необходимость моделировать их графами с выделенными (конкретными) элементами, и осуществлять анализ этих графов не вникая в их структуру. В этих случаях будем пользоваться формулами для расчета блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа.

Рассмотрим несколько примеров.

*а. Граф с выделенными ребрами* (рис. 6.15)

На рис. 6.15 изображен граф  $\Gamma$  с выделенными ребрами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Обозначим через  $A_1$  блочную группу этого графа без ребер  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а через  $A$  блочную группу графа  $\Gamma$  с этими ребрами.

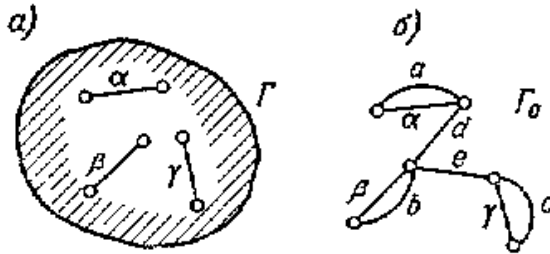


Рис. 6.15. Модуль-граф с выделенными ребрами: а) граф; б) скелет графа.

Представим граф  $\Gamma$  в виде модуль-графа, состоящего из 4 модулей: шестиполусного модуля  $\Gamma_1$  (граф  $\Gamma$  без ребер  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ ) и двухполусных модулей  $a$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Скелет  $\Gamma_0$  этого графа приведен на рис. 6.15, б. В скелете  $\Gamma_0$  дерево модуля  $\Gamma_1$  состоит из путей  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$ . Дополнительная блочная группа  $A^d_0$  скелета  $\Gamma_0$  равна

$$A^d_0 = \alpha a \quad \beta b \quad \gamma c = \begin{bmatrix} \alpha & a & \alpha & \alpha & a & a & \alpha & a \\ \beta & \beta & b & \beta & b & \beta & b & b \\ \gamma & \gamma & \gamma & c & \gamma & c & c & c \end{bmatrix}.$$

Блочная группа второго ранга  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  имеет вид



$${}^2A = \frac{\partial}{A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} \frac{\partial A_1}{\partial b} \frac{\partial A_1}{\partial c} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial c} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b \partial c} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b \partial c} \\ \emptyset \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \alpha \quad \alpha \quad \beta \quad a \\ \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \beta \quad \gamma \quad \gamma \quad \beta \\ \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \emptyset \quad \gamma \end{bmatrix}.$$

а дополнительная блочная группа графа равна

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \emptyset \\ \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix} \stackrel{e}{=} A^d_0 A^d_1.$$

Если ребра  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  образуют контур (треугольник), то

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial c} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial b \partial c}, \quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b \partial c} = 0,$$

$$A^d_1 a b = A^d_1 a c = A^d_1 b c, \quad A^d_1 a b c = 0.$$

В этом случае блочная группа графа  $\Gamma$

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} \frac{\partial A_1}{\partial b} \frac{\partial A_1}{\partial c} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} \\ \emptyset \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad A_\Delta \end{bmatrix}.$$

где  $A_\Delta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \gamma \end{bmatrix}$  — блочная группа графа, представляющая

собой контур (треугольник), состоящий из ребер  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ .  
Дополнительная блочная группа этого графа равна

$${}^2A^d = A^d_1 \begin{bmatrix} \alpha & a & \alpha & \alpha & a \\ \beta & \beta & b & \beta & b \\ \gamma & \gamma & \gamma & c & A^d_\Delta \end{bmatrix}.$$

где  $A^d_\Delta = \alpha \beta \gamma$

Тот же результат получим, непосредственно рассчитав блочную группу и дополнительную блочную группу графа  $\Gamma$  (рис. 6.16, а). Скелет этого графа показан на рис. 6.16, б).

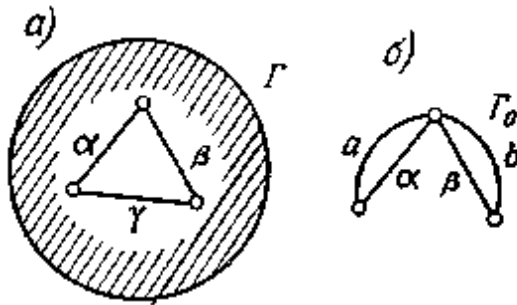


Рис. 6.16. Модуль-граф с выделенными ребрами, образующими цикл: а) граф; б) скелет графа.

Граф, состоящий из ребер  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , обозначим через  $\Gamma_\Delta$ , где блочная группа  $A_\Delta$  равна

$$A_\Delta = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \gamma \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа равна

$$A^d_\Delta = [\alpha\beta\gamma].$$

Для графа  $\Gamma$ , состоящего из двух модулей, имеем

$$A^d_0 = a\alpha \quad b\beta = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix},$$

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ A_\Delta & \alpha\gamma & \beta\gamma & \emptyset \end{bmatrix}.$$

Так как  $\frac{\partial A_1}{\partial c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} \end{bmatrix}$ , этот результат совпадает с полученным

ранее. Дополнительная блочная группа графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \alpha & a & \alpha & \alpha & a & a & \alpha & a \\ b & \alpha & b & b & b & \beta & b & \beta \\ \alpha & \beta & \beta & \beta & \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \end{bmatrix} A^d_1.$$

На основании правила формирования контурного графа имеем

$$\begin{bmatrix} a & \alpha \\ \alpha & b \\ \beta & \beta \end{bmatrix} A^d_1 = A^d_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \alpha \beta = A^d_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{bmatrix},$$

т. е. получаем результат, совпадающий с полученным ранее.

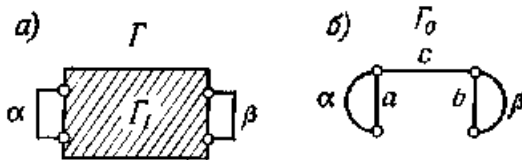


Рис. 6.17. Модуль-граф с выделенными двумя ребрами: а) граф; б) скелет графа.

Для графа  $\Gamma$  с двумя выделенными ребрами  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 6.17, а) блочную группу  $A$  и дополнительную блочную группу  $A^d$  найдем следующим образом:

$$A^d_0 = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix}$$

(согласно скелету  $\Gamma_0$ , изображенному на рис. 6.17, б),

$${}^2A = \frac{\partial}{A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ \alpha & \alpha & \beta & \emptyset \\ \beta & \emptyset & \emptyset & \emptyset \end{bmatrix},$$

$$A^d = A^d_0 A^d_1 = \begin{bmatrix} a & a & \alpha & \alpha \\ b & \beta & b & \beta \end{bmatrix} A^d_1.$$

б. Граф с выделенной вершиной (рис. 6.18, а)

Граф  $\Gamma$  (рис. 6.18, а) представим в виде графа, состоящего из двух модулей  $\Gamma_t$  и графа  $\Gamma_w$ , блочная группа которого равна

$$A_w = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа имеет вид

$$A^d_w = [\emptyset] = 1.$$

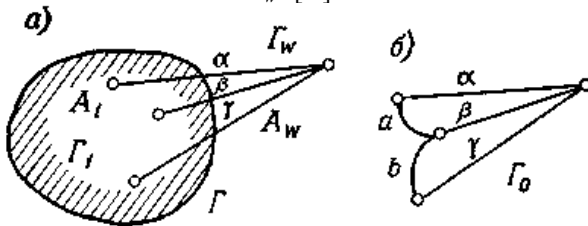


Рис. 6.18. Модуль-граф с выделенной вершиной: а) граф, б) скелет графа.

Дополнительная блочная группа скелета  $\Gamma_o$  (рис. 6.18, б) равна

$$A^d_o = a \alpha \beta \quad b \beta \gamma = \begin{bmatrix} a & a & a & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ b & \beta & \gamma & b & \beta & \gamma & b & \gamma \end{bmatrix},$$

поэтому блочная группа графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2 A = \frac{\partial}{A^d_o} \begin{bmatrix} A_1 \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a \partial b} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial a} & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 & A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial b} & A_1 \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} & \gamma & \beta & \begin{bmatrix} \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} & \alpha \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа

$${}^2 A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ \emptyset \end{bmatrix} = A^d_0 A^d_1 = \begin{bmatrix} a & a & a & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta \\ b & \beta & \gamma & b & \beta & \gamma & b & \gamma \end{bmatrix} A^d_1.$$

Аналогично рассчитываются блочные группы и дополнительные блочные группы графов с большим количеством выделенных элементов.

### 6.2.5. Преобразования модуль-графов

Каждому преобразованию модуль-графа  $\Gamma$ , состоящему из замыкания или деления его вершин, можно поставить в соответствие определенное преобразование его скелета  $\Gamma_0$ ; например, замыканию вершин модуль-графа  $\Gamma$  соответствует замыкание вершин его скелета  $\Gamma_0$ . Если обозначить через  $A_p$  блочную группу преобразованного графа  $\Gamma_p$ , а  $A^d_{0_p}$  — дополнительную блочную группу соответственно преобразованного скелета графа  $\Gamma_{C_p}$ , то можно написать

$${}^2 A_p = \frac{\partial}{\partial A^d_{0_p}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

и аналогично

$${}^2 A^d_p = \frac{\partial}{\partial A^d_{0_p}} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_g$  ( $A^d_1, A^d_2, \dots, A^d_g$ ) — блочные (дополнительные) группы модулей преобразованного графа  $\Gamma$ .

Заметим, что в преобразованном скелете  $\Gamma_{op}$  преобразованные модули в общем случае не соответствуют их деревьям.

Дополнительную блочную группу  $A_{op}$  преобразованного скелета  $\Gamma_{op}$  можно найти по правилам преобразования линейных графов (разд. 6.7). Для иллюстрации этого метода рассмотрим два вида преобразований модуль-графа: а) замыкание вершин графа, б) деление вершин графа.

Используя формулу (5.77) для дополнительной блочной группы графа  $\Gamma_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}$ , образованного замыканием вершин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  в графе  $\Gamma$ , для блочной группы  ${}^2A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}$  и дополнительной блочной группы  ${}^2A^d_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}$  модуль-графа с замкнутыми вершинами  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$  можно написать

$${}^2A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} = \frac{\partial}{\partial \left( A^d_0 \prod_{i=1}^{k-1} d_i \right)} \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \prod_{i=1}^{k-1} d_i}, \quad (6.18)$$

$${}^2A^d_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} = A^d_0 \left( \prod_{i=1}^{k-1} d_i \right) \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix} = {}^2A^d \prod_{i=1}^{k-1} d_i. \quad (6.19)$$

Здесь  $A^d_0$  — дополнительная блочная группа скелета  $\Gamma_0$  незамкнутого графа  $\Gamma$ ;  ${}^2A$  ( ${}^2A^d$ ) — блочная (дополнительная) группа незамкнутого графа  $\Gamma$ ;  $A_1, A_2, \dots, A_g$  ( $A^d_g, A^d_g, \dots, A^d_g$ ) — блочные (дополнительные) группы блоков незамкнутого графа  $\Gamma$ ;  $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$  — пути скелета  $\Gamma_0$  (незамкнутого), образующие произвольное дерево, касающееся вершин  $\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0k}$ .

Заметим, что на основании правила формирования контурных графов в приведенных выше формулах  $d_1, d_2, \dots, d_{k-1}$  также представляют собой пути модуль-графа  $\Gamma$ , образующие дерево, касающееся вершин  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ .

**Пример 6.5.** Найти блочную группу  ${}^2A_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  и дополнительную блочную группу  ${}^2A^d_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  графа  $\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  образованного замыканием вершин  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  в модуль-графе  $\Gamma$  [рис. 6.19, а (пунктиром обозначены пути замыкания вершин)].

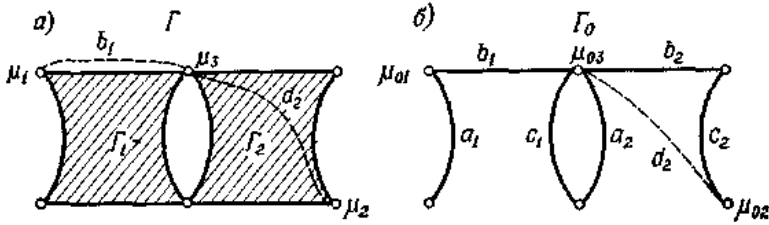


Рис. 6.19.

Дополнительная блочная группа  $A^d_{0}$  скелета  $\Gamma_0$  (рис. 6.19, б) незамкнутого графа  $\Gamma$  равна

$$A^d_{0} = [c_1 a_2],$$

поэтому блочная группа графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2 A = \frac{\partial}{A^d_{0}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial c_1} & A_1 \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \end{bmatrix},$$

а дополнительная блочная группа равна

$${}^2 A^d = A^d_{0} \begin{bmatrix} A^d_{1} \\ A^d_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d_{1} c_1 & A^d_{1} \\ A^d_{2} & A^d_{2} a_2 \end{bmatrix}.$$

В скелете  $\Gamma_0$  выберем пути между вершинами  $\mu_{0\bar{1}}$  и  $\mu_{0\bar{3}}$  —  $[b_1]$  и вершинами  $\mu_{0\bar{3}}$  и  $\mu_{0\bar{2}}$  —  $[b_2 c_2]$ .

Тогда для замкнутого графа  $\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}$  имеем

$$\begin{aligned} {}^2 A^d_{\mu_1 \mu_2 \mu_3} &= \frac{\partial^2 ({}^2 A)}{\partial b_1 \partial b_2 c_2} = \frac{\partial}{\partial b_2 c_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ A_2 & \frac{\partial A_2}{\partial a_2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial c_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial c_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Если в графе  $\Gamma$  выбрать пути  $b_1$  и  $d_2$  (рис. 6.19, а), то получим

$${}^2A^d_{\mu_1\mu_2\mu_3} = \frac{\partial^2({}^2A)}{\partial b_1 \partial d_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial d_2} & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial d_2} \end{bmatrix}.$$

Этот результат совпадает с предыдущим, так как

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1 \partial c_1} \\ \frac{\partial A_2}{\partial d_2} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1} & \frac{\partial^2 A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial a_2 \partial c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial d_2} \end{bmatrix}.$$

Дополнительная блочная группа замкнутого графа  $\Gamma_{\mu_1\mu_2\mu_3}$  равна

$${}^2A^d_{\mu_1\mu_2\mu_3} = [b_1] [d_2] ({}^2A^d) = \begin{bmatrix} A^d_1 \begin{bmatrix} c_1 \\ b_1 \end{bmatrix} & A^d_1 b_1 \\ A^d_2 d_2 & A^d_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ d_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

*б. Деление вершин модуль-графа*

Используя формулы (5.84), (5.85), (6.16) и (6.17) для блочной группы  $A^{\mu_1\mu_2}$  и дополнительной блочной группы  $A^{d\mu_1\mu_2}$  графа  $\Gamma^{\mu_1\mu_2}$ , образованного делением вершины  $\mu = [\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i\alpha_j \dots \alpha_p]$  графа  $\Gamma$  на две части  $\mu_1 = [\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i]$  и  $\mu_2 = [\alpha_j \dots \alpha_p]$ , получим следующие выражения



для блочной группы  $A^{\mu_1\mu_2}$  и дополнительной блочной группы  $A^{d\mu_1\mu_2}$  модуль-графа  $\Gamma^{\mu_1\mu_2}$  :

$${}^2 A^{\mu_1\mu_2} = \frac{\partial}{\partial \left( \frac{A^d_0}{\partial \mu_{01}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \left( \frac{A^d_0}{\partial \mu_{02}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = {}^2 A \mu_1 = {}^2 A \mu_2, \quad (6.20)$$

$$A^{d\mu_1\mu_2} = \frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{01}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{02}} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \frac{\partial {}^2 A^d}{\partial \mu_1} = \frac{\partial {}^2 A^d}{\partial \mu_2}, \quad (6.21)$$

где  $[\mu_{01}]$  и  $[\mu_{02}]$  — однострочные блочные группы двух частей вершины  $\mu_0$  скелета  $\Gamma_0$ , соответствующие частям  $\mu_1$  и  $\mu_2$  вершины  $\mu$  в графе  $\Gamma$ ;  $[\mu_1]$  и  $[\mu_2]$  — однострочные блочные группы обеих частей вершины  $\mu$  графа  $\Gamma$ , рассматриваемого как линейный граф и состоящего из подграфов, представленных модулями (граф с известной структурой модулей).

**Пример 6.6.** Найти блочную группу  ${}^2 A^{\mu_1\mu_2}$  графа  $\Gamma^{\mu_1\mu_2}$ , образованного делением вершины  $\mu$  графа  $\Gamma$  (рис. 6.20, а) на две части  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

Дополнительная блочная группа  $A^d_0$  скелета  $\Gamma_0$  (рис. 6.20, б)

$$A^d_0 = [a_1 a_3] [b_1 b_2] [a_2 b_3], \quad \mu_{01} = [a_3 b_3], \quad \mu_{02} = [a_1 a_2 b_1 b_2],$$

$$\frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{01}} = \frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{02}} = b_1 b_1 \ a_2 b_3 a_1 a_3 = \begin{bmatrix} b_1 b_1 a_1 b_1 a_2 b_3 a_1 b_1 \\ a_2 b_3 b_1 a_3 b_2 b_3 b_2 a_3 \end{bmatrix},$$

Поэтому

$${}^2 A^{\mu_1\mu_2} = \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial A^d_0}{\partial \mu_{01}} \right)} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1} \frac{\partial A_1}{\partial b_1} & A_1 & A_1 & \frac{\partial A_1}{\partial a_1} & A_1 \\ \frac{\partial A_2}{\partial a_2} & A_2 & A_2 & A_2 & \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} & \frac{\partial A_2}{\partial b_2} \\ A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial b_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial b_3} & A_3 & \frac{\partial A_3}{\partial a_3} \end{bmatrix}.$$

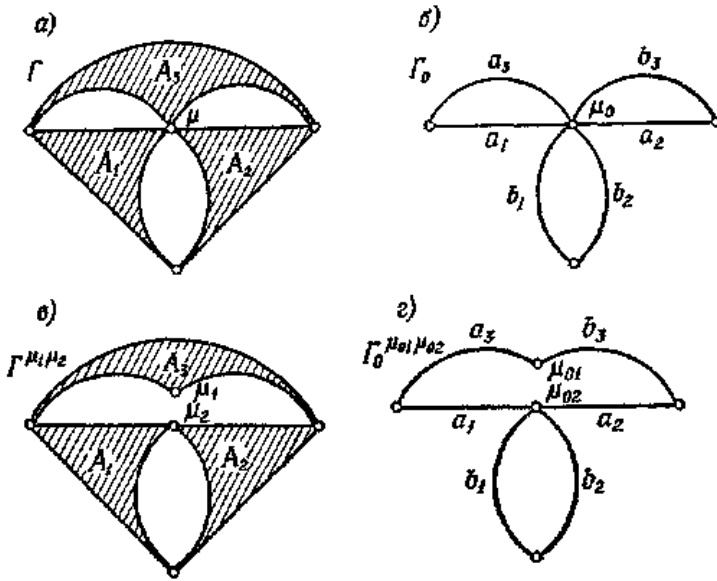


Рис. 6.20.

Аналогичный результат получим, рассчитывая блочную группу  $^2 A^{\mu_1 \mu_2}$  графа  $\Gamma^{\mu_1 \mu_2}$  на основании его скелета  $\Gamma_0^{\mu_{01} \mu_{02}}$ , изображенного на рис. 6.20, г.

### 6.2.6 Перемещение нижних индексов

Пусть дан граф  $\Gamma$ , представляющий собой геометрическое изображение блочной группы  $A$  и обратное изображение блочной группы  $A^d$ . Для упрощения записи введем условное обозначение алгебраической производной блочной группы  $A$

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = A_\alpha \quad (6.22)$$

а также дополнительной блочной группы  $A^d$

$$[\alpha] A^d = A^d_\alpha \quad (6.23)$$

Кроме того, обозначим

$$\frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} = A_{k\alpha}, \quad (6.24)$$

$$[\alpha_k] A^d_k = A^d_{k\alpha} \quad (6.25)$$

где индекс  $k$  в обозначении  $\alpha_k$  указывает, что ребро  $\alpha_k$  (или путь  $\alpha_k$ ) принадлежит модулю  $\Gamma_h$  с блочной группой  $A_k$  и дополнительной блочной группой  $A^d_k$ .

Операцию, описываемую уравнениями (6.22) и (6.23) или (6.24) и (6.25), назовем перемещением нижних индексов и обозначим стрелкой  $\downarrow$ ; тогда

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = \alpha \downarrow A = A_\alpha, \quad (6.26)$$

$$[\alpha] A^d = [\alpha] \downarrow A^d = A^d_\omega \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} = [\alpha_k] \downarrow A_k = A_{k\alpha} \quad (6.28)$$

$$[\alpha_k] A^d_k = [\alpha_k] \downarrow A^d_k = A^d_{k\alpha} \quad (6.29)$$

Применяя операцию перемещения нижних индексов для блочной группы и дополнительной блочной группы модуль-графа, выражения

$${}^2 A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}$$

и

$${}^2 A^d = A^d_0 \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix},$$

запишем в следующем виде:

$${}^2 A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad {}^2 A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ \vdots \\ A^d_g \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Учитывая свойства производной и произведения блочных групп, имеем

$$[a_k] \downarrow A_{ka} = A_{kaa} = 0, \quad (6.31)$$

$$[a_k] \downarrow A_l = A_l, k \neq l, \quad (6.32)$$

$$[a_k] \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

где  $[a_k]$  — произвольная блочная группа, связанная с графом  $\Gamma_k$ , а также

$$\begin{bmatrix} a_k \\ a_l \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_l \\ A_k \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = a_l \downarrow \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} \\ A_{la} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (6.34)$$

$$a_k a_l \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = a_l a_k \downarrow \begin{bmatrix} A_k \\ A_l \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ka} & A_k \\ A_l & A_{la} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

Для иллюстрации применения операции перемещения нижних индексов блочной группы модуль-графа приведем следующие примеры.

**Пример 6.15.**

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ a_2 & c_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_2 \\ A_{3b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2ab} \\ A_{3b} & A_{3bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3bc} \end{bmatrix}.$$

**Пример 6.7.**

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{2a} \\ A_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & b_2 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{2a} \\ A_{3a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_{2ab} \\ 0 & A_{3a} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_{2ab} \\ A_{3a} \end{bmatrix}.$$

**Пример 6.8.**

$$\frac{\partial}{\partial a_2} \begin{bmatrix} a_1 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = a_1 \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}.$$

**Пример 6.9.**

$$a_1 a_2 \downarrow \begin{bmatrix} A^d_{1b} & A^d_{1c} \\ A^d_{2b} & A^d_{2d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^d_{1ab} & A^d_{1ac} & A^d_{1b} & A^d_{1c} \\ A^d_{2b} & A^d_{2d} & A^d_{2ab} & A^d_{2ad} \end{bmatrix}.$$

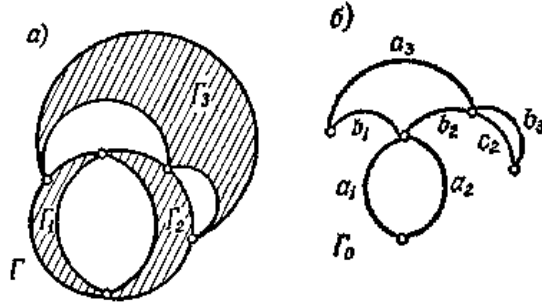


Рис. 6.21.

**Пример 6.10.** Найти блочную группу  ${}^2A$  модуль-графа  $\Gamma$  (рис. 6.21, а), скелет которого  $\Gamma_0$  изображен на рис. 6.21, б:

$$A^d_0 = [a_1 a_2] [b_1 b_2 b_3] [c_2 b_3] = \begin{bmatrix} a_1 a_1 a_1 b_1 a_2 a_2 a_1 a_1 a_1 b_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 c_2 a_2 b_2 c_2 b_1 b_2 a_3 a_2 b_2 a_3 \\ c_2 c_2 a_3 c_2 c_2 a_3 b_3 b_3 b_3 b_3 b_3 b_3 \end{bmatrix},$$

$${}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_{2c} & A_{2bc} & A_{2c} & A_{2ac} & A_{2abc} & A_{2ac} & A & A_{2b} & A_2 & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_{3a} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} \end{bmatrix}.$$

Дополнительная блочная группа  ${}^2A^d$  находится аналогично, так как

$${}^2A^d = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A^d_1 \\ A^d_2 \\ A^d_3 \end{bmatrix}.$$

Операция замыкания вершин графа при использовании перемещения нижних индексов выглядит следующим образом: замкнуть граф  $\Gamma$  (рис. 6.21, а) по пути  $a_1$ . Тогда

$${}^2A_{a_1} = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = a_1 \downarrow [{}^2A] = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} \\ A_{2ac} & A_{2abc} & A_{2ac} & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_{3b} & A_{3b} & A_{3ab} \end{bmatrix}.$$

Аналогично провести любые другие преобразования модуль-графа. Приведенные примеры показывают, что применение операции перемещения нижних индексов приводит к существенному упрощению записи блочной группы модуль-графа.

### 6.2.7. Графы $k$ -й ранга

Объединяя модули графа второго ранга, получим граф третьего ранга. Повторяя это объединение для графа третьего ранга, получим граф четвертого ранга. Граф  $k$ -го ранга определяется следующим образом:

$${}^k\Gamma = \langle {}^kP, {}^kZ, {}^k\varepsilon \rangle, \quad (6.36)$$

где  ${}^kP$  — множество вершин графа  ${}^k\Gamma$ ;  ${}^kZ$  — множество модулей графа  ${}^k\Gamma$ , представляющих собой графы ( $k-1$ -й или более низкого ранга;  ${}^k\varepsilon$  — многоаргументное соотношение инциденции модулей графа  ${}^k\Gamma$ .

Последовательное объединение модулей дает ряд графов с растущими категориями. Заметим, что для данного ряда справедливы соотношения

$${}^kP \subset {}^{k-1}P, \quad \text{card } {}^kZ < \text{card } {}^{k-1}Z, \quad {}^k\varepsilon \subset {}^{k-1}\varepsilon. \quad (6.37)$$

Блочную группу  $k$ -го ранга  ${}^kA$  графа  ${}^k\Gamma$  определим аналогично блочным группам графов второго ранга, используя понятие скелета этого графа.

В качестве примера на рис. 6.22, б приведен граф третьего ранга  ${}^3\Gamma$ , полученный в результате объединения модулей графа второго ранга  ${}^2\Gamma$  (рис. 6.22, а).

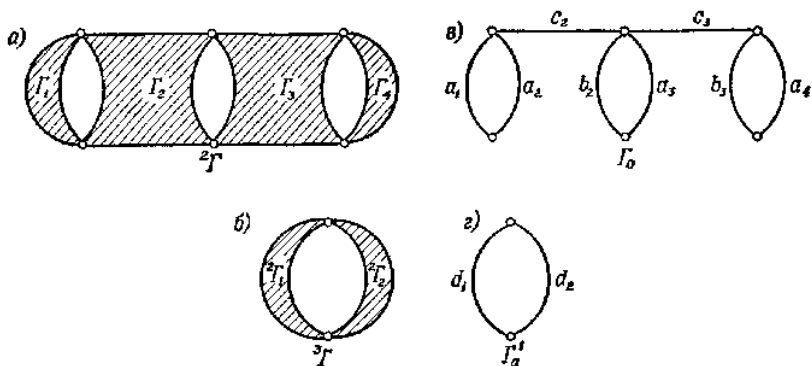


Рис. 6.22. Объединение графов второго ранга: а) граф второго ранга; б) граф третьего ранга; в) скелет графа второго ранга; г) скелет графа третьего ранга.

Модуль  ${}^2\Gamma_1$  графа  ${}^3\Gamma$  образован объединением модулей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  графа  ${}^2\Gamma$ , а модуль  ${}^2\Gamma_2$  — объединением модулей  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  графа  ${}^2\Gamma$ . В

соответствии со скелетом  $\Gamma'_0$  (рис. 6.22, з) графа  ${}^3\Gamma$  найдем блочную группу третьего ранга  ${}^3A$  этого графа

$${}^2A = d_1 d_2 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2A_{1d} & {}^2A_1 \\ {}^2A_2 & {}^2A_{2d} \end{bmatrix}.$$

Для преобразования блочной группы  ${}^3A$  в блочную группу второго ранга  ${}^2A$  графа  ${}^2\Gamma$  найдем элементы блочной группы  ${}^3A$  по скелетам подграфов графа  ${}^2\Gamma$ , представленным модулями  ${}^2\Gamma_1$  и  ${}^2\Gamma_2$  графа  ${}^3\Gamma$  (рис. 6.22, в):

$${}^2A_1 = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix}, \quad {}^2A_2 = \begin{bmatrix} A_{3b} & A_3 \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Так как  $d_1 = b_2$ , а также  $d_2 = a_3$ , имеем

$${}^2A_{1d} = {}^2A_{1b_2} = b_2 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix},$$

$${}^2A_{2d} = {}^2A_{2a_3} = a_3 \downarrow \begin{bmatrix} {}^2A_1 \\ {}^2A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{3ab} & A_{3a} \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix},$$

и, следовательно, согласно выражению (а), блочная группа  ${}^2A$  графа  ${}^2\Gamma$  равна

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_{2b} & A_{2ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3b} & A_3 \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1a} & A_1 \\ A_2 & A_{2a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{3ab} & A_{3a} \\ A_4 & A_{4a} \end{bmatrix}.$$

Объединение модулей графа и операция с графами высшего ранга часто упрощают анализ модуль-графов.

Поскольку способ расчета блочных групп графов различных рангов одинаков, то для упрощения записи при обозначении графов буквой  $\Gamma$  не будем указывать их ранг.

## 7. Многополюсные компоненты моделей структур

### 7.1. Полюсный граф многополюсника.

Компонента модели структур, имеющая  $m+1$  полюсов, посредством которых она может объединяться с другими компонентами, характеризуется  $m$  независимыми поперечными переменными  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$  и  $m$  независимыми продольными переменными  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ . С каждым полюсом связана поперечная переменная (рис.1, а), но поскольку алгебраическая сумма поперечных переменных равна нулю, то одна из них зависима и выражается через остальные  $m$  переменных. Каждая продольная переменная связана с парой полюсов и отображается соответствующим ребром. Совокупность ребер независимых переменных должна образовать дерево на множестве  $m + 1$  полюсов многополюсника (рис. 1,б). Любое другое ребро, связывающее пару каких-либо полюсов, образует с совокупностью ветвей дерева контур, и, следовательно, любая другая продольная переменная может быть выражена через некоторую совокупность независимых продольных переменных.

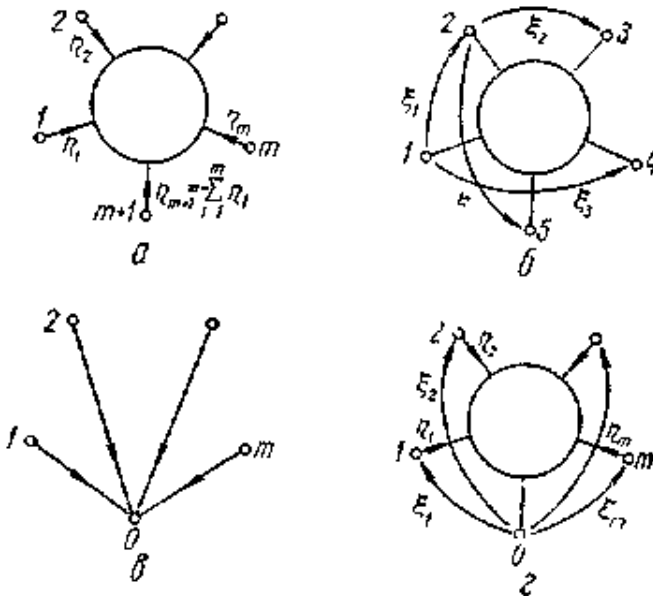


Рис. 1 Представление многополюсника.

а — поперечные переменные; б — продольные переменные;



$\nu$  — полюсный граф;  $\varepsilon$  — поперечные и продольные переменные, соответствующие полюсному графу.

В качестве стандартного представления совокупности независимых переменных многополюсника удобно принять звездное дерево с центром в некотором полюсе, называемом *базисным* (рис. 1, б). Остальные вершины этого дерева соответствуют  $m$  полюсам многополюсника (кроме базисного) и нумеруются порядковыми числами от 1 до  $m$ , а базисному полюсу обычно присваивается обозначение 0. Ветви дерева ориентируются одинаково относительно базисного полюса; чаще всего они направляются к базисному узлу, что соответствует направлению поперечных переменных внутрь многополюсника и продольных переменных – от базисного полюса к соответствующим полюсам (рис. 1, в) Таким образом, с каждым небазисным полюсом связаны продольная и поперечная переменные, которые нумеруются теми же числами, что и соответствующий полюс, и называются *полюсными переменными*.

Звездное дерево с  $m$  ветвями, направленными к базисному полюсу (рис. 1, в), представляет собой *полюсный граф* компоненты с  $m + 1$  полюсами. Каждая ветвь этого графа характеризуется соответствующим уравнением системы  $m$  уравнений, связывающих независимые поперечные и продольные переменные многополюсниковой компоненты.

Если продольные переменные заданы произвольным деревом, то они легко могут быть выражены через полюсные переменные. Так, для продольных переменных пятиполюсника (рис. 1 б) при базисном узле 5 имеем:

$$\xi_1 = \xi'_2 - \xi'_1, \quad \xi_2 = \xi'_3 - \xi'_2, \quad \xi_3 = \xi'_4 - \xi'_1, \quad \xi_4 = -\xi'_4.$$

где полюсные переменные отмечены штрихами.

## 7.2. Уравнения многополюсника.

Для описания линейной компоненты с  $m + 1$  полюсами используются три различные формы  $n$  соотношений, называемые *полюсными уравнениями*. Уравнения, записанные относительно поперечных переменных, имеют вид :



Матрицы  $Y_d$  и  $Z_d$  однозначно характеризуют многополюсник относительно принятой нумерации полюсов и выделенного базисного полюса и являются его обобщенными параметрами. Они связаны зависимостями

$$Y_d = Z_d^{-1}; \quad Z_d = Y_d^{-1}.$$

Ясно, что обе матрицы существуют в случае, когда каждая из них неособенная. Если же матрица  $Y_d$  (или  $Z_d$ ) особенная, то матрица  $Z_d$  (или  $Y_d$ ) не существует.

В смешанной (гибридной) форме часть уравнений выражены относительно продольных переменных, объединенных в векторе  $\xi'_d$ , а остальная часть — относительно поперечных переменных, объединенных в векторе  $\eta''_d$ , т.е.

$$\begin{bmatrix} \xi'_d \\ \eta''_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix} = H_d \begin{bmatrix} \eta'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix},$$

где гибридная матрица  $H_d$  записана в блочном виде через субматрицы  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$  и  $H_{22}$ . Решив это уравнение относительно векторов  $\eta'_d$  и  $\eta''_d$ , получим

$$\begin{bmatrix} \eta'_d \\ \eta''_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^{-1}_{11} & -H^{-1}_{11}H_{12} \\ H_{21}H^{-1}_{11} & H_{22} - H_{21}H^{-1}_{11}H_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi'_d \\ \xi''_d \end{bmatrix},$$

что равносильно уравнению  $\eta_d = Y_d \xi_d$ . Таким образом, получаем соотношение для матрицы  $Y_d$  через блоки матрицы  $H_d$ :

$$Y_d = \begin{bmatrix} H^{-1}_{11} & -H^{-1}_{11}H_{12} \\ H_{21}H^{-1}_{11} & H_{22} - H_{21}H^{-1}_{11}H_{12} \end{bmatrix}.$$

Аналогично для матрицы  $Z_d$  находим:

$$Z_d = \begin{bmatrix} H_{11} - H_{12}H^{-1}_{22}H_{21} & H_{12}H^{-1}_{22} \\ -H^{-1}_{22}H_{21} & H^{-1}_{22} \end{bmatrix}.$$

Дуга полюсного графа многополюсника описывается тем уравнением, которое представлено относительно связанной с ней поперечной или продольной переменной (в первом случае она относится к  $y$ -дугам, а во втором — к  $z$ -дугам). В отличие от уравнения дуги двухполюсной

компоненты, правая часть уравнения дуги полюсного графа многополюсника может содержать любые переменные, связанные с дугами этого графа.

Ниже рассматриваются полюсные графы и уравнения наиболее часто встречающиеся многополюсных компонент моделей структур.

### 7.3. Модель транзистора.

Уравнения низкочастотного транзистора (рис. 2, а) в квазилинейном режиме обычно представляются в трех формах:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{12} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{12} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

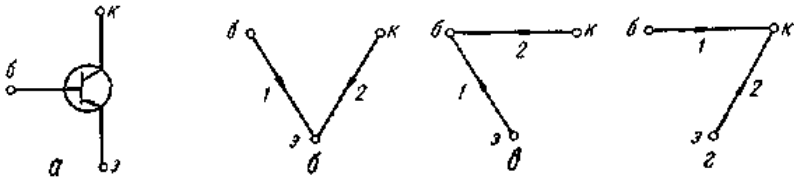


Рис. 2. Транзистор (а) и его полюсные графы при выборе в качестве общего полюса эмиттера (б), базы (в) и коллектора (з).

Им соответствуют три системы параметров, которыми служат матрицы  $g$ ,  $r$ ,  $h$  этих уравнений. Переход от одной системы параметров к другой осуществляется на основе следующих зависимостей:

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|r|} \begin{bmatrix} r_{22} - r_{12} \\ -r_{21} & r_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} 1 - h_{12} \\ h_{21} & |h| \end{bmatrix};$$

$$r = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{|g|} \begin{bmatrix} g_{22} - g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{h_{22}} \begin{bmatrix} |h| & h_{12} \\ -h_{21} & 1 \end{bmatrix};$$

$$h = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}} \begin{bmatrix} 1 - g_{12} \\ g_{21} & |g| \end{bmatrix} = \frac{1}{r_{22}} \begin{bmatrix} |r| & r_{12} \\ -r_{21} & 1 \end{bmatrix}.$$

где через  $|g|$ ,  $|r|$ ,  $|h|$  обозначены определители соответствующих матриц, т. е.  $|g| = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$  и т.п.

В зависимости от того, какой из трех полюсов транзистора выбран базисным (общим), имеем три типа полюсных графов: с общим эмиттером (рис. 2, б), с общей базой (рис. 2, в) и с общим коллектором (рис. 2, з). Для описания дуг каждого из этих полюсных графов пригодна любая из трех форм уравнений. Так как численные значения параметров для различных полюсных графов отличаются между собой, то параметры отличают индексами ( $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\kappa$ ) соответственно схеме, в которой они определены.

Вид графа транзисторной схемы зависит от выбора базисных полюсов транзисторов. Так, для схемы (рис. 3, а) при общей базе для первого транзистора и общем эмиттере для второго транзистора получаем граф, изображенный на рис. 3, б (дуги полюсных графов транзисторов выделены жирными линиями).

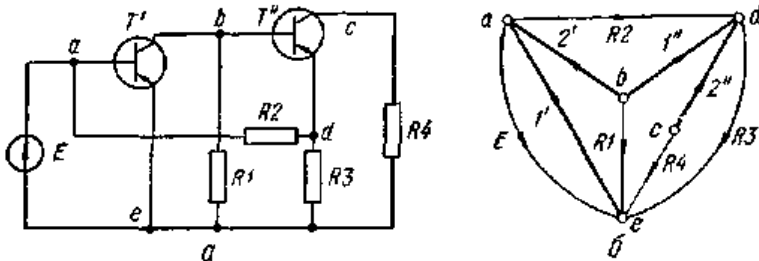


Рис. 3. Транзисторная схема (а) и ее граф (б).

## 7.4. Модель трансформатора.

Простейший трансформатор представляет собой две индуктивно связанные катушки (рис. 4, а), полюсные уравнения которых в линейном приближении имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned} \right\}$$

где  $L_1$  и  $L_2$  — индуктивности катушек;  $M$  — взаимная индуктивность. Величина  $M$  входит в эти уравнения со знаком плюс, если токи в катушках одинаково направлены относительно

одноименных полюсов, и со знаком минус, если токи относительно одноименных полюсов направлены противоположно (одноименные полюсы обычно отмечаются жирными точками).

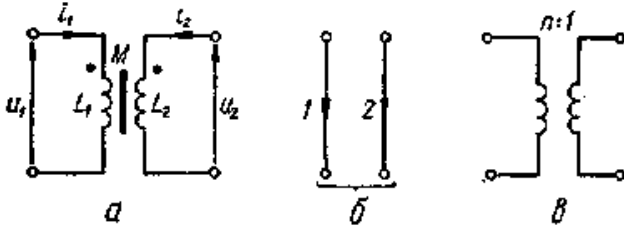


Рис. 4. Трансформатор (а), его полюсный граф (б) и идеальный трансформатор (в).

Представив каждую катушку ее полюсным графом (дугой), получим полюсный граф трансформатора, который состоит из двух топологически несвязанных дуг (рис. 4, б). Полюсные уравнения трансформатора можно представить в операторной форме следующими способами:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} pL_1 & pM \\ pM & pL_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = Y_D \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{p} \frac{1}{L_1 L_2 - M^2} \begin{bmatrix} L_2 - M \\ -M & L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = Z_D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2} & \frac{M}{L_2} \\ -\frac{M}{L_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = H_D \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Квадратные матрицы  $Y_D$ ,  $Z_D$  и  $H_D$  в этих уравнениях являются обобщенными параметрами трансформатора. Для характеристики трансформаторов используются также две величины — коэффициент связи  $k$  и коэффициента трансформации  $n$ , выражаемые соотношениями:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}; \quad n = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}.$$

Из физических соображений следует, что  $k^2 < 1$ . В предельном (теоретическом) случае при  $k=1$  говорят о *полной связи*, причем уравнения трансформатора преобразуются к виду

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & \frac{1}{pL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

и представляют собой модель *совершенного трансформатора*. Как видно, в таком трансформаторе отношение напряжений равно коэффициенту трансформации, т. е.

$$u_1 = nu_2, \quad u_1 / u_2 = n.$$

Аналогичное соотношение для токов имеет место при условии  $1/pL_2 \rightarrow 0$ , т. е.  $L_2 \rightarrow \infty$ . Для того, чтобы величина  $n$  оставалась конечной, необходимо принять также  $L_1 \rightarrow \infty$ . Тогда  $i_2 = -ni_1$  и уравнения имеют вид:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Компоненты, описываемые этими уравнениями, называют *идеальным трансформатором*. Его можно понимать как трансформатор с полной связью и бесконечно большими индуктивностями, отношение которых конечно и равно  $n^2$ . Условное обозначение идеального трансформатора показано на рис.4, в. Его полюсный граф имеет тот же вид, что и в общем случае (рис. 4,б), но уравнения могут быть представлены только в смешанной форме. Поэтому в полюсном графе идеального трансформатора дуга 1 является z-дугой, а дуга 2 — y-дугой.

В общем случае произвольного числа  $m$  индуктивно связанных двухполюсников их уравнения записываются в виде:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1m} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{m1} & Z_{m2} & \dots & Z_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_m \end{bmatrix}.$$

где  $Z_{ij} = pL_{ij}$ , причем  $L_{ij}$  — *собственные индуктивности* и  $L_{ij}$  ( $i \neq j$ ) — *взаимные индуктивности* двухполюсников.

Полусный граф схемы с двухполюсниками при наличии индуктивных связей между ними строится так же, как и для обычных схем без индуктивных связей, т. е. каждый двухполюсник представляется дугой, и соединения дуг в графе соответствуют соединениям двухполюсников в схеме. Единственное различие состоит в том, что граф схемы с индуктивными связями может быть несвязным.

## 7.5. Представление механических структур многополюсниками.

Описанный метод представления многополюсных компонент применим к системам любой физической природы. Ниже приводятся полусные уравнения и полусные графы простейших механических многополюсников.

*Рычаг* (рис. 5, а) при малых перемещениях представляется полусным графом (рис. 5, б) и описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= M \frac{d_2^2 x}{dt^2} + n_{21} f_2 + n_{31} f_3 \\ x_2 &= -n_{21} x_1 \\ x_3 &= -n_{31} x_1 \end{aligned} \right\},$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — силы;  $x_1, x_2, x_3$  — перемещения в точках  $a, b, c$  рычага;  $M$  — масса, приведенная в точке  $a$ ;  $n_{21}, n_{31}$  — отношения плеч рычага:  $n_{21} = l_2/l_1, n_{31} = l_3/l_1$

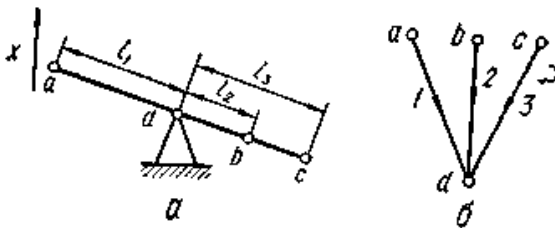


Рис. 5. Рычаг (а) и его полусный граф (б).

*Зубчатая передача* (рис. 6, а) представляется полусным графом (рис. 6, б) и описывается следующими полусными уравнениями:



$$\left. \begin{aligned} \mu &= (B_1 + n_{21}^2 B_2) \frac{d\varphi_1}{dt} + (\tau_1 + n_{21}^2 \tau_2) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + n_{12} \mu_2 \\ \varphi_2 &= -n_{12} \varphi_1 \end{aligned} \right\},$$

где  $\mu_1, \mu_2$  — моменты и  $\varphi_1, \varphi_2$  — углы поворота первого и второго валов;  
 $B_1, B_2$  — крутильные сопротивления и  $\tau_1, \tau_2$  — моменты инерции валов;  
 $n_{12}$  — передаточное число, равное отношению количества зубьев шестерен:

$$n_{12} = \frac{m_1}{m_2}.$$

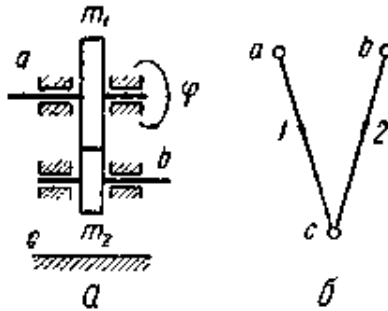


Рис. 6. Зубчатая передача (а) и ее полюсный граф (б).

*Натяжной ролик* (рис. 7, а) преобразует вращательное движение в поступательное, и его полюсный граф состоит из двух отдельных дуг (рис.7,б).

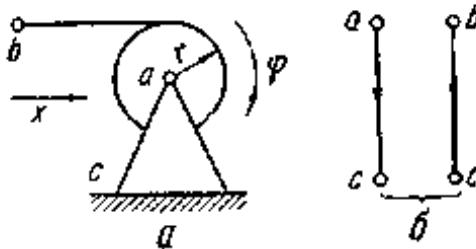


Рис. 7. Натяжной ролик (а) и его полюсный граф (б).

Полносные уравнения натяжного ролика записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= B \frac{d\varphi_1}{dt} + \tau \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - r f_2 \\ x_2 &= r\varphi_1 \end{aligned} \right\},$$

где  $B$  — крутильное сопротивление;  $\tau$  — момент инерции и  $r$  — радиус ролика.

Блок (рис. 8, а), характеризующийся массой  $M$ , моментом инерции  $\tau$ , радиусом  $r$  и сопротивлением трения  $B$ , представляется полносным графом с тремя дугами (рис. 8, б) и описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{B}{r^2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2} \frac{d^2x_1}{dt^2} + f_2 \frac{B}{r^2} \frac{dx_3}{dt} - \left( M + \frac{\tau}{r^2} \right) \frac{d^2x_3}{dt^2} \\ f_3 &= -\frac{B}{r^2} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\tau}{r^2} \frac{d^2x_1}{dt^2} - 2f_2 + M \frac{d^2x_3}{dt^2} \end{aligned} \right\},$$

где  $f_1, f_2, f_3$  — силы, приложенные в точках  $a, b, c$ ;  $x_1, x_2, x_3$  — перемещения этих точек.

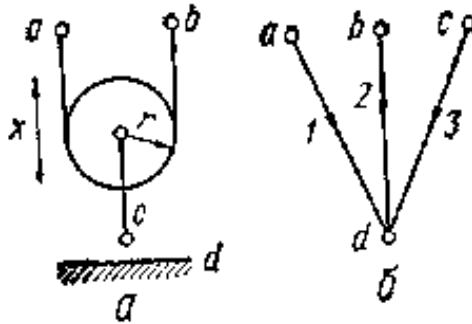


Рис. 8. Блок (а) и его полносный граф (б).

На рис. 9 изображена схема с механическими многополюсниками и ее граф. Рычаг  $P_1$  представлен на графе дугами 1' и 2', а рычаг  $P_2$  — дугами 1'' и 2'' (эти дуги выделены жирными линиями).

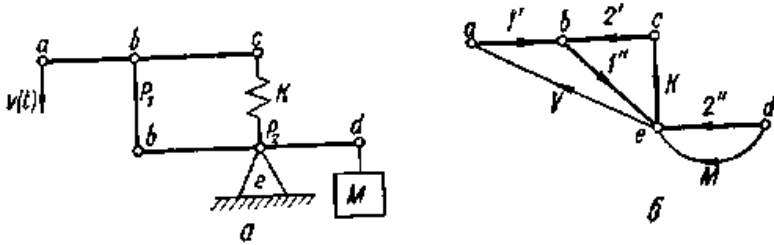


Рис. 9. Механическая система с многополюсными компонентами (а) и ее граф (б).

### 7.6. Дифференциальный редуктор.

В качестве примера вращательного механического многополюсника рассмотрим дифференциальный редуктор, называемый обычно *дифференциалом* (рис. 10, а). Его полюсами являются три вала, которые осуществляют связь с другими компонентами. Скорость  $\omega_0$  пропорциональна разности скоростей  $\omega_a$  и  $\omega_b$ , т. е.  $\omega_c = n(\omega_a - \omega_b)$ . Коэффициент пропорциональности  $n$  определяется соотношением между числом зубьев конических зубчатых колес.

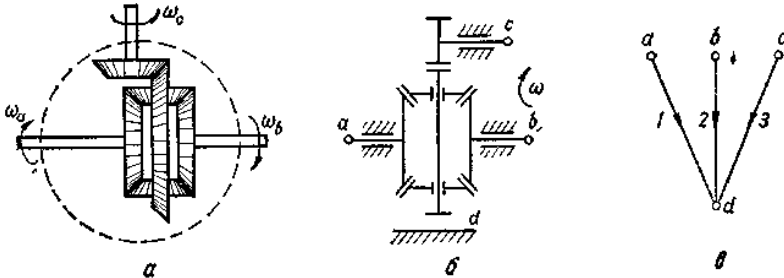


Рис. 10. Дифференциал (а), его кинематическая схема (б) и полюсный граф (в).

Кинематическая схема дифференциала показана на рис. 10, б, а его полюсный граф – на рис. 10, в. Для вывода полюсных уравнений воспользуемся соотношениями динамики для трех валов (без учета трения в подшипниках и упругости валов):

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \mu_1 - \mu; \quad J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = \mu_2 - \mu; \quad J_3 \frac{d\omega_3}{dt} = \mu_3 - \frac{\mu}{n},$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции валов вместе с насаженными на них коническими шестернями ( $J_3$  учитывает также момент инерции

непосредственно сцепленной с валом с части дифференциала),  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – внешние вращательные моменты,  $\mu$  – эквивалентный момент нагрузки, приложенный к первому валу со стороны дифференциала. Соотношение угловых скоростей при выбранном положительном направлении  $\omega$  (рис. 10,а) имеет вид  $\omega_3 = -n(\omega_1 + \omega_2)$ .

Подставляя значение  $\omega_3$  в последнее выражение, находим:

$$\mu = n^2 J_3 \left( \frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} \right) + n\mu_3.$$

Заменяя в первых двух соотношениях  $\mu$  через полученное выражение и присоединив соотношение для угловых скоростей, получим полюсные уравнения дифференциала в виде:

$$\mu_1 = J_1 + n^2 J_3 \frac{d\omega_1}{dt} + n^2 J_3 \frac{d\omega_2}{dt} + n\mu_3;$$

$$\mu_2 = n^2 J_3 \frac{d\omega_1}{dt} + J_2 + n^2 J_3 \frac{d\omega_2}{dt} + n\mu_3;$$

$$\omega_3 = -n\omega_1 - n\omega_2.$$

Им соответствует матричное уравнение в операторной форме:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & J_1 + n^2 J_3 & pn^2 J_3 & n \\ & pn^2 J_3 & p & J_2 + n^2 J_3 & n \\ & -n & -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix},$$

где квадратная матрица третьего порядка является гибридной матрицей дифференциала. Как видно, полюсные уравнения нельзя представить относительно моментов, и, следовательно, матрица  $Y_D$  для дифференциала не существует. Они могут быть преобразованы к уравнениям для угловых скоростей, но тогда матрица  $Z_D$  будет содержать интегральные операторы.

## 7.7. Двигатель постоянного тока.

При рассмотрении систем с электромеханическим преобразованием энергии в качестве многополюсных компонент фигурируют структуры электрических машин. Они обычно представляются несвязными полюсными графами, а их полюсные уравнения выражают зависимости между электрическими и механическими величинами.

Одним из наиболее простых примеров электрических машин является *двигатель постоянного тока* (рис 11,а).

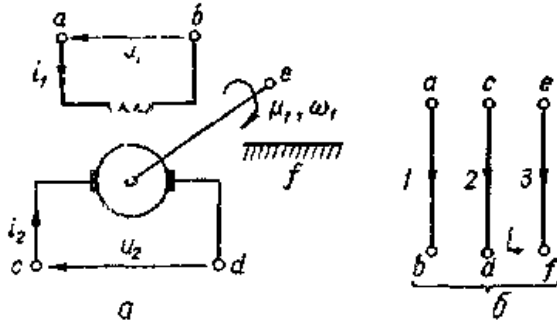


Рис.11. Двигатель постоянного тока (а) и его полюсный граф (б).

Модель его структуры представляется полюсным графом (рис. 11,б), дуги которого соответствуют обмотке возбуждения, электрическому входу и механическому выходу. Полюсные уравнения двигателя имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \\ u_2 &= G\omega_3 i_1 + R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ \mu_3 &= -G i_1 i_2 + B\omega_3 + J \frac{d\omega_3}{dt} \end{aligned} \right\},$$

где  $R_1, L_1$  — сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения;  $R_2, L_2$  — сопротивление и индуктивность цепи якоря;  $G$  — коэффициент, зависящий от параметров машины. Два из этих уравнений нелинейны, так как в них входят произведения переменных.

В частном случае, при постоянном напряжении возбуждения ( $u_1 = \text{const}$ ) и отсутствии реакции якоря, ток возбуждения также постояен ( $i_1 = i_0$ ). Уравнения становятся линейными и в матричной форме принимают вид:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2 + pL_2 & Gi_0 \\ -Gi_0 & B + pJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}.$$

Соответственно, двигатель представляется четырехполюсником, и его полюсный граф содержит только дуги 2 и 3.

## 7.8. Гидромеханические многополюсники.

В технике широко используются различные гидромеханические системы в качестве исполнительных механизмов, усилителей, гидроприводов и т. п. Их можно также рассматривать как соединение многополюсных компонент. Приведем некоторые примеры гидромеханических многополюсников.

*Управляющий золотник* (рис. 12, а) представляет собой многополюсник с механическим входом, характеризующимся силой  $f_1$  и перемещением  $x_1$ , и гидравлическим выходом, характеризующимся разностью давления  $p_2$  и объемным потоком жидкости  $g_2$ . Полюсный граф (рис. 12, б) состоит из двух дуг, первая из которых отображает механический вход, а вторая — гидравлический выход.

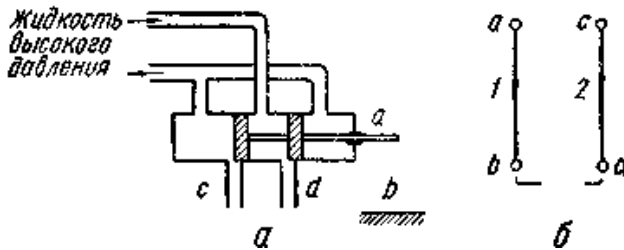


Рис. 12. Управляющий золотник (а) и его полюсный граф (б).

Полюсные уравнения управляющего золотника имеют вид:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + B_1 \frac{d}{dt} + M_1 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21} & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ p_2 \end{bmatrix},$$

где  $B_1$  и  $M_1$  — соответственно вязкое сопротивление и масса золотникового поршня;  $R_2$  — гидравлическое сопротивление;  $k_1$  и  $k_{21}$  — коэффициенты, определяемые из эксперимента.

*Силовой цилиндр* (рис. 13, а) служит для преобразования гидравлического давления в механическую силу.

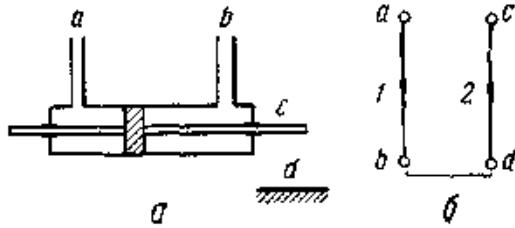


Рис. 13. Силовой цилиндр (а) и его полюсный граф.

Дуги полюсного графа (рис. 13, б) соответствуют гидравлическому входу (объемный поток  $g_1$  и давление  $p_1$ ) и механическому выходу (сила  $f_2$  и перемещение  $x_2$  поршня). Полусные уравнения силового цилиндра можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \frac{d}{dt} \\ -S & B_2 \frac{d}{dt} + M_2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

где  $S$  — площадь поршня;  $B_2$  и  $M_2$  — соответственно вязкое сопротивление и масса поршня.

Управляющий золотник и силовой цилиндр образует совместно *гидравлический исполнительный механизм* (рис. 14, а), позволяющий при небольших управляющих усилиях и перемещениях на входе золотника получать значительные силы и перемещения на выходе силового цилиндра.

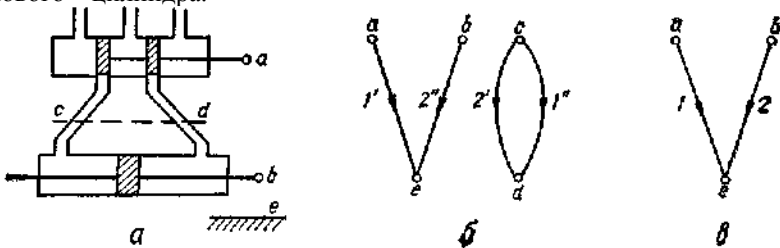


Рис.14. Гидравлический исполнительный механизм (а) и его графы (б,в).

Необходимая для этого энергия поступает от внешнего источника давления гидравлической системы. Граф гидравлического исполнительного механизма (рис. 14,б) получается объединением

полюсных графов его компонентов (дуги управляющего золотника отмечены штрихом, а дуги силового цилиндра — двумя штрихами).

Гидравлический исполнительный механизм также можно рассматривать как многополюсный компонент с механическим входом ( $f_1, x_1$ ) и выходом ( $f_2, x_2$ ) и представить соответствующим полюсным графом (рис. 14, в). Исключая из уравнений золотника и силового цилиндра переменные  $g_1 = g_2$  и  $p_1 = p_2$  получаем полюсные уравнения, соответствующие этому графу:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + B_1 \frac{d}{dt} + M_1 \frac{d^2}{dt^2} & 0 \\ k_{21} R_2 S & (-R_2 S^2 + B_2) \frac{d}{dt} + M_2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

В *гидроусилителе* (рас. 15, а) гидравлический механизм используется совместно с рычагом в качестве обратной связи между входом и выходом, которая обеспечивает автоматическое закрывание золотника, когда силовой поршень занимает требуемое положение.

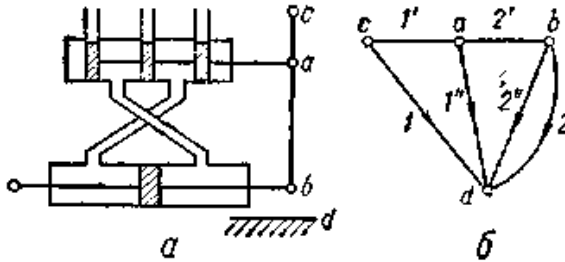


Рис. 15. Гидроусилитель (а) и его полюсный граф (б).

В полюсном графе гидроусилителя (рис. 15, б) дуги 1' и 2' изображают гидравлический механизм, дуги 1'' и 2'' — рычаг, а дуги 1 и 2 — соответственно входное и выходное усилия.

## 7.9. Структурные модели многополюсных компонентов.

Один из методов представления многополюсных компонент основан на использовании их структурных моделей, состоящих из двухполюсников и называемых *структурами замещения* или *эквивалентными структурами*. Вид структурной модели компоненты



зависит от режима ее работы, требуемой точности описания ее свойств и поставленной задачи.

В качестве примера на рис. 16 показаны две структурные модели транзистора.

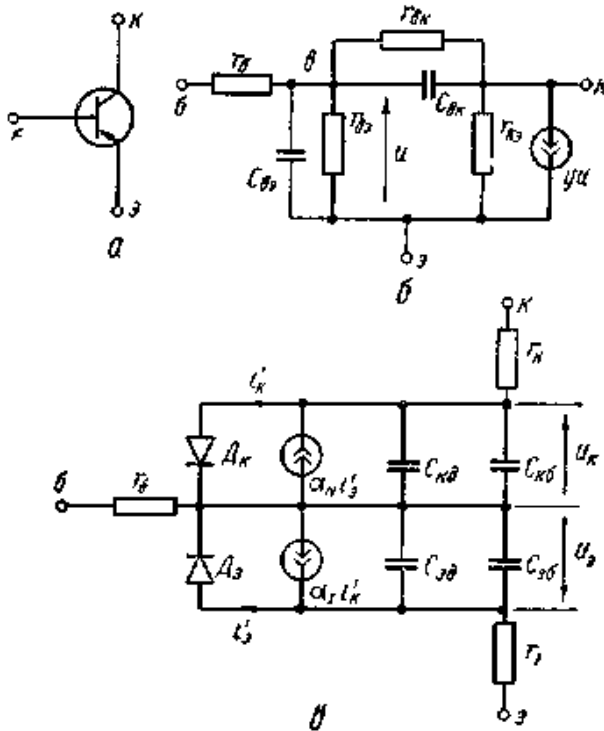


Рис. 16. Структурные модели транзистора (а), высокочастотная модель в квазилинейном режиме (б) и нелинейная модель Эберса-Молла (в).

Одна из них (рис. 16,б) является высокочастотной моделью в квазилинейном режиме (при слабых сигналах). Она содержит линейные резистивные и емкостные двухполюсники и источник, ток которого  $j = g_u$  линейно зависит от напряжения  $u$  между узлами  $b$  и  $\varepsilon$ . Модель Эберса-Молла (рис.16, в) представляет транзистор в режиме больших сигналов и содержит нелинейные емкости ( $C_{кб}$ ,  $C_{эб}$ ,  $C_{кд}$ ,  $C_{эд}$ ) и резисторы ( $D_к$ ,  $D_э$ ), а также источники, токи которых выражаются через токи  $i'_к$  и  $i'_э$  посредством коэффициентов  $\alpha_N$  и  $\alpha_I$ . Характерной особенностью структурных моделей многополюсных компонентов являются наличие в них *зависимых источников*, токи или

напряжения которых могут зависеть от токов или напряжений в любой части схемы. На рис. 17 показаны четыре основных типа зависимых источников: источники тока, управляемые током (рис 17, а) или напряжением (рис.17, б), и источники напряжения, управляемые током (рис. 17, в) или напряжением (рис. 17,г) Величины  $\alpha, g, r, \mu$ , являющиеся коэффициентами пропорциональности в уравнениях зависимых источников, называют *управляющими параметрами*.

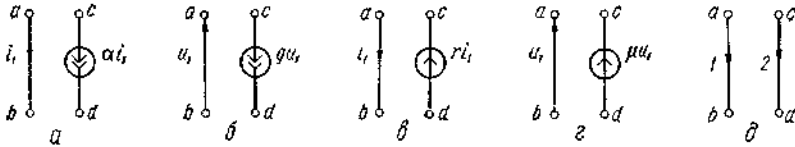


Рис. 17. Типы зависимых источников (а,б,в,г) и их полюсный граф (д).

Полюсный граф зависимого источник, в отличие от обычного двухполюсника, состоит из двух дуг (рис. 17,д). Первая из них отображает величину (ток или напряжение), которая управляет зависимым источником и называется *управляющей дугой*. Вторая представляет собственно источник и называется *управляемой дугой*. Чаще всего управляющие величины связаны с некоторыми двухполюсниками схемы (например, величину  $u$  на рис. 16, б можно рассматривать как напряжение на двухполюсниках  $C_{вз}$  или  $r_{вз}$ , а управляющие токи  $i'_k$  и  $i'_s$  на рис. 16, в — как токи двухполюсников  $D_k$  и  $D_s$ . В таких случаях роль управляющей дуги играет дуга того двухполюсника, ток или напряжение которого управляет зависимым источником.

В общем случае управляющие величины фиксируются в полюсном графе коротко-замкнутыми (для тока) и разомкнутыми (для напряжения) дугами. Аналогичные дуги можно вводить в полюсный граф для фиксации любых токов и напряжений, непосредственно не связанных с компонентами, но представляющих интерес при анализе системы (например, входные и выходные величины, напряжение между любой парой узлов, ток в любом проводнике и вообще, любая искомая величина). Если требуется выделить фиксирующие дуги, то для них используются специальные обозначения (рис. 18), причем направление дуги всегда совпадает с направлением тока (поперечной величины).



Рис. 18. Условные обозначения короткозамкнутой (а) и разомкнутой (б) дуг.

Короткозамкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается уравнением  $u = 0$  и поэтому всегда является z-дугой. Разомкнутая управляющая (или фиксирующая) дуга описывается уравнением  $i = 0$  и относится к y-дугам. Управляемые дуги зависимых источников тока в соответствии с их уравнениями  $i_2 = ai_1$  или  $i_2 = gi_1$  являются y-дугами, а управляемые дуги зависимых источников напряжения в соответствии с уравнениями  $u_2 = ri_1$  или  $u_2 = \mu i_1$  являются z-дугами.

Представление многополюсных компонентов структурными моделями применимо не только к электронным, но и к другим системам, а изложенные здесь положения распространяются на них по аналогии.

## 8. Полные блочные группы и замещающие графы

Блочные группы второго или высшего ранга модуль-графа можно привести к замещающим блочным группам первого ранга, применяя операции алгебры блочных групп над их элементами. При этом должны быть известны блочные группы модулей графа, т. е. их структура. Однако в практических применениях, например при анализе или синтезе организации структурных схем систем, не всегда возможно или необходимо знать структуру модулей графа. Иногда удобно рассматривать модуль-схему системы, не углубляясь в структуру отдельных ее модулей, называемых многополюсниками. Например, эти многополюсники могут представлять собой «черные ящики» с выделенными полюсами (входами, выходами, зажимами), в которых могут находиться неизвестные структуры с различными типами связей, с распределенными или сосредоточенными параметрами и т. д. В таком случае достаточно измерить входные величины многополюсника, например напряжения или силу на его зажимах или входные импедансы, или задать эти величины при исследовании системы. При определении блочной группы модуль-графа по правилам рассматриваемой ранее алгебры блочных групп необходимо иметь сведения о структуре отдельных модулей графа. Эти сведения не нужны, если применить видоизмененную алгебру, основанную на операциях, подобных операциям обычной алгебры, элементы которой назовем *полными блочными группами*. Принципы этой алгебры будут изложены ниже, а также изложены замещающие графы и способ определения с помощью этих графов полных блочных групп для графов высших рангов.

## 8.1. Полные блочные группы

Неупорядоченный набор элементов  $x$ , не обязательно различных, удовлетворяющих некоторой функции  $\Phi(x)$ , обозначим

$$X = \langle x \mid \Phi(x) \rangle. \quad (8.1)$$

Через  $r_X(x)$  обозначим число, определяющее, сколько раз элемент  $x$  встречается в системе  $X$ . Рассмотрим две системы  $X$  и  $Y$ :

$$X = \langle x \mid \Phi(x) \rangle, \quad Y = \langle y \mid \Phi(y) \rangle. \quad (a)$$

Обозначим

$$(X \subset_r Y) \Leftrightarrow \forall x \in X \exists y \in Y \{ [r_X(x) \leq r_Y(y)] \wedge (x = y) \}. \quad (8.2)$$

Две системы вида (a) будем считать равными, если

$$(X = Y) \Leftrightarrow (X \subset_r Y) \wedge (Y \subset_r X). \quad (8.3)$$

Суммой систем  $X$  и  $Y$  вида (a) назовем систему, содержащую все элементы обеих этих систем:

$$S = (X \bigcup_r Y) = \langle s \mid (s \in X) \vee (s \in Y) \wedge (r_s(s) = r_X(s) + r_Y(s)) \rangle. \quad (8.4)$$

Пересечением систем  $X$  и  $Y$  вида (a) назовем систему, определяемую следующим образом:

$$Z = (X \cap_r Y) = \langle z \mid (z \in X) \wedge (z \in Y) \wedge (r_z(z) = \min[r_X(z), r_Y(z)]) \rangle. \quad (8.5)$$

Введем определение полной блочной группы.

*Определение 1.* Полной блочной группой  $A$  называется неупорядоченная система наборов вида (a)

$$A = \langle a_k \mid a_k = \langle \alpha_{ik} \mid \alpha_{ik} \in N \rangle \rangle_{\substack{i=1,2,\dots,n, \\ k=1,2,\dots,m}}, \quad (8.6)$$

где  $N$  — множество натуральных чисел при следующих условиях:

1.  $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset_r B) \wedge (B \subset_r A)$ ,
2.  $A + B = A \bigcup_r B$ , (8.7)
3.  $A \cdot B = (a \bigcup_r b \mid (a \in A) \wedge (b \in B))$ .

Из этого определения следуют известные соотношения элементарной алгебры

$$\left. \begin{aligned} A + B &= B + A, \\ AB &= BA \end{aligned} \right\} \text{(коммутативность)},$$

$$\left. \begin{aligned} A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A(BC) &= (AB)C \end{aligned} \right\} \text{(ассоциативность)}, \quad (8.8)$$

$$A(B + C) = AB + AC. \quad \text{(дистрибутивность)}.$$

Нетрудно заметить, что *модулем сложения полных блочных групп* служит блочная группа  $\langle \rangle$ , которая представляет собой пустую систему, а *модулем умножения* — блочная группа  $\langle \emptyset \rangle$ , содержащая одно и только одно пустое число  $a$ . Для произвольной блочной группы  $A$ :

$$\left. \begin{aligned} A + \langle \rangle &= A, \\ A \langle \emptyset \rangle &= A. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

В соответствии с этим блочную группу  $\langle \rangle$  обозначим через 0, а блочную группу  $\langle \emptyset \rangle$  — через 1:

$$\langle \rangle = 0, \quad \langle \emptyset \rangle = 1. \quad (8.10)$$

Уравнение

$$A + B = 0 \quad (8.11)$$

имеет решение

$$A = -B. \quad (8.12)$$

Блочную группу  $-B$  будем называть *отрицательной полной блочной группой*.

*Разность блочных групп*  $A - B$  определяем как операцию, обратную по отношению к сложению, т. е.

$$C + B = A \implies C = A - B. \quad (8.13)$$

Эту разность можно отыскать, если исключить из блочной группы  $A$  все системы  $a$ , равные системам блочной группы  $B$ .

*Следствие 8.1.* Разность полных блочных групп  $A - B$  существует тогда и только тогда, когда

$$B \subset_r A$$

В противном случае разность двух блочных групп может быть лишь упрощена путем вычитания из обоих блочных групп разности их пересечения  $A \cap_r B$ .

Выражение  $A - B$  в общем случае имеет следующие свойства:

$$(A - B = C - D) \Leftrightarrow (A + D = C + B),$$

$$(A - B) + (C - D) = (A + C) - (B + D)$$

$$(A - B) + (C - D) = (A \cap C + B \cap D) - (A \cap D + B \cap C).$$

Если обозначить

$$\underbrace{A + A + \dots + A}_N = NA, \quad (8.15)$$

$$\underbrace{AA \dots A}_N = A^N, \quad (8.16)$$

где  $N$  — произвольное натуральное число, заметим, что для двух произвольных натуральных чисел  $N$  и  $M$  справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 N\bar{A} + M\bar{A} &= (N + M)\bar{A}, \\
 M(N\bar{A}) &= (MN)\bar{A}, \\
 \bar{A}^N \bar{A}^M &= \bar{A}^{N+M}, \\
 (\bar{A}^N)^M &= \bar{A}^{(NM)},
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

а также

$$\begin{aligned}
 (\bar{A} + \bar{B})^2 &= \bar{A}^2 + 2\bar{A}\bar{B} + \bar{B}^2, \\
 (\bar{A} + \bar{B})(\bar{A} - \bar{B}) &= \bar{A}^2 - \bar{B}^2.
 \end{aligned}$$

Допустим, что полную блочную группу  $\bar{A}$  можно представить в виде произведения

$$\bar{A} = P_1 P_2 \dots P_n. \tag{8.19}$$

Блочные группы  $P_1, P_2, \dots, P_n$  назовем *делителями* блочной группы  $P$ . Полную блочную группу  $P$ , имеющую только два делителя 1 и  $P$ , назовем *простой полной блочной группой*. Заметим, что каждая полная блочная группа  $P$ , представляющее собой систему одноэлементных наборов, имеет только два делителя: 1 и  $P$ , т. е. будет простой полной блочной группой.

Делители, представляющие собой простые полные блочные группы, будем называть *простыми сомножителями блочной группы  $\bar{A}$* .

Если для двух данных полных блочных групп  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$  существует такая полная блочная группа  $X$ , что

$$\bar{B} X = \bar{A}, \tag{20}$$

то можно написать

$$X = \frac{\bar{A}}{\bar{B}} \quad \text{или} \quad X = \bar{A} : \bar{B} \tag{8.21}$$

т. е.

$$(\bar{B} X = \bar{A}) \Leftrightarrow (X = \frac{\bar{A}}{\bar{B}}), \quad \bar{B} \neq 0. \tag{8.22}$$

Условием существования *частного*  $X$ , кроме  $\bar{B} \neq 0$ , будет требование, чтобы множество простых сомножителей блочной группы  $\bar{B}$  было подмножеством простых сомножителей блочной группы  $\bar{A}$ , т. е.

$$\{P'_1 P'_2 \dots P'_m\} \subset \{P_1 P_2 \dots P_n\},$$

где

$$\bar{A} = P_1 P_2 \dots P_n, \quad \bar{B} = \tag{8.23}$$

Введем следующее обобщение.

*Пару блочных групп*  $(\bar{A}, \bar{B})$  будем записывать в виде  $\bar{A}/\bar{B}$ , если

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \right) &\Leftrightarrow (AD = BC), \\ \frac{A}{B} + \frac{C}{D} &= \frac{AD + BC}{BD}, \\ \frac{A}{B} \frac{C}{D} &= \frac{AC}{BD}. \end{aligned} \right\} B \neq 0, \quad D \neq 0. \quad (8.24)$$

Для полных блочных групп справедливы тождества

$$\frac{A^M}{A^N} = A^{M-N}, \quad A^0 = 1. \quad (8.25)$$

В соответствии с определением (8.6) полную блочную группу  $A$  можно также записать в виде матрицы

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11} \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1} \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mn} \end{array} \right\} \quad (8.26)$$

и рассматривать как неупорядоченную систему столбцов  $a_k$  (не обязательно различных), состоящих из неупорядоченных элементов (также не обязательно различных)

$$\left. \begin{aligned} A &= \langle a_1 a_2 \cdots a_n \rangle \\ \text{где} & \\ a_k &= \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{array} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.27)$$

Равенство, а также способ получения суммы и произведения полных блочных групп, записанных в виде матрицы, проиллюстрируем следующими примерами:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{matrix} \right\},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix} \right\} \bullet \left\{ \begin{matrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{matrix} \right\}.$$

Для полных блочных групп справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 8.1.** *Полную блочную группу можно всегда записать в канонической форме*

$$A = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \langle \alpha_{ik} \rangle. \quad (8.28)$$

Действительно, согласно принятым определениям операций, имеем

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_{11} \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} \alpha_{22} \cdots \alpha_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{m1} \alpha_{m2} \cdots \alpha_{mn} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m \langle \alpha_{ik} \rangle.$$

Обозначая

$$\langle \alpha_{ik} \rangle = a_{ik}, \quad (8.29)$$

формулу (8.28) можно записать в виде

$$A = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^m a_{ik}. \quad (8.30)$$

Выражение  $a_{ik}$  в формуле (8.29) назовем *полной блочной единицей*.

Если полная блочная группа  $A$  имеет все столбцы, такие же, как блочная группа  $A$ , то можно написать

$$A = A^s. \quad (8.31)$$

Это равенство симметрично, т. е.



$$(\overset{s}{A} = A) \Leftrightarrow (A = \overset{s}{A}) \tag{8.32}$$

и, кроме того, имеют место следующие зависимости:

$$\left. \begin{aligned} (\overset{s}{A} = A_1) \wedge (A_1 = A_2) &\Rightarrow (\overset{s}{A} = A_2), \\ (\overset{s}{A} = A_1) \wedge (A_1 = A_2) &\Rightarrow (A = \overset{s}{A_2}). \end{aligned} \right\} \tag{8.33}$$

Применяя соотношение

$$(k_A = \overset{s}{A}) \Leftrightarrow \{(\overset{s}{A} = A) \wedge (A = k_A)\}$$

и предполагая, что  $A = \overset{s}{A}$ , запишем в случае необходимости блочную группу  $A$  графа  $\Gamma$  в виде полной блочной группы  $\overset{s}{A}$ .

Определим алгебраическую производную полной блочной группы  $\overset{s}{A}$  по элементу  $\alpha$ .

*Определение 8.2.* Алгебраическая производная полной блочной группы  $\overset{s}{A} = \langle a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n}$ ,  $a_k = \langle \alpha_{ik} \rangle_{i=1, 2, \dots, m}$

по элементу  $\alpha$  представляет собой полную блочную группу  $\frac{\partial \overset{s}{A}}{\partial \alpha}$ ,

определенную следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{s}{A}}{\partial \alpha_{ik}} &= \langle a'_k \mid (\langle a'_k \rangle = \langle a_k \rangle - \langle \alpha_{ik} \rangle) \wedge [r_{\partial \overset{s}{A} / \partial \alpha_{ik}}(a'_k) = \\ &= r_{\overset{s}{A}}(a_k) \bullet r_{\alpha_k}(\alpha_{ik})] \rangle_{k=1, 2, \dots, n}. \end{aligned} \tag{8.34}$$

Алгебраическая производная полной блочной группы по элементу  $\alpha$  находится по правилам дифференцирования алгебраических многочленов. Эту производную можно также рассчитать путем дифференцирования полной блочной группы, записанного в канонической форме (8.28) или (8.30).

**Пример 8.1.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial 2} \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right\} &= \frac{\partial}{\partial 2} \{ \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle \langle 3 \rangle + 3 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle^2 + \langle 2 \rangle^3 + \langle 1 \rangle^2 \langle 4 \rangle \} = \\ &= \langle 1 \rangle \langle 3 \rangle + 6 \langle 1 \rangle \langle 2 \rangle + 3 \langle 2 \rangle^2 = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Если  $\overset{s}{A} = A$ , то

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial \alpha}. \quad (8.35)$$

Для алгебраической производной суммы, произведения и частного полных блочных групп справедливы те же соотношения, что и при дифференцировании алгебраических многочленов, а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (A + B) &= \frac{\partial A}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} (AB) &= A \frac{\partial B}{\partial \alpha} + B \frac{\partial A}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{A}{B} \right) &= \frac{B \frac{\partial A}{\partial \alpha} - A \frac{\partial B}{\partial \alpha}}{B^2}, \quad B \neq 0. \end{aligned} \right\}. \quad (8.36)$$

С целью упрощения формы записи полных блочных групп будем применять *операцию переноса нижних индексов* в соответствии со следующими правилами:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= A_{\alpha}, \\ \frac{\partial A_k}{\partial \alpha_k} &= A_{k\alpha}, \\ A^d[\alpha] &= A^d_{\alpha}, \quad A^d \stackrel{s}{=} A^d, \\ A^d_k[\alpha_k] &= A^d_{k\alpha}, \quad A^d_k \stackrel{s}{=} A^d_k. \end{aligned} \right\}. \quad (8.37)$$

Определим обратную алгебраическую производную полной блочной группы.

*Определение 8.3. Обратной производной полной блочной группы*

$$A = \langle a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n}, \quad a_k = \langle a_{ik} \rangle_{i=1, 2, \dots, m}$$

по элементу  $\alpha$  называется полная блочная группа  $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ , определенная

как

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha_{ik}} \stackrel{df}{=} A - \langle a_k \mid \alpha_{ik} \in a_k \rangle_{k=1, 2, \dots, n}. \quad (8.38)$$

Это означает, что обратную производную  $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$  составляют лишь те

столбцы блочной группы  $A$ , которые не содержат элемента  $\alpha$ .

**Пример 8.2.**

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Если  $A^s = A$ , то

$$\frac{\delta A}{\delta \alpha} = \frac{\delta A^s}{\delta \alpha}. \quad (8.39)$$

Для обратной производной суммы, произведения и частного полных блочных групп справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \alpha} (A+B) &= \frac{\delta A}{\delta \alpha} + \frac{\delta B}{\delta \alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta \alpha} (AB) &= \frac{\delta A}{\delta \alpha} \frac{\delta B}{\delta \alpha}, \\ \frac{\delta}{\delta \alpha} \left( \frac{A}{B} \right) &= \frac{\delta A / \delta \alpha}{\delta B / \delta \alpha}, \quad B \neq 0, \quad \frac{\delta B}{\delta \alpha} \neq 0. \end{aligned} \right\}. \quad (8.40)$$

Можно доказать, что между действиями над блочными группами и действиями над полными блочными группами имеют место следующие соотношения:

$$1. \quad A+B = A^s + B^s - 2(A \cap_r B), \quad A = A^s, \quad B = B^s. \quad (8.41)$$

Выражение  $2(A \cap_r B)$  будем называть *дефектом суммы* блочных групп  $A$  и  $B$ . Если

$$A \cap_r B = 0,$$

(если  $A = A^s$  и  $B = B^s$ , то пересечение  $A \cap_r B$  запишем в виде  $A \cap B$ ) т. е.

$$A \cap B = 0,$$

то будем говорить, что сумма блочных групп  $A$  и  $B$  не обладает дефектом суммы, т. е.  $A+B = A^s + B^s$ .

$$2. \quad AB = A^s B^s - D, \quad (8.42)$$

где

$${}_{a_0}D = \sum \langle a_0 \rangle + \sum_i \left( \left\{ k_i - \frac{1}{2} [1 + (-1)^{k_i-1}] \right\} \langle a_i \rangle \right);$$

$a_i \neq a_0$  — столбцы произведения  $A B$ , имеющие по крайней мере два идентичных элемента  $r_{a_0}(\alpha) \geq 2$ ;

$k_i$  — число идентичных столбцов  $a_i$  в произведении  $A B$ .

Полную блочную группу  $D$  в выражении (8.42) будем называть *дефектом произведения* блочных групп  $A$  и  $B$ . Заметим, что

$$D = [ ] = 0 \tag{8.44}$$

при условии

$$D = \langle a | (\exists \alpha \in a r_a(\alpha) > 1) \vee (r_D(a) = 2 k) \rangle, \tag{8.45}$$

где  $k$  — натуральное число.

Если  $D = 0$ , то произведение блочных групп  $A$  и  $B$  не обладает

дефектом, т. е.  $AB = A B$ .

Произведение блочных групп  $A_1, A_2, \dots, A_g$  модулей модуль-графа не имеет дефекта, т. е.

$$\prod_{i=1}^g A_i = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^g A_i, \quad \forall i (A_i = A_i), \tag{8.46}$$

так как эти блочные группы не имеют общих элементов.

## 8.2. Замещающие графы

В заданном графе  $\Gamma$  с  $v$  вершинами выделим  $v_z$  вершин, причем

$$2 \leq v_z \leq v.$$

*Определение 8.4. Замещающим графом графа  $\Gamma$*  называется полный граф  $\Gamma_z$  (полный многогранник), построенный на  $v_z$  вершинах, соответствующих  $v_z$  выделенным вершинам графа  $\Gamma$  в предположении, что полная блочная группа  $A_z$  графа  $\Gamma_z$  равна блочной группе  $A$  графа  $\Gamma$ :

$$A_z = A. \tag{8.47}$$

Граф  $\Gamma_z$  имеет  $g = v_z (v_z - 1)/2$  граней. Замещающий граф можно рассматривать как скелет модуль-графа  $\Gamma_{*z}$ , построенного из

двухполюсных модулей. На рис. 8.1 изображен граф  $\Gamma$  с  $v_z = 4$  выделенными вершинами, его замещающий граф  $\Gamma_z$ , а также модуль-граф  $\Gamma_z^*$ .  $A_1, A_2, \dots, A_6$  — блочные группы отдельных модулей графа  $\Gamma_z^*$ .

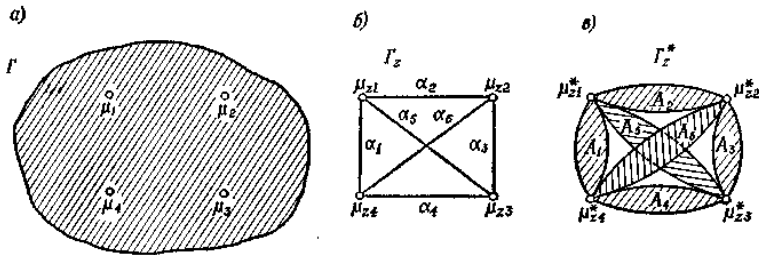


Рис. 8.1. Замещающий граф с выделенными вершинами: а) граф с выделенными четырьмя вершинами; б) замещающий граф; в) эквивалентный граф.

Модуль-граф  $\Gamma_z^*$  эквивалентен графу  $\Gamma$  при выполнении равенства

$$\mathbb{A}^*_z = A, \tag{8.48}$$

где  $\mathbb{A}^*_z$  означает полную блочную группу графа  $\Gamma_z^*$ . Из равенств (8.47) и (8.48) следует, что

$$\mathbb{A}_z = \mathbb{A}^*_z. \tag{8.49}$$

Это равенство справедливо, если в полную блочную группу вместо элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , обозначающих ребра замещающего графа  $\Gamma_z$ , подставить соответствующие выражения, которые называются *дендритными весами ребер замещающего графа*.

Обозначим:  $A^d_z$  — дополнительную блочную группу графа  $\Gamma_z$  состоящую из элементов  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ , обозначающих его ребра;

$\mathbb{A}^*_{z(v_z-1)}$  — полную блочную группу графа  $\Gamma^*_{z(v_z-1)}$ , полученную в результате замыкания всех вершин эквивалентного графа  $\Gamma^*_z$ ;  $\mathbb{A}'_z$  — полную блочную группу графа  $\Gamma_z$ , в котором вместо обозначений ребер  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  графа  $F_z$  используются следующие выражения

$$a'_1 = \frac{\mathbb{A}_1}{\mathbb{A}_{1\alpha}}, a'_2 = \frac{\mathbb{A}_2}{\mathbb{A}_{2\alpha}}, \dots, a'_g = \frac{\mathbb{A}_g}{\mathbb{A}_{g\alpha}}, \tag{8.50}$$

где  $\mathbb{A}_g = A_1, \mathbb{A}_g = A_2, \dots, \mathbb{A}_g = A_g$  — блочные группы модулей графа  $\Gamma^*_z$ , а

$$A_{1\alpha} = \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_1}, A_{2\alpha} = \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_2}, \dots, A_{g\alpha} = \frac{\partial A_g}{\partial \alpha_g}$$

Используя эти обозначения, можно написать следующее выражение для блочной группы графа  $\Gamma_z^*$ :

$${}^2A_z^* = [A_z^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \stackrel{s}{=} A_z' A_{z(v_z-1)}^*, \quad (8.51)$$

причем

$$A_{z(v_z-1)}^* = A_{1\alpha} A_{1\alpha} \dots A_{g\alpha}, \quad (8.52)$$

так как модуль-граф  $\Gamma_{z(v_z-1)}^*$  — слабо связный граф, в котором все закороченные модули присоединены к одной вершине (точке сочленения).

Формула (8.51) следует из сравнения блочных групп  ${}^2A_z^*$  и  ${}^2A_z'$ , имеющих одинаковое число столбцов. В каждом столбце блочной группы  ${}^2A_z^*$  содержится  $n$  элементов типа  $A_{i\alpha}$  и  $g - n$  элементов типа  $A_j$ , в то время как в каждом столбце блочной группы  ${}^2A_z'$  содержится  $g - n$  элементов типа  $a'_j$ .

Формула (8.51) справедлива также для всех закороченных графов  $\Gamma_{z(p)}^*$  порядка  $p$  (порядок замыкания — это порядок производной блочной группы закороченного графа):

$$A_{z(p)}^* = A_{z(p)}' A_{z(v_z-1)}^* \quad (8.53)$$

где  $A_{z(p)}^*$  — блочная группа закороченного графа  $\Gamma_{z(p)}^*$ ,  $A_{z(p)}'$  — полная блочная группа графа  $\Gamma_z(p)$ .

Число элементов  $a'_i$  в отдельных столбцах блочной группы  $A_{z(p)}'$  равно

$$v_z - p - 1.$$

Если предположить, что

$$A_{z(p)}^* = A_{z(p)},$$

то элементы блочной группы  $A_{z(p)}$  можно записать в виде

$$a_{k(p)} = \frac{A_k}{A_{k\alpha}} (A_{z(v_z-1)}^*)^{1/(v_z-p-1)}. \quad (8.54)$$

Для  $p = v_z - 2$  имеем

$$a_{k(v_z-2)} = \frac{A_k}{A_{k\alpha}} A_{z(v_z-1)}^* \quad (8.55)$$

Выразив  $a_{k(p)}$  с помощью  $a_{k(v_z-2)}$ , получим

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(v_z-2)} \rangle (A_{z(v_z-1)}^*)^{(p+2-v_z)/(v_z-p-1)}. \quad (8.56)$$

Полагая

$$A_{z(p)}^* = A_{z(p)} = A_{(p)} \quad (8.57)$$

(где  $A_{(p)}$ ) — блочная группа графа  $\Gamma_{(p)}$ , полученная в результате замыкания выделенных вершин графа  $\Gamma$  таким образом, что их блочная группа уменьшилась на  $p$ ), выражение (8.56) можно записать в виде

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(v_z-2)} \rangle (A_{(v_z-1)})^{(p+2-v_z)/(v_z-p-1)}, \quad (8.58)$$

где

$$A_{(v_z-1)}^s = A_{v_z-1}.$$

Величина  $a_{k(p)}$  — дендритный вес ребра  $a_k$  замещающего графа  $\Gamma_{z(p)}$ . Из выражения (8.58) следует, что дендритные веса ребер замещающего графа зависят от порядка  $p$  замыкания графа  $\Gamma$ .

Определим далее дендритный вес  $a_{k(v_z-2)}$  с помощью блочной группы графа  $\Gamma$ .

Пусть ребра  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$  графа  $\Gamma_z$  одновременно обозначают произвольные пути в графе  $\Gamma$ , соединяющие его соответствующие выделенные вершины. Выберем в графе  $\Gamma_z$  произвольный элементарный цикл, включающий все  $v_z$  вершин этого графа (так называемый *гамильтоновский цикл*) и состоящий из ребер

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{v_z}.$$

Этот цикл изображен на рис. 8.2.

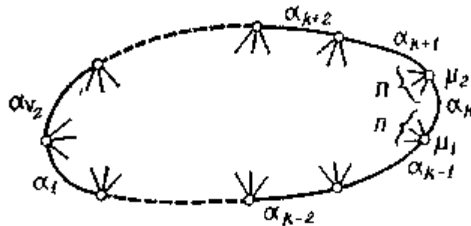


Рис. 8.2. Цикл Гамильтона.

Рассматривая графы  $\Gamma_{z(v_2-2)}^*$  и  $\Gamma_{v_2-2}$ , на основании формул (8.51) и можно написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{v_2}} &= \bar{A}_{z\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{v_2}}^* = \\ \bar{A}_{k-1} \frac{\bar{A}_{z(v_2-1)}^*}{\bar{A}_{k-1\alpha}} + \bar{A}_k \frac{\bar{A}_{z(v_2-1)}^*}{\bar{A}_{k\alpha}} + \sum_{j=v_2+1}^{v_2+n} \bar{A}_j \frac{\bar{A}_{z(v_2-1)}^*}{\bar{A}_{j\alpha}} &= \\ &= \langle \alpha_{k-1(v_2-2)} \rangle + \langle \alpha_{k(v_2-2)} \rangle + \sum_{j=v_2+1}^{v_2+n} \langle \alpha_{j(v_2-2)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.59)$$

где  $\alpha_{k-1}, \alpha_k, \alpha_{v_2+1}, \alpha_{v_2+2}, \dots, \alpha_{v_2+n}$  — обозначения всех ребер графа  $\Gamma_z$  инцидентных вершине  $\mu_1$  (рис. 8.2).

Аналогично можно написать

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{v_2}} &= \\ &= \langle \alpha_{k(v_2-2)} \rangle + \langle \alpha_{k+1(v_2-2)} \rangle + \sum_{i=v_2+n+1}^{v_2+2n} \langle \alpha_{i(v_2-2)} \rangle, \end{aligned} \quad (8.60)$$

где  $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \alpha_{v_2+n+1}, \alpha_{v_2+n+2}, \dots, \alpha_{v_2+2n}$  — обозначения всех ребер графа  $\Gamma_z$  инцидентных вершине  $\mu_2$  (рис. 8.2). Кроме того,

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_k\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{v_2}} &= \\ &= \langle \alpha_{k-1(v_2-2)} \rangle + \langle \alpha_{k+1(v_2-2)} \rangle + \sum_{j=v_2+1}^{v_2+n} \langle \alpha_{j(v_2-2)} \rangle + \sum_{i=v_2+n+1}^{v_2+2n} \langle \alpha_{i(v_2-2)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.61)$$

Решив систему уравнений (8.59) — (8.61), получим выражение для дендритного веса ребра  $\alpha_k$  замещающего графа  $\Gamma_{z(v_2-2)}$

$$\begin{aligned} \alpha_{k(v_2-2)} &= \frac{1}{2} (\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{v_2}} + \\ &+ \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-1}\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{v_2}} - \bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_k\alpha_{k+2}\cdots\alpha_{v_2}}), \end{aligned}$$

где  $\bar{A} = A$  — блочная группа графа  $\Gamma$ :

$$\bar{A}_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{k-2}\alpha_{k+1}\cdots\alpha_{v_2}} = \frac{\partial^{v_2-2} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \cdots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_{k+1} \cdots \partial \alpha_{v_2}},$$



$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial^{v_z-2} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-1} \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}},$$

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial^{v_z-3} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_k \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}}$$

Чтобы упростить запись, примем обозначение

$$A_{v_z-3} = A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-2} \alpha_k \alpha_{k+2} \dots \alpha_{v_z}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial^{v_z-3} A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_{k-2} \partial \alpha_k \partial \alpha_{k+2} \dots \partial \alpha_{v_z}}. \quad (8.63)$$

Тогда формула (8.62) для дендритного веса ребра  $\alpha_k$  примет вид

$$\alpha_{k(v_z-2)} = \frac{1}{2} (A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} + A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} - A_{(v_z-3)\alpha_k}), \quad (8.64)$$

Причем

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k+1}},$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k-1}},$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_k} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_k}.$$

На основе правила для циклов

$$A_{v_z-3} = \frac{\partial A}{\partial D^{\alpha_k}} = \frac{\partial A}{\partial \prod_{i=1}^{v_z-3} [\alpha_i]} \quad (8.65)$$

где  $D^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{v_z-3} [\alpha_i]$  — блочная группа произвольного дерева,

касающегося всех вершин графа  $\Gamma_z$ , кроме вершин  $\mu_1$  и  $\mu_2$  ребра  $\alpha_k$  (рис. 8.2).

Рассмотрим два утверждения, относящиеся к дендритному весу  $a_{k(v_z-2)}$  ребра  $\alpha_k$  графа  $\Gamma_{z(v_z-2)}$ .

**Утверждение 8.2.** Дендритный вес  $a_{k(v_z-2)}$  ребра  $\alpha_k$  замещающего графа  $\Gamma_{z(v_z-2)}$  для произвольного графа  $\Gamma$  представляет собой полную топологическую блочную группу  $\langle a_{k(v_z-2)} \rangle \geq 0$ .

*Доказательство.* Замещающий граф  $\Gamma_{z(v_z-3)}$  с замкнутыми ребрами

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_{v_z}$$

гамильтоновского цикла (рис. 8.2) имеет в своем составе цикл, состоящий из ребер  $\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}$ , для которого правило циклов принимает вид

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} + A_{(v_z-3)\alpha_k} + A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = 0, \quad (a)$$

где  $A$  — блочная группа графа  $\Gamma$ , а  $A_{(v_z-3)}$  рассчитывается по формуле (8.65). Разделим блочную группу из выражения (a) на  $2^3 - 1 = 7$  частей  $X_1, X_2, \dots, X_7$ , не содержащих идентичных столбцов:

$$\forall i, j \in M \ (X_i \cap X_j = 0), \quad i \neq j, \quad M = (1, 2, \dots, 7), \quad (б)$$

и составим из них следующую таблицу:

$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}}$	$X_1$	$X_2$	$X_3$		$X_5$		
$A_{(v_z-3)\alpha_k}$	$X_1$	$X_2$		$X_4$		$X_6$	
$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}}$	$X_1$		$X_3$	$X_4$			$X_7$

На основании этой таблицы выражение (a) можно записать  $[X_1X_2X_3X_5] + [X_1X_2X_4X_5] + [X_1X_3X_4X_7] = [X_1X_5X_6X_7] = 0$ .

Из условия (б) следует

$$X_1 = X_5 = X_6 = X_7 = 0.$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$A_{(v_z-3)\alpha_k} = X_2 + X_4.$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} = X_2 + X_3,$$

$$A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = X_3 + X_4,$$

где

$$X_2 = X_2, \quad X_3 = X_3, \quad X_4 = X_4.$$

Решив эту систему уравнений с тремя неизвестными, получим

$$X_3 = \frac{1}{2} (A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} + A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} - A_{(v_z-3)\alpha_k}) \quad (в)$$

и аналогичные выражения для  $X_2$  и  $X_4$ .

Поскольку  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$  — части блочных групп  $A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}}$ ,  $A_{(v_z-3)\alpha_k}$ ,  $A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}}$ , они представляют собой положительные блочные группы, и выражение (в), идентичное выражению (8.64) для дендритного веса  $a_{k(v_z-2)}$ , также является положительной полной блочной группой, что и требовалось доказать.

Из приведенной таблицы также следует, что

$$a_{k(v_z-2)} \stackrel{s}{=} A_{(v_z-3)\alpha_{k-1}} \cap A_{(v_z-3)\alpha_{k+1}} = \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k-1}} \cap \frac{\partial A_{v_z-3}}{\partial \alpha_{k+1}} \quad (8.66)$$

или в явном виде

$$a_{k(v_z-2)} \stackrel{s}{=} \frac{\partial A}{\partial D^{\mu_1}} \cap \frac{\partial}{\partial D^{\mu_2}} \quad (8.67)$$

где  $D^{\mu_1}$  — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин графа  $\Gamma_z$ , кроме вершины  $\mu_1$ , инцидентной ребру  $\alpha_k$ ;

$D^{\mu_2}$  — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин графа  $\Gamma_z$ , кроме вершины  $\mu_2$ , инцидентной ребру  $\alpha_k$ .

Таким образом, дендритный вес  $a_{k(v_z-2)}$  ребра  $\alpha_k$  замещающего графа  $\Gamma_{z(v_z-2)}$  можно рассчитывать двумя способами: либо по формуле (8.64), либо по формуле (8.67).

**Утверждение 8.3.** Дендритные веса  $a_{k(v_z-2)}$  и  $a_{l(v_z-2)}$  двух произвольных ребер  $\alpha_k$  и  $\alpha_l$  замещающего графа  $\Gamma_{z(v_z-2)}$  не имеют одинаковых столбцов, т. е.

$$\forall k, l \{ \langle \langle a_{k(v_z-2)} \rangle \cap \langle a_{l(v_z-2)} \rangle \rangle = 0 \}, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, g. \quad (8.68)$$

*Доказательство.* Ребра  $\alpha_k$  и  $\alpha_l$  могут быть расположены в графе  $\Gamma_z$  двумя способами:

- 1)  $\alpha_k, \alpha_l \in \mu_i$ , где  $\mu_i$  — произвольная вершина графа  $\Gamma_z$ ;
- 2)  $(\alpha_k \in \mu_i) \wedge (\mu_i \neq \mu_j)$ .

В первом случае используем формулу (8.59), которая применительно к произвольной вершине  $\mu_i$  графа  $\Gamma_z$  запишется в виде

$$\frac{\partial A}{\partial D^{\mu_i}} \stackrel{s}{=} \sum_i \langle a_{i(v_z-2)} \rangle, \quad (8.69)$$

где  $D^{\mu_i} = \prod_{j=1}^{v_z-2} [\alpha_j]$  — блочная группа произвольного дерева,

касающегося всех вершин графа  $\Gamma_z$ , кроме вершины  $\mu_i$ .

Это равенство означает, что сумма дендритных весов  $a_{i(v_z-2)}$  (как полных блочных групп всех ребер, инцидентных вершине  $\mu_i$ , равна блочной группе закороченного графа  $\Gamma_{z(v_z-2)}$ .

Так как блочная группа  $\partial A / \partial D^{\mu_i}$  не содержит идентичных столбцов (а согласно утверждению 8.2, все полные блочные группы  $a_{i(v_z-2)}$  положительны), то из формулы (8.69) для них можно написать равенство (8.68).

Для случая расположения ребер  $a_k$  и  $a_l$  в графе  $\Gamma_z$  по второму способу применим формулу (8.61), которую запишем в виде

$$\frac{\partial A}{\partial (D^{\alpha_j}[\alpha_j])} = \sum_p^s \langle a_{p(v_z-2)} \rangle \quad (8.70)$$

где  $D^{\alpha_j} = \prod_{n=1}^{v_z-3} [\alpha_n]$  — блочная группа произвольного дерева,

касающегося всех вершин графа  $\Gamma_z$ , кроме вершин  $\mu_k$  и  $\mu_l$ , инцидентных ребру  $\alpha_j$ ;  $\sum_p \langle a_{p(v_z-2)} \rangle$  — сумма дендритных весов (как полных

блочных групп) всех ребер сечения графа  $\Gamma_z$  топологической сферой  $p$ , охватывающей только вершины  $\mu_i$  и  $\mu_j$  (рис. 8.3).

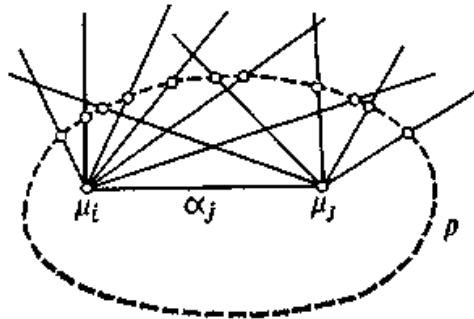


Рис. 8.3. Сечение замещающего графа топологической сферой  $p$ , охватывающей вершины  $\mu_i$  и  $\mu_j$ .

На основании равенства (8.70) по тем же соображениям, что и в первом случае, для всех  $a_{p(v_z-2)}$  можно написать равенство (8.68),

Так как в полном графе  $\Gamma_z$  для произвольных вершин  $\mu_i$  и  $\mu_j$  всегда существует ребро  $\alpha_j$ , соединяющее их, то среди ребер  $\alpha_p$  сечения  $p$  существуют ребра  $\alpha_k$  и  $\alpha_l$ , т. е. то, что и требовалось доказать.

Равенство (8.68) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{k=1}^g [a_{k(v_z-2)}] = \sum_{k=1}^g \langle a_{k(v_z-2)} \rangle. \quad (8.71)$$

Утверждения 8.2 и 8.3 справедливы также и для дендритных весов  $a_{k(p)}$ , рассчитанных по формуле (8.58).

Если обозначить через  $A''_{z(p)}$  полную блочную группу замещающего графа  $\Gamma_{z(p)}$ , полученную путем замены ребер  $a_i$  на дендритные веса  $a_{i(v_z-2)}$ , то на основании формулы (8.58) блочную группу  $A_{(p)}$  графа  $\Gamma_{(p)}$  можно записать

$$A_{(p)} = A''_{z(p)} (A_{(v_z-1)})^{p+2-v_z} \quad (8.72)$$

Проиллюстрируем метод расчета дендритных весов ребер замещающего графа  $\Gamma_z$ .

**Пример 8.3.** Рассчитаем дендритные веса ребер замещающего графа с четырьмя вершинами  $F_z$  (рис. 8.4, б) для графа  $\Gamma$  (рис. 8.4, а).

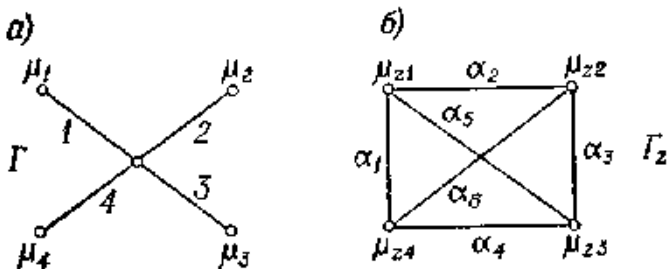


Рис. 8.4.

Запишем блочную группу  $A$  графа  $\Gamma$

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Из формулы (8.67)

$$a_{1(2)} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} \cap \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_3 \partial \alpha_4} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \alpha_3} \cap \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_3 \alpha_4},$$

$$\alpha_2 \alpha_3 = 12 \ 23 = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 2 & 33 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 \alpha_4 = 12 \ 23 = \begin{bmatrix} 2 & 23 \\ 3 & 44 \end{bmatrix},$$

и, следовательно,

$$a_{1(2)} = \begin{bmatrix} 3 & 21 \\ 4 & 44 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 4 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Аналогично рассчитаем дендритные веса остальных ребер графа  $\Gamma_{z(2)}$ ; в результате получим

$$a_{2(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_{3(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_{4(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$a_{5(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, a_{6(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\forall i, j \{ (\langle a_{i(2)} \rangle \cap \langle a_{j(2)} \rangle) = 0 \}, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, 6.$$

Теперь рассчитаем дендритные веса ребер замещающего графа  $\Gamma_{z(p)}$ .

Для этого вначале вычислим блочную группу  $A_{(v_z-1)}$ . Выбираем дерево графа  $\Gamma_z$ , состоящее из путей  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Имеем

$$[\alpha_1] [\alpha_2] [\alpha_3] = [1 \ 4] [1 \ 2] [2 \ 3] = \begin{bmatrix} 1 & 112 \\ 2 & 323 \\ 4 & 434 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$A_{(v_z-1)} = A_{(3)} = \frac{\partial^3 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = [3 \ 2 \ 4 \ 1].$$

В соответствии с формулой (8.58)

$$a_{k(p)} = \langle a_{k(2)} \rangle \langle 1 \ 2 \ 3 \ 4 \rangle^{(p-2)/(3-p)}$$

Для  $p = 0$  (незамкнутый граф) имеем

$$a_k = \langle a_{k(2)} \rangle \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle^{-2/3},$$

откуда, например, при  $k=1$

$$a_1 = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 4 \end{matrix} \right\rangle \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle^{-2/3}.$$

Для проверки полученных результатов рассчитаем блочную группу графа  $\Gamma$ , используя дендритные веса  $a_k$  графа  $\Gamma_z$ . С этой целью определим полную блочную группу графа  $\Gamma_z$ , выраженную через обозначения его ребер  $\alpha_i$ :

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \alpha_2 \\ \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_5 \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_6 \alpha_6 \alpha_6 \alpha_4 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_4 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_5 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_6 \end{matrix} \right\},$$

и далее заменим все элементы  $\alpha_i$  на дендритные веса  $a_i$ . Получим

$$A_z'' = \left\{ \begin{matrix} 11\ 11\ 1\ 1\ 111\ 11111111 \\ 1\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 2\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1111 \\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 3\ 3\ 2\ 2\ 2\ 3\ 1\ 2\ 2\ 2 \\ 2\ 3\ 2\ 3\ 3\ 3\ 4\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 2\ 3\ 3\ 2 \\ 3\ 4\ 3\ 3\ 4\ 4\ 4\ 3\ 4\ 3\ 3\ 4\ 3\ 3\ 4\ 3 \\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4 \end{matrix} \right\} \langle 1\ 2\ 3\ 4 \rangle^{-2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = A.$$

Граф, рассмотренный в примере, имеет значительно более простой вид, чем замещающий граф, поэтому данный пример может служить лишь иллюстрацией построения замещающего графа. Преимущества применения данного метода очевидны в том случае, когда замещающий граф более простой, чем рассматриваемый.

**Пример 8.4.** Рассчитаем дендритные веса  $a_{1(1)}$ ,  $a_{2(1)}$ ,  $a_{3(1)}$  ребер  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  замещающего графа  $\Gamma_z$  (рис. 8.5, б) для графа  $\Gamma$ , изображенного на рис. 8.5, а.

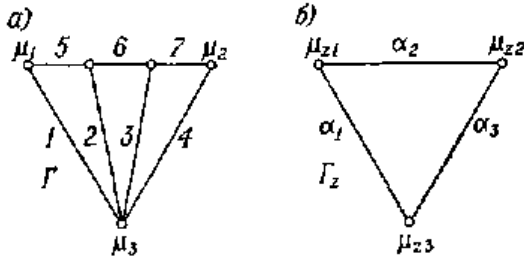


Рис. 8.5.

По формуле (8.67) напишем

$$a_{1(2)}^s = \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_3} = \left( \frac{\partial A}{\partial 1} + \frac{\partial A}{\partial 4} \right) \cap \left( \frac{\partial A}{\partial 4} \right) =$$

$$= \left( \frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} \right) + \frac{\partial A}{\partial 4} = \left( \frac{\partial}{\partial 1} \frac{\delta A}{\delta 4} \right) \cap \left( \frac{\partial}{\partial 4} \frac{\delta A}{\delta 1} \right) + \frac{\partial A}{\partial 4}.$$

Блочная группа графа  $\Gamma$  равна

$$A = [1\ 5] [2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7] [4\ 7].$$

Подставив выражение блочной группы  $A$  графа  $\Gamma$  в выражение для  $a_{1(1)}$ , получим

$$a_{1(1)}^s = ([2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7] [7]) \cap ([5] [2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7]) +$$

$$+ [1\ 5] [2\ 5\ 6] [3\ 6\ 7] = \begin{bmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 1111223 \\ 22 & 23 & 55 & 36 & 3555 \\ 36 & 75 & 67 & 67 & 5676 \end{bmatrix}.$$

Аналогично рассчитаем  $a_{2(1)}$  и  $a_{3(1)}$ :

$$a_{2(1)}^s = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_3} = \frac{\partial A}{\partial 1} \cap \frac{\partial A}{\partial 4} = \left( \frac{\partial}{\partial 1} \frac{\delta A}{\delta 4} \right) \cap \left( \frac{\partial}{\partial 4} \frac{\delta A}{\delta 1} \right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$a_{3(1)}^s = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} \cap \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = \left( \frac{\partial A}{\partial 1} \right) \cap \left( \frac{\partial A}{\partial 4} + \frac{\partial A}{\partial 1} \right) = \frac{\partial A}{\partial 1} +$$

$$+ \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial 1} \frac{\delta A}{\delta 4} \right) \cap \left( \frac{\partial}{\partial 4} \frac{\delta A}{\delta 1} \right) \right\} = 2\ 5\ 6\ 3\ 6\ 7\ 4\ 7 + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} =$$



$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 4 & 6 & 3 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 & 5 & 6 & 7 & 6 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\langle a_{1(1)} \rangle \cap \langle a_{2(1)} \rangle = \langle a_{2(1)} \rangle \cap \langle a_{3(1)} \rangle = \langle a_{1(1)} \rangle \cap \langle a_{3(1)} \rangle = 0.$$

**Пример 8.5.** Используя замещающий граф  $\Gamma_z$  с четырьмя вершинами (рис. 8.6, б), рассчитаем полную блочную группу  $A_\alpha$  графа  $\Gamma_{\alpha_1}$ , полученного в результате замыкания вершин  $\mu_1$  и  $\mu_3$  в графе  $\Gamma$  (рис. 8.6, а).

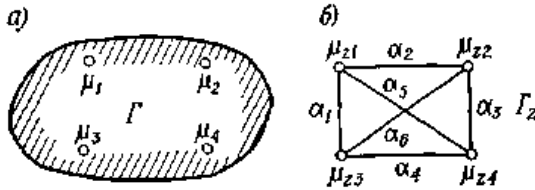


Рис. 8.6.

Дендритные веса ребер графа  $\Gamma_{z(2)}$  определяются из уравнений (8.64) и (8.65):

$$\left. \begin{aligned} a_{1(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_2 \alpha_3} + A_{\alpha_3 \alpha_4} - A_{\alpha_1 \alpha_3}, \\ a_{2(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_3 \alpha_4} + A_{\alpha_1 \alpha_4} - A_{\alpha_2 \alpha_4}, \\ a_{3(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1 \alpha_4} + A_{\alpha_1 \alpha_2} - A_{\alpha_1 \alpha_3}, \\ a_{4(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1 \alpha_2} + A_{\alpha_1 \alpha_3} - A_{\alpha_2 \alpha_4}, \\ a_{5(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_3 \alpha_6} + A_{\alpha_1 \alpha_6} - A_{\alpha_5 \alpha_6}, \\ a_{6(2)} &= \frac{1}{2} A_{\alpha_1 \alpha_5} + A_{\alpha_3 \alpha_5} - A_{\alpha_5 \alpha_6}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Заметим, что

$$A_{\alpha_2\alpha_5} = A_{\alpha_3\alpha_5} = A_{\alpha_2\alpha_3}, \quad A_{\alpha_1\alpha_4} = A_{\alpha_4\alpha_5} = A_{\alpha_1\alpha_5},$$

$$A_{\alpha_1\alpha_2} = A_{\alpha_2\alpha_6} = A_{\alpha_1\alpha_6}, \quad A_{\alpha_3\alpha_4} = A_{\alpha_3\alpha_6} = A_{\alpha_4\alpha_6}.$$

Блочная группа  $A_z$  графа  $\Gamma_z$  равна

$$A_z = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_5] [\alpha_2 \alpha_3 \alpha_6] [\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5],$$

поэтому блочная группа  $A_{z\alpha_1}$  замкнутого графа  $\Gamma_{z\alpha_1}$  равна

$$A_{z\alpha_1} = \frac{\delta A_z}{\partial \alpha_1} = [\alpha_2 \alpha_3 \alpha_6] [\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5] = \begin{bmatrix} \alpha_2 \alpha_2 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \\ \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 \alpha_6 \alpha_6 \end{bmatrix}$$

Согласно уравнению (8.72), для блочной группы  $A_{\alpha_1}$  графа

$\Gamma_{\alpha_1}$  получим

$$A_{\alpha_1}^s = \frac{A_{z\alpha_1}^s}{A_{(3)}} = \frac{(\langle a_{2(2)} \rangle + \langle a_{6(2)} \rangle)(\langle a_{3(2)} \rangle + \langle a_{4(2)} \rangle + \langle a_{5(2)} \rangle) + (\langle a_{3(2)} \rangle)(\langle a_{4(2)} \rangle + \langle a_{5(2)} \rangle)}{A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}}.$$

Подставив выражения (а) в эту формулу и упростив, окончательно будем иметь

$$A_{\alpha_1}^s = \frac{1}{4A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}} (2A_{\alpha_1\alpha_4} + A_{\alpha_3\alpha_4} + A_{\alpha_2\alpha_5} - A_{\alpha_2\alpha_4} - A_{\alpha_5\alpha_6}) \times \\ \times (A_{\alpha_1\alpha_4} + 3A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_2\alpha_3} + A_{\alpha_3\alpha_4} - A_{\alpha_1\alpha_3} - A_{\alpha_5\alpha_6} - A_{\alpha_2\alpha_4}) + \\ + (A_{\alpha_1\alpha_4} + A_{\alpha_1\alpha_2} - A_{\alpha_1\alpha_3})(2A_{\alpha_1\alpha_2} + A_{\alpha_2\alpha_3} + A_{\alpha_3\alpha_4} - A_{\alpha_2\alpha_4} - A_{\alpha_5\alpha_6}).$$

где

$$A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^s = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{\partial^3 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \partial \alpha_3},$$

$$A_{\alpha_1\alpha_4}^s = A_{\alpha_1\alpha_4} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_4} \quad \text{и т. д.}$$

**Пример 8.6.** Рассчитаем полную блочную группу  $A$  графа  $\Gamma$  с тремя выделенными вершинами  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  (рис. 8.7, а) с помощью замещающего графа  $\Gamma_z$ , имеющего три вершины (рис. 8.7, б).

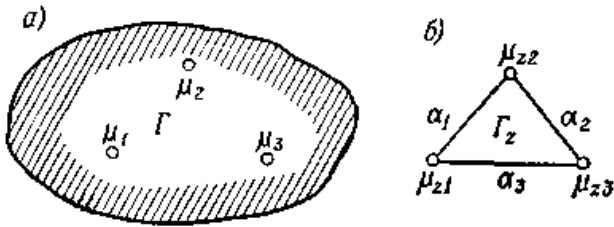


Рис. 8.7.

Дендритные веса графа  $\Gamma_{z(1)}$ , согласно уравнениям (8.64) и (8.65), равны

$$a_{1(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_2} + A_{\alpha_3} - A_{\alpha_1},$$

$$a_{2(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_1} + A_{\alpha_3} + A_{\alpha_2},$$

$$a_{3(1)} = \frac{1}{2} A_{\alpha_1} + A_{\alpha_2} - A_{\alpha_3},$$

так как

$$A_{(v_z-3)} = A_{(3-3)} = A_{(0)} = A.$$

Применив формулу (8.72), находим

$$A = A_z^s A_{(2)}^{-1}.$$

Блочную группу  $A_z^s$  получим, подставив в блочную группу графа  $\Gamma_z$

$$A_z^s = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}$$

вместо ребер  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  их дендритные веса  $a_{1(1)}$ ,  $a_{2(1)}$  и  $a_{3(1)}$ . В результате получаем

$$A_z^s = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_3} = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_3},$$

и окончательно

$$A = \frac{1}{4A_{\alpha_1 \alpha_2}} (2A_{\alpha_1} A_{\alpha_3} + 2A_{\alpha_1} A_{\alpha_2} + 2A_{\alpha_2} A_{\alpha_3} - A_{\alpha_1}^2 - A_{\alpha_2}^2 - A_{\alpha_3}^2).$$

где

$$A_{\alpha_1\alpha_2}^s = A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}^s = \frac{\partial^2 A}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$A_{\alpha_1}^s = A_{\alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \quad \text{и т. д.}$$

### 8.3. Полная блочная группа модуль-графа

Рассмотрим *два метода* расчета полной блочной группы  $A$  модуль-графа.

**Метод 1.** Блочная группа  ${}^2A$  второго ранга модуль-графа, определенное двумя тождественными формулами:

$${}^2A = \frac{\partial}{\partial A^d_0} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad {}^2A = [A^d_0] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_g \end{bmatrix}.$$

может быть преобразовано в замещающую блочную группу  $A$  (первого ранга)

$$A = {}^e A,$$

если применить операции алгебры блочных групп над ее элементами  $A_{ij}$  в соответствии с выражением

$$A = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^g A_{ij}$$

(здесь  $n = T$  — количество столбцов блочной группы  ${}^2A$ , равное числу деревьев скелета  $\Gamma_0$  модуль-графа, а  $g$  - количество строк блочной группы  ${}^2A$ , равное числу модулей модуль-графа).

На практике при расчете блочных групп модуль-графов часто вместо операций алгебры блочных групп применяют операции алгебры полных блочных групп.

Чтобы преобразовать блочную группу  ${}^2A$  модуль-графа в полную блочную группу  $A$ , следует заменить все элементы  $A_{ij}$  блочной группы  ${}^2A$ , представляющие собой блочные группы модулей графа  $\Gamma$ , полными блочными группами

$$A_{ij} = A_{ij}^s$$

с учетом дефекта суммы столбцов блочной группы  ${}^2A$

$$\sum_{j=1}^n \left( \prod_{i=1}^g A_{ij} \right).$$

Произведения элементов столбцов

$$\prod_{i=1}^g A_{ij}$$

не обладают дефектом произведения, поскольку модули графа  $\Gamma$  не содержат общих ребер.

Как известно, элементы блочной группы  ${}^2A$  модуль-графа  $\Gamma$  представляют собой алгебраические производные блочных групп отдельных модулей

$G_i$  графа  $\Gamma$

$$A_{ij} = A_{i(p_{ij})},$$

где  $p_{ij}$  - порядок производной блочной группы  $A_{ij}$ ,  $A_i$  - блочная группа модуля  $G_i$ .

Заметим, что все столбцы блочной группы упорядочены в соответствии с номерами модулей

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{1(p_{11})} & A_{1(p_{12})} & \cdots & A_{1(p_{1n})} \\ A_{2(p_{21})} & A_{1(p_{22})} & \cdots & A_{1(p_{2n})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{g(p_{g1})} & A_{g(p_{g2})} & \cdots & A_{g(p_{gn})} \end{bmatrix}. \quad (8.73)$$

Составим из элементов  $p_{ij}$  матрицу, построенную аналогично блочной группы  ${}^2A$ :

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{g1} & p_{g2} & \cdots & p_{gn} \end{pmatrix}. \quad (8.74)$$

Эту матрицу назовем *матрицей порядков* блочной группы  ${}^2A$  модуль-графа. Порядок элементов  $p_{ij}$  в ней аналогичен порядку элементов в блочной группе  ${}^2A$ . Тогда отношение  $R$  преобразования блочной группы  ${}^2A$  в матрицу порядков  $P$  определим следующим образом:

$$({}^2ARP) \Leftrightarrow \forall_i \forall_j (A_{i(p_{ij})} \Leftrightarrow p_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.75)$$

Заметим, что суммы элементов в отдельных столбцах матрицы  $\mathbf{P}$  равны между собой и равны цикломатическому числу скелета модуль-графа.

Определим понятие идентичности двух столбцов матрицы порядков  $\mathbf{P}$ .

*Определение 8.5.* Два столбца  $K_{j_1}$  и  $K_{j_2}$  матрицы порядков  $\mathbf{P}$  идентичны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$(K_{j_1} = K_{j_2}) \Leftrightarrow \forall_i (p_{ij_1} = p_{ij_2}), \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (8.76)$$

Если теперь сгруппировать столбцы матрицы порядков в соответствии с критерием идентичности, а потом таким же образом перегруппировать столбцы блочной группы  ${}^2A$ , то можно написать следующее равенство:

$${}^2A = {}^2A^I + {}^2A^{II} + \dots + {}^2A^N + {}^2A^M, \quad (8.77)$$

где  ${}^2A^I, {}^2A^{II}, \dots, {}^2A^N$  — блочные группы второго ранга, содержащие по крайней мере два столбца и имеющие матрицу порядков, построенную из идентичных столбцов;  ${}^2A^M$  — блочная группа, матрица порядков которой не имеет идентичных столбцов.

Отметим, что сумма, представленная выражением (8.77), не обладает дефектом и ее можно записать в виде

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^I + \mathbb{A}^{II} + \dots + \mathbb{A}^N + \mathbb{A}^M, \quad (8.78)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= A = {}^2A, \\ \mathbb{A}^I &= A^I = {}^2A^I, \\ \mathbb{A}^{II} &= A^{II} = {}^2A^{II}, \\ &\dots \dots \dots \\ \mathbb{A}^N &= A^N = {}^2A^N \end{aligned}$$

а также

$$\mathbb{A}^M = \sum_{k=1}^{n'} \prod_{i=1}^g \mathbb{A}_{ik}, \quad (8.79)$$

где  $n'$  — количество столбцов блочной группы  ${}^2A^M$  и  $\mathbb{A}_{ik} = A_{ik}^s$ .

Из равенств (8.78) и (8.79) следует, что для определения полной блочной группы  $\mathbb{A}$  модуль-графа  $\Gamma$  необходимо рассчитать полные блочные группы

$$A^I, A^{II}, \dots, A^N.$$

Замену блочных групп  ${}^2A^I, {}^2A^{II}, \dots, {}^2A^N$  на полные блочные группы можно произвести, используя замещающие графы отдельных модулей графа  $\Gamma$  и следующие формулы (см. предыдущий раздел):

$$A_{i(p)} = A_{iz(p)}^s, \quad (8.80)$$

где  $A_{i(p)}$  — блочная группа модуля  $\Gamma_i$  при замыкании его  $p$  путей;  $A_{iz(p)}$  — полная блочная группа замещающего графа с замкнутыми  $p$  путями, элементы которого — дендритные веса  $a_{ik(p)}$  ребер этого графа (обозначим эти ребра символами дендритных весов  $a_{ik}$  при  $p = 0$ );

$$a_{ik(p)} = \frac{1}{2} (A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} + A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} - A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}) (A_{i(v_{iz}-1)})^{v_{iz}-p_i-1} \quad (8.81)$$

или

$$a_{ik(p)} = (A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} \cap A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}}) (A_{i(v_{iz}-1)})^{v_{iz}-p_i-1}. \quad (8.82)$$

При этом

$$A_{i(v_{iz}-3)}^s = A_{i(v_{iz}-3)} = \frac{\partial A_i}{\partial D_i^{a_{ik}}}, \quad (8.83)$$

где  $D_i^{a_{ik}}$  — блочная группа произвольного дерева, касающегося всех вершин замещающего графа  $\Gamma_{iz}$ , кроме вершин, инцидентных ребру  $a_{ik}$ ;

$$A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}^s = \frac{\partial^2 A_i}{\partial D_i^{a_{ik}} \partial a_{ik+1}}, \quad (8.84)$$

$$A_{i(v_{iz}-1)}^s = A_{i(v_{iz}-1)} = \frac{\partial A_i}{\partial D_i}. \quad (8.85)$$

где  $D_i$  — блочная группа произвольного дерева замещающего графа  $\Gamma_{iz}$  (ребра этого графа одновременно представляют собой соответствующие пути модуля  $\Gamma_i$ ).

Дополняя деревья отдельных модулей, содержащиеся в скелете модуль-графа, получаем их замещающие графы в виде полных графов (полных многоугольников). Пусть, например, блочная группа  ${}^2A^I$  выражения (8.77) равна

$${}^2 A^I = \begin{bmatrix} A_{1(p_{11})} & A_{1(p_{12})} & \cdots & A_{1(p_{1n^I})} \\ A_{2(p_{21})} & A_{1(p_{22})} & \cdots & A_{1(p_{2n^I})} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{g(p_{g1})} & A_{g(p_{g2})} & \cdots & A_{g(p_{gn^I})} \end{bmatrix}, \quad (a)$$

причем

$$\forall_i \forall_{j,k} (p_{ij} = p_{ik} = p_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad j, k=1, 2, \dots, n^I.$$

Подставив вместо элементов  $A_{i(p_{ij})}$ , в выражении (а) структурные числа  $A_{iz(p_{ij})}$  замещающих графов модулей, в соответствии с канонической формой приведем полученную блочную группу второго ранга к замещающей блочной группе первого ранга  $A^I$ :

$$A^I = \sum_{j=1}^{n^I} \prod_{i=1}^g A_{iz(p_{ij})}. \quad (б)$$

Далее по формулам (8.81) или (8.82) рассчитаем дендритные веса  $a_{ik(p_{ij})}$  ребер замещающих графов  $\Gamma_{iz(p_{ij})}$  и подставим их в выражение

(б). Таким образом, получим полную блочную группу  $A^I$ , выраженную с помощью полных блочных групп отдельных модулей.

Аналогично вычислим полные блочные группы  $A^I, A^{II}, \dots, A^N$  и после суммирования с блочной группой  $A^M$  найдем полную блочную группу  $A$  модуль-графа  $\Gamma$ .

Проиллюстрируем на примерах метод 1 определения полной блочной группы модуль-графа.

**Пример 8.7.** Определим полную блочную группу  $A$  модуль-графа  $\Gamma$ , изображенного на рис. 8.8, а.

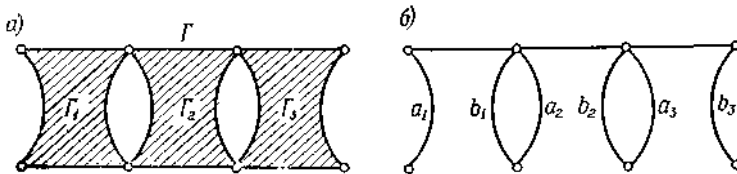


Рис. 8.8.

Дополнительная блочная группа  $A_0^d$  скелета  $\Gamma_0$  (рис. 8.8, б) равна



$$A_0^d = [a_2 \ b_1] [a_3 \ b_2] = \begin{bmatrix} a_2 & a_2 & b_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 & a_3 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, блочная группа  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2A = \left[ A_0^d \right] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & A_1 & A_{1b} & A_{1b} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_2 & A_{2b} \\ A_{3a} & A_3 & A_{3a} & A_3 \end{bmatrix}. \quad (8.86)$$

Матрица порядков

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$XX$

не содержит идентичных столбцов, следовательно, полная блочная группа  $\bar{A}$  графа  $\Gamma$ , согласно выражению (8.79), имеет вид

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_{2a} \bar{A}_{3a} + \bar{A}_1 \bar{A}_{2ab} \bar{A}_3 + \bar{A}_{1b} \bar{A}_2 \bar{A}_{3a} + \bar{A}_{1b} \bar{A}_{2b} \bar{A}_3, \quad (8.87)$$

где

$$\bar{A}_1 = A_1, \quad \bar{A}_2 = A_2, \quad \bar{A}_3 = A_3, \quad \bar{A}_{1b} = A_{1b} = \frac{\partial A_1}{\partial b_1} \quad \text{и т. д.}$$

Заметим, что для рассмотренного в этом примере типа графов в виде цепочки с произвольным количеством модулей матрица порядков никогда не содержит идентичных столбцов, поэтому полная блочная группа определяется по формуле (8.79) без применения замещающих графов.

**Пример 8.8.** Рассчитаем полную блочную группу  $\bar{A}$  модуль-графа  $\Gamma$ , изображенного на рис. 8.9, а.

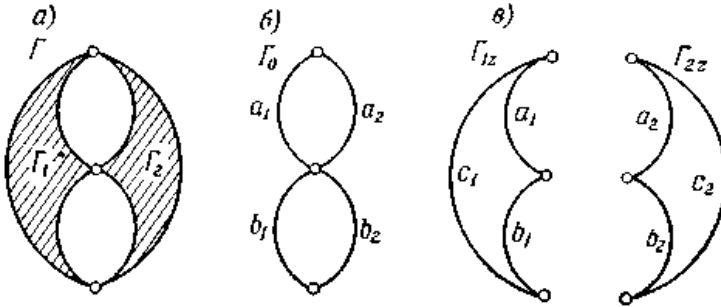


Рис. 8.9.

Дополнительная блочная группа  $A_0^d$  скелета  $\Gamma_0$  (рис. 8.9, б) имеет вид

$$A_0^d = [a_1 \ a_2] [b_1 \ b_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

поэтому блочная группа  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  равна

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 \\ A_2 & A_{2b} & A_{2a} & A_{2ab} \end{bmatrix},$$

а матрица порядков имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице содержатся два идентичных столбца (обозначенные снизу буквой X), поэтому, согласно уравнению (8.77), имеем

$${}^2A = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_1 \\ A_2 & A_{2ab} \end{bmatrix}. \quad (a)$$

Блочная группа равна

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_1 \\ A_2 & A_{2ab} \end{bmatrix}^s = A_{1ab}A_2 + A_1A_{2ab}. \quad (б)$$

Блочную группу

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} \quad (в)$$

заменяем полной блочной группой, используя замещающие графы  $\Gamma_{1z}$  и  $\Gamma_{2z}$  модуль-графа  $\Gamma$  (фиг. 8.9, в). Для этих графов можно написать

$$\begin{aligned} A_{1a} &= [b_{1(1)} \ c_{1(1)}], \\ A_{1b} &= [a_{1(1)} \ c_{1(1)}], \\ A_{2a} &= [b_{2(1)} \ c_{2(1)}], \\ A_{2b} &= [a_{2(1)} \ c_{2(1)}]. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в формулу (в), получим

$$\begin{aligned} {}^2A^I &= \begin{bmatrix} [b_{1(1)} \ c_{1(1)}][a_{1(1)} \ c_{1(1)}] \\ [a_{2(1)} \ c_{2(1)}][b_{2(1)} \ c_{2(1)}] \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} b_{1(1)} \ b_{1(1)} \ c_{1(1)} \ \times_{1(1)} \ a_{1(1)} \ a_{1(1)} \ c_{1(1)} \ \times_{1(1)} \\ a_{2(1)} \ c_{2(1)} \ a_{2(1)} \ \times_{2(1)} \ b_{2(1)} \ c_{2(1)} \ b_{2(1)} \ \times_{2(1)} \end{bmatrix}^s \\ &= A_{1a} A_{2b} + A_{1b} A_{2a} - 2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle, \end{aligned}$$

так как

$$A_{1a} = A_{1a}, \quad A_{1b} = A_{1b},$$

$$2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle A_{2a} = A_{2a}, \quad A_{2b} = A_{2b},$$

а  $2\langle c_{1(1)} \rangle \langle c_{2(1)} \rangle$  — дефект суммы столбцов блочной группы  $A^I$  (вычеркнуты два идентичных столбца). Дендритные веса  $c_{1(1)}$  и  $c_{2(1)}$  определяются из выражения (8.81)

$$c_{1(1)} = \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}),$$

$$c_{2(1)} = \frac{1}{2}(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),$$

так как

$$v_{1z} = v_{2z} = 3, \quad p_1 = p_2, \quad A_{i(0)} = A_i,$$

$$(A_{i(v_{iz}-1)})^{v_{iz}-p_i-1} = A_{i(2)}^{0/1} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Полную блочную группу  $A$  графа  $\Gamma$  (рис. 8.9, а) подсчитаем по формуле

$$\begin{aligned} A &= A^M + A^I = A_{1ab} A_2 + A_1 A_{2ab} + A_{1a} A_{2b} + A_{1b} A_{2a} - \\ &\quad - \frac{1}{2} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}) (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}) \end{aligned} \quad (8.88)$$

где

$$A_{1ab} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial a_1 \partial b_1}, \quad A_{2ab} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial a_2 \partial b_2} \quad \text{и т. д.}$$

Пусть, например, граф  $\Gamma$  имеет вид, представленный на рис. 8.10, а. Модули (подграфы)  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  изображены на рис. 8.10, б, а их замыкающие графы  $\Gamma_{1z}$  и  $\Gamma_{2z}$  — на рис. 8.10, в.

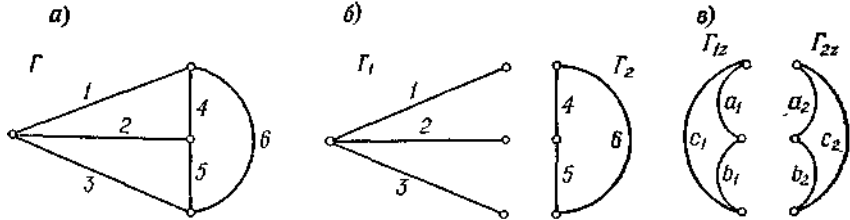


Рис. 8.10.

На основании формулы (8.88) полная блочная группа этого графа равна

$$\begin{aligned}
 A &= \langle 1\ 2\ 3 \rangle \left\{ \begin{matrix} 4\ 4\ 5 \\ 5\ 6\ 6 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \langle \emptyset \rangle + \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} \langle 4\ 6 \rangle + \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2\ 3 \end{matrix} \right\} \langle 5\ 6 \rangle - \\
 &- \frac{1}{2} \left( \left\{ \begin{matrix} 1\ 2 \\ 3\ 3 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2\ 3 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2\ 2 \\ 1\ 3 \end{matrix} \right\} \right) \langle 5\ 6 \rangle + \langle 4\ 6 \rangle - \langle 4\ 5 \rangle = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 6 & 5 & 5 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

**Пример 8.9.** Рассчитаем полную блочную группу  $A$  модуль-графа  $\Gamma$ , изображенного на рис. 8.11, а.

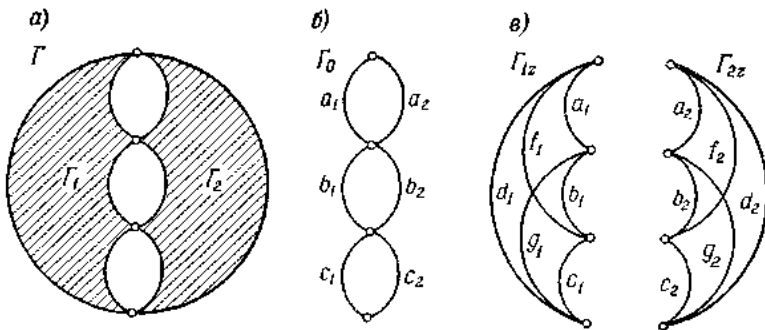


Рис. 8.11.

Дополнительная блочная группа  $A_0^d$  скелета  $\Gamma_0$  (рис. 8.11, б) равна

$$A_0^d = [a_1 a_2] [b_1 b_2] [c_1 c_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_1 & b_1 & a_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_1 & b_2 & c_1 & c_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_2 \\ c_1 & c_2 & b_2 & a_2 & c_2 & b_2 & c_2 & c_2 \end{bmatrix}$$

Поэтому блочная группа  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2A = [A_0^d] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1abc} & A_1 & A_{1ac} & A_{1bc} & A_{1ab} & A_{1c} & A_{1a} & A_{1b} \\ A_2 & A_{2abc} & A_{2b} & A_{2a} & A_{2c} & A_{2ab} & A_{2bc} & A_{2ac} \end{bmatrix}. \quad (8.89)$$

Матрица порядков имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$X_1 \quad X_1 \quad X_1 \quad X_2 X_2 \quad X_2$

следовательно,

$${}^2A = {}^2A^I + {}^2A^{II} + {}^2A^M, \quad (a)$$

где

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} A_{1ac} & A_{1bc} & A_{1ab} \\ A_{2b} & A_{2a} & A_{2c} \end{bmatrix}, \quad (б)$$

$${}^2A^{II} = \begin{bmatrix} A_{1c} & A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2ab} & A_{2bc} & A_{2ac} \end{bmatrix}, \quad (в)$$

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1abc} & A_1 \\ A_2 & A_{2abc} \end{bmatrix}.$$

Для замены блочных групп  ${}^2A^I$  и  ${}^2A^{II}$  полными блочными группами дополним деревья  $\Gamma_{10}$  и  $\Gamma_{20}$  до полных графов  $\Gamma_{1z}$  и  $\Gamma_{2z}$ , как показано на рис. 8.11, в, рассматривая эти графы как замещающие графы модулей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . При этом будут справедливы следующие соотношения:

$$A_{1ac} = [b_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad f_{1(2)} \quad g_{1(2)}],$$

$$A_{1bc} = [a_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad f_{1(2)}],$$

$$A_{1ab} = [c_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad g_{1(2)}].$$

Подставив эти выражения в блочную группу  ${}^2A^I$  (б), получим

$${}^2A^I = \begin{bmatrix} [b_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad f_{1(2)} \quad g_{1(2)}] & [a_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad f_{1(2)}] & [c_{1(2)} \quad d_{1(2)} \quad g_{1(2)}] \\ A_{2b} & A_{2a} & A_{2c} \end{bmatrix}^s =$$

$$= \langle b_{1(2)} \rangle_{A_{2b}} + \langle a_{1(2)} \rangle_{A_{2a}} + \langle c_{1(2)} \rangle_{A_{2c}} + \langle d_{1(2)} \rangle_{A_{2d}} + \langle f_{1(2)} \rangle_{A_{2f}} + \langle g_{1(2)} \rangle_{A_{2g}} \quad (\Gamma)$$

так как

$$[A_{2a} A_{2b} A_{2c}] = A_{2d}^e$$

$$[A_{2a} A_{2b}] = A_{2f}^e \quad \text{и} \quad [A_{2b} A_{2c}] = A_{2g}^e$$

Дендритные веса определяются из выражений

$$a_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1cd} + A_{1bc} - A_{1ac}),$$

$$b_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ad} + A_{1cd} - A_{1bd}),$$

$$c_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ad} + A_{1ab} - A_{1ac}),$$

$$d_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1ab} + A_{1bc} - A_{1bd}),$$

$$f_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1cg} + A_{1ag} - A_{1fg}),$$

$$g_{1(2)} = \frac{1}{2} (A_{1af} + A_{1cf} - A_{1fg}),$$

так как

$$(A_{1(3)})^{\frac{p_1+2-v_{1z}}{v_{1z}-p_1-1}} = A_{1(3)}^{0/1} = 1.$$

Если эти величины подставить в выражение  $(\Gamma)$ , а потом в выражение (а) и использовать подобие блочных групп  ${}^2A^I$  и  ${}^2A^{II}$ , то получим следующую формулу полной блочной группы модуль-графа  $\Gamma$  (рис. 8.11, а):

$$\begin{aligned}
 A = & A_{1abc}A_2 + A_1A_{2abc} + \frac{1}{2}\{(A_{1cd} + A_{1bc} - A_{1ac})A_{2a} + \\
 & + (A_{1ad} + A_{1cd} - A_{1bd})A_{2b} + (A_{1ad} + A_{1ab} - A_{1ac})A_{2c} + \\
 & + (A_{1ab} + A_{1bc} - A_{1bd})A_{2d} + (A_{1cg} + A_{1ag} - A_{1fg})A_{2f} + \\
 & + (A_{1af} + A_{1cf} - A_{1fg})A_{2g} + (A_{2cd} + A_{2bc} - A_{2ac})A_{1a} + \\
 & + (A_{2ad} + A_{2cd} - A_{2bd})A_{1b} + (A_{2ad} + A_{2ab} - A_{2ac})A_{1c} + \quad (8.90) \\
 & + (A_{2ab} + A_{2bc} - A_{2bd})A_{1d} + (A_{2cg} + A_{2ag} - A_{2fg})A_{1f} + \\
 & + (A_{2af} + A_{2cf} - A_{2fg})A_{1g}\}.
 \end{aligned}$$

**Пример 8.10.** Рассчитаем полную блочную группу  $A$  модуль-графа  $\Gamma$  (рис. 8.12), где  $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$  и т. д. обозначают произвольные пути между соответствующими полюсами отдельных модулей.

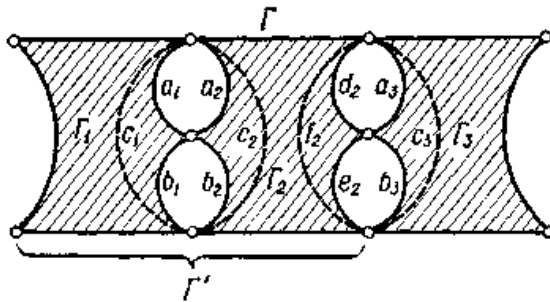


Рис. 8.12.

Представим граф, состоящий из модулей  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , одним модулем  $\Gamma'$ . Используя выражение (8.88), получим для этого графа третьего ранга следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 A = & A'_{d_2c_2}A_3 + A'_{a_3ab} + A'_{d_2}A_{3b} + A'_{c_2}A_{3a} - \\
 & - \frac{1}{2}(A'_{d_2} + A'_{c_2} - A'_{f_2})(A_{3a} + A_{3b} - A_{3c}).
 \end{aligned}$$

В это выражение подставим блочную группу

$$\begin{aligned}
 A' = & A_{1ab}A_2 + A_1A_{2ab} + A_{1a}A_{2b} + A_{1b}A_{2a} - \\
 & - \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),
 \end{aligned}$$

$$A'_{d_2} = A_{1ab}A_{2d} + A_1A_{2abd} + A_{1a}A_{2bd} + A_{1b}A_{2ad} -$$

$$-\frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2ad} + A_{2bd} - A_{2cd}),$$

$$A'_{e_2} = A_{1ab}A_{2e} + A_1A_{2abe} + A_{1a}A_{2be} + A_{1b}A_{2ae} -$$

$$-\frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2ae} + A_{2be} - A_{2ce}),$$

$$A'_{f_2} = A_{1ab}A_{2f} + A_1A_{2abf} + A_{1a}A_{2bf} + A_{1b}A_{2af} -$$

$$-\frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2af} + A_{2bf} - A_{2cf}),$$

$$A'_{d_2e_2} = A_{1ab}A_{2de} + A_1A_{2abde} + A_{1a}A_{2bde} + A_{1b}A_{2ade} -$$

$$-\frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2ade} + A_{2bde} - A_{2cde}).$$

После подстановки получим выражение для полной блочной группы  $A$  модуль-графа  $\Gamma$  (рис. 8.12), которое ввиду его сложности здесь не приводится.

Отметим, что метод преобразования блочных групп  ${}^2A^I, {}^2A^{II}, \dots, {}^2A^N$  можно применить непосредственно без предварительного разложения по критерию идентичности столбцов матрицы порядков  $\mathbf{P}$  для преобразования всей блочной группы  ${}^2A$  модуль-графа  $\Gamma$  в полную блочную группу  $A$ . Однако это требует большего числа операций.

**Метод 2** определения полной блочной группы  $A$  модуль-графа  $\Gamma$ . Он также основан на применении замещающих (полных) графов отдельных модулей графа  $\Gamma$ . Если замещающие графы  $\Gamma_{iz}$  всех модулей графа

$$\Gamma = \langle P, Z, \varepsilon \rangle, \quad Z = \{\Gamma_i\}, \quad (8.91)$$

соединить согласно его структуре, то получим замещающий (неполный) граф

$$\Gamma_z = \langle P, Z_z, \varepsilon \rangle, \quad Z_z = \{\Gamma_{iz}\}, \quad (8.92)$$

ребра которого  $a_{ik}$  представляют собой соответствующие пути модулей  $\Gamma_i$  графа  $\Gamma$ .

Рассчитаем полную блочную группу  $A_z$  графа  $\Gamma_z$

$$A_z = A_z^s$$

В блочную группу  $A_z$  вместо ребер  $a_{ik}$  подставим выражения



$$a_{ik} = \frac{A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}} + A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}} - A_{i(v_{iz}-3)a_{ik}}}{2A_{i(v_{iz}-1)}} \quad (8.93)$$

или

$$a_{ik} = \frac{A_{i(v_{iz}-3)a_{ik-1}} \cap A_{i(v_{iz}-3)a_{ik+1}}}{A_{i(v_{iz}-1)}} \quad (8.94)$$

Поэтому, согласно формулам (8.50) —(8.52), полная блочная группа  $A$  модуль -графа  $\Gamma$  равна

$$A = A_z \prod_{iz=1}^s A_{i(v_{iz}-1)}. \quad (8.95)$$

**Пример 8.11.** Рассчитаем полную блочную группу модуль -графа, изображенного на рис. 8.13, а, используя оба метода.

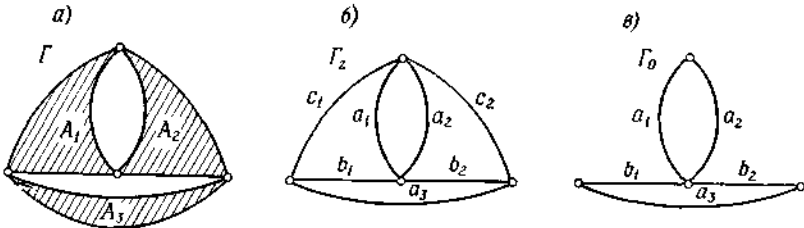


Рис. 8.13.

**Метод 2.** Для графа  $\Gamma_z$  (рис. 8.13, б), состоящего из замещающих (полных) графов, имеем

$$\begin{aligned} A_z = A_z &= [a_1 a_2 c_1 c_2] [b_1 c_1 a_3] [b_2 c_2 a_3] = \\ &= \langle a_1 a_2 c_1 c_2 \rangle \langle b_1 c_1 a_3 \rangle \langle b_2 c_2 a_3 \rangle - \left\{ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\} \langle b_2 c_2 a_3 \rangle - \\ &- \left\{ \begin{matrix} c_2 \\ c_2 \end{matrix} \right\} \langle b_1 c_1 a_3 \rangle - \left\{ \begin{matrix} a_3 \\ a_3 \end{matrix} \right\} \langle a_1 a_2 c_1 c_2 \rangle - 2 \left\{ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \right\}, \end{aligned} \quad (a)$$

так как

$$A_z = \begin{bmatrix} a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 \cancel{c_1} c_1 c_1 c_2 c_2 c_2 \\ b_1 c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 \cancel{b_1} c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 \\ b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 \cancel{b_2} b_2 b_2 b_2 b_2 b_2 \\ a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 c_1 \cancel{c_1} \cancel{c_2} c_2 c_2 \\ b_1 c_1 a_3 b_1 c_1 a_3 b_1 \cancel{c_1} \cancel{b_1} c_1 a_3 \\ c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 c_2 \cancel{c_2} \cancel{c_2} c_2 c_2 \\ a_1 a_1 \cancel{a_1} a_2 a_2 \cancel{a_2} c_1 c_1 c_1 c_2 \cancel{c_2} c_2 \\ b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 c_1 \cancel{a_3} b_1 \cancel{c_1} a_3 \\ a_3 a_3 \cancel{a_3} a_3 a_3 \cancel{a_3} a_3 \cancel{a_3} a_3 \cancel{a_3} \cancel{a_3} \end{bmatrix}$$

Далее, согласно выражению (8.93), напомним соответствующие выражения для всех ребер графа  $\Gamma_z$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2A_{1ab}} (A_{1b} + A_{1c} - A_{1a}), \\ b_1 &= \frac{1}{2A_{1ab}} (A_{1a} + A_{1c} - A_{1b}), \\ c_1 &= \frac{1}{2A_{1ab}} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}), \\ a_2 &= \frac{1}{2A_{2ab}} (A_{2b} + A_{2c} - A_{2a}), \\ b_2 &= \frac{1}{2A_{2ab}} (A_{2a} + A_{2c} - A_{2b}), \\ c_2 &= \frac{1}{2A_{2ab}} (A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}), \\ a_3 &= \frac{A_3}{A_{3a}}. \end{aligned}$$

После подстановки величин в выражение (а), а затем в (8.95) получим формулу для блочной группы  $A$  графа  $\Gamma$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A} = & \mathbb{A}_{1ab} \mathbb{A}_{2ab} \mathbb{A}_{3a} \left\{ \left( \frac{\mathbb{A}_{1b}}{\mathbb{A}_{1ab}} + \frac{\mathbb{A}_{2b}}{\mathbb{A}_{2ab}} \right) \left( \frac{\mathbb{A}_{1a}}{\mathbb{A}_{1ab}} + \frac{\mathbb{A}_3}{\mathbb{A}_{3a}} \right) \times \right. \\
 & \times \left( \frac{\mathbb{A}_{2a}}{\mathbb{A}_{2ab}} + \frac{\mathbb{A}_3}{\mathbb{A}_{3a}} \right) - \frac{1}{4\mathbb{A}_{1ab}^2} (\mathbb{A}_{1a} + \mathbb{A}_{1b} - \mathbb{A}_{1c})^2 \times \\
 & \times \left( \frac{\mathbb{A}_{2a}}{\mathbb{A}_{2ab}} + \frac{\mathbb{A}_3}{\mathbb{A}_{3a}} \right) - \frac{1}{4\mathbb{A}_{2ab}^2} (\mathbb{A}_{2a} + \mathbb{A}_{2b} - \mathbb{A}_{2c})^2 \times \\
 & \times \left. \left( \frac{\mathbb{A}_{1a}}{\mathbb{A}_{1ab}} + \frac{\mathbb{A}_3}{\mathbb{A}_{3a}} \right) - \frac{\mathbb{A}_3^2}{\mathbb{A}_{3a}^2} \left( \frac{\mathbb{A}_{1b}}{\mathbb{A}_{1ab}} + \frac{\mathbb{A}_{2b}}{\mathbb{A}_{2ab}} \right) \right\} - \\
 & - \frac{\mathbb{A}_3}{2} (\mathbb{A}_{1a} + \mathbb{A}_{1b} - \mathbb{A}_{1c})(\mathbb{A}_{2a} + \mathbb{A}_{2b} - \mathbb{A}_{2c}).
 \end{aligned} \tag{8.96}$$

**Метод 1.** Дополнительное блочная группа скелета  $\Gamma_0$  (рис. 8.13, в) равна

$$A_0^d = [a_1 \ a_2] [b_1 \ b_2 \ a_3] = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_3 & b_1 & b_2 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, блочная группа  ${}^2A$  графа  $\Gamma$  имеет вид

$${}^2A = \left[ A_0^d \right] \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_{1a} & A_{1b} & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_{2b} & A_2 & A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} & A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

а матрица порядков равна

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$X \ X$

Поэтому

$${}^2A^M = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1a} & A_1 & A_1 \\ A_2 & A_2 & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_{3a} & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix},$$

$${}^2 A' = A_3 \begin{bmatrix} A_{1a} & A_{1b} \\ A_{2b} & A_{2a} \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} [b_{1(1)}c_{1(1)}][a_{1(1)}c_{1(1)}] \\ [a_{2(1)}c_{2(1)}][b_{2(1)}c_{2(1)}] \end{bmatrix}^s =$$

$$= (A_3 A_{1a} A_{2a} + A_{1b} A_{2a}) - 2 \begin{Bmatrix} c_{1(1)} \\ c_{2(1)} \end{Bmatrix} A_3.$$

Дендритные веса равны

$$c_{1(1)} = \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c}),$$

$$c_{2(1)} = \frac{1}{2}(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}),$$

так как  $p_1 + 2 - v_{1z} = 0$  и  $p_2 + 2 - v_{2z} = 0$ . Следовательно, полная блочная группа  $\bar{A}$  модуль-графа  $\Gamma$  имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{A} = \bar{A}^M + \bar{A}' = & A_{1ab}A_2A_3 + A_{1a}A_2A_{3a} + A_1A_{2ab}A_3 + A_1A_{2a}A_{3a} + \\ & + A_{1a}A_{2b}A_3 + A_{1ab}A_{2a}A_3 - \frac{A_3}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c}) \end{aligned} \quad (8.97)$$

Заметим, что результат (8.97) имеет более простую форму, чем в случае расчета вторым методом (8.96). Кроме того, несмотря на то что второй метод теоретически кажется более простым, практически при расчете этим методом требуется большее число вычислений.

Преобразование результатов по второму методу к выражениям, полученным первым методом, производится по формулам перехода.

Для двух произвольных путей  $a$  и  $c$  графа, соединяющих две различные пары вершин (рис. 8.14), формула перехода имеет вид

$$A_{ac} = \frac{1}{A} \left\{ A_a A_c - \frac{1}{4} (A_e + A_f - A_b - A_d)^2 \right\}. \quad (8.98)$$

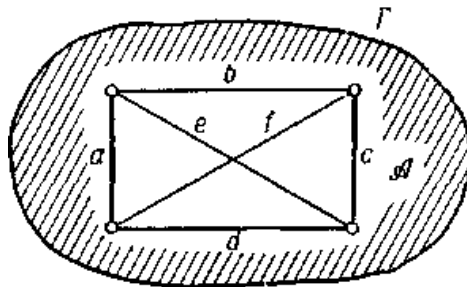


Рис. 8.14

Из этой формулы непосредственно следует формула перехода для двух произвольных прилегающих путей  $a$  и  $b$  графа (рис. 8.15)

$$A_{ab} = \frac{1}{A} \left\{ A_a A_{bc} - \frac{1}{4} (A_a + A_b - A_c)^2 \right\}. \quad (8.99)$$

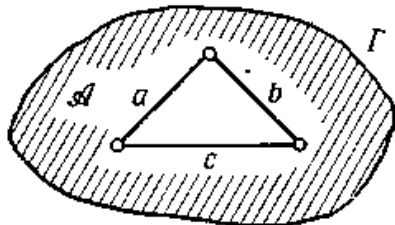


Рис. 8.15

Подставив формулу (8.99) в (8.96), получим результат (8.97). Следует отметить, что, используя формулы перехода (8.98) и (8.99), можно уменьшить порядок производных в выражениях блочных групп модулей, входящих в выражения для блочных групп модуль-графов. Например, в формуле (8.97) блочную группу  $A_{lab}$  можно заменить выражением

$$A_{lab} = \frac{1}{A_1} \left\{ A_{1a} A_{1b} - \frac{1}{4} (A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})^2 \right\},$$

а блочную группу  $A_{2ab}$  — аналогичным выражением.

### 8.4. Деревья и деревья высших рангов модуль-графа

Как известно, дерево — это множество ребер связного подграфа, включающее все вершины графа и не содержащее ни одного контура. Блочной группой дерева будет один столбец блочной группы  $A$ . Таким образом, число  $T$  деревьев графа равна количеству столбцов блочной группы  $A$ . Если вместо каждого элемента  $a_{ij}$  блочной группы  $A$  подставить единицу и вычислить

$$\det_I A = \sum_{j=1}^T \prod_{i=1}^m (\alpha_{ij} = 1), \quad (8.100)$$

то получим число деревьев

$$T = \det_I A.. \quad (8.101)$$

Если  $a_{ij}$  блочная группа  $A$  графа неизвестна, то число деревьев можно определить по формуле Трента (99) или (100) из раздела 6.8.3.

Нахождение определителей (99) или (100) из раздела 6.8.3 для графов с большим числом вершин или независимых контуров весьма трудоемко. Поэтому имеет смысл разделить граф на подграфы (модули), рассчитать число  $T_i$  этих подграфов и далее определить число  $T$  деревьев всего графа, выразив его с помощью  $T_i$ .

Используя формулу (8.101), легко доказать, что для определения числа  $T$  деревьев модуль-графа, состоящего из подграфов, пригодна формула полной блочной группы  $A$  модуль-графа, записанная с помощью блочных групп  $A_i$  отдельных подграфов. Тогда если известна полная блочная группа  $A$  модуль-графа

$$A = f(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (8.102)$$

то количество деревьев  $T$  выражается той же функцией

$$T = f(T_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (8.103)$$

где  $T_i$  — число деревьев подграфа  $G_i$ .

Аналогичная зависимость справедлива для числа  $T_k$   $k$ -деревьев ( $k$ -деревом называется множество ребер, образованное  $k$  раздельными связными подграфами, содержащими все вершины графа и не содержащими ни одного контура).  $k$ -деревья вводятся для данных  $k - 1$  различных пар вершин графа и представляют собой геометрическое изображение столбцов блочной группы

$$\frac{\partial^{k-1} A}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_{k-1}} = A_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}}, \quad (8.104)$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  обозначают произвольные пути между данными  $k - 1$  различными парами вершин графа.

Заметим, что  $k$ -деревья состоят из тех же самых ребер, что и деревья графа с замкнутыми  $k - 1$  путями, относительно которых рассматриваются  $k$ -деревья. Следовательно, число  $k$ -деревьев равно числу деревьев графа с замкнутыми  $k - 1$  путями. Если

$$\begin{aligned} A &= A, \\ A_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} &= f(A_i), \quad i = 1, 2, \dots, g, \end{aligned} \quad (8.105)$$

то число  $T_k$   $k$ -деревьев блок-графа равно

$$T_k = f(T_i), \quad i = 1, 2, \dots, g. \quad (8.106)$$

Аналогично определяется число  $T_s$  деревьев модуль-графа, содержащего  $s$  различных путей  $a_1, a_2, \dots, a_s$ , не имеющих общих ребер.

Эти деревья представляют собой геометрическое изображение столбцов блочной группы

$$\bar{A}_{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{array} \right\}, \quad (8.107)$$

где

$$a_i = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{in_i} \end{array} \right\}, \quad \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i} \text{ — обозначения ребер, образующих}$$

путь  $a_i$ .

$$\bar{A} = A, \quad \bar{A}_{a_1 a_2 \dots a_s} = \frac{\partial^s A}{\partial a_1 \partial a_2 \dots \partial a_s}$$

Способ расчета числа деревьев и  $k$ -деревьев графа проиллюстрируем следующими примерами.

**Пример 8.12.** Рассчитаем число  $T$  деревьев графа (рис. 8.16, а).

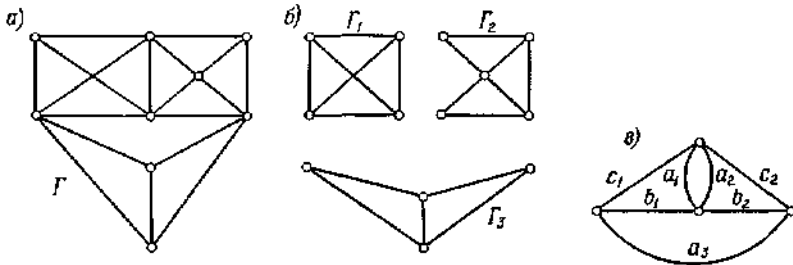


Рис. 8.16.

Граф содержит 9 вершин, т. е. для отыскания числа  $T$  следует рассчитать определитель 8-го порядка

3	-1	0	0	0	-1	0	0
-1	5	-1	0	-1	-1	0	0
0	-1	3	-1	-1	0	0	0
0	0	-1	5	-1	-1	-1	-1
0	-1	-1	-1	4	-1	0	0
-1	-1	0	-1	-1	5	0	0
0	0	0	-1	0	0	3	-1
0	0	0	-1	0	0	-1	3

Раскрытие этого определителя достаточно трудоемко. С целью упрощения расчетов разделим исходный граф на три части (рис. 8.16, б), т. е. будем рассматривать граф  $G$  как модуль-граф, состоящий из трех подграфов  $G_1, G_2, G_3$ . Согласно уравнению (8.97), полная блочная группа этого графа равна (рис. 8.16, в)

$$A = A_3[A_{1ab}A_2 + A_1A_{2ab} + A_{1a}A_{2b} + A_{1b}A_{2a} - \frac{1}{2}(A_{1a} + A_{1b} - A_{1c})(A_{2a} + A_{2b} - A_{2c})] + A_{3a}(A_{1a}A_2 + A_{2a}).$$

В соответствии с выражением (8.103) число деревьев  $T$  этого графа равно

$$T = T_3[T_{1ab}T_2 + T_1T_{2ab} + T_{1a}T_{2b} + T_{1b}T_{2a} - \frac{1}{2}(T_{1a} + T_{1b} - T_{1c})(T_{2a} + T_{2b} - T_{2c})] + T_{3a}(T_{1a}T_2 + T_1T_{2a}), \quad (a)$$

где  $T_1, T_2, T_3$  — число деревьев отдельных подграфов  $G_1, G_2, G_3$ ;  $T_{1a}, T_{1b}, T_{1c}$  — число 2-деревьев подграфа  $G_1$  относительно путей  $a_1, b_1, c_1$ ;  $T_{2a}, T_{2b}, T_{2c}$  — число 2-деревьев подграфа  $G_2$  относительно путей  $a_2, b_2, c_2$ ;



$T_{1ab}$  ( $T_{2ab}$ ) — число 3-деревьев подграфа  $\Gamma_1$  ( $\Gamma_2$ ) относительно путей  $a_1$  и  $b_1$  ( $a_2$  и  $b_2$ ).

Обозначения путей подграфов указаны на рис. 8.16, в. Следует отметить, что числа 2- и 3-деревьев равны числам деревьев подграфов с соответствующими замкнутыми путями.

Определим число деревьев отдельных подграфов.

Имеем

$$T_1 = 4^2 = 16 \quad (\text{полный граф}),$$

$$T_2 = \begin{vmatrix} 3-1 & 0 \\ -1 & 3-1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 3 - 3 = 21 \quad (\text{планарный граф}),$$

$$T_3 = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \quad (\text{планарный граф}),$$

$T_{1ab} = 3$  (граф с двумя вершинами),

$$T_{2ab} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 11,$$

$$T_{1a} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad T_{1b} = 8, \quad T_{3a} = \begin{vmatrix} 3-1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$T_{2a} = \begin{vmatrix} 3-1-1 \\ -1 & 3-1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 1 - 1 - 3 - 3 - 4 = 24,$$

$$T_{2b} = \begin{vmatrix} 2-1-1 \\ -1 & 3-1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 1 - 1 - 3 - 2 - 4 = 13,$$

$$T_{1c} = 8, \quad T_{2c} = \begin{vmatrix} 3-1 & 0 \\ -1 & 4-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 24 - 3 - 2 = 19.$$

0-12 Подставив эти величины в выражение (а), получим

$$T = 8[3 \cdot 21 + 16 \cdot 11 + 8 \cdot 13 + 8 \cdot 24 - \frac{1}{2} (8 + 8 - 8) (24 + 13 - 19)] + 8(8 \cdot 21 + 16 \cdot 24) = 8120.$$

Рассчитаем также число  $T_{(2)a_1}$  2-деревьев графа  $\Gamma$  (рис. 8.16, а) относительно пути  $a_1$  (рис. 8.16, в). Для этого нужно определить алгебраическую производную  $\partial A/\partial a_1$ . На основе скелета графа  $\Gamma$  имеем  $A^d_0 = [a_1 a_2] [b_1 b_2 a_3]$ ,

поэтому

$$\frac{\partial^2 A}{\partial a_1} = \begin{bmatrix} A^d_0 \\ [a_1] \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & a_3 \end{bmatrix} \downarrow \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1ab} & A_{1ab} & A_{1ab} \\ A_{2a} & A_{2ab} & A_{2a} \\ A_3 & A_3 & A_{3a} \end{bmatrix}.$$

Таблица порядков имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в ней не содержится идентичных столбцов, то

$$\bar{A}_{a_1} = \frac{\partial^s (A)}{\partial a_1} = \bar{A}_3 (A_{1ab} \bar{A}_{2a} + \bar{A}_{1a} A_{2ab}) + \bar{A}_{1b} \bar{A}_{2a} \bar{A}_{3a},$$

и тогда число 2-деревьев равно

$$T_{(2)a_1} = T_3 (T_{1ab} T_{2a} + T_{1a} T_{2ab}) + T_{1a} T_{2a} T_{3a} = 8(3 \cdot 24 + 8 \cdot 11) + 8 \cdot 24 \cdot 8 = 2816.$$

**Пример 8.13.** Рассчитаем число деревьев цепного графа (рис. 8.17, а) с  $n$  четырехполосными модулями одинаковой структуры. Блочные группы модулей обозначим

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}.$$

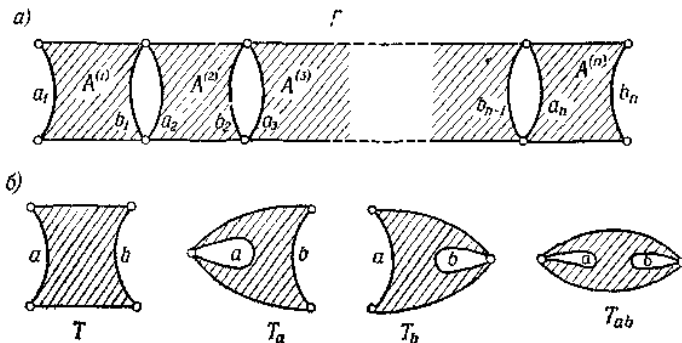


Рис. 8.17. Каскадный модуль-граф: а) общий вид; б) модули в разных стадиях закорачивания.

Блочную группу графа определим следующим образом:

$${}^2A_n = \left[ \prod_{i=1}^{n-1} b_i a_{i+1} \right] \downarrow \begin{bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = [b_{n-1} a_n] \downarrow \begin{bmatrix} A_{n-1} \\ A^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1, b_1} & A_{n-1} \\ A^{(n)} & A^{(n)}_{a_n} \end{bmatrix},$$

где  $A_{n-1}$  — блочная группа графа без последнего модуля  $\Gamma^{(n)}$ .  
Поскольку таблица порядков

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

не содержит идентичных столбцов, то

$$\bar{A}_n = \bar{A}_{n-1, b_{n-1}} \bar{A}^{(n)} + \bar{A}_{n-1} \bar{A}^{(n)}_{a_n}.$$

Число  $T_n$  деревьев графа  $\Gamma$  равно

$$T_n = T_{n-1, b_{n-1}} T^{(n)} + T_{n-1} T^{(n)}_{a_n},$$

где  $T_{n-1, b_{n-1}}$  — число деревьев графа без последнего модуля  $\Gamma^{(n)}$ , замкнутого со стороны выхода;  $T^{(n)}$  — число деревьев последнего модуля  $\Gamma^{(n)}$ ;  $T_{n-1}$  — число деревьев графа без последнего модуля  $\Gamma^{(n)}$ ;  $T^{(n)}_{a_n}$  — число деревьев модуля  $\Gamma^{(n)}$ , замкнутого на входе.

Предполагая структуру всех модуля (подграфов) одинаковой, приведенная формула примет вид

$$T_n = T_{n-1, b_{n-1}} T + T_{n-1} T_a, \tag{а}$$

где  $T$  — число деревьев каждого модуля,  $T_a$  — число деревьев каждого модуля, замкнутого на входе (рис. 8.17, б).

Аналогично получим выражение числа деревьев графа, замкнутого на выходе:

$$T_{nb_n} = T_{n-1, b_{n-1}} T_b + T_{n-1} T_{ab}, \tag{б}$$

а также выражение для числа деревьев графа  $\Gamma$  с замкнутым входом

$$T_{na_1} = T_{n-1, a_2} T_a + T_{n-1} T_{ab}, \tag{в}$$

где  $T_b$  — число деревьев каждого модуля, замкнутого на выходе;  $T_{ab}$  — число деревьев каждого модуля, замкнутого на входе и на выходе (рис. 8.17, б).

Раскрывая рекуррентные формулы (а) — (в), получим выражение для числа деревьев  $T_n$ , а также 2-деревьев  $T_{nb_n}$  и  $T_{na_1}$  цепного графа  $\Gamma$ , состоящего из  $n$  изоморфных подграфов

$$T_n = T(T^{n-1}_a + T^{n-2}_a T_b + T^{n-3}_a T_{2b_2} + T^{n-4}_a T_{3b_3} + \dots),$$

$$T_{nb_n} = T^n_b + T_{ab} (T^{n-2}_b T + T^{n-3}_b T_2 + T^{n-4}_b T_3 + \dots),$$

$$T_{na_1} = T^n_a + T_{ab} (T^{n-2}_a T + T^{n-3}_a T_2 + T^{n-4}_a T_3 + \dots),$$

где  $n — k \geq 0$ ;  $T$  — число деревьев одного подграфа;  $T_a$  — число 2-деревьев подграфа относительно пути  $a$  (или число деревьев подграфа с замкнутым путем  $a$ );  $T_b$  — число 2-деревьев подграфа относительно пути  $b$  (или число деревьев подграфа с замкнутым путем  $b$ );  $T_{ab}$  — число 3-деревьев подграфа относительно путей  $a$  и  $b$  (или число деревьев подграфа с замкнутыми путями  $a$  и  $b$ );  $T_{nb_n}$  — число 2-деревьев графа  $\Gamma$  относительно пути  $b_n$  (или число деревьев графа с замкнутым выходом);  $T_{na_1}$  — число 2-деревьев графа  $\Gamma$  относительно пути  $a_1$  (или число деревьев графа, замкнутого на входе).

Пусть, например, подграфы графа  $\Gamma$  имеют  $T$ -образный вид, тогда  $T = 1$ ,  $T_a = 2$ ,  $T_b = 2$ ,  $T_{ab} = 3$ . Следовательно, для  $n = 2, 3, 4, 5$  имеем  $T_2 = 2 + 2 = 4$ ,

$$T_{2b_2} = 2^2 + 3 = 7,$$

$$T_3 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 7 = 15,$$

$$T_{3b_3} = 2^3 + 3(2 + 4) = 26,$$

$$T_4 = 2^3 + 2^2 \cdot 2 + 2 \cdot 7 + 26 = 56,$$

$$T_{4b_4} = 2^4 + 3(2^2 + 2 \cdot 4 + 15) = 97,$$

$$T_5 = 2^4 + 2^3 \cdot 2 + 2^2 \cdot 7 + 2 \cdot 26 + 97 = 209,$$

$$T_{5b_5} = 2^5 + 3(2^3 + 2^2 \cdot 4 + 2 \cdot 15 + 56) = 362.$$

Из приведенных примеров расчетов числа деревьев графа очевидны преимущества алгебры полных блочных групп. Также очевидно, что при расчете блочных групп графов, содержащих большое число вершин и ребер, деление графов на подграфы и применение методов расчета блочных групп модуль-графов значительно упрощают расчеты. При большом количестве деревьев графа (т. е. столбцов блочной группы) отыскание идентичных столбцов — очень трудоемкая задача (это операция сортировки на ЭВМ), которая в значительной степени облегчается при расчете полных блочных групп модуль-графов.

На этом мы заканчиваем рассмотрение алгебры блочных групп и переходим к моделированию, анализу и синтезу организации структур различных систем с использованием блочных групп и модуль–графов. Но прежде чем перейти к вопросам моделирования, анализа и синтеза организации структур с использованием блочных групп и модуль–графов рассмотрим основы представления элементов структур.

## **9. Основы представления элементов структур**

### **9.1. Общие положения**

Любая система может быть представлена в виде цепи той или иной организованной структуры, в общем случае разомкнутой или замкнутой, состоящей из ряда структурных элементов или модулей. В этих системах и модулях осуществляются определенные процессы преобразования или изменения величин различной физической природы в другие величины, причем преобразования в электрические величины, в частности в напряжение или ток, имеют особенно важное значение в организации технических систем.

Таким образом, в технической системе каждый элемент или модуль выполняет совершенно определенные функции, большинство из которых связано с преобразованиями энергии из одной формы в другую. Характер этих преобразований определяется многими причинами, например, физической природой величины, ее абсолютным значением, допустимой погрешностью определения и выбранным методом, условиями, в которых протекает процесс функционирования, и т. д.

Преобразование энергии данной формы в энергию электромагнитную, а затем, чаще всего, в механическую лежит в основе функционирования подавляющего большинства технических систем.

Работа технических систем неразрывно связана со свойствами входящих в них элементами и особенностями их действия.

Функционирование большинства технических систем на двух общих принципах: законе сохранения энергии и обратимости, или реверсивности действия, находящем отражение в так называемом принципе взаимности.

Эти общие фундаментальные законы позволяют создать и соответствующую общую теорию организации, представляя такие

обратимые функциональные элементы (модули) в виде пассивных четырехполюсников со сторонами различной физической природы. Такая теория дает возможность описать основные свойства функциональных элементов (модулей), не прибегая до определенного момента к рассмотрению конкретных функциональных элементов (модулей). Таким образом, оказывается ненужным то проникновение в частности, которое на определенном этапе изучения предмета заслоняет главные вопросы множеством второстепенных.

Уравнения функциональных элементов (модулей)-четырёхполюсника справедливы в пределах линейных участков их характеристик, а коэффициенты уравнений в исходной форме представляют собой обобщенные сопротивления — электрические, механические, тепловые и т. д. Понятие обобщенных сопротивлений связано с представлением об обобщенных силах и скоростях, а в зависимости от аргументов, которыми могут быть время  $t$ , комплекс  $j\omega$  или оператор  $p$ , сопротивления также оказываются соответствующими функциями этих аргументов, причем самым широким обобщением является понятие об операторном сопротивлении, поскольку другие формы сопротивлений, такие как переходное и комплексное, могут быть из него получены.

Важные результаты дает установление общей теорией организации взаимосвязи сторон, имеющее следствием появление вносимого сопротивления, изменяющего величину входного и выходного сопротивлений функционального элемента (модуля).

В качестве коэффициентов функциональных уравнений элементов (модулей) будут фигурировать обобщенные комплексные сопротивления, зависящие от частоты. Из этого будем предполагать, что и все свойства функциональных элементов (модулей), такие, как их входные сопротивления, чувствительности, к. п. д. и т. д. будут также функциями частоты. Сказанное означает, что представляется возможность исследовать не только параметры функциональных элементов (модулей), но и их характеристики, такие как частотные и переходные (временные). Целесообразный метод исследования этих характеристик основан на использовании существующих аналогий между дифференциальными уравнениями, описывающими поведение как механических, так и электрических систем. Метод электромеханических аналогий чрезвычайно важен еще и потому, что он позволяет распространять известные для электрических систем результаты на аналогичные механические устройства.

Общая теория организации основывается на энергетических представлениях, устанавливающих связи между выражениями энергии, запасенной в системе, и возникающими в ней силами.

## **9.2. Понятие об энергии и основные ее формы**

Понятие об энергии выработалось в середине XIX в. при поисках тех связей, которые были позже обнаружены в физике, между различными формами движения материи. Понятие об энергии тесно связано историей открытия закона о превращении и сохранении энергии. Этот закон вначале рассматривался, чаще всего, как выражение простых количественных соотношений, затем было отмечено методологическое значение закона и подчеркивалось, что здесь важна не только количественная, но еще более качественная сторона.

Как отмечалось, все существующие формы энергии качественно отличны друг от друга, а это означает, что они принципиально не могут быть сведены одна к другой, но в то же время эти формы составляют единство, воплощаясь в движущейся материи. Здесь единство заключается не в качественной однородности, а в возможности перехода одной формы движения в другую, т. е. с этой точки зрения энергия характеризует взаимосвязь всех форм движения в их взаимных преобразованиях.

Рассматривая переходы различных форм движения из одной в другую, ряд ученых отмечали, что при всех этих явлениях форма движения, начинающая процесс и превращающаяся благодаря ему в другую форму, совершает работу, и притом такое количество ее, которое соответствует ее собственному количеству. Таким образом, работа это изменение формы движения, рассматриваемое с его количественной стороны.

Обычно энергию системы можно представить в виде произведения двух сомножителей, одним из которых является обобщенная сила, а другим — обобщенная координата.

Заметим, что силы, координаты и скорости оказываются не только средством исследования организации структур, но одновременно они же являются важнейшими функциональными объектами организации структур, как это имеет место, например, при измерениях разности потенциалов, количества электричества, токов, механических сил, моментов, линейных и угловых перемещений, давлений, объемов и многих других величин.

Во всех этих случаях понятие силы имеет особенно важное теоретическое и практическое значение в теории организации, хотя всегда следует иметь в виду то обстоятельство, что прибегая к понятию силы, мы не столько выражаем наше знание, а его недостаточность о природе закона и способов его действия.

Вне зависимости от этого, понятие о силах оказывалось для науки чрезвычайно важным. Рассматривая этот вопрос, исследователи

отмечали, что переносящееся движение в определенной степени поддается количественному определению, так как оно проявляется в двух телах, из которых одно может служить единицей меры для измерения движения в другом. Измеримость движения и придает категории силы ее ценность. Без этого она не имеет никакой ценности. Таким образом, чем более доступно измерению движение, тем более пригодны при исследовании категории силы и ее проявления. Совокупность известных способов организации различных видов энергии с использованием тех или иных методов является фундаментом, на котором строится теория организации, а наличие определенных математических связей между силами и энергией служит основой общей теории познания.

Известно, что энергия всякой системы, обладающей данным числом степеней свободы, в общем случае является суммой потенциальной и кинетической энергии. В частных случаях энергия системы может быть только потенциальной или только кинетической.

В реальных системах всегда имеют место также и необратимые потери энергии, т. е. ее рассеяние. В теоретической механике доказывается, что потенциальная энергия системы, совершающей малые колебания у положения равновесия, является однородной квадратичной функцией обобщенных координат.

Обозначив потенциальную энергию такой системы через  $\Pi$ , а обобщенные координаты через  $g_b$ , выражение для потенциальной энергии можно записать в следующем виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}g^2_1 + c_{22}g^2_2 + \dots) + c_{12}g_1g_2 + c_{23}g_2g_3 + \dots \quad (9.1)$$

Так как система линейна, то коэффициенты  $c_{ik}$  от координат не зависят и являются постоянными величинами; они имеют смысл и размерность упругости и обычно называются квазиупругими.

Кинетическая энергия  $T$  также может быть представлена в виде однородной квадратичной функции обобщенных скоростей с некоторыми постоянными коэффициентами  $m_{ik}$ . Если обозначить обобщенную скорость через

$$\dot{g}_i = \frac{dg_i}{dt},$$

то выражение для кинетической энергии примет форму, внешне аналогичную равенству (9.1), т. е.

$$T = \frac{1}{2} (m_{11}\dot{g}^2_1 + m_{22}\dot{g}^2_2 + \dots) + m_{12}\dot{g}_1\dot{g}_2 + m_{23}\dot{g}_2\dot{g}_3 + \dots \quad (9.2)$$



В этом уравнении коэффициенты  $m_{ik}$  имеют смысл и размерность массы и называются инерционными.

Наконец, необходимо остановиться на выражении энергии, рассеиваемой в системе.

В механике часто рассматривается рассеяние энергии в системах, в которых силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости. Для таких систем уменьшение полной энергии в единицу времени из-за наличия рассеяния может быть представлено таким образом:

$$\frac{d(T + \Pi)}{dt} = -2\Phi_R,$$

здесь  $\Phi_R$  — так называемая функция рассеяния, или диссипативная функция, которая может быть выражена:

$$\Phi_R = \frac{1}{2} R \dot{g}^2$$

В данном случае коэффициент  $R$  для линейных систем не зависит от координат и является величиной постоянной.

Из написанного выше равенства следует, что уменьшение энергии системы в единицу времени равно удвоенной величине функции рассеяния.

Выражение для энергии, теряемой в системе с несколькими степенями свободы, может быть также получено в виде однородной квадратичной функции обобщенных скоростей. В этом случае общее выражение функции рассеяния может быть записано в следующем виде:

$$\Phi_R = \frac{1}{2} (R_{11} \dot{g}_1^2 + R_{22} \dot{g}_2^2 + \dots) + R_{12} \dot{g}_1 \dot{g}_2 + R_{23} \dot{g}_2 \dot{g}_3 + \dots \quad (9.3)$$

В этом уравнении коэффициенты  $R_{ik}$  имеют смысл и размерность сопротивления потерь. В случае механических систем под механическим сопротивлением понимается отношение силы к скорости.

Обобщение понятия сопротивления и распространение его на процессы неэлектрической природы играет важную роль в теории организации и подробнее рассмотрено далее.

### **9.3. Обобщенные силы, действующие в системе**

Для нахождения сил, действующих в системе, широко используются уравнения Лагранжа второго рода. Являясь важнейшим обобщением, эти уравнения позволяют достаточно просто решать сложные задачи динамики несвободной системы. Такое упрощение оказывается возможным потому, что движение рассматривается при помощи

обобщенных координат, т. е. любых рационально выбранных и независимых друг от друга аргументов, изменение которых полностью определяет движение. Необходимое число обобщенных координат определяется числом степеней свободы и, так как это число для реальных технических систем обычно мало, то и число уравнений также оказывается малым.

Кроме того, столь общий подход к решению задач механики позволяет использовать эти уравнения при решении немеханических вопросов, поскольку допускает широкое толкование движения, как изменения вообще. Такого рода обобщение было сделано впервые Максвеллом, применившим уравнения Лагранжа к изучению качественно совершенно иных форм движения, какими являются электромагнитные явления.

При таком подходе к уравнениям Лагранжа в качестве обобщенных координат могут выбираться любые физические величины, определяющие состояние рассматриваемой системы, являющейся носителем того или иного вида энергии. В этом случае обобщенная сила может быть найдена как коэффициент при обобщенном перемещении в соответствующем выражении работы.

Таким образом, сила так же, как и координата, может иметь различную физическую природу.

Уравнение Лагранжа для системы с рассеянием может быть записано, например, в таком виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{g}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial g_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial g_i} = Q_i = - \frac{\partial \Phi_R}{\partial \dot{g}_i}, \quad (9.4)$$

где  $Q_i$  — обобщенная сила.

В реальных системах чаще всего происходит преобразование либо потенциальной, либо кинетической энергии. Гораздо реже одновременно преобразуются и кинетическая, и потенциальная энергия. В соответствии с этим рассмотрим три различных случая.

*Система обладает только запасом потенциальной энергии.* В этом случае обобщенные силы безотносительно к их знаку могут быть найдены из общего выражения

$$Q_i = \frac{\partial \Pi}{\partial g_i}. \quad (9.5)$$

Написанное равенство может быть использовано для вычисления моментов или сил, возникающих в таких преобразователях, как, например, электростатические измерительные механизмы.





выражаются в виде отношения обобщенной силы к обобщенной скорости. Иначе говоря, как это следует из написанных равенств,

$$Q_i = \sum_k Z_{ik} \dot{g}_k. \quad (9.12)$$

Для нелинейной системы могут быть получены равенства, аналогичные уравнениям (9.8), но выраженные через скорости.

Рассмотрим теперь третий, наиболее общий случай.

*Система обладает запасом потенциальной и кинетической энергии и, кроме того, часть энергии рассеивается.* В этом случае возможно все три составляющие энергии отнести к внутренней энергии системы и считать полную энергию равной их сумме. Такой подход позволяет использовать уравнения Лагранжа в виде (9.4). Но можно пойти и по другому пути; так как операция дифференцирования по времени сама по себе независима, то, обозначая  $d/dt$  оператором  $p$ , возможно представить силу  $Q_i$  символическим операторным равенством:

$$Q_i = \sum_k (p^2 m_{ik} + p R_{ik} + c_{ik}) g_k.$$

С таким символическим уравнением можно действовать как с алгебраическим и поэтому легко найти отношение

$$\zeta_{ik} = \frac{Q_i}{g_k} = p^2 m_{ik} + p R_{ik} + c_{ik}. \quad (9.13)$$

Таким образом,

$$Q_i = \sum_k \zeta_{ik} g_k. \quad (9.12a)$$

Коэффициент  $\zeta_{ik}$  имеет смысл эквивалентной обобщенной упругости, как это следует из сопоставления с уравнениями (9.6).

Такая эквивалентная обобщенная упругость, являющаяся функцией оператора  $p$ , формально может заменить коэффициенты  $c_{ik}$  в уравнениях (9.6), делая их пригодными для исследования различных реальных систем.

Коэффициенты  $\zeta_{ik}$ , являясь символическими, так как они содержат оператор, не могут служить для вычисления энергии системы, но их возможно применить для нахождения сил, если воспользоваться системой уравнений, аналогичных уравнениям (9.6), т. е.

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \zeta_{11}g_1 + \zeta_{12}g_2 + \zeta_{13}g_3 + \dots \\ Q_2 &= \zeta_{21}g_1 + \zeta_{22}g_2 + \zeta_{23}g_3 + \dots \\ Q_3 &= \zeta_{31}g_1 + \zeta_{32}g_2 + \zeta_{33}g_3 + \dots \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= \zeta_{n1}g_1 + \zeta_{n2}g_2 + \zeta_{n3}g_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9.6a)$$

Сопоставляя равенства (9.12) и (9.12a), легко определить связь между их коэффициентами. Действительно, равенство (9.12) можно переписать так:

$$\sum Z_{ik} \dot{g}_k = \sum Z_{ik} \frac{dg_k}{dt} = \sum pZ_{ik} g_k.$$

Сравнивая этот результат с равенством (9.12a), находим

$$\zeta_{ik} = pZ_{ik}. \quad (9.14)$$

Аналогичное равенство имеет место и для коэффициентов  $c_{ik}$ :

$$c_{ik} = pZ_{ik}. \quad (9.14a)$$

Уравнения (9.11), имеющие в качестве коэффициентов обобщенные сопротивления  $Z_{ik}$ , аналогичны по форме тем уравнениям, которые получаются при анализе электрических цепей методом контурных токов. В этом легко убедиться, поскольку для любой электрической цепи со многими степенями свободы справедлива система уравнений следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1n}I_n; \\ E_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2n}I_n; \\ &\dots\dots\dots \\ Q_k &= Z_{k1}I_1 + Z_{k2}I_2 + Z_{k3}I_3 + \dots + Z_{kk}I_k; \\ &\dots\dots\dots \\ Q_n &= Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + Z_{n3}I_3 + \dots + Z_{nn}I_n. \end{aligned} \right\} \quad (9.15)$$

где  $E_k$  — электродвижущая сила, действующая в контуре  $k$ ;

$Z_{kk}$  — собственное сопротивление контура  $k$ ;

$Z_{ik}$  — взаимное сопротивление контуров  $i$  и  $k$ ;

$I_k$  — контурный ток.

Эти уравнения соответствуют равенствам (9.11), причем аналогами сил служат э. д. с, а аналогами скоростей — токи.

Уравнения многоконтурной цепи могут быть приведены снова к виду уравнений Лагранжа, т. е. от уравнений цепи можно вернуться к их истокам и показать, что мощность, подводимая к системе всеми

действующими в ней э. д. с, затрачивается на приращение магнитной и электрической энергии, запасенной в цепи, и частично рассеивается в виде тепла.

Если в написанных уравнениях (9.11) и (9.15) исключить все промежуточные неизвестные, то останутся уравнения, содержащие только входные и выходные величины рассматриваемой системы. Так осуществляется переход к уравнениям электрических, механических, электромеханических и других четырехполюсников. Такой переход возможен во всех случаях, когда неэлектрическим величинам можно придавать смысл сил, перемещений или скоростей.

Развитая на этих основах теория охватывает широкий круг преобразователей энергии, но как и для электрических цепей, здесь требуется соблюдение принципа взаимности, приводящего к равенству  $Z_{ik}=Z_{ki}$ . Последнее означает, что теория предполагает обратимость или реверсивность их действия.

Рассмотрим вопрос, какое же число уравнений оказывается практически необходимым для описания системы. Известно, что внешние силы действуют не по всем каналам, по которым возможно воздействие на систему, а только по некоторым. Если число их  $N$  меньше числа степеней свободы системы  $n$ , то оставшиеся ( $N - n$ ) степени свободы следует считать внутренними степенями свободы, и только по ним будет происходить обмен энергией между частями системы.

Таким образом, если  $N$  каналов, по которым происходит обмен энергии с внешней средой, назвать сторонами, то независимо от числа степеней свободы система может быть описана только  $N$  уравнениями, что значительно упрощает дело, поскольку число сторон большей частью оказывается равно двум.

Из приведенных выше соображений следует, что теория организации строится на представлении их функциональных элементов (модулей) в виде четырехполюсников со сторонами, имеющими, в общем случае, различную физическую природу.

Это означает, что метод изучения организации структур аналогичен методу, используемому в теории четырехполюсников.

Уравнения (9.11) и (9.15) справедливы для систем, обладающих запасом кинетической энергии. Эти уравнения в качестве коэффициентов содержат сопротивления, причем понятие сопротивления распространяется на системы, являющиеся носителями различных видов энергии. Данное обобщение делает понятие сопротивления одним из основных в теории организации структур. В силу этого оказывается целесообразным рассмотреть вопрос о понятии сопротивления более подробно, что мы и сделаем в следующем параграфе.

## **9.4. Различные формы понятия сопротивления**

Важную роль в организации структур играют элементы, которые выполняют функции сопротивления.

Представление о сопротивлении как отношении к току напряжения, приложенного к цепи, широко известно из теоретической электротехники.

Впоследствии, особенно с развитием технической акустики, представление о сопротивлении было перенесено в механику, где под механическим сопротивлением стали понимать отношение силы к вызванной ею скорости. Введение представления о механическом сопротивлении и единице его измерения явилось основой самостоятельного метода решения задач механики — метода сопротивлений.

Метод сопротивлений основан на распространении закона Ома на механические системы и позволяет решать многие задачи механики, которые могут быть сведены к двум главным типам:

- 1) задачи на определение движения по заданным силам;
- 2) задачи на определение действующих сил по заданному движению.

Понятие о сопротивлении в дальнейшем стало находить применение также и в других областях науки, поскольку оказалось целесообразным ввести представления о тепловом сопротивлении, магнитном сопротивлении и т. д.

Однако, не все эти понятия соответствуют тому общему определению сопротивления, которое можно выразить так: обобщенным сопротивлением называется отношение обобщенной силы к вызванной ею обобщенной скорости.

В понятии сопротивления одновременно находят отражение как свойства действующих сил, так и свойства «сопротивляющейся» системы, выраженные через возникшую в системе скорость. Поскольку свойства сил и особенно свойства исследуемых систем могут быть достаточно многообразными, то и понятие сопротивления оказывается весьма емким.

С понятием сопротивления очень сходно понятие чувствительности, под которой можно понимать любое отношение следствия к вызвавшей его причине. В этом смысле понятие чувствительности довольно универсально, но оно лишено той смысловой определенности, которую имеет понятие сопротивления, так как не оговаривается, какую физическую величину следует принимать за причину, а какую — за следствие. Если для рассматриваемых организованных структур, функционирующих в установившемся режиме, очень важно



представление о комплексных сопротивлениях, то при изучении переходных процессов необходимо иметь дело с переходными сопротивлениями или с наиболее общей формой — с операторными сопротивлениями. В других случаях приходится сталкиваться с понятиями взаимного или переносного, отрицательного, статического и динамического сопротивлений.

Такое многообразие представлений о сопротивлениях требует определенной систематизации соответствующих сведений. На основании этого рассмотрим перечисленные разновидности сопротивлений.

### 9.4.1. Сопротивление как функция времени

Поскольку действующие на систему силы в общем случае изменяются во времени по тому или иному закону, то это находит свое отражение и в свойствах сопротивления. Так как действующие силы оказываются либо функциями  $\omega t$ , либо  $t$ , то соответствующими функциями будут и сопротивления.

*Комплексное сопротивление.* Это понятие используется наиболее широко и его введение связано с изучением установившихся гармонических колебательных процессов в электрических или механических системах. В данном случае обобщенная сила изменяется синусоидально и может быть задана в виде комплексного выражения

$$Q = Q_m \varepsilon^{j\omega t},$$

где  $\varepsilon$  — основание натуральных логарифмов;

$\omega$  — частота процесса.

Если дифференциальное уравнение движения системы, на которую действует сила  $Q$ , известно, то может быть найдена скорость движения  $\dot{g}$ , а затем и отношение силы к скорости, т. е. сопротивление, которое также можно представить в показательной форме

$$Z = \frac{Q}{\dot{g}} = z \varepsilon^{j\varphi} = z (\cos \varphi + j \sin \varphi),$$

где  $z$  — модуль сопротивления;

$\varphi$  — сдвиг фаз между силой и скоростью.

Полученное выражение внешне не зависит от времени. Чтобы показать наличие такой связи, следует представить силу и скорость посредством тригонометрических функций, причем формально безразлично, какая величина сдвинута относительно другой. Припишем поэтому угол сдвига фаз не скорости, а силе, так как это позволяет получить результат в более простой форме.

Примем, что

$$Q = Q_m \sin (\omega t + \varphi)$$

и

$$\dot{g} = \dot{g}_m \sin \omega t$$

Отсюда находим следующее выражение для сопротивления:

$$Z = \frac{Q}{\dot{g}} = z(\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{ctg} \omega t).$$

Полученное выражение содержит  $\operatorname{ctg} \omega t$ , и зависимость сопротивления от времени становится ясной. По смыслу — это переходное сопротивление (см. ниже) при установившемся гармоническом процессе.

Как известно, комплексное сопротивление может быть представлено и в алгебраической форме. Так, например, для электрической цепи, содержащей активное сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и емкость  $C$ , получим:

$$Z = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}).$$

Аналогичное выражение сопротивления, как далее будет показано, распространяется также и на механические системы.

Представление о комплексном сопротивлении наиболее широко известно из теории переменных токов. Это же понятие является основным для общей теории преобразователей, находящихся в установившемся колебательном режиме.

*Переходное сопротивление.* Представление о переходном сопротивлении возникает в результате изучения действия сил, произвольно меняющихся во времени.

Понятием переходного сопротивления пользуются для характеристики различных устройств, например устройств, работающих в импульсном режиме, т. е. в условиях, когда особую важность приобретают переходные процессы. Так, если сила задана в виде некоторой функции времени  $Q(t)$ , то функцией времени будет и возникающая в результате этого скорость  $\dot{g}(t)$ .

Отношение мгновенного значения обобщенной силы к мгновенному значению обобщенной скорости даст величину, которая и является переходным сопротивлением, также представляющим некоторую функцию времени, т. е. будем иметь

$$Z(t) = \frac{Q(t)}{\dot{g}(t)}.$$

*Операторное сопротивление.* Такое представление является результатом следующих соображений. Пусть система описывается некоторым дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка. Если

заменить символ операции дифференцирования, т. е.  $d/dt$  оператором  $p$ , то уравнение системы можно представить такой формой:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) g = Q,$$

где  $g$  — обобщенное перемещение.

Порядок уравнения понизится на единицу, если его переписать относительно скорости,  $\dot{g}$ , т. е.

$$(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} + \dots + a_1 + a_0 p^{-1}) \dot{g} = Q.$$

Отсюда сразу находим

$$Z(p) = \frac{Q}{\dot{g}}$$

здесь  $Z(p)$  — операторное сопротивление, названное так по аналогии с комплексным и переходным сопротивлениями.

Таким образом, сопротивление в операторной форме находится непосредственно из дифференциального уравнения системы. Замена в этом выражении оператора  $p$  на  $j\omega$  дает возможность сразу получить выражение комплексного сопротивления, а решение уравнения по правилам операционного исчисления позволяет найти переходное сопротивление системы.

Это означает, что представление сопротивления в символической операторной форме является наиболее общим, поскольку из него могут быть выведены как комплексное, так и переходное сопротивления.

### **9.4.2. Сопротивление как функция геометрических координат системы**

Сопротивление может быть функцией геометрических координат электрической цепи, механической системы и т. д. Это получается в результате того, что сопротивление теперь будет зависеть от места определения скорости. Действительно, если скорость определяется в тех же точках, к которым приложена сила, то сопротивление будет иметь одно значение, а если точки приложения силы и определения скорости не совпадают, то сопротивление может оказаться другим.

Наиболее часто обобщенная скорость рассматривается в тех же точках, к которым приложена сила. Например, в электрической цепи этому соответствует определение сопротивления цепи между точками приложения напряжения.

В ряде случаев, однако, необходимо рассматривать скорость в других точках, а не в тех, к которым приложена сила. В электрических цепях это соответствует определению тока в  $k$ -ой ветви цепи, тогда как э. д. с. оказывается включенной в ветвь  $i$ . Применительно к электрическим

цепям такое сопротивление принято называть взаимным и обозначать двумя индексами ветвей, о которых идет речь.

Взаимное сопротивление может быть записано, например, в таком виде:

$$Z_{ik} = \frac{E_i}{I_k}.$$

Применительно к механическим системам используют чаще такие термины, как переносное или приведенное сопротивления, поскольку рассматриваемая скорость переносится или приводится к другим точкам системы.

Используя принцип взаимности можно записать такое равенство:

$$Z_{ki} = Z_{ik}$$

Это означает, что если точки приложения силы и точки, между которыми измеряется скорость, поменять местами, то величина сопротивления не изменится.

Представление о комплексном взаимном сопротивлении играет важную роль в теории организации, так как именно при помощи сопротивлений  $Z_{ik}$  осуществляется энергетическая связь между входными и выходными сторонами элемента (блока) структуры.

### **9.4.3. Сопротивление как функция абсолютной величины обобщенной скорости**

В нелинейных системах сопротивление зависит от абсолютной величины обобщенной скорости. Например, в нелинейных электрических цепях сопротивления оказываются функциями протекающих токов. Такие нелинейные системы часто приходится описывать не одним параметром, а двумя, например, статическим и динамическим сопротивлениями.

Под статическим сопротивлением (в данной точке), понимается отношение

$$Z = \frac{Q}{\dot{g}}$$

Статическое сопротивление всегда активно.

Динамическое сопротивление иногда называют дифференциальным или сопротивлением переменному току.

Именно с этим понятием сопротивления приходится сталкиваться при анализе нелинейных элементов (блоков) структур. Динамическое сопротивление описывается таким выражением:

$$Z = \frac{dQ}{d\dot{g}} \approx \frac{\Delta Q}{\Delta \dot{g}},$$

Необходимо отметить, что динамическое сопротивление может принимать и отрицательное значение, что говорит только о различии знаков приращения силы и скорости. Представление об отрицательном сопротивлении широко применяется в теории автоколебательных систем.

#### **9.4.4. Неэлектрические сопротивления**

Кроме электротехники и механики, понятие сопротивления используется и в некоторых других областях науки, хотя определение сопротивления здесь не всегда соответствует общему определению, данному выше. Так, разновидностью механического сопротивления является акустическое сопротивление, под которым понимается отношение давления к объемной скорости.

В электромагнитных расчетах используется понятие магнитного сопротивления, под которым понимается отношение магнитодвижущей силы к магнитному потоку. Так как магнитный поток является обобщенной координатой, а не скоростью, то это определение фактически соответствует магнитной упругости, а не сопротивлению.

При изучении теплопередачи пользуются тепловым сопротивлением, под которым понимают отношение теплового потока к разности температур. Эта величина фактически является обратной сопротивлению, т. е. это тепловая проводимость.

Понятие о сопротивлении можно распространить на различные процессы превращения энергии, если определенным величинам возможно приписать смысл обобщенных сил и обобщенных скоростей. В теории организации будут, главным образом, использоваться понятия о комплексном и взаимном сопротивлениях, хотя для характеристики преобразователей, работающих под воздействием импульсов, не меньшее значение имеет представление о переходном сопротивлении.

Уравнения преобразователя-четырёхполюсника описывают его свойства вне зависимости от внутренней структуры, которая до определенного момента не имеет значения.

Специальным методом изучения внутренней структуры механических систем является метод электромеханических аналогий, основы которого рассмотрены ниже.

## **9.5. Метод электромеханических аналогий**

Частично мы уже раньше рассматривали метод электромеханических аналогий, который является очень удобным средством исследования внутренней структуры систем.

Как мы отмечали, этот метод позволяет заменить уравнения движения данной механической системы соответствующими уравнениями для эквивалентной электрической цепи, что существенно упрощает задачу. Таким путем определяются, например, частотные и переходные характеристики механических систем элесентов (блоков) различной конструкции и назначения, причем в большинстве случаев задача сводится к исследованию некоторого эквивалентного колебательного контура, свойства которого всесторонне изучены.

Рассмотрим кратко основы метода электромеханических аналогий.

Известно, что для обоснования теории электричества Максвелл воспользовался уравнениями Лагранжа. Так, он писал: «Мы таким образом знаем достаточно об электрических токах, чтобы рассматривать систему материальных проводников, несущих токи, в качестве динамической системы, которая является вместилищем энергии, быть может, частью кинетической, частью потенциальной.

Мы ничего не знаем о природе связей, которая существует между частями этой системы, но так как имеем в динамике методы исследования, которые не требуют знания механизма системы, то и применим их к этому случаю...».

Таким методом исследования, не требующим знания механизма системы, и явились уравнения Лагранжа второго рода, причем в качестве обобщенных координат Максвелл выбрал количества электричества, что предопределило в последующем первую систему аналогий. Выбранные обобщенные координаты целиком определяли степень продвижения электрокинетического процесса от некоторого момента времени, соответствующего началу отсчета, а обобщенными скоростями оказались электрические токи, т. е.

$$i = \frac{dq}{dt}$$

где  $q$  — количество электричества.

Если рассматривать обобщенную силу в качестве причины изменений в системе, то, как уже указывалось, она должна быть выбрана так, чтобы произведение силы на приращение обобщенной координаты равнялось бы произведенной работе. Такой силой, при выбранных Максвеллом обобщенных координатах, становится электродвижущая сила.

В начале своего развития теоретическая электротехника использовала математический аппарат теоретической механики.

В скором времени последовало быстрое развитие и совершенствование собственных методов электротехники. Наличие большого количества готовых решений электротехнических задач привело впоследствии к обратному процессу, т. е. к перенесению более развитых методов электротехники на решение задач механики. Так возник довольно плодотворный метод электромеханических аналогий, основы которого вытекают из сравнения аналогичных по форме уравнений механических и электрических систем.

Единство природы обнаруживается в аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.

Приведем для примера такие широкоизвестные уравнения:

1) Уравнение электродвижущих сил для последовательного колебательного контура, находящегося под действием синусоидальной э. д. с,

$$L \frac{dl}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E_m \sin \omega t, \quad (9.16)$$

где  $L$ ,  $R$  и  $C$  — индуктивность, сопротивление и емкость контура соответственно.

Это же уравнение можно переписать, выразив все токи через количество электричества:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E_m \sin \omega t. \quad (9.16a)$$

Подавляющее большинство электромеханических систем представляет собой механические системы с одной степенью свободы. Имея почти всегда два разнородных накопителя энергии в виде массы и гибкости пружины, такие системы описываются дифференциальными уравнениями второго порядка и схематично могут быть изображены так, как это сделано для систем с поступательным и вращательным движением на рис. 9.3.

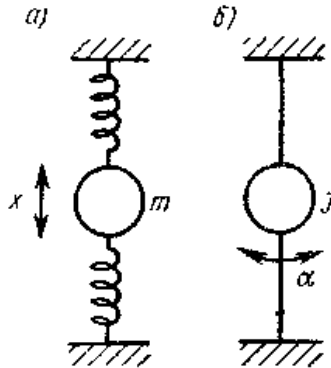


Рис. 9.3

Уравнения движения этих систем, как известно из теоретической механики, могут быть написаны в различных формах.

2) Уравнение поступательного движения массы, подвешенной на пружине, имеет вид:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + R_M \frac{dx}{dt} + \frac{1}{C_x} x = E_m \sin \omega t. \quad (9.17)$$

где  $m$ ,  $R_M$  и  $C_x$  — соответственно масса, механическое сопротивление поступательному движению и эластичность или гибкость пружины.

Справа находится внешняя, синусоидально меняющаяся сила.

3) Уравнение вращательного движения массы на упругом подвесе имеет аналогичную форму:

$$J \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + P \frac{d\alpha}{dt} + \frac{1}{C_\alpha} \alpha = D_m \sin \omega t, \quad (9.18)$$

где  $J$  — момент инерции системы;

$P$  — коэффициент успокоения, который, как далее показано, оказывается механическим сопротивлением вращательному движению;

$C_\alpha$  — эластичность растяжек или пружин.

Как правило, пользуются величиной обратной эластичности, называемой удельным противодействующим моментом  $W$ , где

$$W = \frac{1}{C_\alpha}.$$

Угловое отклонение системы принято обозначать через  $\alpha$ .

Приведенные уравнения аналогичны по форме, в результате чего аналогичны и их решения.



Не останавливаясь на решении этих уравнений, которые более подробно рассмотрены в последующих разделах, укажем, что во всех случаях можно найти отношение действующей силы к возникающей вследствие этого скорости, т. е. сопротивление.

Так можно получить модули полных сопротивлений:

а) для электрической цепи

$$z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}; \quad (9.19)$$

б) для механической системы с поступательным движением

$$z_{M_x} = \sqrt{R_M^2 + \left( \omega m - \frac{1}{\omega C_x} \right)^2}; \quad (9.20)$$

в) для механической системы с вращательным движением

$$z_{M_\alpha} = \sqrt{P^2 + \left( \omega J - \frac{W}{\omega} \right)^2}. \quad (9.21)$$

Сопоставление как исходных дифференциальных уравнений, так и выражений для полных сопротивлений приводит к возможности обоснования первой системы аналогий, представленной в виде сводки аналогов в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Механические величины	Электрические аналоги
Линейное перемещение $x$ } Угловое перемещение $\alpha$ }	Количество электричества $q$
Механическая скорость $\frac{dx}{dt}, \frac{d\alpha}{dt}$	Электрический ток $I$
Действующие сила $F$ или момент $D$	Электродвижущая сила $E$
Сила реакции системы $F_x$ , момент $M$	Напряжение $U$
Полное механическое сопротивление	Полное электрическое сопротивление
Механическое сопротивление потерь	Активное сопротивление $R$
Масса $m$ , момент инерции $J$	Индуктивность $L$
Эластичность, гибкость пружины	Электрическая емкость $C$
Упругость, удельный прогиб/действующий момент	Величина, обратная емкости, т. е. $1/C$

Рассмотрим теперь основные принципы, используемые для построения эквивалентных электрических цепей при помощи метода аналогий.

Система электромеханических аналогий позволяет строить схемы электрических цепей, эквивалентные механическим, при условии соблюдения определенных правил..

Для составления самих механических схем пользуются представлениями об основных механических элементах (модулях) или механических двухполюсниках. Различают следующие основные механические элементы.

**Элементом массы** считают систему, состоящую из конечной массы  $m$  и точки, связанной с бесконечно большой массой, служащей началом системы отсчета. В качестве такой бесконечно большой массы принимается масса Земли. Наличие связи с бесконечной массой вытекает из представления сил как некоторых натяжений, а это предусматривает по крайней мере два взаимодействующих тела.

Элемент массы условно изображают, например, так, как это показано на рис. 9.4, а.

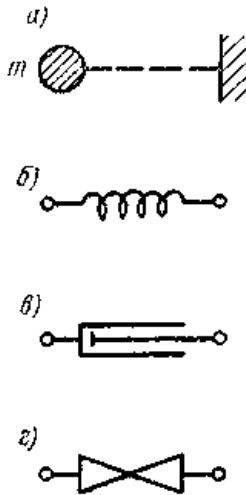


Рис. 9.4

**Элементом упругости** является идеализированный элемент, у которого любому относительно перемещению концов противодействует только упругая сила  $F_x$  или момент  $M$ , причем соблюдаются такие равенства:

$$F_x = \frac{1}{C_x} x; \quad M = W\alpha,$$

где  $C_x$  — эластичность или гибкость элемента;

$W$  — удельный противодействующий момент.

Элемент упругости изображается так, как показано на рис. 9.4, б.

Под **элементом успокоения** обычно понимают такой идеальный двухполюсник, у которого любое относительное перемещение концов связано с сопротивлением силы трения, пропорциональной первой степени скорости, т. е.

$$F_{\text{усп}} = B_m \frac{dx}{dt}$$

или

$$M_{\text{усп}} = P \frac{d\alpha}{dt}.$$

В обоих случаях направление силы (момента) и перемещения — противоположны. Элемент успокоения изображен на рис. 9.4, в. На схемах любой механический элемент, если он представляется обобщенно, а не конкретно, часто изображается так, как показано на рис. 9.4, г.

Механические элементы могут соединяться друг с другом различным образом, причем простейшими соединениями являются соединения цепочкой, как это показано на рис. 9.5, а, или узлом, как это изображено на рис. 9.5, б.

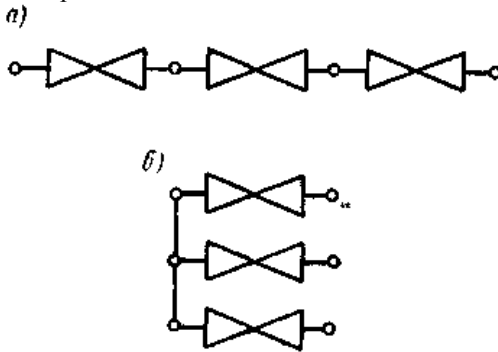


Рис. 9.5

Из определения механических элементов и указанных способов их простейших соединений вытекают такие основные следствия.

*Соединение элементов цепочкой.* При соединении элементов цепочкой будут справедливы следующие условия:

- 1) Относительное перемещение концов цепочки равно сумме относительных перемещений концов каждого из элементов.
- 2) Относительная скорость концов цепочки равна сумме относительных скоростей концов элементов.

Если сопоставить это правило с законом распределения токов в электрической цепи, то ясно, что соединение цепочкой соответствует не последовательному, а параллельному соединению, так как только при параллельном соединении токи складываются.

Из условия равновесия всей системы сила, действующая на каждый элемент цепочки, равна приложенной силе. Последнее условие соответствует электродвижущей силе, приложенной к элементам электрической цепи, соединенным параллельно.

Таким образом, соединение механических элементов цепочкой соответствует параллельному соединению элементов электрической цепи. Отсюда также следует, что податливость механической системы, т. е. величина, обратная механическому сопротивлению, равна сумме податливостей отдельных элементов.






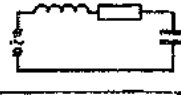
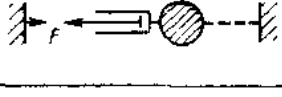
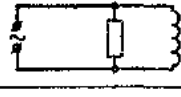

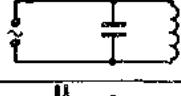

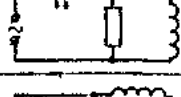






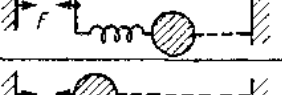

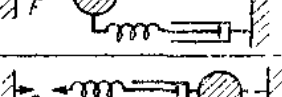

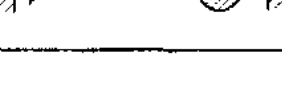
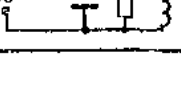
*Соединение элементов в узлы.* Предполагая соединение концов абсолютно жестким, приходим к следующим выводам:

- 1) Относительное перемещение узлов, как это видно из рис. 9.5, б, равно относительному перемещению концов каждого элемента.
- 2) В соответствии с этим относительная скорость узла равна относительной скорости концов скрепленных элементов. Такое равенство скоростей характерно не для параллельного, а для последовательного соединения элементов электрической цепи, так как при этом токи в каждом из элементов одинаковы.
- 3) Сумма реакций всех элементов узла равна приложенной внешней силе. В электрической цепи этому соответствует сумма падений напряжений на последовательно включенных элементах.

Перечисленные свойства показывают, что соединение механических элементов в узлы соответствует последовательному соединению элементов электрической цепи. Если же говорить о механическом сопротивлении такой системы, то оно равно сумме сопротивлений отдельных элементов.

Следует сказать также на то, что в 1932 г. была предложена вторая система аналогий, в которой электрическим аналогом механической силы служит ток, а скорости соответствует напряжение. Такая система удобна тем, что простой заменой элементов схема механической системы превращается в свою электрическую аналогию. Однако к моменту появления этой второй системы, первая система уже настолько прочно вошла в практику исследований, что вторая система не получила заметного распространения.

Основные примеры аналогий между механическими и электрическими цепями приведены в табл. 9.2, где для вращательного движения специальных обозначений не предусмотрено.

1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

В заключение необходимо остановиться на возможностях трансформации сил и скоростей.

В электротехнике для трансформации напряжений и токов широко применяются трансформаторы, при помощи которых можно также согласовывать или как бы трансформировать сопротивления.

Такое согласование сопротивлений источников и нагрузок является основным приемом для получения нагрузкой оптимальной мощности от источника и широко используется всюду, где приходится иметь дело с маломощными источниками. Именно поэтому применение согласующих трансформаторов как электрических, так и неэлектрических оказывается необходимым в технике связи, электроакустике, радиотехнике и электроизмерительной технике.

При использовании механических или акустических систем, т. е. механических систем с распределенными постоянными, для целей согласования сопротивлений применяются рычаги или камеры разного сечения.

Реальный жесткий рычаг, т. е. устройство, моментом инерции которого нельзя пренебречь, представлен на рис. 9.6, где также показаны нагрузки его концов в виде механических сопротивлений  $Z_{M_1}$  и  $Z_{M_2}$ .

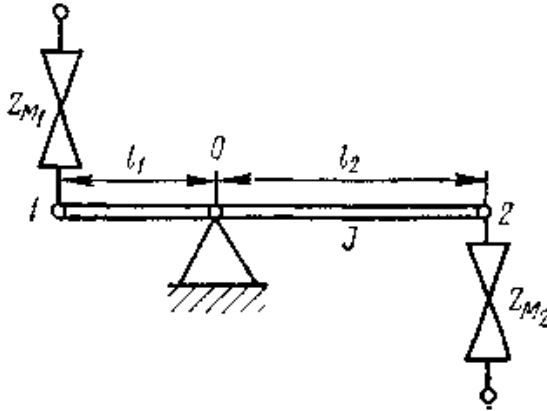


Рис. 9.6

Электрические аналоги рычага получаются, если учесть, что распределенную массу самого рычага во многих случаях удастся заменить эквивалентной сосредоточенной массой на одном из концов.

Если момент инерции рычага  $J$ , а массу считать сосредоточенной на первом конце, то величина этой эквивалентной массы будет равна:

$$m_{z_1} = \frac{1}{l_1^2}.$$

Если же сосредоточить массу на другом конце рычага, то ее величину следует считать равной:

$$m_{z_2} = \frac{1}{l_2^2}.$$

Так как перемещения концов, а также их скорости  $v$  прямо пропорциональны длинам плеч, то можно написать отношение:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{l_1}{l_2} = n. \quad (9.22)$$

Так как скорости имеют аналогами первичный и вторичный токи трансформатора, то полученное равенство соответствовало бы идеальному трансформатору с коэффициентом трансформации, равным  $n$ .

Если же учесть массу рычага и сосредоточить ее на первом конце, как это показано на рис. 9.7, а, то на эквивалентной электрической схеме рис. 9.7, б эта масса будет играть роль индуктивности рассеяния в первичной обмотке.

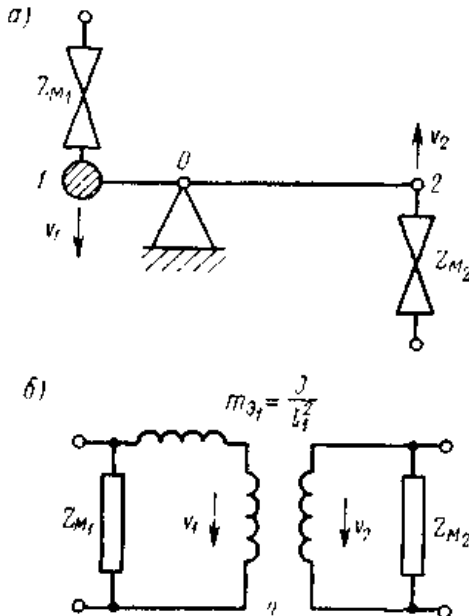


Рис. 9.7

Перенесению массы на второй конец рычага будет соответствовать появление индуктивности рассеяния  $m_{3_2}$  во вторичной  $m_{3_2}$  обмотке.

Если обозначить механические силы на концах рычага через  $F_1$  и  $F_2$ , то будет справедливо отношение:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{l_1}{l_2} = n. \quad (9.23)$$

Теперь из равенства (9.22) и (9.23) получим:

$$F_2 = nF_1 \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{v_1}{n}.$$

Отсюда находится соотношение для приведения сопротивлений нагрузок, совпадающее по форме с зависимостью для электрического трансформатора:

$$Z_{1 \text{ прив}} = \frac{F_1}{v_1} = \frac{1}{n^2} \frac{F_2}{v_2} = \frac{1}{n^2} Z_{M_2}.$$

Полученное равенство означает, что сопротивление  $Z_{M_2}$  приводится к первичной стороне через квадрат отношения плеч  $n$ . Следовательно, отношение плеч рычага эквивалентно отношению чисел витков идеального трансформатора.

Эти выводы справедливы при малых углах поворота рычага, когда длина плеч практически остается равной их проекции.

В том случае, когда необходима механическая система с произвольным углом поворота, вместо рычага применяют зубчатые колеса или два соосно соединенных блока, как это показано на рис. 9.8.

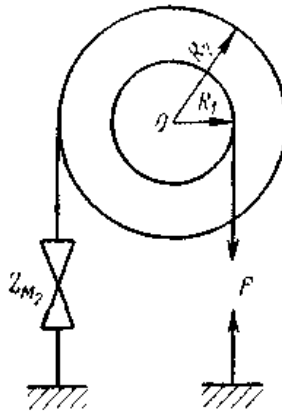


Рис. 9.8



В некоторых механических системах используются так называемые воздушные или гидравлические усилители, в которых применяется трансформация усилий при помощи камер с диафрагмами или поршнями различной площади.

На рис. 9.9 схематично изображено такое устройство с двумя поршнями, имеющими сечение  $s_1$  и  $s_2$ .

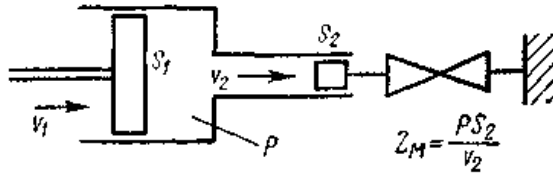


Рис. 9.9

Такая система аналогична рычагу. Действительно, если избыточное давление внутри камеры равно  $P$ , то сила на выходном конце устройства  $F_2$  будет равна:

$$F_2 = P s_2.$$

Отсюда находится механическое сопротивление нагрузки как отношение силы к скорости, т. е.

$$Z_{M_2} = \frac{P s_2}{v_2}.$$

Если вещество, передающее давление, можно считать несжимаемым, что эквивалентно абсолютно жесткому рычагу, то отношение скоростей па входе и на выходе будет равно:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_2}{s_1} = n. \quad (9.25)$$

В соответствии с этим находится отношение сил на входном и выходном концах устройства:

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{P s_2}{P s_1} = n. \quad (9.26)$$

Из равенств (9.25) и (9.26) получаем:

$$v_1 = n v_2 \quad \text{и} \quad F_1 = \frac{1}{n} F_2.$$

Отсюда приведенное к первичной стороне сопротивление будет равно:

$$Z_{1 \text{ прив}} = \frac{F_1}{v_1} = \frac{1}{n^2} \frac{F_2}{v_2} = \frac{1}{n^2} Z_{M_2}.$$

Как видно, это выражение полностью совпадает с равенством (9.24). Наконец, нужно отметить то обстоятельство, что всякая реальная механическая система в действительности всегда является системой с распределенными постоянными. Рассмотрение подобных систем при помощи эквивалентных схем с сосредоточенными параметрами является приближением, степень и допустимость которого зависят от конкретных условий задачи. Здесь под приближением понимается сохранение в эквивалентной системе некоторого числа свойств реальной системы; чем большее число свойств требуется сохранить, тем сильнее усложняется эквивалентная схема и тем труднее становится ее исследование. По этой причине всегда важно суметь выделить главные свойства, чтобы разумно пожертвовать второстепенными. Методы исследования механических систем с распределенными постоянными при помощи аналогий подробно рассматриваются, например, в электроакустике. В заключение изучения тех общих вопросов, которым посвящен данный раздел, рассмотрим вопрос о связи линейности или нелинейности систем с четными и нечетными эффектами. Эта задача представляет важное значение при организации различных структур систем.

## **9.6. Четные и нечетные эффекты и их связь с линейностью систем**

Весьма важным для организации структур является то, описывается ли данная система линейными или нелинейными уравнениями, причем в большинстве случаев линейность оказывается ценным достоинством. А. А. Харкевич показал, что линейность или нелинейность тесно связаны с так называемыми четными или нечетными эффектами, лежащими в основе принципа действия системы.

Такое название эти эффекты получили по виду функциональной зависимости, описывающей данное явление. Если некоторое физическое явление описывается зависимостью

$$\alpha = f(X)$$

и при этом соблюдается условие

$$f(X) = -f(-X),$$

то данная зависимость может быть разложена в степенной ряд по нечетным степеням  $X$ :

$$\alpha = k_1 X + k_3 X^3 + k_5 X^5 + \dots$$

Если же в данном диапазоне значений  $X$  возможно приближенное представление ряда только одним первым членом разложения, то с определенной степенью точности получим:

$$\alpha \approx k_1 X.$$

Эффекты, описываемые такого рода приближенными линейными зависимостями, называются нечетными.

В том случае, когда справедливо равенство

$$f(X) = f(-X),$$

то функция разлагается в ряд лишь по четным степеням  $X$ , т. е. можно написать:

$$\alpha = k_0 + k_2 X^2 + k_4 X^4 + \dots$$

Эффект, который описывает такая функция, в соответствии с ее видом называется четным. Поскольку постоянная составляющая  $k_0$  при работе системы часто не используется, то, исключая ее из рассмотрения, а также пренебрегая высшими степенями  $X$ , когда это допустимо по условиям данной конкретной задачи, получим:

$$\alpha \approx k_2 X^2.$$

Отсюда следует, что четные эффекты в определенных границах изменения аргументов могут описываться приближенно квадратичной зависимостью.

Таким образом, различие между линейными и нелинейными явлениями вытекает из принципиального различия между четными и нечетными эффектами, заключающегося в том, что нечетные эффекты могут быть описаны приближенными линейными зависимостями, тогда как для четных эффектов приближенной зависимостью будет квадратичная зависимость.

В этой связи следует отметить, что строго линейные явления в природе вообще отсутствуют, а наличие нелинейности всегда выявляется, как только изменения величин делаются значительными. По этой причине все линейные зависимости оказываются в той или иной мере приближенными.

Здесь же нужно указать, что главной задачей линейной теории организации является задача определения выходной величины по заданным входной величине и параметрам системы. Иногда может оказаться необходимым по выходной величине и параметрам системы найти входную величину; такая задача решается теми же путями, что и первая.

Наконец, может возникнуть необходимость определять свойства системы по заданным входной и выходной величинам. Это наиболее трудная и специфичная задача, сводящаяся к синтезу системы.

Уравнения линейных систем — это, главным образом, уравнения с постоянными коэффициентами, так как уравнения с переменными

коэффициентами встречаются значительно реже и их рассматривают, чаще всего, вместе с нелинейными уравнениями.

Линейная теория располагает широко разработанным математическим аппаратом решения дифференциальных уравнений системы, основанным на применимости к линейным физическим системам принципа наложения. К таким методам решения уравнений относится, например, применение интеграла Фурье и интеграла Дюамеля.

Из известных четных и нечетных обратимых эффектов наибольшее применение получили эффекты, связанные с преобразованиями электрической, магнитной, механической и тепловой энергии. Эти эффекты по принципу их четности или нечетности сведены в табл. 9.3 и 9.3,а.

*Таблица 9.3*

Обратимые нечетные явления, описываемые линейными уравнениями				
Виды энергии	Электрическая	Магнитная	Механическая	Тепловая
Электрическая	—	Электромагнитная индукция, т. е. наведение э. д. с. при изменении потока	Электромагнитная индукция, т. е. наведение э. д. с. при движении проводника Прямой пьезоэффект	Прямой термоэлектрический эффект (эффект Зеебека)
Магнитная	Создание магнитного поля током	—		
Механическая	Электродинамический эффект Обратный пьезоэффект		—	Тепловое расширение тел
Тепловая	Обратный термоэлектрический эффект (эффект Пельтье)		Выделение тепла при сжатии тела	—

Обратимые четные явления, описываемые квадратичными формами уравнений			
Виды энергии	Электрическая	Магнитная	Механическая
Электрическая	—		Изменение заряда или потенциалов при перемещении обкладок конденсатора
Магнитная		—	Изменение потока при движении якоря, изменяющего магнитное сопротивление Обратный магнитострикционный эффект
Механическая	Изменение силы взаимодействия обкладок конденсатора при изменении приложенного напряжения	Притяжение ферромагнитного якоря магнитом Прямой магнитострикционный эффект	—

В данной таблице отсутствует графа тепловой энергии, так как четные преобразования других видов энергии в тепло оказываются необратимыми и поэтому не охватываются теорией организации.

## 10. Формы математических моделей систем и их структур.

### 10.1. Общие положения

Технические системы, особенно предназначенные для измерения неэлектрических величин, могут в большинстве случаев быть представлены математическими моделями в виде аналитических уравнений, аналогичных уравнениям электрических модулей - четырехполюсникам.

Для этого необходимо, чтобы системы были обратимы, а сами уравнения будут адекватны тем же режимам работы, для которых справедливы уравнения электрических четырехполюсников. Однако уравнения таких модулей-четырёхполюсников оказываются еще более

всеобъемлющими, поскольку они связаны с многообразными обобщенными силами, обобщенными скоростями и координатами, а не только с напряжениями и токами. Собственно говоря, в таком понимании уравнения электрических четырехполюсников оказываются только частным случаем этих уравнений.

Такая большая общность уравнений, охватывающих преобразования различных видов энергии, приводит к тому, что достаточно сложной может оказаться задача, связанная с правильным выбором тех или иных физических величин, в качестве сил, скоростей или координат.

Форма математических моделей систем и их структур, представленных в виде уравнений, становится в данном случае связанной не только с тем, относительно каких величин эти уравнения разрешены, но и с тем, какие величины выбраны в качестве аргументов, и это последнее следует делать как в соответствии с физическим смыслом, так и с математическими выражениями тех законов, которые описывают данное явление.

Теория организации является, на наш взгляд, тем фундаментом, на котором должны строиться основные положения теории обратимых систем. Эта теория позволяет получить не только различные общие зависимости, но она, как и всякое значительное обобщение, дает возможность гораздо шире охватить сущность явлений и в этом ее особенная ценность.

Для того чтобы процесс составления уравнений систем и их структур и полученные зависимости не казались слишком абстрактными, в данном разделе рассмотрены методы построения математических моделей в виде аналитических уравнений на примерах основных электромеханических, а также термоэлектрических преобразовательных систем.

В данном разделе рассматриваются примеры основ математического моделирования структур, частным случаем которых являются измерительные системы непосредственной оценки. В этих системах в большинстве случаев (кроме осцилляторов резонансных гальванометров и осциллографических гальванометров) равна нулю выходная скорость, т. е. - подвижная часть занимает установившееся положение.

Гораздо более общим случаем будет случай движения на выходе преобразовательной системы, и именно рассмотрение этого более сложного явления позволяет выявить принципиально важный факт взаимодействия сторон преобразовательной системы. Это взаимодействие сторон далеко не всегда учитывается, что часто приводит не только к ошибкам, но и к неглубокому пониманию того или иного явления в целом.

## **10.2. Различные формы математических моделей преобразовательных систем**

В большинстве случаев преобразовательные системы можно рассматривать как устройства с двумя сторонами — входной и выходной. Таким образом, это четырехполюсник, физическая природа входных и выходных величин которого может быть весьма различной. Чаще всего одна из сторон преобразовательной системы оказывается электрической, а другая — механической, тепловой или какой-либо другой.

В отдельных случаях преобразовательную систему следует рассматривать не в качестве двухсторонней, а в качестве трехсторонней. Такой более сложный случай соответствует, например, пьезоэлектрическому преобразователю в виде стержня. Подобный преобразователь обладает бесконечным числом степеней свободы, поскольку представляет систему с распределенными постоянными, но если интересоваться только режимом двух концов стержня и электрической стороной, то все остальные степени свободы можно отнести к внутренним. При таком упрощении рассматриваемый преобразователь будет иметь всего три стороны: две механические, связанные с движением концов стержня, и одну электрическую.

В качестве подобного трехстороннего преобразователя окажется почти любой измерительный преобразователь, если учесть воздействие на него какого-либо внешнего фактора, например, воздействие изменений окружающей температуры. В этом случае третьей стороной преобразователя будет тепловая.

В большинстве случаев действие измерительных преобразователей основано на преобразованиях кинетической энергии и только небольшая группа их, как например, преобразователи электростатические и пьезоэлектрические, преобразуют потенциальную энергию. Итак, не интересуясь пока дополнительными погрешностями от внешних воздействий, усложняющих весь анализ структур, начнем рассмотрение двухсторонних преобразователей-четырёхполюсников.

В случаях преобразования кинетической энергии основные уравнения двухсторонних обратимых преобразовательных систем могут быть записаны в форме (9.11), т. е. в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Z_{11}\dot{g}_1 + Z_{12}\dot{g}_2 \\ Q_2 &= Z_{21}\dot{g}_1 + Z_{22}\dot{g}_2 \end{aligned} \right\} \text{тип } Z. \quad (10.1)$$

В зависимости от конкретного физического смысла обобщенных сил  $Q_i$  и обобщенных скоростей  $\dot{g}_i$  сопротивления могут быть элек-

трическими, механическими, тепловыми и другими сопротивлениями. Уравнения (10.1) будем называть исходной или основной формой, а учитывая вид коэффициентов, будем называть их уравнениями типа  $Z$ . В тех случаях, когда преобразование основывается на использовании потенциальной энергии, будут справедливыми аналогичные уравнения, в которых в качестве аргументов станут фигурировать уже не скорости, а обобщенные перемещения. В результате этого с необходимостью должны измениться и коэффициенты, которые вместо обобщенных сопротивлений должны стать обобщенными упругостями, т. е. вместо  $Z_{ik}$  будем иметь  $c_{ik}$ .

Для этого случая получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= c_{11}g_1 + c_{12}g_2; \\ Q_2 &= c_{21}g_1 + c_{22}g_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.1a)$$

Подобные же уравнения будут справедливы, если вместо коэффициентов  $c_{ik}$  мы напишем коэффициенты  $\zeta_{ik}$  в соответствии с равенствами (9.6a).

Связь между коэффициентами  $Z_{ik}$  и  $c_{ik}$  здесь такая, какая устанавливается равенством (9.14a), т. е.

$$c_{ik} = p Z_{ik}.$$

Уравнения (10.1) можно разрешить относительно любых входящих в них сил и скоростей. Поскольку преобразователь характеризуется всего четырьмя величинами, из которых две входные и две выходные, причем из них всегда явно выражены только какие-либо две, стоящие слева, то число форм уравнений, описывающих один и тот же преобразователь, равно числу сочетаний из четырех по два, т. е. шести. Если разрешить уравнение (10.1) относительно обобщенных скоростей, что можно сделать при помощи определителей, то, обозначив определитель системы через  $\Delta_z$ , получим:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}.$$

Отсюда найдем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{Z_{22}}{\Delta_z} Q_1 - \frac{Z_{12}}{\Delta_z} Q_2; \\ \dot{g}_2 &= -\frac{Z_{21}}{\Delta_z} Q_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta_z} Q_2. \end{aligned} \right\}$$

Размерность коэффициентов в этих уравнениях соответствует



размерности проводимости, и эти коэффициенты обозначают либо через  $Y_{ik}$ , либо через  $b_{ik}$ . Применяя последнее обозначение, получим систему уравнений типа  $B$  (или типа  $Y$ ), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_1 &= b_{11}Q_1 - b_{12}Q_2 \\ \dot{g}_2 &= -b_{21}Q_1 + b_{22}Q_2 \end{aligned} \right\} \text{тип } B(Y). \quad (10.2)$$

Выражения коэффициентов производной формы (10.2) через коэффициенты основной формы (10.1) находятся в результате сопоставления двух последних систем уравнений.

Если затем разрешить первое уравнение (10.2) относительно  $Q_1$  и второе уравнение (10.1) относительно  $\dot{g}_2$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{b_{11}} \dot{g}_1 + b_{12}Q_2; \\ \dot{g}_2 &= -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} \dot{g}_1 + \frac{1}{Z_{22}} Q_2. \end{aligned} \right\}$$

Обозначив коэффициенты этой формы уравнений через  $d_{12}$ , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= d_{11}\dot{g}_1 - d_{12}Q_2 \\ \dot{g}_2 &= -d_{21}\dot{g}_1 + d_{22}Q_2 \end{aligned} \right\} \text{тип } D. \quad (10.3)$$

В таком виде систему уравнений условно называют системой типа  $D$ .

В том случае, если разрешить первое уравнение (10.1) относительно  $\dot{g}_1$ , а второе уравнение (10.2) относительно  $Q_2$ , то найдем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_1 &= \frac{1}{Z_{11}} Q_1 - \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \dot{g}_2; \\ Q_2 &= \frac{b_{11}}{b_{22}} Q_1 + \frac{1}{b_{22}} \dot{g}_2. \end{aligned} \right\}$$

Перепишем эту систему, введя новые коэффициенты  $f_{ik}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{g}_1 &= f_{11}Q_1 - f_{12}\dot{g}_2 \\ Q_2 &= f_{22}Q_1 + f_{22}\dot{g}_2 \end{aligned} \right\} \text{тип } F(D^{-1}). \quad (10.4)$$

Последнюю форму условно называют системой уравнений типа  $F$  или  $D^{-1}$ , так как она разрешена относительно других входных и выходных величин по сравнению с уравнениями типа  $D$ . Так, вместо входной силы находится входная скорость, вместо выходной скорости выходная сила.

Наконец, кроме всех разновидностей форм уравнений, полученных из одной основной, т. е. из уравнений (10.1), распространена другая независимая форма уравнений, также принятая в качестве основной. Для этой формы уравнений характерно то, что уравнения разрешены относительно входных величин, и это соответствует действию преобразователя в качестве генератора. Однако, поскольку данная форма не является производной, а сама считается основной, то записывается она отлично от равенств (10.3), а именно:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= a_{11}Q_2 + a_{12}\dot{g}_2 \\ \dot{g}_1 &= a_{21}Q_2 + a_{22}\dot{g}_2 \end{aligned} \right\} \text{тип } A. \quad (10.5)$$

В дальнейшем, в зависимости от обстоятельств, будем пользоваться обеими основными формами, т. е. уравнениями типа Z и уравнениями типа A.

Решение данной системы уравнений относительно выходных величин будет соответствовать описанию функционирования преобразователя в качестве двигателя. Это решение может быть записано в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} Q_2 &= \frac{a_{22}}{\Delta_A} Q_1 - \frac{a_{12}}{\Delta_A} \dot{g}_1 \\ \dot{g}_2 &= -\frac{a_{21}}{\Delta_A} Q_1 + \frac{a_{11}}{\Delta_A} \dot{g}_1 \end{aligned} \right\} \text{тип } A^{-1}. \quad (10.6)$$

Как мы уже видели, связь между коэффициентами уравнений различных типов находится после преобразования этих уравнений к одному виду, т. е. после разрешения их относительно одних и тех же величин и последующего сопоставления. Так, чтобы установить связь между основными уравнениями типа A и типа Z, разрешим уравнения типа Z относительно  $Q_1$  и  $\dot{g}_2$ . Из второго уравнения (10.1) найдем:

$$\dot{g}_1 = \frac{1}{Z_{21}} Q_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \dot{g}_2.$$

Подстановка этого значения в первое уравнение системы (10.1) дает следующее выражение:

$$Q_1 = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} Q_2 + \frac{(Z_{12}Z_{12} - Z_{12}Z_{22})}{Z_{21}} \dot{g}_2.$$

Так как определитель, составленный из коэффициентов уравнений (10.1), будет равен

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11}Z_{12} \\ Z_{21}Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21},$$

то уравнения преобразователя, разрешенные относительно входных величин  $Q_i$  и  $\dot{g}_i$  теперь можно записать, используя только что полученные выражения для  $Q_1$  и  $\dot{g}_1$ . В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}} Q_2 - \frac{\Delta_Z}{Z_{21}} \dot{g}_2; \\ \dot{g}_1 &= \frac{1}{Z_{21}} Q_2 - \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \dot{g}_2. \end{aligned} \right\}$$

Теперь уравнения типа  $Z$  оказались приведенными к виду уравнений типа  $A$ . Сопоставляя их с равенствами (10.5), найдем выражения коэффициентов  $a_{ik}$  через  $Z_{ik}$ , которые нам понадобятся в дальнейшем. Сопоставляя, получим:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}}; & a_{12} &= -\frac{\Delta_Z}{Z_{21}}; \\ a_{21} &= \frac{1}{Z_{21}}; & a_{22} &= -\frac{Z_{22}}{Z_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Таким же образом находятся и выражения коэффициентов уравнений других типов через коэффициенты уравнений типа  $Z$ . Результаты такого рода решений и сопоставлений представлены в табл. 10.1

*Таблица 10.1*

Таблица, устанавливающая связь между коэффициентами разных форм уравнений.

Тип Z (или C в соответствии с равенством 2.1а)	$Z_{11}$	—	$\frac{1}{f_{11}}$	$\frac{\Delta_D}{d_{22}}$	$\frac{b_{22}}{\Delta_B}$
	$Z_{12}$	—	$\frac{f_{12}}{f_{11}}$	$\frac{d_{12}}{d_{22}}$	$\frac{b_{12}}{\Delta_B}$
	$Z_{21}$	—	$\frac{f_{21}}{f_{11}}$	$\frac{d_{21}}{d_{22}}$	$\frac{b_{21}}{\Delta_B}$
	$Z_{22}$	—	$\frac{\Delta_F}{f_{11}}$	$\frac{1}{d_{22}}$	$\frac{b_{11}}{\Delta_B}$
Тип F	$f_{11}$	$\frac{1}{Z_{11}}$	—	$\frac{d_{22}}{\Delta_D}$	$\frac{\Delta_B}{b_{22}}$
	$f_{12}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{11}}$	—	$\frac{d_{12}}{\Delta_D}$	$\frac{b_{12}}{b_{22}}$
	$f_{21}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{11}}$	—	$\frac{d_{21}}{\Delta_D}$	$\frac{b_{21}}{b_{22}}$
	$f_{22}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{11}}$	—	$\frac{d_{11}}{\Delta_D}$	$\frac{1}{b_{22}}$
Тип D	$d_{11}$	$\frac{\Delta_Z}{Z_{22}}$	$\frac{f_{22}}{\Delta_F}$	—	$\frac{1}{b_{11}}$
	$d_{12}$	$\frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$\frac{f_{12}}{\Delta_F}$	—	$\frac{b_{12}}{b_{11}}$
	$d_{21}$	$\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$	$\frac{f_{21}}{\Delta_F}$	—	$\frac{b_{21}}{b_{11}}$
	$d_{22}$	$\frac{1}{Z_{22}}$	$\frac{f_{11}}{\Delta_F}$	—	$\frac{\Delta_B}{b_{11}}$
Тип B	$b_{11}$	$\frac{Z_{22}}{\Delta_Z}$	$\frac{\Delta_F}{f_{22}}$	$\frac{1}{d_{11}}$	—
	$b_{12}$	$\frac{Z_{12}}{\Delta_Z}$	$\frac{f_{12}}{f_{22}}$	$\frac{d_{12}}{d_{11}}$	—
	$b_{21}$	$\frac{Z_{21}}{\Delta_Z}$	$\frac{f_{21}}{f_{22}}$	$\frac{d_{21}}{d_{11}}$	—
	$b_{22}$	$\frac{Z_{11}}{\Delta_Z}$	$\frac{1}{f_{22}}$	$\frac{\Delta_D}{d_{11}}$	—

**Примечание.** Связь коэффициентов уравнений типа A с коэффициентами уравнений типа Z устанавливается при помощи равенств (10.7) и (10.7а).

Аналогичным путем находятся коэффициенты  $Z_{ik}$ , выраженные через  $a_{ik}$ . В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Z_{11} &= \frac{a_{11}}{a_{21}}; & Z_{12} &= \frac{\Delta_A}{a_{21}}; \\ Z_{21} &= \frac{1}{a_{21}}; & Z_{22} &= -\frac{a_{22}}{a_{21}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.7a)$$

Возвратимся теперь к уравнению (10.5). Если составить определитель из его коэффициентов и затем подставить в него соотношения (10.7), то получим:

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (10.8)$$

Выполняя подстановку значений  $a_{ik}$  из (10.7), найдем

$$\Delta_A = \frac{-Z_{11}Z_{22} + Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}Z_{21}} = -1. \quad (10.8a)$$

Полное сокращение числителя и знаменателя оказалось возможным здесь потому, что на основании принципа взаимности существует равенство  $Z_{12} = Z_{21}$ .

В теории электрических четырехполюсников, как правило, принимают  $\Delta_A = +1$ , а не  $-1$ . Такое изменение знака определителя может быть получено, например, при изменении направления выходной скорости. В теории электрических четырехполюсников принимают за условно положительное направление сил и скоростей, т. е. напряжений и токов, направления, показанные стрелками на рис. 10.1, *a*; для того чтобы было справедливо равенство (10.8), необходимо изменить направление, например, скорости  $\dot{g}_2$  на противоположное, как это показано на рис. 10.1, *б*. Теперь именно это направление следует принять за положительное для независимой основной системы уравнений типа  $Z$ , т. е. равенств (10.1).

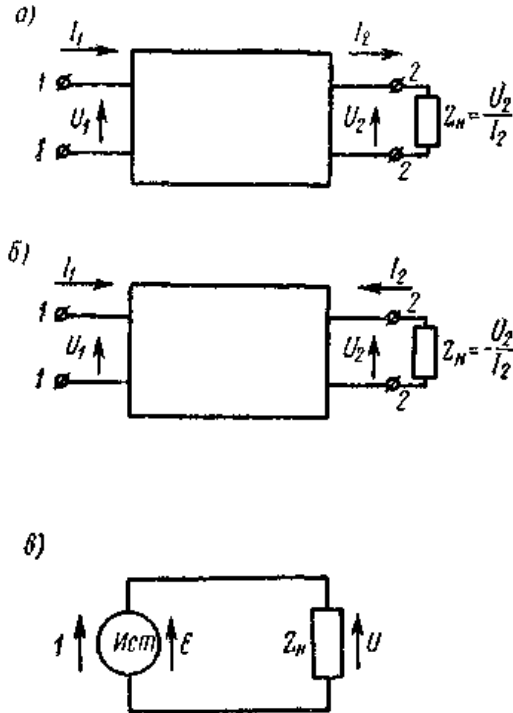


Рис. 10.1

Различие в выборе условно положительных направлений выходных скоростей в обоих случаях приводит к необходимости выражать и сопротивление нагрузки  $Z_H$  с разными знаками. Так, если для системы типа *A* принято выражать сопротивление нагрузки в виде:

$$Z_H = \frac{Q_2}{\dot{g}_2} \quad (10.9)$$

то для независимой системы уравнений типа *Z*, из-за противоположного направления выходной скорости, следует написать:

$$Z_H = -\frac{Q_2}{\dot{g}_2} \quad (10.9a)$$

Очевидно, что сопротивление здесь не может быть отрицательным, так как отсутствие внутренних источников энергии в четырехполюсниках было оговорено нами ранее и никаких нелинейных нагрузок здесь не предполагается. Появление отрицательного знака в равенстве (10.9a) говорит лишь о том, что сопротивление выражено здесь через силу и

скорость, имеющие направления, отличные от принятых на рис. 10.1, *а*. Именно такой результат должен получиться, если рассматривать  $Q_2$  не как внешнюю независимую силу, а как реакцию на воздействие  $Q_1$ . Последнее поясняет рис. 10.1, *в*, на котором изображен электрический генератор, работающий на нагрузку  $Z_H$ . Выбрав произвольную полярность генератора и обусловив этим направление текущего тока, можем написать для замкнутого контура:

$$E + U = 0,$$

где  $E$  — э. д. с. генератора;  $U$  — падение напряжения на нагрузке. Отсюда следует, что  $E = -U$ , а это значит:

$$Z_H = \frac{E}{I} = -\frac{U}{I}.$$

В данном случае знак минус появился потому, что э. д. с.  $E$  рассматривается как действующая сила, а напряжение  $U$  — как реакция. В дальнейшем, при использовании основных уравнений типа  $Z$  и производных равенств, будем всегда предполагать справедливым равенство (10.9а).

В ряде случаев, например при определении характеристических сопротивлений, определении оптимальной отдачи мощности от преобразователя нагрузке и т. п., более простые и наглядные результаты получаются при использовании основных уравнений типа  $A$ .

Поскольку получаемые результаты не могут зависеть от условно принятых направлений сил и скоростей, то при оперировании уравнениями типа  $A$  будем предполагать для них систему знаков, соответствующую рис. 10.1, *а*. Следует обратить внимание на то, что исходные уравнения (10.1) могут быть представлены еще в одной форме. Так, если на выходе преобразователя имеется лишь сопротивление нагрузки  $Z_H$  и отсутствуют какие-либо внешние силы, то при приложении силы  $Q_1$  на входе, на выходе возникает реакция, которая в соответствии с (10.9а) будет равна:

$$Q_2 = -Z_H \dot{g}_2.$$

Подставив это выражение во второе равенство системы (10.1), получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Z_{11} \dot{g}_1 + Z_{12} \dot{g}_2; \\ 0 &= Z_{21} \dot{g}_1 + (Z_{22} + Z_H) \dot{g}_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Равенство (10.8а) устанавливает известный из курса теоретической электротехники факт, что любой линейный преобразователь может быть полностью определен всего тремя из четырех коэффициентов, причем эти коэффициенты легко находятся экспериментально, например на основании опытов холостого хода и короткого замыкания.

### **10.3. Соотношения взаимности и коэффициенты преобразования**

Преобразовательные структуры, охватываемые общей теорией организации, являются обратимыми, чем утверждается возможность использования их либо в режиме двигателей (входная сторона — электрическая), либо в режиме генераторов (входная сторона — неэлектрическая).

Обратимость, или реверсивность действия, уже видна из уравнении преобразователей, рассмотренных в раз.10.2, поскольку в этих уравнениях величины на входе и выходе преобразователей всегда связаны друг с другом через коэффициенты с различными индексами (1,2 и 2,1). Такая связь физически осуществляется в самом преобразователе и выявляется из его уравнений при помощи так называемых соотношений взаимности, справедливых при вполне определенных режимах работы.

Взаимосвязь сторон была известна давно, но ее все еще очень часто игнорируют как в области технических, так даже и в области некоторых физических исследований. Например, давно исследовано влияние механического режима на такие тепловые параметры, как теплоемкость газа при постоянном давлении  $C_p$  и теплоемкость при постоянном объеме  $C_v$ . Разница между ними весьма значительна, поскольку для идеального двухатомного газа  $C_p/C_v=1,4$ . Такое различие теплоемкостей подчеркивает, что при термодинамическом преобразовании режим одной стороны (механической) влияет на режим другой стороны (тепловой), благодаря чему постоянные находятся только при вполне определенных условиях.

Термодинамикой также давно установлено обратное влияние теплового режима на такие механические параметры, как модули упругости при адиабатическом и изотермическом процессах. Учет этих обстоятельств, однако, делается далеко не всегда, хотя расхождение между значениями параметров может быть очень большим. Так, различие между диэлектрическими проницаемостями сегнетовой соли, найденными при равном нулю механическом напряжении или равной нулю деформации и обычной ориентации пластинки, достигает значения, примерно 1,7, но точное значение этого отношения остается неизвестным, поскольку определение данных параметров производилось без учета взаимосвязи сторон.

Соотношения, которые сейчас будут рассмотрены, должны еще более четко подчеркнуть общность взаимодействия сторон преобразователя.



Исходя из основной формы уравнений (10.1), можно получить ряд соотношений взаимности, справедливых при различных режимах работы и целиком от них зависящих. Так, если рассматривать преобразователь, к которому энергия подводится поочередно, со стороны входных зажимов 1-1 (см. рис. 10.1, б) и со стороны выходных зажимов 2-2, то найдутся и соответствующие соотношения.

Рассмотрим получающиеся равенства, задавая преобразователю различные рабочие режимы.

1. Преобразователи работают в режиме холостого хода в прямом и обратном направлениях. Такой режим означает поочередное равенство нулю скоростей  $\dot{g}_1$  и  $\dot{g}_2$ , откуда из уравнений (10.1) получим:

$$\begin{aligned} \text{при } \dot{g}_1 = 0 \quad \frac{Q_1}{\dot{g}_2} &= Z_{12}; \\ \text{при } \dot{g}_2 = 0 \quad \frac{Q_2}{\dot{g}_1} &= Z_{21}. \end{aligned}$$

Так как в исходной форме уравнений  $Z_{12} = Z_{21}$ , то найдем величину, называемую коэффициентом преобразования, или коэффициентом связи при холостом ходе:

$$K_0 = \left. \frac{Q_1}{\dot{g}_2} \right|_{\dot{g}_1=0} = \left. \frac{Q_2}{\dot{g}_1} \right|_{\dot{g}_2=0} = Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{a_{21}}. \quad (10.11)$$

В уравнении (10.11) одновременно приведена связь этого коэффициента с коэффициентом  $a_{21}$  уравнений типа А, в соответствии с равенствами (10.7). Ниже будут получены другие возможные выражения коэффициента преобразования, но только коэффициент  $K_0$ , определенный при холостом ходе, войдет в дальнейшем во все уравнения, поскольку он имеет самые простые и удобные формы выражения.

Приведенное равенство является одной из математических формулировок принципа взаимности и означает, что обобщенная сила  $Q_2$ , наблюдаемая на выходной стороне прямого преобразователя, приходящаяся на единицу скорости на входе, численно равна силе  $Q_2$ , возникающей на первичной стороне обратного преобразователя при приложении к выходу скорости, также равной единице, или силе, приходящейся на единицу скорости  $\dot{g}_2$ .

Рассмотренное соотношение взаимности может служить для количественной оценки процесса преобразования, а также может быть найдено экспериментально у функционирующего преобразователя.

Найдем теперь определение коэффициента преобразования при другом режиме работы.

2. Прямой преобразователь работает в режиме холостого хода на выходе, т. е. при  $\dot{g}_2 = 0$ , а обратный в режиме короткого замыкания, т. е. при  $Q_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} \text{при } Q_1 = 0 \quad -\frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2} &= \frac{Z_{12}}{Z_{11}}; \\ \text{при } \dot{g}_2 = 0 \quad \frac{Q_2}{Q_1} &= \frac{Z_{21}}{Z_{11}}. \end{aligned}$$

Присвоив этому коэффициенту преобразования индексы «к. х», что означает короткое замыкание на стороне 1-1 и холостой ход на стороне 2-2, получим:

$$K_{к.х.} = -\frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2} \Big|_{Q_1=0} = \frac{Q_2}{Q_1} \Big|_{\dot{g}_2=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{11}} = \frac{1}{a_{11}}. \quad (10.12)$$

Как видим, изменение режима работы привело также к изменению коэффициента преобразования.

3. Прямой преобразователь работает в режиме короткого замыкания на выходе, т. е. при  $Q_2 = 0$ , а обратный в режиме холостого хода. Воспользовавшись уравнениями (10.1), получим:

$$K_{х.к.} = \frac{Q_2}{Q_1} \Big|_{\dot{g}_2=0} = -\frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1} \Big|_{Q_2=0} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}} = -\frac{1}{a_{22}}. \quad (10.13)$$

Расстановка индексов при  $K$  подчинена тому же принципу, что и выше.

4. Прямой и обратный преобразователи поочередно работают в режиме короткого замыкания, т. е. при  $Q_2 = 0$  и  $Q_1 = 0$  соответственно. В этом случае из тех же основных уравнений найдем:

$$K_{к.к.} = -\frac{\dot{g}_1}{Q_2} \Big|_{Q_1=0} = -\frac{\dot{g}_2}{Q_1} \Big|_{Q_2=0} = \frac{Z_{12}}{\Delta_Z} = -\frac{1}{a_{12}}. \quad (10.14)$$

где  $\Delta_Z$  — определитель из коэффициентов уравнения (10.1).

Принципиально любое из выражений коэффициента преобразования может быть принято для характеристики преобразователя, но в дальнейшем, как это указывалось, будет употребляться наиболее

простое и удобное выражение (10.11), соответствующее режиму холостого хода с обеих сторон.

В том случае, если энергия находится в потенциальной форме и задана в виде функции перемещений, а не скоростей, то все взаимные соотношения могут быть получены аналогично из основных уравнений (10.1а). Те же результаты можно получить, воспользовавшись различными формами записи уравнений, что дает возможность, в случае необходимости, установить потом связи между коэффициентами преобразования при помощи табл. 10.1.

Итак, из основной формы (10.1 а), справедливой при выражениях энергии при помощи перемещений, а не скоростей, получим:

$$K_0 = K_C = \left. \frac{Q_1}{g_2} \right|_{g_1=0} = \left. \frac{Q_2}{g_1} \right|_{g_2=0} = c_{12} = c_{21}. \quad (10.15)$$

Воспользовавшись уравнениями типа *F*, найдем:

$$K_F = - \left. \frac{g_1}{g_2} \right|_{Q_1=0} = \left. \frac{Q_2}{Q_1} \right|_{g_2=0} = f_{12} = f_{21}. \quad (10.16)$$

Из уравнений типа *D* будем иметь:

$$K_D = \left. \frac{Q_1}{Q_2} \right|_{g_1=0} = - \left. \frac{g_2}{g_1} \right|_{Q_2=0} = d_{12} = d_{21}. \quad (10.17)$$

Наконец, из равенства типа *B* (или *Y*) будем иметь:

$$K_B = - \left. \frac{g_1}{Q_2} \right|_{Q_1=0} = \left. \frac{g_2}{Q_1} \right|_{Q_2=0} = b_{12} = b_{21}. \quad (10.18)$$

В данном случае выражения коэффициентов преобразования были найдены из уравнений в различной форме записи, причем скорости  $\dot{g}_i$  были заменены перемещениями  $g_i$ . В соответствии с этим для четкого различия всех полученных коэффициентов преобразования, последние снабжены индексами, означающими не режим работы, а форму записи уравнений.

В том случае, если преобразователь нелинеен и энергия задана в виде функции координат, соотношения взаимности могут быть найдены из уравнений (9.8). Так, одно из соотношений, аналогичное (10.15), будет иметь вид:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial g_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial g_1}.$$

Поскольку силы  $Q_i$  являются частными производными от потенциальной энергии, определяемой зависимостью (9.7), то это же взаимное соотношение может быть записано иначе:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial g_2} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial g_1 \partial g_2} = \frac{\partial Q_2}{\partial g_1}. \quad (10.19)$$

Воспользовавшись равенствами (9.9), видим, что для нелинейной системы

$$c_{12}(g_1, g_2) = c_{21}(g_1, g_2),$$

т. е. в данном случае приходится иметь дело не с постоянными коэффициентами преобразования, а с функциями преобразования.

Если позволяют условия задачи, то, прибегая к линейризации в области некоторых начальных значений координат  $g_{10}$  и  $g_{20}$ , можно функцию преобразования свести к определенному постоянному значению, например

$$K_0 = c_{12} = c_{21} = f(g_{10}, g_{20}) = \text{const}. \quad (10.20)$$

Аналогичным путем могут быть получены функции преобразования или коэффициент преобразования для нелинейной системы, при задании энергии в виде функции скоростей.

В заключение отметим, что равенства (10.11)—(10.14) для систем с преобразованием энергии, выраженной через скорости, а также равенства (10.15)—(10.18) для систем с энергией, выраженной через перемещения, имеют важное значение. Важность этих равенств заключается в том, что они помогают правильно выбрать форму записи уравнений преобразователя в тех случаях, когда законы прямого и обратного преобразования нам заданы. В этих условиях нужно найти верный путь для конкретного выбора сил и координат, что и помогают сделать приведенные соотношения взаимности. Примеры практического использования полученных выражений будут приведены позже.

Обратимость действия преобразователей может быть использована для определения их чувствительности без вспомогательных градуировочных измерительных приборов. Для этого нужно иметь два преобразователя, с которыми следует осуществить два эксперимента. В первом эксперименте на входные стороны преобразователей оказывают одинаковые воздействия и фиксируют эффекты на их выходных сторонах. Из этого эксперимента можно определить отношение чувствительностей.

Во втором эксперименте один из преобразователей обращают, т. е. оказывают теперь воздействие на выходную сторону, а входную соединяют с входной же стороной второго преобразователя, заставляя таким образом первый преобразователь работать на второй. Из этого

эксперимента находится произведение чувствительностей. Теперь ясно, что по отношению и произведению можно определить чувствительность каждого преобразователя.

#### **10.4. Выбор обобщенных сил и координат**

Существование двух систем аналогий показывает, что математически возможен достаточно произвольный выбор обобщенных сил и координат, поскольку всякая аналогия между качественно различными явлениями носит формальный характер до тех пор, пока не установлена взаимная связь между этими явлениями. Следствием, например, является то, что если выражение произведения двух сомножителей имеет размерность работы, то формально безразлично, какой из величин придать роль силы, а какой перемещения.

Так, если бы в качестве электрических координат были выбраны не количества электричества, а например, магнитные потоки, то тогда производные от потоков по времени, т. е. электродвижущие силы, стали бы играть роль скоростей.

Когда речь идет об общей теории организации, то возникает вопрос о том, что считать обобщенной силой, а что скоростью или перемещением. Выбор может быть теоретически произвольным, а практически оказывается predetermined имеющимися в распоряжении зависимостями. Поэтому важно выяснить, какие изменения произойдут в уравнениях, описывающих структуру преобразователя, если под обобщенными силами, скоростями и перемещениями будут пониматься различные величины, относительно которых только известно, что их произведение имеет размерность энергии или мощности, т. е. потока энергии.

Для того чтобы выяснить этот вопрос, можно поступить так: во всех производных формах уравнений структур преобразователей, имеющих как и в основной форме слева  $Q_1$  и  $Q_2$ , изменить смысл их, т. е. заменить обобщенные скорости обобщенными силами и наоборот.

Полученные таким образом измененные равенства следует затем сравнить с основной формой уравнений (10.1) и тем самым определить получившиеся различия от замены переменных. Чтобы не ошибиться, снабдим замененные величины индексами в виде штриха, т. е. будем подставлять  $Q'_i$  вместо  $\dot{g}_i$ ,  $\dot{g}'_i$  вместо  $Q_i$  и т. д. При этом необходимо соблюдать также определенную последовательность действий, которые можно расположить, например, в таком порядке:

1) Заменим в производных уравнениях (10.2) одновременно входные и выходные величины. В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= b_{11}\dot{g}'_1 - b_{12}\dot{g}'_2; \\ Q'_2 &= -b_{21}\dot{g}'_1 + b_{22}\dot{g}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

Сравнивая эти уравнения с основными равенствами (10.1), видим, что они отличаются только знаками при взаимных членах, которые теперь стали отрицательными.

2) Далее используем уравнения (10.4), которые после проведенной замены также можно сравнить с основными.

Произведем в этих уравнениях замену только входных величин и тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} Q'_1 &= f_{11}\dot{g}'_1 - f_{12}\dot{g}'_2; \\ Q'_2 &= f_{21}Q_1 + f_{22}\dot{g}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

Сопоставляя эти уравнения с основными, т. е. с (10.1), видим, что замена входных величин изменяет знак только при взаимном члене  $f_{12}$  в первом уравнении.

3) Изменим теперь смысл лишь одних выходных величин в уравнениях (10.3) и получим снова систему, пригодную для сравнения с уравнениями (10.1), т. е.

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= d_{11}\dot{g}_1 + d_{12}\dot{g}'_2; \\ Q'_2 &= -d_{21}\dot{g}_1 + d_{22}\dot{g}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.23)$$

Сопоставляя с основными уравнениями, видим, что разница заключается в изменении знака при взаимном члене  $d_{21}$ .

Проведенные замены переменных и сопоставление с основной формой уравнений (10.1) показывают, что изменения сводятся лишь к изменению знаков у одного из двух или у обоих взаимных членов.

Таким образом, если рассматривать все эти уравнения независимо друг от друга, то все четыре разновидности возможно заменить одной универсальной формой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= Z_{11}\dot{g}_1 \pm Z_{12}\dot{g}'_2; \\ Q_2 &= \pm Z_{21}\dot{g}_1 + Z_{22}\dot{g}'_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

Отсюда следует, что произвол в выборе обобщенных сил и скоростей приводит лишь к появлению двойственности знаков при взаимных членах исходных уравнений, и это следует учитывать при практическом использовании всех дальнейших выводов, которые для упрощения выкладок будут базироваться только на основной форме уравнений (10.1).

К аналогичным выводам можно было бы придти, основываясь также на равенствах (10.1а), которые можно теперь переписать в такой универсальной форме:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= c_{11}g_1 \pm c_{12}g_2; \\ Q_2 &= \pm c_{21}g_1 + c_{22}g_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.24a)$$

Конкретное выяснение того, какой системы знаков следует придерживаться при описании данной структуры преобразователя, вытекает из условия задания исходных величин, поскольку именно это, обычно, решает вопрос о знаках при взаимных членах. Различие знаков при взаимных членах является отражением того, что преобразование энергии из одного вида в другой происходит различными путями, т. е. при помощи различных физических явлений. В частности, коэффициенты преобразования могут оказаться действительными или мнимыми величинами, как это имеет место, например, в основных электромеханических преобразователях.

В заключение приведем табл. 10.2 величин, чаще всего принимаемых за обобщенные силы, перемещения и скорости, которыми следует пользоваться с учетом того, что было выше сказано о магнитном и тепловом сопротивлениях.

*Таблица 10.2*

Вид энергии	Обобщенные силы	Обобщенные перемещения	Обобщенные скорости
Электрическая	Э. д. с (напряжение)	Количество электричества	Ток
Магнитная	Магнитодвижущая сила	Магнитный поток	Э д с
Механическая	Сила	Линейное перемещение	Линейная скорость
	Момент	Угловое перемещение	Угловая скорость
Тепловая	Давление	Объем среды	Объемная скорость
	Температура	Энтропия	Производная от энтропии по времени
Химическая	Химический потенциал	Количество вещества	Скорость реакции

Теория организации дает возможность получить уравнения таких различных по принципу действия систем, как электромеханические, термоэлектрические, магнитострикционные, термомеханические, пьезоэлектрические и др. Поскольку эти уравнения возможно составить, то оказывается возможным применить к данным системам все основные выводы теории, касающиеся чувствительностей систем, состоянию, устойчивости, их входных и выходных сопротивлений, эффективности действия и т. д.

## 11. Топологические и компонентные уравнения как математические модели структур

### 11.1. Математические модели структур физических систем.

При построении математической модели структуры физической системы исходные данные должны содержать сведения о структуре системы и свойствах входящих в нее компонентов. Полусный граф совместно с уравнениями связей позволяет получить зависимости между переменными, которые связаны с выбранной надлежащим образом совокупностью независимых сечений и контуров. Эти зависимости отражают структурные свойства системы и называются *топологическими уравнениями*, причем сечения и контуры играют роль *системы координат*, в которой представляется математическая модель. Совокупность полюсных уравнений, связывающих переменные отдельных компонентов, составляет *компонентные уравнения*.

Топологические и компонентные уравнения дают полное описание структуры системы и путем их преобразования можно получить математические модели структур различных типов. Естественно стремление к таким моделям, которые содержат возможно меньшее число переменных, наиболее удобны по форме и требуют минимальных усилий при их построении.

Часто имеется возможность сформировать математическую модель структуры в *однородной системе координат*, в качестве которых выступают сечения или контуры. Соответственно получаем *уравнения сечений и уравнения контуров*. Однако в общем случае приходится прибегать к *неоднородным системам координат*, когда переменные связаны как с контурами, так и с сечениями. Система координат называется *сокращенной*, если используется только часть сечений и контуров полюсного графа,

В результате целенаправленного преобразования топологических и компонентных уравнений получаем систему уравнений, которую можно представить в матричной форме следующим образом:

$$W X = F Q$$



Квадратная матрица  $W$  и матрица  $Q$ , элементы которых выражаются через параметры компонентов и интегродифференциальные операторы, полностью определяют систему уравнений относительно вектора переменных  $X$ . Вектор  $F$  содержит в качестве своих компонент заданные функции, характеризующие независимые источники.

Решение уравнения  $WX=FQ$  относительно вектора  $X$  позволяет получить совокупность независимых переменных, через которые определяются и любые другие переменные, характеризующие состояние структуры системы. Часто возникает задача представления модели структуры физической системы относительно ее сторон – входов и выходов. Тогда уравнение  $WX=FQ$  преобразуется к такому виду, чтобы оно содержало только входные и выходные переменные, а остальные переменные были исключены.

Если требуется получить математическую модель в дифференциальной форме, то необходимо обеспечить такую процедуру ее формирования, чтобы матрица  $W$  не содержала интегральных операторов. Обычно эта цель достигается в неоднородных системах координат или принимаются какие-либо специальные методы преобразования полюсных графов и полюсных уравнений компонентов системы. Уравнение  $WX=FQ$  в дифференциальной форме может быть преобразовано в уравнение переменных состояния, которое для линейной системы имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv,$$

где  $x$  — вектор переменных состояния и  $v$  — задающий вектор, связанные между собой матрицами  $A$  и  $B$ .

Общая процедура преобразования исходных данных к математическим моделям структуры системы показана на рис. 11.1.

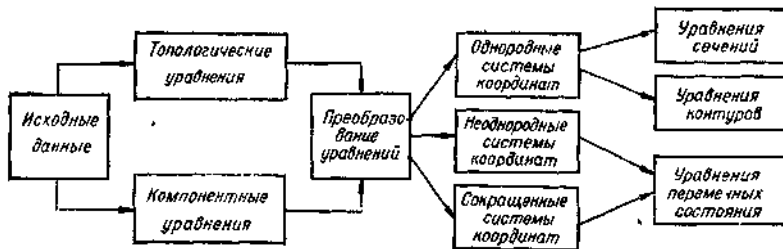


Рис. 11.1. Преобразование исходных данных к математическим моделям структуры системы.

## 11.2. Топологические уравнения

Уравнения связей для вершин  $(p, q)$ -графа можно записать в матричной форме

$$A_0 \eta_d = 0,$$

где  $A_0$  — сокращенная матрица инцидентности;  $\eta_d = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q)$  — вектор поперечных величин дуг графа.

Действительно, строка матрицы  $A_0$ , соответствующая некоторой вершине, содержит элементы  $\pm 1$  в столбцах инцидентных этой вершине дуг, а знак учитывает направление дуги относительно вершины. Произведение строки на вектор  $\eta_d$  дает соответствующее уравнение связи, причем написанное выше уравнение представляет  $p - 1$  таких уравнений, и все они независимы. Ясно, что замена матрицы  $A_0$  матрицей сечений  $\Pi$  не нарушает равенства. Поэтому уравнения связей для независимых сечений в матричной форме имеют вид:

$$\Pi \eta_d = 0$$

Аналогично уравнение связей для  $q - p + 1$  независимых контуров получим как произведение матрицы контуров  $P$  на вектор продольных переменных  $\xi_d = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q)$ , т. е.

$$P \xi_d = 0$$

Уравнения связей для поперечных и продольных переменных относительно сечений и контуров образуют совокупность *топологических уравнений*.

Между матрицами сечений и контуров орграфа, определяемых некоторым фундаментальным деревом, имеются следующие зависимости:

$$P P' = 0; P \Pi' = 0.$$

Представив топологические матрицы в канонической форме и выполнив соответствующие операции, имеем:

$$1 \pi \begin{bmatrix} \rho' \\ 1 \end{bmatrix} = \rho' + \pi = 0,$$

откуда получаем

$$\rho = -\pi'; \pi = -\rho'.$$

Таким образом, для определения топологических матриц достаточно знать одну из них, а другая определяется полученными соотношениями.

Если дуги графа упорядочены так, что сначала следуют ветви фундаментального дерева, а за ними хорды, то в системе сечений и контуров, определяемых этим деревом, топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$1 \pi \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = 0; \quad \rho 1 \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = 0,$$

где переменные ветвей дерева отмечены индексом  $T$ , а переменные хорд — индексом  $N$ . Выполнив умножение блочных матриц и векторов, получим

$$\eta_T + \pi \eta_N = 0; \quad \rho \xi_T + \xi_N = 0,$$

откуда

$$\eta_T = -\pi \eta_N = \rho' \eta_N; \quad \xi_N = -\rho \xi_T = \pi' \xi_T.$$

Полученные соотношения показывают, что поперечные величины дерева выражаются через поперечные величины дополнения, а продольные величины дополнения — через продольные величины дерева. Таким образом, из  $2q$  переменных топологически независимыми являются только  $p - 1$  поперечных и  $q - p + 1$  продольных переменных, т. е. всего  $q$  величин. Остальные  $q$  переменных легко определяются с помощью матрицы  $\pi$  или  $\rho$ . Из выражений

$$\eta_d = \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho' \\ 1 \end{bmatrix} \eta_N;$$

$$\xi_d = \begin{bmatrix} \xi_T \\ \xi_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi' \end{bmatrix} \xi_T.$$

следуют важные формулы:

$$\eta_d = P' \eta_N; \quad \xi_d = \Pi' \xi_T.$$

Рассмотрим в качестве примера граф транзисторной схемы (см. рис. 11.2, б), в который введена дополнительная разомкнутая дуга  $Q$  для фиксации напряжения между вершинами  $b$  и  $c$  (рис. 11.3).

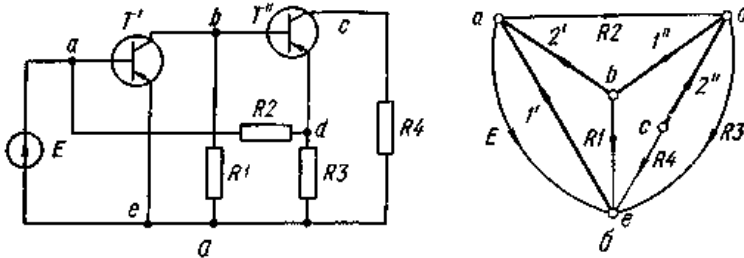


Рис 11.2. Транзисторная схема (а) и ее граф (б)

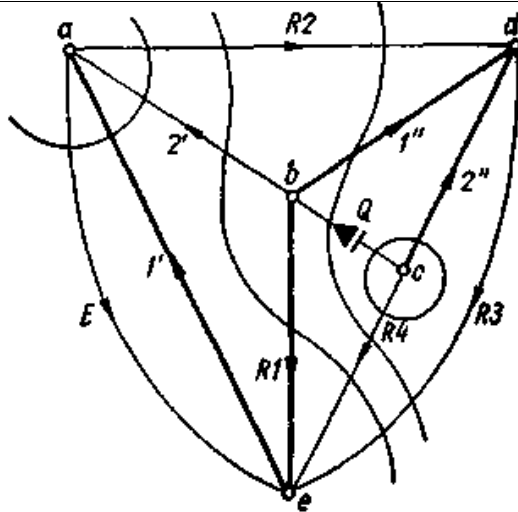


Рис. 11.3. Граф транзисторной схемы с разомкнутой дугой Q, фиксирующей искомое напряжение.

Системы независимых сечений и контуров определяются выбранным фундаментальным деревом (ветви выделены жирными линиями). При этом

$$\pi = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} E & 2' & R2 & R3 & R4 & Q \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccccc} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1' \\ R1; \\ 1'' \\ 2'' \end{array} \end{array}$$

$$\rho = -\pi^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1' & R1 & 1'' & 2'' \end{array} \\ \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} E \\ 2' \\ R2 \\ R3 \\ R4 \\ Q \end{array} \end{array}$$

Топологические уравнения в выбранной системе координат имеют вид:

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} i_1' \\ i_{R1}' \\ i_1'' \\ i_2'' \\ i_E \\ i_2' \\ i_{R2}' \\ i_{R3}' \\ i_{R4}' \\ i_Q \end{bmatrix} = 0;$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1' \\ u_{R1}' \\ u_1'' \\ u_2'' \\ u_E \\ u_2' \\ u_{R2}' \\ u_{R3}' \\ u_{R4}' \\ u_Q \end{bmatrix} = 0.$$

Зависимости между переменными выражаются соотношениями:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_{R1}' \\ i_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_E \\ i_2' \\ i_{R2}' \\ i_{R3}' \\ i_{R4}' \\ i_Q \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_E \\ u_2' \\ u_{R2}' \\ u_{R3}' \\ u_{R4}' \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_{R1}' \\ u_1'' \\ u_2'' \end{bmatrix}.$$

### 11.3. Компонентные уравнения

В зависимости от того, какая переменная (поперечная или продольная) дуги выражается ее полюсным уравнением через другие переменные, множество дуг полюсных графов компонентой разбивается на  $y$ -дуги и  $z$ -дуги. Соответственно разбиваются и векторы поперечных и продольных переменных:

$$\eta_X = (\eta_Y, \eta_Z) \text{ и } \xi_X = (\xi_Y, \xi_Z).$$

Следует обратить внимание на то, что в отличие от векторов  $\eta_d$  и  $\xi_d$  векторы  $\eta_X$  и  $\xi_X$  содержат переменные, связанные не со всеми дугами графа, а только с дугами полюсных графов компонентов.

В общем случае следует считать, что поперечные переменные  $y$ -дуг и продольные переменные  $z$ -дуг могут выражаться через любую совокупность переменных. Поэтому компонентные уравнения в матричной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \eta_Y &= Y_d \xi_Y + N_d \eta_Z + N'_d \eta_Y + Y'_d \xi_Z; \\ \xi_Z &= M_d \xi_Y + Z_d \eta_Z + Z'_d \eta_Y + M'_d \xi_Z. \end{aligned}$$

Входящие в эти уравнения матрицы определяются на основании полюсных уравнений компонентов рассматриваемой системы. Компонентные уравнения можно представить и в неявной форме

$$[V_\xi \ V_\eta] \begin{bmatrix} \xi_X \\ \eta_X \end{bmatrix} = 0,$$

где  $V = [V_\xi \ V_\eta]$  — матрица размера  $q_X \times 2q_X$ , если под  $q_X$  понимать число дуг полюсных графов компонентов.

Независимые источники, характеризуемые заданными поперечными  $v(t)$  и продольными  $\varepsilon(t)$  величинами, относятся соответственно к  $j$ -дугам и  $e$ -дугам и представляются уравнениями:

$$\eta_j = v(t); \quad \xi_e = \varepsilon(t).$$

Разомкнутые дуги описываются уравнением  $\eta = 0$ . Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями поперечных величин, либо как резистивные  $y$ -дуги с нулевой проводимостью. Короткозамкнутые дуги описываются уравнением  $\xi = 0$ . Их можно рассматривать либо как источники с нулевыми значениями продольных величин, либо как резистивные  $z$ -дуги с нулевым сопротивлением.

Запишем, например, компонентные уравнения дуг графа рис. 11.3. Пусть, резистивные двухполюсники представлены их сопротивлениями  $R_1, R_2, R_3$  и  $R_4$ , уравнения транзистора Т1 выражены через  $g$ -параметры (дуги 1' и 2'), а уравнения транзистора Т2 — через  $h$ -параметры (дуги 1'' и 2''), т. е.

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} u_1'' \\ i_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1'' \\ u_2'' \end{bmatrix}.$$

На основе этих соотношений имеем:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \\ i_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & g_{12} \\ 0 & h_{22} & 0 \\ g_{21} & 0 & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1}'' \\ i_1'' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{R1}'' \\ u_1'' \\ u_{R2} \\ u_{R3} \\ u_{R4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R1}'' \\ i_1'' \\ i_{R2} \\ i_{R3} \\ i_{R4} \end{bmatrix}.$$

Как видно, в рассматриваемом примере матрицы  $N'_d$ ,  $Y'_d$ ,  $Z'_d$ ,  $M'_d$  оказались нулевыми.

В неявной форме компонентные уравнения представляются матрицей:

$$V = \begin{array}{cccccccccccccccc} u_1' & u_{R1} & u_1'' & u_2'' & u_2' & u_{R2} & u_{R3} & u_{R4} & i_1' & i_{R1} & i_1'' & i_2'' & i_2' & i_{R2} & i_{R3} & i_{R4} \\ \hline g_{11} & & & & g_{12} & & & & -1 & & & & & & & & i' \\ & -1 & & & & & & & & R_1 & & & & & & & R1 \\ & & -1 & h_{12} & & & & & & & h_{11} & & & & & & i'' \\ & & & h_{22} & & & & & & & h_{21} & -1 & & & & & 2'' \\ g_{21} & & & & g_{22} & & & & & & & & -1 & & & & 2' \\ & & & & & -1 & & & & & & & & & R_2 & & R2 \\ & & & & & & -1 & & & & & & & & & R_3 & R3 \\ & & & & & & & -1 & & & & & & & & & R4 \end{array}$$

Дуга  $E$  независимого источника напряжения описывается уравнением  $u_E = e(t)$ , а разомкнутая дуга  $Q$ , фиксирующая напряжение между вершинами  $b$  и  $c$ , — уравнением  $i_Q = 0$ .

## 11.4. Уравнения сечений.

Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как  $u$ -дуги, поперечные переменные которых выражаются через продольные переменные, то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\eta_Y = Y_d \xi_Y.$$

Представим матрицу сечений как  $\Pi = [\Pi_Y, \Pi_J]$ , где субматрицы  $\Pi_Y$  и  $\Pi_J$  соответствуют столбцам  $u$ -дуг и задающих источников поперечных величин, т. е.  $j$ -дуг (предполагается, что задающие источники продольных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[\Pi_Y, \Pi_J] \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем  $\Pi_Y \eta_Y = -\Pi_J \eta_J$  или  $\Pi_Y Y_d \xi_Y = -\Pi_J v$ . Подставив  $\xi_Y = \Pi_Y^t \xi_T$ , приходим к *уравнениям сечений* в матричной форме

$$(\Pi_Y Y_d \Pi_Y^t) \xi_T = -\Pi_J v.$$

или

$$Y \xi_T = J.$$

Здесь  $Y = \Pi_Y Y_d \Pi_Y^t$  и  $J = -\Pi_J v$  — матрично-векторные параметры математической модели в однородной системе координат (сечений). Определив из этого уравнения вектор продольных переменных дерева  $\xi_T$ , остальные переменные можно найти по формулам  $\xi_N = \pi^t \xi_T$  и  $\eta_Y = Y_d \xi_Y$ . Так как число независимых сечений графа  $v = p - k$ , то матричное уравнение сечений соответствует  $v$  скалярным уравнениям.

Входящие в выражения для  $Y$  и  $J$  матрицы обычно сильно разреженные, поэтому вместо умножения матриц можно воспользоваться правилами непосредственной записи матрично-векторных параметров на основе графа системы и полюсных уравнений.

Для вектора  $J$  такое правило очень простое и непосредственно следует из выражения  $J = -\Pi_J v$ . Ясно, что  $k$ -я компонента вектора  $J$  равна со знаком минус произведению  $k$ -й строки матрицы  $\Pi_J$  на вектор  $v$ , т. е.  $j_k = -\Pi_{J(k)} v$ . А это значит, что она может быть записана как алгебраическая сумма задающих поперечных величин тех источников, дуги которых инцидентны  $k$ -му сечению, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если дуга направлена противоположно сечению, и со знаком минус, если направления дуги и сечения совпадают.



Правило записи матрицы  $Y$  получим, представив входящую в ее выражение матрицу  $\Pi_Y$  через векторы-столбцы, т. е.

$$Y = \left[ \Pi_Y^{(1)}, \Pi_Y^{(2)}, \dots, \Pi_Y^{(m)} \right] \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{m1} & y_{m2} & \dots & y_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_Y^{(1)t} \\ \Pi_Y^{(2)t} \\ \dots \\ \Pi_Y^{(m)t} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Pi_Y^{(i)} y_{ij} \Pi_Y^{(i)t} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(i)t} y_{ij},$$

где  $m=q_Y$  означает число  $y$ -дуг.

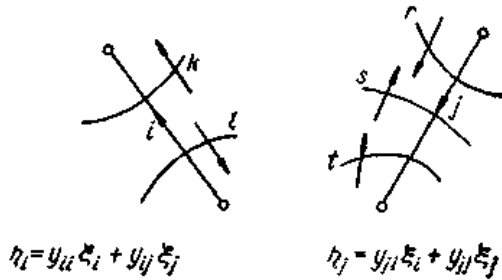
Произведение  $i$ -го столбца  $\Pi_Y^{(i)}$  матрицы  $\Pi_Y$  на транспонированный  $j$ -й столбец (т. е. строку)  $\Pi_Y^{(j)t}$  равно квадратной матрице  $\nu$ -го порядка:

$$\Pi_Y^{(i)} \Pi_Y^{(i)t} = \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i} \\ \Pi_{Y2i} \\ \dots \\ \Pi_{Yvi} \end{bmatrix} \left[ \Pi_{Y1j}, \Pi_{Y2j}, \dots, \Pi_{Yvj} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{Y1i} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Y1i} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Y1i} \Pi_{Yvj} \\ \Pi_{Y2i} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Y2i} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Y2i} \Pi_{Yvj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{Yvi} \Pi_{Y1j} & \Pi_{Yvi} \Pi_{Y2j} & \dots & \Pi_{Yvi} \Pi_{Yvj} \end{bmatrix}$$

Сумма таких матриц, умноженных на соответствующие скаляры  $y_{ij}$  (параметры компонентов), и дает в результате матрицу системы  $Y$ . Очевидно,  $y_{ij}$  появится в тех клетках матрицы  $Y$ , которым соответствуют ненулевые значения приведенной выше матрицы. Собственный параметр  $y_{ij}$   $i$ -й дуги записывается на пересечении строк и столбцов матрицы  $Y$ , которые соответствуют инцидентным этой дуге сечениям (со знаком плюс, если относительно данной дуги направления рассматриваемых сечений совпадают, и со знаком минус, если эти направления противоположны). Взаимный (управляющий) параметр  $y_{ij}$  дуг с номерами  $i$  и  $j$  записывается в матрицу  $Y$  на пересечении строк, соответствующих тем сечениям,

которые инцидентны  $i$ -й дуге, и столбцов, соответствующих тем сечениям, которые инцидентны  $j$ -й дуге. При этом знак, с которым вписывается  $y_{ij}$ , зависит от того, как направлены дуги относительно рассматриваемых сечений. Если эти направления одинаковы, т. е. одновременно совпадают или противоположны, то  $y_{ij}$  вписывается в соответствующую клетку матрицы  $Y$  со знаком плюс. Если же эти направления различные, т. е. направление одной дуги совпадает с направлением рассматриваемого инцидентного ей сечения, а направление другой противоположно с рассматриваемым инцидентным ей сечением, то  $y_{ij}$  вписывается со знаком минус. Приведенное правило иллюстрируется на рис. 11.4.



	$k$	$l$	$r$	$s$	$t$
$k$	$y_{kk}$	$-y_{kl}$	$y_{kr}$	$-y_{ks}$	$-y_{kt}$
$l$	$-y_{lk}$	$y_{ll}$	$-y_{lr}$	$y_{ls}$	$y_{lt}$
$r$	$y_{rk}$	$-y_{rl}$	$y_{rr}$	$-y_{rs}$	$-y_{rt}$
$s$	$-y_{sk}$	$y_{sl}$	$-y_{sr}$	$y_{ss}$	$y_{st}$
$t$	$-y_{tk}$	$y_{tl}$	$-y_{tr}$	$y_{ts}$	$y_{tt}$

Рис. 11.4. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу  $Y$ .

### 11.5. Уравнения контуров

Если все дуги полюсных графов компонентов можно представить как  $z$ -дути, продольные переменные которых выражаются через поперечные переменные, то компонентные уравнения упрощаются к виду:

$$\xi_Z = Z_d \eta_Z$$

Представим матрицу контуров как  $P = [P_Z, P_E]$ , где субматрицы  $P_Z$  и  $P_E$  содержат соответственно столбцы  $z$ -дуг и задающих источников продольных величин, т. е.  $e$ -дуг (предполагается, что задающие источники поперечных величин отсутствуют). Топологическое уравнение запишется следующим образом:

$$[P_Z, P_E] \begin{bmatrix} \xi_Z \\ \xi_E \end{bmatrix} = 0,$$

откуда получаем  $P_Z \xi_Z = -P_E \xi_E$  или  $P_Z Z_d \eta_Z = P_E \epsilon$ . Подставив  $\eta_Z = P_Z^t \eta_N$ , приходим к *уравнениям контуров* в матричной форме

$$(P_Z Z_d P_Z^t) \eta_N = -P_E \epsilon,$$

или

$$Z \eta_N = E.$$

Здесь  $Z = P_Z Z_d P_Z^t$  и  $E = -P_E \epsilon$  — матрично-векторные параметры математической модели структуры в однородной системе координат (контуров). Определив из этого уравнения вектор поперечных переменных дополнения  $\eta_N$ , остальные переменные можно найти по формулам  $\eta_T = \rho^t \eta_N$  и  $\xi_Z = Z_d \eta_Z$ . Так как число независимых контуров графа равно  $\sigma = q - p + k$ , то матричное уравнение контуров соответствует  $\sigma$  скалярным уравнениям.

Легко заметить дуальность математических моделей структур в однородных системах координат (сечений или контуров). Все соотношения для одной из них можно получить из другой простой заменой дуальных терминов и величин:

Сечение  $\leftrightarrow$  контур

$y$ -дуга  $\leftrightarrow$   $z$ -дуга

$j$ -дуга  $\leftrightarrow$   $e$ -дуга

Поперечная переменная  $\leftrightarrow$  продольная переменная

Матрица сечений  $\leftrightarrow$  матрица контуров

Матрица  $Y_d \leftrightarrow$  матрица  $Z_d$

Матрица  $Y \leftrightarrow$  матрица  $Z$

Вектор  $J \leftrightarrow$  вектор  $E$

В частности, используя дуальность терминов и величин, можно сформулировать правила записи матрицы  $Z$  и вектора  $E$  непосредственно из рассмотрения графа структуры и полюсных уравнений компонентов. Так,  $k$ -я компонента  $e_k$  вектора  $E$  равна алгебраической сумме задающих продольных величин тех источников, дуги которых инцидентны  $k$ -му контуру, причем каждая такая величина берется со знаком плюс, если направления дуги и контура совпадают, и со знаком минус, если их направления противоположны. Правило записи матрицы  $Z$  иллюстрируется на рис. 11.5.

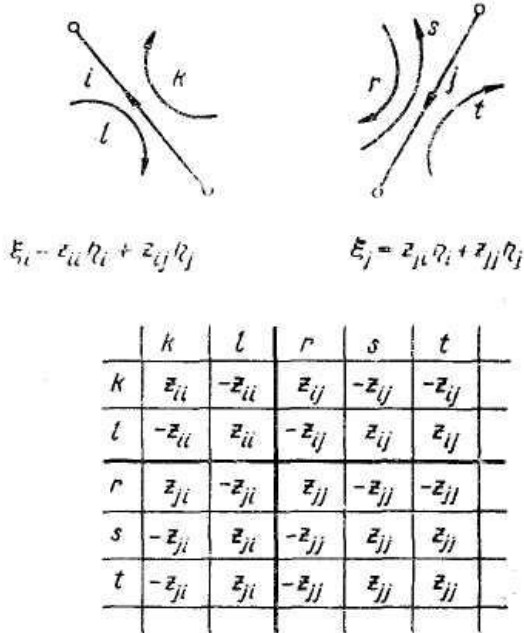


Рис.11.5. Правило записи собственных и взаимных параметров дуг в матрицу  $Z$ .

### 11.6. Преобразование источников

До сих пор предполагалось, что в структуре действуют источники только одного типа. Однако нетрудно обобщить математические модели структур в однородных системах координат на случаи, когда имеются задающие источники как продольных, так и поперечных величин, описываемые соответственно уравнениями  $\xi_E = e(t)$  и  $\eta_j = j(t)$ .

Рассмотрим сначала уравнения сечений. Выберем фундаментальное дерево так, чтобы все дуги независимых источников продольных величин ( $e$ -дуги) вошли в это дерево, а все дуги независимых источников поперечных величин ( $j$ -дуги)— в дополнение. Это всегда возможно, так как источники продольных величин не могут образовать контуров, а источники поперечных величин — сечений. Если бы это условие было нарушено, то некоторые из источников в силу топологических уравнений для таких сечений и контуров уже не являлись бы независимыми, что свидетельствовало бы о некорректной постановке задачи.

Расположив дуги графа так, что за  $e$ -дугами следуют  $y$ -дуги, а затем  $j$ -дуги, запишем топологические уравнения для сечений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & P_{EY} & P_{EJ} \\ 0 & P_{YY} & P_{YJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_Y \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0.$$

Здесь матрица сечений представлена через субматрицы, полученные разбиением ее строк на два подмножества ( $e, y_T$ ) и столбцов на три подмножества ( $e, y, j$ ). Единичная субматрица отражает тот факт, что  $e$ -дуги инцидентны только своим сечениям, так как все они включены в фундаментальное дерево. Из топологического уравнения имеем два матричных соотношения:

$$\eta_E = -P_{EY} \eta_Y - P_{EJ} \eta_J; \quad P_{YY} \eta_Y = -P_{YJ} \eta_J.$$

Подставив сюда  $\eta_Y = Y_d \xi_Y$  и  $\eta_J = v$ , а также выразив  $\xi_Y$  через продольные величины дерева  $\xi_T$ , т. е.

$$\xi_Y = P'_{Y} \xi_T = [P'_{EY}, P'_{YY}] \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = P'_{EY} \epsilon + P'_{YY} \xi_{YT},$$

получим

$$\begin{aligned} \eta_E &= -P_{EY} Y_d (P'_{EY} \epsilon + P'_{YY} \xi_{YT}) - P_{EJ} v; \\ (P_{YY} Y_d P'_{YY}) \xi_{YT} &= -P_{YJ} v - (P_{YY} Y_d P'_{EY}) \epsilon. \end{aligned}$$

Первое выражение может быть использовано для определения поперечных величин  $e$ -дуг (если это требуется). Второе соотношение представляет собой уравнение сечений, которое в краткой записи выражается следующим образом:

$$Y \xi_{YT} = J$$

Матрицу

$$Y = P_{YY} Y_d P'_{YY}$$

можно записать по правилу, приведенному в (11.4) с тем различием, что учитывается инцидентность  $y$ -дуг только сечениям, определяемым  $y$ -ветвями дерева ( $y$ -сечениям).

Вектор

$$J = -P_{YJ} v - (P_{YY} Y_d P'_{EY}) \epsilon$$

учитывает источники обоих типов, представленные величинами  $v$  и  $\epsilon$ . Первое слагаемое  $-P_{YJ} v$  представляет собой вектор, компонентами которого служат алгебраические суммы задающих поперечных величин дуг источников, инцидентных соответствующим  $y$ -сечениям. Второе слагаемое  $-Y \epsilon$  учитывает воздействие источников продольных величин, для записи матрицы  $Y = P_{YY} Y_d P'_{EY}$  также можно воспользоваться правилом, аналогичным приведенному в (11.4) с тем

различием, что при вписывании параметра  $y_{ij}$  рассматривается инцидентность  $i$ -й дуги  $y$ -сечениям и инцидентность  $j$ -й дуги  $e$ -сечениям.

Для получения уравнений контуров при наличии источников обоих типов необходимо, как и ранее, выбрать фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все  $e$ -дуги, а все  $y$ -дуги оказались в дополнении. Топологическое уравнение записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_Y \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

С учетом соотношений  $\xi_{Z^*} = Z_{\alpha} \eta_{Z^*}$ ,  $\xi_E = \varepsilon$  и  $\eta_{J^*} = v$  получаем

$$\begin{aligned} (P_{ZZ} Z_{\alpha} P'_{ZZ}) \eta_{Z^*} &= -P_{ZE} \varepsilon - (P_{ZZ} Z_{\alpha} P'_{JZ}) v; \\ \xi_{J^*} &= -P_{JZ} Z_{\alpha} (P'_{JZ} v + P'_{ZZ} \eta_{Z^*}) - P_{JE} \varepsilon. \end{aligned}$$

Первое из них представляет собой уравнение контуров, которое в краткой записи выражается следующим образом

$$Z \eta_{Z^*} = E,$$

где  $Z = P_{ZZ} Z_{\alpha} P'_{ZZ}$  и  $E = -P_{ZE} \varepsilon - (P_{ZZ} Z_{\alpha} P'_{JZ}) v$ .

Для записи матрично-векторных параметров  $Z$  и  $E$  можно воспользоваться правилами, дуальными приведенным выше правилам записи матрицы  $Y$  и вектора  $J$ .

Матрицу  $Y' = \Pi_{YY} Y_{\alpha} \Pi'_{EY}$  размера  $q_Y \times q_E$  можно рассматривать как оператор, преобразующий источники продольных величин в задающие поперечные переменные. Аналогично матрицу  $Z' = P_{ZZ} Z_{\alpha} P'_{JZ}$  размера  $q_Z \times q_J$  можно рассматривать как оператор, преобразующий источники поперечных величин в задающие продольные величины.

Так как переменными уравнений в однородных системах координат служат векторы  $\xi_{YT}$  и  $\eta_{ZN}$ , то при наличии  $q_E$  источников продольных величин и  $q_J$  источников поперечных величин число скалярных уравнений сечений равно  $\nu - q_E = p - k - q_E$ , и число скалярных уравнений контуров равно  $\sigma - q_J = q - p + k - q_J$ .

При формировании уравнений сечений короткозамкнутые дуги целесообразно представить как  $e$ -дуги, а разомкнутые — как  $y$ -дуги. Все эти дуги вводятся в дерево. Тогда искомые поперечные переменные определяются из уравнения для  $\eta_E$ , а искомые продольные переменные — из уравнений сечений как компоненты вектора  $\xi_{YT}$ .

При формировании уравнений контуров короткозамкнутые дуги целесообразно представить как  $z$ -дуги, а разомкнутые — как  $j$ -дуги. Все эти дуги вводятся в дополнение. Тогда искомые поперечные переменные определяются из уравнений контуров как компоненты вектора  $\eta_N$ , а искомые продольные переменные — из уравнения для  $\xi_J$ .

Рассмотрим несколько примеров.

### 11.7. Структура транзисторной схемы

Проиллюстрируем методы формирования уравнений в однородных системах координат на примере структуры транзисторной схемы (см. рис. 11.2, а), используя ее граф (см. рис. 11.3).

При выводе уравнений сечений необходимо дугу  $E$  источника напряжения  $e(t)$  и разомкнутую дугу  $Q$  ввести в дерево, а также представить транзисторы  $g$ -параметрами и резисторы— проводимостями. Выбрав дерево, как показано на рис. 11.6, запишем матрицу сечений с разбиением на блоки:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YU} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} =$$

	$I$	$R1$	$I''$	$Q$	$2'$	$R2$	$I'$	$2''$	$R3$	$R4$	
$E$	1					1	-1	-1			
$R1$		1				-1		1	1	1	
$I''$			1		1	1				-1	
$Q$				1	1						1

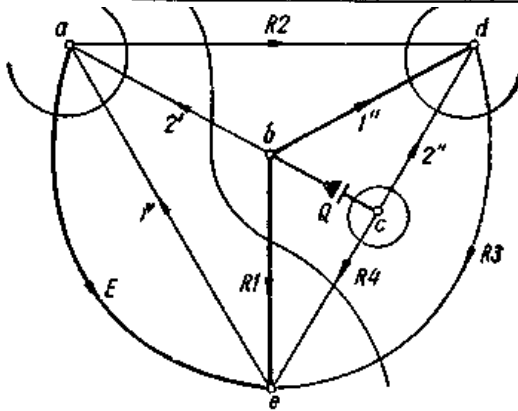


Рис. 11.6. Граф структуры транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений сечений.

Как видно, субматрицы  $\Pi_{EJ}$  и  $\Pi_{YJ}$  отсутствуют, так как граф не содержит дуг независимых источников тока ( $j$ -дуг). Матрица проводимостей дуг полюсных графов компонентов  $Y_L$ , входящая в компонентное уравнение  $i_Y = Y_L u_Y$ , записывается в виде:

	R1	I''	Q	2''	R2	1'	2'	R3	R4	
Y <sub>я</sub> =	G <sub>1</sub>									R1
		g'' <sub>11э</sub>		g'' <sub>12э</sub>						I''
										Q
		g'' <sub>21э</sub>		g'' <sub>22э</sub>						2''
					G <sub>2</sub>					R2
						g' <sub>11б</sub>	g' <sub>12б</sub>			1'
						g' <sub>21б</sub>	g' <sub>22б</sub>			2'
								G <sub>3</sub>		R3
									G <sub>4</sub>	R4

Матрично-векторные параметры уравнения сечений  $Y u_{YT} = J$  определяется формулами:  $Y = \Pi_{YY} Y_{Д} \Pi'_{YY}$  и  $J = -\Pi_{Yj} j - Y e = -Y e$ , где  $Y' = \Pi_{YY} Y_{Д} \Pi'_{EY}$ . Перемножив соответствующие матрицы, получим:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & R1 & I'' & Q \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline g'_{22б} + G_1 + G_2 + G_3 + G_4 \\ \hline \end{array} & -G_2 - G_3 & G_4 \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline -G_2 - G_3 \\ \hline \end{array} & g''_{11э} + g''_{12э} + g''_{21э} + g''_{22э} + G_2 + G_3 & g''_{12э} + g''_{22э} \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline G_4 \\ \hline \end{array} & g''_{21э} + g''_{22э} & g''_{22э} + G_4 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} R1 \\ I'' \\ Q \end{array}$$
  

$$Y' = \begin{array}{|c|} \hline -G_2 - g'_{21б} - g'_{22б} \\ \hline G_2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} R1 \\ I'' \\ Q \end{array}$$

Таким образом, имеем уравнения сечений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} g'_{22б} + G & & & \\ -G_2 - G_3 & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G_2 - G_3 & G_4 \\ g''_{11э} + G_2 + G_3 & g''_{12э} + g''_{22э} \\ g''_{21э} + g''_{22э} & g''_{22э} + G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{R1} \\ u_{I''} \\ u_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 + g'_{21б} + g'_{22б} \\ -G_2 \\ 0 \end{bmatrix} e,$$

где



$$G = G_1 + G_2 + G_3 + G_4; \quad g''_3 = g''_{113} + g''_{123} + g''_{213} + g''_{223}.$$

Матрицы  $Y$  и  $Y'$  можно также записать по приведенным ранее правилам. Например, проводимость  $G_2$  записывается на пересечении строк и столбцов соответствующих сечениям  $R1$  и  $I''$ , так как дуга  $R2$  инцидентна этим сечениям, причем симметрично от главной диагонали проводимость  $G_2$  записывается со знаком минус вследствие противоположности направлений сечений  $R1$  и  $I''$  относительно дуги  $R2$ . Взаимная проводимость  $g''_{123}$  дуги  $I''$  транзистора  $T2$  записывается на пересечении второй строки с вторым и третьим столбцами, так как дуга  $I''$  инцидентна сечению  $I''$ , а дуга  $2''$  — сечениям  $I''$  и  $Q$ . Поскольку направление дуги  $2''$  совпадает с инцидентными ей сечениями  $I''$  и  $Q$ , то  $g''_{123}$  везде вписывается со знаком плюс. Аналогично вписываются в матрицу проводимости и другие параметры компонентов. Собственная проводимость  $g'_{116}$  дуги  $I'$  транзистора  $T1$  не вошла в матрицы  $Y$  и  $Y'$ , так как эта дуга не инцидентна  $y$ -сечениям.

Тройные матричные произведения удобно также получать суммированием строк и столбцов матрицы  $Y_d$ . Так как в выражении  $Y = \Pi_{YY} Y_d \Pi_{YY}^t$  ненулевые элементы матрицы  $\Pi_{YY}$  равны  $\pm 1$ , то умножение  $Y_d$  на  $\Pi_{YY}$  слева соответствует алгебраическому суммированию строк, а умножение на  $\Pi_{YY}^t$  справа — алгебраическому суммированию столбцов матрицы  $Y_d$ . Какие именно строки и столбцы и с каким знаком суммируются указывают ненулевые элементы соответствующих строк матрицы  $\Pi_{YY}$ . При получении матрицы  $Y' = \Pi_{YY} Y_d \Pi_{EY}^t$  операции над строками матрицы  $Y_d$  определяются матрицей  $\Pi_{YY}$ , а операции над столбцами — матрицей  $\Pi_{EY}$ .

В рассматриваемом примере для получения первой строки произведения  $\Pi_{YY} Y_d$  необходимо из первой строки матрицы  $Y_d$  вычесть пятую и прибавить к ней седьмую, восьмую и девятую строки. Вычитая восьмую строку из суммы второй, четвертой и пятой, получаем вторую строку произведения  $\Pi_{YY} Y_d$ . Наконец, сумма третьей, восьмой и девятой строк дает третью строку произведения  $\Pi_{YY} Y_d$ . В результате имеем:

	$R1$	$I''$	$Q$	$2''$	$R2$	$I'$	$2'$	$R3$	$R4$	
$\Pi_{YY} Y_d =$	$G_1$				$-G_2$	$g'_{216}$	$g'_{226}$	$G_3$	$G_4$	$R1$
		$g'_{113} + g''_{213}$		$g''_{123} + g''_{223}$	$G_2$			$-G_3$		$I''$
		$g''_{213}$		$g''_{223}$					$G_4$	$Q$

Выполнив такие же операции над столбцами этой матрицы, получим матрицу  $Y$ . Для определения матрицы  $Y'$  необходимо из пятого столбца произведения  $\Pi_{YY}Y_d$  вычесть шестой и седьмой столбцы и результат записать как единственный (в данном случае) столбец матрицы  $Y'$ .

Искомое напряжение  $u_o$  можно определить из решения уравнения сечений, например по правилу Крамера :

$$u_o = \frac{1}{\Delta} [(G_2 + g'_{21\sigma} + g'_{22\sigma})\Delta_{13} - G_2\Delta_{23}]e(t),$$

где  $\Delta$  — определитель матрицы  $Y$ ;  $\Delta_{13}$  и  $\Delta_{25}$  — алгебраические дополнения (индексы алгебраических дополнений соответствуют естественной порядковой нумерации строк и столбцов матрицы  $Y$ ).

При формировании уравнений контуров фундаментальное дерево должно, как и ранее, включать дугу  $E$  источника напряжения, но разомкнутую дугу  $Q$  целесообразно представить как  $j$ -дугу и оставить ее в дополнении. Отвечающее этим требованиям дерево и определяемая им совокупность независимых контуров показаны на рис. 11.7.

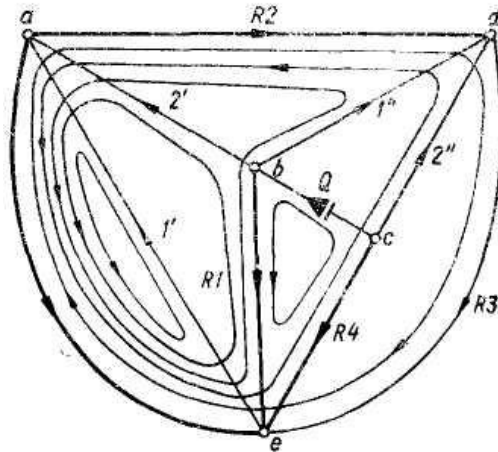


Рис.11.7. Граф структуры транзисторной схемы, используемый для формирования уравнений контуров.

Матрица контуров записывается в виде:

$$P = \begin{bmatrix} P_{ZE} & P_{ZZ} & 0 \\ P_{JE} & P_{JZ} & 1 \end{bmatrix} =$$

	E	R1	R2	R4	1''	2''	1'	2'	R3	Q	
	1	-1	-1		1						1''
	1		-1	-1		1					2''
	1						1				1'
	1	-1						1			2'
	-1		1						1		R3
		1		-1						1	Q

Дуги полюсных графов всех компонентов должны быть z-дугами, для этого транзисторы представляются r-параметрами, а резисторы — сопротивлениями. Матрица  $Z_D$  входящая в компонентное уравнение  $u_Z = Z_D i_Z$ , запишется следующим образом:

$$Z_D =$$

	R1	R2	R4	1''	2''	1'	2'	R3	
R1									R1
	R2								R2
		R4							R4
			$r''_{11g}$	$r''_{12g}$					1''
			$r''_{21g}$	$r''_{22g}$					2''
					$r'_{11g}$	$r'_{12g}$			1'
					$r'_{21g}$	$r'_{22g}$			2'
								R3	R3

Матрично-векторные параметры уравнения контуров  $Z_{iZ_N} = E$

определяются формулами:  $Z = P_{ZZ}Z_{\text{д}}P'_{ZZ}$  и  $E = -P_{ZE}e - Z'j = -P_{ZE}e(t)$  (так как  $j = 0$ ). Матрицу  $Z$  получим путем алгебраических операций над строками и столбцами матрицы  $Z_{\text{д}}$ , которые определяются ненулевыми элементами строк матрицы  $P_{ZZ}$ :

$$P_{ZZ}Z_{\text{д}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} R1 & R2 & R4 & 1'' & 2'' & 1' & 2' & R3 \\ \hline -R_1 & -R_2 & & r''_{113} & r''_{123} & & & \\ & & & & & & & \\ & -R_2 & -R_4 & r''_{213} & r''_{223} & & & \\ & & & & & r'_{116} & r'_{126} & \\ & & & & & r'_{216} & r'_{226} & \\ & & & & & & & P_3 \\ \hline & & & & & & & R3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1'' \\ 2'' \\ 1' \\ 2' \\ R3 \end{array} \end{array}$$

$$Z = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & & & & \\ \hline R_1 + R_2 + r''_{113} & & R_2 + r'_{123} & & & R_1 & -R_2 \\ R_2 + r''_{213} & & R_2 + R_4 + r''_{223} & & & & -R_2 \\ & & & & r'_{116} & r'_{126} & \\ R_1 & & & & r'_{216} & R_1 + r'_{226} & \\ -R_2 & & -R_2 & & & & R_2 + R_3 \\ \hline & & & & & & R3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1'' \\ 2'' \\ 1' \\ 2' \\ R3 \end{array} \end{array}$$

Таким образом, уравнение контуров получаем в виде:

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + r''_{113} & R_2 + r'_{123} & 0 & R_1 & -R_2 \\ R_2 + r''_{213} & R_2 + R_4 + r''_{223} & 0 & 0 & -R_2 \\ 0 & 0 & r''_{116} & r'_{126} & 0 \\ R_1 & 0 & r'_{216} & R_1 + r'_{226} & 0 \\ -R_2 & -R_2 & 0 & 0 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i'_1 \\ i'_2 \\ i'_3 \\ i'_2 \\ i'_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e(t).$$

Определив из этого уравнения вектор токов хорд

$$i_{ZN} = (i''_1, i''_2, i'_1, i'_2, i_{R3}),$$

искомое напряжение  $u_Q$  найдем по формуле для  $u_j = u_Q$ :

$$u_Q = -P_{JZ}Z_d(P'_{JZ} + P'_{ZZ} i_{ZN}) - P_{JE}(t).$$

Так как  $j=0$  и  $P_{JE}=0$ , то

$$u_Q = -(P_{JZ}Z_d P'_{ZZ}) i_{ZN} = -Z' i_{ZN}.$$

Матрица  $Z'$  получается из  $Z_d$  суммированием ее строк в соответствии с  $P_{JZ}$  и столбцов в соответствии с  $P_{ZZ}$ , т. е.

$$P_{JZ}Z_d = \begin{array}{cccccccc} R1 & R2 & R4 & 1 & 2' & 1' & 2' & R3 \\ \hline R_1 & & -R_4 & & & & & \\ \hline \end{array} Q;$$

$$Z' = P_{JZ}Z_d P'_{ZZ} = \begin{array}{cccccc} & 1'' & 2'' & 1' & 2' & R3 \\ \hline -R_1 & R_4 & & -R_1 & & \\ \hline \end{array} Q.$$

На основании полученной матрицы  $Z'$  находим:

$$u_Q = -Z' i_{ZN} = R_1 i''_1 - R_4 i''_2 + R_1 i'_2 = R_1 (i''_1 + i'_2) - R_4 i''_2.$$

## 11.8. Структура электромеханической системы

Рассмотрим в качестве еще одного примера структуру электромеханической системы (рис. 11.8, *a*), состоящую из двигателя постоянного тока, трех упругих валов и двух маховиков. Граф структуры показан на рис. 11.8, *б*, где 1 — дуга приложенного напряжения (*e*-дуга); 2, 3 — дуги полюсного графа двигателя; 4, 6, 8 — дуги валов; 5, 7 — дуги маховиков и 9 — дуга момента нагрузки  $\mu_j$  (*j*-дуга).

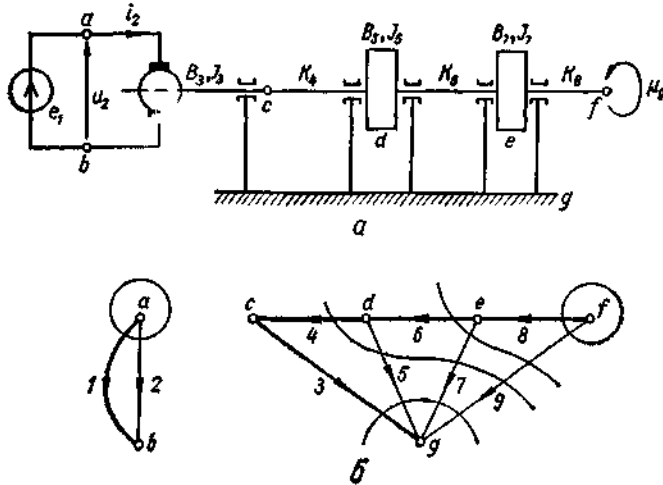


Рис. 11.8. Структура электромеханической системы (а) и ее граф (б)

Пусть требуется сформировать математическую модель структуры системы в однородной системе координат так, чтобы переменными в уравнениях были продольные величины  $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_6, \varphi_8$  (углы скручивания валов, в том числе и вала двигателя  $\varphi_3$ ). Будем исходить из системы сечений, стремясь включить дуги валов и выходную дугу двигателя в дерево. Так как граф несвязный, то деревья выбираем в каждом из двух его компонентов связности, причем, наряду с дугами 3, 4, 6, 8, включаем в лес дугу 1 источника напряжения. В соответствии с выбранным лесом матрица сечений имеет вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EJ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1									1
3			1		1		1			1
4				1	1					1
6						1	1			1
8								1	1	1

Так как при формировании уравнений сечений полюсные графы компонентов должны быть представлены как  $y$ -дуги, то полюсные уравнения двигателя необходимо разрешить относительно поперечных переменных тока  $i_2$  и момента  $\mu_2$ , а в качестве продольных переменных принять напряжение  $u_2$  и угол поворота  $\varphi_3$ . Пренебрегая индуктивностью цепи якоря ( $L=0$ ), получаем ( $p$ -оператор дифференцирования):

$$\begin{bmatrix} i_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & -p \frac{C}{R} \\ -\frac{C}{R} p \left( \frac{C}{R} + B_3 \right) + p^2 J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix},$$

где  $R$  — сопротивление цепи якоря;  $B_3$  и  $J_3$  — соответственно сопротивление трения в двигателе и момент инерции якоря. Полюсные уравнения валов (пренебрегая моментами инерции) и маховиков имеют вид:

$$\begin{aligned} \mu_i &= K_i \varphi_i \quad (i=4, 6, 8); \\ \mu_j &= (pB_j + p^2 J_j) \varphi_j = Y_j \varphi_j \quad (j=5, 7), \end{aligned}$$

где  $K_i$  — упругости валов;  $B_j$  и  $J_j$  — соответственно сопротивления трения и моменты инерции маховиков.

Таким образом, компонентное уравнение  $Y_{дпY} = \xi_Y$  для рассматриваемой системы запишется следующим образом:

$i_2$	$y_{22}$	$y_{23}$						$u_2$
$\mu_2$	$y_{32}$	$y_{33}$						$\varphi_3$
$\mu_4$			$K_4$					$\varphi_4$
$\mu_5$				$Y_5$				$\varphi_5$
$\mu_6$					$K_6$			$\varphi_6$
$\mu_7$						$Y_7$		$\varphi_7$
$\mu_8$							$K_8$	$\varphi_8$

Матрицы  $Y = \Pi_{YY} Y_d \Pi'_{YY}$  и  $Y \Pi_{YY} Y_d \Pi'_{EY}$  найдем суммированием строк и столбцов компонентной матрицы  $Y_d$ :

$$\Pi_{YY} Y_d = \begin{array}{cccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline y_{12} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline y_{33} \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline Y_6 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} & \\ & & & \begin{array}{|c|} \hline K_1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_5 \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} & \\ & & & & & \begin{array}{|c|} \hline K_6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} & \\ & & & & & & & \begin{array}{|c|} \hline K_8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$
  

$$Y = \begin{array}{cccc} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline y_{33} + Y_6 + Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_5 + Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_6 + Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_4 + Y_5 + Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline Y_7 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline K_6 + Y_7 \\ \hline \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} & & & \begin{array}{|c|} \hline K_8 \\ \hline \end{array} \end{array}$$
  

$$Y' = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline y_{32} \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{array} \end{array}$$

Определим вектор  $J$  по формуле

$$J = -\Pi_{Y\mu_0} Y' e_1,$$

получим уравнение сечений рассматриваемой системы:

$$\begin{bmatrix} y_{33} + Y_6 + Y_7 & Y_5 + Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_6 + Y_7 & K_4 + Y_5 + Y_7 & Y_7 & 0 \\ Y_7 & Y_7 & K_6 + Y_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \\ \varphi_6 \\ \varphi_8 \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mu_0 - \begin{bmatrix} y_{32} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_1.$$

Ему соответствует система четырех дифференциальных уравнений:



$$\begin{aligned} & \left( \frac{C}{R} + B_3 + B_5 + B_7 \right) \frac{d\varphi_3}{dt} + (J_3 + J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + \\ & + (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_4}{dt} + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_9 - \frac{C}{R} e_1 = 0; \\ & (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_2}{dt} + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + K_4\varphi_4 + (B_5 + B_7) \frac{d\varphi_4}{dt} + \\ & + (J_5 + J_7) \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_9 = 0; \\ & B_7 \frac{d\varphi_3}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + B_7 \frac{d\varphi_4}{dt} + J_7 \frac{d^2\varphi_4}{dt^2} + K_8\varphi_6 + B_7 \frac{d\varphi_6}{dt} + \\ & + J_7 \frac{d^2\varphi_6}{dt^2} + \mu_4 = 0; \\ & K_8\varphi_3 + \mu_9 = 0. \end{aligned}$$

### 11.9. Узловые уравнения

Простейшую (каноническую) систему сечений связного  $(p, q)$ -графа образуют  $p - 1$  центральных разрезов, причем можно считать, что она определяется звездным деревом, состоящим из разомкнутых дуг с центром в базисной вершине (рис. 11.9, а).

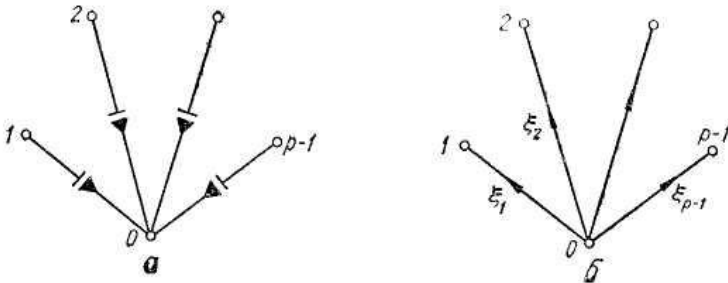


Рис. 11.9. К определению канонической системы сечений:  
 а — звездное дерево из разомкнутых дуг; б — узловые продольные переменные.

Введение в граф разомкнутых дуг не нарушает значений переменных и их роль сводится только к фиксированию некоторой совокупности продольных переменных. Разомкнутые дуги звездного дерева фиксируют *узловые продольные переменные*, которые направлены от базисной вершины к остальным вершинам графа (рис. 11.9, б) и образуют вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p-1})$ . При этом дуги полюсных графов всех компонентов оказываются в дополнении.

Топологическое уравнение в канонической системе сечений запишется следующим образом:

$$1 A_0 \begin{bmatrix} \eta_T \\ \eta_N \end{bmatrix} = 0,$$

где  $A_0$  — сокращенная матрица инцидентности.

Так как  $\eta_I=0$  и  $\eta_N=\eta_d$ , то имеем  $A_0\eta_d=0$ . Справедливо также соотношение  $\xi_d=A'_0 \xi$ , которое наряду с компонентным уравнением  $\eta_Y=Y_d \xi_Y$  используется для получения уравнений сечений.

Таким образом, в канонической системе сечений роль матрицы  $\Pi$  играет матрица инцидентности  $A_0$ , т. е. матрично-векторные параметры уравнения  $Y_\xi = J$  выражаются формулами:

$$Y=A_Y Y_d A'_Y; \quad J=-A_J v,$$

где  $A_Y$  и  $A_J$  — субматрицы, образованные из столбцов матрицы  $A_0$ , соответствующих полюсным графам компонентов ( $u$ -дугам) и источникам поперечных величин ( $j$ -дугам).

Правила записи матрично-векторных параметров в этом случае существенно упрощаются, так как каждая дуга инцидентна не более, чем двум сечениям (дуги, связанные с базисной вершиной, инцидентны только одному сечению). Вместо сечений можно рассматривать вершины графа (положительным направлением является направление от вершины). В связи с этим уравнения в канонической системе сечений называют также *уравнениями вершин* или *узловыми уравнениями*.

Если, наряду с  $u$ -дугами, граф содержит только дуги источников поперечных величин ( $j$ -дуги), то каноническая система сечений однозначно определяется выбором базисной вершины и нумерацией остальных вершин. Компонентам вектора  $\xi_T$  (узловым продольным величинам) присваиваются номера соответствующих им вершин. При непосредственной записи матрично-векторных параметров удобно вместо нумерации дуг обозначать их собственные параметры  $u_{ij}$ . Взаимные параметры  $u_{ij}$  обозначаются рядом со стрелками, направленными от  $i$ -й к  $j$ -й дуге. Пусть, например, в транзисторной схеме (см. рис. 11.3,  $a$ ) вместо источника напряжения действует источник тока  $j(t)$ .

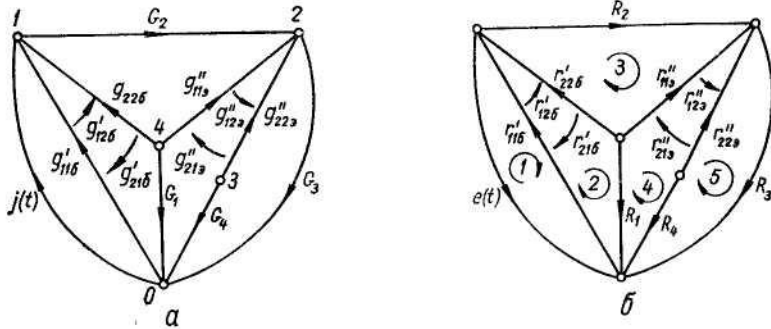


Рис. 11.10. Граф транзисторной схемы, используемый для записи:  
 а — узловых уравнений; б — уравнений ячеек.

Тогда ее граф, подготовленный для записи узловых уравнений, будет выглядеть, как показано на рис. 11.10, а, а сами уравнения получаем в виде:

$G_2 + g'_{116} + g'_{126} +$ $+ g'_{216} + g'_{226}$	$-G_3$		$-g'_{126} -$ $-g'_{226}$	$u_1$	$f(t)$
$-G_2$	$G_2 + G_3 + g''_{113} +$ $+ g''_{123} + g''_{213} + g''_{223}$	$-g''_{123} -$ $-g''_{223}$	$-g''_{113} -$ $-g''_{213}$	$u_2$	
	$-g''_{213} - g''_{223}$	$G_3 + g''_{223}$	$g''_{213}$	$u_3$	
$-g'_{216} - g'_{226}$	$-g''_{113} - g''_{123}$	$g''_{123}$	$G_1 +$ $+g'_{226} +$ $+g''_{113}$	$u_4$	

### 11.10. Уравнения ячеек

Для плоского графа, содержащего, наряду с  $z$ -дугами, дуги только источников продольных величин ( $e$ -дуги) каноническая система контуров определяется совокупностью ячеек. Ячейки и узлы являются взаимно дуальными понятиями, а матрица контуров для ячеек  $B_0$  дуальна матрице  $A_0$ . Обычно принимают направления контуров,

определяемых ячейками, по часовой стрелке, а роль базисной ячейки играет внешний контур графа (рис. 11.11).

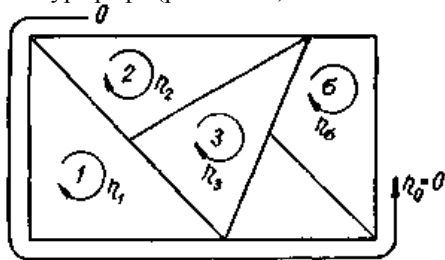


Рис. 11.11. Каноническая схема контуров (ячеек).

В связи с этим все соотношения и правила для математической модели в канонической системе контуров дуальны соответствующим соотношениям и правилам для канонической системы сечений. Матрично-векторные параметры уравнение  $Z\eta = E$  определяются формулами:ε

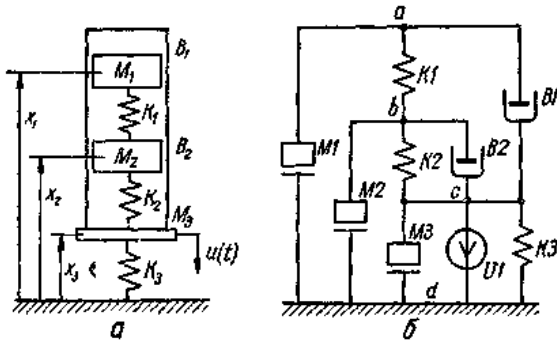
$$Z = B_Z Z_d B'_Z; E = -B_E \varepsilon,$$

где  $B_Z$  и  $B_E$  — субматрицы, образованные из столбцов матрицы  $B_0$ , соответствующих полюсным графам компонентов (z-дугам) и источникам продольных величин (e-дугам). Вектор  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_6)$  содержит в качестве своих компонентов *контурные поперечные переменные*, которые связаны с ячейками (поперечная переменная внешнего контура принимается равной нулю). Уравнения в системе контуров называют *уравнениями ячеек* или *контурными уравнениями*. Определив вектор  $\eta$ , остальные переменные находим по формулам  $\eta_d = B_0 \eta$  и  $\xi_d = Z_d \eta_d$ .

Для непосредственной записи матрицы  $Z$  и вектора  $E$  достаточно пронумеровать ячейки и воспользоваться простыми правилами, которые вытекают из общих правил (11.5) с учетом того, что любая дуга графа инцидентна не более чем двум ячейкам, а дуги внешнего контура — только одной ячейке. Запишем, например, уравнения ячеек для транзисторной схемы (см. рис. 11.3, а) при воздействии на нее источника напряжения  $e(t)$ . Граф, подготовленный для этой задачи, изображен на рис. 11.10, б, а сами уравнения получаем в виде:

$r'_{116}$	$-r'_{116} + r'_{126}$	$-r'_{126}$			$i_1$	$c_1(t)$
$-r'_{116} + r'_{116} + r'_{116}$	$R_1 + r'_{116} - r'_{126} - r'_{216} + r'_{226}$	$r'_{126} - r'_{226}$	$-R_1$		$i_2$	
$-r'_{216}$	$r'_{216} - r'_{226}$	$R_2 + r'_{226} + r'_{112}$	$-r''_{112} + r'_{122}$	$-r''_{122}$	$i_3$	
	$-R_1$	$-r''_{112} + r'_{212}$	$R_1 + R_4 + r''_{112} - r''_{122} - r''_{212} + r''_{222}$	$r''_{122} - r''_{222} - R_4$	$i_4$	
		$-r''_{212}$	$r''_{212} - r''_{222} - R_4$	$r''_{222} + R_3 + R_4$	$i_5$	

Особенно просто записываются уравнения для систем, состоящих из двухполосников.



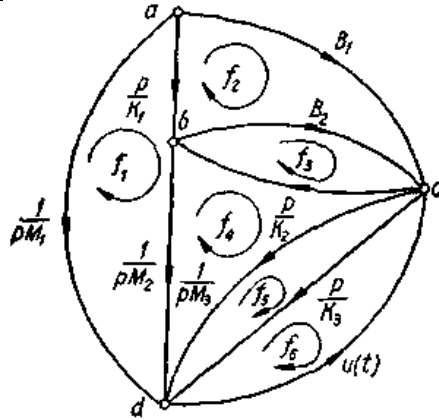


Рис. 11.12. Структура механической системы и ее граф, используемый для записи уравнений ячеек.

Например, для структуры механической системы в соответствии с ее графом (рис. 11.12), на котором указаны параметры в операторной форме, имеем:

$\frac{p}{K_1} + \frac{1}{\rho} \times$ $\times \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)$						$f_1$	
$-\frac{p}{K_1}$	$B_1 + B_2 + \frac{p}{K_1}$	$-B_2$				$f_2$	
	$-B_2$	$B_2 + \frac{p}{K_2}$	$-\frac{p}{K_2}$			$f_3$	
$-\frac{1}{\rho M_2}$		$-\frac{p}{K_2}$	$\frac{p}{K_2} + \frac{1}{\rho} \times$ $\times \left( \frac{1}{M_2} + \frac{1}{M_3} \right)$	$-\frac{1}{\rho M_3}$		$f_4$	
			$-\frac{1}{\rho M_3}$	$\frac{p}{K_3} + \frac{1}{\rho M_3}$	$-\frac{p}{K_3}$	$f_5$	
				$-\frac{p}{K_3}$	$\frac{p}{K_3}$	$f_6$	$-u(t)$

Контурные силы  $f_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) представляют собой условные расчетные величины, через которые выражаются силы (реакции) двухполюсников. Например, сила двухполюсника  $M_3$  равна  $f_4 - f_3$  и т.д.

### 11.11. Системы с двумя сторонами

Часто требуется получить математическую модель структуры системы, характеризующую ее относительно двух сторон: входа, к которому приложено воздействие (независимый источник), и выхода, с которым связаны искомые величины (рис. 11.13, а).

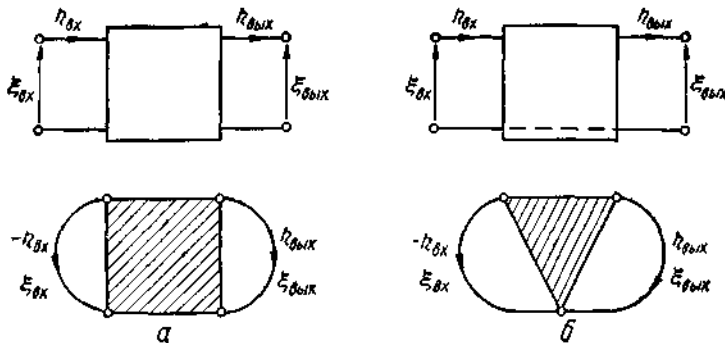


Рис. 11.13. Схема с двумя сторонами:

а — с различными входными и выходными вершинами;  
б — с общей вершиной для входа и выхода.

При этом предполагается, что внутри самой структуры системы независимые источники отсутствуют. Системы с двумя сторонами называют *четырёхполюсниками*.

Входная и выходная стороны могут быть представлены внешними дугами, которые характеризуются соответственно входными  $-\eta_{вх}$ ,  $\zeta_{вх}$  и выходными  $\eta_{вых}$ ,  $\zeta_{вых}$  величинами (знак минус при входной поперечной величине  $\eta_{вх}$  появляется в связи с тем, что ее обычно принятое направление противоположно направлению входной дуга).

Внешние дуги связаны с графом структуры системы (заштрихованная часть) парами входных и выходных вершин. Случай, когда вход и выход имеют общую вершину, показан на рис. 11.13, б.

Для получения уравнений относительно внешних величии в однородной системе сечений необходимо внешние дуги представить как дуги источников поперечных величин ( $j$ -дуги) и ввести их в дерево. Без потери общности внешние дуги можно расположить перед  $u$ -дугами графа. Тогда в уравнении сечений  $Y\zeta_T = J$ , где

$$\xi_T = \begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВВХ} \\ \xi_{YT} \end{bmatrix}; \quad J = -\Pi_j \mathcal{G} = - \begin{bmatrix} 10 \\ 01 \\ 00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\eta_{BX} \\ \eta_{ВВХ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ -\eta_{ВВХ} \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, следовательно, имеем:

$$Y \begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВВХ} \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ -\eta_{ВВХ} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где, как и ранее в (11.4),  $Y = \Pi_Y Y_d \Pi'_Y$ .

Записав решение этого уравнения относительно продольных внешних переменных по правилу Крамера, находим

$\eta_{BX}$ ,  $\xi_{BX}$  и выходными  $\eta_{ВВХ}$ ,  $\xi_{ВВХ}$

$$\xi_{BX} = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \eta_{BX} - \Delta_{ba} \eta_{ВВХ});$$

$$\xi_{ВВХ} = \frac{1}{\Delta} (\Delta_{ab} \eta_{BX} - \Delta_{bb} \eta_{ВВХ}),$$

или в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \xi_{BX} \\ \xi_{ВВХ} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{BX} \\ \eta_{ВВХ} \end{bmatrix},$$

где  $\Delta$ —определитель матрицы  $Y$ ; индексы  $a$  и  $b$  алгебраических дополнений этой матрицы равны порядковым номерам строк и столбцов, которые соответствуют сечениям, определяемым входной и выходной дугами. В общем случае  $a$  и  $b$  могут принимать любые значения, а при расположении этих сечений первыми  $a = 1$  и  $b = 2$ .

Полученные уравнения описывают четырехполюсник относительно продольных величин. Они могут быть представлены и относительно поперечных величин. Для этого сложим первое уравнение, умноженное на  $\Delta_{bb}$ , со вторым, умноженным на  $-\Delta_{ba}$ :

$$\frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \eta_{BX} = \Delta_{bb} \xi_{BX} - \Delta_{ba} \xi_{ВВХ},$$

а также сложим первое уравнение, умноженное на  $\Delta_{ab}$ , со вторым, умноженным на  $-\Delta_{aa}$ :

$$\frac{1}{\Delta} (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \eta_{ВВХ} = \Delta_{ab} \xi_{ВВХ} - \Delta_{aa} \xi_{BX}.$$



Множитель в левых частях полученных равенств преобразуется по формуле  $\Delta_{aa}\Delta_{bb} - \Delta_{ab}\Delta_{ba} = \Delta\Delta_{aa,bb}$ , где  $\Delta_{aa}\Delta_{bb}$  — двукратное алгебраическое дополнение. В результате получаем

$$\begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta_{aa,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix},$$

комбинируя попарно внешние параметры, уравнение четырех-полюсника можно представить шестью различными способами (табл. 11.1).

Таблица 11.1

**Внешние параметры системы с двумя сторонами**

Уравнение	Внешние параметры	
	В системе сечений ( $\Delta = \det Y$ )	В системе контуров ( $\Delta = \det Z$ )
$\begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa,bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} - \Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вх}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\text{вых}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & \Delta_{aa,bb} \\ \Delta & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ab}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} & \Delta \\ \Delta_{aa,bb} & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{\text{вых}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вх}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{bb} - \Delta_{aa,bb} \\ -\Delta & \Delta_{aa} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{ba}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa} & -\Delta \\ \Delta_{aa,bb} & \Delta_{bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa,bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa,bb} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \eta_{\text{вх}} \\ \xi_{\text{вых}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{\text{вх}} \\ \eta_{\text{вых}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{aa}} \begin{bmatrix} \Delta & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta_{aa,bb} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta_{bb}} \begin{bmatrix} \Delta_{aa,bb} & \Delta_{ba} \\ \Delta_{ab} & -\Delta \end{bmatrix}$

Элементы матриц этих уравнений, называемые *внешними параметрами четырехполюсника*, выражаются через определитель и алгебраические дополнения матрицы  $Y = \Pi_Y Y_d \Pi_Y'$ . Аналогичные выражения можно получить и в однородной системе контуров через матрицу  $Z = P_Z Z_d P_Z'$ . Для этого необходимо внешние дуги представить как  $e$ -дуги и отнести их к дополнению. Выполнив преобразования, дуальные приведенным выше, получим требуемые выражения (табл. 11.1).

## **11.12. Уравнения основных типов структур электромеханических преобразователей**

Как известно из общего курса электрических измерений, в преобразователях, какими являются механизмы технических систем, происходит преобразование электромагнитной энергии в механический вращающий момент или в механическую силу.

Основанные на тех же принципах первичные преобразователи для измерения механических величин или преобразователи обратной связи в статических следящих измерительных устройствах, преобразуют механические величины в электрические и обратно.

Для практического осуществления таких преобразований применяются два основных принципа преобразования электромагнитной или электростатической энергии. Так, электродинамические преобразователи представлены несколькими разновидностями, основанными на взаимодействии контуров с токами или контура с током и постоянного магнитного потока.

В преобразователях первой группы возникновение механических моментов или сил происходит в результате преобразования электрокинетической энергии магнитного поля.

Вторую группу электромеханических преобразователей составляют электростатические, а также пьезоэлектрические преобразователи. Электростатические преобразователи преобразуют потенциальную энергию электрического поля.

Электростатические преобразователи нелинейны, и уравнения их имеют одинаковые знаки при взаимных членах по сравнению с различными знаками в уравнениях электродинамических преобразователей. Это является следствием различия в физической природе процессов, в результате чего у электродинамических преобразователей коэффициенты преобразования оказываются вещественными, а у электростатических и пьезоэлектрических преобразователей — мнимыми величинами. Мнимость здесь возникает из-за того, что э. д. с. (напряжение) и механическая скорость, а также момент (сила) и ток в режимах холостого хода, при которых определяются эти коэффициенты, оказываются сдвинутыми на  $90^\circ$ .

Рассмотрим примеры составления уравнений отдельных типов структур электромеханических преобразователей, предполагая, что на преобразователь оказывается гармонически меняющееся воздействие. Благодаря этому на выходной стороне также протекает аналогичный процесс, в результате чего и осуществляется то взаимодействие сторон,

которое имеет принципиальное значение для теории и весьма важно во множестве практических случаев.

### **Магнитоэлектрические преобразователи**

Распространенной разновидностью электродинамических преобразователей являются магнитоэлектрические преобразователи, в которых для создания момента или силы используется взаимодействие постоянного магнитного потока, получаемого от постоянного магнита, и контура с током.

Эти преобразователи широко используются для измерений различных механических величин, причем в последнем случае обмотка подвижной части перемещается внешней силой в магнитном поле. Отсюда следует, что режим, когда выходной величиной будет механическая величина, оказывается режимом двигателя, а режим, когда выходной величиной является электрическая величина, оказывается режимом генератора. Этот признак обратимости применим ко всем электромеханическим преобразователям.

Если рассматривать преобразователь с поворачивающейся подвижной частью, то вращающий момент  $D$  определяется известным выражением

$$D = BswI, \quad (11.1)$$

где  $B$  — индукция;

$s$  — площадь петли или рамки;

$w$  — число витков;

$I$  — протекающий ток.

При движении рамки в магнитном поле в ней возникает э. д. с, которая находится на основании закона электромагнитной индукции, т. е.

$$e = - \frac{d\Psi}{dt},$$

где  $\Psi$  — поток, сцепляющийся с рамкой или петлей, равный

$\Psi = Bsw\alpha$ , здесь  $\alpha$  — угол поворота.

Так как в выражении потокосцепления от времени зависит только лишь угол поворота, то получим

$$e = - Bsw\alpha \frac{d\alpha}{dt}, \quad (11.2)$$

где  $\frac{d\alpha}{dt}$  является скоростью углового перемещения.

Коэффициент преобразования будем определять при холостом ходе с обеих сторон, т. е. в соответствии с равенством (10.11). Имея в

выражения (11.1) и (11.2), справедливые для прямого и обратного эффектов, получим следующие равенства.

Для прямого преобразования, когда входной стороной является электрическая сторона, а выходная скорость равна нулю, найдем

$$K_{01} = \left. \frac{D}{I} \right|_{\frac{d\alpha}{dt}=0} = Bsw.$$

Для обратного преобразования, соответствующего разомкнутой электрической стороне, будем иметь:

$$K_{02} = \left. \frac{e}{\frac{d\alpha}{dt}} \right|_{I=0} = -Bsw$$

Отсюда следует, что  $K_{01} = -K_{02} = K_0$ . Таким образом ясно, что знаки при взаимных членах уравнений преобразователя будут разные, а коэффициент преобразования является действительной величиной, равной

$$K_0 = Bsw = \Psi. \quad (11.3)$$

По физическому смыслу  $K_{01}$  и  $K_{02}$  оказываются взаимными сопротивлениями, поскольку представляют отношения обобщенной силы на одной стороне преобразователя к обобщенной скорости на другой, а разные знаки являются следствием правила Ленца о направлении тока, индуцируемого при движении проводника в магнитном поле.

Учитывая теперь физический смысл входных и выходных величин, а также различие в знаках при взаимных членах, можем переписать основные уравнения (10.1) в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} U &= Z_{11}I_1 - Bsw \frac{d\alpha}{dt}; \\ D &= BswI_1 + Z_{22} \frac{d\alpha}{dt}. \end{aligned} \right\}, \quad (11.4)$$

Рассмотрим теперь электростатический преобразователь и определим его уравнения, исходя из того, что в этом случае происходит преобразование потенциальной энергии.

### Электростатические преобразователи

Пусть в качестве электростатического преобразователя используется конструктивно самая простая его разновидность, а именно — плоский конденсатор. Одна из обкладок такого конденсатора может свободно перемещаться, причем обеим обкладкам предварительно сообщена

некоторая разность потенциалов от внешнего источника, благодаря чему на обкладках существует заряд  $q$ . В этом случае целесообразно исходить из выражения энергии, которое нужно составить. Если в качестве независимых координат выбрать расстояние между обкладками  $\delta$  и количество электричества  $q$ , то потенциальная энергия системы будет равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}\delta^2 + c_{22} q^2).$$

Здесь коэффициенты  $c_{11}$  и  $c_{22}$  имеют размерность уже не сопротивлений, а упругостей и можно считать, что  $c_{11}$  является упругостью подвеса подвижной пластины, т. е. упругостью с механической стороны, а  $c_{22}$  служит упругостью преобразователя с его электрической стороны.

Упругость  $c_{22}$  целесообразно выразить через емкость самого преобразователя, т. е. через  $C$ , причем, как это следует из табл. 10.1,

$$c_{22} = \frac{1}{C}.$$

Емкость  $C$ , в свою очередь, является функцией расстояния между обкладками, т. е.

$$C = \frac{\epsilon s}{\delta},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость;

$s$  — площадь обкладок.

После подстановок в написанное выражение потенциальной энергии получим:

$$\Pi = \frac{1}{2} \left( c_{11}\delta^2 + \frac{\delta}{\epsilon s} q^2 \right).$$

Дифференцируя теперь полученное выражение по геометрической координате  $\delta$ , определим возникающую механическую силу  $F$ :

$$F = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = c_{11}\delta + \frac{1}{2\epsilon s} q^2 \quad (11.5)$$

В том случае, когда изменяется электрическая координата  $q$  на обкладках конденсатора, появляется разность потенциалов  $U$ , т. е.

$$U = \frac{\partial \Pi}{\partial q} = \frac{\delta}{\epsilon s} q \quad (11.6)$$

Поскольку система нелинейна, как это видно из равенства (11.5), то уравнения емкостного преобразователя следует писать в форме равенств

$$\left. \begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial \delta} d\delta + \frac{\partial F}{\partial q} dq; \\ dU &= \frac{\partial U}{\partial \delta} d\delta + \frac{\partial U}{\partial q} dq. \end{aligned} \right\}$$

При учете полученных соотношений (11.5) и (11.6) найдем:

$$\left. \begin{aligned} dF &= c_{11} d\delta + \frac{q}{\varepsilon s} dq; \\ dU &= \frac{q}{\varepsilon s} d\delta + \frac{\delta}{\varepsilon s} dq. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Уравнения (11.7) показывают, что кроме упругости подвеса  $c_{11}$ , все коэффициенты зависят от аргументов, т. е. из четырех коэффициентов три нелинейны.

Таким образом, фактически мы имеем дело не с коэффициентами преобразования, а с функциями преобразования, причем функции преобразования, находящиеся при взаимных членах, имеют одинаковые знаки и обе зависят от координаты  $q$ , т. е. можно написать:

$$K_0(q) = K_{01}(q) = K_{02}(q) = \frac{q}{\varepsilon s}. \quad (11.8)$$

Из этого равенства следует также, что при отсутствии начального заряда  $q$  электростатический преобразователь не обладает никакой преобразующей способностью.

Уравнения рассматриваемого преобразователя можно линеаризовать, если исследовать только небольшие отклонения системы от некоторого начального состояния, соответствующего расстоянию между обкладками  $\delta_0$  и заряду  $q_0$ . Если так выбрать координаты, что при этом будет существовать некоторая начальная емкость  $C_0$ , начальная разность потенциалов между обкладками  $U_0$  и, следовательно, начальная напряженность электрического поля  $E_0$ , т. е.

$$E_0 = \frac{U}{\delta_0} = \frac{q_0}{C_0 \delta_0} = \frac{q_0}{\varepsilon s}, \quad (11.9)$$

то теперь линеаризованные уравнения можно записать в форме, отличной от формы (11.7), если учесть соотношения (11.9). В результате будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= c_{11}\Delta\delta + E_0\Delta q; \\ \Delta U &= E_0\Delta\delta + \frac{1}{C_0}\Delta q. \end{aligned} \right\} \quad (11.7a)$$

В последнем случае функция преобразования становится коэффициентом и вместо (11.8) можно написать:

$$K_0 = E_0. \quad (11.8a)$$

Как показывают полученные уравнения, в емкостных преобразователях знаки при взаимных членах одинаковы. В преобразователях этого типа перемещение обкладок вызывается электростатическими силами, а возникновение разностей потенциалов связано с изменением относительного положения обкладок.

Исходя из этих соображений и считая, что воздействие, приложенное к преобразователю, изменяется с частотой  $\omega$ , можем написать общие выражения коэффициентов преобразований при холостом ходе на основании равенств (10.11).

Будем полагать, что перемещение подвижной пластины преобразователя происходит по гармоническому закону, т. е.

$$\delta = \delta_m \varepsilon^{j\omega t}.$$

В этом случае амплитуда линейной скорости перемещения будет равна:

$$\dot{\delta} = j\omega\delta.$$

При холостом ходе в цепи конденсатора ток отсутствует, т. е.  $I = 0$  или  $q = \text{const}$ , и мы можем написать такое выражение для функции преобразования:

$$K_{01}(q) = \left. \frac{\partial U}{\partial \dot{\delta}} \right|_{q=\text{const}} = \frac{1}{j\omega} \bullet \left. \frac{\partial U}{\partial \delta} \right|_{q=\text{const}}$$

Считая, что система линеаризована, получим приближенное выражение коэффициента преобразования  $K_{01}$  в таком виде:

$$K_{01} = \left. \frac{U}{\dot{\delta}} \right|_{I=0} = \frac{1}{j\omega} \left. \frac{U}{\delta} \right|_{I=0} \quad (11.10)$$

При воздействии на электрическую сторону можем совершенно аналогично считать, что

$$q = q_m \varepsilon^{j\omega t}$$

откуда ток будет равен:

$$I = j\omega q.$$

Исходя из тех же соображений и полагая, что теперь уже механическая сторона находится в режиме холостого хода, благодаря чему  $\dot{\delta} = 0$  или  $\dot{\delta} = \delta_0 = \text{const}$ , получим для второй функции преобразования

$$K_{02} = \left. \frac{\partial F}{\partial I} \right|_{\dot{\delta}=0} = \left. \frac{1}{j\omega} \frac{\partial F}{\partial q} \right|_{\dot{\delta}=0}$$

Для линеаризованной системы найдем соответственно:

$$K_{02} = \left. \frac{F}{I} \right|_{\dot{\delta}=0} = \left. \frac{1}{j\omega} \frac{F}{q} \right|_{\dot{\delta}=0} \quad (11.10a)$$

Поскольку  $K_{01}$  и  $K_{02}$  определяют ту действующую напряженность поля, посредством которого осуществляется процесс прямого и обратного преобразований, то  $K_{01} = K_{02} = K_0$ . Таким образом, равенства (11.10) и (11.10a), представляющие собой соотношения взаимности, показывают, что в данном случае коэффициенты преобразования есть величины мнимые. Это получается в результате того, что  $U$  и  $\dot{\delta}$  или  $F$  и  $I$ , определенные соответственно при  $I = 0$  и при  $\dot{\delta} = 0$ , сдвинуты по фазе друг относительно друга на  $\pi/2$ , поскольку  $\pm j = \varepsilon^{\mp\pi/2}$ .

В электродинамических преобразователях при аналогичных условиях фазовые сдвиги равны или нулю или  $\pi$ . Последнее обстоятельство существенно отличает все разновидности электродинамических преобразователей, уравнения которых имеют разные знаки при взаимных членах, от электростатических преобразователей, знаки при взаимных членах уравнений которых одинаковы.

Полученные выше соотношения взаимности для магнитоэлектрического и электростатического преобразователей справедливы, в смысле их равенства, только при таком выборе согласованных систем единиц, при котором электрическая и механическая мощности измеряются в одних и тех же единицах.

В заключение рассмотрим электромагнитные преобразователи, представляющие существенный теоретический интерес, поскольку их можно изобразить в виде двухзвенных систем, сходных с уже рассмотренными.

### **Электромагнитные преобразователи**

После рассмотрения магнитоэлектрических и электростатических преобразователей выведем уравнения для так электромагнитных преобразователей. Он более детально вскрывает механизм преобра-



зования и основывается на уже знакомых приемах составления уравнений для линейных и нелинейных систем.

Простейший преобразователь для измерения механических величин представлен на рис. 11.14, из которого видно, что преобразователь состоит из магнитопровода с обмоткой и подвижного якоря.

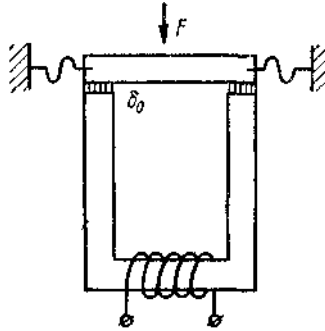


Рис. 11.14

В случае, если по обмотке протекает ток, то якорь приходит в движение, т. е. преобразователь работает в режиме двигателя. Если же наоборот, внешняя сила приводит в движение якорь, в результате чего изменяется некоторый начальный поток, то в обмотке возникает электродвижущая сила. Тогда, когда обмотка питается намагничивающим переменным током, перемещение якоря вызывает изменение магнитного потока, что приведет к изменению полного сопротивления обмотки, главным образом, за счет изменения индуктивного сопротивления.

Преобразования энергии, происходящие в преобразователе, можно разделить на два этапа. Один из этапов состоит в преобразовании электрической энергии в магнитную или наоборот, а другой — в преобразовании магнитной энергии в механическую или механической в магнитную. Последовательность преобразований здесь зависит от того, в режиме двигателя или в режиме генератора работает преобразователь.

Отсюда следует, что электромагнитный преобразователь можно представить состоящим из двух последовательных преобразующих звеньев, действие которых мы сейчас и рассмотрим.

**Звено с электромагнитным преобразованием.** Будем считать, что входной стороной такого звена служит электрическая сторона. При этом преобразовании имеют место следующие соотношения. Магнитодвижущая сила  $F_{\text{маг}}$  выражается известным соотношением

$$F_{\text{маг}} = wI,$$

где  $w$  — число витков обмотки преобразователя.

При движении якоря в обмотке наводится э. д. с, которая при холостом ходе равна:

$$e = -w \frac{d\Phi}{dt}.$$

Отсюда находим взаимные соотношения или коэффициенты преобразования при холостом ходе сторон:

$$\left. \frac{F_{\text{мат}}}{I} \right|_{e=0} = - \left. \frac{e}{\frac{d\Phi}{dt}} \right|_{I=0} = w \quad (11.35)$$

Таким образом, коэффициентом преобразования оказывается число витков, т. е.

$$K_0 = K_{01} = -K_{02} = w. \quad (11.35a)$$

В равенстве (11.35a) знаки  $K_{01}$  и  $K_{02}$  разные.

Учитывая, как и в случае магнитоэлектрического преобразователя, физический смысл входных и выходных величин, а также знаки при взаимных членах, видим, что необходимо применить общие уравнения в форме, аналогичной (11.4).

Выбрав в качестве аргументов ток  $I$  и поток  $\Phi$ , запишем уравнения звена в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} E &= Z_{11}I - w \frac{d\Phi}{dt}; \\ F_{\text{мат}} &= wI + \frac{R_{M_0}}{p} \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (11.12)$$

где  $R_{M_0}$  — начальное магнитное сопротивление преобразователя, т. е. сопротивление его выходной магнитной стороны. Это сопротивление необходимо разделить на оператор  $p$ , так как для общности с первым уравнением вместо самого потока введена скорость его изменения во времени, что символически обозначается как  $p\Phi$ .

Электрическое сопротивление  $Z_{11}$  является полным начальным сопротивлением обмотки преобразователя.

Написанные уравнения показывают, что электромагнитное звено преобразования является линейным с одной стороны, а с другой стороны знаки при взаимных членах здесь такие же, как у магнитоэлектрического и всех вообще электродинамических преобразователей.

*Звено с магнитомеханическим преобразованием.* Перейдем теперь ко второму преобразующему звену, которое по существу является магнитомеханическим. Такое звено преобразует магнитную энергию в механическую или механическую в магнитную. Подобно

электростатическому преобразователю это звено оказывается нелинейным, а уравнения обоих преобразователей формально сходны. Выбрав в качестве аргументов смещение якоря  $\delta$  и магнитный поток  $\Phi$ , можем написать уравнение для полной энергии системы, учитывая принятое определение магнитного сопротивления и размерность величин.

Полная энергия системы может быть записана, как и для электростатического преобразователя, в такой форме:

$$\Pi = \frac{1}{2} (c_{11}\delta^2 + R_{M_0} \frac{\delta}{\epsilon S} \Phi^2).$$

где  $c_{11}$  — упругость подвеса якоря;

$R_{M_0}$  — полное магнитное сопротивление, являющееся по существу, не сопротивлением, а магнитной упругостью.

Магнитное сопротивление зависит от величины воздушного зазора  $\delta$  и этим определяется процесс преобразования. Это сопротивление может быть выражено таким образом:

$$R_M = R_{M_0} + \frac{\delta}{\mu_0 s}.$$

где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость воздушного зазора;

$s$  — общая площадь полюсов.

Здесь для простоты предполагается, что смещение якоря происходит только в одну сторону, причем магнитное сопротивление возрастает относительно начального значения.

Как и в случае электростатического преобразователя, механическую силу  $F$  найдем, дифференцируя энергию по геометрической координате,

$$F = \frac{\partial \Pi}{\partial \delta} = c_{11}\delta + \frac{1}{2\mu_0 s} \Phi^2.$$

Дифференцирование по второй координате, т. е. по магнитному потоку, дает магнитодвижущую силу

$$F_{\text{маг}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Phi} = R_{M_0} \Phi + \frac{\Phi}{\mu_0 s} \delta$$

Используя общие уравнения для нелинейных преобразователей, получим следующие дифференциальные равенства:

$$\left. \begin{aligned} dF &= c_{11}d\delta + \frac{\Phi}{\mu_0 S} d\Phi; \\ dF_{\text{mag}} &= \frac{\Phi}{\mu_0 S} d\delta + R_{M_0} d\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (11.13)$$

Уравнения показывают, что функция преобразования здесь равна

$$K_0(\Phi) = \frac{\Phi}{\mu_0 S} \quad (11.14)$$

Также как и для электростатического преобразователя можно линеаризовать эти уравнения, выбрав некоторое начальное значение магнитного потока  $\Phi_0$ . В этом случае функция преобразования станет коэффициентом, и мы получим:

$$K_0 = \frac{\Phi_0}{\mu_0 S} = H_0. \quad (11.14a)$$

Теперь при небольших изменениях потока в районе  $\Phi_0$  получим линеаризованные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta F &= c_{11}\Delta\delta + H_0\Delta\Phi; \\ \Delta F_{\text{mag}} &= H_0\Delta\delta + R_{M_0}\Delta\Phi. \end{aligned} \right\} \quad (11.13a)$$

В этих уравнениях  $H_0$  представляет начальную напряженность магнитного поля.

Для того чтобы сделать уравнения (11.12) и (11.13a) сходными, т. е. иметь те же обобщенные аргументы, отбросим в последнем равенстве знаки приращений  $\Delta$ , что будет справедливо при линеаризации, и заменим  $\Phi$  на  $\frac{d\Phi}{dt}$ , а также  $\delta$  на  $\frac{d\delta}{dt}$ . Чтобы уравнения при этом не

изменились, соответствующие члены необходимо умножить на  $\frac{1}{p}$ . В

результате вместо (11.13a) получим

$$\left. \begin{aligned} F &= Z_{\text{mex}} v + \frac{H_0}{p} \frac{d\Phi}{dt}; \\ F_{\text{mag}} &= \frac{H_0}{p} v + \frac{R_{M_0}}{p} \frac{d\Phi}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (11.37b)$$

Здесь выражение для собственного механического сопротивления преобразователя  $Z_{\text{mex}}$  получается на основании равенства,

связывающего упругость с сопротивлением, так как справедливы следующие соотношения

$$c_{11}\delta = \frac{1}{p}c_{11} \frac{d\delta}{dt} = Z_{\text{мех}} \frac{d\delta}{dt} = Z_{\text{мех}} v,$$

где через  $v$  обозначена линейная скорость движения якоря.

Как видим, полученные уравнения (11.13) сходны по форме с уравнениями (11.7) для электростатического преобразователя и имеют такие же знаки при взаимных членах.

*Реальный электромагнитный преобразователь* Теперь объединим оба преобразующих звена, исключив промежуточные магнитные величины. Для этой цели можно приравнять выражения магнитодвижущей силы во вторых равенствах уравнений (11.12) и

(11.13б) и найти отсюда выражение для  $\frac{d\Phi}{dt}$ . Подставив затем это

выражение в первые равенства обоих уравнений и произведя соответствующие преобразования, получим уравнения преобразователя в целом, выраженные через аргументы  $I$  и  $v$ . Заменяя затем получившиеся выражения для коэффициентов через  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$ , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} e &= Z_{11}I + \frac{wH_0}{R_{M_0}}v; \\ F &= \frac{wH_0}{R_{M_0}}I + Z_{22}v. \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

Из полученных результатов видим, что в окончательном уравнении электромагнитного преобразователя знаки при взаимных членах оказываются такими же, как и у электродинамических преобразователей. Эта общность в знаках соответствует общности процесса преобразования энергии из электрической в магнитную, а затем в механическую. Отсюда следует, что и другие электродинамические преобразователи могут рассматриваться как двухкратные или двухзвенные, в отличие от магнитомеханических или электростатических преобразователей, являющихся однозвенными. Как это следует из уравнений (11.15), абсолютная величина коэффициента преобразования в данном случае равна:

$$K_0 = \frac{wH_0}{R_{M_0}}, \quad (11.16)$$

откуда ясно, что преобразующая способность при отсутствии начального подмагничивания, т. е. при  $H_0 = 0$ , также равна нулю. Этот

результат сходен с соответствующим выводом для электростатического преобразователя.

Рассмотренные примеры электромеханических преобразователей показывают, что при наличии промежуточного преобразования электрической энергии в магнитную знаки при взаимных членах окончательных уравнений оказываются разными. Эта разница в знаках должна учитываться во всех общих формулах, содержащих квадрат коэффициента преобразования. Такой вывод является следствием того, что коэффициент преобразования, возведенный в квадрат, должен быть записан для уравнений (10.1):

$$K^2_0 = Z_{12}Z_{21},$$

а для уравнений (10.1a):

$$K^2_0 = c_{12}c_{21}$$

Поскольку существуют разные знаки перед взаимными членами, т. е.  $Z_{12} = -Z_{21}$ , то в этих случаях всюду перед  $K^2_0$  должен ставиться знак минус, а не плюс. Такое изменение знака существенно меняет, например, величину входных и выходных сопротивлений преобразователей, а также и таких его параметров, как чувствительности.

Перейдем теперь к преобразователю немеханической природы, особенно показательному с точки зрения самой техники составления уравнений. С этой целью рассмотрим термоэлектрический преобразователь.

### **11.13. Уравнения термоэлектрического преобразователя**

Для иллюстрации большой общности преобразователей рассмотрим пример составления уравнений термоэлектрического преобразователя. Выбор в качестве примера термоэлектрического преобразователя. Главное в выборе этого примера — это теоретическая сторона, показывающая распространение общих выводов теории на немеханический преобразователь.

Прямой термоэлектрический эффект (эффект Зеебека) состоит в том, что благодаря разности температур между спаем и свободными концами термоэлемента на этих концах возникает электродвижущая сила.

Обратный термоэлектрический эффект (эффект Пельтье) возникает тогда, когда спай термоэлемента нагревается или охлаждается за счет протекания через него тока того или иного направления. Поскольку температура спаия зависит от направления тока, обратный эффект является нечетным, как это следует из ранее приведенного определе-

ния. Оба эффекта описываются практически линейными зависимостями.

Существует еще один термоэлектрический эффект, открытый Томсоном. Этот эффект заключается в том, что если вдоль проводника, по которому протекает электрический ток, имеется температурный градиент, то в дополнение к обычному теплу Джоуля-Ленца выделяется или поглощается в зависимости от направления тока еще некоторое количество тепла. Этот эффект нечетен по тем же причинам, что и эффект Пельтье, и поскольку количественно он очень невелик, то в дальнейших рассуждениях мы не будем принимать его во внимание.

Сделаем теперь следующие упрощающие предположения. Будем считать, что теплоемкость термопреобразователя сосредоточена только в его спае, теплоемкость велика и потери тепла исключаются за счет отсутствия теплопроводности между термопреобразователем и средой. Прямой и обратный термоэлектрические эффекты могут быть выражены двумя опытными законами. Прямой эффект описывается равенством

$$E = k_T(T - T_0) = k_T\Theta, \quad (11.17)$$

где  $E$  — термоэлектродвижущая сила (т. э. д. с);

$\Theta$  — разность температур горячих и холодных спаев;

$k_T$  — коэффициент термоэ. д. с, определяемый главным образом материалами электродов и зависящий, в общем случае, от абсолютного значения температурного диапазона.

Эффект Пельтье выражается следующим соотношением:

$$Q_{II} = k_{II}q \quad (11.18)$$

где  $Q_{II}$  — количество тепла, выделившегося или поглощенного (тепло Пельтье);

$q$  — количество электричества, прошедшего через спай термопреобразователя;

$k_{II}$  — коэффициент Пельтье, зависящий от природы материалов, находящихся в контакте.

Томсон, применив к явлениям термоэлектричества первое и второе начала термодинамики, нашел соотношение между  $k_I$  и  $k_{II}$

$$k_I = \frac{k_{II}}{T}$$

где  $T$  — абсолютная температура спаев. Подставляя это выражение в равенство (11.17), получим для прямого эффекта

$$E = k_{II} \frac{\Theta}{T}. \quad (11.18a)$$

Теперь можно преобразовать равенство (11.18), заменив количество тепла энтропией, которая в табл. 10.1 фигурирует в качестве обобщенного перемещения.

Как известно, под энтропией  $S_3$  понимается функция параметров, определяющих состояние тела, причем

$$\left. \begin{aligned} dS_3 &= \frac{dQ_T}{T} \\ \text{или} \\ S_3 &= \int \frac{dQ_T}{T} \end{aligned} \right\} \quad (11.19)$$

где  $Q_T$  — количество тепла.

В последнем равенстве интеграл можно распространить на замкнутый процесс и тогда при интегрировании по контуру получим:

$$\int \frac{dQ_T}{T} = 0.$$

Это равенство выражает так называемую теорему Клаузиуса и служит характеристикой обратимого процесса, аналогичной тепловой характеристике процесса Карно.

Так, если замкнутый процесс изображен замкнутым контуром  $ABCD$ , то, разбив его на две части  $ABC$  и  $CDA$ , получим при интегрировании:

$$\int_{ABC} \frac{dQ_T}{T} + \int_{CDA} \frac{dQ_T}{T} = 0$$

или

$$\int_{ABC} \frac{dQ_T}{T} = - \int_{CDA} \frac{dQ_T}{T} = \int_{ADC} \frac{dQ_T}{T}.$$

Последнее выражение показывает, что при переходе тела из одного состояния в другое состояние при помощи обратимого процесса энтропия имеет одну и ту же величину, т. е.  $S_3 = \text{const}$ . Так как вся теория преобразователей предполагает их обратимость, то вывод дальнейших соотношений будет основан именно на предположении обратимости процесса.

Воспользуемся первым выражением (11.19), предварительно проинтегрировав обе его части. В результате получим

$$Q_T = S_3 T. \quad (11.19a)$$



Подставляя (11.19а) в (11.18) и учитывая, что в данном случае  $Q_T = Q_P$ , найдем

$$S_3 T = k_{II} q. \quad (11.18a)$$

Теперь объединим равенства (11.17) и (11.18а), в результате чего получим соотношение, известное как первое уравнение Томсона. Будем иметь

$$\frac{E}{\Theta} = \frac{S_3}{q} = \frac{k_{II}}{T} \quad (11.20)$$

Так как измерение т. э. д. с. для прямого эффекта производится компенсационным методом, что соответствует отсутствию тока или эквивалентно разомкнутой цепи, то в этом случае  $q = 0$ . Тепло Пельтье определяется при постоянной температуре, т. е. в изотермическом режиме, когда  $\Theta = 0$ . Отсюда можно написать необходимые взаимные соотношения:

$$\left. \frac{E}{\theta} \right|_{q=0} = \left. \frac{S_3}{q} \right|_{\theta=0} = \frac{k_{II}}{T}. \quad (11.21)$$

Хотя в 10.4 был подведен итог тому, какие величины следует считать обобщенными силами, а какие перемещениями, но мы еще не знаем, какой формой уравнений следует пользоваться при этом выборе.

Выбор сил и координат связан, главным образом, с тем, какие явления определяют взаимодействие сторон. Такое взаимодействие в данном случае задано соотношениями (11.21) и именно из этого следует исходить.

Кроме того, поскольку в соотношении (11.21) фигурируют такие величины, как  $q$  и  $Z_3$ , квадратичная форма которых дает внутреннюю энергию рассматриваемой системы, то следует пользоваться уравнениями преобразователей, в которых в качестве аргументов фигурируют не скорости, а перемещения, т. е. исходной формой будет служить форма (10.1а), а не (10.1).

Приняв во внимание это обстоятельство и возвращаясь к равенству (11.21), в котором все члены положительны, следует найти соотношение с такими же знаками в возможных выражениях коэффициентов преобразования. Обращаясь с этой целью к четырем выражениям коэффициентов преобразования, получим, что все знаки положительны только в случае (10.15), справедливом для уравнений в форме (10.1 а).

Перепишем еще раз выражение (10.15) и получим:

$$K_0 = \left. \frac{Q_1}{g_2} \right|_{g_1=0} = \left. \frac{Q_2}{g_1} \right|_{g_2=0} = c_{12} = c_{21}.$$

Сопоставляя это равенство с выражением (11.21), находим, что в уравнениях, записанных в форме (10.1а), следует принять:

$$Q_1 = E, \quad g_1 = q; \quad Q_2 = S_3, \quad g_2 = \Theta.$$

В соответствии с этим получим:

$$\left. \begin{aligned} E &= c_{11}q + c_{12}\Theta; \\ S_3 &= c_{21}q + c_{22}\Theta. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

Найденный выше коэффициент преобразования  $K_0$  выражается следующим образом:

$$K_0 = K_c = c_{12} = c_{21} = \frac{k_{II}}{T} \quad (11.23)$$

Однако, как уже было указано, только аргументы  $q$  и  $S_3$ , которым присвоена роль обобщенных координат в табл. 10.2, могут в квадратичных формах дать выражение внутренней энергии системы, тогда как при помощи аргументов  $q$  и  $\Theta$  такого выражения не получается.

Исходя из этого соображения чисто физического характера, преобразуем формально полученные равенства (11.22) к такой форме, когда в качестве аргументов будут фигурировать количество электричества  $q$  и энтропия  $S_3$ .

Из уравнений (11.22) видно, что подобное преобразование легко осуществить, если поменять местами  $S_3$  и  $v$ , что в общем виде следовало бы записать как обмен местами между выходными величинами  $Q_2$  и  $g_2$ . Такой обмен уже был сделан в 10.3 и в итоге получены уравнения (10.11).

Переписывая уравнения и заменяя обобщенные скорости  $\dot{g}$  обобщенными перемещениями  $g$ , получим искомую общую форму записи уравнений термопреобразователя:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= d_{11}g_1 + d_{12}g_2; \\ Q_2 &= -d_{21}g_1 + d_{22}g_2. \end{aligned} \right\} \quad (10.11a)$$

Отсюда после подстановок аргументов и сил находим:

$$\left. \begin{aligned} E &= d_{11}q + d_{12}S_3; \\ \Theta &= -d_{21}q + d_{22}S_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

Коэффициенты  $d_{ik}$ , выраженные через коэффициенты  $c_{ik}$  уравнений (11.22), легко найти при помощи табл. 10.1 (для  $Z_{ik}$ ), а также совместным решением систем уравнений, как это делалось выше.

Таким образом, получим:

$$d_{11} = \frac{\Delta}{c_{22}}; \quad d_{22} = \frac{1}{c_{22}}; \quad d_{12} = d_{21} = \frac{c_{12}}{c_{22}} = \frac{c_{21}}{c_{22}} \quad (11.25)$$

Имея уравнения (11.24), перейдем к аргументам в виде скоростей, в частности, к более удобному для пользования току, причем ток будет получен в результате дифференцирования  $q$ . Выразим теперь аргументы через  $I = \dot{q}$  и  $\dot{S}_3$ , для чего необходимо также изменить и коэффициенты уравнения (11.24), которые будут иметь теперь размерность сопротивлений. Перепишем, таким образом, уравнение (11.24) заново, заменив  $d_{ik}$  на  $Z_{ik}$ , и будем считать полученную формулу независимой от других.

В результате находим:

$$\left. \begin{aligned} E &= Z_{11}I + Z_{12}\dot{S}_3; \\ \Theta &= -Z_{21}I + Z_{22}\dot{S}_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

В уравнении (11.26) коэффициенты  $Z_{ik}$  связаны с коэффициентами  $d_{ik}$  таким же соотношением, при помощи которого была установлена связь между обобщенными упругостями и сопротивлениями, т. е.

$$Z_{ik} = \frac{1}{p} d_{ik}.$$

Теперь остается только найти конкретные выражения всех коэффициентов  $Z_{ik}$  и подставить их в уравнения (11.26). Положив в первом из уравнений (11.26) скорость изменения энтропии равной нулю, т. е.  $\dot{S}_3 = 0$ , найдем собственное входное сопротивление преобразователя с электрической стороны:

$$Z_{11} = \left. \frac{E}{I} \right|_{\dot{S}_3=0} = Z_S \quad (11.27)$$

Этот результат будем истолковывать так: собственное входное сопротивление с электрической стороны является сопротивлением, определенным при адиабатическом режиме, так как  $\dot{S}_3 = 0$  только при  $dQ_T = 0$ , что видно из равенства (11.19). Положив затем  $I = 0$  во втором уравнении (11.26), найдем:

$$Z_{22} = \left. \frac{\Theta}{\dot{S}_3} \right|_{I=0} = \left. \frac{\Theta}{pS_3} \right|_{I=0},$$

где  $p$  — оператор.

Если теперь заменить  $S_3$  при помощи равенства (11.19а), то будем иметь:

$$Z_{22} = \frac{T\Theta}{pQ_T} \Big|_{I=0} = \frac{T}{pC_{I=0}}, \quad (11.28)$$

здесь  $C_{I=0}$  — теплоемкость при отсутствии тока на электрической стороне, т. е. это теплоемкость при постоянном давлении, поскольку преобразователь находится в таком состоянии, когда для его расширения нет препятствий. Обозначив эту теплоемкость через  $C_p$ , окончательно получим выражение собственного выходного теплового сопротивления

$$Z_{22} = \frac{T}{pC_p}. \quad (11.29)$$

В заключение остается определить  $Z_{12}=Z_{21}$ . В соответствии с равенством  $\zeta_{ik}=pZ_{ik}$  находим

$$Z_{12} = \frac{d_{12}}{p} = \frac{1}{p} \frac{c_{12}}{c_{22}}. \quad (11.30)$$

В этом выражении  $d_{12}$  заменено коэффициентами  $c_{12}$  и  $c_{22}$  из уравнения (11.22) в соответствии с найденными выше значениями из равенств (11.25).

Далее, используя исходные уравнения преобразователя (11.22), определим при помощи второго уравнения выражение  $c_{22}$ . Выражение  $c_{12}$  уже было получено в виде равенства (11.23).

Положив  $q = 0$ , находим

$$c_{22} = \frac{S_3}{\Theta_T} \Big|_{q=0}.$$

Заменяя теперь  $S_3$  из (11.19а) и подставляя значение теплоемкости при постоянном давлении, уже введенной в соотношение (11.29), будем иметь

$$c_{22} = \frac{1}{T} \frac{Q}{\Theta} \Big|_{q=0} = \frac{1}{T} C_p.$$

Вводя теперь выражения  $C_{12}$  и  $C_{22}$  в равенство (11.28), получим

$$Z_{12} = \frac{1}{p} \frac{c_{12}}{c_{22}} = \frac{k_{II}}{pC_p} \quad (11.31)$$

После определения всех коэффициентов равенство (11.26) перепишем в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} E &= Z_S I + \frac{k_{\Pi}}{pC_p} \dot{S}_3; \\ \Theta &= -\frac{k_{\Pi}}{pC_p} I + \frac{T}{pC_p} \dot{S}_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.32)$$

Имея уравнения (11.32), можно, пользуясь общими зависимостями, получить выражения всех основных технических параметров термоэлектрического преобразователя, в частности, его рабочих сопротивлений. Итак, для термоэлектрического преобразователя получим, что коэффициент преобразования оказывается равным:

$$K_0 = K_{01} = -K_{02} = \frac{k_{\Pi}}{pC_p}. \quad (11.33)$$

Подводя итоги рассмотрению методов составления уравнений преобразователей следует сказать, что прежде всего нужно установить размерность заданных входных и выходных величин. Если размерность соответствует мощности, т. е. потоку энергии, то следует пользоваться уравнениями (10.1) и их производными. В том же случае, когда размерность соответствует энергии, то необходимо применять уравнения (10.1a) и их разновидности, аналогичные производным уравнениям типов *B, D, F*.

Далее необходимо из теоретических или экспериментальных зависимостей определить выражение и знак коэффициента преобразования, как это было показано на приведенных примерах. Затем уравнения пишутся или на основании чисто физических соображений, или с использованием определения типа уравнения. В последнем случае определяется соответствие коэффициента преобразования одному из выражений (10.11)—(10.14) или (10.15)—(10.18).

## 12. Определение основных параметров структур преобразователей

Структуры преобразователей строятся на различных физических принципах, число которых достаточно многообразно. Можно сказать, что многие технические системы используют все известные физике преобразования энергии из одного вида в другой, техническая реализация которых в данное время представляется возможной и оправданной.

В соответствии с этим постоянно существует необходимость в оценке тех или иных свойств структур преобразователей, в связи с чем требуются такие показатели, при помощи которых было бы возможно сравнивать между собой структуры преобразователей, основанные на различных принципах действия. Эти чисто практические потребности приводят к необходимости разработки как абсолютных, так и относительных критериев, число которых не остается постоянным, поскольку для оценки свойств структур систем предлагались и будут предлагаться различные коэффициенты и характеристики, имеющие либо достаточно общее, либо только частное значение.

Такие критерии оценки, как чувствительность и входное сопротивление, являются общепринятыми. Менее распространены коэффициент полезного действия и производные от него показатели, а также коэффициент преобразования. Эти параметры для оценки структур преобразователей имеют не только практическое значение, но представляют также существенный теоретический интерес.

В практику организации структур вошло использование относительного коэффициента полезного действия в качестве одного из основных расчетных параметров структур систем. Применение этого параметра при проектировании структур систем является в большинстве случаев необходимым, если строить все расчеты, основываясь на энергетических соотношениях, имеющих место во всевозможных системах.

Важность учета энергетических соотношений в многочисленных структурах преобразователей вытекает из того, что повышение мощности, получаемой каждым последующим преобразователем от предыдущего (при отсутствии усилителей), дает возможность увеличить величину вращающего момента в оконечной структуре цепи. При этом снижается ряд погрешностей, вызываемых различными паразитными моментами, а повышенная мощность, получаемая на оконечной структуре непосредственной оценки, дает возможность применить в качестве такой системы менее чувствительный, т. е. более дешевый и более надежный механизм.

Подобный подход позволяет объединить разнообразные задачи, возникающие при проектировании структур различного назначения, одной главенствующей идеей, заключающейся в стремлении удовлетворить всем требованиям технического задания при оптимальном возможном значении относительного к. п. д.

Этот метод обладает не только общностью подхода, но и оказывается единственно правильным в тех случаях, когда необходимо создать систему с преобразованиями энергии измеряемой величины, обладающее оптимальными, т. е. предельными характеристиками. На основании сказанного в настоящем разделе будут рассмотрены

различные параметры структур преобразователей, которые могут служить для оценки технических свойств последних.

## 12.1. Коэффициенты преобразования

Как мы уже видели, понятие о коэффициентах преобразования возникло в результате рассмотрения соотношений взаимности, справедливых для всех обратимых преобразователей.

Уравнения (10.1) или (10.1а) показывают, что обобщенные силы  $Q_i$  зависят не только от скорости или перемещения на стороне рассматриваемой силы, но и от скорости или перемещения на другой стороне преобразователя. Именно этой неразрывной зависимостью и описывается процесс преобразования энергии и ее переход от входных зажимов к выходным. Таким образом, принципиально всегда имеется взаимное влияние сторон друг на друга, проявляющееся в существовании взаимных реакций.

Ранее было найдено, что коэффициент преобразования зависит не только от типа структуры преобразователя, но для данного преобразователя определяется также рабочим режимом сторон, причем возможны различные комбинации из режимов холостого хода и короткого замыкания на обеих сторонах, дающие четыре разных выражения коэффициента преобразования.

В том случае, когда аргументами в уравнениях преобразователей оказываются обобщенные скорости, то коэффициент преобразования имеет смысл взаимного сопротивления, т. е.  $K_0 = Z_{12} = Z_{21}$ .

Из всех коэффициентов преобразования наиболее простое выражение имеет коэффициент, определенный при холостом ходе на обеих сторонах, и именно его мы условились применять в дальнейшем в качестве параметра, характеризующего преобразователь.

В соответствии с физическим содержанием понятия о коэффициенте преобразования именно этот термин предпочтен возможным другим, например, таким, как коэффициент связи или коэффициент взаимодействия.

Будем считать основным определением коэффициента преобразования выражение (10.11):

$$K_0 = \left. \frac{Q_1}{\dot{g}_2} \right|_{\dot{g}_1=0} = \left. \frac{Q_2}{\dot{g}_1} \right|_{\dot{g}_2=0} = Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{a_{21}}.$$

В некоторых случаях могут быть использованы также и выражения, справедливые при других режимах сторон, в соответствии с равенствами (10.12) — (10.14) или (10.16) — (10.18), но это должно быть оговорено особо при соответствующих выводах.

Возможное увеличение коэффициента преобразования того или иного преобразователя почти всегда желательно, так как оно говорит об улучшении преобразования энергии в преобразователях данного типа. Поскольку коэффициент  $K_0$  входит и в выражения входных сопротивлений, и в выражения чувствительностей, то наличие других ограничивающих условий, например получение заданного сопротивления, заданной чувствительности, может накладывать соответствующее ограничение и на величину коэффициента преобразования.

Выше были найдены выражения коэффициентов  $K_0$  для некоторых преобразователей. Так для магнитоэлектрических преобразователей в соответствии с равенством (11.3) мы имеем

$$K_0 = B s w = \Psi.$$

Поскольку для такого преобразователя справедливо известное соотношение между моментом  $D$  и током  $I$ , т. е.

$$D = \Psi I = K_0 I,$$

то ясно, что постоянное стремление к увеличению момента магнитоэлектрических приборов за счет увеличения пото-косцепления в сущности сводится к увеличению той энергии измеряемой величины, которая может быть преобразована во вращающий момент. Поскольку при этом почти всегда желательно снижать мощность, потребляемую системой, то стремятся к уменьшению величины тока  $I$  и тогда для увеличения коэффициента преобразования оказывается необходимым увеличивать его составляющие.

Площадь рамки  $s$  обычно задана теми или иными условиями, в силу чего требуется увеличивать индукцию или число витков. Эти последние возможности удается реализовать главным образом за счет создания новых магнитных материалов или более тонкой проволоки, например, микропроволоки. Таким образом, в данном случае увеличение коэффициента преобразования достигается за счет создания материалов с новыми качествами.

Коэффициент преобразования линеаризованного электростатического преобразователя определялся равенством (10.8а), т. е.

$$K_0 = E_0$$

где  $E_0$  — начальная напряженность поля в преобразователе.

Это равенство показывает, что в электростатических системах и первичных преобразователях преобразование в механический момент или в изменение напряжения на обкладках происходит тем эффективнее, чем больше приложенное к преобразователю напряжение. Равенство (11.16) дает выражение коэффициента преобразования для электромагнитных преобразователей. В этом случае



$$K_0 = \frac{wH_0}{R_{M_0}}$$

Из соотношения следует, что для увеличения коэффициента преобразования необходимо стремиться к увеличению магнитодвижущей силы и снижению магнитного сопротивления, чего можно достигнуть как за счет конструктивных мер, так и за счет применения соответствующих материалов.

Коэффициент преобразования термоэлектрического преобразователя найден в виде выражения (11.33). Если отбросить в этом равенстве оператор и сохранить только физические величины, то имеем:

$$K_0 = \frac{k_{II}}{C_p}$$

Полученное равенство показывает, что для улучшения преобразующего действия термоэлемента желательно увеличение коэффициента Пельтье и возможно большее снижение теплоемкости, так как это при данном количестве тепла приведет к повышению температуры спаев. Увеличение коэффициента Пельтье связано с поисками новых материалов, главным образом, полупроводниковых, тогда как снижение теплоемкости может быть получено за счет конструктивных мер.

При изучении пьезоэлектрических явлений свойства пьезоэлектрических преобразователей тесным образом связаны с анизотропией кристаллов, так как пьезоэффекты вызываются электрическими и механическими взаимодействиями элементов кристаллической решетки. По этой причине строгое изучение преобразователей данного типа осуществляется в тензорной форме. Приближенные соотношения можно получить, однако, если рассматривать пьезопреобразователь как изотропное тело, а это дает возможность пользоваться скалярными величинами.

Прямой пьезоэффект состоит в появлении зарядов на поверхностях пьезоэлектрика под влиянием механических напряжений, тогда как обратный эффект связан с деформацией пьезоэлектрика, т. е. с перемещением двух его концов при воздействии электрического поля.

Если характеризовать пьезоэлектрик четырьмя переменными: механическим напряжением  $\sigma$ , деформацией  $\Delta l$ , напряженностью электрического поля  $E$  и электрическим смещением  $D$ , то нужно иметь в виду, что все электрические величины являются векторами, тогда как механические, т. е.  $\delta$  и  $\Delta l$ , — тензоры. Если в первом приближении полагать все переменные скалярами, то даже при таких условиях могут быть найдены три соотношения взаимности, каждое из которых

является равноправным определением коэффициентов преобразователя, т. е.

$$K_{01} = \left. \frac{E}{\Delta l} \right|_{D=0} = \left. \frac{\sigma}{D} \right|_{\Delta l=0} ;$$

$$K_{02} = - \left. \frac{D}{\Delta l} \right|_{E=0} = \left. \frac{\delta}{E} \right|_{\Delta l=0} ;$$

$$K_{03} = \left. \frac{E}{\sigma} \right|_{D=0} = \left. \frac{\Delta l}{D} \right|_{\sigma=0} .$$

Коэффициент преобразования  $K_{01}$  введен в употребление Мэсоном и удобен для составления уравнений преобразователя с использованием в качестве аргументов величин  $\Delta l$  и  $D$ , что будет соответствовать основной форме уравнений (10.1а). Коэффициент  $K_{02}$  употребляется под названием пьезоэлектрической константы, а коэффициент  $K_{03}$  введен А. А. Харкевичем и имеет в теории пьезоэлектрических преобразователей существенное прикладное значение.

Из всего сказанного следует сделать вывод о том, что коэффициенты преобразования, определенные и измеренные в наперед оговоренных условиях, могут служить не только для оценки преобразователей, но и для их дальнейшего совершенствования.

## 12.2. Сопротивления преобразователей

Всякий электромеханический преобразователь обладает сопротивлениями, которые могут быть измерены как со стороны его входа, так и со стороны выхода. Величина этих сопротивлений будет зависеть не только от свойств преобразователя, но и от того, в каком режиме эти сопротивления измеряются. Так, например, сопротивления с той или иной стороны преобразователя могут быть найдены при разомкнутой или замкнутой другой стороне. Если другая сторона разомкнута, то будет получено сопротивление холостого хода, которое в дальнейшем называется собственным сопротивлением, так как оно определяется только свойствами преобразователя. В том случае, когда противоположная сторона замкнута на сопротивление нагрузки преобразователя, то найденное сопротивление будет рабочим сопротивлением, соответствующим реальным условиям работы и зависящим от сопротивления нагрузки. Это сопротивление за счет взаимосвязи сторон отличается от собственного сопротивления на величину так вносимого сопротивления.

Соответствующим выбором сопротивления нагрузки оказывается возможным так повлиять на величину входного сопротивления преобразователя, что она перестанет зависеть от сопротивления нагрузки и будет определяться лишь коэффициентами уравнения преобразователя. В этом случае приходится оперировать с известным из теории цепей характеристическим сопротивлением преобразователя, которое имеет существенное значение при работе преобразователя на согласованную нагрузку с целью выделения в последней оптимальной мощности. Разновидностью характеристического сопротивления для симметричных преобразователей является повторное сопротивление, имеющее частное значение при решении некоторых задач.

Сопротивления часто служат важными техническими характеристиками преобразователя и позволяют конструировать преобразователь или выбирать готовый, в соответствии с требованиями данной конкретной задачи.

Рассмотрим перечисленные сопротивления преобразователей, начав с определения его входных сопротивлений.

Величина входного сопротивления преобразователя важна потому, что она определяет ту мощность, которую преобразователь потребляет от объекта. В том случае, когда объект обладает малой мощностью или, иначе говоря, большим внутренним сопротивлением, параллельное присоединение к нему некоторых преобразователей с недостаточно большим входным сопротивлением сразу изменит режим работы объекта. В результате этого измерение окажется проведенным в условиях, отличных от действительных.

Так, например, измерение напряжения источника с большим внутренним сопротивлением при помощи параллельно присоединенного вольтметра с малым входным сопротивлением будет произведено неверно, поскольку измеряемое напряжение распределится пропорционально внутренним сопротивлениям источника и вольтметра. Наоборот, измерение тока при помощи амперметра не приведет к заметному нарушению режима цепи, если сопротивление прибора мало по сравнению с внутренним сопротивлением источника. Подобные же соображения справедливы и в случае измерения различных неэлектрических величин. Так, при измерении температуры и особенно температуры поверхностей само прикосновение измерительного преобразователя изменяет условия теплообмена в месте измерения, а значит изменяет и измеряемую температуру.

При измерении скорости вала маломощного двигателя или амплитуды вибрации небольшого вибрирующего тела с малым запасом энергии очень легко нарушить режим их работы, если входное механическое сопротивление приборов окажется достаточно большим и начнет тормозить движение.

Таким образом, входное сопротивление преобразователя должно быть либо большим, либо малым в зависимости от того, каковы свойства объекта, а также от того, какая величина и каким методом измеряется. Назовем собственным входным сопротивлением преобразователя сопротивление  $Z_{11}$ , измеренное со стороны входных зажимов 1-1 при холостом ходе на выходной стороне 2-2 (см. рис. 12.1).

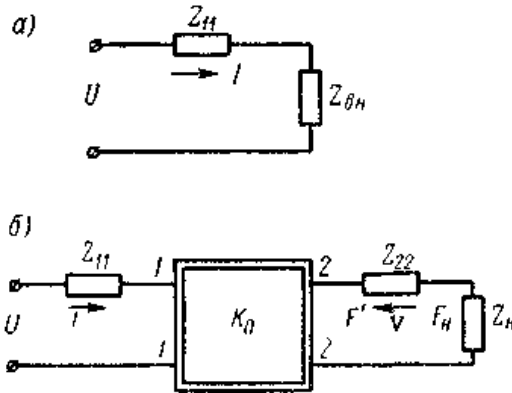


Рис. 12.1

Величину его можно найти из первого уравнения (10.1), положив в нем  $\dot{g}_2 = 0$ , т. е.

$$Z_{11} = \left. \frac{Q_1}{\dot{g}_1} \right|_{\dot{g}_2=0} \quad (12.1)$$

Отсюда следует, что собственное входное сопротивление определяется при отсутствии движения на выходной стороне преобразователя.

Если уравнения преобразователя выражены не через скорости, а через перемещения, то преобразователь может быть охарактеризован не сопротивлением, а собственной упругостью.

В реальных условиях измерительные преобразователи работают на некоторую нагрузку, которой может быть, например, другой преобразователь, причем обобщенная скорость на выходе не равна нулю.

Входное сопротивление, определенное в этих условиях, назовем рабочим входным сопротивлением и обозначим через  $Z_1$ . Это сопротивление за счет наличия связи между сторонами уже не будет равно собственному входному сопротивлению, и данное обстоятельство является одним из принципиальных положений общей теории преобразователей. Справедливость этого факта легко показать,

если разделить сначала первое из основных уравнений (10.1) на входную скорость  $\dot{g}_1$ , в результате чего получим

$$Z_1 = \frac{Q_1}{\dot{g}_1} = Z_{11} + Z_{12} \frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1} \quad (12.2)$$

Определим теперь отношение скоростей  $\frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1}$  из второго уравнения

(10.1), разделив для этого все члены на  $\dot{g}_2$ . Обозначим сопротивление нагрузки преобразователя через  $Z_H$  и учтем, что на основании равенства (10.9)

$$Z_H = -\frac{Q_2}{\dot{g}_2}$$

Тогда получим

$$\frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1} = \frac{Z_{21}}{\frac{Q_2}{\dot{g}_2} - Z_{22}} = -\frac{Z_{21}}{Z_H + Z_{22}} \quad (12.3)$$

В этом равенстве сопротивление  $Z_{22}$  является, аналогично сопротивлению  $Z_{11}$ , собственным выходным сопротивлением преобразователя.

После подстановки (12.3) в (12.2) находим выражение для входного рабочего сопротивления

$$Z_1 = Z_{11} - \frac{K^2_0}{Z_H + Z_{22}} \quad (12.4)$$

Второй член равенства (12.4) называется вносимым сопротивлением, т. е.

$$Z_{BH} = \frac{K^2_0}{Z_H + Z_{22}} \quad (12.5)$$

Отсюда следует, что входное рабочее сопротивление зависит не только от собственного входного сопротивления, но и от полного сопротивления на выходе и квадрата коэффициента преобразования. Происходит ли при этом увеличение или уменьшение входного сопротивления, зависит от знака вносимого сопротивления, а этот последний определяется знаком  $K^2_0$ . Если знаки взаимных сопротивлений  $Z_{12}$  и  $Z_{21}$  одинаковы, то входное сопротивление уменьшается, тогда как в случае разных знаков входное сопротивление растет. Такое возрастание сопротивления всегда происходит,

например, у преобразователей, основанных на использовании электродинамических взаимодействий.

Хорошей иллюстрацией роли вносимого сопротивления служит пример успокоения подвижной части магнитоэлектрических приборов и, в частности, гальванометров.

В уравнениях движения подвижной части таких систем, например в уравнении (10.18), находится момент успокоения

$$M_{\text{усп}} = P \frac{d\alpha}{dt},$$

здесь коэффициент  $P$ , называемый коэффициентом успокоения, по существу служит механическим сопротивлением, вносимым с электрической стороны.

Такое заключение вытекает из равенства

$$P = \frac{M_{\text{усп}}}{\frac{d\alpha}{dt}},$$

из которого следует, что этот коэффициент является отношением момента к угловой скорости, т. е. механическим сопротивлением при вращательном движении. Это выражение можно найти сразу, если принять во внимание, что для магнитоэлектрических приборов коэффициент преобразования определяется равенством (10.3):

$$K_0 = B S w = \Psi$$

Здесь собственное сопротивление с электрической стороны, которая по отношению к механической стороне является выходной, будет равно:

$$Z_{22} = R_r$$

где  $R_r$  — сопротивление гальванометра, а сопротивлением нагрузки является сопротивление внешней цепи  $R_{\text{ц}}$ , т. е.

$$Z_{\text{н}} = R_{\text{ц}}$$

Подставляя эти величины в равенство (12.5), находим известное выражение коэффициента успокоения

$$P = R_{\text{вн}} = \frac{\Psi^2}{R_r + R_{\text{ц}}} \quad (12.6)$$

Понятие о вносимом сопротивлении играет важную роль при изучении структур электрических цепей. При наличии индуктивной связи двух колебательных контуров эквивалентное входное сопротивление первого контура может быть получено в таком виде:

$$Z_1 = \left( R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} R_2 \right) + f \left( X_1 + \frac{\omega^2 M^2}{z_2^2} X_2 \right),$$

где

$$z_{22}^2 = R_2^2 + X_2^2.$$

Отсюда ясно, что вносимое сопротивление одновременно изменяет как активную, так и реактивную составляющие сопротивления, поскольку

$$R_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} R_2 \quad (12.7)$$

и

$$X_{\text{вн}} = \frac{\omega^2 M^2}{z_{22}^2} X_2. \quad (12.8)$$

Аналогичные результаты можно получить и для любого электромеханического преобразователя, если раскрыть уравнение (12.5).

Действительно, рассматривая установившийся режим работы преобразователя при синусоидальном воздействии и обозначив сумму сопротивлений на выходе преобразователя через  $Z_{\text{вых}}$ , получим

$$Z_{\text{вых}} = Z_{\text{H}} + Z_{22} = r + jx. \quad (12.9)$$

Подставив теперь (12.9) в (12.5), найдем после преобразований

$$Z_{\text{вн}} = \frac{K_0^2}{r + jx} = \frac{K_0^2(r - jx)}{r^2 + x^2} = \frac{K_0^2}{r^2 + x^2} r - j \frac{K_0^2}{r^2 + x^2} x \quad (12.10)$$

Это же равенство перепишем иначе, введя угол сдвига фаз из известных соотношений для треугольника сопротивлений, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi_{\text{вн}} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}; \\ \sin \varphi_{\text{вн}} &= \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

Произведя подстановку равенств (12.11) в уравнение (12.10), получим

$$Z_{\text{вн}} = \frac{K_0^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \cos \varphi_{\text{вн}} - j \frac{K_0^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \sin \varphi_{\text{вн}} \quad (12.12)$$

или

$$Z_{\text{вн}} = R_{\text{вн}} + jX_{\text{вн}}. \quad (12.12a)$$

Примем теперь, что входная сторона такого преобразователя является электрической, а выходная — механической. Тогда собственное входное электрическое сопротивление можно представить следующим образом:

$$Z_{11} = R_{11} + jX_{11}.$$

Учитывая наличие составляющих (11.10) вносимого сопротивления, найдем выражение рабочего входного сопротивления:

$$Z_1 = \left( R_{11} + \frac{K_0^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \cos \varphi_{\text{ВН}} \right) + j \left( X_{11} - \frac{K_0^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \sin \varphi_{\text{ВН}} \right) \quad (12.13)$$

Полученное выражение показывает, что механическая часть преобразователя, потребляющая энергию с электрической стороны, изменяет этим самым как активное, так и реактивное сопротивление последней. Изменение активного и реактивного сопротивлений на электрической стороне за счет механического движения позволяет осуществить своеобразные электромеханические колебательные системы.

Кроме входных сопротивлений, для каждого преобразователя обычно необходимо еще знание и выходного сопротивления. Это объясняется, как уже указывалось, требованиями согласования сопротивления нагрузки с сопротивлением преобразователя, что дает возможность достигнуть выделения в нагрузке максимально возможной полезной мощности.

Собственным выходным сопротивлением преобразователя называется сопротивление  $Z_{22}$ , измеренное со стороны выходных зажимов 2-2 при отсутствии движения, т. е. при холостом ходе на стороне 1-1. Это определение аналогично данному выше определению собственного входного сопротивления, т. е. получаем

$$Z_{22} = \left. \frac{Q_2}{\dot{g}_2} \right|_{\dot{g}_1=0} .$$

Очевидно, если сопротивление нагрузки перенесено на вход преобразователя, т. е. на сторону 1-1, то это будет равносильно изменению направления потока энергии. В данном случае можно говорить о входном рабочем сопротивлении со стороны 2-2 или, условно, о выходном рабочем сопротивлении. Выражение для этого сопротивления получается после перемены местами сопротивлений  $Z_{11}$  и  $Z_{22}$  в уравнении (12.4), т. е. будем иметь:

$$Z_2 = Z_{22} - \frac{K_0^2}{Z_{\text{Н}} + Z_{11}} \quad (12.16)$$

Соответственно вносимое сопротивление (но теперь уже со стороны 1-1) будет равно:

$$Z_{\text{ВН}} = \frac{K_0^2}{Z_{\text{Н}} + Z_{11}} \quad (12.17)$$



Так же, как и сопротивление  $Z_1$ , сопротивление  $Z_2$  можно выразить при помощи уравнений типа *A*. В этом случае сопротивление нагрузки считаем включенным на зажимы 1-1, причем направление скорости на этой стороне по отношению к направлению силы противоположно тому, что было на стороне 2-2. Используя уравнения (10.6), а также учитывая указанное обстоятельство и то, что выходное сопротивление не может быть отрицательным, получим

$$Z_2 = \frac{Q_2}{\dot{g}_2} = \frac{a_{22}Z_H + a_{12}}{a_{21}Z_H + a_{11}} \quad (12.18)$$

Это значение сопротивления соответствует общепринятым для уравнений типа *A* положительным направлениям сил и скоростей.

Уравнения (12.14) и (12.18) для рабочих сопротивлений, определенных со стороны входа и выхода преобразователя, показывают, что эти сопротивления зависят от сопротивления  $Z_H$ , которым нагружена противоположная сторона преобразователя.

Можно найти такое значение нагрузочного сопротивления, при котором рабочие сопротивления преобразователя станут только функциями коэффициентов описывающих его уравнений. Такое специфическое значение сопротивления нагрузки получило название характеристического сопротивления. Выражение этого сопротивления может быть получено при любом способе записи уравнений преобразователя, но при помощи уравнений типа *A* все выкладки получаются проще, чем если бы в основу были положены уравнения типа *Z*.

Приведем рассмотрение этого вопроса, одновременно пользуясь обоими формами записи уравнений. Положим, что выходная сторона преобразователя нагружена сопротивлением, имеющим такое значение:

$$Z_{\text{хар}} = \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}}} \quad (12.19)$$

т. е. сопротивление нагрузки является определенной функцией коэффициентов уравнений, описывающих преобразователь. Теперь величину входного сопротивления со стороны 1-1 найдем, если подставим это значение сопротивления в уравнения (12.14). В результате такой подстановки будем иметь

$$Z_1 = \frac{a_{11} \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}} + a_{12}}}{a_{21} \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}} + a_{22}}}$$

Уничтожая иррациональность в знаменателе и проделав соответствующие преобразования с учетом соотношений (10.8а), получим

$$Z_1 = \frac{a_{11}}{a_{22}} \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}}} = \frac{a_{11}}{a_{22}} Z_{\text{хар}} \quad (12.20)$$

Это выражение показывает, что при нагрузке преобразователя характеристическим сопротивлением на стороне 2-2 его входное сопротивление со стороны 1-1 становится тоже функцией коэффициентов уравнений преобразователя, т. е. также характеристическим. Из равенства (12.20) найдем выражение характеристического сопротивления со стороны входа

$$Z_{1\text{хар}} = \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}}} \quad (12.21)$$

Воспользовавшись теперь равенством (12.21) и уравнением (12.18), определим, каково будет сопротивление преобразователя со стороны 2-2, если сторона 1-1 будет нагружена на сопротивление  $Z_{\text{н}}$ , равное по величине  $Z_{1\text{хар}}$ , т. е. если

$$Z_{\text{н}} = Z_{1\text{хар}} \quad .$$

После подстановки получим

$$Z_{2\text{хар}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}} = \sqrt{\frac{a_{12}a_{22}}{a_{11}a_{21}}} \quad (12.22)$$

Этот результат показывает, что сопротивление со стороны 2-2 также оказывается равным своему характеристическому сопротивлению. Если применить в качестве основных уравнений уравнения типа Z, то соответствующие выражения можно получить, используя равенство (10.7):

$$Z_{1\text{хар}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{22}} (Z_{11}Z_{22} - K_0^2)} \quad (12.23)$$

$$Z_{2_{\text{хар}}} = \sqrt{\frac{Z_{22}}{Z_{11}} (Z_{11}Z_{22} - K_0^2)} \quad (12.24)$$

где  $K_0^2 = Z_{12}Z_{21}$ .

Как видно из проведенного рассмотрения, в общем случае характеристические сопротивления преобразователя, определенные с его противоположных сторон, оказываются разными, причем различие

зависит от множителей  $\frac{Z_{11}}{Z_{22}}$  или  $\frac{Z_{22}}{Z_{11}}$ .

Характеристические сопротивления преобразователей могут быть найдены экспериментально при помощи измерения сопротивлений в режимах холостого хода и короткого замыкания. Так например, при разомкнутой выходной стороне собственное входное сопротивление будет равно  $Z_{11}$ , тогда как при коротком замыкании на выходе, т. е. при  $Z_{\text{н}} = 0$ , получим из уравнения (12.5)

$$Z_{1_{\text{к.з.}}} = Z_{11} - \frac{K_0^2}{Z_{22}}$$

Вычислив теперь среднее геометрическое из найденных значений сопротивлений, получим выражение характеристического сопротивления со стороны входа, что соответствует равенству (12.23), т. е.

$$Z_{1_{\text{хар}}} = \sqrt{Z_{11}Z_{1_{\text{к.з.}}}} = \sqrt{\frac{Z_{11}}{Z_{22}} (Z_{11}Z_{22} - K_0^2)}$$

Особое значение характеристического сопротивления состоит в том, что для преобразователя оно выполняет роль, аналогичную роли волнового сопротивления длинной, однородной электрической линии. В теории цепей доказывается, что если однородную линию нагрузить сопротивлением, равным волновому сопротивлению, то отражения энергии от сопротивления не будет и в системе установится режим бегущей волны. В этом режиме, благодаря отсутствию отражений, в сопротивлении нагрузки выделяется оптимальная мощность, а нагрузка называется согласованной с линией.

Для четырехполюсника роль волнового сопротивления выполняет характеристическое сопротивление, и если сопротивление нагрузки выбрано равным характеристическому, то отражение энергии также отсутствует, благодаря чему в нагрузке выделяется оптимальная мощность.

Кроме того, при отсутствии согласования сопротивления нагрузки с характеристическим сопротивлением входное сопротивление

преобразователя с изменением частоты волнообразно изменяется, что связано с резонансными явлениями, причем соответственно изменяется и угол сдвига фаз во входной цепи.

В различных технических системах приходится встречаться с так называемым повторным сопротивлением.

Повторным сопротивлением называется такое сопротивление нагрузки, замкнув на которое одну сторону преобразователя, т. е. его вход или выход, с другой стороны можно получить то же самое сопротивление, как будто бы при этом сам преобразователь отсутствует. Это явление объясняется таким подбором параметров преобразователя и нагрузки, при котором отношение силы (напряжения) к скорости (току) на входе преобразователя равно отношению соответствующих величин на его выходе.

Так, если замкнуть преобразователь на некоторое сопротивление  $Z'_H$  со стороны выхода (зажимы 2-2), то, пользуясь равенством (12.5), получим повторное сопротивление — сопротивление со стороны входа

$$Z_1 = Z'_H = Z_{11} - \frac{K_0^2}{Z'_H + Z_{22}}. \quad (12.25)$$

Отсюда находится выражение для повторного сопротивления  $Z'_H$ . Если же соответствующее сопротивление  $Z'_H$  подключить к входным зажимам (1-1), то повторное сопротивление со стороны выхода найдется при помощи равенства (12.16), т. е.

$$Z_2 = Z''_H = Z_{22} - \frac{K_0^2}{Z''_H + Z_{22}} \quad (12.26)$$

При использовании уравнений типа *A* соответствующие выражения будут иметь такой вид:

$$Z_1 = Z'_H = \frac{a_{11}Z'_H + a_{12}}{a_{21}Z'_H + a_{22}} \quad (12.27)$$

$$Z_2 = Z''_H = \frac{a_{22}Z''_H + a_{12}}{a_{21}Z''_H + a_{11}} \quad (12.28)$$

Очень часто для построения электрических или акустических фильтров используются симметричные четырехполюсники, характеризуемые не тремя, а только двумя коэффициентами, поскольку в этих случаях  $Z_{11} = Z_{22}$  или  $a_{11} = a_{22}$ . При таких условиях будут одинаковы оба характеристические сопротивления и они же будут одновременно и повторными сопротивлениями.

### 12.3. Чувствительность структур преобразователей

Кроме таких параметров преобразователей, как коэффициент преобразования или входные сопротивления, важное значение для структур систем представляет понятие о чувствительности. Термин «чувствительность» имеет физическое происхождение в отличие от таких, например, терминов, как «крутизна характеристики», «передаточный коэффициент», «передаточная функция», математическая природа которых очевидна.

Чувствительностью линейного преобразователя называется отношение его выходной величины к входной. Если обозначить чувствительность через  $S$ , а произвольные входные и выходные величины через  $X_1$  и  $X_2$  соответственно, то для линейного преобразователя получим

$$S = \frac{X_2}{X_1}. \quad (12.29)$$

В том случае, если преобразователь нелинеен, то чувствительность не будет постоянной величиной, а будет изменяться в зависимости от того, при каком значении  $X_1$  она определяется. Поэтому для нелинейного преобразователя справедливо такое определение чувствительности:

$$S = \frac{dX_2}{dX_1} \quad (12.30)$$

Из самого определения чувствительности следует также, как это имело место и при определении сопротивлений, что если входная величина является функцией времени, то определенной функцией времени будет и чувствительность. Таким образом, при синусоидальном характере изменений входной величины и установившемся режиме работы преобразователя нужно говорить о комплексной чувствительности, которую в дальнейшем будем обозначать через  $S(j\omega)$ .

В соответствии с этим, при изучении переходных процессов естественно пользоваться понятием переходной чувствительности, которая будет обозначаться символом  $S(t)$ . Наконец, наиболее общей формой, из которой могут быть получены обе указанные чувствительности, является операторная чувствительность, обозначаемая в дальнейшем через  $S(p)$ .

Из сказанного можно сделать заключение о тесной связи всех этих определений с соответствующими определениями сопротивлений, данными в 9.4, и легко показать также, что частными случаями, совпадающими с определением чувствительности, будут

соответствующие определения комплексной, переходной и операторной проводимостей.

Данные выше определения чувствительности позволяют сформулировать самое общее ее определение и сказать, что ***под чувствительностью системы понимается отношение следствия к вызвавшей его причине, выраженное количественно.***

Отличие понятия чувствительности от всех других существующих критериев оценки, основанных на сравнении эффектов на выходе и входе преобразователя, заключается в том, что при определении чувствительности как входная, так и выходная величина может быть любой. Например, если в частном случае входной величиной является обобщенная сила, а выходной — обобщенная скорость, то размерность чувствительности совпадает с размерностью обобщенной проводимости.

При пользовании понятием чувствительности всегда приходится указывать, по отношению к какой величине эта чувствительность определена и в каких единицах выражены входная и выходная величины. Если речь идет об измерительной цепи, т. е. о совокупности преобразователей, то определение результирующей чувствительности ее в значительной мере может зависеть от замысла конструктора. Так, например, поданное на вход измерительной цепи электрическое напряжение, в зависимости от назначения измерительного устройства и примененного метода измерения, может быть преобразовано в геометрическое перемещение, в свет, звук, тепло и т. п. В соответствии с этим, придется говорить о чувствительности к напряжению, но выражать эту чувствительность в миллиметрах на вольт, люмена к на вольт, в барах на вольт, в калориях на вольт и т. д.

Именно потому, что чувствительность численно характеризует действие преобразователя по возникающему на его выходе эффекту, приходящемуся на некоторое единичное воздействие на входе, величина чувствительности часто определяет структуру и сложность всей цепи в целом. Например, недостаточная чувствительность входного преобразователя измерительной цепи может потребовать введения усилителей, дополнительных источников питания, стабилизаторов, фильтров и т. д.

От чувствительности следует отличать порог чувствительности, т. е. величину такого воздействия на входе, которое оказывается достаточным для появления на выходе минимального эффекта, доступного для надежного обнаружения. В отличие от чувствительности порог чувствительности выражается в единицах величины, поданной на вход системы.

Величина порога чувствительности определяется многими причинами, из которых главное значение имеют принцип действия и

конструктивное выполнение. Когда все известные в данное время способы повышения порога чувствительности исчерпаны, то это почти всегда означает, что величина порога ограничивается тем принципом действия, на котором основан преобразователь. Это можно проиллюстрировать несколькими примерами.

Так, в оптике порог чувствительности микроскопа (разрешающая способность) ограничивается той длиной световой волны, при которой в силу дифракции две близкие точки объекта уже не могут быть отличены друг от друга. Преодоление этого препятствия оказалось возможным только в качественно новом микроскопе — электронном, т. е. новое количество потребовало нового качества. При усилении электрических сигналов порог чувствительности определяется уровнем собственных шумов сопротивлений и некоторых других деталей. Такие шумы возникают за счет тепловых движений электронов в пространственном заряде, хаотическим тепловым движением зарядов в сопротивлениях и т. п.

В том случае, когда преобразователь обладает заведомо нелинейными свойствами, чувствительность его зависит от входной величины  $X_1$  и определяется равенством (12.30). Для характеристики степени существующей нелинейности удобно пользоваться безразмерной величиной, которую можно назвать относительной чувствительностью. В данном случае под относительной чувствительностью понимается отношение чувствительности в некоторой произвольной точке, т. е. при некотором значении  $X_1 \neq 0$ , к чувствительности в другой точке, выбранной в качестве базовой, например, к чувствительности у нулевой точки, т. е. при  $X_1 \rightarrow 0$ . Из сказанного следует, что относительная чувствительность характеризует отклонение от линейности, поскольку можно написать:

$$S_{\text{отн}} = \frac{|S|_{X_1 \neq 0}}{|S|_{X_1 \rightarrow 0}} \quad (12.31)$$

Очевидно, что в случае полной линейности  $S_{\text{отн}} = 1$ . Кроме этого понятия относительной чувствительности, в технике существуют еще и другие, например, отношение относительного изменения сопротивления тензометра к относительному изменению его удлинения, т. е.

$$S'_{\text{отн}} = \frac{|\Delta R / R}{|\Delta l / l|} \quad (12.32)$$

Очень часто под относительной чувствительностью мостовой цепи к изменению сопротивления плеча понимают отношение:

$$S''_{\text{отн}} = \frac{\alpha}{|\Delta R / R|} \quad (12.33)$$

где  $\alpha$  — отклонение гальванометра, вызванное относительным изменением сопротивления данного плеча.

Если определение относительной чувствительности в соответствии с (12.31) служит, главным образом, для количественной оценки нелинейности, то другие приведенные определения (12.32) и (12.33) позволяют производить сравнения по чувствительности однотипных преобразователей, а также мостовых цепей и тому подобных систем.

Из уравнения (12.29) следуют два равенства:

$$X_2 = SX_1 \quad (12.34)$$

$$X_1 = CX_2 \quad (12.34a)$$

В равенстве (12.34a) коэффициент  $C$  называется постоянной преобразователя. Эта же величина называется ценой деления.

Оба коэффициента в этих выражениях предполагаются постоянными, а связь между ними такова:

$$C = 1/S, \quad (12.35)$$

где  $S = \text{const}$ .

Как для практических, так и для теоретических целей очень удобно представление чувствительности в виде произведения некоторого количества сомножителей, выбираемых в соответствии с физическим смыслом и особенностями данной задачи. Например, равенство (12.29) можно переписать таким образом:

$$S = \frac{X_2}{X_1} = \frac{X_2}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\delta}{X_1} \quad (12.36)$$

Здесь каждый сомножитель является выражением чувствительности того или иного промежуточного (воображаемого или действительного) преобразователя, из последовательного соединения которых оказывается возможным представить реальный рассматриваемый преобразователь. При такой разбивке чувствительности на отдельные составляющие необходимо учитывать происходящие в преобразователе физические процессы, что будет пояснено ниже.

Из сказанного следует, что для всякой цепи последовательно включенных преобразователей как воображаемых, так и существующих реально можно написать другое равенство, заменяющее выражение (12.36), а именно:

$$S = S_1, S_2, \dots, S_k \dots, \quad (12.36a)$$

где  $S$  — результирующая чувствительность такой цепи преобразователей.

Последнее соотношение является очень важным и многократно используется в теории структур.



Для пояснения того, как в конкретном случае получается выражение (12.36), рассмотрим процесс преобразования, происходящий в индуктивном преобразователе, изображенном на рис. 12.1.

В таком преобразователе, как уже указывалось, действие изменения внешней силы  $\Delta F$  изменяет величину воздушного зазора  $\Delta\delta$ , а значит и индуктивность обмотки  $\Delta L$ . Это изменение индуктивности приводит к изменению модуля полного сопротивления  $\Delta z$ , которое может быть измерено, например, при помощи моста переменного тока. Таким образом, в первом приближении цепь преобразований можно представить так:

$$\Delta F \rightarrow \Delta\delta \rightarrow \Delta L \rightarrow \Delta z.$$

Если считать выходной величиной преобразователя  $\Delta z$ , то чувствительность к изменению силы может быть представлена в таком виде:

$$S = \frac{\Delta z}{\Delta F} = \frac{\Delta\delta}{\Delta F} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta\delta} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta L}.$$

Здесь первый сомножитель характеризует механическую чувствительность преобразователя или гибкость подвеса якоря. Вторым сомножителем можно назвать чувствительностью к изменению зазора, а третий чувствительностью к изменению индуктивности.

Таким образом, индуктивный преобразователь условно можно разбить как бы на три последовательно включенных преобразователя. Подобный метод для целей анализа и расчетов оказывается весьма плодотворным.

Положим далее, что изменение модуля полного сопротивления обмотки измеряется при помощи неуравновешенного моста переменного тока, причем мост находится в равновесии при  $\Delta F = 0$ . На выходе измерительной цепи имеется магнитоэлектрический гальванометр осциллографа, записывающий все изменения силы  $\Delta F$ .

При изменении  $\Delta z$ , которое служит плечом моста, на измерительной диагонали последнего появляется э. д. с.  $e$ , создающая в цепи гальванометра ток  $i$ , а значит, и вращающий момент  $D_t$ , вызывающий угловое отклонение зеркала  $\alpha$ .

Теперь цепь преобразований удлинится и может быть записана в таком виде:

$$\Delta F \rightarrow \Delta\delta \rightarrow \Delta L \rightarrow \Delta z \rightarrow e \rightarrow i \rightarrow D_t \rightarrow \alpha.$$

Чувствительность всего измерительного устройства к действию изменения силы будет в данном случае выражена:

$$S = \frac{\alpha}{\Delta F} = \frac{\Delta\delta}{\Delta F} \cdot \frac{\Delta L}{\Delta\delta} \cdot \frac{e}{\Delta z} \cdot \frac{i}{e} \cdot \frac{D_t}{i} \cdot \frac{\alpha}{D_t}.$$

Следовательно, к рассмотренным выше чувствительностям добавились чувствительность мостовой цепи к изменению сопротивления плеча, т. е.  $e/\Delta z$ , чувствительность гальванометра к э. д. с, совпадающая с проводимостью  $i/e$ , чувствительность гальванометра к току  $D_e/i$ , равная потоку сцепления  $\Psi=B_{sw}$ , и, наконец, чувствительность гальванометра к моменту. Последняя величина обратна удельному противодействующему моменту, т. е. является гибкостью петли вибратора.

В случае необходимости ряд преобразований может быть опущен и заменен отношениями других величин.

Перейдем теперь к выражению чувствительностей преобразователя через его сопротивления. Эти выражения можно получить, или решая относительно соответствующих величин исходные уравнения (10.1) или пользуясь готовыми решениями, т. е. уравнениями разных типов, приводившихся в табл. 10.2 и равенством (10.9а), т. е.  $Q_2 = -Z_H \dot{g}_2$ .

Определим сначала две возможные чувствительности к силе на входе, т. е. к  $Q_1$ , а затем к скорости  $\dot{g}_1$ .

Так, из уравнений (10.3) и табл. 10.1 перевода коэффициентов найдем

$$S'_{Q_1} = \frac{\dot{g}_1}{Q_1} = \frac{K_0}{K_0^2 - Z_{11}(Z_{22} + Z_H)}. \quad (12.37)$$

Подставляя

$$\dot{g}_2 = -\frac{Q_2}{Z_H},$$

получим другую чувствительность к силе

$$S''_{Q_1} = \frac{Q_2}{Q_1} = -Z_H S'_{Q_1}. \quad (12.38)$$

Теперь из уравнений (10.2) можно получить одну из чувствительностей к скорости

$$S''_{\dot{g}_1} = \frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1} = -\frac{K_0}{Z_{11} + Z_H}. \quad (12.39)$$

Другая чувствительность к скорости найдется после замены  $\dot{g}_2$  из равенства (10.9а):

$$S''_{\dot{g}_1} = \frac{Q_2}{\dot{g}_1} = -Z_H S'_{\dot{g}_1}. \quad (12.40)$$

Из найденных равенств легко получить дополнительные выражения чувствительности к силе и скорости, когда выходной величиной является мощность или поток энергии. Таким образом, будем иметь:

$$S''_{Q_1} = \frac{P}{Q_1} = \frac{Q_2 \dot{g}_2}{Q_1} = Q_2 S'_{Q_1} \quad (12.41)$$

$$S''_{\dot{g}_1} = \frac{P_2}{\dot{g}_1} = \frac{Q_2 \dot{g}_2}{\dot{g}_1} = Q_2 S'_{\dot{g}_1} \quad (12.42)$$

Часто приходится оценивать преобразователь по его чувствительности к мощности или потоку энергии. Аналогичным образом определим еще три чувствительности к мощности на входе:

$$S'_{P_1} = \frac{\dot{g}_2}{P_1} = \frac{\dot{g}_2}{Q_1 \dot{g}_1} = \frac{1}{Q_1} S'_{\dot{g}_1}; \quad (12.43)$$

$$S''_{P_1} = \frac{Q_2}{P_1} = \frac{Q_2}{Q_1 \dot{g}_1} = -\frac{Z_H}{\dot{g}_1} S'_{\dot{g}_1}; \quad (12.44)$$

$$S'''_{P_1} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{Q_2 \dot{g}_2}{Q_1 \dot{g}_1} = S''_{Q_1} S'_{\dot{g}_1}. \quad (12.45)$$

Очевидно, что соответствующие выражения чувствительностей возможно получить и в других формах, если использовать существующие между ними взаимосвязи.

Таким образом, для каждого преобразователя может быть определено по крайней мере девять выражений чувствительностей к силе, скорости и мощности на входе, соответственно при трех возможных выходных величинах, которыми являются также сила, скорость или мощность. Для параметрических преобразователей важны еще чувствительности к изменению сопротивления. Так как чувствительности являются функциями сопротивлений преобразователя, то свойства этих сопротивлений, например, их зависимости от частоты, температуры, влажности и многих других факторов найдут свое отражение в чувствительностях.

Следовательно, если известны функциональные зависимости сопротивлений от побочных факторов, то можно найти и соответствующую зависимость от этих факторов и чувствительностей. При воздействии таких факторов на систему выходная величина  $X_2$  будет зависеть не только от входной величины  $X_1$ , но и от побочных воздействий, которые можно обозначить условно через  $m, n, q$  и т. д., т. е. в общем случае

$$X_2 = f(X_1, m, n, q, \dots).$$

Отсюда полное приращение выходной величины

$$dX_2 = \frac{\partial X_2}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial X_2}{\partial m} dm + \frac{\partial X_2}{\partial n} dn + \dots$$

Здесь частные производные, являющиеся коэффициентами правой части уравнения, являются также чувствительностями преобразователя к измеряемой величине и побочным факторам:

$$S_{X_1} = \frac{\partial X_2}{\partial X_1};$$

$$S_m = \frac{\partial X_2}{\partial m};$$

$$S_n = \frac{\partial X_2}{\partial n} \quad \text{и т. д.}$$

Отсюда следует, что неравенство пулю чувствительностей преобразователя к побочным факторам служит источником погрешностей как самого преобразователя, так и любой системы в целом.

## 12.4. Основные критерии эффективности передачи мощности от преобразователя к нагрузке

Для оценки эффективности передачи мощности от преобразователя к другому преобразователю или к оконечной нагрузке служат безразмерные критерии, основным из которых является общепринятый во всех областях техники коэффициент полезного действия — к. п. д. В. Н. Мильштейн показал, что энергетические соотношения должны лежать в основе теории и расчета многих преобразователей, поскольку здесь приходится иметь дело с очень незначительными по мощности источниками энергии.

Кроме общепринятого понятия к. п. д., в электроакустике находят использование разновидности этого важного параметра, которые могут оказаться очень полезными и в других областях техники.

Основой всех этих критериев служит широко известный коэффициент полезного действия, с которого и следует начать.

*Коэффициент полезного действия* — к. п. д. Коэффициентом полезного действия является отношение активной мощности, потребляемой нагрузкой, к активной мощности, потребляемой на входе преобразователя.

Абсолютная величина к. п. д. обусловлена рядом факторов, из которых основными являются принцип действия и конструктивные

особенности. Определяющим при этом является чаще всего принцип действия, так что при достаточно удовлетворительных конструкции и исполнении к. п. д. преобразователей одной и той же разновидности, работающих на однородную нагрузку, должен иметь значения примерно одного порядка.

Итак, определив к. п. д. как отношение активных мощностей на выходе и на входе, будем иметь:

$$\eta = \frac{P_{a_2}}{P_{a_1}}. \quad (12.46)$$

Рассматривая для примера преобразователь с входной электрической и выходной механической сторонами, т.е. преобразователь-двигатель, можно отметить, что мощность  $P_{a_2}$ , развиваемая преобразователем, превращается в механическую работу, а мощность  $P_{a_1}$  состоит при этом из мощности, рассеиваемой в электрической входной части в форме тепла, и из мощности, превращенной в механическую работу. Так как пока интерес представляют только активные мощности, то для упрощения временно можно оперировать обобщенными сопротивлениями  $R_{ik}$  вместо  $Z_{ik}$ , в связи с чем основные уравнения (10.1) перепишем в такой форме:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= R_{11}\dot{g}_1 + R_{12}\dot{g}_2; \\ Q_2 &= R_{21}\dot{g}_1 + R_{22}\dot{g}_2 \end{aligned} \right\}.$$

Принимая во внимание равенство (10.9а), т. е.

$$R_H = -\frac{Q}{\dot{g}_2},$$

уравнение для к. п. д. запишется также с отрицательным знаком:

$$\eta = -\frac{Q_2\dot{g}_2}{Q_1\dot{g}_1}.$$

Подставляя значения  $Q_1$  и  $Q_2$  из уравнений преобразователя, получим после преобразований

$$\eta = -\frac{R_{21} + R_{22} \frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1}}{R_{12} + R_{11} \frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2}}.$$

Найдем далее из первого уравнения для  $Q_1$  отношение  $\frac{\dot{g}_2}{\dot{g}_1}$ , а из

второго уравнения для  $Q_2$  отношение  $\frac{\dot{g}_1}{\dot{g}_2}$ . Если учесть, что в

полученных результатах величина  $\frac{Q_1}{\dot{g}_1}$  представляет рабочее

сопротивление  $R_l$  и выражается равенством (12.4), в котором сопро-

тивления  $Z_{ik}$  заменяем на  $R_{ik}$ , а величина  $\frac{Q_2}{\dot{g}_2}$  является сопротивлением

нагрузки, в соответствии с равенством (10.9а), то после подстановки и преобразований будем иметь:

$$\eta = \frac{R_H}{R_H + R_{22}} \cdot \frac{K_0^2}{R_{11}(R_H + R_{22}) - K_0^2}. \quad (12.47)$$

Если теперь учесть величину вносимого сопротивления в соответствии с равенством (12.5), т. е.

$$R_H = \frac{K_0^2}{R_H + R_{22}}$$

и обозначить отношение сопротивлений в уравнении (12.47) через  $\eta_2$

$$\eta_2 = \frac{R_H}{R_H + R_{22}},$$

то получим

$$\eta = \eta_2 \frac{R_{вн}}{R_{11} - R_{вн}} \quad (12.47а)$$

здесь  $\eta_2$  является коэффициентом полезного действия выходной стороны преобразователя.

Для дальнейшего рассмотрения целесообразно несколько сузить задачу и конкретизировать ее, учтя возможное различие знаков при взаимных членах в исходной форме уравнений. В 10.4 было показано, что преобразователи, основанные на электродинамическом принципе, имеют разные знаки при взаимных членах, в связи с чем для этих преобразователей знаки перед  $K_0^2$  во всех общих выводах следует изменить на обратные. Приняв во внимание это обстоятельство и рассматривая в качестве примера какую-либо из разновидностей электродинамических преобразователей, получим выражение для к. п. д. В этом случае

$$\eta = -\eta_2 \frac{R_{\text{вн}}}{R_{11} + R_{\text{вн}}}. \quad (12.476)$$

Полученное выражение показывает, что множитель  $\eta_1$ , т. е.

$$\eta_1 = \frac{R_{\text{вн}}}{R_{11} + R_{\text{вн}}},$$

является коэффициентом полезного действия входной, т. е. электрической стороны, которую можно представить в виде эквивалентной цепи, состоящей из последовательно соединенных собственного входного сопротивления  $R_{11}$  и вносимого сопротивления  $R_{\text{вн}}$ , являющегося полезной нагрузкой. Такая эквивалентная цепь входной электрической стороны преобразователя-двигателя представлена на рис. 12.1, а.

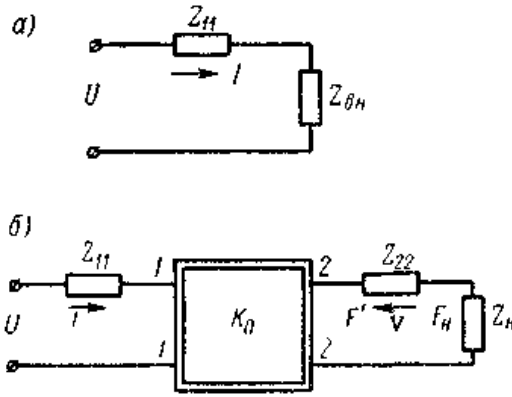


Рис. 12.1

Если учесть выражение для  $\eta_2$ , полученное выше, то аналогичным образом можно представить и механическую часть преобразователя. Общая схема преобразователя-двигателя может быть изображена, например, так, как показано на рис. 12.1, б, где прямоугольником в рамке обозначен идеальный преобразователь с коэффициентом преобразования, равным  $K_0$ . Левая часть схемы представляет собой действительную электрическую схему, тогда как справа изображена эквивалентная схема выходной механической стороны. Сопротивления для общности обозначены через  $Z_{ik}$ , механические силы через  $F$ , механические скорости через  $v$ . Эквивалентные схемы преобразователей могут служить и для их расчета. Так, например, если требуется найти силу  $F_n$  на нагрузке, то ее можно определить,

пользуясь эквивалентом электрической схемой. Для этого находим величину тока

$$I = \frac{U}{Z_{11} + Z_{вн}}$$

Исходя из определения коэффициента преобразования как взаимного сопротивления, будем иметь

$$F' = K_0 I.$$

Механическую скорость получаем из соотношения:

$$v = \frac{F'}{Z_{н} + Z_{22}}$$

и, наконец, находим силу на нагрузке преобразователя

$$F_n = Z_{н} v.$$

Эта же задача может быть разрешена с использованием уравнений четырехполюсника-двигателя, например уравнений (10.5).

Общая схема преобразователя-генератора получается при помощи аналогичных рассуждений и представлена на рис. 12.2, б, тогда как на рис. 12.2, а показана эквивалентная схема механической стороны, которая теперь оказывается входной.

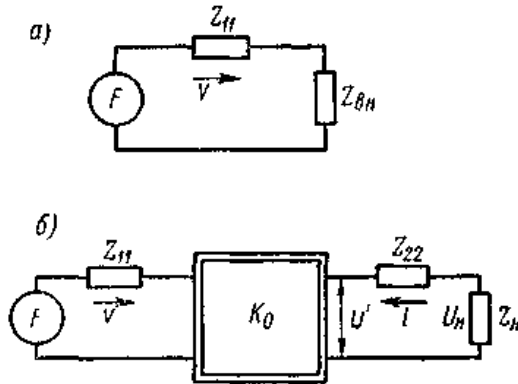


Рис. 12.2

Сопротивления  $Z_{11}$  и  $Z_{вн}$  в данном случае являются механическими сопротивлениями, а сопротивления  $Z_{22}$  и  $Z_{н}$  — электрическими сопротивлениями.

Возвращаясь снова к уравнению (12.47,б), можем получить выражение абсолютного значения к. п. д. преобразователя в целом, т. е.

$$\eta = \eta_1 \eta_2. \quad (12.49)$$

Из этого равенства следует, что общий к. п. д. преобразователя зависит от к. п. д. его входной и выходной сторон.



Рассмотрим теперь более общий случай, соответствующий наличию в цепях преобразователя полных сопротивлений. Упростим задачу, положив собственное выходное сопротивление много меньшим сопротивления нагрузки, т. е. положим, что  $Z_{22} \ll Z_{н}$ . Сделанное предположение соответствует наличию малых потерь на выходной стороне, благодаря чему можно считать  $\eta_2 \approx 1$ . В этом случае

$$\eta \approx \eta_1 = \frac{R_{вн}}{R_{11} + R_{вн}} \quad (12.50)$$

Вносимое сопротивление, определенное равенством (12.5), выше было приведено к виду (12.12) или (12.12а), т. е. представлено в комплексной форме. Из этих уравнений следует, что активная составляющая вносимого сопротивления

$$R_{вн} = \frac{K_0^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \cos \varphi_{вн}, \quad (12.51)$$

здесь  $\sqrt{r^2 + x^2} = z_{\text{вых}}$  — модуль полного сопротивления на выходе, состоящего из сопротивлений  $Z_{22}$  и  $Z_{н}$ , а  $\varphi_{вн}$  — угол сдвига, вносимый выходной механической стороной, причем, как было показано при выводе равенства (12.12),

$$\cos \varphi_{вн} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{r}{z_{\text{вых}}}$$

Представив аналогичным образом активную составляющую собственного входного сопротивления  $R_{11}$  получим

$$R_{11} = z_{11} \cos \varphi_{11},$$

где  $z_{11}$  — модуль собственного входного сопротивления;  
 $\varphi_{11}$  — его фазовый угол.

Теперь уравнение (12.50) легко привести к такому виду:

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_{11}}{R_{вн}}} = \frac{1}{1 + \frac{z_{11} z_{\text{вых}} \cos \varphi_{11}}{K_0^2 \cos \varphi_{вн}}}. \quad (12.52)$$

Полученное выражение показывает, что если собственное входное сопротивление преобразователя  $Z_{11}$  является по существу реактивным, как это имеет место, например, для многих типов индуктивных преобразователей, представляющих катушку с большим числом витков провода, надетую на ферромагнитный сердечник, то  $R_{11} \ll |Z_{11}|$ , вследствие чего  $\cos \varphi_{11}$  становится очень малой величиной. Результатом

этого окажется высокое значение к. п. д., который может стать близким к единице.

Этот вывод является правильным, но по существу говорит лишь о том, что преобразователь из-за высокого входного сопротивления, имеющего реактивный характер, потребляет на входной стороне очень малую активную мощность. Поскольку высокие значения к. п. д. обычно связываются со способностью преобразователя совершать на выходной стороне значительную работу, то при малых значениях  $\cos\varphi_{11}$  к. п. д. перестает быть надежным критерием эффективности работы преобразователя и может привести к ложным выводам. В таких случаях прибегают к другому способу оценки, вводя в качестве нового критерия так называемый коэффициент отдачи, который мы далее рассмотрим.

*Относительный к. п. д.* Понятие к. п. д., которое лежит в основе расчетных принципов В. Н. Мильштейна, отличается от общепринятого, что может повести к недоразумениям.

Общим условием, при котором нагрузка получает максимальную мощность от источника, при активном характере сопротивления нагрузки  $R_n$  и внутреннего сопротивления источника  $R_{in}$ , является их равенство, т. е.  $R_n = R_{in}$ .

Условие отдачи нагрузке максимальной активной мощности  $P_{2\max}$  имеет место при равенстве сопротивлений нагрузки и источника, т. е. когда  $R_n = R_{in}$ . Такое сопротивление нагрузки называется согласованным, а к. п. д. системы источник-нагрузка будет равен 50%. Этот способ согласования применяется только в маломощных цепях, поскольку очевидно, что его применение в силовых цепях оказалось бы техническим абсурдом. В том случае, когда условие согласования нарушается и  $R_n \neq R_{in}$ , в нагрузку выделится мощность  $P_2$ , меньшая чем  $P_{2\max}$ .

Обозначим отношение этих мощностей через  $\eta_{отн}$  и запишем

$$\eta_{отн} = \frac{P_2}{P_{2\max}} \quad (12.46a)$$

В. Н. Мильштейн называет это отношение максимальным резервом мощности схемы (источника). Будем называть эту величину относительным к. п. д., так как при одинаковых величинах затрачиваемой мощности  $P_1$  это выражение легко приводится к отношению двух к. п. д., соответствующих несогласованной и согласованной нагрузкам.

Наличие дополнительных технических требований к преобразователям обуславливает дополнительные ограничения «свободы» проектирования. Такими ограничениями являются, например, задания

допустимой температурной или частотной погрешностей, времени успокоения и т. п.

Необходимость выполнения этих дополнительных технических требований обычно приводит к нарушению условий согласования, т. е. равенства  $R_{н.кп.} = R_{г.}$ . Например, требование минимального времени успокоения гальванометра, являющегося нагрузкой мостовой цепи, приводит к необходимости осуществления внешней цепи, на которую замкнут гальванометр с сопротивлением, равным внешнему критическому для данного гальванометра. При этом, в общем случае  $R_{вн.кп.} \neq R_{г.}$ , где  $R_{г.}$  — внутреннее сопротивление гальванометра.

Для возможного одновременного удовлетворения всех технических требований к преобразователю или прибору по методу В. Н. Мильштейна необходимо вести проектирование на оптимально достижимое значение относительного к. п. д.

Теперь перейдем к рассмотрению упоминавшегося выше коэффициента отдачи, являющегося еще одной из разновидностей критериев эффективности работы преобразователя на нагрузку.

*Коэффициент отдачи.* Коэффициентом отдачи называется отношение активной мощности, потребляемой нагрузкой, к кажущейся мощности на входе преобразователя. Обозначив это отношение через  $\kappa$ , получим

$$\kappa = \frac{P_{a_2}}{P_{i_1}} = \frac{R_{BH} I^2}{z_1 I^2} = \frac{R_{BH}}{z_1}. \quad (12.53)$$

В этом выражении  $z_1$  — модуль входного рабочего сопротивления преобразователя. Заменяя  $R_{вн}$  его выражением из равенства (12.51), получим

$$\kappa = \frac{K_0^2}{z_1 z_{ввых}} \cos \varphi_{вн},$$

Поскольку

$$\cos \varphi_{вн} = \frac{r}{z_{ввых}},$$

то, подставляя в предыдущее равенство  $\cos \varphi_{вн}$ , найдем

$$\kappa = \frac{K_0^2 r}{z_1 z_{ввых}^2}. \quad (12.54)$$

Модуль входного сопротивления  $z_1$  определяется на основании равенства (12.13):

$$z_1 = \sqrt{(R_{11} + R_{BH})^2 + (X_{11} + X_{BH})^2}. \quad (12.55)$$

Из уравнений (12.50) и (12.53) находится связь между коэффициентами полезного действия и отдачи:

$$\frac{\kappa}{\eta} = \frac{R_{11} + R_{BH}}{z_1} = \cos \varphi_1,$$

где  $\varphi_1$  — фазовый угол рабочего входного сопротивления, определяемый из уравнения (12.55), т. е.

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{X_{11} + X_{BH}}{R_{11} + R_{BH}}.$$

Очевидно, что угол  $\varphi_1$  отличается от угла  $\varphi_{11}$ , определенного при холостом ходе преобразователя, т. е. при  $z_{BH} = 0$ . Ясно также, что чем меньше отдача преобразователя, тем меньше и вносимое сопротивление, в результате чего значение угла  $\varphi_1$  приближается к значению  $\varphi_{11}$ .

В ряде технических применений преобразователь-двигатель используется в качестве генератора, излучающего звуковые волны в газообразной или жидкой среде (громкоговорители, эхолоты и т. п.). При таком применении оказывается необходимым дополнительное разложение активной составляющей вносимого сопротивления на полезное сопротивление излучения и вредное сопротивление механических потерь. В подобных случаях необходимо внесение соответствующих поправок в определения коэффициентов полезного действия и отдачи.

Измерительные преобразователи часто оказываются соединенными с нагрузкой, сопротивление которой имеет комплексный характер. Такой нагрузкой может быть либо другой промежуточный преобразователь, либо выходной прибор непосредственной оценки, например, ферродинамический. При комплексном характере сопротивления нагрузки последняя должна быть обеспечена необходимой для ее нормальной работы кажущейся мощностью.

Понятие кажущейся мощности употребительно именно потому, что с его помощью легко оценить ту предельную мощность, которую необходимо подать и нагрузку и которую должен обеспечить питающий генератор.

*Эффективность преобразования.* К нагрузкам, содержащим не только активные, но и реактивные сопротивления, для оценки работы преобразователя целесообразно применять критерий, называемый эффективностью преобразования, который является отношением кажущейся мощности в нагрузке к кажущейся мощности на входе преобразователя.

Обозначив эту величину через  $\xi$ , получим

$$\xi = \frac{P_{i_2}}{P_{i_1}}.$$

Так как преобразователь, рассматриваемый с его электрической стороны, может быть изображен эквивалентной цепью, состоящей из последовательно соединенных сопротивлений  $Z_{11}$  и  $Z_{BH}$ , как это было показано на рис. 12.1, а, то эффективность преобразования может быть представлена в развернутом виде, подобно равенству (12.53), т. е.

$$\xi = \frac{P_{i_2}}{P_{i_1}} = \frac{z_{BH}}{z_1}. \quad (12.56)$$

Здесь модуль  $z_{BH}$  определяется из равенства (12.12а) и будет равен:

$$z_{BH} = \sqrt{R_{BH}^2 + X_{BH}^2}.$$

Модуль же  $z_1$  выражен уравнением (12.55).

*Коэффициент качества.* Существует еще один безразмерный критерий, который косвенно характеризует наличие потерь в преобразователе-четырёхполюснике, называемый коэффициентом качества, или, как говорят сокращенно, качеством четырёхполюсника.

Под коэффициентом качества преобразователя понимается отношение сопротивления холостого хода, определенное с одной из его сторон, к сопротивлению короткого замыкания, определенному с той же стороны.

Физический смысл этого критерия становится ясен при рассмотрении однородных преобразователей с двумя электрическими сторонами. Если внутри преобразователя отсутствуют потери энергии, то при размыкании одной из сторон сопротивление с другой стороны должно быть бесконечно велико; это означает отсутствие шунтирующих цепей. Наоборот, при замыкании одной стороны накоротко, потери в преобразователе были бы равны нулю, если бы равнялось нулю его сопротивление, измеренное с другой стороны. Следовательно, для преобразователя без потерь коэффициент качества должен быть бесконечно велик, а для всякого реального преобразователя он выражается конечным числом, тем большим по величине, чем меньше потери в самом преобразователе.

Такой параметр, как коэффициент качества, не должен зависеть от того, с какой стороны преобразователя он определен. Воспользовавшись уравнениями типа А, т. е. формой (10.5), легко определить сопротивления холостого хода и короткого замыкания с обеих сторон.

Сопротивления со стороны входа, т. е. со стороны 1-1,

$$Z_{11} = Z_{1_{x.x}} = \left. \frac{Q_1}{\dot{g}_1} \right|_{\dot{g}_2=0} = \frac{a_{11}}{a_{12}};$$

$$Z_{1_{k.з}} = \left. \frac{Q_1}{\dot{g}_1} \right|_{Q_2=0} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Отсюда находим коэффициент качества  $\nu$ :

$$\nu = \frac{Z_{1_{x.x}}}{Z_{1_{k.з}}} = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}. \quad (12.57)$$

Сопrotивления со стороны выхода, т. е. со стороны 2-2,

$$Z_{22} = Z_{2_{x.x}} = \left. \frac{Q_2}{\dot{g}_2} \right|_{\dot{g}_1=0} = -\frac{a_{22}}{a_{21}};$$

$$Z_{2_{k.з}} = \left. \frac{Q_2}{\dot{g}_2} \right|_{Q_2=0} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

В результате получаем то же самое значение

$$\nu = \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}a_{21}}.$$

Выражая  $\nu$  через сопротивления, воспользуемся соотношениями (10.7) и получим после подстановок и сокращений

$$\nu = \frac{1}{1 - \frac{K_0^2}{Z_{11}Z_{22}}}, \quad (12.57a)$$

где взаимные сопротивления выражены через коэффициент преобразования  $K_0$ .

## **13. Базовые структурные элементы, их функции и характеристики**

### **13.1. Начальные сведения о структурных элементах**

Разработка новых машин, механизмов, исследования в различных областях науки и техники, управление технологическими процессами и

объектами базируются на использовании информации, характеризующей процесс или состояние объекта.

Информация воспринимается и перерабатывается в системах и используется оператором и автоматическими системами для целей контроля и управления.

Технические системы охватывают ряд функционально связанных между собой элементов, которые выполняют одну или несколько операций с сигналами: восприятие, преобразование, передачу, корректирование, выдачу результатов и т. д.

От рационального выбора принципа действия и структурной схемы, конструктивного исполнения элементов зависит эффективная работа системы.

Для построения элементов, выполняющих одинаковые функции, т. е. производящих одинаковые операции над сигналами, могут быть использованы различные принципы действия, конструктивные решения, схемы и т. д. В связи с этим имеются большие возможности выбора наилучших вариантов для создания конкретных видов элементов.

Наибольшее распространение находят механические, электрические, магнитные и магнитоэлектрические методы измерений, на основании которых устанавливаются связи между входными величинами и выходными сигналами. Представление об элементах как функциональных измерительных преобразователях способствует совершенствованию существующих, а также изысканию и развитию новых принципов измерений и методов расчета. Поэтому представляет интерес рассмотрение полупроводниковых, электрохимических, гальваномагнитных, пьезомагнитных и других видов элементов.

Рациональному выбору типа и конструкции элемента должен предшествовать тщательный всесторонний анализ и расчет с учетом выполнения основных технических, требований не только к точности, стабильности, надежности, быстродействию, миниатюризации, унификации и др., но и с учетом технологичности и себестоимости.

В связи с этим весьма актуальным является рассмотрение элементов с единых позиций.

Элементы в работе объединяются по функциональному признаку и физическому принципу действия. Это дает возможность сопоставления различных элементов и выбора из них наиболее соответствующего конкретным техническим требованиям.

В связи с общностью методов построения конструкций, схем и расчета представляется возможным сознательное выяснение преимуществ и недостатков элементов различных типов, а также выбор элементов, наиболее приемлемых для решения поставленной проблемы.

Современные технические системы весьма сложны, поэтому для обеспечения нормальной работы необходимо контролировать целый ряд различных физических и других величин, так называемых параметров, т. е. получать информацию о состоянии всего объекта, отдельных частей его, а также о параметрах внешней среды.

В зависимости от вида технической системы, условий испытаний и режимов работы контролируют определенное число параметров в различных участках системы. Так, для обеспечения нормальных условий функционирования технической системы необходимо измерять множество параметров, к числу которых относятся угловые координаты, скорости и ускорения технической системы, координаты центра масс технической системы, линейные скорости, ускорения, перегрузки и др.

Работа различных агрегатов технической системы характеризуется давлением, температурой газов и жидкостей в различных частях системы, частотой вращения вала двигателя и т. п. К параметрам окружающей среды можно отнести плотность, температуру, давление, влажность и состав воздуха, скорость и направление ветра, интенсивность ионизации и др.

Для поддержания нормальных условий работы операторов систем необходимо знать давление, температуру, влажность, состав воздуха на рабочем месте, а также температуру тела, частоту дыхания, кровяное давление операторов и другие параметры.

Имеются три основные возможности использования информации, поступающей от технической системы: 1) физическая величина  $A$  непосредственно подается в систему индикации и используется для целей управления; 2) физическая величина  $A$  преобразуется в другую величину, например в электрическую, вида  $U = f(A)$ , удобную для ввода в автоматические устройства; 3) величина  $A$  преобразуется с целью регистрации процесса изменения физической величины в функции времени, т. е.  $A = \varphi(t)$ , для последующей обработки, исследования и принятия решения.

Далее производится соответствующее преобразование информации (рис. 1).



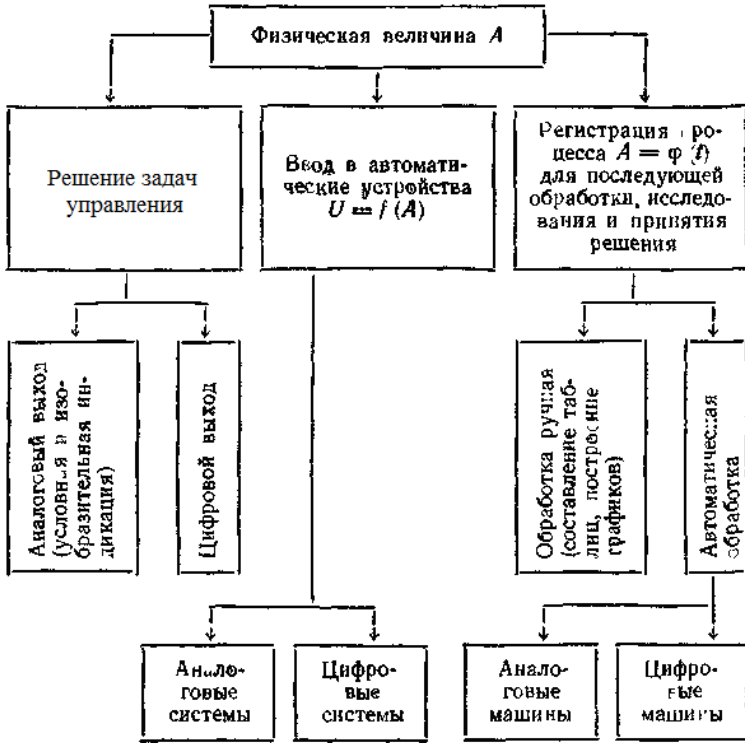


Рис. 1. Возможности использования информации в технической системе

### 13.2. Примеры использования структурных элементов

Для получения, передачи, преобразования, хранения информации, а также для сравнения ее с контрольными величинами применяют различные устройства, число которых на ряде систем может достигать нескольких тысяч. Измерение различных параметров должно осуществляться с большой точностью и скоростью.

В связи с этим широкое применение находят автоматические устройства. В виде примера автоматического устройства на рис. 2, а

показана принципиальная схема для измерения линейных перемещений.

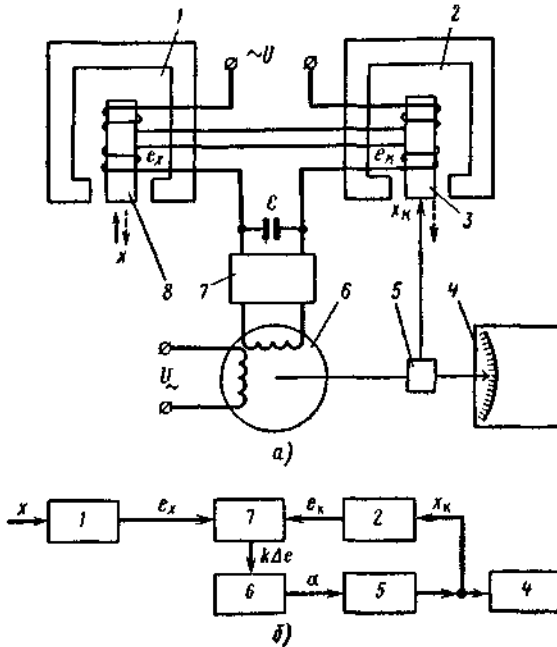


Рис. 2. Схемы автоматического устройства для измерения линейных перемещений: а — принципиальная; б — структурная

В схеме использованы два одинаковых по своим параметрам трансформаторных элемента 1 и 2. На сердечник 8 одного из них подается измеряемое перемещение  $x$ , а на сердечник 3 другого — компенсирующее перемещение  $x_k$ . Первичные обмотки обоих элементов соединены согласно, а вторичные — встречно. Питание первичных обмоток осуществляется от источника переменного напряжения  $U$ . На выходе вторичных обмоток включен усилитель 7, сигнал с выхода которого поступает на обмотку малоинерционного реверсивного двигателя 6. Вал двигателя через редуктор 5 соединен с сердечником 3 компенсационного элемента 2, а также со стрелкой отсчетного устройства 4.

В исходном состоянии при полной симметрии схемы и согласованном положении сердечников э. д. с. на вторичных обмотках обоих элементов будет одинаковой по величине, но противоположной по фазе. Вследствие этого э. д. с. на входе усилителя будет равна нулю.

При возникновении перемещений, т. е. при движении сердечника 8, нарушится равновесие системы. Вал двигателя начнет вращаться и с помощью редуктора будет перемещать сердечник 3 до тех пор, пока не установится новое положение равновесия, соответствующее входной величине  $x$ . Полученное значение  $x_k$  отмечается по шкале отсчетного устройства 4.

Работу рассмотренного автоматического устройства для измерения линейных перемещений можно пояснить также с помощью структурной схемы (рис. 2, б), в которой конкретные элементы заменены обобщенными, имеющими входную величину и выходной сигнал (подробнее см. ниже). Как видно, на элемент 1 подано измеряемое перемещение  $x$ , где оно преобразуется в эквивалентную э. д. с.  $e_x$ . На входе компенсационного элемента 2 задано перемещение  $x_k$ , которое преобразуется в э. д. с.  $e_k$ . В усилителе 7 происходит сравнение э. д. с.  $e_x - e_k = \Delta e$  и усиление полученного сигнала.

Выходной сигнал усилителя  $k\Delta e$  ( $k$  — коэффициент усиления усилителя) подается на одну из обмоток двигателя 6, вследствие чего вал двигателя начинает поворачиваться на угол  $\alpha$  и перемещать редуктор 5, жестко связанный с сердечником 3 компенсационного элемента 2. Движение сердечника будет происходить до тех пор, пока не установится новое положение равновесия, определяемое равенством  $x = x_k$ , а следовательно,  $e_x = e_k$ . В этом положении двигатель останавливается.

В качестве второго примера автоматического устройства рассмотрим схему самобалансирующегося прибора для дистанционного измерения угловых перемещений (рис.3).

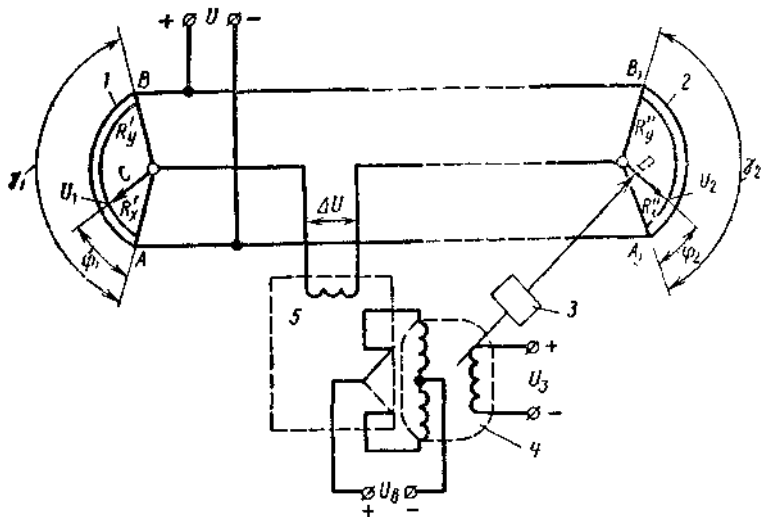


Рис.3. Схема самобалансирующегося устройства для дистанционного измерения угловых перемещений

Схема состоит из двух одинаковых линейных потенциометров 1 и 2, соединенных между собой проводами. Потенциометр 1 жестко крепится на валу, угол отклонения  $\varphi_1$  которого необходимо измерить. Щетка C потенциометра снимает сигнал  $U_1$ , пропорциональный этому углу. На оси отсчетного устройства указателя крепится компенсирующий потенциометр 2, щетка D которого снимает сигнал  $U_2$ , пропорциональный углу поворота  $\varphi_2$  этой оси. Сопротивления  $R'_x$ ,  $R'_y$ ,  $R''_x$ ,  $R''_y$  образуют мост, в одну диагональ которого включен источник питания  $U$ , а в другую — магнитный усилитель или чувствительное поляризованное реле 5, управляющее направлением вращения малоинерционного электродвигателя 4 в зависимости от знака напряжения дисбаланса моста  $\Delta U = U_1 - U_2$ . Двигатель через редуктор 3 связан со щеткой D потенциометра 2. При  $\Delta U \neq 0$  вал двигателя вращается в направлении, в котором он может привести щетку D потенциометра 2 в положение, когда мост уравновешен.

Рассмотренные схемы устройств имеют непрерывный (аналоговый) выходной сигнал. Наряду с такой схемой широко применяют схемы с импульсным (дискретным) выходным сигналом.

Приведенные примеры схем автоматических устройств позволяют выделить основные структурные элементы, входящие в их состав. Структурным элементом технической системы будем называть преобразователь, обеспечивающий однозначную функциональную

зависимость выходного сигнала от входной величины. Наиболее целесообразной классификацией структурных элементов представляется такая, в основу которой положен принцип получения информации, а именно: наблюдение (восприятие) входной величины и первичное ее преобразование; вторичное преобразование и измерение сигнала, состоящее из сравнения входной величины с заданной, определения величины и знака полученной разности, преобразования сигнала по амплитуде, мощности, форме, частоте; передача по линиям связи, распределение по времени и по различным каналам, обработка сигнала до необходимого значения; корректировка сигнала; выдача результатов измерений и т. д..

В связи с этим будем различать следующие структурные элементы:

чувствительные, воспринимающие входную величину и первично преобразующие ее;

преобразующие, служащие для изменения сигнала по величине, мощности и т. д.;

измерительно-преобразующие, обеспечивающие измерение и передачу сигналов, распределение их по времени и по измерительным цепям и т. д.;

корректирующие, предназначенные для корректировки сигналов и компенсации погрешностей;

вспомогательные, производящие некоторые специфические операции;

элементы систем индикации (визуальные и записывающие); визуальные обеспечивают получение и выдачу результатов измерений, которые могут быть представлены в виде показаний на шкале или цифровом табло, электрического, светового, звукового или иного сигнала; записывающий элемент служит для непрерывной или дискретной регистрации исследуемого процесса в функции времени или другого параметра на бумаге, фото-, кино- или магнитной пленке, магнитном барабане и т. п.

Приведенная классификация позволяет подразделить структурные элементы по тем функциям, которые они выполняют при получении и обработке информации. Наиболее разнообразные функции выполняют преобразующие и измерительно-преобразующие элементы, которые могут служить для изменения величины по амплитуде (усилители), по мощности (усилители мощности), частоте (делители частоты), направлять сигналы по каналам и цепям (распределители и коммутаторы), передавать сигналы и т. д.

Целый ряд структурных элементов используется для решения какой-либо одной задачи, например усиления (преобразования) сигнала, индикации, сигнализации или регистрации сигнала и т. д. Наряду с этим некоторые структурные элементы могут выполнять не одну, а

несколько функций одновременно (например, восприятие и первичное преобразование входной величины, сравнение и усиление сигналов и т. д.). Обычно назначение такого структурного элемента определяется месторасположением в схеме устройства.

В зависимости от типа технической системы, места расположения элемента устройства и времени года параметры, определяющие условия работы, могут быть различными. Характерными при этом являются температура, давление и влажность окружающей среды, а также вибрации и удары.

На работу элементов устройств наибольшее влияние оказывают температура, давление и влажность воздуха.

Изменение температуры воздуха приводит к искажению показаний элементов автоматических устройств вследствие изменения размеров деталей, модуля упругости пружин, электрических и магнитных сопротивлений, потоков постоянных магнитов, объема, плотности и вязкости заполняющих и смазывающих жидкостей, износа трущихся поверхностей и т. д.

Уменьшение давления воздуха вызывает опасность пробоя электрической изоляции проводов, ускорения испарения смазки трущихся деталей, ухудшение отвода тепла, что может вести к перегреву отдельных деталей и т. д. Для уменьшения влияния изменения давления применяют высококачественные изоляционные материалы, а корпуса элементов и приборов герметизируют.

Воздух характеризуется относительной влажностью  $R = \frac{q}{Q} 100\%$ ,

где  $q$  — абсолютная влажность, т. е. количество водяного пара в  $1 \text{ м}^3$  воздуха;  $Q$  — количество паров воды, насыщающих воздух при данной температуре. С уменьшением температуры уменьшается  $Q$ , причем часть паров конденсируется и осаждается в виде росы. Повышенная влажность и выпадение росы ухудшают электрическую изоляцию деталей, изменяют диэлектрическую постоянную материалов, ускоряют коррозию металлов и т. д. При замерзании конденсата возможно заклинивание подвижных частей элементов.

Для уменьшения влияния влажности применяют нержавеющие материалы, лакокрасочные и гальванические покрытия. Хорошие результаты дает использование пластмасс с минимальным водопоглощением (в виде искусственных смол с кварцевым, стеклянным или асбестовым наполнителем) и специальных влагопоглотителей. В ряде случаев применяют обогрев элементов, герметизацию и наполнение полостей инертным газом.

Помимо указанного влияния температуры, давления и влажности, элементы систем при их эксплуатации испытывают механические

воздействия (линейные и угловые ускорения, вибрации, удары). Эти воздействия оцениваются в относительных единицах, показывающих, во сколько раз ускорение, вызвавшее перегрузку, больше ускорения свободного падения. Для синусоидальной вибрации  $x=asin \omega t$  величина вибрационной перегрузки определяется согласно выражению

$$j = \frac{4\pi^2 f^2 a}{g}, \quad (1)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота вибрации, 1/с;

$t$  — время, с;

$f$  — частота вибрации, Гц;

$a$  — максимальная амплитуда вибрации, м;

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения.

Причинами возникновения линейных ускорений являются изменение вектора скорости аппарата и вибрация мест крепления элементов. Изменение вектора скорости вызывает смещение положения равновесия подвижных частей элемента при наличии дисбаланса, а также увеличение сил трения, а следовательно, зоны застоя в опорах. Вибрация мест крепления элементов также приводит к колебаниям подвижных частей и смещению положения равновесия их при наличии дисбаланса.

Для уменьшения влияния линейных ускорений подвижные части элементов следует подвергать тщательной статической балансировке и взвешиванию их в жидкости. Наряду с этим желательно применять вибропрочные материалы и амортизацию элементов.

Причинами возникновения угловых ускорений являются изменение положения системы, турбулентность воздушных потоков, несовершенство свойств системы управления, а также изгибание оболочек элементов.

Для уменьшения влияния угловых ускорений применяют демпфирование и включение в электрические схемы фильтров. Кроме того, необходимо учитывать, что частоты собственных колебаний подвижных частей должны находиться вне диапазона частот упругих колебаний.

Поскольку механические воздействия вызывают погрешности и сокращают срок службы, элементы необходимо проверять на виброустойчивость и вибропрочность. Виброустойчивым является такой элемент, который при данной перегрузке имеет погрешность, не превышающую заданной величины. Вибропрочным является такой элемент, у которого не нарушается прочность конструкции при вибрациях.

Все рассмотренные факторы оказывают большое влияние на точность работы структурных элементов. Кроме этих факторов, оказывают

воздействие магнитные и электростатические поля, радиация и т. д. Для предохранения элементов устройств от внешних и внутренних электромагнитных полей и радиопомех используют специальные экраны и электрические фильтры в цепях питания.

Элементы автоматических устройств должны отвечать следующим общим техническим требованиям:

- обеспечивать заданную зависимость между выходным сигналом и входной измеряемой величиной;

- работать в заданном частотном диапазоне;

- иметь достаточную чувствительность и потреблять малую мощность;

- иметь погрешность, не превышающую заданной величины;

- иметь малую зависимость показаний от изменения внешних условий (температуры, давления, влажности, перегрузок, вибрации, радиации и т. п.);

- быть надежными в работе и иметь заложенный срок службы;

- быть простыми в изготовлении, обеспечивать удобство эксплуатации и контроля, иметь малые габаритные размеры, массу и стоимость;

- оказывать незначительное влияние на работу других элементов;

- быть безопасными в отношении пожара и взрыва.

### **13.3. Входные величины структурных элементов и способы преобразования их в выходные сигналы**

Выше было показано, что входные величины весьма разнообразны, причем наибольшее разнообразие имеют входные *величины* чувствительных элементов, представляющие собой совокупность измеряемого параметра  $x$  (температуры, давления, скорости и др.) и помехи  $\eta$  (вибрации, ускорения, влажность, радиация и др.). Под входной величиной будем понимать измеряемый параметр  $x$ , а в качестве выходного сигнала будем рассматривать только полезный сигнал  $y$ .

При эксплуатации и исследовании различных систем необходимо измерять разнообразные входные величины, отличающиеся как по своей природе (механические, акустические, тепловые, оптические, электрические, магнитные, радиоактивные, физико-химические, биологические), так и по характеру их изменения (непрерывные, дискретные).

Наиболее распространенными параметрами в технике являются механические (время, скорость перемещения, линейное и угловое



ускорения, давление, частота вращения, расход топлива, количество топлива), тепловые (температура) и др.

*Выходной сигнал* является реакцией элемента на входную величину и, кроме полезного сигнала  $y$ , обычно содержит погрешность  $\psi$ , обусловленную наличием помех во входной величине.

Сигналы, полученные на выходах элементов, подразделяются как по виду энергии (электрические, пневматические, гидравлические, механические и др.), так и по характеру изменения. Так, у электрических сигналов изменяющимся параметром может быть сила тока, величина напряжения, частота, фаза. Кроме того, электрический выходной сигнал может представлять собой импульсную кодовую комбинацию. Пневматические и гидравлические сигналы различаются как по величине давления, так и по величине расхода. Широко применяются механические сигналы с изменяющимся усилием, перемещением или скоростью.

Характер зависимости выходного сигнала  $y$  от измеряемого параметра  $x$  может быть различным (пропорциональный, по законам производной, интеграла и др.). Выходной сигнал используют в виде зрительных и слуховых образов, управляющих сигналов и т. д.

Форма входной величины и выходного сигнала может быть одинаковой (например, непрерывные) или различной (например, непрерывные входные величины преобразуются специальными элементами в дискретные). Элемент системы в большинстве случаев преобразует входную величину в выходной электрический сигнал, обеспечивая так называемое прямое преобразование. Такие элементы, нашедшие широкое распространение, называют *прямыми* (в отличие от *обратных*, назначением которых является преобразование электрических входных величин в выходные физические сигналы).

Преобразование входной величины в выходной сигнал осуществляется различными способами. Наиболее распространенными из них являются механические, акустические, тепловые, оптические, электрические, магнитные, молекулярные (атомные), изотопные (в том числе радиоактивные), физико-химические и биологические способы.

## **13.4. Характеристики и параметры структурных элементов**

### **Статическая характеристика и чувствительность структурного элемента**

Структурная схема элемента, на вход которого подана входная величина  $x$ , а на выходе получен сигнал  $y$ , приведена на рис. 4, а.

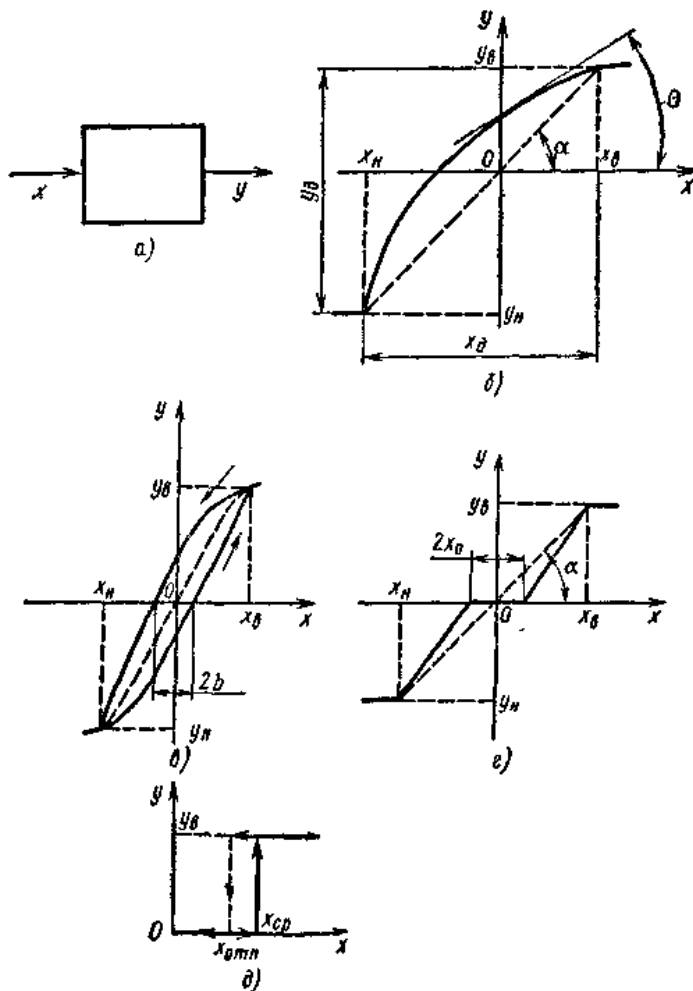


Рис. 4. Структурный элемент системы:  
 а — структурная схема; статические характеристики: б — нелинейная;  
 в — гистерезисного типа; е — с зоной нечувствительности;  
 д — релейного типа

Если  $x$ ,  $y$  и внешние условия среды не изменяются, то функция преобразования  $y = f(x)$  или зависимость между выходным сигналом  $y$  и входной величиной  $x$  в установившихся условиях при постоянстве внешних воздействий является *статической характеристикой* рассматриваемого элемента. На практике эта зависимость может быть нелинейной (рис. 4, б), может характеризоваться гистерезисом, т. е. несовпадением значений  $y$  при возрастании и убывании  $x$  (рис. 4, в), зоной нечувствительности  $2x_0$  (рис. 4, з) или иметь релейный характер (рис. 4, д). Здесь  $x_в$ ,  $x_н$ ,  $x_{ср}$ ,  $x_{отп}$  — предельные значения входной величины;  $y_в$ ,  $y_н$  — предельные значения выходного сигнала, которые обычно ограничены упорами или насыщением.

Величина *диапазона* измерения входной величины

$$x_d = x_в - |x_н|,$$

а величина *диапазона* измерения выходного сигнала

$$y_d = y_в - |y_н|.$$

*Чувствительность* элемента определяется выражением

$$S = \frac{dy}{dx} = \frac{m_y}{m_x} \operatorname{tg} \theta, \quad (2)$$

где  $m_x$ ,  $m_y$  — масштабы графика по осям  $x$  и  $y$ ;

$\theta$  — угол наклона касательной к характеристике в данной точке (рис. 4, б).

*Порогом чувствительности* называют минимальное приращение входной величины  $x_{\min}$ , которому соответствует минимальное изменение выходного сигнала  $y_{\min}$ .

В тех случаях, когда нелинейность мала, производят линеаризацию статической характеристики. Применяются различные способы линеаризации. Наиболее простой из них состоит в том, что кривую статической характеристики заменяют хордой, стягивающей предельные значения функции  $y$  и проходящей через начало координат  $O$  под углом  $\alpha$  (рис. 4, б). Более точные результаты может дать линейно-кусочная аппроксимация. Для гистерезисной кривой (рис. 4, в), имеющей небольшую ширину петли  $2b$ , характеристика аппроксимируется штриховой прямой, проходящей через предельные значения функции и начало координат  $O$ . При линеаризации характеристики с небольшой зоной нечувствительности  $2x_0$  (рис. 4, з) кривую статической характеристики заменяют прямой (штриховая линия), соединяющей предельные значения функции и проходящей через начало координат.

Если статическая характеристика аппроксимирована прямой, то функция преобразования принимает вид  $y = Sx$ , где  $S = \operatorname{const}$  [см. уравнение (2)].

### Динамическая характеристика

В большинстве случаев входные величины (усилия, давления, скорости, расходы и др.) не остаются постоянными во времени. Внешние условия (температура, давление, влажность и т. д.) также претерпевают изменения. Для установления зависимости между входной величиной  $x$ , выходным сигналом  $y$  и их производными, т. е. для определения *динамической характеристики* элемента, составляют дифференциальное уравнение, пользуясь законами физики. Обычно дифференциальные уравнения получают нелинейными. В ряде случаев для сравнительно небольшого диапазона изменений входной величины удается свести эти нелинейные дифференциальные уравнения к линейным вида

$$\begin{aligned} \frac{a_0 d^n y}{dt^n} + \frac{a_1 d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m x}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx}{dt} + b_m x \end{aligned} \quad (3)$$

где  $a_0, \dots, a_n; b_0, \dots, b_m$  — постоянные коэффициенты. Статическая характеристика элемента, определяющая связь между выходным сигналом  $y$  и входной величиной  $x$  в установившихся условиях работы при постоянстве внешних параметров, может быть представлена как частный случай динамической характеристики при равенстве нулю всех производных. Тогда уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$a_n y = b_m x \text{ или } y = \frac{b_m}{a_n} x = Sx,$$

где

$$S = \frac{dy}{dx} = \frac{b_m}{a_n} = \text{const } dx$$

— чувствительность элемента.

Уравнение (3) можно также представить в виде преобразования Лапласа, которое при нулевых начальных условиях будет иметь вид

$$\begin{aligned} (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(p) = \\ = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m) x(p), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $y(p)$  и  $x(p)$  — изображения Лапласа для выходного сигнала и входной величины соответственно;

$$p = \frac{d}{dt} \text{ — оператор Лапласа.}$$

Если взять отношение изображений выходного сигнала и входной величины при нулевых начальных условиях, то получим передаточную функцию элемента

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n} \quad (5)$$

Характеристическим уравнением элемента является выражение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Заменив  $p = \omega$ , где  $\omega$  — круговая частота входной величины, получим комплексное выражение вида

$$W(j\omega) = D(\omega) + jB(\omega),$$

где  $D(\omega)$  и  $jB(\omega)$  — действительная и мнимая части. Это выражение представляет собой комплексную амплитудно-фазовую характеристику элемента

$$W(j\omega) = \sqrt{[D(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} e^{-j \arctg \frac{B(\omega)}{D(\omega)}}. \quad (6)$$

Модулем выражения (6) является

$$|W(j\omega)| = \sqrt{[D(\omega)]^2 + [B(\omega)]^2} = y(\omega), \quad (7a)$$

а фазой

$$\psi(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{D(\omega)}. \quad (7b)$$

Выражение (7a) представляет собой амплитудно-частотную (амплитудную), а выражение (7b) — фазо-частотную (фазовую) характеристики элемента.

Динамические свойства элемента определяет также переходная функция, являющаяся реакцией элемента на единичное воздействие (единичную функцию)  $x = 1$  (0-

В качестве примера определения характеристик рассмотрим упругий чувствительный элемент — мембрану, представляющую собой тонкую круглую пластинку, закрепленную по внешнему контуру (рис. 5, a).

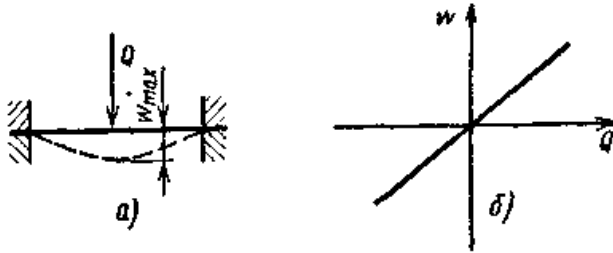


Рис. 5. Мембрана: а — схема; б — желаемая форма статической характеристики

Под влиянием приложенной силы  $Q$  мембрана прогнется, причем максимальный прогиб  $w_{\max}$  будет в центре. Зависимость прогиба мембраны от приложенной силы  $w=f(Q)$  является статической характеристикой. Обычно эта характеристика нелинейна, но в небольшом диапазоне изменения силы  $Q$  она может быть линеаризована (рис. 5, б). Тогда

$$w = SQ,$$

где  $S = \frac{w}{Q}$  — чувствительность (податливость мембраны), м/Н;

$k = \frac{1}{S} = \frac{Q}{w}$  — коэффициент жесткости мембраны, Н/м.

Коэффициент жесткости  $k$  — сила, необходимая для того, чтобы вызвать прогиб мембраны, равный 1 м.

Изменение прогиба мембраны от приложенной силы и достижение установившегося максимального значения

$$w_{\max} = w_{\text{ст}} = \frac{Q}{k} \quad (8)$$

происходит не мгновенно, а с некоторым запаздыванием. Характер изменения прогиба по времени можно определить как аналитическим путем, так и экспериментальным.

Рассмотрим аналитический путь решения задачи. Для этого составим дифференциальное уравнение движения мембраны, характеризующейся следующими сосредоточенными параметрами (здесь сделано допущение; в действительности параметры мембраны распределенные): приведенной массой  $m$ , коэффициентом жесткости  $k$  и коэффициентом затухания (демпфирования)  $D$  (коэффициент затухания  $D$  — сила демпфирования при скорости, равной 1 м/с). В рассматриваемом примере сила демпфирования определяется в

основном внутренним трением в материале. С достаточной точностью можно принять, что сила демпфирования  $D \frac{dw}{dt}$  в упругом чувствительном элементе в зависимости от скорости  $dw/dt$  перемещения мембраны изменяется по линейному закону. Предположим, что приложенное усилие изменяется по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ . Тогда уравнение движения мембраны под влиянием приложенного усилия будет иметь следующий вид:

$$m \frac{d^2 w}{dt^2} + D \frac{dw}{dt} + kw = Q \sin \omega t ; \quad (9)$$

здесь в левой части уравнения представлена сумма сил: силы инерции  $md^2w/dt^2$ , силы демпфирования (затухания)  $D dw/dt$  и силы упругости  $kw$ , в правой части — внешняя возмущающая сила  $Q \sin \omega t$ .

Разделив обе части уравнения (9) на  $m$ , получим

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{D}{m} \frac{dw}{dt} + \frac{k}{m} w = \frac{Q}{m} \sin \omega t$$

или

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + 2\beta\omega_0 \frac{dw}{dt} + \omega_0^2 w = \frac{Q}{m} \sin \omega t \quad (10)$$

где  $\beta = \frac{D}{D_{кр}} = \frac{D}{2\sqrt{mk}}$  — коэффициент относительного затухания;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — частота собственных колебаний мембраны, 1/с;

$D_{кр} = 2\sqrt{mk}$  — коэффициент критического затухания, Н•с/м.

Полное решение уравнения (10) включает в себя сумму общего (при равенстве нулю правой части) и частного решений. Вначале определим общее решение, представив уравнение (10) в виде

$$p^2 + 2\beta\omega_0 p + \omega_0^2 = 0, \text{ где } p = d/dt.$$

Корни уравнения

$$p_{1,2} = -\beta\omega_0 \pm \sqrt{\beta^2\omega_0^2 - \omega_0^2} = -\beta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\beta^2 - 1}$$

При  $\beta > 1$  корни  $p_1, p_2$  — действительные отрицательные. Движение мембраны при этом будет происходить по аperiодическому закону

$$w = e^{-p_1 t} + e^{-p_2 t}.$$

При  $\beta=1$  наступает критический режим, при котором корень уравнения  $p_k = -\beta\omega_0$ ; движение происходит по аperiodическому закону

$$w = e^{-p_k t},$$

При  $\beta < 1$  корни

$$p_{3,4} = -\beta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\beta^2},$$

где  $j = \sqrt{-1}$ , т. е. корни мнимые, сопряженные. Движение мембраны будет колебательное, затухающее, которому соответствует уравнение

$$w = e^{-\beta\omega_0 t} \cos[\omega_0 \sqrt{1-\beta^2} t], \quad (11)$$

где  $\omega_0\sqrt{1-\beta^2} = \omega_1$  — частота свободных затухающих колебаний.

Период свободных колебаний  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ . Скорость затухания колебаний определяется декрементом затуханий, выражаемым как отношение двух соседних амплитуд, отстоящих одна от другой на период  $T_1$ :

$$\Delta = \frac{e^{-\beta\omega_0 t}}{e^{-\beta\omega_0(t+T_1)}} = e^{-\beta\omega_0 T_1} = e^{\frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}},$$

или логарифмическим декрементом затухания

$$\ln \Delta = \frac{2\pi\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

По истечении короткого интервала времени свободные колебания затухнут, и движение мембраны с амплитудой  $w_0$  и фазовым сдвигом  $\psi$  будет определяться вынуждающей силой  $Q_0 \sin \omega t$ . Амплитудно-частотная характеристика мембраны определяется выражением

$$\frac{w_0}{w_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2\beta \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (12)$$

где  $w_{ст} = Q/k$  — отклонение мембраны в статических условиях при воздействии силы  $Q$ .

Фазочастотная характеристика определяется выражением

$$\psi = -\arctg \frac{2\beta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (13)$$



Па рис. 6, а приведено семейство амплитудно-частотных характеристик мембраны, соответствующих уравнению (12).

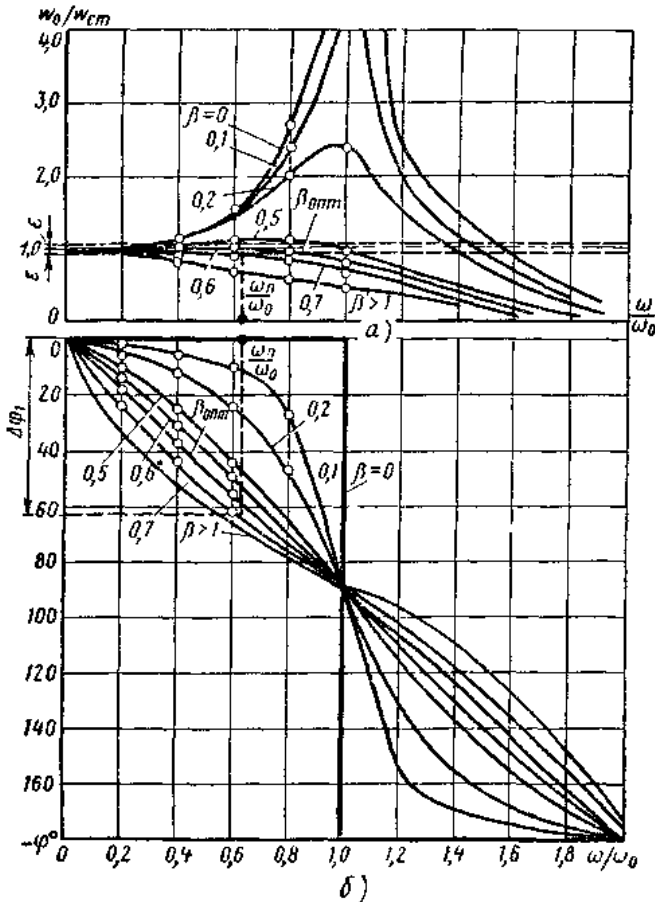


Рис. 6. Семейства характеристик мембраны: а — амплитудно-частотная; б — фазочастотная

Здесь по оси абсцисс отложены две наиболее характерные точки  $\omega/\omega_0 = 0$  (статические условия работы) и  $\omega/\omega_0 = 1$  (при  $\beta = 0$  создается условие резонанса мембраны). По оси ординат отложена точка

$w_0/w_{ст} = 1$  и проведена прямая  $\frac{w_0}{w_{ст}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 1$ , показывающая от-

существование отклонений  $w_0$  от  $w_{ст}$  на всем диапазоне частот. Вследствие этого данную прямую назовем *идеальной амплитудно-частотной характеристикой*. Все остальные кривые семейства характеристик отличаются от идеальной, причем характер изменения кривых определяется параметром  $\beta$ . Наибольшее приближение к идеальной имеет кривая при  $\beta_{опт}$ .

Отклонение  $\varepsilon$  ординаты кривой (например, при  $\beta = 0,7$ ) от идеальной характеристики при рассматриваемой частоте  $\omega_n/\omega_0$  определяет динамическую погрешность по амплитуде.

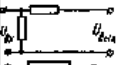
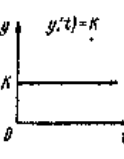

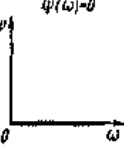
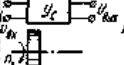

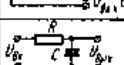
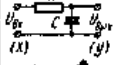
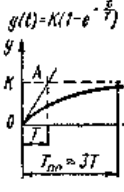
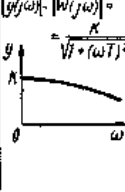
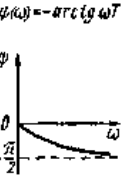
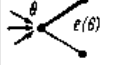
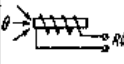
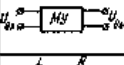
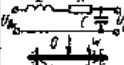
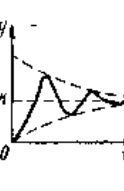
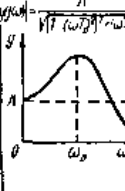
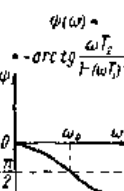


На рис. 6, б приведено семейство фазочастотных характеристик мембраны, соответствующих уравнению (13). При статических условиях, т. е. при  $\omega/\omega_0 = 0$  независимо от величины  $\beta$  фазовый угол

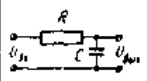
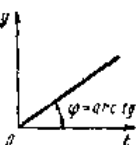
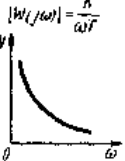
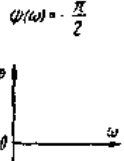
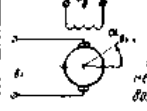
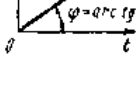
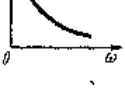

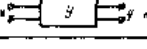
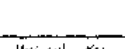



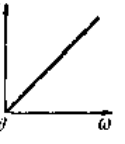
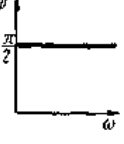
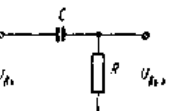
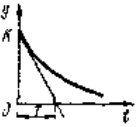
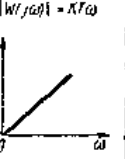
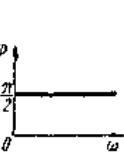
$\psi = 0$ . Ось абсцисс  $\psi \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 0$  является *идеальной фазочастотной*

*характеристикой*, поскольку здесь отсутствуют динамические погрешности по фазе. Другие кривые семейства отличаются от идеальной. Примерно линейная форма характеристики наблюдается при  $\beta_{опт}$ . Отклонение  $\Delta\psi_1$  ординаты кривой (например, при  $\beta=0,7$ ) от оси абсцисс определяет динамическую погрешность по фазе (здесь рассмотрена «собственная» динамическая погрешность мембраны) для рассматриваемой частоты  $\omega_n/\omega_0$ .

### **Представление структурных элементов типовыми звеньями**

Несмотря на значительные технические различия, многие структурные элементы могут быть описаны однотипными линейными дифференциальными уравнениями. Вид дифференциального уравнения определяет тип структурного элемента — звена. К типовым линейным звеньям относятся следующие: пропорциональное, аperiodическое, колебательное, интегрирующее, дифференцирующее, а также их комбинации. В табл. 2 приведены основные идеализированные параметры типовых звеньев в ограниченном частотном диапазоне, причем через  $K=S$  обозначен коэффициент передачи (усиления), а через  $T$  — постоянная времени звена.

Тип звена	Примеры	Передаточная функция	Переходная функция	Характеристики	
				амплитудная	фазовая
Пропорциональное	 <p>Электрическая цепь</p>	$W(p) = K$	 <p><math>y(t) = K</math></p>	 <p><math> y(\omega)  = K</math></p>	 <p><math>\varphi(\omega) = 0</math></p>
	 <p>Широкополосный усилитель</p>				
	 <p>Редуктор</p>				
	 <p>Потенциометр (электрическая часть)</p>				
Апериодическое	 <p>Электрическая цепь</p>	$T = RC, W(p) = \frac{K}{T_p + 1}$	 <p><math>g(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})</math></p>	 <p><math> y(\omega)  = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}</math></p>	 <p><math>\varphi(\omega) = -\text{arctg } \omega T</math></p>
	 <p>Термопара</p>				
	 <p>Терморезистор</p>				
	 <p>Магнитный усилитель</p>				
Колебательное	 <p>Электрическая цепь</p>	$T_1 = \sqrt{LC}, W(p) = \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$		 <p><math> y(\omega)  = \frac{K}{\sqrt{(\omega^2 T_1^2 - 1)^2 + \omega^2 T_2^2}}</math></p>	 <p><math>\varphi(\omega) = -\text{arctg } \frac{\omega T_2}{1 - \omega^2 T_1^2}</math></p>
	 <p>Упругий чувствительный элемент</p>				
	 <p>Маятник</p>				

Тип звена	Примеры	Переходная функция	Переходная функция	Характеристика	
				амплитудная	фазовая
Интегрирующее	 <p>Электрическая цепь</p>	$\frac{K}{pT+1}$ при $pT \gg 1$ $\frac{K}{pT+1}$ $\frac{K}{pT+1}$			
	 <p>Электрическая цепь с индуктивностью</p>				
	 <p>Гидравлический дифференциатор</p>				
Идеальное дифференцирующее	 <p>Тахогенератор</p>	$W(p) = Kp$			
Анализаторное звено дифференцирующее	 <p>Электрическая цепь</p>	$\frac{Kp}{pT+1}$ при $pT \ll 1$ $\frac{Kp}{pT+1}$			

Математические выражения для  $T$  в таблице приведены только для электрических цепей. Для других элементов соответствующие выражения приводятся в литературе. Тип звена определяется аналитическим методом (на основании составления дифференциального уравнения) или экспериментальным. Экспериментальный метод используют в тех случаях, когда не удастся составить уравнение и определить его коэффициенты или требуется уточнение уравнения изготовленного элемента (звена). При этом на вход элемента обычно подается единичное воздействие, а затем определяют и анализируют переходную функцию. Имеются и другие возможности определения характеристик. На рис. 7 в виде примера приведены колебательная (слева) и аperiodическая (справа) переходные функции, на основании которых определяют свойства звеньев.

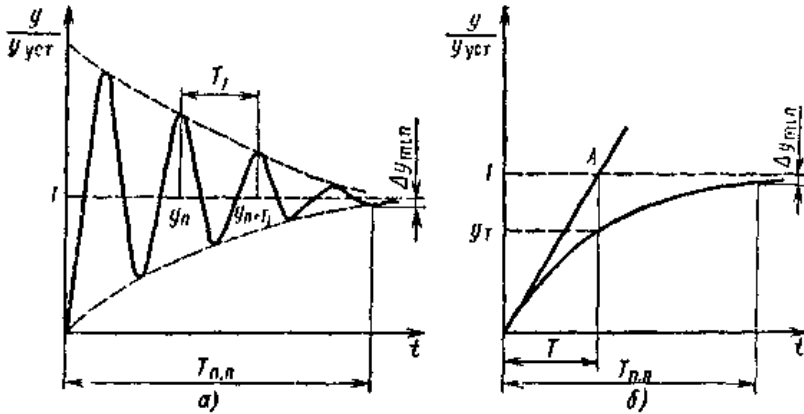


Рис. 7. Кривые переходных процессов: *а* — колебательная; *б* — аperiodическая

Так, по виду колебательной кривой находят период демпфированных колебаний  $T_1 = 2\pi/\omega_1$ , а следовательно, частоту демпфированных колебаний  $\omega_1$  и быстродействие, р.и.ше  $T_1/4$ , а по отношению амплитуд  $y_n$  и  $y_{n+1}$  — декремент затухания  $\Delta$  кривой и коэффициент относительного затухания  $\beta$ . Вид переходной функции позволяет также установить длительность переходного процесса  $T_{п.п.}$  в конце которого выходной сигнал  $y$  не превышает заданной величины  $\Delta y_{min}$ .

Для аperiodической кривой вида

$$y = y_{уст} \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (14)$$

быстродействие характеризуется постоянной времени  $T$ , которую можно определить графически по точке пересечения  $A$  касательной к аperiodической кривой, проведенной в начале координат, с прямой  $y(t) = y_{уст}$ . Величину ординаты  $y_T$ , соответствующей постоянной времени  $T$ , можно определить аналитически, подставив в уравнение (14) значение  $t = T$ . В результате получим  $y_T = 0,63y_{уст}$ . Длительность переходного процесса  $T_{п.п.} \approx 3T$ .

К структурным элементам предъявляют требования максимального быстродействия и чувствительности при минимальных габаритных размерах. Обычно вследствие взаимосвязанности этих требований практически не представляется возможным обеспечить их одновременно. Рассмотрим для примера упругий чувствительный элемент, который в зависимости от величины демпфирования может

быть представлен колебательным или апериодическим звеном. Быстродействие звена определяется временем запаздывания переходного процесса, которое для колебательной кривой соответствует четверти периода затухающих колебаний:

$$\frac{T_1}{4} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\beta^2}},$$

а для апериодической — постоянной времени  $T$ . Таким образом, быстродействие чувствительного элемента тем больше, чем выше

частота демпфированных колебаний  $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1-\beta^2}$ , а

следовательно, частота собственных колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и, в

конечном счете, чем больше жесткость  $k$  элемента при той же массе  $m$  и чем меньше относительный коэффициент затухания  $\beta$ .

Чувствительность упругого элемента  $S = dw/dQ$  тем больше, чем больше прогиб  $w$  при той же приложенной силе  $Q$ . Поскольку прогиб упругого элемента  $w = Q/k$ , то чувствительность обратно пропорциональна жесткости  $k$ . Как видно, требования максимальных быстродействия и чувствительности противоречивы.

Габаритные размеры упругого чувствительного элемента определяют частоту собственных колебаний и чувствительность. Чем больше габаритные размеры, например, диаметр при той же толщине, тем меньше жесткость, а следовательно, тем больше чувствительность, но меньше частота собственных колебаний, т. е. быстродействие. В этом случае условия получения большой чувствительности и малых размеров также противоречивы.

Таким образом, условия получения максимальной чувствительности обычно снижают быстродействие и ведут к увеличению габаритных размеров. Вследствие этого необходимо выбирать оптимальные соотношения, исходя из того, какое из условий (быстродействие, чувствительность или размеры) принято за основное.

### Схемы соединения звеньев

В табл. 2 приведены примеры элементов, которые могут быть представлены типовыми звеньями. Наряду с этим некоторые элементы выполняются в виде комбинации отдельных звеньев. Так, например, для повышения чувствительности применяют схему последовательного соединения звеньев (рис. 8, а).

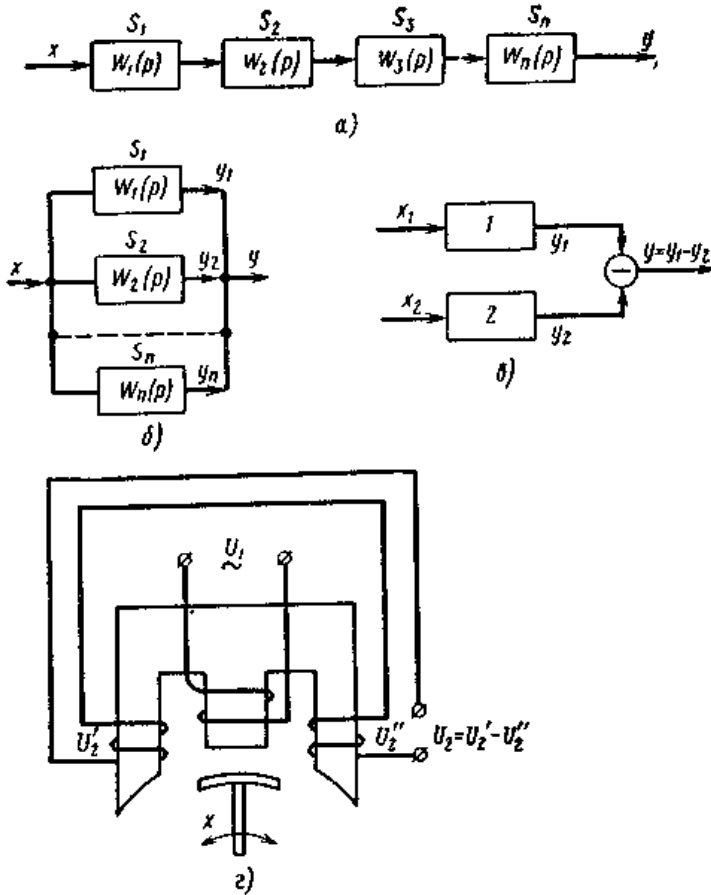


Рис. 8. Соединение звеньев:

а — последовательное; б — параллельное (согласное); в — дифференциальное; г — дифференциальное для трансформаторных элементов

В этом случае передаточная функция элемента равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W_0(p) = W_1(p) W_2(p) \dots W_n(p),$$

а чувствительность элемента — произведению чувствительности звеньев:

$$S_0 = S_1 S_2 \dots S_n.$$

При параллельном соединении тех же звеньев (рис. 8, б) измеряемая величина подается на вход каждого из них. Выходной сигнал элемента у является суммой выходных сигналов звеньев:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \quad (15)$$

Такие схемы используют в тех случаях, когда требуется увеличить мощность выходного сигнала или повысить надежность работы элемента путем резервирования звеньев. Передаточная функция элемента при параллельном включении звеньев равна сумме передаточных функций:

$$W_3(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p).$$

Для определения чувствительности элемента продифференцируем обе части уравнения (15) по  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{dy_n}{dx},$$

в результате чего получим

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n.$$

Следовательно, чувствительность элемента равна сумме чувствительностей звеньев, входящих в его состав.

Структурная схема дифференциального соединения звеньев показана на рис. 8, в. Примерами таких схем являются дифференциальные индуктивные, трансформаторные, реостатные, емкостные и другие элементы, причем используются идентичные звенья 1, 2, имеющие одинаковые параметры. На входы этих звеньев могут быть поданы как одинаковые, так и различающиеся величины. Выходным сигналом дифференциального элемента является разность выходных сигналов звеньев.

Такие схемы находят широкое применение, поскольку они уменьшают влияние внешних факторов на результат измерения, компенсируют постоянную составляющую выходного сигнала, а для входных сигналов с различными знаками увеличивают чувствительность и линейность характеристики.

Уменьшение влияния внешних факторов объясняется тем, что изменение температуры, влажности, вибраций и т. п., а также параметров источников питания (амплитуды, частоты, фазы) вызывает в идентичных звеньях одинаковые погрешности, которые исключаются при вычитании выходных сигналов звеньев.

Подобным же образом исключается (или снижается) влияние постоянной составляющей входной величины.

Увеличение чувствительности схемы при подаче входных величин с различными знаками объясняется сложением выходных сигналов, т. е.  $x_1 - (-x_2) = x_1 + x_2$ .



При наличии нелинейных характеристик звеньев типа  $y_1 = (x_0 + x)^2$  и  $y_2 = (x_0 - x)^2$  получается линейная характеристика элемента:

$$y = y_1 - y_2 = (x_0 + x)^2 - (x_0 - x)^2 = 4x_0x.$$

Если звенья имеют гиперболические характеристики вида

$$y_1 = \frac{1}{x_0 - x} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1}{x_0 + x}$$

то при  $x_0 \gg x$  можно получить достаточно хорошую линейризацию результирующей кривой.

При использовании идентичных индуктивных и трансформаторных элементов (см. схему, показанную на рис. 8, з) компенсируется сила притяжения якоря к сердечнику.

Вычитание напряжений, токов, усилий и других величин, полученных на выходе звеньев с различными знаками, производится в общем звене. Сравнение сопротивлений, индуктивностей, емкостей осуществляют с помощью мостовых схем. Если измеряемые величины не могут принимать отрицательных значений (например, световой поток), то используется модуляция этих величин по синусоидальному, трапецидальному, прямоугольному или треугольному законам изменения со сдвигом фаз на половину периода.

Несколько реже применяются логометрические элементы, структурная схема которых приведена на рис. 9, а.

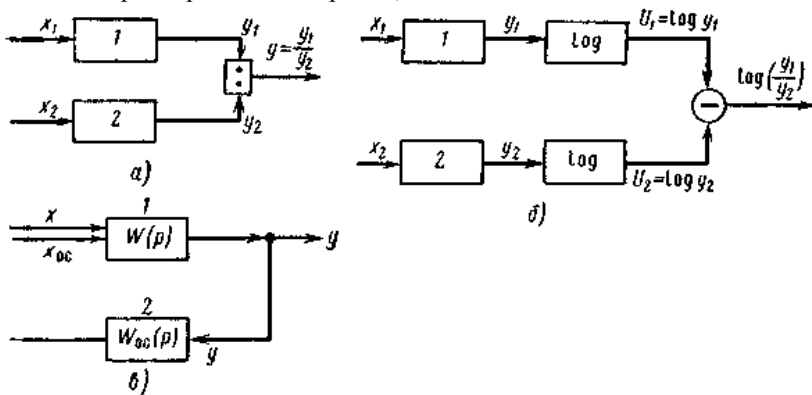


Рис. 9. Схемы соединения звеньев:

а — простейшая логометрическая; б — логометрическая с применением логарифмирующих звеньев; в — встречно-параллельная

Особенностью схемы является то, что выходной сигнал  $y$  пропорционален отношению выходных сигналов звеньев:  $y = \frac{y_1}{y_2}$

(например, в логометре).

В ряде случаев сигналы  $y_1$  и  $y_2$  логарифмируются, а затем производится вычитание логарифмов (см. схему, показанную на рис. 9, б). Преимуществом таких схем является возможность компенсации действия внешних факторов (температуры, напряжения и т. п.).

Для обеспечения некоторых параметров элементов применяют встречно-параллельное соединение звеньев (рис. 9, в). Особенностью приведенной схемы является то, что выходной сигнал  $y$  основного звена 1 через дополнительное звено 2 в цепи обратной связи снова подается на вход основного звена 1. Если знаки входной величины  $x$  и сигнала  $x_{oc}$  совпадают, то имеет место положительная обратная связь. При несовпадении знаков при  $x$  и  $x_{oc}$  образуется отрицательная обратная связь.

До введения обратной связи, т. е. при  $x_{oc} = 0$ , уравнение основного звена 1 имеет вид

$$y = W(p) x,$$

где  $W(p)$  — передаточная функция основного звена.

После введения обратной связи зависимость между выходным сигналом  $y$  и входными величинами  $x$  и  $x_{oc}$  эквивалентного звена можно представить выражением

$$y = W(p) (x \pm x_{oc}),$$

где

$$x_{oc} = W_{oc}(p) y;$$

$W_{oc}(p)$  — передаточная функция вспомогательного звена 2.

Подставив значение  $x_{oc}$  и преобразовав полученное выражение, получим

$$y [1 \mp W_{oc}(p) W(p)] = W(p)x,$$

откуда передаточная функция эквивалентного звена

$$W_y(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)_{oc} W(p)}. \quad (16)$$

В выражении (16) знак плюс соответствует отрицательной обратной связи, а знак минус — положительной.

Для определения чувствительности схемы рассмотрим выражение для входного сигнала эквивалентной схемы

$$x_y = x \pm x_{oc}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по  $y$ , получим

$$\frac{dx_3}{dy} = \frac{dx}{dy} \pm \frac{dx_{oc}}{dy}$$

Поскольку

$$\frac{dx_3}{dy} = \frac{1}{S_3}; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{S} \quad \text{и} \quad \frac{dx_{oc}}{dy} = S_{oc}$$

получим

$$\frac{1}{S_3} = \frac{1}{S} \pm S_{oc}$$

откуда

$$S_3 = \frac{S}{1 \pm SS_{oc}}, \quad (17)$$

где знак плюс соответствует отрицательной, а знак минус — положительной обратной связи.

Из выражения (17) видно, что при  $SS_{oc} = 1$  в случае положительной обратной связи  $S_3$  формально стремится к бесконечности. В действительности  $S_3$  принимает некоторое установившееся значение, определяемое характером нелинейности конкретного элемента.

Для определения чувствительности схемы смешанного соединения звеньев поступают следующим образом: вначале определяют участки, где применено последовательное, параллельное или встречно-параллельное соединение. Затем эти участки заменяют эквивалентными звеньями, и так до тех пор, пока схема не будет приведена к одному из трех указанных видов схем.

### **Динамические аналогии электрических, механических и акустических элементов**

При решении инженерных и физических задач применяют методы, основанные на подобии явлений и процессов, присущих различным областям техники. Метод аналогий позволяет решать системы дифференциальных, интегральных, интегродифференциальных и других уравнений на моделях.

Электрическое моделирование, имеющее ряд существенных преимуществ перед другими методами исследования, развивается по пути моделирования цепей (систем) и тел (полей). При моделировании цепей, содержащих пассивные элементы, составляется электрическая схема из сосредоточенных индуктивностей, емкостей, резисторов, трансформаторов и источников напряжений, соответствующая схеме

исследуемой системы и эквивалентная ей в математическом отношении. Такие цепи можно моделировать также с помощью электрических схем с усилителями.

Рассмотрим возможности электрического моделирования механических элементов. Применительно к моделированию механических, например упругих, элементов с сосредоточенными параметрами можно рассматривать следующие варианты. Силе  $Q$  и перемещению  $w$  механической системы можно уподобить соответственно, во-первых, напряжение  $U$  и заряд  $q$ ; во-вторых, электрический ток  $i$  и магнитный поток  $\Phi$ ; в-третьих, напряжения и токи в различных точках схемы.

Первые два варианта представляют собой первую и вторую системы электромеханических аналогий, когда исследуемому элементу механической системы соответствует определенный элемент электрической модели. Соединение элементов модели при этом происходит согласно динамической схеме исследуемого механического объекта.

Для первой и второй систем электромеханических аналогий справедливы энергетические соотношения между исследуемой схемой и ее моделью. По первой системе аналогий кинетической энергии

механической системы  $\frac{1}{2} m \left( \frac{dw}{dt} \right)^2$  соответствует энергия

магнитного поля  $\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} L \left( \frac{dq}{dt} \right)^2$ , а потенциальной энергии

$\frac{1}{2} \frac{w^2}{1/k} = \frac{1}{2} \frac{w^2}{S_k}$  — энергия электрического поля  $\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$  (здесь  $m$  —

масса;  $k$  — жесткость;  $1/k = S_k$  — податливость механической системы;  $L$  — индуктивность;  $C$  — емкость электрической модели). Для второй системы электромеханических аналогий кинетической энергии механической системы соответствует энергия электрического поля, а потенциальной — энергия магнитного поля.

Если силе  $Q$  и перемещению  $w$  механической системы уподобляют напряжения или токи в различных точках электрической системы, то в таком случае энергетические соотношения не имеют места.

На рис. 10, *a* представлена схема мембраны с сосредоточенными параметрами: массой  $m$ , жесткостью  $k$ , демпфированием (затуханием)  $D$ . На мембрану воздействует сосредоточенная сила  $Q$ . Движение данной мембраны описывается дифференциальным уравнением (9).

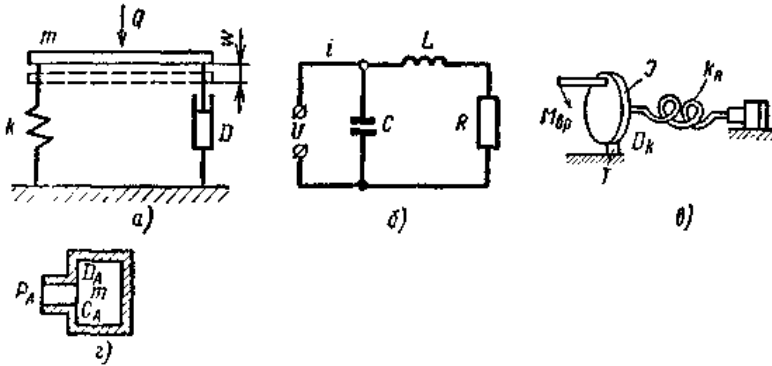


Рис. 10. Схемы элементов с одной степенью свободы:

*a* — механическая с поступательным движением; *б* — электрическая; *в* — механическая с вращательным движением; *г* — акустическая

На основании первой системы электромеханических аналогий составим электрическую модель данной мембраны с сосредоточенными индуктивностью  $L$ , емкостью  $C$  и сопротивлением  $R$ , включенную в цепь источника питания с напряжением  $U$  (рис. 10, б). Ниже приведено сопоставление параметров механической и электрической схем.

Механический элемент (поступательное движение)	Электрическая модель
Масса $m$ , кг . . . . .	Индуктивность $L$ Гн
Коэффициент жесткости $k$ , Н/м	$\frac{1}{\text{емкость}} = \frac{1}{C}$ , 1/Ф
Эластичность $\frac{1}{k} = S_k$ , м/Н (податливость) . . . . .	Емкость $C$ , Ф
Коэффициент демпфирования (затухание) $D$ , (Н·с)/м . . .	Омическое сопротивление $R$ , Ом
Возмущающая сила $Q \sin \omega t$ , Н	Включ. ное напряжение $U \sin \omega t$ , В
Перемещение $\omega$ , м	Заряд конденсатора $q$ , Кл
Скорость $\frac{d\omega}{dt}$ , м/с	Сила тока $i = \frac{dq}{dt}$ , А

Дифференциальному уравнению (9) движения одномассового механического элемента соответствует уравнение электрической цепи

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U \sin \omega t$$

Рассмотренную электрическую модель можно использовать для исследования механического вращательного, а также акустического элемента с одной степенью свободы (рис. 10, в, з). Как видно из рис. 10, в, в механическом вращательном элементе крутящий момент  $M_{BP}$  воздействует на маховик с моментом инерции  $J$ , соединенный с вращательным упругим элементом жесткостью  $k_R$ . Вращению маховика препятствует тормоз  $T$ . Сила трения между маховиком и тормозом пропорциональна скорости и определяется механическим сопротивлением вращению  $D_R$  (вязким трением).

Уравнение движения механического вращательного элемента имеет вид

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + D_R \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\alpha}{C_R} = M_{BP} \sin \omega t, \quad (18б)$$

где  $\alpha$  — угол поворота оси, рад;

$J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  — момент сил инерции, Н • м;

$D_R \frac{d\alpha}{dt}$  — момент сопротивления, Н • м;

$\alpha = \frac{\alpha}{C_R}$  — упругий момент, Н • м;

$\frac{1}{k_R} = C_R$  — эластичность (податливость), рад/Н • м.

Акустический элемент (рис. 10, з) характеризуется акустическим вязким трением  $D_A$ , инертностью или акустической массой  $m$  и акустической эластичностью  $C_A$ . Под влиянием приложенного звукового давления  $P_A$  вытесняется объем  $x_A$ .

Уравнение движения акустического элемента

$$m \frac{d^2x_A}{dt^2} + D_A \frac{dx_A}{dt} + \frac{x_A}{C_A} = P_A \sin \omega t, \quad (18в)$$

где  $x_A$  — вытесненный объем, м<sup>2</sup>;

$P_A$  — внешнее звуковое давление, Па;

$m \frac{d^2x_A}{dt^2}$  — давление, преодолевающее инерцию, Па;

$D_A \frac{dx_A}{dt}$  — давление, преодолевающее акустическое со-

противление, Па;

$\frac{x_A}{C_A}$  — давление, обусловленное акустической эластичностью, Па.

Уравнения (18а), (9), (18б) и (18в) иллюстрируют аналогию между электрическими, механическими поступательными, механическими вращательными и акустическими элементами.

### 13.5. Погрешности элементов

Весьма важным параметром структурного элемента является погрешность, под которой понимают разность между измеряемой входной величиной  $x$  и сигналом (показанием)  $x_I$  рассматриваемого поверяемого элемента, представленным в значениях входной величины.

Входная величина в ряде случаев может быть измерена с помощью эталонного элемента, погрешность которого пренебрежимо мала. Тогда за действительное значение измеряемой величины принимают показание эталонного элемента и с этим показанием сравнивают показание  $x_I$  рассматриваемого элемента.

*Абсолютной погрешностью*  $\Delta x$  при этом является разность показаний поверяемого элемента  $x_I$  и эталонного  $x_0$ , принимаемого за действительное значение измеряемой величины:

$$\Delta x = x_I - x_0.$$

Поправкой в показаниях элемента является абсолютная погрешность, взятая с обратным знаком:

$$\Delta C = -\Delta x = x_0 - x_I.$$

Таким образом, для получения действительного значения измеряемой величины к показаниям элемента необходимо прибавить величину поправки:

$$x_I + \Delta C = x_I + x_0 - x_I = x_0.$$

Обычно поправку определяют по графику или таблице, а в некоторых случаях учет поправок производится автоматически.

*Относительная погрешность*  $\varepsilon$  представляет собой абсолютную погрешность, выраженную в долях или в процентах от действительного значения измеряемой величины  $x_0$ :

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0} 100\% .$$

*Приведенная погрешность*  $\Delta$  представляет собой абсолютную погрешность  $\Delta x$ , выраженную в долях или процентах от диапазона измерений (здесь условно принято, что  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  имеют одинаковый знак):

$$\Delta = \frac{\Delta x}{x_{\max} - x_{\min}}; \quad \Delta = \frac{\Delta x}{x_{\max} - x_{\min}} 100\% .$$

*Классом точности* элемента называется величина наибольшей приведенной погрешности, выраженная в процентах.

Погрешности также подразделяют на следующие группы: систематические и случайные; методические и инструментальные (которые могут быть детерминированными и случайными); статические и динамические.

**Систематические погрешности** подчиняются определенным закономерностям, повторяются при многократных измерениях и поэтому могут быть оценены и учтены. Они зависят как от свойств элемента, так и от метода измерения.

Методические погрешности обусловлены несовершенством выбранного метода измерений, а инструментальные погрешности — несовершенством материалов, конструкции и точности изготовления элемента.

*Методические погрешности* появляются при использовании косвенных методов измерений, при которых элемент реагирует на величину  $x$ , являющуюся функцией измеряемой величины  $x$ :

$$x = f(x_1, a, b, \dots, k), \tag{19}$$

где  $a, b, \dots, k$  — физические параметры.

Если градуировка элемента производилась при  $x_0, b_0, \dots, k_0$ , т. е. использовалась зависимость  $x = f(x_1, a_0, b_0, \dots, k_0)$ , а измерения производили при  $a = a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b, \dots, k_0 + \Delta k$ , т. е. при  $x = f(x_1, a_0 + \Delta a, b_0 + \Delta b, \dots, k_0 + \Delta k)$ , то путем разложения функции (19) в ряд Тейлора можно определить методическую погрешность вида

$$\delta x = \frac{\partial f}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial f}{\partial b} \Delta b + \dots + \frac{\partial f}{\partial k} \Delta k$$

Для компенсации методической погрешности  $\delta x$  необходимо использовать дополнительные элементы, сигналы которых равны

$$-\frac{\partial f}{\partial a} \Delta a, -\frac{\partial f}{\partial b} \Delta b, \dots, -\frac{\partial f}{\partial k} \Delta k .$$

*Инструментальные погрешности* определяют как самим элементом, так и воздействием внешних мешающих факторов. К числу инструментальных погрешностей, свойственных элементу, относятся



следующие: производственно-технологические, температурные, погрешности гистерезиса и последействия.

Производственно-технологические погрешности вызываются неточностью изготовления деталей, разбросом и изменением во времени физических параметров материалов, неточностью отладки и регулировки узлов и т. п.

В упругих элементах возникают последействие и гистерезис вследствие внутреннего трения в материале, что приводит к изменению сигнала на выходе после снятия нагрузки и неоднозначности показаний при нагружении и разгрузении элемента. Для уменьшения погрешностей последействия и гистерезиса параметры упругих элементов выбирают так, чтобы напряжения в материалах были ниже допустимых.

Температурные погрешности появляются вследствие того, что модуль упругости  $E$  материала, индукция  $B$  магнита и омическое сопротивление  $R$  цепи элемента зависят от изменения температуры, т. е.

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= E_0(1 + \beta_E \theta); \\ B_0 &= B_0(1 + \gamma \theta); \\ R_0 &= R_0(1 + \alpha \theta). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где  $E_0, B_0, R_0$  — модуль упругости в Па, индукция в Т и омическое сопротивление в Ом при исходной температуре  $\theta_0$ ;

$\theta = \theta_1 - \theta_0$  — диапазон изменения температур, °С;

$-\beta_E, -\gamma, \alpha$  — температурные коэффициенты модуля упругости, индукции и омического сопротивления,  $1/^\circ\text{C}$ .

Тогда выходной сигнал элемента

$$y = F(x, E_0, B_0, R_0). \quad (21)$$

Разложив выражение (21) в ряд Тейлора по  $\theta$  и ограничившись линейными членами, получим

$$\begin{aligned} y &= F(x, E_0, B_0, R_0) + \left( \beta_E E_0 \frac{\partial F}{\partial E} - \gamma B_0 \frac{\partial F}{\partial B} + \alpha R_0 \frac{\partial F}{\partial R} \right) \theta = \\ &= F(x, E_0, B_0, R_0) + \sigma \theta \end{aligned}$$

где  $\sigma$  — температурный коэффициент элемента.

Для устранения температурных погрешностей, т. е. для достижения  $\sigma=0$ , используют принцип взаимной компенсации погрешностей, когда температурные коэффициенты имеют различные знаки (например, коэффициент  $\beta$  для металлов отрицательный, а  $\alpha$  — положительный). Другая возможность состоит в том, что выбирают материалы с малым

температурным коэффициентом, а также используют специальные термокомпенсаторы погрешностей.

**Случайные погрешности** характеризуются законом распределения, т. е. вероятностью  $P$  того, что погрешность  $\delta$  не превышает величины  $\varepsilon$ :

$$F(\delta) = P(\delta \leq \varepsilon).$$

Величина  $\varphi(\varepsilon) = \frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}$  является плотностью распределения вероятностей.

В измерительной технике принимают, что случайные погрешности распределяются по нормальному закону (рис. 11).

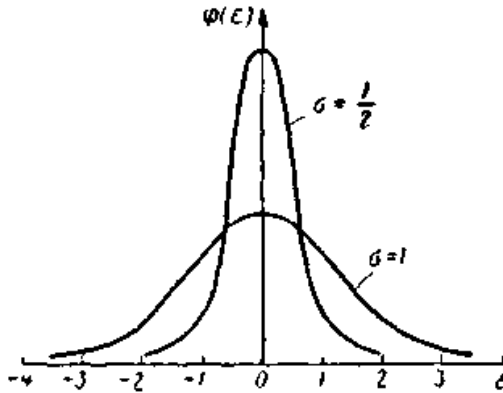


Рис. 11. График нормального закона распределения погрешностей

Плотность нормального распределения представляется выражением

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (22)$$

где  $a = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$  — математическое ожидание (среднее значение величины  $x$ );

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2\varphi(x)dx \text{ — дисперсия.}$$

В тех случаях, когда по ряду измерений определяют математическое ожидание, случайные погрешности можно характеризовать только дисперсией, т. е. квадратом рассеяния между случайной величиной  $x$  и ее математическим ожиданием.

При  $a=0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}$$

Вероятность того, что погрешность  $b$  лежит в пределах  $a \leq \delta \leq b$ , определяется путем интегрирования закона распределения:

$$P(a \leq \delta \leq b) = \int_a^b \varphi(\varepsilon) d\varepsilon.$$

*Вероятной погрешностью* называется такая погрешность, при которой вероятность ее появления составляет  $1/2$ , т. е.  $P_Q = 1/2$ . По таблицам интегралов для нормального распределения определяем  $Q = 0,6745\sigma$ , где  $\sigma$  — средняя квадратичная погрешность, равная корню квадратному из дисперсии.

*Средней погрешностью*  $\bar{\varepsilon}$  называется средняя величина абсолютной погрешности. Для нормального закона распределения

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma.$$

*Допустимой погрешностью* в элементах принимают  $\sigma_{\text{доп}} = \pm 3 \sigma$ . При этом вероятность того, что случайная величина не выходит за пределы  $\pm 3 \sigma$ , близка к единице, т. е.  $P_{3\sigma} = 0,9973$ .

При суммировании случайных независимых погрешностей дисперсию (рассеяние) погрешности определяют по формуле

$$\sigma_k^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2$$

где  $f(x, y, \dots, t)$  — функция, формируемая в результате измерений;  $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \dots, \sigma_t^2$  — дисперсии.

**Динамические погрешности.** Различают собственные и вынужденные динамические погрешности элемента, возникающие вследствие того, что элементы инерционны и не могут мгновенно реагировать на быстрые изменения измеряемой величины или вредных динамических воздействий (помех).

Уравнение элемента при наличии помех имеет вид

$$y = W(p)x + W_1(p)\eta, \quad (23)$$

где  $W(p), W_1(p)$  — передаточные функции элемента в отношении измеряемой величины  $x$  и помехи  $\eta$  соответственно.

Для определения *собственных динамических погрешностей* реальный элемент сравнивают с идеальным. Идеальным считается такой элемент,

который не вносит искажений при воспроизведении величины  $x$  и не реагирует на вредные возмущения (помехи).

Передаточная функция идеального элемента

$$W(p) = \text{const} = A. \quad (24)$$

Постоянная величина  $A$  равна значению  $W(p)$  при  $p \rightarrow 0$ , т. е.  $W(p) = W(0)$ . Поскольку идеальный элемент не реагирует на помехи, то  $W_i(p) = 0$ .

В результате сравнения характеристик идеального и реального элементов (см. уравнения (24) и (23)) получаем динамические погрешности по измеряемой величине  $x$ :

$$\Delta W(p) = W(0) - W(p)$$

и по помехе  $\eta$ :

$$\Delta W_i(p) = -W_i(p). \quad (25)$$

При разложении  $W(p)$  и  $W_i(p)$  в ряд Тейлора для погрешности  $\Delta W(p)$  получим

$$\Delta W(p) = -\frac{dW}{dt}(0) \frac{p}{1!} - \frac{d^2W}{dt^2}(0) \frac{p^2}{2!} - \frac{d^3W}{dt^3}(0) \frac{p^3}{3!} \dots \quad (26)$$

Для погрешности  $\Delta W_i(p)$  получится аналогичное выражение.

Для уменьшения динамических погрешностей применяют различные методы. Наиболее распространены методы изменения параметров, дифференцирования и обратной связи.

Метод изменения параметров можно проиллюстрировать на примере колебательного элемента с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + 2\beta\omega_0 p + \omega_0^2}.$$

Если увеличить  $\omega_0^2$  по сравнению с  $2\beta\omega_0 p$  и  $p^2$ , то  $W(p) \approx 1/\omega_0^2$ , т. е. для уменьшения динамических погрешностей следует увеличить частоту  $\omega_0$  собственных колебаний по сравнению с частотой  $\omega$  измеряемой величины. Практически принимают  $\omega_0 \geq (8-10)\omega$ , поскольку чувствительность  $S$  существенно зависит от  $\omega_0$ , т. е.  $S = 1/\omega_0^2$ . Наряду с вышеизложенным для уменьшения динамических погрешностей в колебательном элементе применяют демпферы, причем выбирают величину относительного затухания в пределах 0,7—0,8. При этом динамические погрешности по амплитуде не превышают 1%.

При использовании метода дифференцирования последовательно с элементом, имеющим передаточную функцию  $W(p)$ , включают дифференцирующий элемент с передаточной функцией  $K(p) = c/W(p)$ , где  $c$  — постоянная величина. Тогда на выходе получим

$$\frac{dy}{dt} = K(p)W(p)x = \frac{c}{W(p)} W(p)x = cx,$$

т. е. динамическая погрешность скомпенсирована.

Метод обратной связи при соответствующем выборе параметров дает возможность также скомпенсировать динамические погрешности элемента.

Для определения *вынужденных динамических погрешностей* предполагают, что система, описываемая уравнением (23), линейна и для нее справедлив метод суперпозиции. Поэтому вместо уравнения (23) используют уравнение  $y_1 = W_1(p)\eta$ . Помехи  $\eta(t)$  — случайные функции времени и для оценки реакции элементов на эти помехи пользуются понятием корреляционных функций процесса и реакции элемента.

Для уменьшения реакции элемента на вредные возмущения применяют амортизаторы.

### **13.6. Преобразование непрерывных характеристик элементов в релейные**

Преобразование непрерывных характеристик элементов в релейные осуществляется в большинстве случаев с помощью положительной обратной связи. На рис. 12, а показана схема включения элемента 1,

звена обратной связи 2 и нагрузки  $Z_H$  в цепь питания  $U$ .

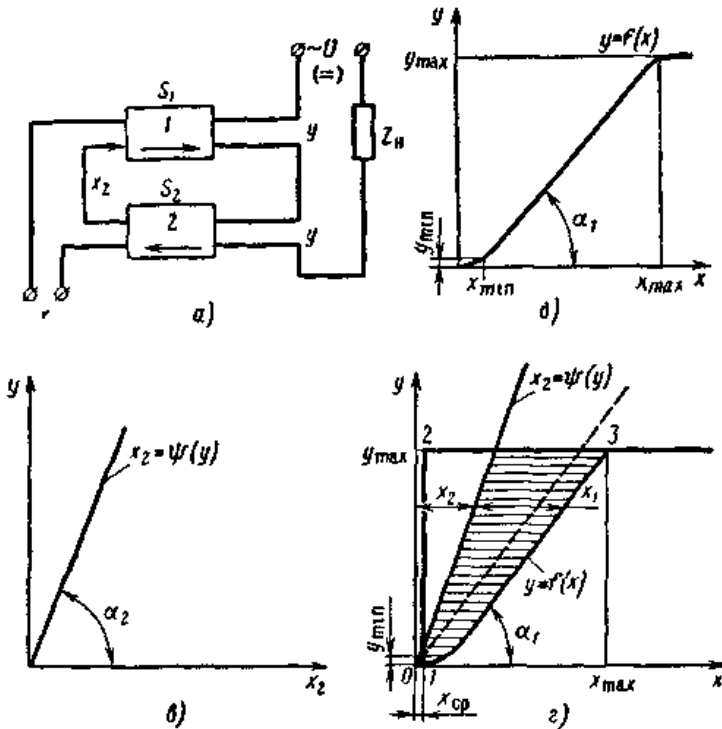


Рис. 12. К вопросу преобразования характеристик:  
 а — схема соединения; б — статическая характеристика элемента 1;  
 в — статическая характеристика звена обратной связи 2; г — исходные  
 и преобразованная характеристики

Входная величина  $x$  подается на элемент 1, выходной сигнал  $y$  которого воздействует на звено обратной связи 2. Полученный на выходе элемента 2 сигнал  $x_2$  поступает на вход элемента 1, складываясь алгебраически с входной величиной  $x$ .

Элемент 1 имеет линейную характеристику вида

$$y = S_1 x = \operatorname{tg} \alpha_1 x$$

на участке от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  (рис. 12, б), а звено обратной связи — линейную характеристику

$$x_2 = S_2 y,$$

где  $S_2 = \frac{x_2}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2}$  (рис. 12, в).

Характеристики элемента  $y=f(x)$  и звена обратной связи  $x_2=\psi(y)$  приведены на рис. 12, з, откуда видно, что для получения заданного выходного сигнала  $y$  необходимо входное воздействие  $x_1$ , определяемое разностью  $x - x_2$ . Тогда

$$y = S_1 x = S_1 (x_1 + x_2) = S_1 (x_1 + S_2 y),$$

откуда

$$y = \frac{S_1}{1 - S_1 S_2} x_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}} x_1.$$

Кривая, соответствующая этим значениям, может лежать в пределах заштрихованного участка (рис. 12, з). Штриховая прямая  $x_2=\psi(y)$ , нанесенная на рис. 12, з, является критической (поскольку ей соответствует  $\alpha_1 = \alpha_2$ , т. е.  $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_1$ ), при которой

$$y = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\operatorname{tg}\alpha_2}} x_1 = \infty$$

Данное выражение означает, что при достижении входной величиной предельного минимального значения (так называемой величины срабатывания)  $x_{\min} = x_{\text{ср}}$ , в ограниченном диапазоне выходных значений сигнала от  $y_{\min}$  до  $y_{\max}$  осуществляется скачкообразный переход от одного предельного значения к другому, т. е. происходит «срабатывание» реле (см. прямую 1—2 на рис. 12, з). Дальнейшее увеличение  $x > x_{\text{ср}}$  не вызывает изменения  $y_{\max}$ . Полученная зависимость 0—1—2—3 является прямым ходом статической характеристики реле. Статическая характеристика реле неоднозначна, поскольку для случая убывания  $x$  скачкообразный переход от  $y_{\max}$  к  $y_{\min}$  («отпускание» реле или обратный ход) осуществляется при другом значении входной

величины отпускания  $x_{\text{отп}} < x_{\text{ср}}$ . Отношение этих величин  $K = \frac{x_{\text{отп}}}{x_{\text{ср}}} < 1$

называется коэффициентом возврата, определяющим ширину петли релейной характеристики (см. рис. 4, д).

Поскольку реле имеет нелинейную статическую характеристику, то вид его переходного процесса определяется не только параметрами самого реле, но также формой и интенсивностью входного воздействия. В первом приближении динамические свойства реле можно оценить по виду статической характеристики, времени

срабатывания  $t_{\text{ср}}$  и времени отпущения  $t_{\text{отп}}$ , т. е. по интервалам времени от момента подачи на вход величины, равной или большей  $x_{\text{ср}}$  (равной или меньшей  $x_{\text{отп}}$ ), до момента установления выходной величины  $y_{\text{max}}$  ( $y_{\text{min}}$ ). Обычно  $t_{\text{ср}} \neq t_{\text{отп}}$ , но для оценки свойств реле их часто принимают равными и считают их временем запаздывания  $t_{\text{зап}}$ . Время запаздывания относят к какому-либо определенному внешнему воздействию, полагая его постоянным. Поэтому динамическая характеристика релейного элемента имеет вид

$$y = x(t - t_{\text{зап}}). \quad (27)$$

### **13.7. Элементы дискретного действия**

Обслуживание сложных объектов, повышение точности исследований, а также получение информации в процессе измерений не может быть осуществлено без использования специальных цифровых и комбинированных вычислительных машин. Входные данные с различных частей объекта о параметрах и режимах работы, об окружающей среде и т. д. обычно являются непрерывными и поэтому не могут быть поданы непосредственно на цифровую вычислительную машину, а должны быть преобразованы в дискретные. Для этого проводится квантование непрерывного сигнала по времени, по уровню (амплитуде) или одновременно по времени и по уровню.

Квантование по времени означает замену непрерывного сигнала рядом дискретных значений, получаемых при преобразовании сигнала, через определенные интервалы времени  $T_{\text{и}}$ . Величина интервала  $T_{\text{и}}$  находится в соответствии со статической и динамической характеристиками элемента и скоростью изменения преобразуемого сигнала. Неправильный выбор  $T_{\text{и}}$  может привести к значительным погрешностям.

На рис. 13 приведен пример квантования по времени синусоидальной кривой  $I$ .



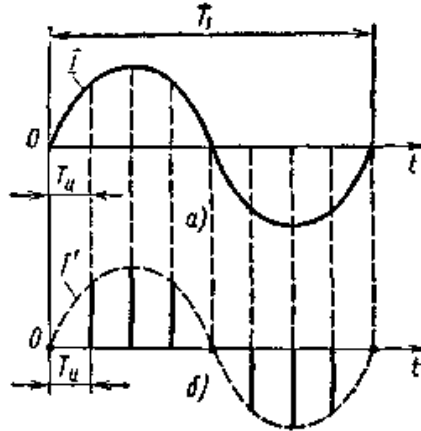


Рис. 13. Квантование сигнала по времени:  
 а — исходная кривая  $I$ ; б — преобразованная кривая  $I'$

Выбираем интервал квантования  $T_n = T_1/8$ , где  $T_1$  — период колебаний, и заменяем исходную кривую дискретными значениями. В результате квантования с использованием линейной интерполяции получаем ряд дискретных значений с огибающей  $I'$ , которая достаточно хорошо отображает исходную синусоиду  $I$ .

Возможность замены непрерывной функции по времени определенным числом дискретных значений доказана В. Н. Котельниковым, показавшим, что функция  $A(t)$ , имеющая спектр частот от 0 до  $f_c$ , может быть представлена рядом

$$A(t) = \sum D_k \frac{\sin \omega \left( t - \frac{k}{2f_c} \right)}{t - \frac{k}{2f_c}},$$

где  $k$  — целое число;

$\omega_c = 2\pi f_c$  — максимальная круговая частота сигнала;

$D_k$  — постоянная, зависящая от  $A(t)$ ;

$t$  — время.

Это значит, что непрерывная функция может быть заменена дискретной с любой степенью точности, если интервал квантования

$$T_n = \frac{1}{2f_c}$$

Квантование по уровню позволяет заменить точную непрерывную кривую приближенной ступенчатой. Дискретный сигнал получается в том случае, если функция проходит через один из уровней квантования, причем значение функции округляется до ближайшего уровня.

В зависимости от формы непрерывного сигнала можно применять квантование с равномерными отсчетами, для которых два ближайших дискретных значения различаются на величину разрешающей способности  $\Delta A$  (рис. 14, а). Наряду с этим применяют квантование с неравномерными дискретными отсчетами, интервалы времени которых зависят от скорости изменения сигнала.

Непрерывная входная величина может быть преобразована в последовательность импульсов как одинаковых, так и различных по амплитуде, частоте и фазе. Повышение точности преобразования связано с увеличением числа импульсов, а следовательно, с увеличением времени преобразования. Для исключения этого недостатка текущие значения параметров в дискретных измерительных системах выражаются в виде кодов чисел, т. е. в виде определенных последовательностей импульсов.

Существуют различные системы счисления, например десятичная, двоичная, двоично-кодированная и др. Наибольшее распространение имеет двоичная система, с помощью которой любое число можно записать при помощи двух цифр 0 и 1, помещенных в соответствующих разрядах. Такое распространение объясняется тем, что две цифры двоичной системы 1 и 0 могут быть реализованы с помощью различных элементов, которые характеризуются двумя устойчивыми состояниями («включено» и «выключено»). К числу таких элементов относятся реле (электромагнитные, электронные, полупроводниковые, на магнитных усилителях, пневматические, гидравлические), магнитные элементы с прямоугольной петлей гистерезиса и др..

Элементы дискретного действия бывают двух типов: аналог—цифра (код), служащий для преобразования непрерывного сигнала в цифровой, а также цифра (код)—аналог для обратного преобразования. Наибольшее применение имеют элементы аналог—цифра (код).

*Аналого-цифровые* элементы выполняют квантование входной величины по амплитуде (уровню), времени или по уровню и по времени одновременно (рис. 14, а).

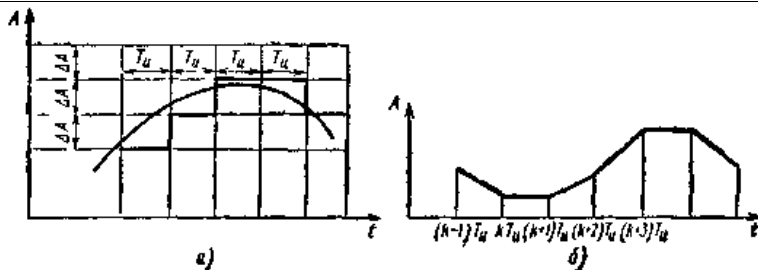


Рис. 14. Преобразование сигналов:

а — квантование сигнала по времени и уровню; б — переход от квантованной величины к непрерывной

Входными величинами являются угловое перемещение, интервалы времени, электрическое напряжение, ток или частота. Если измеряемая величина отличается от перечисленных, то следует использовать дополнительный элемент, преобразующий эту величину в одну из представленных выше.

Аналого-цифровые элементы бывают следующих типов: механические (в газосчетчиках, водомерах), электромеханические (в электрических счетчиках), фотоэлектрические (при контроле обработки размеров изделий), электронные и комбинированные. При этом входная и выходная величины могут быть как однотипные, так и разнородные (например, преобразование перемещения в импульсы электрического тока).

В зависимости от принятого метода преобразования цифровой выходной сигнал получается в виде последовательности одинаковых импульсов, соответствующих числу квантов входной величины (число-импульсный код); последовательности разных по площади (по «весу») импульсов, соответствующих разным разрядам получаемого числа (единицам, десяткам и т. п.), а также комбинации (коду) одинаковых или разных импульсов, соответствующих определенному числу (кодоимпульсный код).

«Цена» импульса

$$a = \frac{A}{N} \quad (29)$$

где  $A$  — диапазон изменения квантуемой величины;  $N$  — число импульсов, соответствующее  $A$  (для число-импульсного кода), или

наибольшее значение преобразуемого числа (для кодоимпульсного кода).

Аналого-цифровые элементы имеют преимущества перед элементами непрерывного действия, так как они позволяют получать и фиксировать значения в удобной цифровой форме, применять для обработки электронные цифровые вычислительные машины, снижать требования к каналу связи, повышать устойчивость системы к помехам и изменению внешних условий, хранить долгое время большой объем информации и использовать цифровые вычислительные машины для контроля и управления. Основное применение элементы аналог—код находят в приборах с цифровым отсчетом в виде счетчиков, цифровых вольтметров и др., в системах обтекающего контроля для согласования аналоговых элементов с цифровыми регистрирующими системами, в телеметрических системах, в системах автоматической обработки результатов измерений (для согласования аналоговых элементов с цифровой вычислительной машиной) и в системах программного управления.

Для замены кодов аналоговой величиной применяют *цифроаналоговые* элементы, с помощью которых дискретные по времени сигналы преобразуются в непрерывные (рис. 14, б). На вход цифроаналоговых элементов подаются различные виды кодов (обычно в виде ряда электрических импульсов), которые суммируются путем подсчета единичных квантов или с учетом «веса» разрядов кода. На выходе получаются непрерывные функции (интервалы времени, напряжение или ток, частота, угловое или линейное перемещение).

Цифроаналоговые элементы имеют меньшее распространение, чем аналого-цифровые. С помощью цифроаналоговых элементов сигнал с выхода вычислительной машины или канала связи преобразуется и поступает в регистрирующие системы индикации. Наряду с этим данные элементы применяются также в телеметрических системах измерения, в цифровых системах контроля и управления как составная часть элемента преобразования напряжения в код.

Дискретные элементы характеризуются *частотой циклов преобразования, погрешностями преобразования и временем преобразования*, затрачиваемым на один цикл. Частота циклов преобразования определяется согласно выражению

$$f_c = \frac{1}{T_n}$$

где  $T_n$  — интервал квантования.

Погрешности дискретных элементов определяются погрешностями входящих в их состав стабилизированных источников питания, генераторов импульсов, генераторов пилообразного напряжения,

реостатов и т. д., а также погрешностями квантования по времени и по уровню. Погрешность квантования по времени связана с заменой плавной кривой кусочно-линейной функцией, а погрешность квантования по уровню обусловлена округлением текущего значения аналоговой величины до значения кванта. Величина кванта определяет предел точности преобразования

$$\Delta A \leq \frac{a}{2} = \frac{A}{2N}, \quad (30)$$

где  $a$ —цена импульса [см. уравнение (29)] для случая, когда значение измеряемой величины находится между двумя импульсами. Для уменьшения погрешности  $\Delta A$  следует увеличить число импульсов  $N$ .

Другой вид погрешности, связанной с исчезновением или появлением добавочных импульсов, обуславливается влиянием помех.

### 13.8. Надежность, микроминиатюризация, унификация и стандартизация элементов

#### Надежность элементов

Одним из важнейших параметров структурных элементов является надежность их работы. Надежными являются элементы и детали, работающие без отказа в заданных режимах и условиях в течение требуемого времени при сохранении основных характеристик. Отказ элемента может быть как полным (когда функционирование прекращается), так и неполным (когда происходит временное невыполнение функций или изменение точности работы).

Вероятность  $P$  безотказной работы элемента в течение интервала времени  $t$  определяется выражением

$$P = e^{-\int \lambda(t) dt}$$

где  $\lambda$  — интенсивность (частота) отказов,  $1/ч$ . Зависимость  $\lambda(t)$ \* показана на рис.15. (Зависимость  $\lambda(t)$  зависит также от температуры среды, потребляемой мощности и других факторов.)

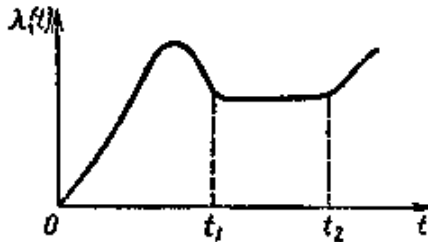


Рис. 15. Изменение интенсивности отказов во времени

Как видно из рис. 15, интенсивность отказов в начальной части кривой нарастает, что объясняется в основном дефектами сборки и монтажа. Обычно этот период времени соответствует доводке элемента. Затем в течение, времени  $t_2 - t_1$  частота отказов  $\lambda(t) \approx \text{const}$ , и далее снова наблюдается нарастание кривой. Это связано с окончанием срока службы элемента, а следовательно, и его деталей. Время работы элемента следует выбирать меньшим, чем  $t_2 - t_1$ , для которого

$$P = e^{-\lambda t}, \tag{31}$$

эта формула справедлива для большинства элементов.

Разложив выражение (31) в ряд, получим

$$P = 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} - \dots$$

Для малых значений  $\lambda t$  можно ограничиться двумя членами ряда, т. е.  $P = 1 - \lambda t$ .

Различают структурную и аппаратную надежности. Вначале рассмотрим *структурную* надежность. Надежность элемента, состоящего из последовательно соединенных звеньев (деталей) 1, 2, 3, . . . ,  $n$ , равна произведению надежностей звеньев (деталей) (эта формула получается в общем случае, если принять, что отказ любого звена (детали) приводит к отказу элемента):

$$P_{\Sigma} = P_1 P_2 P_3 \dots P_n = \prod_{i=1}^n P_i$$

При параллельном включении звеньев удобнее пользоваться понятием ненадежности. *Ненадежность*  $q$  элемента определяется как вероятность появления отказов в заданных режимах в течение некоторого интервала времени. Поскольку  $P$  и  $q$  несовместимы, то  $P = 1 - q$  или  $q \approx \lambda t$ .

Ненадежность каждого из  $m$  параллельно включенных звеньев (деталей) будет определяться выражениями

$$q_1 = 1 - P_1;$$

.....

$$q_j = 1 - P_j;$$

.....

$$q_m = 1 - P_m.$$

Отказ для всего элемента

$$q_{\Sigma} = q_1 q_2 q_3 \dots q_n = \prod_{j=1}^m q_j = \prod_{j=1}^m (1 - P_j) .$$

Для повышения структурной надежности элементов применяют параллельное соединение отдельных звеньев (резервирование). Резервирование может быть постоянным или временным. *Аппаратурная надежность* элемента определяется согласно выражению

$$P = P_a P_b,$$

где  $P_a$  — надежность, определяемая отсутствием полных отказов;  
 $P_b$  — надежность, определяемая отсутствием частичных (неполных) отказов.

В качестве примера рассмотрим надежность некоторых элементов электрических схем. Для различных типов проволочных и непроволочных резисторов надежность  $P_a$  при непрерывном режиме работы выражается зависимостью  $P_a = e^{-\lambda t}$ . Надежность в отношении неполных отказов определяется выражением

$$P_b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta} \int_{-\infty}^{R_{кр}} e^{-\frac{(R-\bar{R})^2}{2\Delta^2}} dR$$

где  $\bar{R}$  — среднее значение сопротивления данного номинала, зависящее от рассеиваемой мощности и температуры окружающей среды;

$\Delta$  — среднее квадратичное отклонение величины сопротивления;

$R_{кр}$  — критическое значение сопротивления в данной схеме, при котором происходит отказ в работе.

Для электромеханических элементов, например реле, надежность определяется надежностью работы контактов  $P_k$ , механической части  $P_M$  и обмотки  $P_{обм}$ :

$$P = P_k P_M P_{обм}$$

Здесь так же, как и раньше, следует рассматривать зависимость  $P = P_a P_b$ . Надежность работы контактов, механической части и обмоток к полным и частичным отказам определяется соответствующими зависимостями. Величина надежности  $P$  изменяется в пределах от нуля (элемент неработоспособен) до единицы (элемент абсолютно надежен). Работоспособность элемента, помимо определения надежности, удобно определять средним временем работы между двумя отказами  $t_{cp}$  — обратной величиной интенсивности отказов  $X$ . Для одного элемента  $t_{cp} = MX$ . Если элемент состоит из нескольких звеньев (деталей), то средняя интенсивность (частота) отказов  $\lambda$  зависит не только от числа звеньев (деталей), но и от величины  $\lambda_i$  каждого из них:

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i n_i = \sum_{i=1}^m \lambda_{i_0} K_i n_i,$$

где  $n_i$  — число однотипных звеньев (деталей) в  $i$ -й группе;

$m$  — число однотипных групп;

$$K_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \text{ — коэффициент, зависящий от условий работы,}$$

$\lambda_{i_0}$  — частота отказов при исходных условиях.

Рассмотрим последовательность расчета надежности. Вначале определяют число  $m$  однотипных групп и число  $n$  однотипных звеньев (деталей) в группе. Затем, пользуясь экспериментальными данными, устанавливают величины  $\lambda$ . Исходя из условий работы, определяют коэффициенты нагрузок по мощности  $K_W = W_{\text{раб}}/W_{\text{ном}}$  или по напряжениям  $K_U = U_{\text{раб}}/U_{\text{ном}}$ . В зависимости от этих коэффициентов вычисляют коэффициент  $K_i = \lambda/\lambda_{i_0} \approx K_W \approx K_U$ .

Затем определяют интенсивность отказов всего элемента

$$\Lambda = \sum_{i=1}^m K_i \lambda_{i_0} n_i \text{ и среднее время работы между отказами } t_{\text{ср}} = \frac{1}{\Lambda}.$$

Вероятность безотказной работы в течение времени  $t$  будет  $P = e^{-\Lambda t}$ .

На основании полученных данных определяют время  $t$  безотказной работы для заданной ненадежности:

$$t = t_{\text{ср}} q = t_{\text{ср}} (1 - P).$$

Иногда бывает необходимо рассчитать надежность элемента, который уже был в эксплуатации в течение некоторого интервала времени  $0-t_1$ . Вероятность безотказной работы этого элемента в течение последующего интервала времени  $t_2-t_1$  определяется выражением

$$P\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = \frac{P(t_2)}{P(t_1)} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) = e^{-(t_2-t_1)\lambda(t)}, \quad (32)$$

где  $P(t_1)$  — вероятность исправной работы элемента в течение времени  $0-t_1$ ;

$P(t_2)$  — вероятность исправной работы элемента в течение времени  $0-t_2$ .

В том случае, когда известен закон распределения вероятностей отказов по времени, надежность может быть определена аналитически по формуле (32) или графически по кривой  $\lambda(t)$ . При этом вычисляют площадь  $S_{\text{в}}$ , ограниченную отрезком  $t_2-t_1$ , ординатами точек  $t_1$  и  $t_2$  и частью кривой  $\lambda(t)$  в пределах  $t_1-t_2$ .

Тогда

$$P\left(\frac{t_2}{t_1}\right) = e^{-S_{\text{в}}}$$



Для повышения надежности работы элементов необходимо оценить влияние внешних факторов на вероятность отказов. Внешние факторы можно подразделить на объективные и субъективные.

К объективным факторам относятся: параметры окружающей среды (температура, влажность, наличие примесей в воздухе), биологические воздействия (плесень, повреждения насекомыми и грызунами) и особые условия работы (удары, вибрация, агрессивная среда, температурный режим, радиация). Тяжелые климатические условия, биологические воздействия и особые условия увеличивают вероятность отказов элементов. Поэтому проектирование элементов следует производить с учетом воздействия рассмотренных объективных внешних факторов. Для повышения надежности при проектировании и конструировании элементов следует применять рациональные упрощенные схемы с малым числом узлов и деталей, причем необходимо выбирать более надежные из них, используя методы блочного и модульного построения. Блочный и модульный методы построения элемента уменьшают время, затрачиваемое на проектирование, изготовление и доводку, а также ремонт и замену отказавшего модуля. Повышение надежности может быть достигнуто также применением корректирующих контуров, бесконтактных и дискретных элементов, резервирования звеньев и деталей, введением отрицательных обратных связей. Заметим, что резервирование элементов и деталей существенно увеличивает стоимость, массу и габаритные размеры.

Существенное повышение надежности элементов и деталей при проектировании и конструировании может быть получено также путем обеспечения облегченных электрического, теплового и механического режимов работы. Для этого детали следует выбирать с запасом по мощности и напряжению (на 10—15% от номинала) с учетом переходных процессов, улучшать условия теплоотдачи для транзисторов (предусматривать принудительное охлаждение и т. д.), использовать минимальное напряжение питания, предусматривать амортизацию для защиты от вибраций и ударов. Все это может дать значительный эффект.

Технологические меры повышения надежности сводятся к применению совершенной технологии, тренировке элементов и деталей и тщательному отбору их с применением автоматизации.

В процессе изготовления необходимо применять унифицированные детали и узлы.

Субъективные внешние факторы особенно ярко проявляются на этапе эксплуатации. Они могут играть как положительную, так и отрицательную роль. Увеличению надежности способствуют правильная эксплуатация, высокая квалификация обслуживающего

персонала, качественно и своевременно проведенный ремонт и профилактика, обобщение опыта эксплуатации, связь с конструкторами и технологами, повышение квалификации операторов.

В заключение необходимо отметить, что поскольку в теории надежности отказ элемента рассматривается как помеха, искажающая полезный сигнал, то повышение надежности может быть достигнуто путем повышения точности, т. е. класса, элемента.

### **Микроминиатюризация элементов**

Значительное внимание уделяется изысканию возможностей существенного уменьшения массы и габаритных размеров элементов и деталей при условии сохранения точности.

Различные направления создания малогабаритного оборудования объединены под термином «микроминиатюризация». Целями микроминиатюризации являются не только уменьшение габаритных размеров и массы деталей и элементов, но и значительное повышение надежности и экономичности элементов, уменьшение потребляемой мощности, упрощение конструкции, сокращение объема монтажа и простота эксплуатации.

Перспективными направлениями в конструировании деталей и элементов являются методы микроминиатюризации, основанные на применении микромодулей (конструктивно стандартизированных радиоэлектронных узлов), пленочных микросхем и устройств молекулярной электроники (твердых или интегральных схем). Имеются и широко используются стандартизированные модули узлов радиотехнических устройств (генераторов, модуляторов, усилителей и др.). Связь между узлами устройств осуществляется с помощью печатного монтажа. Интегральные схемы позволяют создавать микроминиатюрные элементы, приборы и устройства.

В миниатюризации электромеханической аппаратуры намечаются в основном три направления: 1) геометрическая миниатюризация (физическое моделирование) существующих конструкций элементов; 2) изыскание и использование новых материалов с улучшенными характеристиками и новыми физическими свойствами и 3) использование новых более совершенных физических принципов измерений и построения элементов.

Физическое моделирование различных элементов основывается на критериях подобия. При этом необходимо проанализировать предельные возможности элемента при максимальном уплотнении монтажа, обеспечении той же добротности, быстродействия и точности

работы элемента. Уменьшение габаритных размеров может быть ограничено прочностными и тепловыми условиями.

### **Стандартизация и унификация элементов**

Для создания систем требуется большое число различных структурных элементов. Стоимость, а также удобство проектирования, изготовления, эксплуатации и ремонта таких систем в значительной мере определяются однотипностью и взаимозаменяемостью отдельных элементов и деталей. Это связано с тем, что типовые элементы и детали обычно стандартизированы, изготавливаются с учетом современных требований технологии, предварительно испытываются в эксплуатационных условиях.

Стандартизация (процесс установления и применения правил) базируется на достижениях науки и техники, практическом опыте и определяет направление не только настоящего, но и будущего прогресса.

Основные цели стандартизации следующие: а) ускорение технического прогресса, повышение эффективности производства и производительности труда; б) улучшение качества продукции; в) обеспечение необходимых требований к продукции; г) установление рациональной номенклатуры выпускаемой продукции; д) развитие специализации в областях проектирования и производства продукции; е) охрана труда и техника безопасности; ж) рациональное использование производственных фондов, экономия материальных ресурсов; з) развитие международного экономического, технического и культурного сотрудничества.

Методами стандартизации являются упрощение (симплификация), унификация, типизация и агрегатирование. Особенно большие успехи в стандартизации достигнуты в областях электроники и пневмоавтоматики. В электронике приборы и системы собираются из стандартных элементов, деталей (резисторов, конденсаторов, интегральных схем, транзисторов и т. д.), узлов модульного и микромодульного изготовления. Широко используются блочный принцип построения и печатный монтаж.

В пневмоавтоматике применяют элементный принцип построения устройств, для чего была разработана Универсальная система элементов промышленной пневмоавтоматики (УСЭППА). УСЭППА имеет следующие особенности: а) элементы унифицированы (могут многократно применяться как в одной схеме, так и в схемах различных приборов); б) набор функциональных элементов обеспечивает построение любого устройства; в) элементы просты по конструкции и

технологии изготовления; г) элементы имеют определенные технические характеристики; д) в элементах предельно унифицированы отдельные детали; е) способ монтажа элементов и схем отличается от ранее принятого.

Стандартизированы различные механические, электромеханические и электрические элементы приборных устройств (мембраны, сильфоны, манометрические трубки, термобиметаллы, термопары, терморезисторы, термисторы, фотоэлементы, фоторезисторы, механотроны, пьезокерамические элементы, реле, логометры, гальванометры, усилители, контакты, опоры, демпферы, успокоители и др.).

Увеличение объема производства автоматических устройств привело к расширению номенклатуры выпускаемых элементов. В разных отраслях промышленности начали разрабатывать и изготавливать элементы для одинаковых (или очень близких) целей, часто без использования ранее созданных стандартных узлов и деталей.

Для того чтобы упорядочить номенклатуру приборов, элементов приборных устройств и средств автоматики, а также выходных сигналов элементов, создана единая Государственная система приборов (ГСП).

При создании ГСП распределение элементов приборов и средств автоматики производилось в соответствии с принципом их действия. ГСП дает классификацию по определенным группам всех видов сигналов, которые можно получить при измерении большинства механических величин, физических и химических параметров.

В табл. 3 показан принцип построения ГСП, в соответствии с которым измеряемые величины преобразуются в естественные и унифицированные выходные сигналы (пневматический П, электрические аналоговый ЭА и дискретный ЭД). Это существенно упрощает всю систему информации. Дальнейшее совершенствование элементов приборных устройств и средств автоматики не должно оказывать влияния на принципы построения ГСП.

Разработана унифицированная система взаимозаменяемых пневматических, электрических аналоговых и электрических частотных датчиков теплоэнергетических параметров для ГСП, узлы и детали которых построены по блочному принципу с использованием пневмо- и электросиловых преобразователей.

Созданы датчики давления с силовой компенсацией ГСП, а также манометры, вакуумметры, мановакуум-метры, тягомеры и тягонапоромеры. Выпускаются манометры дифференциальные мембранные с дифференциально-трансформаторным преобразователем типа ДМИ ГСП, датчик силоизмерительный тензорезисторный бесклеевой ГСП ДСТБ-С-016-16.

Таблица 3

Схема преобразования основных измеряемых параметров в естественные выходные величины и унифицированные выходные сигналы

Измеряемый параметр	Унифицированный выходной сигнал при естественной выходной величине										
	Переменные линейные	Угол поворота	Усилие	Момент	Число оборотов	Частота	Интервал времени	Э. д. с. постоянного тока	Сопротивление	Напряжение переменного тока	Число импульсов
Давление	—	П, ЭА, ЭД	—	—	—	—	—	—	—	ЭА	—
Вакуум	—	—	—	—	—	—	—	П, ЭА	—	—	—
Перепад давлений	П, ЭА	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Расход	—	П, ЭА, ЭД	П, ЭА, ЭД	П, ЭА	П, ЭА, ЭД	ЭА, ЭД	ЭА, ЭД	—	—	ЭА	—
Уровень	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Температура	—	—	—	—	—	—	—	П, ЭА	П, ЭА	—	—
Влажность	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Плотность	П, ЭА	П, ЭА, ЭД	П, ЭА, ЭД	—	—	—	—	—	—	—	—

Измеряемый параметр	Унифицированный выходной сигнал при естественной выходной величине										
	Переменные линейные	Угол поворота	Усилие	Момент	Число оборотов	Частота	Интервал времени	Э. д. с. постоянного тока	Сопротивление	Напряжение переменного тока	Число импульсов
Вязкость	—	П, ЭА	П, ЭА, ЭД	П, ЭА	—	—	—	—	—	—	—
Концентрация водородных ионов	—	—	—	—	—	—	—	П, ЭА	—	—	—
Перемещение линейное	П, ЭА	—	П, ЭА, ЭД	—	—	—	—	—	П, АЭ	—	ЭД
Перемещение угловое	—	П, ЭА, ЭД	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Усилие	П, ЭА	—	—	—	—	ЭА, ЭД	—	—	—	ЭА	—
Число оборотов	—	—	—	П, ЭА	П, ЭА, ЭД	—	—	П, ЭА	—	—	ЭД

Одной из первоочередных задач, решение которой будет способствовать дальнейшему научно-техническому прогрессу, является широкое исследование научных основ унификации и разработка единых методических рекомендаций для машиностроения в целом. Комплекс мероприятий предусматривает разработку научных и методических основ унификации объектов производства, унификацию методов конструирования, изготовления и эксплуатации.

### **13.9. Метод выбора структурных элементов систем**

В процессе проектирования системы, состоящей из нескольких различных по своему функциональному назначению структурных элементов, возникает задача оптимального выбора этих элементов из числа однотипных устройств. Обычно такая задача решается самостоятельно при разработке каждой конкретной системы.

Ниже в общем виде решается эта задача и приводится алгоритм выбора оптимальной конфигурации структуры системы на основании обобщенного критерия эффективности.

Конфигурация структуры системы определяется набором структурных элементов из множества  $A$ . Количества разнотипных по своему функциональному назначению групп структурных элементов определяются  $H$  подмножествами однотипных элементов множества  $A$ :  
 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_L, \dots, A_H\}$ .

Каждое подмножество  $AL$  состоит из  $nL$  однотипных элементов, из числа которых выбирается  $L$ -й элемент структуры системы:

$$A_1 = \{a_{11} \dots a_{j1} \dots a_{n1}\},$$

$$A_2 = \{a_{12} \dots a_{j2} \dots a_{n2}\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_L = \{a_{1L} \dots a_{jL} \dots a_{nL}\},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_H = \{a_{1H} \dots a_{jH} \dots a_{nH}\}.$$

Каждый вариант конфигурации структуры системы можно представить в виде выражения

$$A(jL) = \{a_{j1}, \dots, a_{jL}, \dots, a_{jH}\}.$$

Всего возможно  $n_1 + n_2 + \dots + n_L + \dots + n_H$  вариантов построения структуры системы.

Каждая группа однотипных элементов  $A(jL)$  характеризуется рядом параметров  $BL$ :

$$B_1 = b_{11} \dots b_{i1} \dots b_{k1},$$

$$B_2 = b_{12} \dots b_{i2} \dots b_{k2},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_L = b_{1L} \dots b_{iL} \dots b_{kL},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$B_H = b_{1H} \dots b_{iH} \dots b_{kH}.$$

Каждому элементу  $a_{iL}$  подмножества  $AL$  соответствует вполне определенная группа параметров  $BL_j$ :

$$BL_j = b_{1Lj} \dots b_{iLj} \dots b_{kLj}.$$

Все параметры  $B_{iLj}$  объединены в множество параметров  $B$ . Множество  $B$  содержит  $n1 \cdot k2 + n2 \cdot k2 + \dots + nL \cdot kL + \dots + nH \cdot kH$  элементов.

Выбор оптимальной конфигурации структуры системы определяется из следующих условий:

$$A_{\text{оп}}(jL) = \max_{\substack{j=1\dots nL, \\ L=1\dots H}} \pi[A(jL)] = \max_{\substack{j=1\dots nL, \\ L=1\dots H}} \prod_{i=1}^r \pi_i[A(jL)]C_i,$$

$$m_i[A(jL)] \geq m_{i\text{доп}} \quad \text{при } i \leq s,$$

$$m_i[A(jL)] \leq m_{i\text{доп}} \quad \text{при } i > s,$$

$$i = 1, 2, \dots, s, \dots, r,$$

где  $m_i[A(jL)]$  — значение  $i$ -го системного параметра, по которому оценивается эффективность структуры системы, полученное для варианта конфигурации структуры системы  $A(jL)$ ;

$m_{i\text{доп}}$  — предельно допустимое значение  $i$ -го системного параметра, заданное в условиях на проектирование структуры системы;

$r$  — количество параметров, по которым производится оценка эффективности структуры системы (параметры  $\{m_1 \dots m_s\}$  относятся к группе повышающих, параметры  $\{m_{s+1} \dots m_r\}$  — к группе понижающих параметров);

$\pi_i[A(jL)]$  — значение частного нормированного показателя эффективности, полученное для  $i$ -го параметра варианта конфигурации структуры системы  $A(jL)$ ;

$C_i$  — весовой коэффициент, характеризующий значимость  $i$ -го параметра в проектируемой структуре системы;

$\pi[A(jL)]$  — значение обобщенного показателя эффективности, полученное для варианта конфигурации структуры системы  $A(jL)$ ;

$A_{\text{оп}}(jL)$  — вариант оптимальной конфигурации структуры системы.

Системные параметры  $m_i[A(jL)]$  определяются как некоторая функция элементов множества  $B$ :

$$m_1[A(jL)] = f_1(b_{iLj}),$$

$$m_2[A(jL)] = f_2(b_{iLj}),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_i[A(jL)] = f_i(b_{iLj}),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$m_r[A(jL)] = f_r(b_{iLj}).$$

Частный нормированный показатель эффективности  $\pi_i[A(jL)]$  качественно характеризует степень выполнения предъявляемых к структуре системы требований по  $i$ -му системному параметру путем нормирования параметра  $m_i[A(jL)]$  в интервале от 0 до 1.

Нормирование производится по формулам

$$\pi_1[A_{\text{он}}(jL)] = \frac{m_i[A(jL)]}{\max_{\substack{j=1\dots nL, \\ L=1\dots H}} m_i[A(jL)]} \quad \text{при } i \leq s,$$

$$\pi_1[A_{\text{он}}(jL)] = \frac{\min_{\substack{j=1\dots nL, \\ L=1\dots H}} m_i[A(jL)]}{m_i[A(jL)]} \quad \text{при } i > s.$$

Весовые коэффициенты  $C_i$  также нормируются от 0 до 1. Нормирование показателей эффективности позволяет автоматизировать процесс выбора оптимального состава структуры системы. На рисунке приведена схема алгоритма выбора оптимальной конфигурации структуры системы.



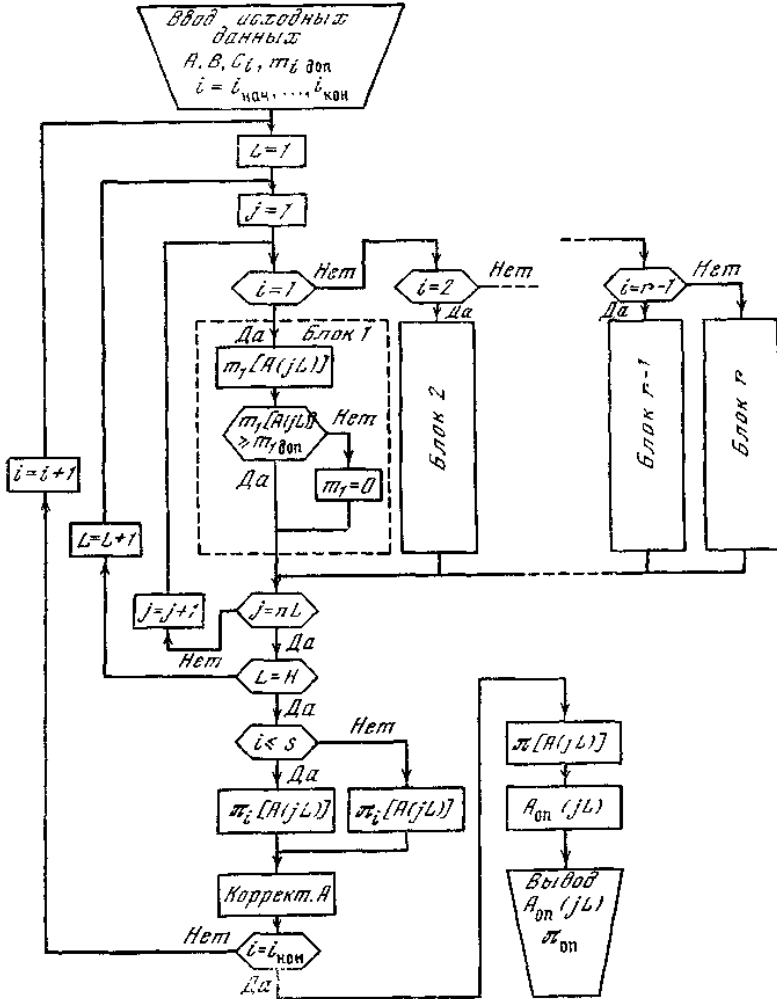


Схема алгоритма выбора оптимальной конфигурации структуры системы

Исходными данными алгоритма являются: группы однотипных элементов  $AL$  ( $L = 1 \dots H$ ) множества  $A$  и однотипные элементы  $a_{iL}$ , входящие в состав каждой группы; параметры  $BLj$  из множества  $B$ , определяющие каждый элемент  $a_{iL}$ ; ряд системных параметров  $m_i$ , по которым производится оценка эффективности структуры системы;

весовые коэффициенты  $C_i$ ; предельно допустимые значения системных параметров  $m_i$  доп.

Схема алгоритма состоит из  $r$  вычислительных блоков, в каждом из которых определяется значение параметра  $m_i$ . Блоки с номерами от 1 до  $s$  предназначены для вычисления повышающих параметров системы, блоки с номерами  $s+1$  до  $r$  — для понижающих. Номера вычислительных блоков, необходимых для решения конкретной задачи, задаются рядом номеров системных параметров:  $i = i_{\text{нач}} \dots i_{\text{кон}}$ . Вычислительные блоки включаются в работу по очереди в соответствии с рядом номеров системных параметров начиная с блока с номером  $i_{\text{нач}}$ .

После вычисления параметра  $m_{i_{\text{нач}}}$  для всех элементов множества  $A$  определяются значения частных нормированных показателей эффективности  $\pi_{i_{\text{нач}}}$  и производится корректировка элементов множества  $A$ . В результате корректировки элементы  $a_{jL}$ , для которых  $\pi_{i_{\text{нач}}} = 0$ , в дальнейшем не рассматриваются. После корректировки исходных данных включается в работу вычислительный блок с номером, следующим за номером  $i_{\text{нач}}$  в ряде номеров системных параметров и вычисляется очередной показатель эффективности.

Процесс выбора оптимального варианта структуры системы заканчивается вычислением обобщенных нормированных показателей системы  $\pi [A (jL)]$ . Наибольший показатель эффективности определяет оптимальный вариант конфигурации структуры системы.

Приведенный алгоритм позволяет ускорить процесс выбора составных структурных элементов различных по составу и назначению структуры системы, базирующихся на использовании известных технических средств. Алгоритм реализуется составлением рабочих программ функционирования вычислительных блоков и картотеки параметров составных элементов структуры системы: различных типов ЭВМ, каналобразующей аппаратуры, аппаратуры передачи данных, оконечных устройств и т. д. Количество вычислительных блоков и объем картотеки параметров элементов определяют возможности применения алгоритма для выбора конфигурации различных по назначению систем.

## **14. Неоднородный координатный базис**

### **14.1. Формирование уравнений структур.**

Ограничения, накладываемые на компонентные уравнения структур при использовании однородных систем координат, заставляют в общем

случае прибегать к неоднородному координатному базису, который образуется некоторой совокупностью независимых сечений и контуров графа. Наиболее простой алгоритм формирования уравнений структур в неоднородной системе координат основан на подстановке в компонентные уравнения векторов продольных  $\xi_X$  и поперечных  $\eta_X$  переменных дуг графа, полученных из топологических уравнений.

Выберем фундаментальное дерево так, чтобы в него вошли все  $e$ -дуги, а все  $j$ -дуги остались и дополнения. С учетом зависимости  $P=[-\pi' \ 1]$  топологические уравнения запишем следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{EX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} -\pi'_{EX} & -\pi'_{XX} & 1 & 0 \\ -\pi'_{EJ} & -\pi'_{XJ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

Так как  $\eta_J = v$  и  $\xi_E = \varepsilon$  выражаются через заданные величины (функции времени), то отсюда находим

$$\eta_{XT} = -\pi_{XX} \eta_{XN} - \pi_{XJ} v; \quad \xi_{XN} = \pi'_{XX} \xi_{XN} + \pi'_{EX} \varepsilon;$$

Эти выражения подставляем в компонентное уравнение, которое в неявной форме имеет вид :

$$\begin{bmatrix} V_{\xi T}, V_{\xi N}, V_{\eta T}, V_{\eta N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \xi_{XN} \\ \eta_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = 0,$$

или

$$\left[ V_{\xi T} \xi_{XT} + V_{\xi N} \xi_{XN} + V_{\eta T} \eta_{XT} + V_{\eta N} \eta_{XN} \right] = 0.$$

Тогда получаем выражение

$$(V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}) \xi_{XT} + (V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}) \eta_{XN} = -V_{\xi N} \pi'_{EX} \varepsilon + V_{\eta T} \pi_{XJ} v,$$

которое и представляет собой математическую модель структуры системы в неоднородном координатном базисе. Оно может быть представлено также в виде:

$$[V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}, V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}] \begin{bmatrix} \xi_{XT} \\ \eta_{XN} \end{bmatrix} = [-V_{\xi N} \pi'_{EX}, V_{\eta T} \pi_{XJ}] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, в сокращенной записи  $WX=QF$  матрицы  $W$  и  $Q$  выражаются следующим образом:

$$W = [V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}, V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}];$$

$$Q = [-V_{\xi N} \pi'_{EX}, V_{\eta T} \pi_{XJ}].$$

Полученное уравнение соответствует  $n=v+\sigma - (q_E + q_J)$  скалярным уравнениям, где  $v$  и  $\sigma$  — соответственно ранг и цикломатическое число графа, а  $q_E$  и  $q_J$  — количества дуг источников продольных и поперечных величин. Поскольку  $v=p-k$  и  $\sigma=q-p+k$ , то  $n = q - (q_E + q_J) + q_X$  — числу дуг графа системы (без дуг источников). Матрица  $W$  — квадратная порядка  $q_X$ , а  $Q$  —прямоугольная размера  $q_X \times (q_E + q_J)$ .

Решив уравнение  $WX = QF$  относительно вектора  $X = (\xi_{XT}, \eta_{XN})$ , можно определить векторы  $\eta_{XN}$  и  $\xi_{XT}$  по приведенным выше формулам. Из топологических уравнений следуют также соотношения:

$$\eta_E = -\pi_{EX} \eta_{XN} - \pi_E \vartheta; \quad \xi_J = \pi'_{XJ} \xi_{XT} + \pi'_{EJ} \varepsilon,$$

которые используются для определения векторов  $\eta_E$  и  $\xi_J$  (если это требуется).

## 14.2. Преобразование компонентной матрицы

Матрицу  $W$  можно рассматривать как результат преобразования компонентной матрицы

$$V = [V_{\xi T}, V_{\xi N}, V_{\eta T}, V_{\eta N}]$$

в соответствии с матрицей  $\pi_{XX}$ , которая служит оператором этого преобразования. Легко понять, что  $i$ -й столбец выражения  $V_{\xi T} + V_{\xi N} \pi'_{XX}$  получается алгебраическим суммированием с  $i$ -м столбцом матрицы  $V_{\xi T}$  тех столбцов матрицы  $V_{\xi N}$ , которые соответствуют ненулевым элементам  $i$ -й строки матрицы  $\pi_{XX}$  со знаками этих элементов. Аналогично,  $i$ -й столбец выражения  $V_{\eta N} - V_{\eta T} \pi_{XX}$  получается путем алгебраического суммирования с  $i$ -м столбцом матрицы  $V_{\eta N}$  тех столбцов матрицы  $V_{\eta T}$ , которые соответствуют ненулевым элементам  $i$ -го столбца матрицы  $\pi_{XX}$  с противоположными знаками этих элементов (в обоих случаях  $i$  принимает значения всех номеров матриц  $V_{\eta T}$  и  $V_{\eta N}$ ).

При реализации алгоритма формирования математической модели на вычислительных машинах сильно разреженную матрицу сечений удобно представлять в сжатой форме списками дуг, инцидентных сечениям. В таких условиях целесообразно оперировать со строками

матрицы  $\pi_{xx}$  и для получения выражения  $V_{nN} - V_{nT}\pi_{xx}$ . Это значит, что  $i$ -й столбец матрицы  $V_{nT}$  должен суммироваться с теми столбцами матрицы  $V_{nN}$ , которые соответствуют ненулевым элементам  $i$ -й строки матрицы  $\pi_{xx}$  с противоположными знаками этих элементов. Процедура преобразования матрицы  $V$  для получения матрицы  $W$  иллюстрируется на рис. 1.

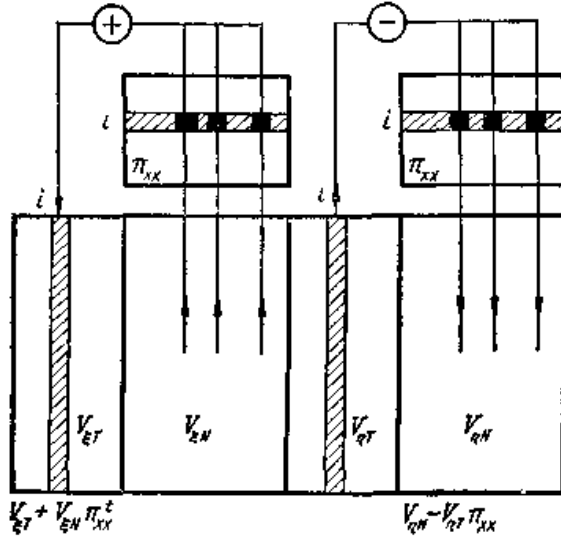


Рис. 1. Процедура формирования матрицы  $W$ .

Подобным способом можно сформировать и матрицу  $Q$ , при этом операторами преобразования матрицы  $V$  служат матрицы  $\pi_{EX}$  и  $\pi_{XL}$ . При машинной реализации изложенного алгоритма для экономии оперативной памяти может оказаться целесообразным осуществлять преобразование матрицы  $V$  построчно, выполняя суммирование ее элементов последовательно в каждой строке и формируя одновременно соответствующие строки матриц  $W$  и  $Q$ .

### 14.3. Гидромеханическая система

Сформируем уравнения для гидромеханической системы (рис. 2, а), которая состоит из поршня, рычага и механических двухполюсников.

Задающими переменными принимаются давление на входе поршня  $p_I(t)$  и перемещения в точках  $e$  и  $f$  (начало отсчета давления связывается с точкой  $a$ , перемещений—с точкой  $g$ ). Так как полюсный

граф рычага содержит дуги различных типов ( $y$  и  $z$ ), то необходимо прибегнуть к неоднородному координатному базису.

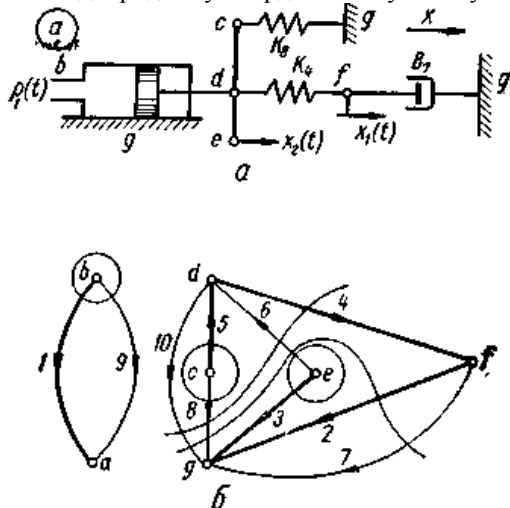


Рис. 2. Гидромеханическая система (а) и ее граф (б).

Граф системы изображен на рис. 2, б, где 1 — дуга источника давления на входе поршня; 2 и 3 — дуги источников перемещения (все они являются  $e$ -дугами, так как давление и перемещение — продольные переменные); 4 и 5 — дуги пружин с параметрами  $K_4$  и  $K_8$ , 5 и 6 — дуги механического рычага; 7 — дуга демфера с параметром  $B_7$ ; 9 и 10 — дуги гидравлического поршня. Выбрав фундаментальный лес (граф несвязный) так, чтобы в него вошли все  $e$ -дуги 1, 2, 3, запишем матрицу сечений:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pi_{BX} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & \pi_{XX} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	1								1		1
2		1				-1	1	1			1
3			1			1					
4				1		-1		1			1
5					1			1			

Так как в системе нет источников поперечных величин, матрицы  $\pi_{EJ}$  и  $\pi_{XJ}$  отсутствуют. Полусные уравнения идеального рычага и гидравлического поршня имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_6 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_6 \\ f_5 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \dot{v}_9 \\ \dot{f}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ -S & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_9 \\ x_{10} \end{bmatrix},$$

где  $n$  — отношение плеч рычага;  $S$  — площадь поперечного сечения поршня.

Используя эти соотношения совместно с уравнениями двухплюсников, записываем компонентную матрицу (не смешивать оператор дифференцирования  $p$  в матрице с обозначением давления):

$$V = \begin{array}{c|cccccccccccccccc} & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & p_9 & x_{10} & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & v_9 & f_{10} & \\ \hline -K_4 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & 4 \\ & 1 & n & & & & & & & & & & & & & & & 5 \\ & & & & & & & & & -n & 1 & & & & & & & 6 \\ & & & -pB_7 & & & & & & & & 1 & & & & & & 7 \\ & & & & & -K_8 & & & & & & & 1 & & & & & 8 \\ & & & & & & & -S & & & & & & & 1 & & & 9 \\ & & & & & & S & & & & & & & & & & 1 & 10 \\ \hline & \underbrace{\phantom{x_4}}_{V_{\xi T}} & \underbrace{\phantom{x_5}}_{V_{\xi N}} & \underbrace{\phantom{x_6}}_{V_{\eta T}} & \underbrace{\phantom{x_7}}_{V_{\eta N}} & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Сформировав матрицы  $W$  и  $Q$  путем преобразования матрицы  $V$  в соответствии с матрицами  $\pi_{x_4}$ ,  $\pi_{E_7}$  и  $\pi_{x_8}$ , приходим к уравнению:

$$\begin{bmatrix} -K_4 & & 1 & & -1 & & -1 \\ -n & 1 & & & & & \\ & & 1 & & n & & \\ & & & 1 & & & \\ -K_8 & -K_8 & & & 1 & & \\ -S & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \\ v_9 \\ f_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & & \\ & n & -n & & & & \\ & & & & & & \\ & & pB_7 & & & & \\ & & & K_8 & & & \\ & & & & S & & \\ -S & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}.$$

Решив это уравнение (например, с помощью алгоритма Гаусса или  $LU$ -разложения), получим выражения для переменных через задающие вершины  $p_1, x_2, x_3$ .

## 14.4. Иерархия дуг

При формировании математической модели структуры по изложенному алгоритму накладывается обязательное условие: все дуги независимых источников продольных величин ( $e$ -дуги) должны быть включены в дерево, а дуги независимых источников поперечных величин ( $j$ -дуги) — в дополнение. Как уже отмечалось ранее, для корректно поставленной задачи это условие всегда выполнимо, так как  $e$ -дуги не могут образовать контуров, а  $j$ -дуги — сечений (в противном случае некоторые из них были бы зависимыми от других в соответствии с уравнениями связей).

Дуги полюсных графов ( $y$ -дуги и  $z$ -дуги), вообще говоря, могут быть распределены между деревом и дополнением произвольно. Однако в зависимости от того, как решается этот вопрос, матрица  $W$  может иметь более или менее удобную для дальнейшего анализа форму. Поскольку решение или преобразование уравнений осуществляется чаще всего методами исключения, то наиболее желательной является такая форма матрицы  $W$ , когда элементы ее главной диагонали не равны нулю, а еще лучше равны единице (регулярная форма).

Для достижения этой цели необходимо, прежде всего, записывать строки компонентной матрицы  $V$  в таком же порядке, в каком расположены столбцы в ее субматрицах  $V_\xi$  и  $V_\eta$ . Очевидно, единичные элементы компонентных уравнений (в неявной форме) должны попасть в  $V_{\xi T}$  и  $V_{\eta N}$  — субматрицы, которые при преобразовании матрицы  $V$  не претерпевают изменений. А это значит, что  $z$ -дуги целесообразно включить в дерево, а  $y$ -дуги — в дополнение.

Взаимоопределенные ветви дерева целесообразно представить как  $z$ -дуги, а взаимопределенные хорды — как  $y$ -дуги.

Приведенное правило не всегда может быть выполнено полностью, однако его соблюдение всегда приводит к матрице  $W$  в наиболее удобной форме. Например, дугу 4 графа гидромеханического системы (рис. 2, б) следовало бы включить в дополнение, так как она представлена как  $y$ -дуга компонентным уравнением  $f_4 = K_4 x_4$ . Но тогда вместо нее пришлось бы ввести в дерево одну из дуг 6, 8 или 10. Дуги 6 и 10 являются существенно  $y$ -дугами, а дуга 8 относится к тому же типу, что и дуга 4. Если быть до конца последовательным, то следовало бы воспользоваться тем обстоятельством, что дуга 4 взаимопределенная и представить ее как  $z$ -дугу уравнением  $x_4 = (1/K_4) f_4$ .

Для получения математической модели структуры системы в дифференциальной форме необходимо использовать только те полюсные уравнения, которые выражают поперечные или продольные



переменные через производные. Соответствующие компоненты в первом случае представляются  $u$ -дугами (емкости, массы), а во втором  $z$ -дугами (индуктивности, пружины). При несоблюдении этого условия математическая модель может содержать интегральные операторы.

### 14.5. Переменные состояния

Переходя к изложению вопросов, связанных с формированием уравнений переменных состояния структуры, будем пользоваться терминами и обозначениями электрических величин. Соответствующие соотношения для других физических систем легко получаются на основе электрических аналогий.

Так как дифференциальные уравнения переменных состояния должны содержать только производные первого порядка, то для емкостных и индуктивных дуг используются полюсные уравнения в виде:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad i_L = L \frac{di_C}{dt}.$$

Напряжения на емкостях  $u_C$  и токи в индуктивностях  $i_L$ , производные которых входят в полюсные уравнения, называют дифференциальными переменными. В отличие от них переменные, которые не содержатся под знаком производной, называются алгебраическими переменными. Ясно, что совокупность переменных состояния структуры системы образуется из всех тех дифференциальных переменных  $u_C$  и  $i_L$ , которые являются взаимно независимыми. Поскольку в общем случае векторы  $u_C$  и  $i_L$  могут содержать зависимые переменные, то необходимо выяснить условия такой зависимости и способы выбора взаимно независимой совокупности дифференциальных переменных.

Если некоторый контур содержит только задающие источники напряжения и емкости (рис. 3, а), то напряжения на одной из них выражаются через напряжения источников и напряжения на других емкостях контура.

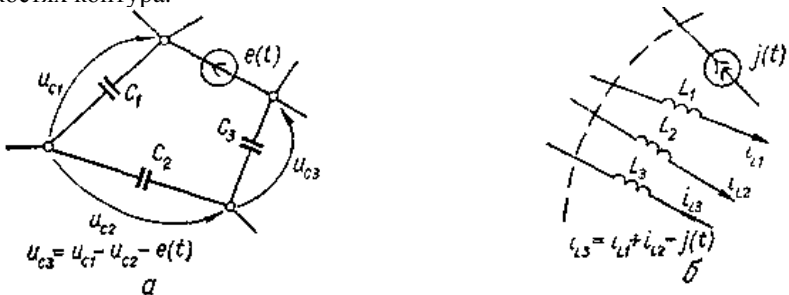
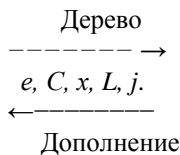


Рис. 3. Особые контур (а) и сечение (б).

Аналогично при наличии сечения, образованного только задающими источниками тока и индуктивностями (рис. 3, б), ток в одной из индуктивностей выражается через токи источников и токи в других индуктивностях сечения. Контур и сечения, обуславливающие зависимость переменных состояния, будем называть *особыми*. Так как эта зависимость связана исключительно со структурой схемы, то соответствующие переменные будем называть *топологически зависимыми*.

Уравнения в неоднородном координатном базисе будут содержать все независимые напряжения на емкостях и токи в индуктивностях при условии, что они входят в векторы  $u_{XT}$  и  $i_{XN}$ . Это можно обеспечить на этапе формирования фундаментального дерева, включая в него все задающие источники напряжения и максимально возможное число емкостных дуг (С-дуг). В то же время все задающие источники тока и максимально возможное число индуктивных дуг (L-дуг) должно остаться в дополнении. Тогда переменные состояния представляются векторами напряжений на емкостных ветвях дерева  $u_{CT}$  и токов в индуктивных хордах  $i_{LN}$ .

Итак, при формировании уравнений переменных состояния структур необходимо выделить из множества дуг компонентов структуры системы подмножества С-дуг и L-дуг, которые будем называть *реактивными дугами*, а остальные будем рассматривать как *x-дуги*. Очевидно, изложенное выше требование о распределении реактивных дуг между деревом и дополнением будет обеспечено, если фундаментальное дерево формировать в соответствии со следующей иерархией дуг:



Иерархию внутри *x-дуг* целесообразно (ходя и не обязательно) принять в соответствии с приведенной в п.13.4.

## 14.6. Уравнения переменных состояния структуры

Топологические уравнения в системе координат, которая определяется выбранным в соответствии с изложенными требованиями фундаментальным деревом, запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{FC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CI} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{LI} & \pi_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ i_{CI} \\ i_{XI} \\ i_{LI} \\ i_{CN} \\ i_{XN} \\ i_{LN} \\ j(t) \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} -\pi'_{EC} & -\pi'_{CC} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\pi'_{EX} & -\pi'_{CX} & -\pi'_{XX} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\pi'_{EL} & -\pi'_{CL} & -\pi'_{XL} & -\pi'_{LL} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\pi'_{EJ} & -\pi'_{CJ} & -\pi'_{XJ} & -\pi'_{LJ} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ u_{CI} \\ u_{XI} \\ u_{LI} \\ u_{CN} \\ u_{XN} \\ u_{LN} \\ u_{IJ} \end{bmatrix} = 0$$

Каждому из них соответствуют четыре матричных уравнения, образующие четыре пары взаимно дуальных соотношений. Компонентное уравнение для  $x$ -дуг в неявной форме имеет вид:

$$V_{UT}, V_{UN}, V_{IT}, V_{IN} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ u_{XN} \\ i_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} = 0.$$

Подставив сюда выражения векторов  $u_{XN}$  и  $i_{XT}$  из топологических уравнений, получим уравнение для безреактивных компонентов:

$$\begin{aligned} & \left[ V_{UT} + V_{UN}\pi'_{XX}, V_{IN} - V_{IT}\pi_{XX} \right] \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} = \\ & = \left[ -V_{UT}\pi'_{CX}, V_{IT}\pi_{XX} \right] \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \left[ -V_{UN}\pi'_{EX}, V_{IT}\pi_{XJ} \right] \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

или в краткой записи

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v.$$

Матрицы  $W_0$ ,  $Q_1$  и  $Q_2$  определяются полученными выше выражениями и могут быть найдены преобразованием компонентной матрицы  $V$  для  $x$ -дуг с помощью субматриц матрицы сечений. Вектор алгебраических переменных  $x_0$ , вектор переменных состояния  $x$  и задающий вектор  $v$  выражаются следующим образом:

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix}.$$

Уравнения переменных состояния можно сформулировать на основе соотношений, следующих из топологических уравнений:

$$\begin{aligned} i_{CT} + \pi_{CC} i_{CN} &= -\pi_{CX} i_{XN} - \pi_{CL} i_{LN} - \pi_{CJ} j(t); \\ u_{LN} - \pi'_{LL} u_{LT} &= \pi'_{XL} u_{XT} + \pi'_{CL} u_{CT} + \pi'_{EL} e(t). \end{aligned}$$

Объединяя эти соотношения в одно матричное уравнение и вводя векторы  $q$  и  $\psi$ , выражающиеся через заряды для емкостей и потокосцепления индуктивностей

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN}; \quad \psi = \psi_{LN} - \pi'_{LL} \psi_{LT},$$

находим:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CX} \\ \pi'_{XL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi'_{CL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi'_{EL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix},$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v.$$

Решив уравнение

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v$$

относительно вектора  $x_0$  и подставив его значение

$$x_0 = W_0^{-1} (Q_1 x + Q_2 v) = Q'_1 x + Q'_2 v$$

в дифференциальное уравнение, получим:

$$\frac{dx}{dt} = (\Theta_0 Q'_1 + \Theta_1) x + (\Theta_0 Q'_2 + \Theta_2) v = \Theta'_1 x + \Theta'_2 v.$$

Вектор  $x_0$  можно исключить с помощью алгоритма Гаусса— Жордана над блочной матрицей  $\Lambda$  (по столбцам матрицы  $W_0$ ):

$$\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\Theta_0 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ \hline W_0 & Q_1 & Q_2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & \Theta'_1 & \Theta'_2 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 \\ \hline \end{array}.$$

Вектор  $x = (q, \psi)^t$  выражается через заряд  $q$  и потокосцепление  $\psi$ , которые, в свою очередь, являются функциями напряжений на емкостях и токах в индуктивностях:

$$q = \varphi_C(u_C); \quad \psi = \varphi_L(i_L).$$

Алгоритм формирования уравнений переменных состояния имеет свои особенности для линейных и нелинейных структур систем, которые рассматриваются ниже.

## 14.7. Линейные структуры системы

Для линейных структур систем  $q_C = C u_C$  и  $\psi_L = L i_L$ , где  $C$  и  $L$  — квадратные матрицы, элементами которых являются емкости и индуктивности реактивных двухполюсников. Матрицы  $C$  и  $L$  (при отсутствии индуктивных связей) диагональны, а если имеются индуктивно связанные двухполюсники, то  $L$  не диагональна, но симметрична. Переменные  $q$  и  $\psi$  можно выразить следующим образом:

$$q = q_{CT} + \pi_{CC} q_{CN} = [1 \ \pi_{CC}] \begin{bmatrix} q_{CT} \\ q_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC} q_C = \Pi_{CC} C u_C;$$

$$\psi = \psi_{LN} - \pi'_{LL} \psi_{LT} = [-\pi'_{LL} \ 1] \begin{bmatrix} \psi_{LT} \\ \psi_{LN} \end{bmatrix} = P_{LL} \psi_L = P_{LL} L i_L$$

Из топологических уравнений следуют соотношения

$$u_{CN} = \pi'_{CC} u_{CT} + \pi'_{EC} e \quad \text{и} \quad i_{LT} = -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} j,$$

на основании которых выразим векторы  $u_C$  и  $i_L$ :

$$u_C = \begin{bmatrix} u_{CT} \\ u_{CN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \pi'_{CC} \end{bmatrix} u_{CT} + \begin{bmatrix} 0 \\ \pi'_{EC} \end{bmatrix} e(t) = \Pi'_{CC} u_{CT} + \Pi'_{EC} e(t)$$

$$i_L = \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi_{LL} \\ 1 \end{bmatrix} i_{LN} - \begin{bmatrix} \pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} j(t) = P'_{LL} i_{LN} + P'_{LJ} j(t).$$

Подставляя эти выражения в формулы для  $q$  и  $\psi$ , получаем:

$$q = (\Pi_{CC} C \Pi'_{CC}) u_{CT} + \Pi_{CC} C \Pi'_{EC} e(t);$$

$$\psi = (P_{LL} L P'_{LL}) i_{LN} + P_{LL} L P'_{LJ} j(t)$$

на основании чего можно записать

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C \Pi'_{CC} & 0 \\ 0 & P_{LL} L P'_{LL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{CC} C \Pi'_{EC} & 0 \\ 0 & P_{LL} L P'_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} = W_x x + \Theta_3 v$$

$$W_x = \begin{bmatrix} C0 \\ 0L \end{bmatrix} \text{ Приравняв производную этого выражения}$$

полученному ранее соотношению, находим:

$$W_x \frac{dx}{dt} = \Theta'_1 x + \Theta'_2 v - \Theta_3 \frac{dv}{dt},$$

откуда получаем уравнения переменных состояния линейной системы в виде

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bv - B' \frac{dv}{dt},$$

где

$$A = W_x^{-1} Q'_1; B = W_x^{-1} Q'_2; B' = W_x^{-1} B'$$

Вместо обращения матрицы  $W_x$  можно применить алгоритм Гаусса—Жордана по ее столбцам над блочной матрицей  $\Lambda_x$ :

$$\Lambda_x = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} W_x & \Theta_1 & \Theta_2 & -\Theta_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & A & B & B' \end{array} \right].$$

Общая процедура формирования уравнений переменных состояния линейных структур систем иллюстрируется на рис. 4.

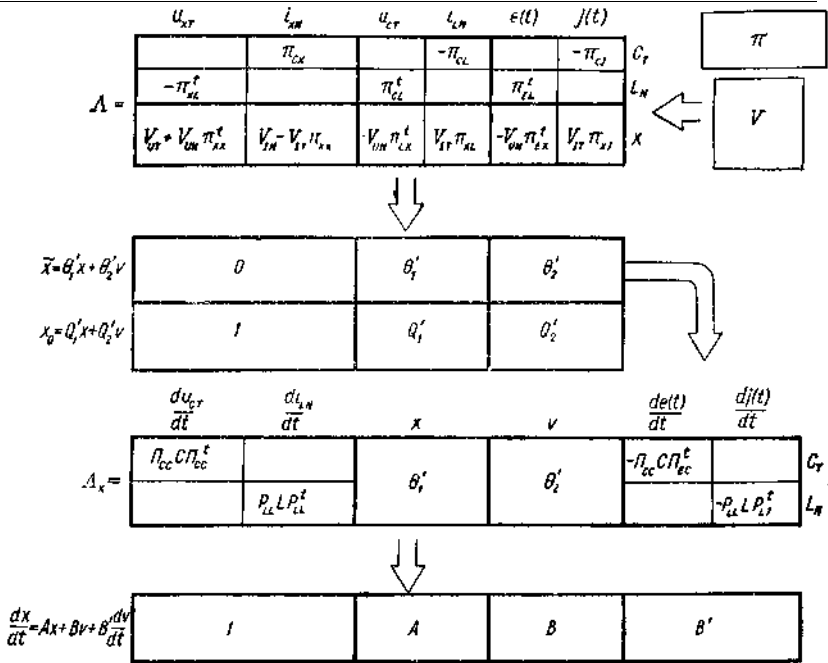


Рис. 4. Процедура формирования уравнений переменных состояния линейных структур систем.

Появление производной вектора  $v$  в уравнении переменных состояния обусловлено особыми контурами и сечениями с задающими источниками. Если такие источники в особых контурах отсутствуют, то  $\pi_{CC}=0$  и  $\pi_{LL}=0$ , следовательно,  $\Theta_3=0$

При отсутствии особых контуров вообще все дифференциальные переменные независимы и входят в векторы  $u_{CT}$  и  $i_{LN}$ , а матрицы  $\pi_{CC}$  и  $\pi_{LL}$  исчезают. Тогда  $P_{CC}=1$  и  $P_{LL}=1$ , вследствие чего матрица  $W_x$  имеет квазидиагональную структуру:

$$W_x = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix},$$

а при отсутствии индуктивных связей  $W_x$  — диагональная матрица, элементами которой являются параметры реактивных двухполюсников. В таких случаях умножение на обратную матрицу  $W_x^{-1}$  соответствует делению каждого уравнения переменных состояния на соответствующий диагональный элемент матрицы  $W_x$ .

Рассмотрим в качестве примера электрическую схему рис. 5, а.

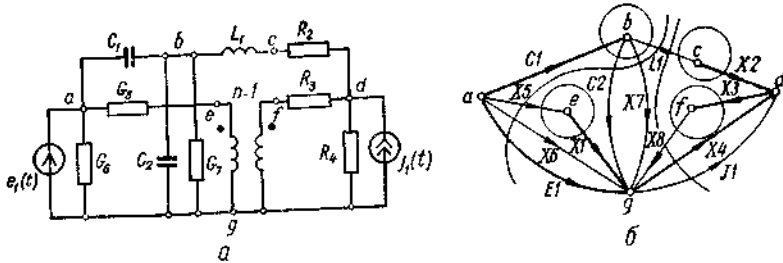


Рис 5. Электрическая схема с идеальным трансформатором (а) и ее граф (б).

В соответствии с выбранным фундаментальным деревом графа (рис. 5, б) запишем матрицу сечений для хорд:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EC} & \pi_{EX} & \pi_{EL} & \pi_{EJ} \\ \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & \pi_{XX} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccc|cccc|c} & C2 & X5 & X6 & X7 & X8 & L1 & J1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & & E1 \\ -1 & & & & -1 & & -1 & & C1 \\ & & -1 & & & & & & X1 \\ & & & & & & & -1 & X2 \\ & & & & & & & & X3 \\ & & & & & -1 & & & X4 \\ & & & & & -1 & 1 & & \end{array}$$

Компонентная матрица для  $x$ -дуг в неявной форме имеет вид:

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	
1								-n									
	1								-R <sub>2</sub>								
		1								-R <sub>3</sub>							
			1								-R <sub>1</sub>						
				1									1				
					-G <sub>5</sub>									1			
						-G <sub>6</sub>									1		
							-G <sub>7</sub>									1	
								n								1	
	$V_{UT}$				$V_{UN}$					$V_{IT}$				$V_{IN}$			



Преобразовав эту матрицу в соответствии с субматрицами матрицы сечений, запишем блочную матрицу  $\Lambda$ :

		$u_{x1}$	$u_{x2}$	$u_{x3}$	$u_{x4}$	$i_{x5}$	$i_{x0}$	$i_{x7}$	$i_{x8}$	$u_{C1}$	$i_{L1}$	$e_1(t)$	$f_1(t)$	
$\Lambda =$								-1			1			$C1$
			$i$		-1						-1		1	$L1$
		1		$n$	$n$									$X1$
			1									$R_2$		$X2$
				1					$-R_3$					$X3$
					1				$-R_4$		$-R_1$			$X4$
		$G_5$				1							$G_b$	$X5$
							1						$G_0$	$X6$
								1		$-G_7$			$G_2$	$X7$
				$n$				1					$X8$	

Пусть параметры компонентов схемы имеют следующие нормативные значения:  $R_2 = R_3 = R_4 = 1$ ;  $G_5 = G_6 = G_7 = 0, 5$ ;  $n = 2$ ;  $C_1 = C_2 = 0,05$ ;

$L_1 = 0,2$ . Подставив эти значения в матрицу  $\Lambda$  и применив процедуру исключения по столбцам субматрицы  $W$ , получим:

$u_{x1}$	$u_{x2}$	$u_{x3}$	$u_{x4}$	$i_{x5}$	$i_{x6}$	$i_{x7}$	$i_{x8}$	$u_{C1}$	$i_{L1}$	$e_1(t)$	$j_1(t)$	
								-0,5	1	0,5		C1
								-1	-1,6	0,8	-0,6	L1
1									0,4	0,8	0,4	X1
	1								1			X2
		1							0,4	-0,2	0,4	X3
			1						-0,6	-0,2	-0,6	X4
				1					-0,2	0,1	-0,2	X5
					1					0,5		X6
						1		-0,5		0,5		X7
							1		0,8		0,8	X8

Отсюда имеем уравнения для векторов  $\tilde{x}$  и  $x_0$ :

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} q \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1 \\ -1 & -1,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix};$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \\ u_{x4} \\ i_{x5} \\ i_{x6} \\ i_{x7} \\ i_{x8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0,4 \\ 0 & -0,6 \\ 0 & -0,2 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0 & 0 \\ 0,2 & -0,6 \\ 0,2 & -0,6 \\ 0,1 & -0,2 \\ 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix}.$$

В соответствии с заданными значениями емкостей и индуктивностей сформируем матрицы:

$$\Pi_{CC} \Pi'_{CC} = [1 \ -1] \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [C_1 + C_2] = [0,1];$$

$$P_{LL}LP'_{LL} = [1][L_1][1] = [L_1] = [0, 2];$$

$$\Pi_{CC}C\Pi'_{CC} = [1 - 1] \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-C_2] = [-0, 05]$$

Полученные матрицы имеют первый порядок, так как схема характеризуется только двумя переменными состояния — напряжением на емкости  $u_{C1}$  и током в индуктивности  $i_{L1}$ . Матрица  $P_{LL}L P'_{LL}$  отсутствует, поскольку нет особых сечений с источниками тока. Матрица  $\Lambda_x$  имеет вид:

$$\Lambda_x = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \frac{du_{C1}}{dt} & \frac{di_{L1}}{dt} & u_{C1} & i_{L1} & e_1(t) & j_1(t) & \frac{de_1(t)}{dt} & \frac{dj_1(t)}{dt} \end{array} \\ \begin{array}{|cccccc|} \hline 0,1 & & -0,5 & 1 & -1,1 & 0,2 & 0,05 & \\ \hline & 0,2 & -1 & -1,6 & 0,8 & -0,6 & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} CI \\ \\ LI \end{array} \end{array}.$$

Разделив первую строку на 0,1, а вторую на 0,2, получим слева единичную матрицу, и, следовательно, уравнения переменных состояния имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ j_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt}.$$

### 14.8. Структуры нелинейных систем

Изложенный алгоритм формирования уравнений переменных состояния легко обобщается на структуры нелинейных систем. При формировании фундаментального дерева из дуг безреактивных компонентов выделяются дуги нелинейных двухполюсников, причем управляемые током дуги помещаются в дерево (после  $e$ -дуг и  $S$ -дуг), а управляемые напряжением — в дополнение (перед  $L$ -дугами и  $j$ -дугами). Тогда матрица сечений запишется в виде:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{FC} & \pi_{EX} & \pi_{FH} & \pi_{LI} & \pi_{EJ} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \pi_{CC} & \pi_{CX} & \pi_{CH} & \pi_{CL} & \pi_{CJ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{HX} & \pi_{HH} & \pi_{HL} & \pi_{HI} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \pi_{XX} & \pi_{XH} & \pi_{XL} & \pi_{XJ} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \pi_{LL} & \pi_{LJ} & \end{bmatrix},$$

где индекс  $H$  относится к нелинейным безреактивным дугам, а в рамку заключена субматрица матрицы сечений для безреактивных дуг.

Из топологических уравнений, определяемых этой матрицей, следует соотношений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{C\kappa} \\ \pi'_{\kappa I} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CL} \\ \pi'_{CL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CJ} \\ \pi'_{EL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{CH} \\ \pi'_{HL} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} i_{HI} \\ u_{HI} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HX} \\ \pi'_{XH} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{XT} \\ i_{XM} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HL} \\ \pi'_{CH} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{CI} \\ i_{LN} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HI} \\ \pi'_{EI} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ j(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\pi_{HH} \\ \pi'_{HH} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

или в краткой записи

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \Theta_0 x_0 + \Theta_1 x + \Theta_2 v + \Theta_3 x_H; \\ y_H &= \Omega_0 x_0 + \Omega_1 x + \Omega_2 v + \Omega_3 x_H, \end{aligned}$$

где векторы  $x_0$ ,  $x$  и  $v$  определены, как и ранее;  $x_H$  и  $y_H$  — векторы переменных, связанных с нелинейными безреактивными компонентами:

$$x_H = \begin{bmatrix} u_{HT} \\ i_{HN} \end{bmatrix}; \quad y_H = \begin{bmatrix} i_{HT} \\ u_{HT} \end{bmatrix}$$

Вектор  $x_0$  можно исключить из этих выражений на основе уравнения для переменных безреактивных линейных компонентов

$$W_0 x_0 = Q_1 x + Q_2 v + Q_3 x_H;$$

которое отличается от линейного (п.13.6) только наличием в правой части слагаемого  $Q_3 x_H$ , где:

$$Q_3 = [-V_{UN} \pi'_{HX}, V_{IT} \pi_{XH}].$$

Для исключения вектора  $x_0$  удобно, как и ранее, применить алгоритм Гаусса—Жордана (но теперь блочная матрица  $\Lambda$  имеет более общий вид):

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -\theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \hline -\Omega_0 & \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ \hline W'_0 & Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0 & \theta'_1 & \theta'_2 & \theta'_3 \\ \hline 0 & \Omega'_1 & \Omega'_2 & \Omega'_3 \\ \hline 1 & Q'_1 & Q'_2 & Q'_3 \\ \hline \end{array} .$$

Таким образом, приходим к уравнениям:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{x}}{dt} &= \Theta'_1 x + \Theta'_2 v + \Theta'_3 x_H; \\
 y_H &= \Omega'_1 x + \Omega'_2 v + \Omega'_3 x_H; \\
 x_0 &= Q'_1 x + Q'_2 v + Q'_3 x_H.
 \end{aligned}$$

Если нелинейными являются только безреактивные компоненты, то первое уравнение таким же способом, как и линейное, может быть приведено к нормальной форме, но теперь оно содержит член с вектором  $x_H$  переменных нелинейных компонентов. Уравнение переменных состояния совместно с нелинейным алгебраическим уравнением образует систему

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= Ax + Dv + Fx_H \\
 y_H &= \Omega'_1 x + \Omega'_2 v + \Omega'_3 x_H;
 \end{aligned} \right\}$$

решение которой при заданных нелинейных функциях  $\varphi(x_H, y_H) = 0$ , векторе  $v$  и начальных условиях  $x(t_0) = x_0$  позволяет найти векторы  $x$  и  $x_H$ , а значит и вектор  $x_0$ .

При наличии нелинейных реактивных компонентов обычно используется уравнение для производной вектора  $\tilde{x}$ . Оно решается совместно с нелинейным алгебраическим уравнением каким-либо численным методом, причем вектор  $\tilde{x}$  определяется на каждом шаге интегрирования на основе заданных функций  $q_C(u_C)$  и  $\psi_L(i_L)$  или  $C(u_C)$  и  $L(i_L)$ .

Не останавливаясь на численных методах решения нелинейных алгебраических и дифференциальных уравнений, проиллюстрируем формирование уравнений переменных состояния на примере транзисторного усилителя (рис. 6, а).

с.

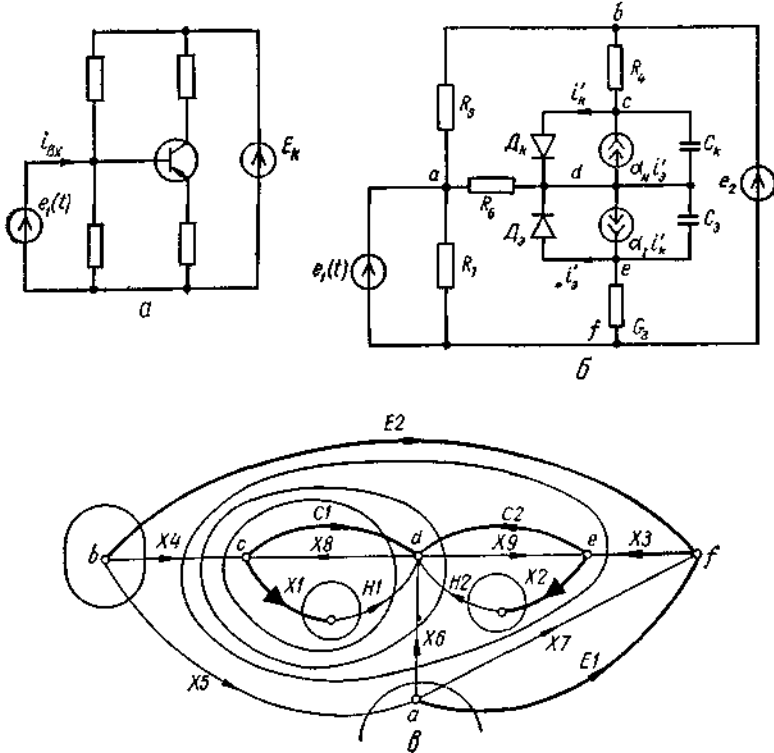


Рис. 6. Транзисторный усилитель (а), его схема замещения (б) и граф (в).

Замещая транзистор нелинейной схемной моделью, получаем схему рис. 6, б. Нелинейные безреактивные компоненты  $D_k$  и  $D_\gamma$ , задаются уравнениями:

$$i'_k = i_{k0}(e^{\gamma u_k} - 1); \quad i'_\gamma = i_{\gamma 0}(e^{\gamma u_\gamma} - 1),$$

а нелинейные емкости выражаются функциями

$$C_k = C_{k0} + C_{k0} e^{\gamma u_k}; \quad C_\gamma = C_{\gamma 0} + C_{\gamma 0} e^{\gamma u_\gamma},$$

где

$i_{k0}$ ,  $i_{\gamma 0}$ ,  $C_{k0}$ ,  $C_{\gamma 0}$ ,  $C_{k0}$ ,  $C_{\gamma 0}$  и  $\gamma$  - величины, выражающиеся через физические параметры транзистора и определяемые соответствующими вычислениями или экспериментальным путем.

Так как зависимые источники тока управляются токами нелинейных двухполюсников  $D_k$  и  $D_s$ , то для разделения линейных и нелинейных компонентов введем управляющие короткозамкнутые дуги по току. Граф схемы с выбранным деревом показан на рис. 6, в. Матрица сечений для хорд имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} & \pi_{EH} \\ \pi_{CX} & \pi_{CH} \\ \pi_{XX} & \pi_{XH} \end{bmatrix} = \begin{array}{cccccccc|c} & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & H1 & H2 & \\ \hline & & -1 & 1 & 1 & & & & & E1 \\ 1 & 1 & & & & & & & & E2 \\ -1 & & & & & -1 & & 1 & & C1 \\ 1 & & 1 & & & & -1 & & 1 & C2 \\ & & & & & & & -1 & & X1 \\ & & & & & & & & -1 & X2 \\ 1 & & 1 & & & & & & & X3 \end{array}$$

Компонентная матрица  $\Gamma$  для линейных безреактивных дуг представляется следующим образом (для короткозамкнутых дуг  $u_{X1} = 0$  и  $u_{X2} = 0$ ):

$$\begin{array}{cccccccccccccccc|c} X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & X7 & X8 & X9 & \\ \hline 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & X1 \\ & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & X2 \\ & & 1 & & & & & & & & & & -R_1 & & & & & & & X3 \\ & & & -G_1 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & X4 \\ & & & & -G_2 & & & & & & & & & & 1 & & & & & X5 \\ & & & & & -G_3 & & & & & & & & & & 1 & & & & X6 \\ & & & & & & -G_4 & & & & & & & & & & 1 & & & X7 \\ & & & & & & & -G_5 & & & & & & & & & & 1 & & X8 \\ & & & & & & & & -\alpha_1 & & & & & & & & & & 1 & X9 \\ & & & & & & & & & -\alpha_2 & & & & & & & & & & \\ \hline & V_{UG} & & & & & V_{UN} & & & & & V_{IG} & & & & & V_{IN} & & & \end{array}$$

Сформировав соответствующие матрицы, запишем блочную матрицу  $\Lambda$ :

$u_{X1}$	$u_{X2}$	$u_{X3}$	$i_{X4}$	$i_{X5}$	$i_{X6}$	$i_{X7}$	$i_{X8}$	$i_{X9}$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$e_1(t)$	$e_2$	$i_{H1}$	$i_{H2}$	
			-1				-1						-1		C1
			1		1			-1						-1	C2
1									1						H1
	1									1					H2
1															X1
	1														X2
		1	$R_3$		$R_3$										X3
		$-G_4$	1						$-G_4$	$G_4$		$G_4$			X4
				1							$-G_5$	$G_5$			X5
		$-G_6$			1					$G_6$	$G_6$				X6
						1					$G_7$				X7
							1								X8
								1						$\alpha_\Lambda$	X9
													$\alpha_j$		

При формировании общих соотношений для формирования матрицы  $\Lambda$  следует иметь в виду, что в рассматриваемом примере некоторые из топологических субматриц отсутствуют или нулевые. Применив алгоритм исключения и обозначив  $\beta = 1 + R_3(G_4 + G_6)$ , получим:



$u_{XT^iXN}$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$e_1(t)$	$e_2$	$i_{H1}$	$i_{H2}$	
0	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_6)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_4(1+R_3G_6)}{\beta}$	-1	$\alpha_N$	C1
	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{G_4+G_6}{\beta}$	$-\frac{G_6}{\beta}$	$-\frac{G_4}{\beta}$	$\alpha_I$	-1	C2
0	1						H1
		1					H2
1							X1
							X2
	$\frac{R_3G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3}{\beta}(G_4+G_6)$	$-\frac{R_3G_6}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4}{\beta}$			X3
	$-\frac{G_4}{\beta}(1+R_3G_6)$	$\frac{G_4}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_4(1+R_3G_6)}{\beta}$			X4
			$-G_5$	$G_5$			X5
	$\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$	$\frac{G_6}{\beta}$	$\frac{G_6(1+R_3G_4)}{\beta}$	$-\frac{R_3G_4G_6}{\beta}$			X6
			$G_7$				X7
						$\alpha_N$	X8
						$\alpha_I$	X9

Отсюда имеем уравнения переменных состояния вместе с нелинейными алгебраическими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_{C1} \\ q_{C2} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} -G_4(1+R_3G_6) & G_4 \\ G_4 & -(G_4+G_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \\ &+ \frac{1}{\beta} \begin{bmatrix} -R_3G_4G_6 & G_4(1+R_3G_6) \\ -G_6 & -G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & \alpha_N \\ \alpha_I & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix}; \\ \begin{bmatrix} u_{H1} \\ u_{H2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Остальные строки преобразованной матрицы  $\Lambda$  дают уравнения для алгебраических переменных линейных компонентов.

### 14.9. Выходное уравнение

Подлежащие определению переменные можно рассматривать как составляющие искомого вектора  $y$ , который выражается *выходным уравнением* через вектор переменных состояний  $x$ , задающим вектор  $v$  и (в случае нелинейных систем) вектор  $x_H$ , т. е.

$$y = Cx + Dv + Hx_H.$$

Если искомые переменные входят в векторы  $x$ ,  $x_0$  и  $y_H$ , то выходное уравнение формируется непосредственно из соответствующих строк преобразованной матрицы  $\Lambda$ . Так как вектор  $x_0$  содержит напряжения ветвей дерева  $u_{XT}$  и токи хорд  $i_{XN}$ , то целесообразно включать в дерево (если это возможно)  $x$ -дуги искомого напряжения и в дополнение —  $x$ -дуги искомого тока. В общем случае можно получить уравнение для искомой переменной линейной комбинацией строк преобразованной матрицы  $\Lambda$ . Например, для входного тока  $i_{вх}$  усилителя (рис. 6, а) имеем:

$$i_{вх} = -i_{E1} = -i_5 + i_6 + i_7 = \left[ \frac{RG_4 G_6}{\beta} \frac{G_6}{\beta} \right] \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \left[ G_5 + G_7 + \frac{G_6(1 + R_3 G_4)}{\beta} - G_5 - \frac{R_3 G_4 G_6}{\beta} \right] \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Вхождение искомого переменных в вектр  $x_0$  всегда можно обеспечить, вводя фиксирующие короткозамкнутые ветви дерева для токов и разомкнутые хорды для напряжений.

### 14.10. Ограничения и обобщения

Как видно, что при изложении алгоритма формирования уравнений переменных состояния допускался ряд условий, которые специально не оговаривались, но подразумевались при записи основных соотношений.

Предполагалось, что управляемыми и управляющими являются только дуги безреактивных компонентов, к которым отнесены также короткозамкнутые и разомкнутые дуги, фиксирующие управляющие токи и напряжения. При этом число управляющих величин для данной

ДУГИ не ограничивается, но управляющие параметры рассматриваются как постоянные величины.

Ограничение на характер управляющих двухполюсников легко снимается, если функции управления возложить на дополнительно вводимые дуги, фиксирующие управляющие переменные. Последовательно с управляющим по току двухполюсником вводится короткозамкнутая дуга, а параллельно с управляющим по напряжению двухполюсником— разомкнутая дуга (рис. 7.).

Обобщение на случаи управления по нелинейной зависимости достигается введением дуг, фиксирующих управляющие переменные, и отнесением их к множеству дуг нелинейных компонентов.

При этом в векторе  $x_H$  следует положить нулю компоненты, соответствующие управляющим дугам, что равносильно их удалению совместно с соответствующими столбцами матриц  $\Theta'_3$ ,  $\Omega'_3$  и  $Q'_3$ .

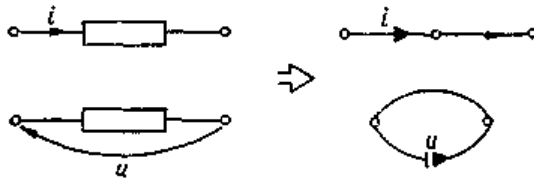


Рис. 7. Введение в граф дополнительных управляющих дуг.

Алгоритм формирования уравнений переменных состояния можно обобщить и на случаи управления по производной. Для этого необходимо представить дугу, управляющую по производной тока, в виде последовательного соединения двух емкостей с равными (например, единичными) и противоположными по знаку значениями (общая емкость равна бесконечности, и, следовательно, напряжение дуги равно нулю). Параллельно положительной емкости вводится разомкнутая дуга, управляющая по напряжению  $u = di/dt$  (рис. 8, а).

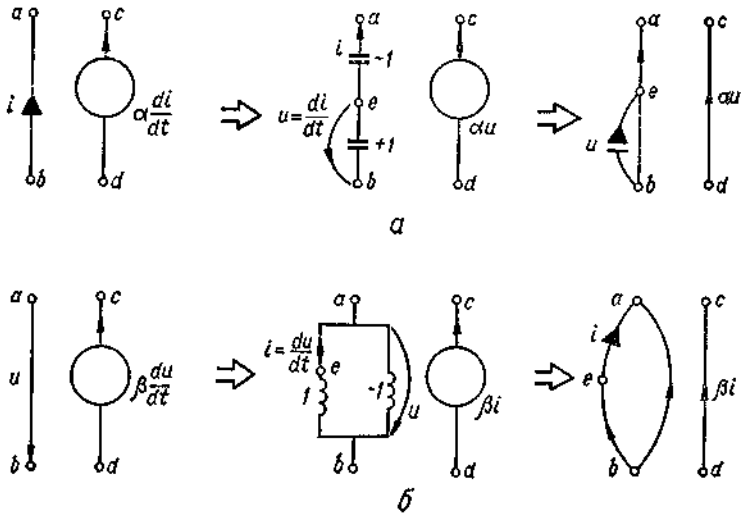


Рис. 8. Схемы и графы зависимых источников, управляемых переменных по току (а) и напряжению (б).

Аналогично решается вопрос и с управлением по производной напряжения (рис. 8, б). При этом появляются зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

При моделировании структур нелинейных систем по изложенному алгоритму дуги всех нелинейных управляемых током компонентов должны войти в дерево, а дуги всех нелинейных управляемых напряжением компонентов — в дополнение (распределение взаимоопределенных дуг нелинейных компонентов между деревом и дополнением произвольное). Это требование является топологическим ограничением, которое служит одним из *условий детерминированности* системы, т. е. возможности получения для искомых переменных однозначного решения при заданных воздействиях и начальных условиях. Невыполнение этого требования служит признаком того, что система может оказаться недетерминированной. В таких случаях требуются более тонкие методы исследования.

В соответствии с принятой иерархией управляющие по току короткозамкнутые дуги вводятся в дерево после емкостных дуг, а управляющие по напряжению разомкнутые дуги — в дополнение после индуктивных дуг (для структур нелинейных систем дуги нелинейных компонентов имеют преимущества перед управляющими дугами линейных компонентов).

При этом в дерево попадает минимально возможное число емкостных дуг, а в дополнение — максимальное число индуктивных дуг. Как правило, тем самым обеспечивается входжение в уравнения только независимых переменных, которые составляют совокупность переменных состояния. Однако при наличии особых контуров с короткозамкнутыми дугами и особых сечений с разомкнутыми дугами (см. рис. 3) в дерево войдут все емкости таких контуров, а в дополнение — все индуктивности таких сечений. В следствие этого векторы  $u_{CT}$  и  $i_{LN}$  будут содержать зависимые дифференциальные переменные, которые можно исключить в процессе формирования математической модели.

### 14.11. Исключение зависимых дифференциальных переменных

При наличии зависимых переменных математическую модель структуры линейной системы удобно строить на основании одновременного использования уравнений для дифференциальных и алгебраических переменных в виде:

$$\left. \begin{aligned} W_x \frac{dx}{dt} - \Theta_0 x_0 - \Theta_1 x - \Theta_2 v + \Theta_3 \frac{dv}{dt} &= 0 \\ W_0 x_0 - Q_1 x - Q_2 v &= 0 \end{aligned} \right\}$$

которым соответствует матрица

$$\tilde{A} = \begin{array}{c|ccc|c} \frac{dx}{dt} & x_0 & x & v & \frac{dv}{dt} \\ \hline W_x & -\Theta_0 & -\Theta_1 & -\Theta_2 & \Theta_3 \\ \hline 0 & W_0 & -Q_1 & -Q_2 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|c} \frac{dx}{dt} & x_0, x, v, \frac{dv}{dt} \\ \hline \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \end{array}.$$

Для получения уравнений относительно вектора  $dx/dt$  и  $x_0$  необходимо преобразовать матрицу  $\tilde{A}$  к такому виду, чтобы  $\tilde{A}_1$  была единичной (с точностью до перестановки строк и столбцов). Этого можно достигнуть с помощью алгоритма Гаусса-Жордана. В развернутом виде матрица  $\tilde{A}$  записывается следующим образом:

	$\frac{du_C}{dt}$	$\frac{di_L}{dt}$	$u_{XT}$	$i_{XN}$
$\tilde{A} =$	$\Pi_{CC} \Pi_{CC}^t$			$\pi_{CX}$
		$P_{LL} L P_{LL}^t$	$-\pi_{XL}^t$	
				$V_{UT} + V_{UN} \pi_{XX}^t$

$\tilde{A}_1$

$u_C$	$i_L$	$e(t)$	$j(t)$	$\frac{de(t)}{dt}$	$\frac{dj(t)}{dt}$
	$\pi_{CL}$		$\pi_{CJ}$	$\Pi_{CC} \Pi_{EC}^t$	
$-\pi_{CL}^t$					$P_{LL} L P_{LL}^t$
$V_{UA} \pi_{CX}^t$	$-V_{IT} \pi_{XL}$	$V_{UN} \pi_{EX}^t$	$-V_{IT} \pi_{XJ}$		

$\tilde{A}_2$

В процессе преобразования  $\tilde{A}_1$  к единичной матрице в ней может появиться нулевая (вырожденная) строка, что препятствует завершению этого преобразования и является признаком зависимости дифференциальных переменных. Соответствующее этой вырожденной строке уравнение не содержит алгебраических переменных и производных, а связывает только дифференциальные переменные и задающие функции времени. Оно и используется для исключения зависимых дифференциальных переменных из уравнений системы.

Проиллюстрируем исключение зависимых дифференциальных переменных на примере схемы рис. 8, а, ее граф изображен на рис. 8, б.

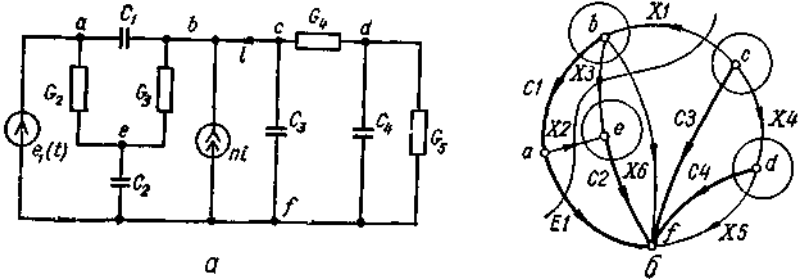


Рис. 8. Схема с зависимыми дифференциальными переменными (а) и ее граф (б).

Как видно, граф содержит особый контур с коротко-замкнутой управляющей дугой и источником напряжения ( $E1, C1, C3, X1$ ). Поэтому все емкостные дуги этого контура попали в дерево, хотя напряжение одной из них ( $u_{C1}$  или  $u_{C3}$ ) зависимо (например,  $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$ ). По той же причине короткозамкнутая дуга  $X1$  не может быть включена в дерево. Для выбранного фундаментального дерева матрица сечений имеет вид:

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{EX} \\ \pi_{CX} \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 \\ \hline E1 & -1 & 1 & 1 & & & 1 \\ \hline C1 & -1 & & 1 & & & 1 \\ \hline C2 & & -1 & -1 & & & \\ \hline C3 & 1 & & & 1 & & \\ \hline C4 & & & & -1 & 1 & \\ \hline \end{array}$$

Компонентная матрица имеет следующий вид:

$$V = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 & X1 & X2 & X3 & X4 & X5 & X6 \\ \hline X1 & 1 & & & & & & & & & & & \\ \hline X2 & & -G_2 & & & & & & 1 & & & & \\ \hline X3 & & & -G_3 & & & & & & 1 & & & \\ \hline X4 & & & & -G_4 & & & & & & 1 & & \\ \hline X5 & & & & & -G_5 & & & & & & 1 & \\ \hline X6 & & & & & & & n & & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Так как дуги всех безреактивных компонентов вошли в дополнение, то субматрицы  $V_{UT}$  и  $V_{IT}$  (как и субматрица  $\pi_{XX}$ ) отсутствуют. Формируем блочную матрицу  $\tilde{\Lambda}$  (штрихами отмечены производные):

$u'_{C1}$	$u'_{C2}$	$u'_{C3}$	$u'_{C4}$	$i_{X1}$	$i_{X2}$	$i_{X3}$	$i_{X4}$	$i_{X5}$	$i_{X6}$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$u_{C3}$	$u_{C4}$	$e_1(t)$	
$C_1$				-1		1			1						$C1$
	$C_2$				-1	-1									$C2$
		$C_3$		1			1								$C3$
			$C_4$				-1	1							$C4$
										-1		1		-1	$X1$
					1						$G_2$			- $G_1$	$X2$
						1				- $G_3$	$G_3$			- $G_1$	$X3$
							1					- $G_4$	$G_4$		$X4$
								1					- $G_5$		$X5$
				- $n$					1						$X6$

Здесь сразу же обнаруживается вырожденная строка, соответствующая уравнению для  $X1$  (ее элементы набраны жирным шрифтом), поэтому имеем зависимость

$$-u_{C1} + u_{C3} - e_1(t) = 0.$$

Исключим, например, переменную  $u_{C3} = u_{C1} + e_1(t)$ , что соответствует прибавлению столбца для  $u_{C3}$  к столбцам для  $u_{C1}$  и  $e_1(t)$ . Для исключения производной  $u'_{C3}$  необходимо продифференцировать полученное соотношение, в результате чего возникает производная по задающему напряжению, т. е.

$$\frac{du_{C3}}{dt} = \frac{du_{C1}}{dt} + \frac{de_1(t)}{dt}.$$

Образовав для производной  $e'_1(t)$  дополнительный столбец, необходимо столбец для  $u'_{C3}$  прибавить к столбцам для  $u'_{C1}$  и  $e'_1(t)$ . Итак, вырожденная строка дает информацию об операциях, которые необходимо выполнить по столбцам матрицы  $\tilde{\Lambda}$  для исключения зависимостей переменной. После этого столбец исключаемой переменной и вырожденную строку следует удалить из матрицы  $\tilde{\Lambda}$ . Пусть в нашем примере заданы следующие нормированные значения параметров компонент (значение управляющего параметра  $n$  будет дано позже):



$$C_1 = C_3 = \frac{1}{2}; C_2 = 2; C_4 = \frac{25}{14}; G_2 = G_3 = 1; G_4 = \frac{5}{4}; G_5 = \frac{10}{7}.$$

Подставив эти значения в матрицу  $\tilde{\Lambda}$  вместе с добавленным столбцом для  $e'_1(t)$ , после выполнения указанных операций над столбцами и удаления вырожденной строки, получим:

$u'_{C1}$	$u'_{C2}$	$u'_{C4}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$u_{C4}$	$e_1(t)$	$e_1(t)$	
1			-1		1			1						<i>C1</i>
2														
	2			-1	-1									<i>C2</i>
1			1			1							1	<i>C3</i>
2													2	
		25				-1	1							<i>C4</i>
		14												
				1					1			-1		<i>X2</i>
					1				-1	1		-1		<i>X3</i>
						1			$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$		<i>X4</i>
									$-\frac{10}{7}$					<i>X5</i>
			-n					1						<i>X6</i>

Применяя алгоритм исключения Гаусса-Жордана, приходим к матрице (опорные элементы отмечены жирными цифрами):

$u'_{C1}$	$u'_{C2}$	$u'_{C3}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$u_{C3}$	$e_1(t)$	$e_1'(t)$		
1								1	$\frac{9}{4}$	-1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	C1	
	1								$-\frac{1}{2}$	1		-1		C2	
			1						$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	C3
		1							$\frac{7}{16}$		$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{16}$		C4	
				1						1		-1		X2	
					1				-1	1		-1		X3	
						1			$-\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$		X4	
							1				$-\frac{1}{7}$			X5	
								$1-\frac{n}{2}$	$\frac{1}{8}^n$	$\frac{1}{2}^n$	$-\frac{5}{8}^n$	$\frac{1}{8}^n$	$\frac{1}{4}^n$	X6	

Дальнейший ход решения задачи зависит от численного значения управляющего параметра. При  $n \neq 2$  завершается процедура исключения с опорным элементом в последней строке. При  $n=2$  имеем вырожденную строку, которой соответствует уравнение

$$\frac{1}{4}u_{C1} + u_{C2} - \frac{5}{4}u_{C3} + \frac{1}{4}e_1(t) + \frac{1}{2}\frac{de_1(t)}{dt} = 0.$$

Это свидетельствует о зависимости дифференциальных переменных, но здесь эта зависимость обусловлена не структурой схемы, а численными значениями параметров компонентов. Поэтому ее естественно называть *компонентной зависимостью* переменных. Исключение компонентно зависимой переменной, например  $u_{C4}$ , проводится тем же способом, что и при топологической зависимости, на основе уравнений

$$u_{C4} = \frac{1}{5}u_{C1} + \frac{4}{5}u_{C2} + \frac{1}{5}e_1(t) + \frac{2}{5}\frac{de_1(t)}{dt};$$

$$\frac{du_{C4}}{dt} = \frac{1}{5}\frac{du_{C1}}{dt} + \frac{4}{5}\frac{du_{C2}}{dt} + \frac{1}{5}\frac{de_1(t)}{dt} + \frac{2}{5}\frac{d^2e_1(t)}{dt^2}.$$

Вводя в матрицу  $\tilde{\Lambda}$  дополнительный столбец для второй производной, после выполнения соответствующих операций над столбцами (столбцы для  $u_{C4}$  и  $u'_{C4}$  прибавляются к другим столбцам с коэффициентами, определяемыми уравнениями для исключаемой переменной и ее производной) имеем:

$u'_{C1}$	$u'_{C2}$	$i_{X1}$	$i_{X2}$	$i_{X3}$	$i_{X4}$	$i_{X5}$	$i_{X6}$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	$e''_1(t)$	
1							1	2	-2	2			C1
	1							$-\frac{1}{2}$	1	-1			C2
		1						$-\frac{1}{2}$					C3
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$							$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	C4
			1						1	-1			X2
				1				-1	1	-1			X3
					1			-1	1	-1	$\frac{1}{2}$		X4
						1		$-\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		X5

Завершая процедуру исключения, получаем окончательно

$u'_{C1}$	$u'_{C2}$	$i_{X1}$	$i_{X2}$	$i_{X3}$	$i_{X4}$	$i_{X5}$	$i_{X6}$	$u_{C1}$	$u_{C2}$	$e_1(t)$	$e'_1(t)$	$e''_1(t)$	
1									2	2	4	2	C1
	1							$-\frac{1}{2}$	1	-1			C2
		1						1	-2		-2	-1	C3
							1	2	-4		-4	-2	C4
			1						1	-1			X2
				1				-1	1	-1			X3
					1			-1	1	-1	$\frac{1}{2}$		X4
						1		$\frac{2}{7}$	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$		X5

Как видно,  $\tilde{\Lambda}$  преобразовалась в матрицу, из которой можно получить единичную матрицу перестановкой строк и столбцов ( в нашем примере достаточно переставить столбец для  $i_{X6}$ ). В результате можно записать уравнения переменных состояния и выражение для алгебраических переменных:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d^2e_1(t)}{dt^2};$$

$$\begin{bmatrix} i_{X1} \\ i_{X6} \\ i_{X2} \\ i_{X3} \\ i_{X4} \\ i_{X5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 8 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} e_1(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \frac{de_1(t)}{dt}.$$

Из рассмотренного примера видно, что особые контуры с короткозамкнутыми дугами (как и особые сечения с разомкнутыми дугами) сильно усложняют процедуру формирования уравнений переменных состояния. Подобные случаи в практике встречаются крайне редко.

## 15. Сокращенный координатный базис

### 15.1. Введение в координатный базис

При формировании математической модели в неоднородном координатном базисе размеры матрично-векторных параметров определяются в основном числом дуг полюсных графов компонентов структуры системы. В тех случаях, когда структура система содержит большое число компонентов, это может привести к серьезным трудностям даже при использовании наиболее совершенных вычислительных машин. Поэтому большое практическое значение имеют вопросы, связанные с сокращением координатного базиса, в котором представляются уравнения структуры системы. Один из путей решения этой задачи основан на подстановке полюсных уравнений в топологические уравнения, которые организуются специальным образом.

Компонентные уравнения должны быть представлены в явной форме. При этом для их упрощения можно считать, что  $u$ -дуги не управляют по поперечным величинам, а  $z$ -дуги не управляют по продольным

величинам. Если такое управление в системе имеет место, то указанные дуги освобождаются от него введением дополнительных управляющих дуг: последовательно с  $y$ -дугой короткозамкнутой дуги, управляющей по поперечной величине, а параллельно с  $z$ -дугой — разомкнутой дуги, управляющей по продольной величине. В дальнейшем короткозамкнутые дуги объединяются в множество  $s$ -дуг и представляются уравнением  $\xi_s = 0$ . Разомкнутые дуги объединяются в множество  $q$ -дуг и представляются уравнением  $\eta_q = 0$ .

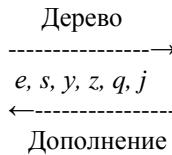
Итак, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что дуги полюсных графов компонентов системы управляются продольными величинами  $y$ -дуг  $\xi_y$ , поперечными величинами  $z$ -дуг  $\eta_z$ , поперечными величинами  $s$ -дуг  $\eta_s$  и продольными величинами  $q$ -дуг  $\xi_q$ . Тогда компонентные уравнения имеют вид

$$\begin{bmatrix} \eta_y \\ \xi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_y \\ \eta_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_D & Y_D \\ Z_D & M_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_s \\ \xi_q \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$X' = V_0 X'' + V_D X_D.$$

Дерево теперь формируется в соответствии со следующей иерархией дуг:



и называется *нормальным деревом*. В него входят все  $e$ -дуги и  $s$ -дуги, а все  $q$ -дуги и  $j$ -дуги попадают в дополнение (нарушение этого положения свидетельствовало бы о некорректности постановки задачи). Топологические уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Pi_{LY} & \Pi_{LZ} & \Pi_{LQ} & \Pi_{LJ} \\ 0 & 1 & \Pi_{SY} & \Pi_{SZ} & \Pi_{SQ} & \Pi_{SJ} \\ 0 & 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} & \Pi_{YQ} & \Pi_{YJ} \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{ZZ} & \Pi_{ZQ} & \Pi_{ZJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_E \\ \eta_S \\ \eta_Y \\ \eta_Z \\ \eta_Q \\ \eta_J \end{bmatrix} = 0;$$

$$\begin{bmatrix} P_{YE} & P_{YS} & P_{YY} & 0 & 0 & 0 \\ P_{ZE} & P_{ZS} & P_{ZY} & P_{ZZ} & 0 & 0 \\ P_{QE} & P_{QS} & P_{QY} & P_{QZ} & 1 & 0 \\ P_{JE} & P_{JS} & P_{JY} & P_{JZ} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_E \\ \xi_S \\ \xi_Y \\ \xi_Z \\ \xi_Q \\ \xi_J \end{bmatrix} = 0.$$

В этих уравнениях  $\eta_Q=0$ ,  $\eta_J=0$ ,  $\xi_E=\varepsilon$  и  $\xi_S=0$ . Благодаря специфической структуре, обусловленной способом построения нормального дерева, топологические уравнения вместе с компонентными позволяют сформировать математическую модель структуры в сокращенном координатном базисе.

## 15.2. Уравнения в сокращенном координатном базисе

Из топологических уравнений для сечений и контуров, определяемых  $y$ -дугами и  $z$ -дугами, имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \Pi_{YY}\eta_Y + \Pi_{YZ}\eta_Z + \Pi_{YJ}J &= 0; \\ P_{ZZ}\xi_Z + P_{ZZ}\xi_Y + P_{ZE}\varepsilon &= 0, \end{aligned}$$

которые объединяются в одно матричное уравнение

$$\begin{bmatrix} \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & P_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} \\ P_{ZY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YJ} \\ P_{ZE} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ J \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F = 0.$$

Из топологических уравнений для сечений, определяемых  $s$ -дугами, и для контуров, определяемых  $\wedge$ -дугами, имеем соотношения:

$$\begin{aligned} \eta_S + \Pi_{SY}\eta_Y + \Pi_{SZ}\eta_Z + \Pi_{SJ}J &= 0; \\ \xi_Q + P_{QZ}\xi_Z + P_{QZ}\xi_Y + P_{QE}\varepsilon &= 0, \end{aligned}$$

которые записываются в виде матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi_{SY} & 0 \\ 0 & P_{OZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_Y \\ \xi_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{SZ} \\ P_{SY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{SJ} \\ P_{QE} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F = 0$$

Подставляя в записанные соотношения компонентное уравнение  $X' = V_0 X'' + V_D X_D$ , после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) X'' + \Theta_1 V_D X_D + \Theta_3 F &= 0; \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_2) X'' + (1 + \Theta_4 V_D) X_D + \Theta_0 F &= 0; \end{aligned}$$

Составляющие вектора  $X''$  выражаются из топологических зависимостей через продольные величины ветвей дерева и поперечные величины хорд:

$$\xi_Y = \Pi'_{Y\tau} \xi_\tau = [\Pi'_{EY} \Pi'_{YY}] \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \xi_{YT} \end{bmatrix} = \Pi'_{EY} \varepsilon + \Pi'_{YY} \xi_{YT};$$

$$\eta_Z = P'_{zN} \eta_N = [P'_{ZZ} P'_{JZ}] \begin{bmatrix} \eta_{ZN} \\ \vartheta \end{bmatrix} = P'_{ZZ} \eta_{ZN} + P'_{JZ} \vartheta$$

что приводит к соотношению

$$\begin{bmatrix} \xi_Y \\ \eta_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi'_{YY} & 0 \\ 0 & P'_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{YT} \\ \eta_{ZN} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Pi'_{EY} & 0 \\ 0 & P'_{JZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} = 0$$

или

$$X'' = \Theta'_1 X_0 + \Theta_7 F = 0$$

Это преобразование, которое получено благодаря специфической структуре системы координат, и составляет главный момент формирования математической модели структуры в сокращенном координатном базисе. Теперь осталось подставить выражение для  $X''$  в полученные выше соотношения, в результате чего имеем:

$$\begin{aligned} -(\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta'_1 X_0 + \Theta_1 V_D X_D &= -[(\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 + \Theta_3] F; \\ \Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta'_1 X_0 + (1 + \Theta_4 V_D) X_D &= -[(\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 + \Theta_6] F. \end{aligned}$$

Объединяя эти уравнения, можно записать:

$$\begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta'_1 & \Theta_1 V_D \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta'_1 & 1 + \Theta_4 V_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 & \Theta_3 \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 & \Theta_6 \end{bmatrix} F$$

или в сокращенной записи  $WX = QF$ .

Вектор  $F$  в качестве своих компонентов содержит задающие продольные  $\varepsilon$  и поперечные  $\upsilon$  величины, а вектор  $X$  — продольные переменные  $u$ -ветвей дерева, поперечные переменные  $z$ -хорд, а также поперечные переменные короткозамкнутых дуг и продольные переменные разомкнутых дуг, т. е.

$$X = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_{YT} \\ \eta_{ZN} \\ \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \mathcal{G} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система координат включает только сечения, определяемые  $s$ -дугами и  $u$ -ветвями дерева, и контуры, определяемые  $z$ -хордами и  $q$ -дугами. Сокращение числа координат, а следовательно, и порядка квадратной матрицы  $W$  численно равно количеству  $u$ -хорд и  $z$ -ветвей дерева.

### 15.3. Матрично-векторные параметры

Формально матрично-векторные параметры уравнения  $WX = QF$  могут быть вычислены по формулам:

$$W = \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta'_1 & \Theta_1 V_D \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta'_1 & 1 + \Theta_4 V_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{0D} \\ W_{D0} & W_{DD} \end{bmatrix};$$

$$Q = - \begin{bmatrix} (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta_7 + \Theta_3 \\ (\Theta_4 V_0 + \Theta_5) \Theta_7 + \Theta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_D \end{bmatrix}.$$

Однако такой путь не целесообразен, так как входящие в эти формулы матрицы содержат нулевые блоки. Поэтому имеет смысл перейти к более подробной записи, сделав по пути некоторые преобразования.

Рассмотрим сначала блок

$$W_{00} = (\Theta_1 V_0 + \Theta_2) \Theta'_1 = \Theta_1 V_0 \Theta'_1 + \Theta_2 \Theta'_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{YY} & 0 \\ 0 & P_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi'_{YY} & 0 \\ 0 & P'_{ZZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} \\ P_{ZY} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi'_{YY} & 0 \\ 0 & P'_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Pi_{YY} Y_0 \Pi'_{YY} & \Pi_{YY} N_0 P'_{ZZ} \\ P_{ZZ} M_0 \Pi'_{YY} & P_{ZZ} Z_0 P'_{ZZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \Pi_{YZ} P'_{ZZ} \\ P_{ZY} \Pi'_{YY} & 0 \end{bmatrix}.$$

Из общего свойства  $\Pi P' = 0$  следует, что произведение любой строки матрицы  $\Pi$  на любой столбец матрицы  $P'$  (или строку матрицы  $P$ ) дает нулевую матрицу. Поэтому в нашем случае можно записать:

$$[00 \Pi_{YY} \Pi_{YZ} \Pi_{YQ} \Pi_{YJ}] [P_{ZZ} P_{ZS} P_{ZY} P_{ZZ} 00],$$



откуда  $\Pi_{YY}P'_{ZY} + \Pi_{YZ}P'_{ZZ} = 0$ , т. е.  $\Pi_{YY}P'_{ZY} = -\Pi_{YZ}P'_{ZZ}$ . Обозначив  $\Pi_{YZ}P'_{ZZ} = \Theta_0$ , можно записать  $\Pi_{YY}P'_{ZY} = -\Theta_0$  или  $P_{ZY}P'_{YY} = -\Theta'_0$ . Таким образом, рассматриваемый блок преобразуется к виду:

$$W_{00} = \begin{bmatrix} \Pi_{YY}Y_0\Pi'_{YY} & \Pi_{YY}N_0P'_{ZZ} + \Theta_0 \\ P_{YY}M_0\Pi'_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ}Z_0P'_{ZZ} \end{bmatrix}$$

Рассматривая аналогично остальные блоки, получаем развернутые выражения для матрично-векторных параметров:

$$W = \begin{array}{cccc} & \xi_{YT} & \eta_{ZN} & \zeta_S & \varepsilon_Q \\ \hline & \Pi_{YY}Y_0\Pi'_{YY} & \Pi_{YY}N_0P'_{ZZ} + \Theta_0 & \Pi_{YY}N_D & \Pi_{YY}Y_D \\ \hline & P_{ZZ}M_0\Pi'_{YY} - \Theta_0 & P_{ZZ}Z_0P'_{ZZ} & P_{ZZ}Z_D & P_{ZZ}M_D \\ \hline & \Pi_{SY}Y_0\Pi'_{YY} & \Pi_{SY}N_0P'_{ZZ} + \Pi_{SZ}P'_{ZZ} & I + \Pi_{SY}N_D & \Pi_{SY}Y_D \\ \hline & P_{QZ}M_0\Pi'_{YY} + P_{QY}\Pi'_{YY} & P_{QZ}Z_0P'_{ZZ} & P_{QZ}Z_D & I + P_{QZ}M_D \end{array};$$

$$Q = \begin{array}{cc} & \varepsilon & \eta \\ \hline & \Pi_{YY}Y_0\Pi'_{EY} & \Pi_{YY}N_0P'_{JZ} + \Pi_{YJ} \\ \hline & P_{ZZ}M_0\Pi'_{EY} + P_{ZE} & P_{ZZ}Z_0P'_{JZ} \\ \hline & \Pi_{SY}N_D\Pi'_{EY} & \Pi_{SY}Y_D P'_{JZ} + \Pi_{SJ} \\ \hline & P_{QZ}Z_D\Pi'_{EY} + P_{QE} & P_{QZ}M_D P'_{JZ} \end{array}$$

Определив матрицы  $W$  и  $Q$ , из решения уравнения  $WX = QF$  можно найти вектор  $X$ . Если интерес представляют только искомые величины, зафиксированные короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, достаточно определить вектор  $X_D$ .

В частном случае, когда управляющие короткозамкнутые и разомкнутые дуги отсутствуют, матрично-векторные параметры выражаются значительно проще

$$W = \begin{array}{|c|c|} \hline \Pi_{YY}Y_0\Pi_{YY}^t & \Pi_{YY}N_0P_{ZZ}^t \vdash \Theta_0 \\ \hline P_{ZZ}M_0\Pi_{YY}^t - \Theta_0 & P_{ZZ}Z_0P_{ZZ}^t \\ \hline \end{array}, Q = \begin{array}{|c|c|} \hline \Pi_{YY}Y_0\Pi_{EY}^t & \Pi_{YY}N_0P_{JZ}^t + \Pi_{YJ} \\ \hline P_{ZZ}M_0\Pi_{EY}^t + P_{ZE} & P_{ZZ}Z_0P_{JZ}^t \\ \hline \end{array}$$

а вектор  $X$  содержит только компоненты векторов  $\xi_{YT}$  и  $\eta_{ZV}$ .

### 15.4. Оптимальное разбиение дуг

Использование сокращенного координатного базиса имеет смысл тогда, когда достигается значительное уменьшение размеров матрицы  $W$ . Заметим, что уже при сокращении числа координат на 30% количество клеток матрицы уменьшается примерно вдвое, а трудоемкость решения системы уравнений снижается во много раз. Следует стремиться достигнуть максимально возможного сокращения координатного базиса, что осуществляется с помощью *оптимального разбиения* взаимоопределенных дуг между множествами  $y$ -дуг и  $z$ -дуг.

Прежде чем изложить алгоритм оптимального разбиения взаимоопределенных дуг, найдем общее соотношение для количества сокращаемых координат при заданном разбиении. Так как вектор  $X$  не содержит составляющих векторов  $\xi_{YN}$  и  $\eta_{ZT}$ , то ясно, что сокращаются сечения, определяемые  $z$ -ветвями дерева ( $z$ -сечения), и контуры, определяемые  $y$ -хордами ( $y$ -контуры).

Рассмотрим суграф, содержащий только  $e$ - и  $y$ -дуги (а также все  $p$  вершин) исходного графа. Пусть он состоит из  $k_s$  компонентов (изолированных вершины также считаются компонентами суграфа), а число всех  $e$ - и  $y$ -дуг равно  $q_s$ . Поскольку фундаментальное дерево формируется с преимуществом  $e$ - и  $y$ -дуг, то все сечения этого суграфа несокращаемые, а все контуры сокращаемые. Очевидно, количество таких сокращаемых контуров равно цикломатическому числу суграфа, т. е.  $\sigma' = q_s - p + k_s$ . Количество несокращаемых сечений равно рангу суграфа  $p - k_s$ , а сокращается  $v' = v - (p - k_s)$  сечений. Следовательно, общее число сокращаемых координат

$$\mu = \sigma' + v' = (q_s - p + k_s) + (v - p + k_s) = q_s + 2k_s + v - 2p.$$

Из соотношения для ранга исходного графа  $v - p - k$ , где  $k$  — число его компонентов, следует  $p = v + k$ , на основе чего полученную формулу для числа сокращаемых координат можно представить в виде:

$$\mu = q_s + 2(k_s - k) - v = q_s + 2\Delta k - v,$$

где  $\Delta k$  — превышение по числу компонентов  $e$ - и  $y$ -суграфа над исходным графом.

Ранг  $v$  является характеристикой графа, которая не зависит от типа дуг. Поэтому число сокращаемых координат данного графа определяется

только значениями величин  $q_s$  и  $\Delta k$ , т. е. разбиением взаимоопределенных дуг. Каждая новая  $y$ -дуга увеличивает  $\mu$  на единицу, а объединение двух частей суграфа (т. е. уменьшение  $\Delta k$  на единицу) уменьшает  $\mu$  на два. Отсюда ясно, что к  $y$ -дугам следует относить, прежде всего, те взаимоопределенные дуги, которые не связывают отдельных частей данного графа. Дуги, связывающие какие-либо две части суграфа, целесообразно относить к  $y$ -дугам, если их не меньше двух.

Практически оптимальное разбиение удобно осуществлять на  $w$ -графе взаимоопределенных дуг, который получается из исходного графа сокращением (стягиванием)  $e$ - и  $y$ -дуг и удалением  $z$ -,  $j$ -дуг (при этом, короткозамкнутые  $s$ -дуги также сокращаются, а разомкнутые  $q$ -дуги удаляются). К  $y$ -дугам следует отнести петли и параллельные дуги  $w$ -графа. Каждая новая  $y$ -дуга сокращается, и процесс заканчивается тогда, когда в  $w$ -графе не останется петель и параллельных дуг. Оставшиеся дуги  $w$ -графа после этого относятся к  $z$ -дугам.

Например, для графа на рис. 1, а ( $y$ -дуги изображены сплошными тонкими линиями,  $z$ -дуги — штриховыми, а  $w$ -дуги — жирными линиями) получаем граф взаимоопределенных дуг, приведенный на рис. 1, б.

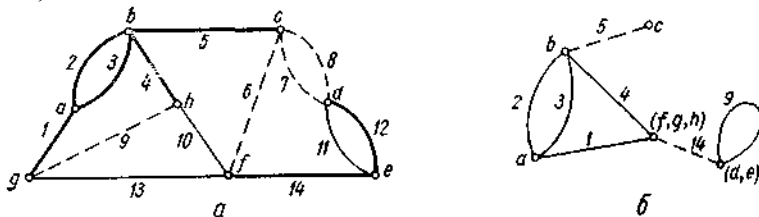


Рис. 1. Оптимальное разбиение взаимоопределенных дуг:  
 а — исходный граф; б — граф взаимоопределенных дуг с разбиением на  $y$ -дуги (1, 2, 3, 4, 9) и  $z$ -дуги (5, 14)

К  $y$ -дугам относим, прежде всего, петлю 9 и параллельные дуги 2 и 3. После их закорачивания снова появляются параллельные дуги 1 и 4, которые также относим к  $e$ -дугам. Дуги 5 и 14 идентифицируются как  $z$ -дуги. При полученном разбиении  $\mu=8+2-2=7=5$ .

## 15.5. Определение матрично-векторных параметров

При моделировании в сокращенном координатном базисе целесообразно предварительно провести оптимальное разбиение

взаимоопределенных дуг. К таким дугам относятся обычно дуги двухполюсных компонентов. Однако если требуется получить уравнения в дифференциальной форме, то дуги реактивных двухполюсников идентифицируются как  $y$ -дуги или  $z$ -дуги в соответствии с их полюсными уравнениями, которые выражают соответственно поперечные или продольные переменные через производные.

Матрично-векторные параметры системы  $W$  и  $Q$  можно определить путем операций над топологическими и компонентными субматрицами в соответствии с выражениями, полученными в (п.15.3). В качестве примера рассмотрим гидромеханическую систему, граф которой с нормальным деревом изображен на рис. 2, а.

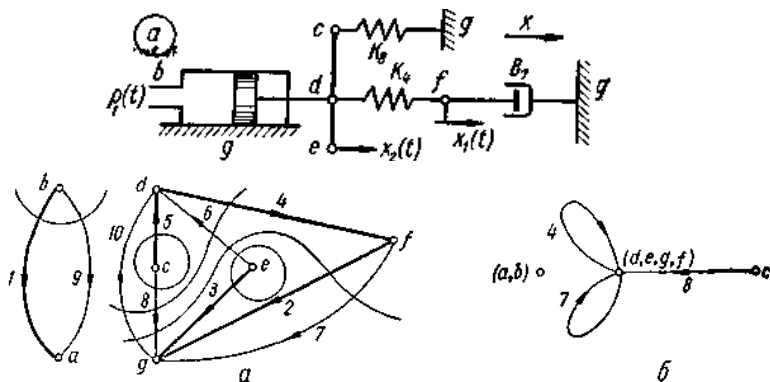


Рис. 2. Граф гидромеханической системы (а) и граф взаимопределенных дуг (б)

Как видно из графа взаимопределенных дуг (рис. 2, б), получающегося из графа системы закорачиванием  $e$ -дуг (1, 2, 3) и  $y$ -дуг (6, 9, 10), а также удалением  $z$ -дуги (5), по условию оптимального разбиения дуги 4, 7 идентифицируются как  $y$ -дуги, а 8 — как  $z$ -дуга. При этом  $q_s = 8$ ,  $\Delta k_s = 1$ ,  $v = 5$ , следовательно, число сокращаемых координат  $\mu = 8 + 2 \cdot 1 - 5 = 5$ . Топологические матрицы имеют вид:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \Pi_{EY} & \Pi_{EZ} \\ 0 & \Pi_{YY} & \Pi_{YZ} \\ 0 & 0 & \Pi_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8	
1	1						1				1
2		1			-1	1		1			1
3			1		1						
4				1	-1			1			1
5									1		1

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{YE} & P_{YY} & 0 \\ P_{ZE} & P_{ZY} & P_{ZZ} \end{bmatrix} =$$

	1	2	3	4	6	7	9	10	5	8	
6		1	-1	1	1						
7		-1				1					
9	-1						1				
10		-1		-1				1			
8		-1		-1					-1	1	

Компонентная матрица  $V_0$  запишется следующим образом (матрица  $V_D$  отсутствует, так как граф не содержит короткозамкнутых и разомкнутых управляющих дуг):

$$V_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & N_0 \\ M_0 & Z_0 \end{bmatrix} =$$

	4	6	7	9	10	5	8	
4	$K_4$							4
6						$n$		6
7			$\rho B_7$					7
9					$S$			9
10				$-s$				10
5		$-n$						5
8							$\frac{1}{K_8}$	8

Тройные произведения матриц, входящие в блоки матрично-векторных параметров  $W$  и  $Q$ , можно получить путем операций над строками и

столбцами соответствующих блоков компонентной матрицы  $V_0$  подобно тому, как это делалось при формировании математической модели в однородных системах координат (п.15.5) Так как

$$\Theta_0 = \Pi_{YZ} P'_{ZZ} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [0 \ 1].$$

то записав матрицу  $W$  и вектор  $Q$ , приходим к уравнениям в сокращенном координатном базисе:

$$\begin{bmatrix} K_3 & n+1 \\ -n-1 & 1/K_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & & \\ & n+1 & -n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

### 15.6. Операции над столбцами

Обычно компонентные матрицы  $V_0$  и  $V_D$  сильно разреженные, а их размеры определяются числом  $q_x$  дуг полюсных графов компонентов и числом  $q_D$  управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг (матрица  $V_0$  квадратная  $q_x$ -го порядка,  $V_D$  имеет размер  $q_x \times q_D$ ). Работать с такими матрицами неудобно, особенно, если система содержит большое число компонентов.

Заслуживаем внимания другой способ определения матрично-векторных параметров системы в сокращенном координатном базисе. Он основан на непосредственном введении параметров каждой дуги в топологические уравнения:

$$\begin{aligned} \Theta_1 X' + \Theta_2 X'' + \Theta_3 F &= 0; \\ X_D + \Theta_4 X' + \Theta_5 X'' + \Theta_6 F &= 0, \end{aligned}$$

которые удобно представить в объединенной форме:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ X'' \\ X_D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Theta_3 \\ \Theta_6 \end{bmatrix} F = 0.$$

Компонентные уравнения линейных систем выражают каждую составляющую  $x'_k$  вектора  $X'$  через составляющие  $x_i$  векторов  $X''$  и  $X_D$  в виде суммы

$$x'_k = \sum_r w_{kr} x_r,$$

где  $w_{kr}$  — параметер, который характеризует зависимость  $x'_k$  от  $x_r$  (для реактивных компонент  $w_{kr}$  содержит операторы дифференцирования или интегрирования). Для исключения переменной  $x'_k$  из топологического уравнения достаточно соответствующий этой переменной столбец матрицы

$$\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & 0 \\ \Theta_4 & \Theta_5 & 1 \end{bmatrix}$$

умножить на параметер  $w_{kr}$  и сложить со столбцом, соответствующим переменной  $x_r$  (для всех значений  $r$ , при которых  $w_{kr}$  отлично от нуля). После этого столбец, соответствующий переменной  $x_k$ , удаляется из матрицы  $\Theta$ , а переменная  $x_k$  исключается из вектора  $X'$ . Таким способом можно ввести параметры всех компонент, в результате чего вектор  $X'$  исключается из исходных топологических уравнений, и они преобразуются к виду:

$$[\Lambda_X \Lambda_D] \begin{bmatrix} X'' \\ X_D \end{bmatrix} + A_F F = 0.$$

После этого остается подставить  $X'' = \Theta'_1 X_0 + \Theta_7 F$  и в результате получаем

$$[\Lambda_X \Theta'_1 \Lambda_D] \begin{bmatrix} X_0 \\ X_D \end{bmatrix} = - (A_F \Theta_7 + A_F) F,$$

что соответствует уравнению системы  $WX = QF$  в сокращенном координатном базисе, где

$$W = [\Lambda_X \Theta'_1 \Lambda_D]; \quad Q = - (A_F \Theta_7 + A_F)$$

И на этом этапе алгебраические операции над матрицами можно заменить операциями над столбцами матрицы  $[\Lambda_X \Lambda_D \Lambda_F]$ . Для этого достаточно столбцы матрицы  $\Lambda_X$  преобразовать согласно уравнению  $X'' = \Theta'_1 X_0 + \Theta_7 F$ , которому соответствуют соотношения:

$$\xi_Y = \Pi'_{YY} \xi_{YT} + \Pi'_{EY} \epsilon; \quad \eta_Z = P'_{ZZ} \eta_{ZN} + P'_{JZ} v$$

или

$$\xi_{YN} = \pi'_{YY} \xi_{YT} + \pi'_{EY} \epsilon; \quad \eta_{ZT} = \rho'_{ZZ} \eta_{ZN} + \rho'_{JZ} v$$

В результате в матрице  $\Lambda_X$  останутся только столбцы для вектора  $X_0 = (\xi_{YT}, \eta_{ZN})$ , которые совместно с матрицей  $\Lambda_D$  образуют матрицу  $W$ , а матрица  $\Lambda_F$  преобразуется в матрицу  $-Q$ . Изложенный способ определения матрично-векторных параметров иллюстрируется на рис. 3, а его применение к рассмотренной в (п.15.5) гидромеханической системе — на рис. 4.

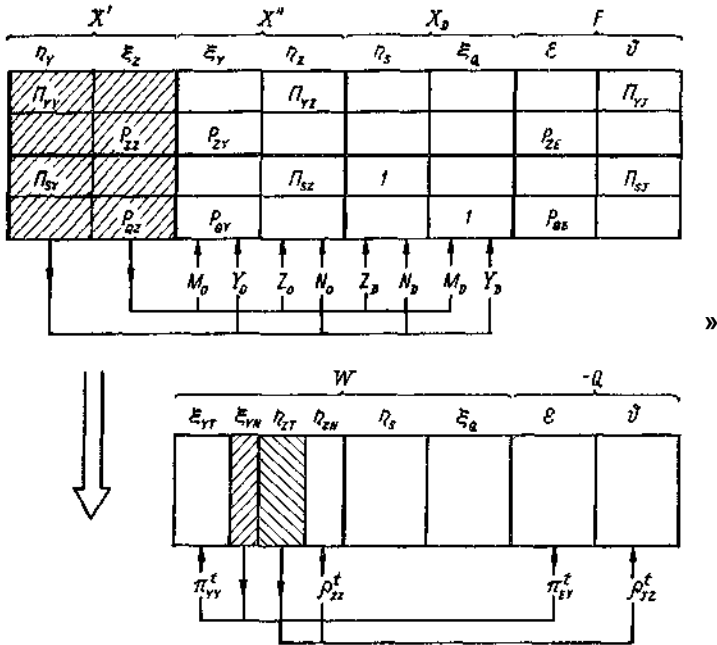


Рис. 3. Определение матрично-векторных параметров структуры линейной системы в сокращенном координатном базисе



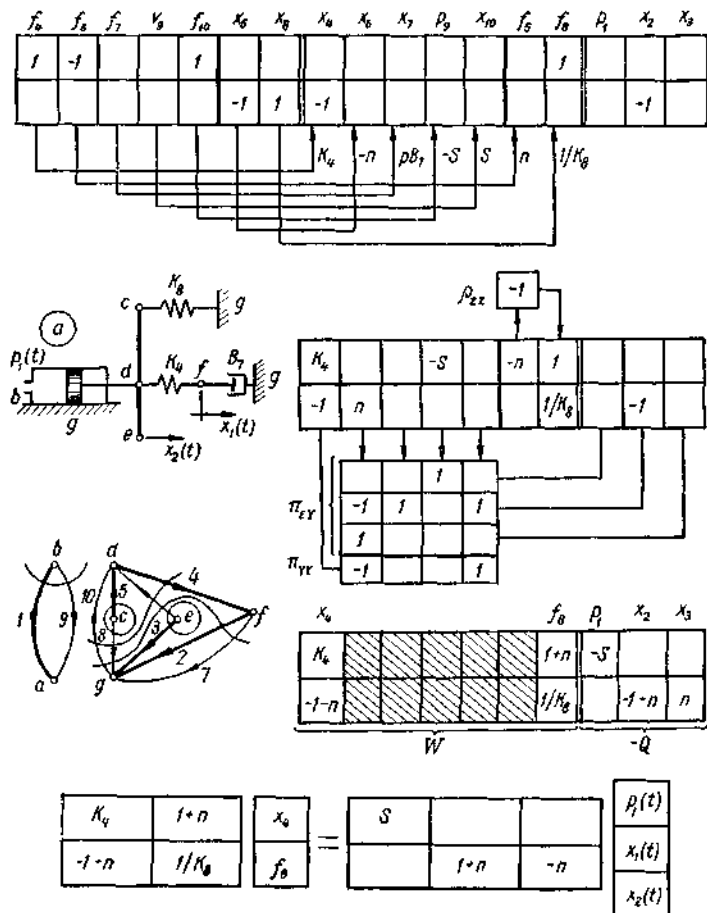


Рис. 4. Определение матрично-векторных параметров структуры гидро-механической системы

## 15.7. Уравнения переменных состояния

Разобьем множество  $u$ -дуг на реактивные (емкостные)  $C$ -дуги и безреактивные  $G$ -дуги, а множество  $z$ -дуг — на реактивные (индуктивные)  $L$ -дуги и безреактивные  $R$ - дуги. Нормальное дерево строится в соответствии с иерархией дуг ( $E, S, C, G, R, L, Q, J$ ), и матрица сечений имеет вид:

$$\Pi = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & \pi_{EC} & \pi_{EG} & \pi_{ER} & \pi_{EL} & \pi_{EQ} & \pi_{EJ} \\ \hline & 1 & & & & \pi_{SC} & \pi_{SG} & \pi_{SR} & \pi_{SL} & \pi_{SQ} & \pi_{SJ} \\ \hline & & 1 & & & \pi_{CC} & \pi_{CG} & \pi_{CR} & \pi_{CL} & \pi_{CQ} & \pi_{CJ} \\ \hline & & & 1 & & & \pi_{GG} & \pi_{GR} & \pi_{GL} & \pi_{GQ} & \pi_{GJ} \\ \hline & & & & 1 & & & \pi_{RR} & \pi_{RL} & \pi_{RQ} & \pi_{RJ} \\ \hline & & & & & & & & & \pi_{LQ} & \pi_{LJ} \\ \hline \end{array}$$

На основе этой матрицы, учитывая, что  $\eta_Q = 0$  и  $\xi_S = 0$ , а также используя зависимость  $\rho = -\pi'$ , можно записать две системы топологических уравнений. Одна из них служит исходной для формирования уравнений переменных состояния в сокращенном координатном базисе:

$$\left. \begin{array}{l} \eta_S + \pi_{SC}\eta_{CN} + \pi_{SG}\eta_{GN} + \pi_{SR}\eta_{RN} + \pi_{SL}\eta_{LN} + \pi_{SJ}\vartheta = 0; \\ \eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} + \pi_{CG}\eta_{GN} + \pi_{CR}\eta_{RN} + \pi_{CL}\eta_{LN} + \pi_{CJ}\vartheta = 0; \\ \eta_{GT} + \pi_{GG}\eta_{GN} + \pi_{GR}\eta_{RN} + \pi_{GL}\eta_{LN} + \pi_{GJ}\vartheta = 0; \\ \xi_{RN} - \pi_{RR}'\xi_{RT} - \pi_{GR}'\xi_{GT} - \pi_{CR}'\xi_{CT} - \pi_{ER}'\xi = 0; \\ \xi_{LN} - \pi_{LL}'\xi_{LT} - \pi_{RL}'\xi_{RT} - \pi_{GL}'\xi_{GT} - \pi_{CL}'\xi_{CT} - \pi_{EL}'\xi = 0; \\ \xi_Q - \pi_{LQ}'\xi_{LT} - \pi_{RQ}'\xi_{RT} - \pi_{GQ}'\xi_{GT} - \pi_{CQ}'\xi_{CT} - \pi_{EQ}'\xi = 0. \end{array} \right\}$$

Параметры безреактивных компонентов можно вводить, как и ранее, преобразованием столбцов матрицы, соответствующей этой системе уравнений. Параметры реактивных компонентов вводятся в соответствии с компонентными уравнениями:

$$\eta_C = C \frac{d\xi_C}{dt}; \quad \xi_L = L \frac{d\xi_L}{dt},$$

где  $C$  и  $L$  — емкости и индуктивности электрических компонентов или их аналоги для компонентов другой физической природы.

Другая система топологических уравнений, соответствующая сокращаемым координатам, используется для удаления из исходной системы (после введения параметров компонентов) зависимых переменных  $\eta_{RT}$ ,  $\eta_{LT}$ ,  $\xi_{CN}$  и  $\xi_{RN}$ :

$$\eta_{RT} = -\pi_{RR}\eta_{RN} - \pi_{RL}\eta_{LN} - \pi_{RJ}v, \quad \eta_{LT} = -\pi_{LL}\eta_{LN} - \pi_{LJ}v;$$

$$\xi_{GN} = \pi'_{GG}\xi_{GT} + \pi'_{CG}\xi_{CT} + \pi'_{EG}\varepsilon; \quad \xi_{CN} = \pi'_{CC}\xi_{CT} + \pi'_{EC}\varepsilon.$$

Зависимые дифференциальные переменные исключаются на основании продифференцированных уравнений для  $\eta_{LT}$  и  $\xi_{CN}$ :

$$\frac{d\eta_{LT}}{dt} = -\pi_{LL} \frac{d\eta_{LN}}{dt} - \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi'_{CC} \frac{d\xi_{CT}}{dt} - \pi'_{EC} \frac{d\varepsilon}{dt}$$

При этом могут появиться производные задающих функций  $v(t)$  и  $\varepsilon(t)$  источников, для которых отводится необходимое количество столбцов (по числу ненулевых столбцов матриц  $\pi_{LJ}$  и  $\pi'_{EC}$ ).

Так как зависимые переменные  $\eta_{CN}$  и  $\xi_{LT}$  не входят в уравнения для G-сечений и R-контуров, то соответствующие члены можно исключить в соответствии с соотношениями для поперечных переменных:

$$\pi_{SC}\eta_{CN} = \pi_{SC}C_N \frac{d\xi_{CN}}{dt} = \pi_{SC}C_N \pi'_{CC} \frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{SC}C_N \pi'_{EC} \frac{d\varepsilon}{dt};$$

$$\eta_{CT} + \pi_{CC}\eta_{CN} = [1 \ \pi_{CC}] \begin{bmatrix} \eta_{CT} \\ \eta_{CN} \end{bmatrix} = \Pi_{CC}\eta_C =$$

$$= \Pi_{CC}C_N \pi'_{CC} \frac{d\xi_{CT}}{dt} + \pi_{CC}C_N \pi'_{EC} \frac{d\varepsilon}{dt};$$

и для продольных переменных:

$$\xi_{LN} - \pi'_{LL}\xi_{LT} = [-\pi'_{LL} \ 1] \begin{bmatrix} \xi_{LT} \\ \xi_{LN} \end{bmatrix} =$$

$$= P_{L} \xi_L = P_{LL}L_P \frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi'_{LL}L_L \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt};$$

$$\pi'_{LQ}\xi_{LT} = \pi'_{LQ}L_T \frac{d\eta_{LT}}{dt} = \pi'_{LQ}L_T \pi_{LL} \frac{d\eta_{LN}}{dt} + \pi'_{LQ}L_T \pi_{LJ} \frac{d\vartheta}{dt}, \quad n$$

где  $\Pi_{CC} = [1 \ \pi_{CC}]$ ;  $P_{LL} = [-\pi'_{LL} \ 1]$ ;  $C$  и  $L$  — матрицы параметров реактивных компонентов (при отсутствии индуктивных связей они диагональны), а  $C_N$  и  $L_T$  — их субматрицы, образованные соответственно из столбцов для C-хорд и L-ветвей дерева. Приведенные соотношения пригодны и для случаев, когда имеются индуктивные связи.

Процедура формирования уравнений для структур линейных систем с использованием сокращенного координатного базиса иллюстрируется на рис. 5.

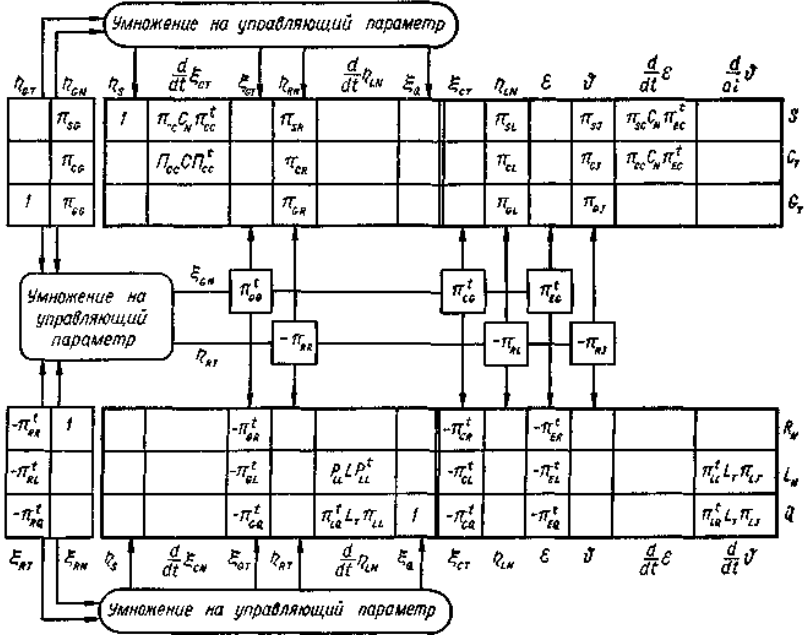


Рис. 5. Формирование уравнений линейной системы в сокращенном координатном базисе.

После объединения преобразованных матриц достаточно разделить алгебраические и дифференциальные переменные, применив алгоритм

Гаусса—Жордана по столбцам для  $\eta_S$ ,  $\frac{d\xi_{CT}}{dt}$ ,  $\xi_{CT}$ ,  $\eta_{RN}$ ,  $\frac{d\eta_{LN}}{dt}$ ,  $\xi_Q$ .

В результате квадратная матрица из этих столбцов преобразуется в единичную, а остальная часть преобразованной матрицы содержит необходимую информацию для записи уравнений переменных состояния и выходных уравнений.

Пусть после применения алгоритма Гаусса—Жордана получена матрица:

$\eta_S$	$\frac{d\xi_{CT}}{dt}$	$\xi_{GT}$	$\eta_{RN}$	$\frac{d\eta_{LN}}{dt}$	$\xi_Q$	$\xi_{CT}$	$\eta_{LN}$	$\varepsilon$	$\vartheta$	$\frac{d\varepsilon}{dt}$	$\frac{d\eta}{dt}$
1						$W_{SC}$	$W_{SL}$	$W_{SE}$	$W_{SJ}$	$W'_{SE}$	$W'_{SJ}$
	1					$W_{CC}$	$W_{CI}$	$W_{CE}$	$W_{CJ}$	$W'_{CE}$	$W'_{CJ}$
		1				$W_{GC}$	$W_{GI}$	$W_{GE}$	$W_{GJ}$	$W'_{GE}$	$W'_{GJ}$
			1			$W_{RC}$	$W_{RI}$	$W_{RE}$	$W_{RJ}$	$W'_{RE}$	$W'_{RJ}$
				1		$W_{LC}$	$W_{LI}$	$W_{LE}$	$W_{LJ}$	$W'_{LE}$	$W'_{LJ}$
					1	$W_{QC}$	$W_{QI}$	$W_{QE}$	$W_{QJ}$	$W'_{QE}$	$W'_{QJ}$

Тогда уравнения переменных состояния запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{CC} & W_{CI} \\ W_{LC} & W_{LI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{CE} & W_{CJ} \\ W_{LE} & W_{LJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W'_{CE} & W'_{CJ} \\ W'_{LE} & W'_{LJ} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Выходное уравнение получается из тех строк, которые соответствуют искомым переменным. Если все искомые переменные зафиксированы короткозамкнутыми и разомкнутыми дугами, то оно формируется из соответствующих строк уравнения:

$$\begin{bmatrix} \eta_S \\ \xi_Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{SC} & W_{SL} \\ W_{QC} & W_{QI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{CT} \\ \eta_{LN} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{SE} & W_{SJ} \\ W_{QE} & W_{QJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W'_{SE} & W'_{SJ} \\ W'_{QE} & W'_{QJ} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

На рис. 6 изложенный алгоритм иллюстрируется для электрической схемы, которая рассматривалась в (п. 14.7).

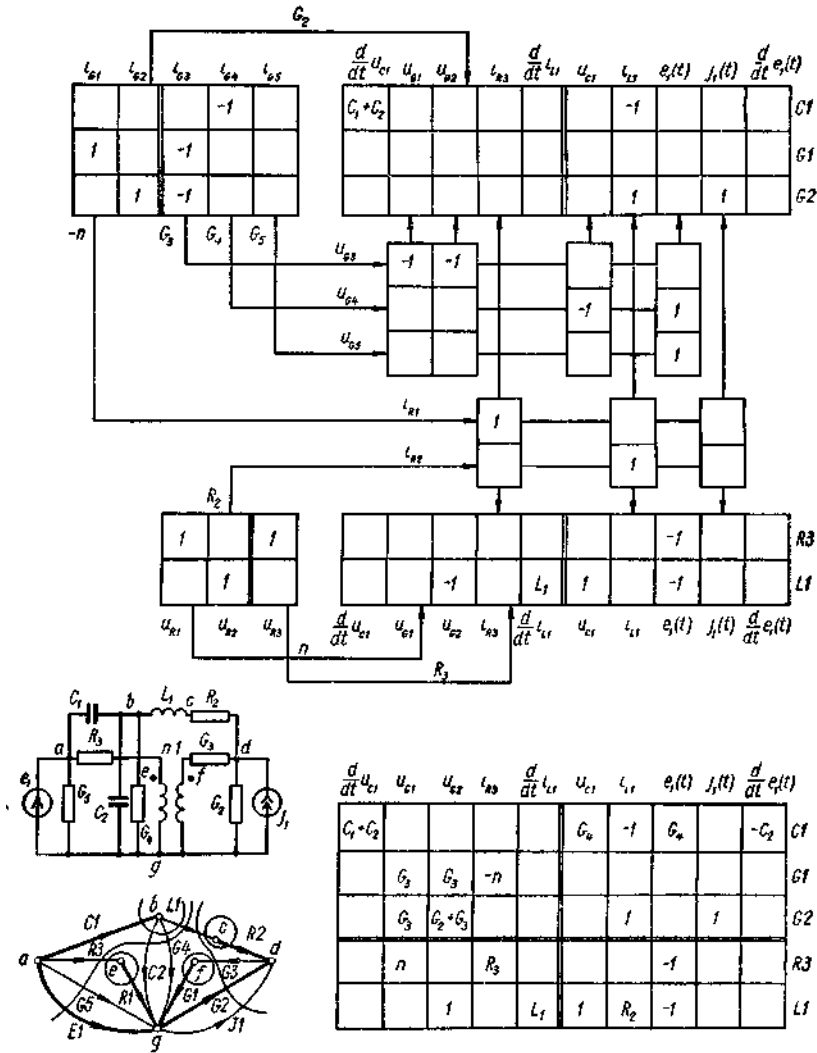


Рис. 6. Формирование уравнений структуры электрической схемы.

Нормальное дерево выбрано в соответствии с оптимальным разбиением взаимопределенных дуг. Матрица сечений для хорд имеет вид:

	<i>C2</i>	<i>G3</i>	<i>G4</i>	<i>G5</i>	<i>R3</i>	<i>L1</i>	<i>J1</i>	
$\pi =$	1		1	1	1	1		<i>E1</i>
	-1		-1			-1		<i>C1</i>
		-1						<i>G1</i>
		-1				1	1	<i>G2</i>
					-1			<i>R1</i>
						-1		<i>R2</i>

После преобразования полученной матрицы в сокращенном координатном базисе с помощью алгоритма Гаусса—Жордана легко записать уравнения переменных состояния и требуемые выходные уравнения.

### **15.8. Особенности сокращенного координатного базиса**

Главная положительная особенность моделирования структур систем в сокращенном координатном базисе состоит в том, что топологически зависимые переменные (дифференциальные  $\eta_{Cn}$ ,  $\xi_{LT}$  алгебраические  $\eta_{Gn}$ ,  $\xi_{RT}$  исключаются путем алгебраического суммирования столбцов матриц без применения алгоритма Гаусса—Жордана или подобной ему процедуры. При этом ход вычислительного процесса подсказывается самой структурой системы и осуществляется наилучшим образом с учетом всех ее особенностей. Дальнейшее исключение переменных вплоть до получения уравнений переменных состояния и выходных уравнений проводится на матрице минимальных размеров, благодаря чему уменьшается опасность накопления ошибок вычислений за счет неудачного выбора опорных элементов. Существенно снижается и общий объем вычислительной работы. Даже в таком простом примере,

как на рис. 6, порядок матрицы, которую требовалось преобразовать к единичной, уменьшился вдвое по сравнению с полученной в (п.14.7).

При реализации изложенного алгоритма в сокращенном координатном базисе на вычислительных машинах достигается предельно возможная экономия оперативной памяти. Для матрицы схемы отводится требуемый массив памяти, а столбцы для переменных  $\eta_G$ ,  $\xi_R$  (рис. 5) могут вызываться поочередно по мере введения параметров компонентов. Размеры матрицы схемы и каждого из ее блоков известны уже после формирования дерева, и поэтому при программировании можно воспользоваться динамическим распределением памяти, отводя в каждом случае для этой матрицы столько ячеек, сколько требуется в соответствии с характером решаемой задачи.

Благодаря тому, что нормальное дерево формируется с преимуществом короткозамкнутых дуг перед емкостными и индуктивными дуг перед разомкнутыми, в сокращенном координатном базисе отсутствуют топологически зависимые дифференциальные переменные даже в тех случаях, когда имеются особые контуры с коротко-замкнутыми дугами и особые сечения с разомкнутыми дугами. Например, для схемы рис. 8, рассмотренной в (п.14.11), нормальное дерево показано на рис. 7 (по условию оптимального разбиения все резисторы представляются  $G$ -дугами).

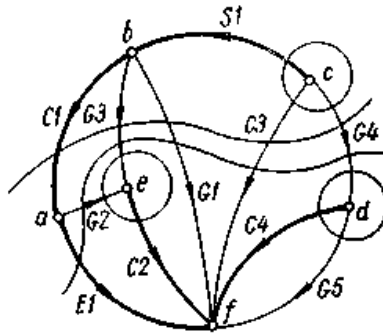


Рис. 7. Нормальное графа схемы с особым контуром, содержащим короткозамкнутую дугу.

Так как в дерево не вошла дуга  $C3$ , то ее напряжение  $u_{C3}$  заведомо будет отсутствовать в уравнениях схемы и при формировании математической модели не потребуется ее исключение (при  $n = 2$  будет иметь место компонентная зависимость переменных, которая исключается по изложенному ранее способу).



Изложенный алгоритм (см. рис. 5) построен при некоторых ограничениях на характер управляющих дуг. Кроме короткозамкнутых и разомкнутых дуг, ими могут быть только безреактивные дуги полюсных графов компонентов, причем  $G$ -дуги не должны управлять по поперечной величине (току), а  $R$ -дуги — по продольной величине (напряжению). Это весьма слабое ограничение, так как в любом случае можно ввести необходимое количество управляющих короткозамкнутых и разомкнутых дуг. Кроме того, чаще всего управляющими являются взаимоопределенные дуги и их можно отнести к  $R$ -дугам, если они управляют по поперечной величине, или к  $G$ -дугам, если они управляют по продольной величине.

### **15.9. Обобщенная процедура**

Обобщим изложенную процедуру формирования уравнений переменных состояния на структуры нелинейных систем, сняв одновременно ограничения на характер управляющих дуг. При этом воспользуемся обозначениями и терминами электрических величин, распространяя полученные результаты на другие физические системы по аналогии.

При формировании фундаментального дерева, определяющего систему координат, дуги нелинейных двухполюсников распределяются между деревом и дополнением следующим образом: дуги управляемых током двухполюсников помешаются в дерево (после  $C$  дуг), а управляемых напряжением — в дополнение (перед  $L$ -дугами). Взаимоопределенные дуги распределяются между деревом и дополнением произвольно. При этом матрица сечений имеет вид:

	<i>I</i>	<i>S</i>	<i>C<sub>T</sub></i>	<i>H<sub>T</sub></i>	<i>G<sub>T</sub></i>	<i>R<sub>T</sub></i>	<i>I<sub>T</sub></i>	<i>C<sub>N</sub></i>	<i>G<sub>N</sub></i>	<i>R<sub>N</sub></i>	<i>H<sub>N</sub></i>	<i>L<sub>N</sub></i>	<i>I</i>		
<b>Π=</b>	1							$\pi_{LC}$	$\pi_{FG}$	$\pi_{EP}$	$\pi_{EH}$	$\pi_{EI}$	$\pi_{EQ}$	$\pi_{EJ}$	<i>E</i>
		1						$\pi_{SC}$	$\pi_{SI}$	$\pi_{SK}$	$\pi_{SH}$	$\pi_{SI}$	$\pi_{SQ}$	$\pi_{SJ}$	<i>S</i>
			1					$\pi_{CC}$	$\pi_{CG}$	$\pi_{CI}$	$\pi_{CH}$	$\pi_{CI}$	$\pi_{CQ}$	$\pi_{CJ}$	<i>C<sub>T</sub></i>
				1				$\pi_{HG}$	$\pi_{HR}$	$\pi_{HH}$	$\pi_{HL}$	$\pi_{HQ}$	$\pi_{HJ}$	<i>H<sub>T</sub></i>	
					1			$\pi_{GG}$	$\pi_{GR}$	$\pi_{GH}$	$\pi_{GI}$	$\pi_{GQ}$	$\pi_{GJ}$	<i>G<sub>T</sub></i>	
						1			$\pi_{FR}$	$\pi_{RH}$	$\pi_{RI}$	$\pi_{RQ}$	$\pi_{RJ}$	<i>R<sub>T</sub></i>	
							1				$\pi_{LI}$	$\pi_{LQ}$	$\pi_{LJ}$	<i>L<sub>T</sub></i>	

Для исключения топологически зависимых алгебраических переменных наряду с соотношениями

$$u_{CN} = \pi'_{CC} u_{CT} + \pi'_{CE} e(t); \quad i_{LT} = -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} f(t).$$

используются соотношения:

$$u_{GN} = \pi'_{GG} u_{GT} + \pi'_{NG} u_{HT} + \pi'_{CG} u_{CT} + \pi'_{GE} e(t);$$

$$i_{RT} = -\pi_{RR} i_{RN} - \pi_{RH} i_{HN} - \pi_{RL} i_{LN} - \pi_{RJ} f(t).$$

Обобщенная процедура формирования уравнения структуры нелинейной системы в сокращенном координатном базисе показана на рис. 8.

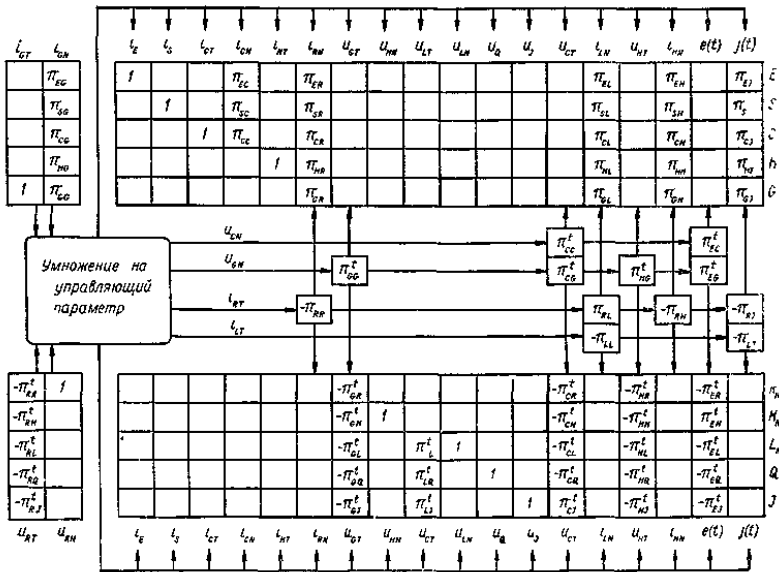


Рис. 8. Обобщенная процедура формирования математической модели структуры в сокращенном координатном базисе.

На этом этапе вводятся параметры только безреактивных компонентов, представленных  $G$ -дугами и  $R$ -дугами. Управляющей может быть любая дуга, в том числе и дуги источников. Единственное ограничение на характер управляющих дуг состоит в том, что  $G$ -дуги не должны управлять по току, а  $R$ -дуги — по напряжению. Это ограничение не существенно для резисторов, так как управляющие по току резисторы можно всегда представить как  $R$ -дуги, а управляющие по напряжению резисторы — как  $G$ -дуги (при этом такие резисторы исключаются из множества взаимопределенных  $w$ -дуг и не подлежат оптимальному разбиению).

Управляемые  $G$ -дуги зависимых источников тока могут управлять другими источниками только по напряжению, а управляемые  $R$ -дуги зависимых источников напряжения — только по току. Таким образом, остается наложить запрет на управление  $G$ -дугами зависимых источников тока по току и  $R$ -дугами зависимых источников напряжения — по напряжению. Если такая ситуация все же имеет место, то она легко устраняется на этапе подготовки данных путем преобразования управляющих параметров. Пусть, например, зависимый источник тока, управляемый напряжением  $u_j$  некоторого двухполюсника и описываемый уравнением  $i_k = g u_j$ , сам управляет по

току источником напряжения. Тогда последний можно представить уравнением  $u_s = r i_k = r g u_j = m u_j$  и считать, что он также управляется напряжением  $u_j$  двухполюсника с управляющим параметром  $m = r g$ . Аналогично преобразуются управляющие параметры и в других подобных случаях.

Излагаемая процедура формирования уравнений допускает управление зависимыми источниками и со стороны независимых источников как по току, так и по напряжению. Однако если независимые источники напряжения не управляют по току, а независимые источники тока — по напряжению, то переменные  $i_C$  и  $u_J$  можно исключить из системы уравнений путем удаления соответствующих им столбцов и строк. Это обусловлено тем, что в столбцах для таких переменных имеется единственный ненулевой элемент (единица), расположенный в исключаемой строке.

### 15.10. Введение реактивных параметров

После введения параметров безреактивных двухполюсников по процедуре, представленной на рис. 8, получаем матричное уравнение в виде:

$$\begin{aligned} & \Lambda_E i_E + \Lambda_S i_S + \Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} + \Lambda_{HT} i_{HT} + \Lambda_{RN} i_{RN} + \Lambda_{GT} i_{GT} + \\ & + \Lambda'_{HN} u_{HN} + \Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} + \Lambda'_{Q} u_Q + \Lambda'_{J} u_J + \Lambda'_{CT} u_{CT} + \Lambda'_{LN} i_{LN} + \\ & + \Lambda'_{HT} u_{HT} + \Lambda_{HN} i_{HN} + \Lambda'_{E} e(t) + \Lambda'_{ij}(t) = 0. \end{aligned}$$

Реактивные параметры вводятся в соответствии с соотношениями для емкостей:

$$i_{CT} = C_T \frac{du_{CT}}{dt};$$

$$i_{CN} = C_N \frac{du_{CN}}{dt} = C_N \frac{d}{dt} (\pi_{CC}^t u_{CT} + \pi_{EC}^t e) = C_N \pi_{CC}^t \frac{du_{CT}}{dt} + C_N \pi_{EC}^t \frac{de}{dt}$$

и для индуктивностей

$$u_{LT} = L_T \frac{di_{LT}}{dt} = L_T \frac{d}{dt} (-\pi_{LL}^t i_{LN} - \pi_{LJ}^t j) = -L_T \pi_{LL}^t \frac{di_{LN}}{dt} - L_T \pi_{LJ}^t \frac{dj}{dt};$$

$$u_{LN} = L_N \frac{di_{LN}}{dt}.$$

Здесь  $C_T$  и  $C_N$  — матрицы емкостей;  $L_T$  и  $L_N$  — матрицы индуктивностей реактивных дуг фундаментального дерева и дополнения. С учетом приведенных соотношений слагаемые для реактивных переменных преобразуются следующим образом:

$$\Lambda_{CT} i_{CT} + \Lambda_{CN} i_{CN} = (\Lambda_{CT} C_T + \Lambda_{CN} C_N \pi'_{CC}) \frac{du_{CT}}{dt} + \Lambda_{CN} C_N \pi'_{EC} \frac{de}{dt};$$

$$\Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} = (\Lambda'_{LN} L_N - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LL}) \frac{di_{LN}}{dt} - \Lambda'_{LT} L_T \pi_{LJ} \frac{dj}{dt}.$$

Появление производных задающих напряжений  $e(t)$  и токов  $j(t)$  обусловлено наличием особых контуров и сечений, что индицируется ненулевыми субматрицами  $\pi_{EC}$  и  $\pi_{LJ}$ .

Матрицы  $C_T$  и  $C_N$  диагональные, а при отсутствии индуктивных связей диагональными являются также матрицы  $L_T$  и  $L_N$ . Поэтому реактивные параметры можно ввести по схеме, приведенной на рис. 9.

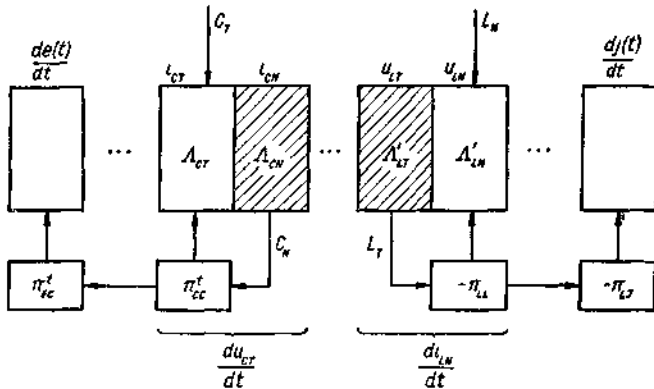


Рис. 9. Введение параметров реактивных компонентов

Столбцы для токов емкостных дуг умножаются на соответствующие емкости, после чего столбцы для емкостных хорд суммируются со столбцами для емкостных ветвей дерева в соответствии с субматрицей  $\pi'_{CC}$ . В результате получаем столбцы для производных напряжений емкостных ветвей дерева. Столбцы для производных независимых источников напряжения получаются в соответствии с оператором, которым служит субматрица  $\pi'_{EC}$ . Аналогично вводятся и параметры индуктивных двухполюсников.

Если между двухполюсниками дерева и дополнения имеются индуктивные связи, то необходимо исходить из соотношения

$$\begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} = L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix},$$

где  $L$  — матрица, элементами которой являются собственные и взаимные индуктивности.

Тогда члены полученного ранее матричного уравнения, которые содержат напряжения на индуктивностях, преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda'_{LT} u_{LT} + \Lambda'_{LN} u_{LN} &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] \begin{bmatrix} u_{LT} \\ u_{LN} \end{bmatrix} = \\ &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{LT} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} -\pi_{LL} i_{LN} - \pi_{LJ} \\ i_{LN} \end{bmatrix} = \\ &= [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \begin{bmatrix} -\pi_{LL} & \\ & 1 \end{bmatrix} \frac{d i_{LN}}{dt} - [\Lambda'_{LT} \Lambda'_{LN}] L \begin{bmatrix} -\pi_{LJ} \\ 0 \end{bmatrix} \frac{d j}{dt}. \end{aligned}$$

### 15.11. Разделение переменных

Формирование математической модели структуры в пространстве переменных состояния завершается разделением переменных. Эта процедура сводится по существу к решению уравнений в сокращенном координатном базисе относительно производных переменных состояния  $u_{CT}$  и  $i_{LN}$ , переменных нелинейных компонентов  $i_{HT}$  и  $u_{HN}$ , а также токов  $i_E$ ,  $i_s$ ,  $i_{RN}$  и напряжений  $u_J$ ,  $u_O$ ,  $u_{CT}$ .

Если параметры реактивных компонентов постоянны, то для разделения переменных можно использовать алгоритм Гаусса — Жордана по соответствующим столбцам. В результате получаем уравнения переменных состояния вместе с присоединенными к ним нелинейными и выходными уравнениями.

Если физическая система содежит нелинейные или параметрические реактивные компоненты, то целесообразно из ее уравнений, полученных с помощью обобщенной процедуры (см. рис. 8), исключить алгебраические переменные  $i_E$ ,  $i_{RN}$ ,  $u_{CT}$ ,  $u_J$ , а также те переменные из  $i_s$  и  $u_O$ , которые не являются выходными величинами. После этого на каждом шаге интегрирования вводятся реактивные параметры и полученные уравнения решаются методами неявного интегрирования или преобразуются к уравнениям переменных состояния.

На рис. 10 показано применение обобщенной процедуры формирования уравнений в сокращенном координатном базисе для транзисторного усилителя, рассмотренного в (14. 8).

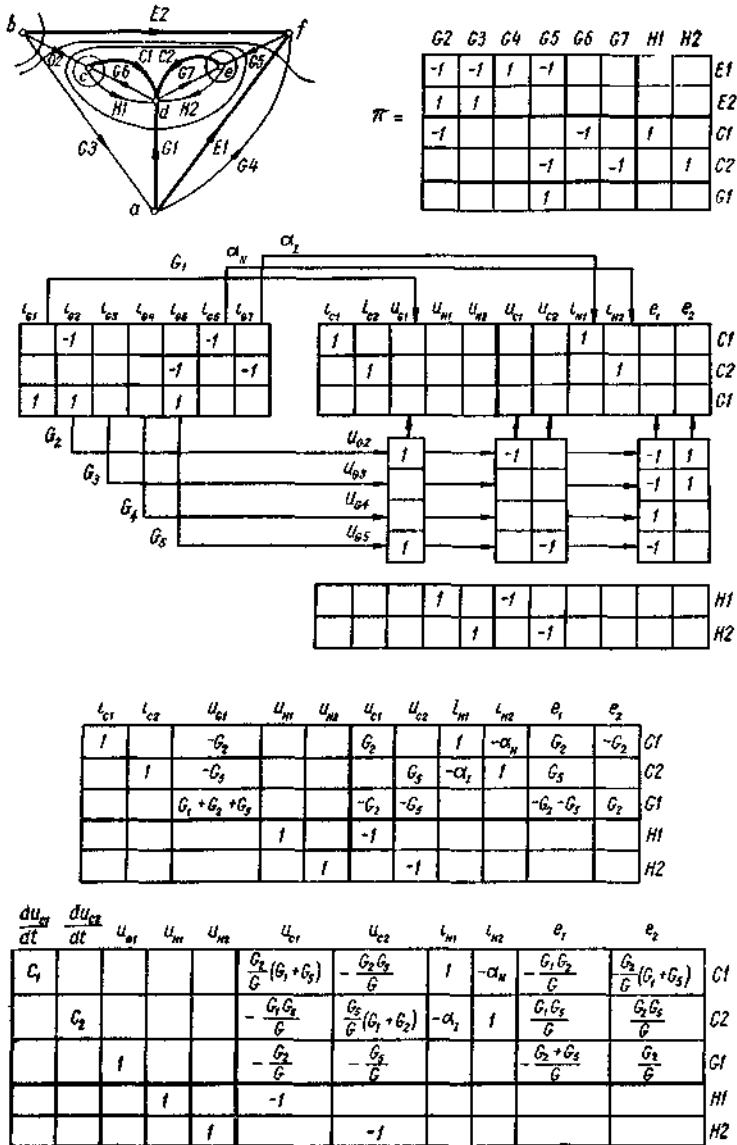


Рис. 10. Формирование уравнений транзисторного усилителя в сокращенном координатном базисе.

По условию оптимального разбиения все линейные резисторы представлены G-дугами, причем для них приняты другие обозначения по сравнению с теми, которые приведены в (п.14. 8): дуги X3, X4, X5, X6, X7 обозначены соответственно через G5, G2, G3, G1, G4, а их проводимости — через G5, G2, G3, G1, G4. Зависимые источники тока представлены дугами G6 и G7, которые ранее были обозначены через X8 и X9. На основе полученной матрицы математическая модель в пространстве переменных состояния записывается в виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{G_2}{C_1 G} (G_1 + G_5) & \frac{G_2 G_3}{C_1 G} \\ \frac{G_2 G_5}{C_3 G} & -\frac{G_5}{C_2 G} (G_1 + G_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & \frac{\alpha_N}{C_1} \\ \frac{\alpha_1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{H1} \\ i_{H2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{G_1 G_2}{C_1 G} & \frac{G_2}{C_1 G} (G_1 + G_5) \\ -\frac{G_1 G_5}{C_2 G} & -\frac{G_2 G_5}{C_2 G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} u_{H1} \\ u_{H2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix}.$$



## **Литература**

1. Кононюк А.Е. Системология. Общая теория систем. К. 1 «Начала», - Киев: Освіта України, 2013.
2. Кононюк А.Е. Дискретная математика. К. 1 «Начала (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2013, 576 с.
3. Кононюк А.Е. Дискретная математика. К. 2 «Множества (четкие)», - Киев: Освіта України, 2013, 522 с.
4. Кононюк А.Е. Дискретная математика. К. 3 «Множества (нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2013, 452 с.
5. Кононюк А.Е. Дискретная математика. К. 4 «Отношения (четкие)», - Киев: Освіта України, 2013, 506 с.
6. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 5, Ч.1 «Алгебры (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2011, 452 с.
7. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 5, Ч.2 «Алгебры (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2011, 612 с.
8. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 6, Ч.1 «Матрицы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2011, 612 с.
9. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 6, Ч.2 «Матрицы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2011, 500 с.
10. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 6, Ч.3 «Матрицы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2012, 520 с.
11. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 6, Ч.4 «Матрицы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2012, 508 с.
12. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 6, Ч.5 «Матрицы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2012, 672 с.
13. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 7, Ч.1 «Графы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2014, 524 с.
14. Кононюк А.Е. Дискретно-непрерывная математика. К. 7, Ч.2 «Графы (четкие и нечеткие)», - Киев: Освіта України, 2014, 584 с.
15. Кононюк А.Е. Информациология. Общая теория информации. К. 1, - Киев: Освіта України, 2011, 476 с.
16. Кононюк А.Е. Информациология. Общая теория информации. К. 2, - Киев: Освіта України, 2011, 476 с.
17. Кононюк А.Е. Информациология. Общая теория информации. К. 3, - Киев: Освіта України, 2011, 412 с.
18. Кононюк А.Е. Информациология. Общая теория информации. К. 4, - Киев: Освіта України, 2011, 488 с.
19. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Начала. К.1.Ч.1, - Киев: "Освіта України", 2012. - 602 с.
20. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Начала. К.1.Ч.2, - Киев: "Освіта України", 2012. - 708 с.

21. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Начала. К.1.Ч.3, - Киев: "Освіта України", 2012. - 568 с.
22. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Числа (количественные оценки параметров моделей). К.2.- Киев:"Освіта України", 2012. - 548с.
23. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Величины и размерности. К.3.Ч.1,- Киев:"Освіта України", 2012. - 636 с.
24. Кононюк А.Е. Обобщенная теория моделирования. Величины (количественные характеристики моделей). К.3. Ч. 2. Физические величины (Начало), - Киев:"Освіта України", 2012. - 476 с.
25. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. К.1. Киев:"Освіта України", 2011. - 692 с.
26. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. Безусловная оптимизация. К.2. Ч.1. Киев:"Освіта України", 2011. - 552 с.
27. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. Безусловная оптимизация. К.2. Ч.2. Киев:"Освіта України", 2011. - 616 с.
28. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. Безусловная оптимизация. К.2. Ч.3. Киев:"Освіта України", 2011. - 456 с.
29. Кононюк А.Е. Основы теории оптимизации. Безусловная оптимизация. К.2. Ч.4. Киев:"Освіта України", 2011. - 512 с.
30. К. Берж. Теория графов и ее применение. М.,Иностран. Лит., 1962
- 31.Чемоданов Б.К., «Математические основы теории автоматического регулирования», 1977
- 32.Воронов А.А., «Введение в динамику сложных систем», 1980
33. Заде Л., Дезоер Ч., «Теория линейных систем», 1970

