

А.Е. Кононюк

**ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ
МАТЕМАТИКА**

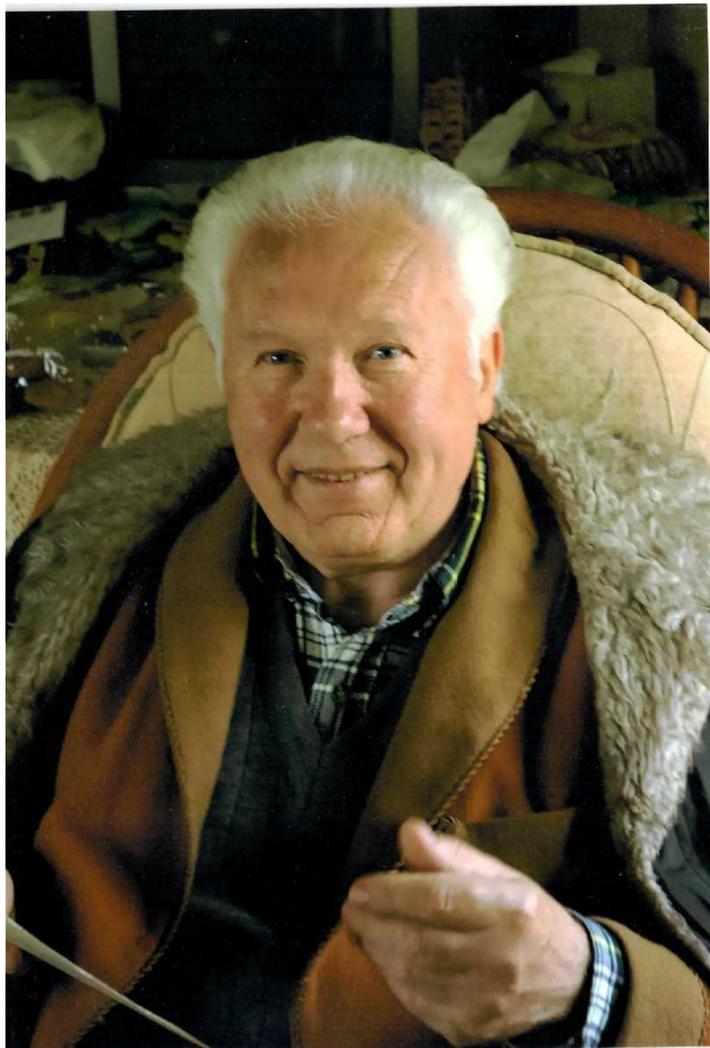
Книга 6

Поверхности

Часть 2

Фрактальная геометрия

**Киев
«Освіта України»
2016**



Кононюк Анатолий Ефимович



УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

К65

Рецензенты:

В.В.Довгай - к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р физ.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, проф. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретно-непрерывная математика. (Поверхности). — В 12-и кн. Кн.6. ч.2.— К.:Освіта України. 2016.—618 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 6. ч.2)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единую методологически взаимосвязанную математическую систему «Дискретная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

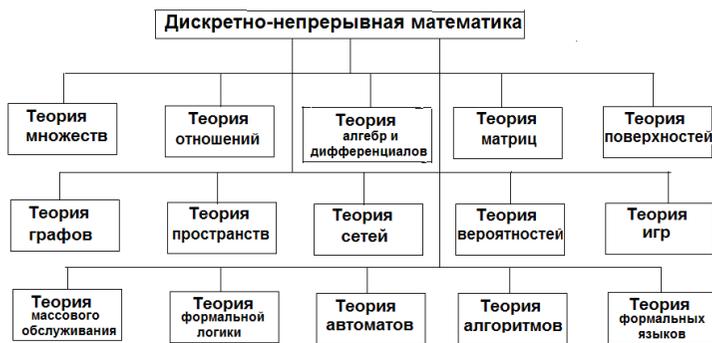
ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-5 (книга 6. ч.2)

© Кононюк А. Е., 2016

© Освіта України, 2016

Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук(дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

Введение.....	10
1. Основные понятия фракталов и их классификация.....	31
1.1. Основные понятия фракталов.....	31
1.2. Классификация фракталов.....	35
1.2.1 Геометрические фракталы.....	35
1.2.2 Алгебраические фракталы.....	37
1.2.3 Стохастические фракталы.....	40
1.3. Линии.....	41
1.3.1. Кривая Кох.....	48
1.3.2. Кривые Пеано.....	53
1.3.3. Кривая Леви.....	61
1.3.4. Кривая Минковского.....	63
1.4. Рекурсия и фракталы.....	65
1.4.1. Рекурсия.....	65
1.4.2. Графика и случайные числа.....	66
1.4.3. Кривые Гильберта.....	67
1.4.4. Фракталы.....	70
2. Фрактальная размерность.....	75
2.1. О размерностях.....	75
2.2. Парадокс Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра.....	75
2.3. Фрактальная размерность.....	77
2.4. Подобие и скейлинг.....	83
2.5. Топологическая размерность \dim	89
2.6. Размерность Хаусдорфа d_H (фрактальная размерность).....	91
2.7. Размерность Минковского d_M	98
2.8. Кривые Мандельброта-Гивена и Серпинского.....	100
2.9. Функция Вейерштрасса-Мандельброта.....	105
2.10. Фрактальная размерность кластеров.....	109
2.11. Измерения фрактальных размерностей кластеров.....	114
2.12. Принцип самоподобия фракталов.....	120
2.13. L-системы тергл-графики.....	128
2.14. Система итерированных функций.....	137
2.15. Фракталы на комплексной плоскости.....	141
2.16. Случайные фракталы.....	147
2.17. Применение случайных фракталов для моделирования.....	153
2.18. Метод "Систем Итерируемых Функций".....	159
3. Фрактальные временные ряды.....	163

3.1. Эмпирический закон Херста и метод нормированного размаха.....	164
3.2. Моделирование случайных рядов.....	168
3.3. Моделирование долговременных изменений.....	172
3.4. Методы определения фрактальной размерности временных рядов.....	176
3.5. Фрактальная антенна.....	191
4. Мультифракталы.....	196
4.1. Обобщенные размерности Реньи	197
4.2. Фрактальная размерность d_0 и информационная размерность d_1	201
4.3. Корреляционная размерность d_2	204
4.4. Свертывание и чертова лестница.....	206
4.5. Биномиальный мультипликативный процесс.....	210
4.6. Триадное канторовское множество.....	213
4.7. Скейлинг с неравными отношениями.....	216
4.8. Фрактальные подмножества.....	217
4.9. Показатель Липшица-Гельдера α	219
4.10. Кривая $f(\alpha)$	221
4.11. Концентрация меры.....	223
4.12. Последовательность показателей массы $\tau(q)$	224
4.13. Соотношение между $\tau(q)$ и $f(\alpha)$	228
4.14. Свертывание с несколькими масштабами длины.....	230
4.15. Мультифрактальная конвекция Рэлея-Бенара.....	234
4.16. ОДА и гармонические меры.....	238
4.17. Фрактальные полугруппы.....	241
4.17.1. Начальные определения.....	241
4.17.2. Дуги и фрактальные полугруппы.....	244
4.17.3. Построение новых полугрупп.....	252
4.17.4. Некоторые соображения о компактных фрактальных группах.....	258
4.17.5. Индуцированные отношения Γ	265
5. Образование вязких пальцев в пористых средах.....	269
5.1. Течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу.....	269
5.2. Вязкие пальцы в ячейках Хеле-Шоу.....	274
5.3. Вязкие пальцы в двумерных пористых средах.....	278
5.4. Образование вязких пальцев и ОДА.....	283
5.5. Вязкие пальцы в трехмерных пористых средах.....	287
5.6. Мультифрактальный рост вязких пальцев.....	294
6. Распространении жидкости через среду.....	303
6.1. Протекание от узла к узлу на квадратной решетке.....	304
6.2. Бесконечный кластер при p_c	309

6.3. Самоподобие перколяционных кластеров.....	312
6.4. Конечные кластеры при протекании.....	319
6.5. Распределение величины кластеров при $p = p_c$	322
6.6. Корреляционная длина ξ	325
6.7. Остов перколяционного кластера.....	329
6.8. Перколяция с вытеснением.....	335
6.9. Фрактальный диффузионный фронт.....	344
7. Случайное блуждание и фракталы.....	353
7.1. Броуновское движение.....	354
7.2. Одномерное случайное блуждание.....	355
7.3. Свойства подобия одномерных случайных блужданий.....	357
7.4. Обобщенное броуновское движение.....	360
7.5. Определеение обобщенного броуновского движения.....	362
7.6. Моделирование обобщенного броуновского движения.....	364
7.7. Метод R/S для обобщенного броуновского движения.....	369
7.8. Последовательные случайные сложения.....	371
7.9. Самоподобие и самоаффинность.....	376
7.10. Стратегия смелой игры.....	381
7.11. Статистика высоты волн.....	384
7.11.1. Метод R/S для наблюдений h_s	385
7.11.2. R/S для данных, очищенных от сезонных вариаций.....	387
7.12. Соотношение периметра и площади.....	391
7.12.1. Фрактальная размерность облаков.....	394
7.12.2. Фрактальная размерность рек.....	401
8. Фрактальные поверхности.....	404
8.1. Фрактальная поверхность Кох.....	405
8.2. Поверхности случайного переноса.....	406
8.3. Построение фрактальных поверхностей.....	408
8.4. Поверхности случайного сложения.....	418
9. Исследования фрактальных поверхностей.....	424
9.1. Наблюдаемая топография поверхностей.....	425
9.2. Фрактальная размерность ландшафтов и параметров окружающей среды.....	430
9.3. Молекулярные фрактальные поверхности.....	432
9.4. Фракталы и универсальное уравнение.....	441
9.5. Системы итерируемых функций.....	456
9.6. Фракталы в динамических системах.....	467
9.7. Проблема Кэли.....	475
10. Синтез фракталов.....	481
10.1. L – системы.....	481
10.2. Системы итерирующих функций (IFS).....	484
10.3. Фрактальный морфинг.....	489

10.4. Фрактальное сжатие изображений.....	491
Приложение А.....	504
Приложение В.....	594
Приложение С.....	598
Литература.....	614

Введение

«Патологические структуры», придуманные математиками XIX столетия, в последние годы приняли форму фракталов, — математических объектов, имеющих дробную размерность в отличие от традиционных геометрических фигур целой размерности (например, одномерных линий или двумерных поверхностей). Увлечение фракталами в основном является следствием работы Бенуа Мандельброта, сотрудника Исследовательского центра имени Томаса Дж. Уотсона корпорации IBM в Йорктаун-Хейтсе (шт. Нью-Йорк). Термин «фрактал» был введён Мандельбротом в 1975 году; он происходит от латинского слова *fractus*, прилагательного от глагола *frangere*, что значит «ломать, разбивать». Понятие фракталов ворвалось в сознание математиков, других ученых и даже людей, не связанных с наукой, в 1983 году, когда была опубликована основополагающая книга Мандельброта «Фрактальная геометрия природы».

Фракталы — это нечто гораздо большее, чем математический курьёз. Они дают чрезвычайно компактный способ описания объектов и процессов. Многие структуры обладают фундаментальным свойством геометрической регулярности, известной как инвариантность по отношению к масштабу, или «самоподобие». Если рассматривать эти объекты в различном масштабе, то постоянно обнаруживаются одни и те же фундаментальные элементы. Эти повторяющиеся закономерности определяют дробную, или фрактальную, размерность структуры. Фрактальная геометрия описывает природные формы, по-видимому, изящнее и точнее, чем евклидова геометрия.

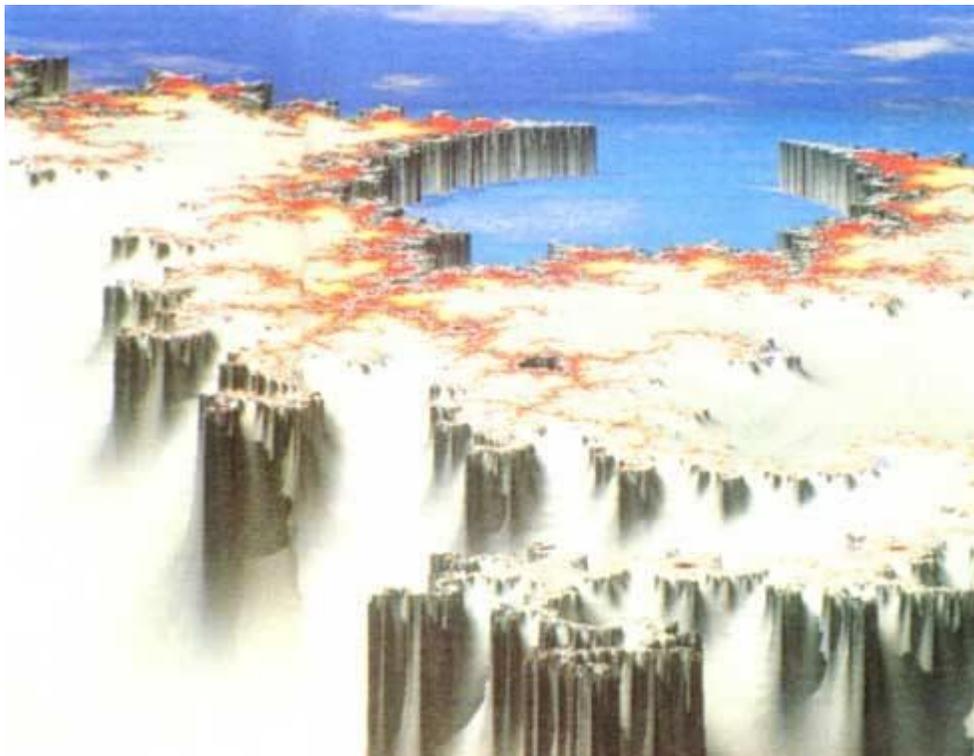


Рис. 1. Трёхмерное представление множества Мандельброта используется для изучения этой сложнейшей и интереснейшей фрактальной структуры. На рисунке показан электрический потенциал, окружающий заряженное множество Мандельброта. Странное сходство между множеством Мандельброта и свойствами реального мира показывает, что в природе **доминируют фракталоподобные структуры**. Изображение взято с видеоленты компьютерного фильма.

Инвариантность по отношению к масштабу имеет примечательную параллель в современной теории хаоса, согласно которой многие явления, несмотря на то, что они следуют чётким детерминистским правилам, в принципе оказываются непредсказуемыми. Хаотические явления, такие, как турбулентность атмосферы или ритм сердечных сокращений у человека, проявляют сходные закономерности в вариациях в различных временных масштабах во многом подобно тому, как объекты, обладающие инвариантностью к масштабу,

проявляют сходные структурные закономерности в различных пространственных масштабах. Соответствие между фракталами и хаосом не случайно. Скорее оно является симптомом их глубинной связи: **фрактальная геометрия — это геометрия хаоса.**

Ещё одна параллель между фрактальной геометрией и теорией хаоса заключается в том, что последние открытия в той и другой области стали возможными благодаря мощным современным компьютерам. Этот факт противоречит традиционным математическим представлениям. В то время как многие математики встретили приход компьютеров с энтузиазмом и чувством облегчения, другие рассматривают компьютеризацию как отрицание чистой математики.

Фракталы — это прежде всего язык геометрии. Однако их главные элементы недоступны непосредственному наблюдению. В этом отношении они принципиально отличаются от привычных объектов евклидовой геометрии, таких, как прямая линия или окружность. **Фракталы выражаются не в первичных геометрических формах, а в алгоритмах, наборах математических процедур.** Эти алгоритмы трансформируются в геометрические формы с помощью компьютера. Репертуар алгоритмических элементов неисчерпаем. Овладев языком фракталов, можно описать форму облака так же чётко и просто, как архитектор описывает здание с помощью чертежей, в которых применяется язык традиционной геометрии.

Язык — это очень подходящая метафора для концепции, лежащей в основе фрактальной геометрии. Как известно, индо-европейские языки базируются на алфавите с конечным числом букв (например английском, включающем 26 букв). Буквы не несут в себе никакого смыслового значения до тех пор, пока они не соединены в слова. Точно так же евклидова геометрия состоит лишь из нескольких элементов (прямая, окружность и т.д.), из которых строятся сложные объекты, геометрически выражающие некий смысл.

С другой стороны, азиатские языки, например китайский, состоят из символов, которые сами по себе уже выражают смысловое значение. Количество возможных символов, или элементов этих языков, произвольно велико и может считаться бесконечным. Аналогично можно рассматривать и фрактальную геометрию. Она состоит из бесконечного количества элементов, каждый из которых является завершённым и единственным в своем роде. Геометрические элементы

определяются алгоритмами, которые функционируют как единицы «смыслового значения» в рамках фрактального языка.

Существуют две основные группы фрактальных языков: линейные и нелинейные. Оба диалекта используют бесконечное количество алгоритмов и, следовательно, охватывают бесконечное число возможных фрактальных изображений. Язык нелинейных фракталов гораздо богаче и разнообразнее. Большинство диалектов следует детерминированному набору правил (аналогичных правилам грамматики и фонетики). Одно семейство фракталов, называемых случайными фракталами, отличается от других тем, что его объекты строятся путём применения управляемой случайности.

Геометрия линейных фракталов представляет собой наиболее распространённый диалект фрактальных языков. Эти фракталы считаются линейными, потому что их алгоритмы аналогичны по форме тем алгоритмам, которые определяют линии на плоскости (на математическом языке это означает, что они содержат лишь члены первого порядка.)

Линейный алгоритм можно исследовать с помощью воображаемой копировальной машины со многими редукторами, способными многократно уменьшать исходное изображение. Такая машина является метафорическим выражением работы, выполненной Дж. Хатчинсоном, математиком из Австралийского национального университета в Канберре. Эта машина действует так же, как и обыкновенная копировальная машина, обладающая возможностью уменьшать или увеличивать изображение, но отличается тем, что имеет несколько уменьшающих линз, каждая из которых может копировать вводимое в машину изображение. Линзы могут настраиваться на различную степень уменьшения, и уменьшенные изображения могут помещаться в любое место. Таким образом, изображение может перемещаться, сжиматься, отражаться, вращаться и трансформироваться произвольным образом при условии, что прямые линии на изображении остаются прямыми после преобразования.

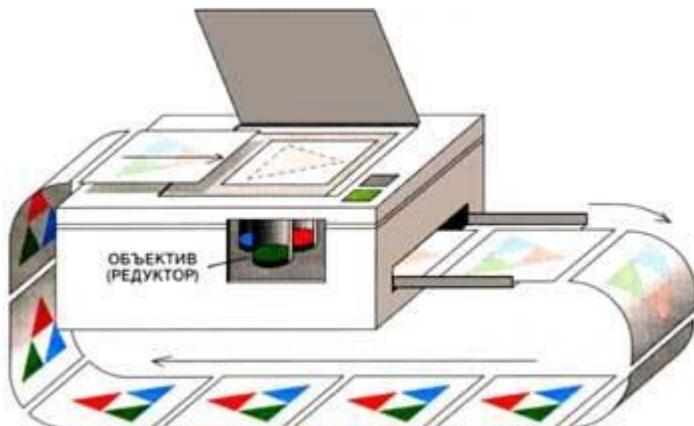


Рис. 2. Копировальная машина с механизмом многократного уменьшения, работа в режиме обратной связи, создаёт фрактальную структуру. Несколько линз, имеющихся в машине, преобразуют исходное изображение (поступающее на вход) в новое изображение (на выходе), которое представляет собой уменьшенное изображение того, что было заложено на вход. С выхода изображение вновь поступает на вход — и так до бесконечности, пока не получится окончательное изображение.

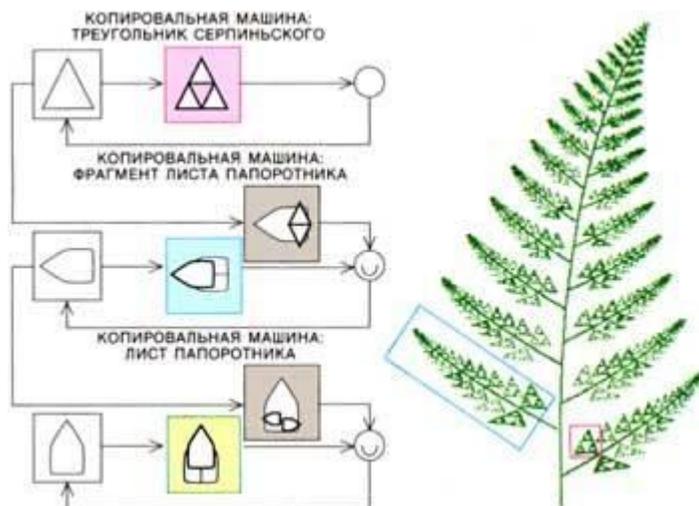


Рис. 3. Сетевая копировальная машина может строить составные фрактальные изображения, такие, как папоротник, состоящий из

треугольников Серпиньского. Несколько машин соединены в систему и работают параллельно: первая создаёт треугольники Серпиньского, вторая располагает треугольники в листья, а третья строит общую форму папоротника (*слева*). Отметим, что листья попеременно ответвляются от главного стебля то влево, то вправо; треугольники на листьях ориентированы в противоположных направлениях (*справа*).

Способ, которым изображение перемещается и сжимается, определён алгоритмом. С помощью механизма обратной связи изображение подвергается многократной обработке, в процессе которой постепенно возникает фрактальная форма. Одним из примеров фрактала, полученного при помощи такого алгоритма с обратной связью (рекурсивного алгоритма), является треугольник Серпиньского, названный в честь польского математика Вацлава Серпиньского, который впервые описал его в 1916 году. Треугольник Серпиньского обладает свойством самоподобия: каждая часть фигуры, сколь бы малой она ни была, содержит изображение, которое в увеличенном виде воспроизводит целый треугольник Серпиньского.

Треугольник Серпиньского строится копировальной машиной со многими редукторами следующим образом. Изображение помещается в машину, уменьшается наполовину и копируется три раза, по одной копии в каждой вершине равностороннего треугольника. В результате получается триада. При повторении описанной процедуры триада, полученная на предыдущем шаге, снова уменьшается наполовину и копируется три раза и т.д. Уже после шести копирований, или итераций, начинает проступать окончательная форма, которая называется предельным изображением, поскольку оно является окончательным результатом бесконечно повторяющегося цикла копировальной машины. Предельное изображение можно довольно быстро определить путем оценки, но его невозможно достичь в рамках самого процесса.

Предельное изображение не зависит от исходного изображения. Например, в качестве исходного изображения можно взять слово FRACTAL. После шести шагов копирования исходное изображение станет уже практически невидимым, но зато в явном виде начнёт обнаруживаться форма треугольника Серпиньского. С каждым новым

циклом копирования первоначальное слово FRACTAL будет всё более неразборчивым.

При небольшой перенастройке копировальной машины можно получить принципиально другие предельные изображения: фрактальное дерево или фрактал в форме листа папоротника (см. рис. 4). Предельное изображение зависит лишь от правил сжатия и переноса (т.е. от алгоритма), запрограммированных в машине.

a₁	a₁₂	a₂₁	a₂₂	b₁	b₂
1					
0.5	0.0	0.0	0.5	0.0	0.0
				0.5	0.0
0.5	0.0	0.0	0.5	0.25	0.5
0.5	0.0	0.0	0.5		



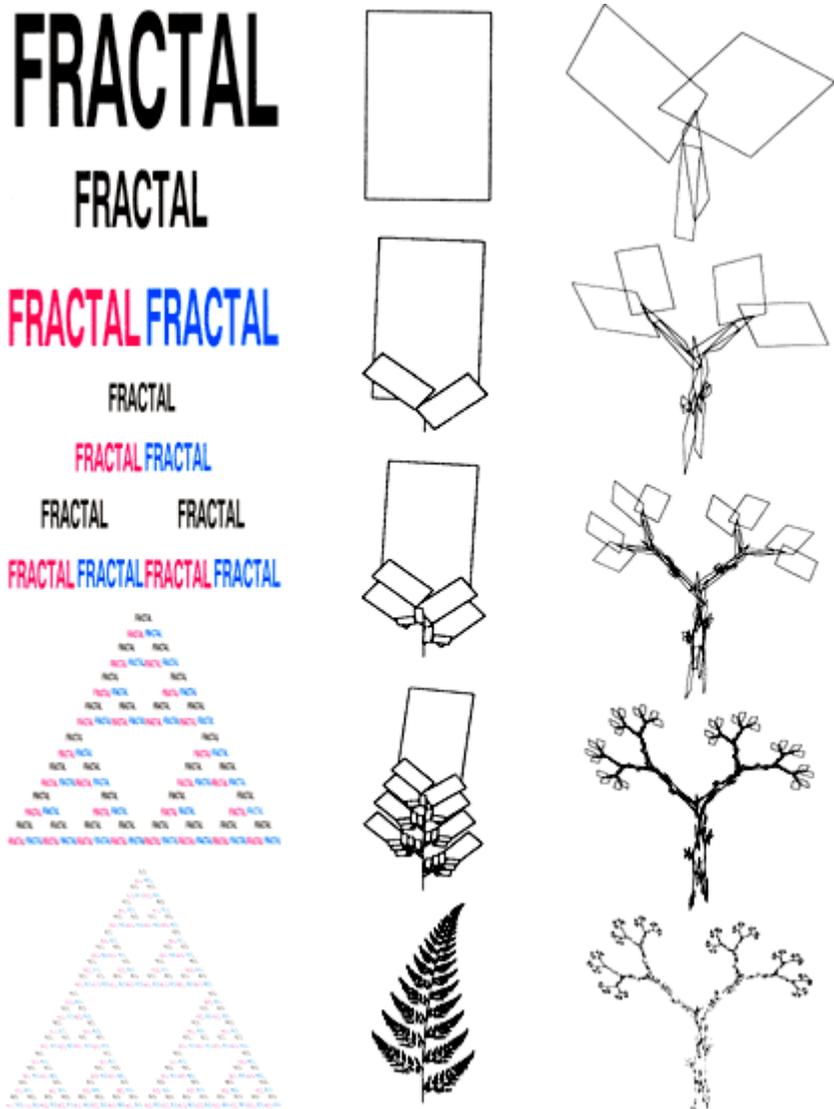


Рис. 4. Фрактальные изображения, генерируемые многократно копировальной машиной с обратной связью, зависят лишь от запрограммированной процедуры копирования. Слово FRACTAL трансформируется программой, которая уменьшает изображение вдвое и копирует его три раза: по одной копии в каждой вершине

равностороннего треугольника. Результирующее изображение представляет собой треугольник Серпиньского (*слева*). Несколько более замысловатые преобразования такого же рода порождают фрактал в форме листа папоротника (*в центре*) или фрактального дерева (*справа*). Любое исходное изображение, пропущенное через копировальную машину, даст один и тот же результат. Достаточно нескольких чисел, определяющих правила копирования (*вверху*), чтобы описать изображение, которое потребовало бы сотен тысяч чисел для его представления обычно применяющимися средствами.

Эти правила представляют собой частный случай общего понятия, называемого математическими аффинными линейными преобразованиями на плоскости. Эти преобразования сохраняют прямые линии, но изменяют их положение, масштаб и общую ориентацию. Правила линейного диалекта фрактального языка можно полностью описать некоторым числом (n) функций преобразования, обозначаемых как $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ (см. верхнюю часть рис. 4).

Здесь кроются богатые практические возможности фрактальной геометрии. **Описывая объекты посредством линейного фрактального диалекта, мы можем значительно уменьшить количество данных, необходимых для передачи изображения по линиям связи или для хранения его в памяти компьютера.** Это было убедительно продемонстрировано на примере листа папоротника. **Сложная форма, подобная форме этого листа, может быть полностью описана линейным алгоритмом, основанным лишь на 24 числовых параметрах.** Заметим, что представление того же листа в точечном виде, как телевизионное изображение, требует несколько **сотен тысяч числовых величин.** В принципе **любое изображение кодируется при помощи необходимого набора функций преобразования.**

При передаче спутниковых изображений на землю время передачи, сложность сигнала и стоимость можно значительно снизить за счёт кодирования этих изображений с помощью фрактальных алгоритмов. Эта перспектива ставит перед специалистами исключительно важную и до сих пор в основном не решённую задачу. Каким образом найти минимальное семейство функций преобразования $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, необходимых для того, чтобы представить изображение с желаемой точностью? Эта задача в

настоящее время является предметом интенсивных исследований. Среди более общих приложений описанных процедур преобразования можно отметить создание полутоновых или даже цветных изображений.

Кодирование с помощью фрактальных изображений оправданно лишь в том случае, когда существует эффективный метод «извлечения» изображения, скрытого во фрактальных алгоритмах. На примере фрактального папоротника можно всесторонне проанализировать, каким образом получается изображение. Правила копировальной машины для этого фрактала указывают, что в результате каждого преобразования должно быть четыре редукции и четыре перемещения предшествующего изображения. Одно преобразование осуществляет особенно резкую редукцию, в результате которой изображение **сжимается в вертикальную линию; эта линия образует стембель.**

Если начать с одного прямоугольника, то на каждом шаге копирования число прямоугольников будет возрастать в четыре раза, всего же после m преобразований их окажется 4^m . После четырёх итераций исходное изображение (в данном случае прямоугольник) ещё легко различимо. Для того чтобы прямоугольник стал достаточно мал и чтобы выявилась предельная форма изображения (лист папоротника), нужно произвести приблизительно 50 итераций, а следовательно, вычислить и нарисовать 4^{50} (приблизительно 10^{30}) прямоугольников. Эта задача не под силу любому существующему компьютеру.

Перед лицом этих трудностей возникает вопрос, каким же образом можно воспроизвести предельные изображения? Трюк, при помощи которого это оказывается возможным, основан на алгоритме, называемом «игрой в хаос» и придуманным М. Барнсли и С. Демко из Технологического института в шт. Джорджия. Эта игра начинается с выбора произвольной точки на плоскости. Затем мы бросаем четырехстороннюю игральную кость. Каждая ее сторона соответствует одному из четырех преобразований, задающих форму листа. При этом мы случайным образом выбираем одно из преобразований $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, которое затем применяется к выбранной точке на плоскости, перемещая её на новое место. Бросив кость ещё раз, мы выбираем следующее преобразование, которое применяется к точке, полученной на предыдущем шаге, и т.д. Точки, получаемые в результате последовательных бросаний кости, вскоре начинают плотно ложиться

на плоскость, заполняя предельное изображение. Недостаток этого метода заключается в том, что для построения окончательного изображения может потребоваться слишком много времени. В приведённом примере бросание кости обеспечивало равные вероятности для каждой функции f_k (k обозначает одну из возможных функций). Предельное изображение можно построить значительно быстрее, если каждой f_k поставить в соответствие вероятность P_k , с которой она будет выпадать в нашей игре, и таким образом одни функции f_k станут более вероятными, чем другие. Процесс построения картинки ускоряется, если наиболее высокие вероятности поставить в соответствие функциям, которые меньше всего сжимают изображение. Благодаря этой поправке точки будут покрывать каждую область предельного изображения с одинаковой частотой, и в результате все фрагменты изображения будут проявляться одинаково быстро. Подобная коррекция нашей «игры в хаос» позволяет описывать полутона, просто связывая частоту, с которой заданная область покрывается точками, с интенсивностью серого оттенка. При соответствующем подборе P_k желаемый оттенок серого цвета (другими словами, желаемую частоту попаданий точек) можно получить для каждой точки изображения. Применяя тот же метод для основных цветов (красного, зелёного и синего), можно кодировать цветные изображения. Таким образом достигается ещё большее снижение количества данных, представляющих фрактальное изображение. Удовлетворительный метод автоматической генерации фрактального кодирования произвольного изображения пока не найден. Для самоподобных изображений, таких, как папоротник Барнсли, существует полуавтоматическая процедура, предусматривающая взаимодействие человека и машины. Сначала человек разбивает изображение на части, подобные всему изображению. В случае папоротникового листа два нижних лепестка, а также верхняя часть листа, остающаяся после удаления нижних лепестков, оказываются подобными общей форме листа. Можно сконструировать копирующую машину со многими редукторами, в которую были бы встроены преобразования, сводящие всё изображение к этим фрагментам. Это нетрудно сделать методом проб и ошибок, работая с компьютерной программой в интерактивном режиме. Идея, лежащая в основе метода, заключается в том, что только самоподобные изображения могут кодироваться во фрактальной форме. Это ограничение можно преодолеть за счёт многообещающего расширения метода, над которым в настоящее время ведётся работа. Центральная идея расширения заключается в использовании нескольких копирующих машин, работающих одновременно, в

параллель, в рамках иерархической сети. Такого рода сеть может управлять индивидуальными самоподобными фрагментами или комбинировать несколько фрагментов. Например, становится возможным создавать папоротниковый лист, состоящий из треугольников Серпиньского (см. рис. 3).

Теперь обратимся к другому семейству фрактальных языков, их нелинейным диалектам. Один из них, так называемый квадратичный диалект, привлекает к себе особое внимание. Он порождает большое разнообразие геометрических форм с помощью довольно простого алгоритма, тесно связанного с современной теорией хаоса.

Теория, лежащая в основе квадратичного диалекта, впервые была описана в 1918 году французским математиком Гастоном Жюлиа, находившимся тогда в госпитале после ранений, полученных на фронте во время первой мировой войны. Как его работа, так и работа его современника и соперника Пьера Фату вскоре были преданы забвению, однако недавние исследования Мандельброта вновь привлекли внимание к их теории. Интеллектуальные достижения Жюлиа и Фату примечательны тем, что в их распоряжении не было вычислительных машин и им всецело приходилось полагаться на воображение.

Жюлиа и Фату занимались изучением комплексных чисел; как известно, комплексное число состоит из действительного числа и мнимой части, содержащей в качестве множителя мнимую единицу i , определяемую как $\sqrt{-1}$. Комплексные числа обычно отображаются на плоскости с перпендикулярными координатными осями, одна из которых представляет действительные числа, а другая мнимые. Обоих учёных интересовал вопрос, что будет с последовательностью точек z_k , на комплексной плоскости, если они порождаются преобразованием $q(z) = z^2 + c$. Каждая новая точка z_{k+1} получается подставлением предыдущей точки z_k в приведённую формулу преобразования. Комплексное число c является управляющим параметром, который можно выбирать произвольным образом. Казалось бы несложный процесс с обратной связью порождает потрясающее многообразие форм.

Когда исходная точка z_0 подвергается преобразованию, то получающаяся последовательность демонстрирует поведение двух типов. Она либо свободно путешествует по плоскости, постепенно

уходя в бесконечность, либо оказывается замкнутой в определённой области комплексной плоскости. Первые из них образуют множество «беглецов», те же, что остаются в замкнутом пространстве, принадлежат множеству «пленников». Исходная точка z_0 , выбранная из множества пленников, генерирует последовательность, которая остаётся в численной неволе, независимо от того, сколько поколений этой последовательности вычисляется. Форма этой «тюрьмы» зависит от выбранного значения параметра c . Для точки z_0 , лежащей вне замкнутой области, последовательность z_k удаляется от центра плоскости и уходит в бесконечность. Множество пленников и множество беглецов отделены друг от друга бесконечно тонкой границей, известной как множество Жюлиа (см. рис. 5).

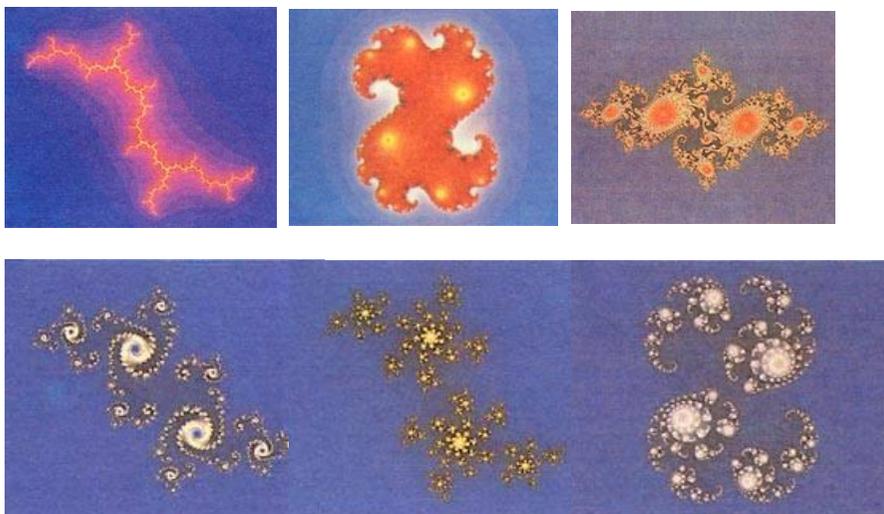


Рис. 5. Множества Жюлиа — это фрактальные границы, возникающие в результате итерирования квадратичного преобразования z^2+c . Они принимают разнообразные и удивительные формы, которые зависят только от числа c , называемого **управляющим параметром**. Некоторые значения c порождают множества Жюлиа, имеющие одно связное тело (*вверху*), при других значениях c эти множества распадаются на фрагменты и рассыпаются подобно пылинкам (*внизу*). Множество Мандельброта состоит из всех точек c , которые ассоциируются со связными множествами Жюлиа; оно служит также «оглавлением» для множеств Жюлиа.

Удивительно, что множество Жюлиа можно получить с помощью копировальной машины с редукторами многократного уменьшения, если снабдить её специальными линзами, производящими преобразование, обратное $g(z)$. Обращение $g(z) = z^2 + c$ состоит из двух функций преобразования $f_1(u) = +\sqrt{u - c}$ и $f_2(u) = -\sqrt{u - c}$. (В этих функциях c — это уже знакомый нам управляющий параметр, а u — выбранная входная величина.) Эти две функции можно рассматривать в качестве «редукторов» копировальной машины. Повторяющиеся операции этой машины заставляют случайно выбранные точки перемещаться в сторону множества Жюлиа.

Присутствие квадратного корня в уравнении означает, что копировальная машина уже работает не с одним и тем же фактором редукции, или степенью сжатия. Более того, поскольку это преобразование нелинейно, прямые линии после преобразования становятся кривыми. Из одного исходного изображения сначала получаются два более мелких изображения, затем четыре, восемь и т.д., пока не начнёт постепенно проявляться предельное изображение (см. рис. 6). Как и в случае линейных фракталов, предельное изображение не зависит от конкретного исходного изображения, а полностью определяется функциями f_1 и f_2 , или же, что эквивалентно, выбором параметра c .



Рис. 6. Нелинейные фракталы, такие, как множества Жюлиа, также могут быть построены с помощью копировальной машины с многократным уменьшением. Линзы в этом случае не просто уменьшают изображение, а искажают его, дробят и переносят. Две системы линз графически обращают квадратичное преобразование, которым определяется множество Жюлиа. На каждом шаге изображение изменяется двумя преобразованиями $+\sqrt{z - c}$ и $-\sqrt{z - c}$, обратными к $z^2 + c$. Предельное изображение, выдаваемое копировальной машиной, — это множество Жюлиа.

Теперь мы подошли к одной из самых трудных и в то же время захватывающих задач фрактальной геометрии. Если вернуться к метафоре языка, то задачу можно сформулировать в виде следующего вопроса: каковы грамматические правила квадратичного диалекта? Выражаясь же математическим языком, мы поставим этот вопрос так: лежит ли в основе бесконечного многообразия множеств Жюлиа некая регулярность?

Поиски ответа на этот вопрос привели к одному из наиболее замечательных открытий экспериментальной математики. Решение заключается в том известном Жюлиа и Фату факте, что для каждого управляющего параметра c получающееся в результате фрактальное изображение попадает в одну из двух категорий. Множество Жюлиа может быть единой связной областью или может состоять из бесконечного числа не связанных друг с другом точек, разбросанных подобно пылинкам.

Предположим, что мы нанесли точку на комплексной плоскости для каждого значения управляющего параметра c , которое принадлежит связному множеству Жюлиа, и оставили пробел для значений c , принадлежащих несвязным множествам. Результатом будет ставшее уже знаменитым множество Мандельброта — фрактал, поражающий богатством своих форм.

Очевидно, нам нужно каким-то образом узнать, является ли данное множество Жюлиа связным, чтобы определить принадлежность точки c множеству Мандельброта. Одно из крупнейших достижений Жюлиа и Фату состояло в открытии ими того факта, что эта трудная задача решается путём несложных подсчётов. Рассмотрим последовательность значений z_k , полученных по формуле $g(z) = z^2 + c$, когда исходная точка z_0 равна нулю. Таким образом, наше внимание концентрируется на ключевом факторе, управляющем параметре c . Получающаяся последовательность имеет вид $0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$. Если она не уходит в бесконечность, то ассоциированное с параметром множество Жюлиа будет связным и точка c принадлежит множеству Мандельброта.

Каждая часть множества Мандельброта характеризует соответствующее семейство множеств Жюлиа. Например, основное сердцевидное тело множества Мандельброта характеризует множества Жюлиа, которые выглядят как смятые окружности. Хотя множество

Мандельброта, строго говоря, не является самоподобным, как треугольник Серпиньского и фрактальный папоротник, оно обладает сходным свойством: увеличение границы области обнаруживает бесконечное число крошечных копий множества. Всё богатство форм и структур множества Мандельброта проявляется лишь при таком детальном его исследовании.

Возможно, наиболее замечательная особенность множества Мандельброта заключается в том, что оно служит **бесконечно эффективным хранилищем изображений**. Помимо того, что оно классифицирует множества Жюлиа на связанные и несвязные, множество Мандельброта выступает также в роли непосредственного графического оглавления для бесконечного числа множеств Жюлиа. При увеличении множества Мандельброта в окрестности его пограничной точки c появляются формы, которые являются также строительными блоками множества Жюлиа, ассоциированного с данной точкой c . Однако математическая строгость этого открытия пока остаётся делом будущего. Тан Ли, работающий в Лионском университете во Франции, показал, что множество Мандельброта ведёт себя описанным образом в окрестности большинства значений параметра c , лежащих точно на границе множества Мандельброта.

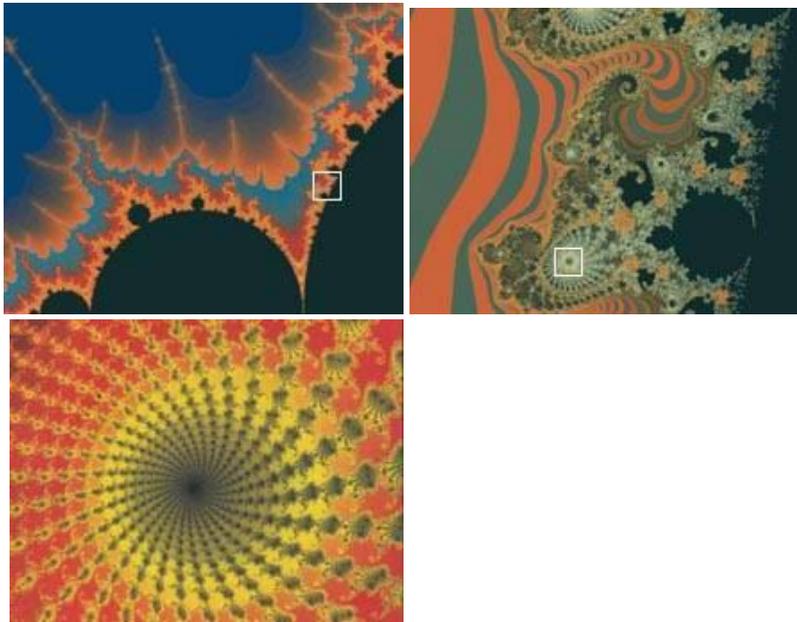


Рис. 7. Множество Мандельброта отражает порядок, лежащий в основе бесконечного многообразия множеств Жюлиа. Каждая точка множества Мандельброта представляет значение параметра s , порождающего связанное множество Жюлиа. Если точка s лежит вне множества Мандельброта, то ассоциированное с ней множество Жюлиа несвязно. Множество Мандельброта содержит в себе невероятное богатство мельчайших деталей. Три последовательных увеличения фрагментов (отмечены квадратиками) позволяют увидеть подобные повторяющиеся структуры множества Мандельброта с добавлением многих новых и прежде не повторяющихся элементов. Если всё множество изобразить в масштабе, в котором представлен фрагмент на крайнем правом рисунке, то оно заняло бы площадь, на которой уместилось бы 100 футбольных полей.

Свойства множества Мандельброта представляют собой очень трудную и интересную тему математических исследований. Огромного прогресса удалось достичь за счёт слияния математической теории и компьютерных графических экспериментов. В этом отношении особенно следует выделить фундаментальную работу А. Дуади из

Высшей нормальной школы в Париже и Дж. Хаббарда из Корнеллского университета.

Самой успешной работой в этой области следует считать исследование так называемого **электростатического потенциала множества Мандельброта**. Представьте себе, что множество Мандельброта несёт на себе электрический заряд. Можно провести измерение потенциала, поместив точечный пробный заряд в окрестности множества и замерив величину электростатической силы, действующей на этот заряд. Оказывается, что вычисление этого потенциала тесно связано с рядом $0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$, который используется для того, чтобы определить, принадлежит ли точка c множеству Мандельброта.

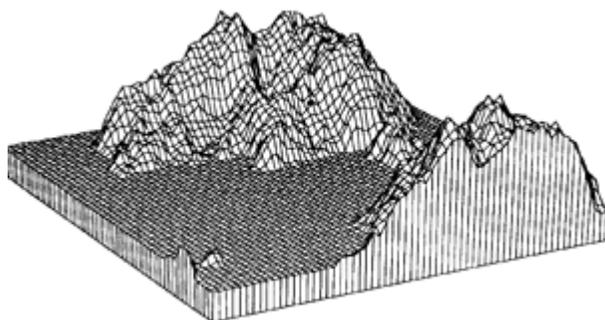
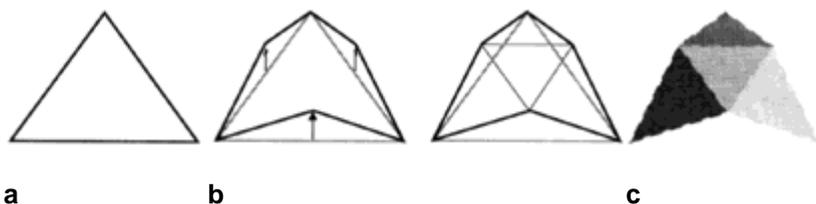
Задача получения трёхмерного представления потенциала оказалась весьма трудоёмкой, особенно в мультипликциях, используемых для изучения множества Мандельброта. Более тщательный анализ компьютерно-графических свойств потенциала позволил снизить затраты машинного времени приблизительно на порядок. В результате исследователи всё чаще изучают множество Мандельброта с помощью видеofilмов, генерируемых компьютером. Аналогичная работа проводится также над трёхмерными потенциальными представлениями других фракталов.

Все рассмотренные выше фракталы можно считать детерминированными. Хотя случайные процессы (такие, как бросание игральной кости) иногда и помогают генерировать фрактальные изображения, они не оказывают никакого влияния на окончательную форму фрактала. Совершенно иная ситуация имеет место в отношении другого класса фракталов, а именно так называемых случайных фракталов.

Один из фракталов такого типа может начинаться с треугольника, лежащего в произвольной плоскости. Средние точки сторон треугольника соединены между собой, так что треугольник оказывается разделённым на четыре меньших треугольника. Затем каждая средняя точка сдвигается вверх или вниз на определённую, случайно выбираемую величину. Тот же процесс применяется к каждому из меньших треугольников, затем к ещё меньшим и так далее до бесконечности. После достаточно большого количества итераций начинает возникать всё более детализированная поверхность.

В этом методе смещения средних точек случайные величины для перемещения средних точек вверх или вниз управляются определённым законом распределения, который тщательно подбирается, чтобы получить близкую аппроксимацию желаемой поверхности. Для того чтобы поверхность была относительно гладкой, в преобразованиях следует встроить правило, согласно которому величина смещения средних точек должна становиться очень малой уже после нескольких первых итераций. Такое правило позволяет добавлять лишь небольшие «кочки» к общим очертаниям ландшафта. Для представления изрезанной поверхности, характерной, скажем, для горного хребта или береговой линии, более подходящим будет правило медленного уменьшения смещений после каждого шага итерационного процесса.

У данного метода построения поверхностей существует много приложений. Он применялся, в частности, в качестве модели эрозии почвы, для анализа сейсмических явлений, чтобы лучше понять характер изменений в зоне разломов. Р. Восс, один из коллег Мандельброта по Исследовательскому центру корпорации ИВМ, воспользовался идеей метода, чтобы строить изображения планет, спутников, облаков и горных хребтов, которые выглядят весьма реалистично (см. рис. 8).



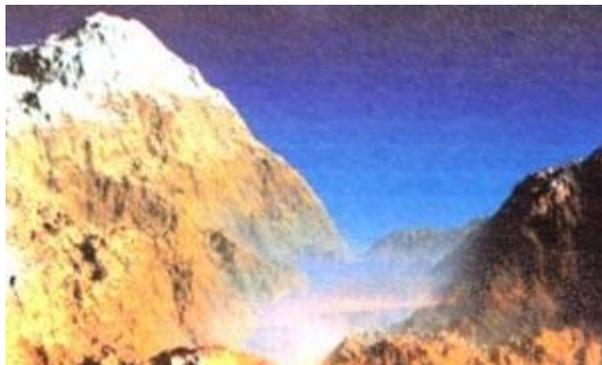


Рис. 8. Фрактальные ландшафты могут создаваться из фракталов методом случайного смещения средней точки. Средние точки сторон треугольника (a) смещаются вверх или вниз от плоскости изображения и соединяются с вершинами (b). При этом возникает четыре меньших треугольника, к которым повторно применяется та же процедура. Функция распределения вероятности определяет величину смещения и, следовательно, степень гладкости фрактального ландшафта. Затем графическая программа компьютера закрашивает треугольники, создавая различные оттенки (c). В результате получается весьма реалистичная картина (d).

Независимо от природы или метода построения у всех фракталов есть одно важное общее свойство: степень изрезанности или сложности их структуры может быть измерена неким характеристическим числом — фрактальной размерностью. Различные определения понятия фрактальной размерности в большей или меньшей степени восходят к работе Ф. Хаусдорфа, опубликованной в 1919 году. Хаусдорф был математиком в Боннском университете.

Следуя идее Мандельброта, фрактальную размерность можно определить методом подсчёта квадратиков. Представим себе объект сложной формы, который сплошь покрыт квадратиками, как миллиметровая бумага. Часть квадратиков будет содержать элементы множества, другие квадратики будут пустыми. Число непустых клеток N зависит от формы объекта и от размеров квадратной ячейки E . Постулируется, что N пропорционально $1/E^D$ (чем мельче решётка, тем больше непустых ячеек). Показатель степени D и является

размерностью объекта. Например, для такой сплошной плоской фигуры, как круг, уменьшение размера решётки вдвое приведёт к увеличению количества непустых клеток в четыре раза (два в квадрате), потому что фигура обладает размерностью два. Для фрактала количество непустых клеток будет возрастать с несколько меньшим, дробным показателем степени.

Описанная процедура не ограничивается математическими объектами или формами на плоскости. Аналогичным образом можно подсчитать фрактальную размерность реальных объектов, таких, как реки, облака, береговые линии, артерии или реснички, покрывающие стенки кишечника. Артерии человека, например, имеют фрактальную размерность порядка 2,7.

Помимо той полезной роли, которую играет фрактальная геометрия при описании сложности природных объектов, она предлагает ещё хорошую возможность популяризации математических знаний. Понятия фрактальной геометрии наглядны и интуитивны. Её формы привлекательны с эстетической точки зрения и имеют разнообразные приложения. Поэтому фрактальная геометрия, возможно, поможет опровергнуть взгляд на математику как на сухую и недоступную дисциплину и станет дополнительным стимулом для учащихся в освоении этой интересной и увлекательной науки.

Даже сами учёные испытывают почти детский восторг, наблюдая за быстрым развитием этого нового языка — языка фракталов. Вот что пишет сам Мандельброт:

«Учёные с немалым удивлением и восторгом ... уяснят для себя, что многие и многие формы, которые они до сих пор вынуждены были характеризовать как *зернистые, гидраподобные, похожие на морские водоросли, странные, запутанные, ветвистые, ворсистые, морщинистые* и т.п., отныне могут изучаться и описываться в строгих количественных терминах. Математики будут ... удивлены и обрадованы, узнав, что [фрактальные] множества, считавшиеся до сих пор чем-то исключительным ... в некотором смысле должны стать правилом, что конструкции, считавшиеся патологическими, должны происходить естественным образом из очень конкретных задач и что изучение природы должно помочь решить старые задачи и поставить немало новых».

1. Основные понятия фракталов и их классификация

1.1. Основные понятия фракталов

Сравнительно давно в математике возник образ объекта, более объемистого, но, тем не менее, сходного с линией. Некоторым ученым было трудно примириться с понятием линии, не имеющей ширины, поэтому постепенно ими стали изучаться геометрические формы и структуры, имеющие дробную пространственную размерность. На смену непрерывным кривым, обладающим всеми своими производными, пришли ломаные или очень изрезанные кривые. Ярким примером такой кривой является траектория броуновской частицы. Так в науке возникло понятие **фрактала**.

Фракталами называются геометрические объекты: **линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством само подобия**. Слово фрактал произошло от латинского слова fractus и переводится как дробный, ломаный. Самоподобие как основная характеристика фрактала означает, что он более или менее единообразно устроен в широком диапазоне масштабов. Так, при увеличении маленькие фрагменты фрактала получаются очень похожими на большие. В идеальном случае такое самоподобие приводит к тому, что фрактальный объект оказывается инвариантным относительно растяжений, т. е. ему, как говорят, присуща **дилатационная симметрия**. Она предполагает неизменность основных геометрических особенностей фрактала при изменении масштаба. Конечно, для реального природного фрактала существует некоторый минимальный масштаб длины l_{\min} , такой, что на расстояниях $l \gg l_{\min}$ его основное свойство — самоподобие — пропадает. Кроме того, на достаточно больших масштабах длин $l > l_{\max}$, где l_{\max} — характерный геометрический размер объектов, это свойство самоподобия также нарушается. Поэтому свойства природных фракталов рассматриваются лишь на масштабах l , удовлетворяющих соотношению $l_{\min} \ll l \ll l_{\max}$. Такие ограничения являются довольно естественными, потому что, когда мы приводим в качестве примера фрактала — изломанную, негладкую траекторию броуновской частицы, то мы понимаем, что этот образ является очевидной идеализацией. Дело в том, что на маленьких масштабах сказывается

конечность массы и размеров броуновской частицы, а также конечность времени соударения. При учете этих обстоятельств, траектория броуновской частицы становится плавной кривой.

Отметим, что свойство точного самоподобия характерно лишь для регулярных фракталов. Если вместо детерминированного способа построения включить в алгоритм их создания некоторый элемент случайности (как это бывает, например, во многих процессах диффузионного роста кластеров, электрическом пробое и т.д.), то возникают так называемые **случайные фракталы**. Основное их отличие от регулярных состоит в том, что свойства самоподобия справедливы только после соответствующего усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта. При этом увеличенная часть фрактала не точно идентична исходному фрагменту, однако их статистические характеристики совпадают.

Так что же такое фрактал? Парадоксально, но общепринятого точного определения этого понятия не существует. Сам термин "фрактал" происходит от латинского слова fractus (сломанный, разбитый), от которого происходят и термины fraction, fractional - дробь, дробный. С математической точки зрения *фрактал - это, прежде всего, множество с дробной размерностью*. Фрактал по первому определению Мандельброта - *это множество, хаусдорфова размерность которого превосходит его топологическую размерность*. По второму определению *фрактал это геометрическая структура, части фрагменты которой в какой-то мере подобны самой структуре*. Можно также сказать, что математическое понятие фрактала выделяет объекты, обладающие структурами различных масштабов, как больших, так и малых, и, таким образом, отражает иерархический принцип организации материи в природе. В основе этого понятия содержится одна важная идеализация действительности: фрактальные объекты самоподобны, т.е. их вид не претерпевает существенных изменений при разглядывании их в микроскоп с любым увеличением.

Однако по любому из предложенных определений невозможно представить что такое фрактал. Это тот случай, когда рассмотрение понятия лучше начинать не с его определения, а с рассмотрения конкретных примеров. Позднее можно вернуться к определению.

Мы знаем, что линия имеет одно измерение, поверхность двумерна, а пространственная фигура трехмерна. Фрактал же - это не линия и не поверхность, а, если так можно выразиться, что-то среднее. Квадрат со стороной l - фигура на двумерной плоскости, имеет площадь l^2 , объем

трехмерного куба с ребром l равен l^3 , а n -мерного гиперкуба - l^n . Размерность объекта (показатель степени) показывает, по какому закону растет его внутренняя область. Аналогичным образом с ростом размеров возрастает "объем" фрактала, но его размерность - величина не целая, а дробная. Поэтому граница фрактальной фигуры не линия: при большом увеличении становится видно, что она размыта и вся состоит из спиралей и завитков, повторяющих в малом масштабе саму фигуру. Такая геометрическая регулярность называется *масштабной инвариантностью или масштабным самоподобием, скейлингом* (от англ. scaling). Она-то и определяет дробную размерность фрактальных фигур. Жидкость, газ, твердое тело - три привычных для нас состояния однородного вещества, существующего в трехмерном мире. Но какова размерность облака или клуба дыма, точнее их границ, размываемых турбулентным движением воздуха? Оказалось, что она больше двух, но меньше трех. Аналогичным образом можно подсчитать реальных объектов, вроде береговой линии или кроны дерева. Кровеносная система человека, например, имеет размерность порядка 2,7. Все объекты с нечеткой, неупорядоченной, хаотичной, изломанной структурой оказались фракталами или состоящими из фракталов.

Заметим, что связь между хаосом и фракталами далеко не случайна - она выражает их глубокую общность. Вопрос этот связан прежде всего с одной из интенсивно развивающихся в последние 40 лет областей науки - динамическим хаосом. Так уравнения, детерминированные системами с динамическим хаосом нередко приводят к хаотическим решениям, хаотическим в смысле крайней неустойчивости, при которой малейшая неточность при задании начальных данных настолько сильно влияет на динамику системы, что ее поведение становится фактически непредсказуемым. При этом оказалось, что фракталы, как геометрические понятия, могут быть успешно применены при описании траекторий хаотических систем. Более того, можно сказать, что фракталы - геометрические образы хаоса, а фрактальная геометрия - геометрия хаоса, беспорядка. Таким образом, **ключевыми понятиями теории фракталов являются дробная размерность и масштабное самоподобие**. Существуют их математически строгие определения.

Фракталы встречаются везде, где заканчиваются правильные формы евклидовой геометрии. Все, что создано человеком, ограничено плоскостями. Если встречается природный объект, то с первого взгляда видно, что осознать, описать его форму со всеми шероховатостями можно только приблизительно. Здесь на помощь приходят фракталы.

Термин "фрактал" введен бельгийским математиком Бенуа Мандельбротом и обозначает множество, имеющее дробную фрактальную размерность. Для пояснения фрактальной размерности необходимо ввести понятие топологической размерности. Под топологической размерностью D_t множества в линейном пространстве

понимают число линейно независимых координат в пространстве. Например, окружность и линия имеют топологическую размерность 1; круг и квадрат - 2; шар и куб - 3. Фрактальная размерность множества D - размерность того пространства, которое полностью заполняется множеством. Для связи фрактальной и топологической размерностей используют показатель Херста H , вычисляемый по формуле: $H = D - Dt$. Фракталом называют множество, фрактальная размерность которого не совпадает с топологической. Например, для кривых Пеано (кривые, заполняющие плоскость) $Dt=1$, $D=2$.

Рассмотрим классический пример фрактального множества - триадную кривую Кох (рис. 1).

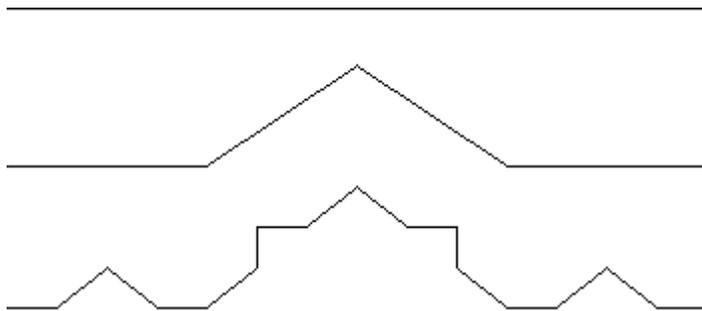


Рис. 1. Построение триадной кривой Кох

Построение кривой начинается с единичного отрезка, который называется инициатором и является предфракталом 0-го порядка. Далее инициатор заменяется на образующий элемент - кривую из четырех прямолинейных звеньев, каждое из которых имеет длину $1/3$. Так образуется предфрактал 1-го порядка. Его длина равна $4/3$. Для построения предфрактала следующего порядка каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. В результате получаем кривую, состоящую из $4 \times 4 = 16$ звеньев, каждое из которых имеет длину $(1/3) / 3 = 1/9$, общая длина равна $16/9$. Длина предфрактала n -го порядка равна $(4/3)^n$. Очевидно, что предел длины кривой при n , стремящемся к бесконечности, равен бесконечности. В итоге получили кривую бесконечной длины, заполняющую ограниченное множество на плоскости, что само по себе очень любопытно. Если построение кривой начинать не с отрезка, а с треугольника, и применить вышеперечисленные построения к каждой его стороне, то получим "снежинку" Кох (рис. 2).

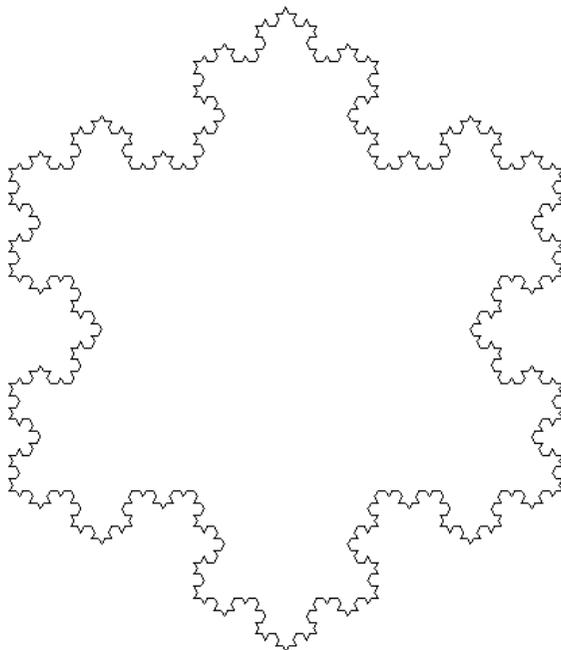


Рис. 2. "Снежинка" Кох (Предфрактал 4-го порядка)

Эта фигура интересна тем, что ее периметр - линия бесконечной длины - ограничивает конечную площадь. Фрактальная размерность триадной кривой Кох D равна $\ln 4 / \ln 3$, то есть D является дробным числом, находящимся между 1 и 2.

1.2. Классификация фракталов

Для чтобы представить все многообразие фракталов удобно прибегнуть к их общепринятой классификации.

1.2.1 Геометрические фракталы

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью некоторой ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой *генератором*. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-

генератор, в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры, получается геометрический фрактал.

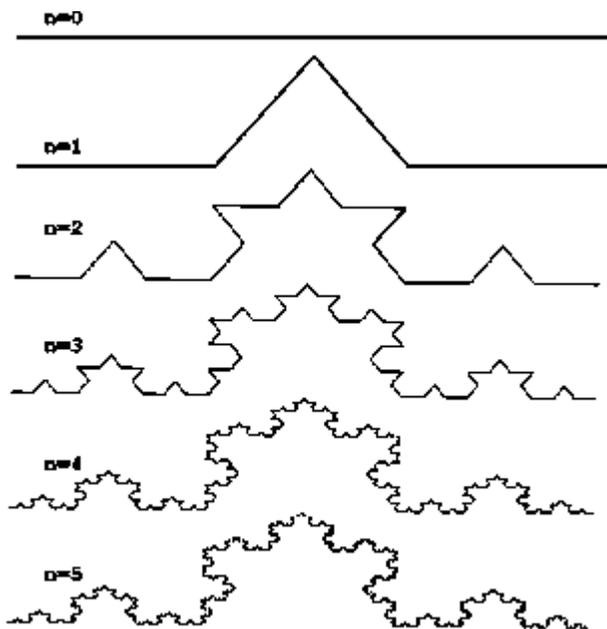


Рис 1. Построение триадной кривой Кох.

Рассмотрим один из таких фрактальных объектов - триадную кривую Кох. Построение кривой начинается с отрезка единичной длины (рис.1) - это 0-е поколение кривой Кох. Далее каждое звено (в нулевом поколении один отрезок) заменяется на *образующий элемент*, обозначенный на рис.1 через $n=1$. В результате такой замены получается следующее поколение кривой Кох. В 1-ом поколении - это кривая из четырех прямолинейных звеньев, каждое длиной по $1/3$. Для получения 3-го поколения проделываются те же действия - каждое звено заменяется на уменьшенный образующий элемент. Итак, для получения каждого последующего поколения, все звенья предыдущего поколения необходимо заменить уменьшенным образующим элементом. Кривая n -го поколения при любом конечном n называется *предфракталом*. На рис.1 представлены пять поколений кривой. При n стремящемся к бесконечности кривая Кох становится фрактальным объектом.

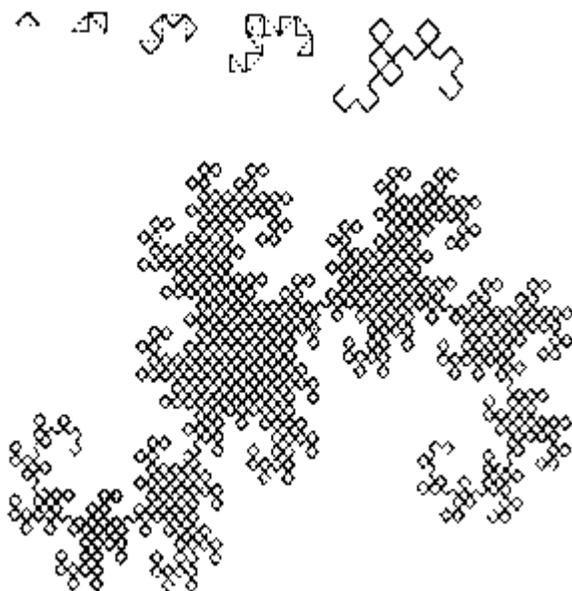


Рис 2. Построение "дракона" Хартера-Хейтуэя.

Для получения другого фрактального объекта нужно изменить правила построения. Пусть образующим элементом будут два равных отрезка, соединенных под прямым углом. В нулевом поколении заменим единичный отрезок на этот образующий элемент так, чтобы угол был сверху. Можно сказать, что при такой замене происходит смещение середины звена. При построении следующих поколений выполняется правило: самое первое слева звено заменяется на образующий элемент так, чтобы середина звена смещалась влево от направления движения, а при замене следующих звеньев, направления смещения середин отрезков должны чередоваться. На рис.2 представлены несколько первых поколений и 11-е поколение кривой, построенной по вышеописанному принципу. Предельная фрактальная кривая (при n стремящемся к бесконечности) называется *драконом Хартера-Хейтуэя*.

В машинной графике использование геометрических фракталов необходимо при получении изображений деревьев, кустов, береговой линии. Двухмерные геометрические фракталы используются для создания объемных текстур (рисунок на поверхности объекта).

1.2.2 Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n -мерных пространствах. Наиболее изучены двумерные процессы. Интерпретируя нелинейный итерационный процесс, как дискретную динамическую систему, можно пользоваться терминологией теории этих систем: *фазовый портрет*, *установившийся процесс*, *аттрактор* и т.д.

Известно, что нелинейные динамические системы обладают несолькими устойчивыми состояниями. То состояние, в котором оказалась динамическая система после некоторого числа итераций, зависит от ее начального состояния. Поэтому каждое устойчивое состояние (или как говорят - аттрактор) обладает некоторой областью начальных состояний, из которых система обязательно попадет в рассматриваемые конечные состояния. Таким образом фазовое пространство системы разбивается на *области притяжения* аттракторов. Если фазовым является двумерное пространство, то окрашивая области притяжения различными цветами, можно получить *цветовой фазовый портрет* этой системы (итерационного процесса). Меняя алгоритм выбора цвета, можно получить сложные фрактальные картины с причудливыми многоцветными узорами. Неожиданностью для математиков стала возможность с помощью примитивных алгоритмов породить очень сложные нетривиальные структуры.

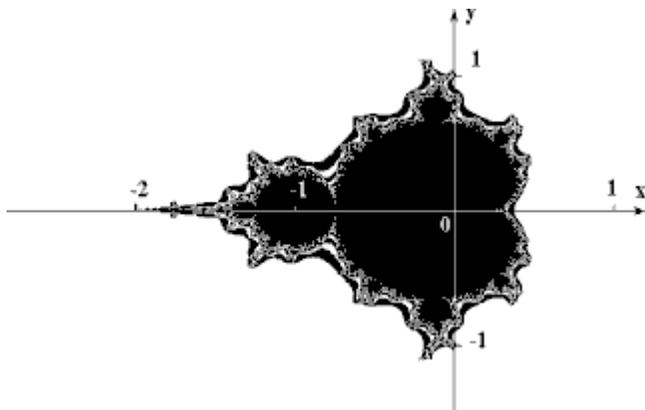


Рис 3. Множество Мандельброта.

В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта (см. рис.3 и рис.4). Алгоритм его построения достаточно прост и основан на простом итеративном выражении:

$$Z[i+1] = Z[i] * Z[i] + C,$$

где Z_i и C - комплексные переменные. Итерации выполняются для каждой стартовой точки C прямоугольной или квадратной области - подмножестве комплексной плоскости. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока $Z[i]$ не выйдет за пределы окружности радиуса 2, центр которой лежит в точке $(0,0)$, (это означает, что аттрактор динамической системы находится в бесконечности), или после достаточно большого числа итераций (например 200-500) $Z[i]$ сойдется к какой-нибудь точке окружности. В зависимости от количества итераций, в течение которых $Z[i]$ оставалась внутри окружности, можно установить цвет точки C (если $Z[i]$ остается внутри окружности в течение достаточно большого количества итераций, итерационный процесс прекращается и эта точка растра окрашивается в черный цвет).



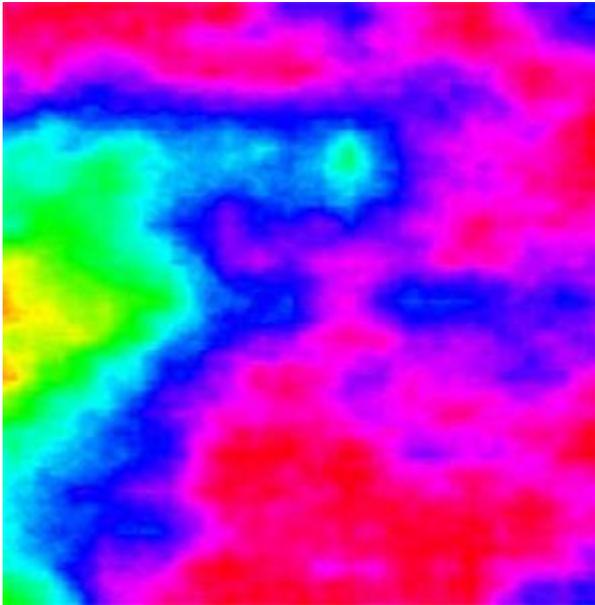
Рис 4. Участок границы множества Мандельброта, увеличенный в 200 раз.

Вышеописанный алгоритм дает приближение к так называемому множеству Мандельброта. Множеству Мандельброта принадлежат точки, которые в течение *бесконечного* числа итераций не уходят в бесконечность (точки имеющие черный цвет). Точки принадлежащие границе множества (именно там возникает сложные структуры) уходят

в бесконечность за конечное число итераций, а точки лежащие за пределами множества, уходят в бесконечность через несколько итераций (белый фон).

1.2.3 Стохастические фракталы

Третьей крупной разновидностью фракталов являются **стохастические фракталы**, которые образуются путем многократных повторений случайных изменений каких-либо параметров. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря.



Плазма

Наиболее яркими примерами стохастических фракталов являются:

- Траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве. А также граница траектории броуновского

движения на плоскости. Следует отметить, что в 2001 году известные математики Лоулер, Шрамм и Вернер доказали предположение Б. Мандельброта о том, что размерность границы броуновского движения на плоскости равна $4/3$.

- Эволюции Шрамма-Лёвнера — конформно-инвариантные фрактальные кривые, возникающие в критических двумерных моделях статистической механики. Наглядным примером этой разновидности стохастических фракталов является модель Изинга и перколяции.
- Разнообразные виды рандомизированных фракталов. Это такие фракталы, которые образуются с помощью рекурсивной процедуры, в которую на каждом шаге вводится случайный параметр. Очень часто эту разновидность фракталов используют в компьютерной графике для изображения плазмы.

На так давно в изобразительном искусстве сформировалось новое направление — фрактальная монотипия или стохатипия, целью которых является получение изображения случайного фрактала.

Существуют и другие классификации фракталов, например деление фракталов на детерминированные (алгебраические и геометрические) и недетерминированные (стохастические).

1.3. Линия

Евклид определяет линию как «длину ширины». Это, конечно, не определение, а лишь наглядное описание линий. Следующий пример показывает, однако, что это описание вряд ли можно считать удачным.

Пример 1. Возьмем квадрат единичной площади (рис. 1a) и выбросим из него крест (рис. 1b), причем ширину полосок креста подберем так, чтобы его площадь была равна $1/4$. В каждом из оставшихся квадратов снова вырежем по кресту (рис. 1c), причем так, чтобы сумма площадей крестов была равна $1/8$. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь выбросим по кресту (рис. 1d) так, чтобы сумма площадей выбрасываемых кусков была равна $1/16$, и так далее.

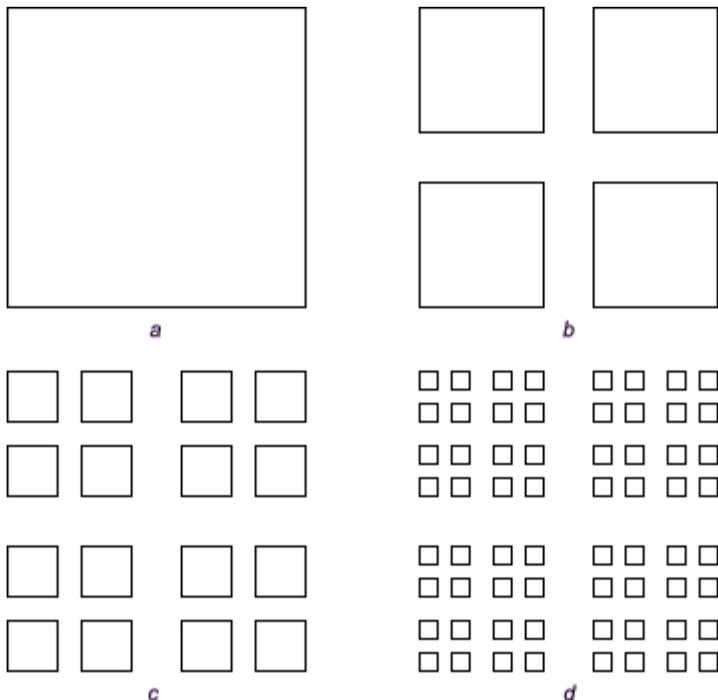


Рис.1

Обозначим через A «предельную фигуру», то есть пересечение фигур A_1, A_2, \dots, A_n , где A_n — фигура, которая остается после проведения n этапов построения. Фигура A как бы «рассыпается» на отдельные точки (ибо остающиеся квадратики с каждым разом делаются все меньше) и тем не менее имеет положительную площадь. В самом деле, сначала мы выбросили из квадрата $1/4$ его площади, затем $1/8$, затем $1/16$ и так далее. В пределе у нас останется фигура A , имеющая площадь $1 - (1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots)$. Так как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, записанной в скобках, равна $1/2$, то площадь предельной фигуры A равна $1/2$.

Построим далее простую дугу (то есть фигуру, гомоморфную отрезку), которая проходит через все точки множества A . Для этого возьмем изогнутую полосу, содержащую четыре квадрата (рис. 2а), полученных на первом этапе построения. Затем сделаем полосу более

Предположим, что имеется окруженная морем земля и на ней два озера: теплое и холодное. Для подведения воды от озер и моря к суше проводятся каналы. Для подведения к озерам воды из моря из моря в озеро от озер и моря к на суше роются каналы. В первый день от теплого озера отводится канал (не сообщающийся с морской водой и водой холодного озера) так, чтобы не далее чем на расстоянии 1 от каждой точки суши была вода теплого озера (рис..3). Во второй день канал отводится от холодного озера, причем он нигде не сообщается с морем, теплым озером и построенным на день раньше каналом, и работа продолжается до тех пор, пока от каждой точки оставшейся суши не далее чем на расстоянии 1 будет вода холодного озера. В третий день канал таким же порядком отводится от моря.

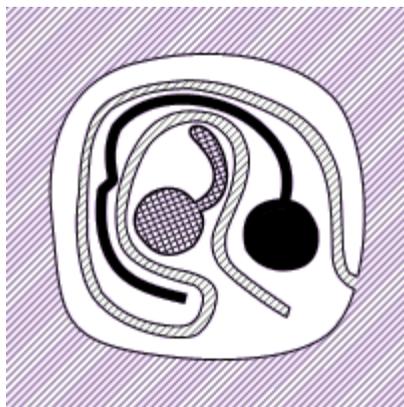


Рис.3

В следующие три дня повторяется то же самое, причем так, чтобы на расстоянии, меньшем $1/2$ от каждой точки оставшейся суши, была вода обоих озер и морская вода. В следующие за ними три дня густота сети каналов увеличивается, так что любая вода будет не далее чем на $1/4$ от каждой точки оставшейся суши, и так далее. Заметим, что после каждого дня работы оставшаяся суша будет связным куском, так что мы можем покрывать ее в следующие дни еще более плотной сетью каналов.

В пределе мы получим сеть теплой, холодной и морской вод, которые нигде вместе не сливаются. То, что останется от суши, будет уже «линией», причем как угодно близко от любой точки этой линии будет

холодная, теплая и морская вода. Иначе говоря, на всем протяжении этой линии к ней будут «примыкать» три области: море с его каналами, холодное озеро с его каналами и теплое озеро с его каналами.

Евклид дает еще и третье описание линии: «поверхность имеет два измерения, линия имеет одно измерение, точка не имеет ни одного измерения». Определить, что такое размерность (число измерений) фигуры, пытались многие математики. Окончательное выяснение смысла этого понятия и создание теории размерности является заслугой математика П. С. Урысона.

Говорят, что множество A , расположенное в фигуре X , отделяет точку a от точки b , если не существует в фигуре X связного множества, которое содержит точки a и b и не пересекается с A . Например, поверхность шара (сфера) отделяет в пространстве внутренние точки шара от внешних (рис.4). Таким образом, в трехмерном пространстве отделение точек можно производить с помощью двумерных фигур.



Рис.4

На плоскости (которая представляет собой двумерную фигуру) точку вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальных точек с помощью одномерной фигуры (то есть линии, рис.5).

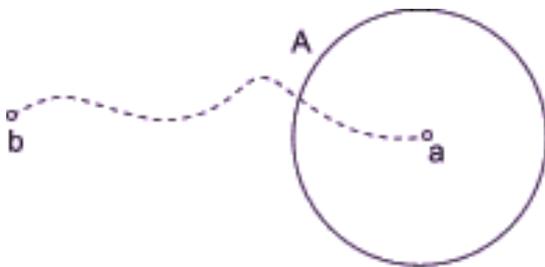


Рис.5

Наконец, на прямой (являющейся одномерной фигурой) точку a вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальных точек прямой с помощью фигуры A , состоящей из двух точек m и n (рис. 6), то есть с помощью нульмерной фигуры.

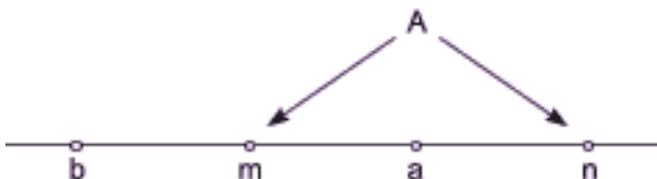


Рис.6

Итак, в фигуре, имеющей n измерений (или, как говорят, в n -мерной фигуре), отделение точки вместе с близкими к ней точками от остальной части фигуры можно производить с помощью фигур, имеющих на одно измерение меньше. Возникает мысль дать определение нульмерных фигур, через них определить одномерные фигуры (линии), затем с помощью одномерных определить двумерные фигуры и так далее.

Будем говорить, что фигура X нульмерна, если в ней не существует никакой связной фигуры, содержащей более одной точки. Например, фигура, состоящая из конечного числа, нульмерна.

Если уже определено, какие фигуры считаются $(n - 1)$ -мерными, то n -мерная фигура определяется как фигура, не являющаяся

$(n - 1)$ -мерной, в которой любую точку вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части фигуры с помощью множества размера $n - 1$ (или меньше). Это и есть урысоновское определение размерности.

Пример 3. Любой граф является одномерной фигурой, то есть линией. Действительно, точку a вместе с близкими к ней точками можно отделить от остальной части графа конечным нульмерным множеством; отделяющее множество содержит две точки, если a — внутренняя точка ребра (a_1 на рис. 7), и k точек, если a — вершина индекса k (a_2 на рис. 7).

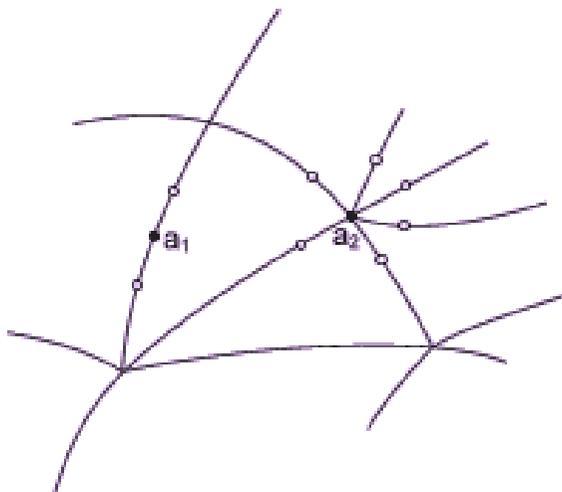


Рис.7

Фигура S является универсальной плоской линией: если линия m вложима в плоскость, то она вложима в плоскость, то она вложима в ковер Серпинского, то есть существует линия m' с S , гомоморфная m . Ясно, что линии, не вложимые в плоскость, не могут быть вложены в ковер Серпинского. Однако существует в пространстве линия (аналог ковра Серпинского, рис. 8), в которую, как доказал австрийский математик Менгер, можно вложить любую линию.

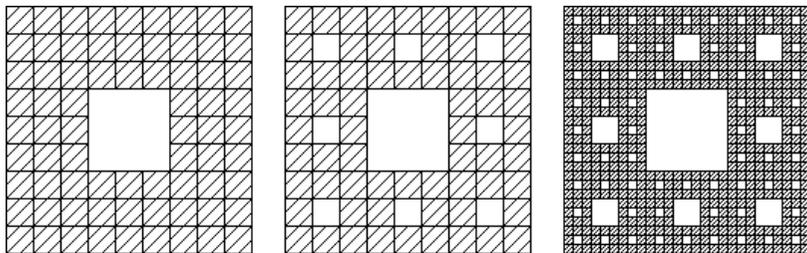


Рис.8

1.3.1. Кривая Кох

Кривая Кох — фрактальная кривая, описанная в 1904 году шведским математиком Хельге фон Кохом.

Три копии кривой Кох, построенные (остриями наружу) на сторонах правильного треугольника, образуют замкнутую кривую бесконечной длины, называемую *снежинкой Кох*.

Построение

Кривая Коха является типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берём единичный отрезок, разделяем на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырёх звеньев длины $1/3$. На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырёх получившихся звеньев и т. д... Предельная кривая и есть кривая Кох.

Пример скрипта ([PHP](#))

```
<?php
    $i = 4;

    $image = imagecreatetruecolor(600, 200);
```

```
        imagefilledrectangle($image, 0, 0,
imagesx($image) - 1, imagesy($image) - 1,
        imagecolorresolve($image, 255, 255,
255));
    $color = imagecolorresolve($image, 0, 0,
0);

    drawKoch($image, 0, imagesy($image) - 1,
imagesx($image), imagesy($image) - 1, $i, $color);

/**
 * Draws koch curve between two points.
 * @return void
 */
function drawKoch($image, $xa, $ya, $xe,
$ye, $i, $color) {
    if($i == 0)
        imageline($image, $xa, $ya, $xe,
$ye, $color);
    else {
        //          C
        //          / \
        // A---B    D---E

        $xb = $xa + ($xe - $xa) * 1/3;
        $yb = $ya + ($ye - $ya) * 1/3;

        $xd = $xa + ($xe - $xa) * 2/3;
        $yd = $ya + ($ye - $ya) * 2/3;

        $cos60 = 0.5;
        $sin60 = -0.866;
        $xc = $xb + ($xd - $xb) * $cos60 -
$sin60 * ($yd - $yb);
        $yc = $yb + ($xd - $xb) * $sin60 +
$cos60 * ($yd - $yb);

        drawKoch($image, $xa, $ya, $xb,
$yb, $i - 1, $color);
        drawKoch($image, $xb, $yb, $xc,
$yc, $i - 1, $color);
        drawKoch($image, $xc, $yc, $xd,
$yd, $i - 1, $color);
    }
}
```

```
        drawKoch($image, $xd, $yd, $xe,
$ye, $i - 1, $color);
    }
}

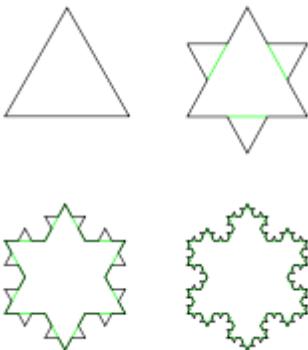
    header('Content-type: image/png');
    imagepng($image);
    imagedestroy($image);
```

Пример прямоугольной кривой ([Pascal](#))

```
uses crt, graph;
var
a,b,i:integer;

procedure drawline(ax,ay,fx,fy,i: integer);
var
bx,by,cx,cy,dx,dy,ex,ey:integer;
begin
if (i=0) or keypressed then
    line(ax,ay,fx,fy)
else
    begin
    bx:=(2*ax+fx) div 3;
    by:=(2*ay+fy) div 3;
    cx:=bx+by-ay;
    cy:=by+ax-bx;
    ex:=2*bx-ax;
    ey:=2*by-ay;
    if ax = fx then
        begin
        dx:=cx;
        dy:=ey;
        end
    else
        begin
        dx:=ex;
        dy:=cy;
        end;
    drawline(ax,ay,bx,by,i-1);
    drawline(bx,by,cx,cy,i-1);
    drawline(cx,cy,dx,dy,i-1);
    drawline(dx,dy,ex,ey,i-1);
    drawline(ex,ey,fx,fy,i-1);
```

```
end;  
end;  
  
begin  
i:=6;  
a:=detect;  
initgraph(a,b,'');  
setbkcolor(15);  
setcolor(red);  
cleardevice;  
outtextxy(0,0,'Wait...');  
drawline(0,getmaxy, getmaxx, getmaxy, i);  
outtextxy(0,20,'Successful! Press any key...');  
if keypressed then readkey;  
readkey;  
closegraph;  
end.
```



Снежинка Коха

Свойства

- Кривая Коха нигде не дифференцируема и не спрямляема.
- Кривая Коха имеет бесконечную длину.
- Кривая Коха не имеет самопересечений.
- Кривая Коха имеет промежуточную (то есть не целую) хаусдорфову размерность, которая равна

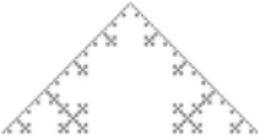
$\ln 4 / \ln 3 \approx 1,26$ поскольку она состоит из четырёх равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/3$.

Вариации и обобщения

Возможны обобщения кривой Коха, также использующие при построении подстановку ломаной из четырёх равных отрезков, но имеющей иную геометрию. Они имеют хаусдорфову размерность от 1 до 2. В частности, если вместо деления отрезка 1:1:1 использовать золотое сечение ($\varphi:1:\varphi$), то получившаяся кривая имеет отношение к мозаикам Пенроуза.

Также можно построить «Снежинку Коха» на сторонах равностороннего треугольника.

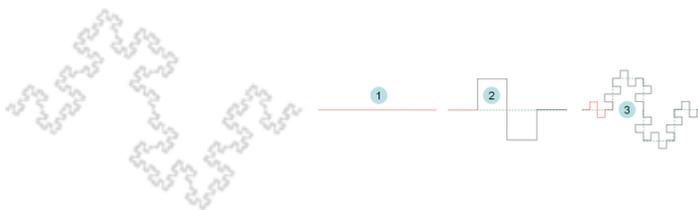
Вслед за подходом Коха были разработаны варианты с прямыми углами (квадратичная), других углов (Césaro) или кругов и их расширения на высшие размерности (сферическая снежинка):

Вариант	Иллюстрация	Получение
1D, 85°, угол		Фрактал Cesaro — вариант кривой Коха с углом между 60° и 90° (здесь 85°)
1D, 90°, угол		

Квадратичная
кривая 1 типа

Первые 2 итерации

1D,
90°,
угол



Квадратичная
кривая 2 типа

Первые 2 итерации.

Фрактальная размерность 1,5 (точно посередине между размерностью 1 и 2), поэтому часто используется при изучении физических свойств нецелых фрактальных объектов

1.3.2. Кривые Пеано

Часто дают еще одно наглядное описание: «Линия есть след движущейся точки». Пусть движущаяся точка пробегает фигуру буквы Ф двумя способами, показанными на рис. 1 (сплошной линией указан путь, пройденный в некоторый момент времени, а пунктирной — путь дальнейшего движения). В обоих случаях точка пробегает одно и то же множество, то есть «след» движущейся точки одинаков, но пути различны.

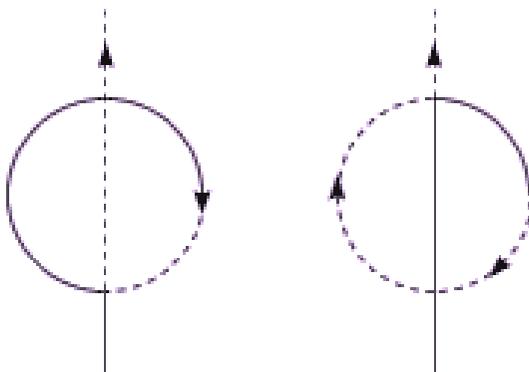


Рис.1

Дадим точное определение понятия дуги. Пусть в некоторой фигуре A с момента времени $t = 0$ до момента времени $t = 1$ движется точка. Для любого t известно положение $a(t)$ движущейся точки, то есть каждой точке t отрезка $[0, 1]$ поставлена в соответствие точка $a(t)$, принадлежащая A . Получается отображение отрезка $[0, 1]$ в фигуру A , причем отображение непрерывное, так как точка $a(t)$ «непрерывно» перемещается с изменением t . Это отображение и представляет собой путь. Мы приходим к следующему определению: **всякое непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ в фигуру A называется путем (в этой фигуре).**

Любую дугу можно представить себе как путь (ведь простая дуга получается с помощью гомоморфного отображения отрезка, а гомоморфное отображение непрерывно). В частности, линию, имеющую «площадь», можно рассматривать как «след движущейся точки». Уже это показывает, что понятие пути является не слишком простым. Следующий пример еще более подтверждает это.

Пример 1. Покажем, что можно построить путь, который проходит каждую точку квадрата. Иными словами, существует непрерывное отображение отрезка на весь квадрат; такие пути называются «кривыми Пеано». Для получения кривой Пеано построим в квадрате Q все более извивающиеся «полоски-лабиринты»: будем делить квадрат на 4, 16, 64, ..., 4^n , ... конгруэнтных квадратиков (рис. 2), а затем уберем некоторые из их сторон (рис.3), причем перегородки,

оставленные на каком-то этапе построения, сохраняются и на всех последующих.

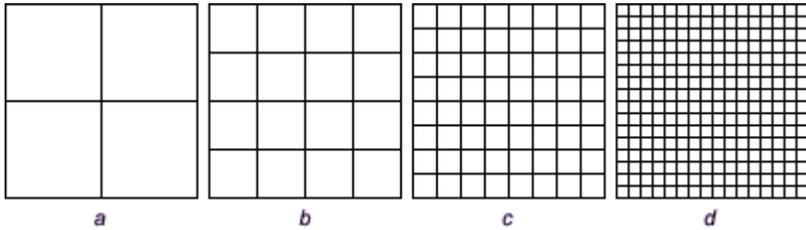


Рис.2

Средние линии этих полосок (штриховая линия на рис.3) и дадут в пределе путь, заполняющий весь квадрат Q , то есть кривую Пеано. Более точно этот путь можно определить следующим образом. Рассмотрим непрерывное отображение отрезка $[0, 1]$ на первую штриховую ломаную линию (рис. 3а), при котором отрезок $[0, 1/4]$ отображается на часть этой ломаной, лежащую в левой нижней четверти большого квадрата, отрезок $[1/4, 1/2]$ — на часть, лежащую в левом верхнем квадрате, а отрезки $[1/2, 3/4]$ и $[3/4, 1]$ — на части, лежащие в правых (верхнем и нижнем) квадратах. Это отображение обозначим через $f_1(t)$ (где $0 \leq t \leq 1$). Далее, через $f_2(t)$ обозначим отображение отрезка $[0, 1]$ на вторую штриховую ломаную (рис. 3б), при котором отрезки $[0, 1/16]$, $[1/16, 2/16]$, ..., $[1/16, 2/16]$ отображаются на последовательные части этой ломаной, лежащие в шестнадцати квадратах второго этапа. Аналогично, $f_3(t)$ будет отображением отрезка $[0, 1]$ на пунктирную ломаную третьего этапа (рис. 3с) и так далее.

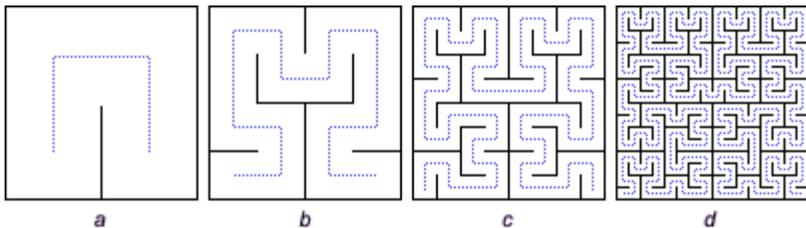


Рис.3

Предел последовательности функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, ... представляет собой отображение $f: [0, 1] \rightarrow Q$, то есть некоторый путь в квадрате Q ; это и есть кривая Пеано. Легко пояснить, что этот предел существует. Возьмем, например, точку $1/3$ промежутка $[0, 1]$. Так как $1/3$ лежит во второй четверти отрезка $[0, 1]$ (между значениями $1/4$ и $1/2$), то точка $f_1(1/3)$ лежит в левом верхнем квадрате на рис. 2а. Далее, так как $1/3$ лежит в интервале $[5/16, 6/16]$, то $f_2(1/3)$ лежит в шестом по порядку квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 3б (то есть в левом верхнем квадрате на рис. 2б). Так как $1/3$ лежит в интервале $[21/64, 22/64]$, то $f_3(1/3)$ лежит в 22-м квадрате, пробегаемом штриховой ломаной на рис. 3с (то есть в левом верхнем квадрате на рис. 2с), и так далее. Предел этой последовательности уменьшающихся квадратов (вложенных последовательно один в другой) — то есть в данном случае левая верхняя вершина квадрата — и есть точка $f(1/3)$. Таким же образом определяется точка $f(t)$ для любого t из $[0, 1]$.

Заметим, что кривая Пеано не является простой дугой: она имеет бесконечно много «склеиваний» (то есть в квадрате имеется бесконечно много точек, через которые построенный путь $f(t)$ проходит более, чем один раз).

Существуют фракталы, которые плотно заполняют пространство, в котором они находятся, так что их фрактальная размерность $D = d$. Одним из примеров такого рода являются кривые Пеано. Первая из них была найдена Пеано в 1890 г.

Начальным (инициирующим) элементом здесь можно выбрать единичный квадрат, каждая из сторон которого на следующем шаге заменяется генератором, показанным на рис. 4(справа). Он состоит из 9 отрезков длины $1/3$, соединенных под прямым углом друг к другу.

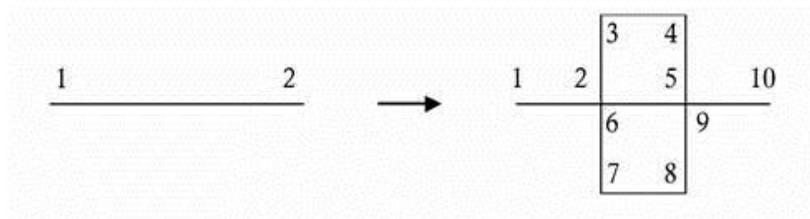


Рис.4. Генератор для кривой Пеано.

Цифры показывают способ обхода данной кривой. При такой геометрии неизбежны две точки самоконтакта 2-6 и 5-9. В результате исходный квадрат преобразуется так, как показано на рис. 13.

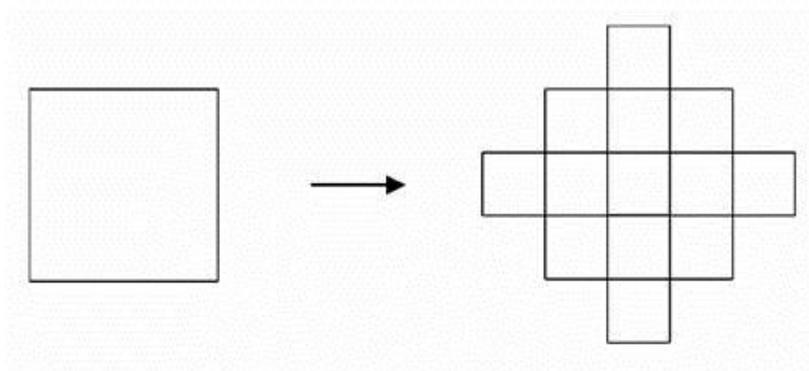


Рис.5. Построение кривой Пеано.

Затем каждый из отрезков образовавшейся фигуры длиной в $1/3$ преобразуется подобным же образом, и так до бесконечности. В результате возникает самоподобная непрерывная кривая, плотно заполняющая квадратную область с площадью, равной 2. Ее фрактальная размерность

$$D = \frac{\ln 9}{\ln 1/3} = 2$$

Существуют, однако, и кривые Пеано, в которых, в отличие от предыдущего случая, отсутствуют точки самоконтакта (так называемые самоизбегающие кривые). Одним из примеров такого рода является кривая Госпера. Инициатором для нее является отрезок единичной длины, а генератор показан на рис. 6 справа.

Он состоит из 7 отрезков длиной $1/\sqrt{7}$ каждый (поэтому фрактал размерность этой кривой тоже равна 2).

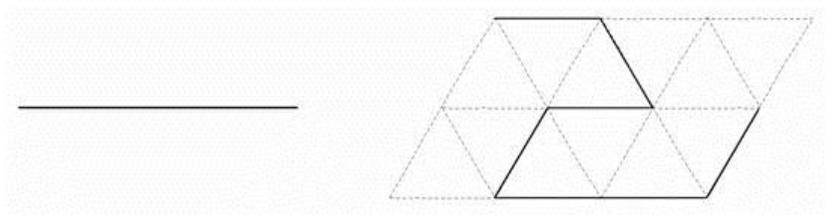


Рис.6. Инициатор и генератор для кривой Госпера.

Пунктиром показана треугольная решетка, служащая своеобразной образующей для этого генератора. Следующие три шага процесса построения показаны на рис.7.

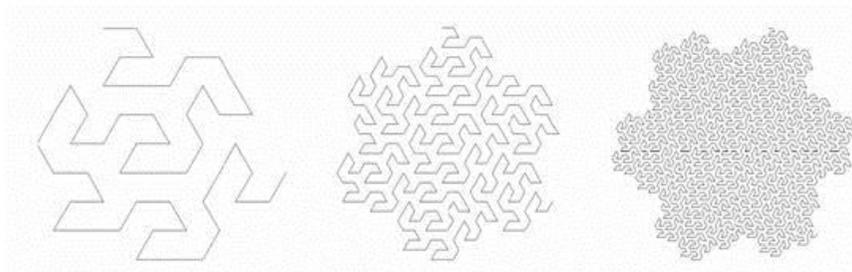


Рис.7. Следующие 3 шага в построении кривой Госпера.

Интересной отличительной особенностью кривой Госпера является то, что граница области, называемой "островом Госпера", которую она заполняет в пределе бесконечного числа шагов, сама является фрактальной с нецелочисленной размерностью $D = \ln 3 / \ln \sqrt{7} = 1.1291$. Такие острова можно использовать для непрерывного покрытия плоскости, так как можно показать, что они идеально стыкуются друг с другом.

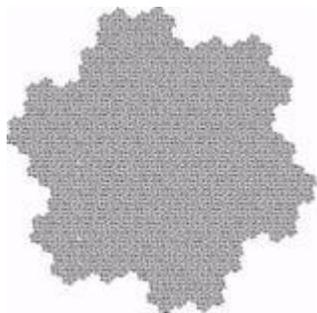


Рис.8. Фрактальная граница острова Госпера.

Более того, семь таких островов, состыкованных вместе (один в центре и шесть вокруг него), образуют снова остров Госпера в три раза большего размера. Заметим, что подобным свойством из правильных многоугольников обладает только квадрат.

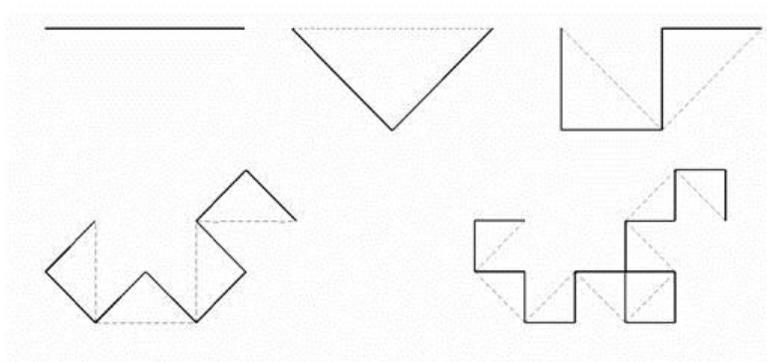


Рис.9. Алгоритм построение дракона Хартера-Хейтуэя.

И наконец, приведем пример кривой Пеано, для которой область, которую она заполняет на плоскости, имеет весьма причудливую форму. Это так называемый дракон Хартера-Хейтуэя. Первые 4 шага его построения изображены на рис.9. Как следует из рисунка, каждый

из отрезков прямой на следующем шаге заменяется на два отрезка, образующих боковые стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, для которого исходный отрезок являлся бы гипотенузой. В результате отрезок как бы прогибается под прямым углом. Направление прогиба чередуется. Первый отрезок прогибается вправо (по ходу движения слева направо), второй — влево, третий — опять вправо и т.д. Для удобства восприятия на каждом рисунке пунктиром показана конфигурация предыдущего шага. Таким образом, после каждого шага число имеющихся отрезков удваивается, а длина каждого соответственно уменьшается в $\sqrt{2}$ раз. Поэтому фрактальная размерность образующейся в результате (после бесконечного числа шагов) кривой равна 2, т.е. кривая закрывает собой конечную площадь. О форме образующейся необычной фигуры можно получить представление из рис.10, где изображены 12-е и 16-е "поколения" дракона. Дракон представляет собой своеобразную гирлянду в форме двухсторонней правой спирали, состоящую из подобных друг другу спиралевидных звеньев, непрерывно уменьшающихся в размерах от центра к периферии.

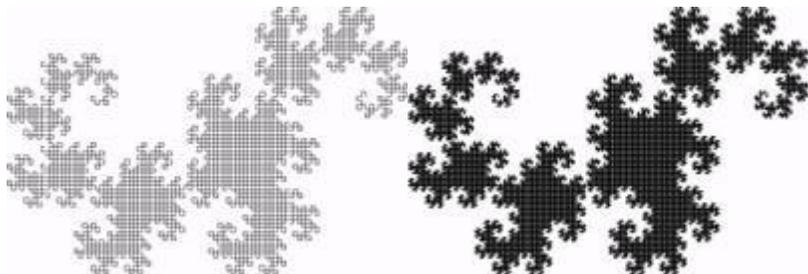
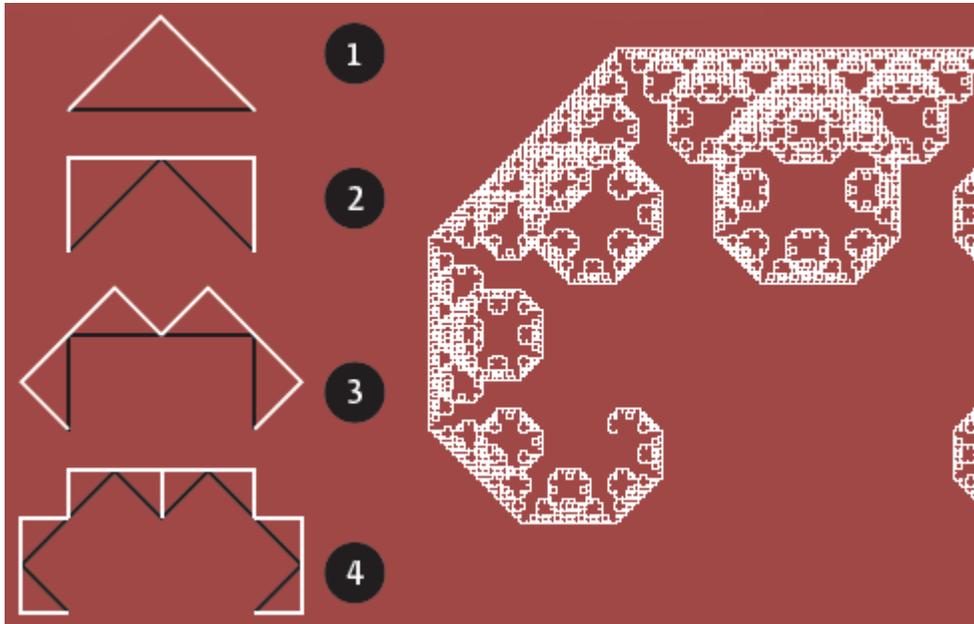


Рис.10. 12-е и 16-е поколения дракона Хартера-Хейтуэя.

Вызывает лишь изумление, как такой достаточно примитивный алгоритм приводит к столь необычной геометрической конструкции. Биологический подтекст, фигурирующий в названии кривой, заставляет задуматься, а не закодирована ли в генах каким-нибудь схожим образом информация о форме и размерах существующих в природе живых организмов? Рассмотренная выше кривая представляет собой лишь один из многих примеров так называемых Л-систем, изобретенных Аристидом Линденмаером в 1968 г. для моделирования

биологического роста. Он показал, что предельная геометрия даже очень простых систем может быть необычайно фрактальной.

1.3.3. Кривая Леви



Хотя этот объект изучал еще итальянец Эрнесто Чезаро в 1906 году, его самоподобие и фрактальные свойства исследовал в 1930-х годах француз Поль Пьер Леви. Фрактальная размерность границы этого фрактала примерно равна $1,9340\dots$. Но это довольно сложный математический результат, а точное значение неизвестно.

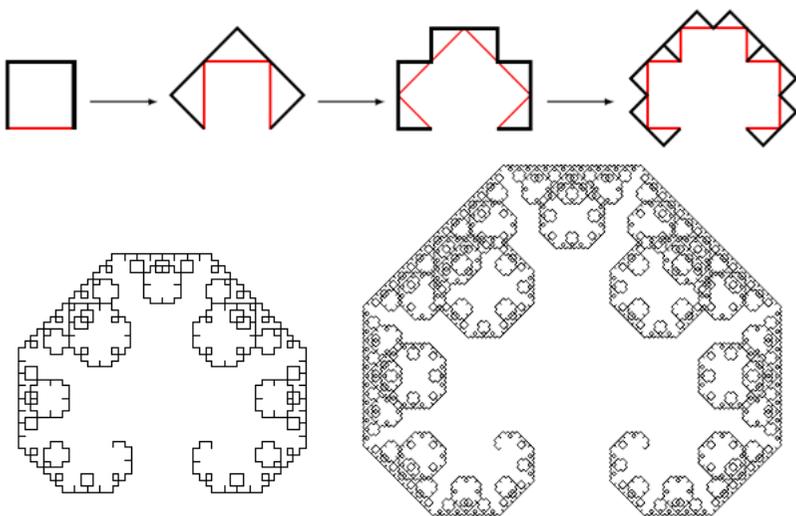
За сходство с буквой «С», написанной витиеватым шрифтом, ее еще называют *С-кривой Леви*.

Если приглядеться, то можно заметить, что кривая Леви похожа на форму кроны дерева Пифагора.

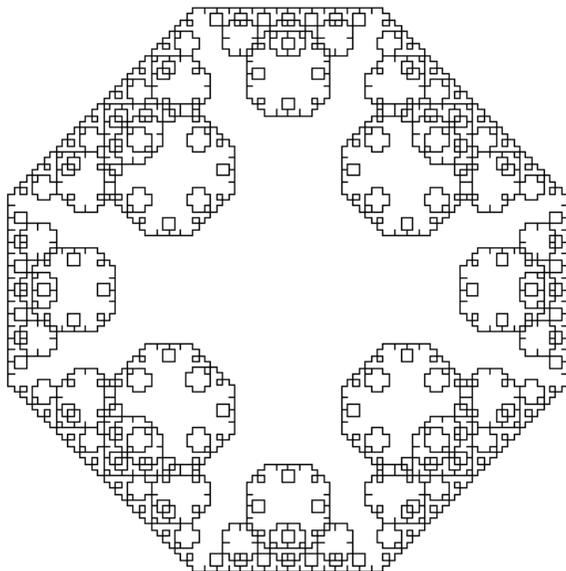
Варианты.

Скособоченная кривая получится, если вместо равнобедренного прямоугольного треугольника на каждом шаге использовать какой-нибудь другой прямоугольный треугольник. На флеш-демонстрации можно поэкспериментировать с разными треугольниками и посмотреть, что получится. Двигая ползунок, можно менять соотношение катетов в треугольнике.

Еще один вариант С-кривой Леви можно построить, если начать не с отрезка, а с буквы П. Ниже показаны первые три, восьмой и одиннадцатый шаги построения этой кривой:



Остров Леви получается, если взять за основу квадрат:



1.3.4. Кривая Минковского

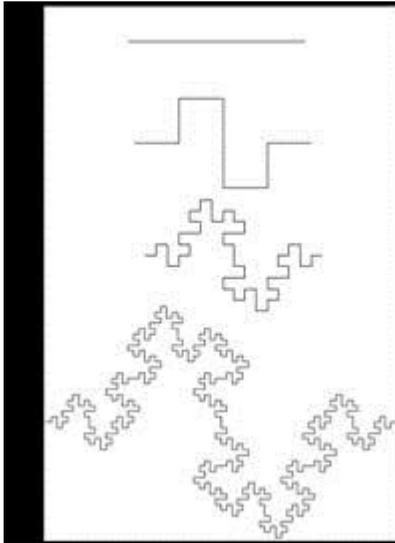


Кривая Минковского(иное название Колбаса Минковского) — классический геометрический фрактал, предложенный Минковским.

Инициатором является отрезок, а генератором является ломаная из восьми звеньев (два равных звена продолжают друг друга)

Построение

Строится кривая следующим образом: изначально есть отрезок, который преобразуется в ломаную, а при каждой следующей итерации к каждому из полученных на шаге ранее звеньев ломаной применяется аналогичная процедура, что демонстрируется наглядно на рисунке ниже.



Свойства

- Кривая Минковского нигде не дифференцируема и не спрямляема.
- Кривая Минковского не имеет самопересечений.
- Кривая Минковского имеет Хаусдорфову размерность $\ln 8 / \ln 4 = 3/2$ (поскольку она состоит из восьми равных частей, каждая из которых подобна всей кривой с коэффициентом подобия $1/4$).
- Кривая Минковского имеет нулевую меру Лебега.

1.4. Рекурсия и фракталы

1.4.1. Рекурсия

Мы говорим, что функция рекурсивна (или что она основана на рекурсии), если в ней содержится одно или несколько обращений к самой себе или к другим функциям, в которых есть обращения к данной функции. При входе в обычную функцию выход из нее всегда происходит раньше, чем повторный вход, но для рекурсивной функции это необязательно.

Приведем пример простой программы TRIANGLES, строящей на экране компьютера изображение вписанных друг в друга треугольников (рис. 1) и использующей для этого рекурсивный вызов функции.

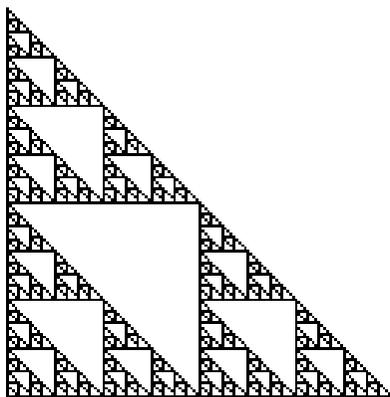


Рис. 1

Опишем вкратце алгоритм работы программы. Сначала вычерчивается первый треугольник. После этого вызывается функция *tria*, строящая внутри этого треугольника малый треугольник так, что вершины его лежат точно на серединах сторон большого треугольника. К малому треугольнику с каждой стороны прилегает по треугольнику. Чтобы построить в них точно такую же картину, достаточно *рекурсивно* вызвать для каждого функцию *tria* с координатами вершин малых

треугольников в качестве аргументов. В обращение включен целочисленный аргумент n , определяющий *глубину рекурсии*.

Начнем с некоторого целого числа n , заданного пользователем; этот аргумент устанавливается равным $n - 1$ для каждого из трех рекурсивных обращений. То есть при достижении «самого глубокого уровня рекурсии», значение n становится равным нулю, что приводит к немедленному возврату в вызывающую функцию, то есть в самую функцию *tria*.

1.4.2. Графика и случайные числа

Иногда нам не нужна полная симметрия, возникающая при прямом применении рекурсии. В таких случаях можно использовать (псевдо-) случайные числа для устранения в некоторой степени такой симметрии. Этим способом с помощью программы TTREE была получена картинка на рис. 2.

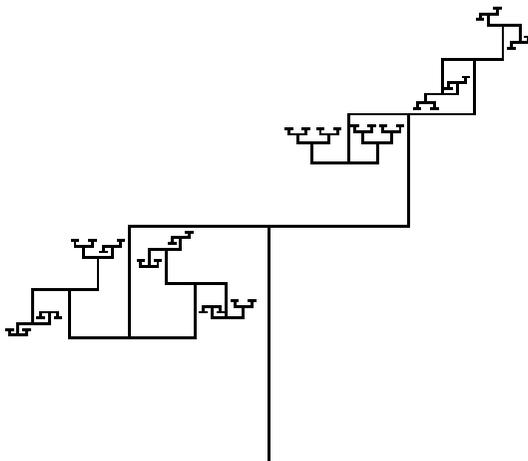


Рис. 2

Здесь показано многократное изображение большой буквы Т. Точку в нижней части буквы Т назовем ее начальной точкой. Начнем с большой буквы Т в ее нормальном положении, а концевые точки на верхней горизонтальной полке будут в свою очередь начальными

точками новых букв Т, несколько меньших, чем первоначальная. От пользователя программы запрашивается ввод двух коэффициентов уменьшения (f_x и f_y), глубины рекурсии и порогового значения в процентах. После вычерчивания каждой буквы Т генерируется случайное число, меньше 100. Если это число меньше, чем заданное пороговое значение, то новая буква Т вычерчивается в нормальном положении, в противном случае — в перевернутом. В программе используется хорошо известная формула $1+r+r^2+ \dots + r^{n-1} = (1 - r^n)/(1 - r)$ для вычисления размера первой буквы Т, такого, чтобы окончательный результат разместился в пределах границ экрана.

1.4.3. Кривые Гильберта

Рекурсия может быть использована для получения линейного рисунка, известного под названием *кривая Гильберта*. Кривая Гильберта основана на изображении буквы П, вычерченной в виде трех сторон квадрата, как показано на рис. 3а. Существуют кривые Гильберта порядков 1, 2, ..., обозначаемые как H_1, H_2, \dots . На рис. 3б изображена кривая порядка H_2 , в которой некоторые отрезки прямых линий вычерчены в виде толстых линий. Это так называемые *связки* (в действительности связки должны иметь одинаковую толщину с другими отрезками, здесь же они показаны утолщенными единственно с целью демонстрации способа получения H_2 из H_1).

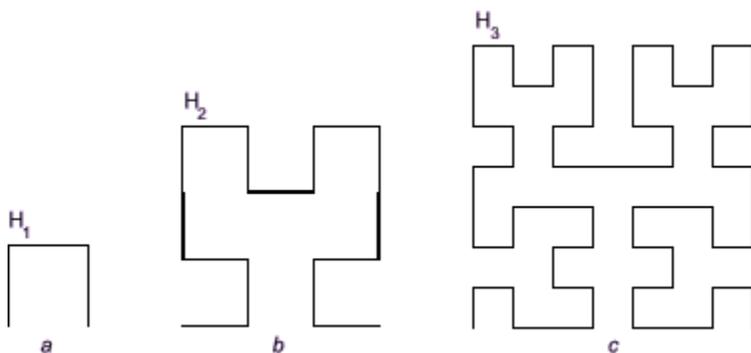


Рис. 3

Видно, что H_2 можно рассматривать как большую букву П, четыре части которой заменены меньшими по размеру буквами П. Эти

меньшие буквы П соединены тремя связками. Каждая сторона меньшей буквы П имеет ту же длину, что и связка, они в три раза меньше стороны квадрата, в который вписывается H_2 . Применим ту же процедуру к каждой из четырех букв П, составляющих H_2 , то есть каждую букву П в H_2 заменим меньшей H_2 , одновременно уменьшим длину связок так, чтобы их длины стали равными длине элементарного отрезка прямой линии, которые содержатся в трех малых фигурах H_2 . Таким образом мы получим фигуру H_3 , показанную на рис. 3с.

Теперь все элементарные отрезки в семь раз меньше, чем длина сторон квадрата, в который вписывается фигура H_3 . Отсюда получаем, что коэффициенты уменьшения для этих элементарных отрезков в фигурах H_1, H_2, H_3, \dots образуют ряд чисел: 1, 3, 7, ..., то есть в общем случае коэффициент уменьшения для фигуры H_n может быть вычислен по формуле: $2^n - 1$.

Заметим, что связки в фигуре H_2 вычерчиваются в тех же направлениях, как и три отрезка, образующие букву П в фигуре H_1 . При желании эти последние отрезки прямых линий можно рассматривать как связки, соединяющие четыре точки, которые в свою очередь можно принять за кривую Гильберта нулевого порядка.

В нашей программе HILBERT для построения кривых Гильберта используется рекурсивная функция *hilbert* со следующими аргументами: координаты точек А, В, С (см. рис. 4); горизонтальные и вертикальные компоненты двух направленных связок, причем одна лежит на отрезке АВ, а другая — на АС. Они задаются в виде векторов, то есть как пара чисел (dx, dy), где переменные dx и dy могут принимать положительные, нулевые или отрицательные значения, в зависимости от относительного положения точек А, В и С. Эти два вектора в программе обозначаются как dAB и dAC; n — глубина рекурсии, для n = 0 функция ничего не будет делать.

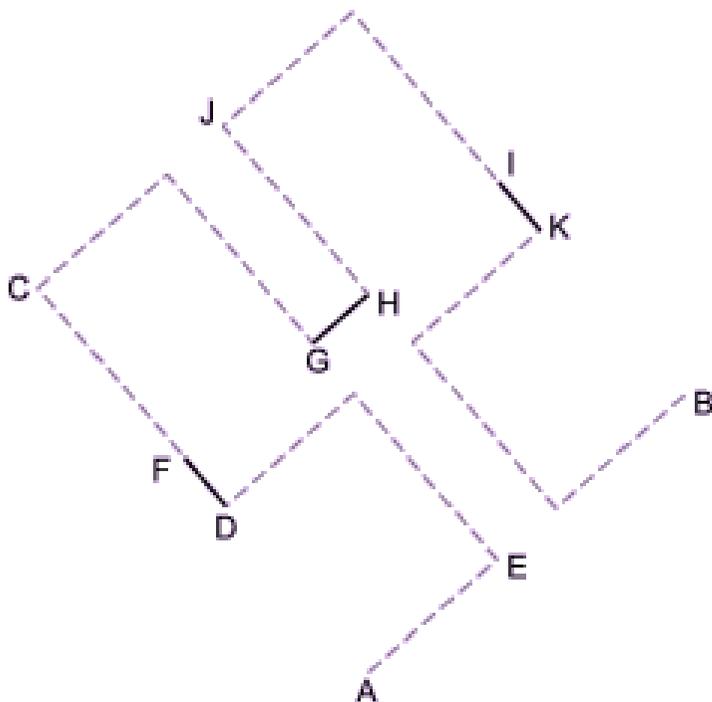


Рис. 4

Будем считать, что рис. 4 является вариацией изображения буквы П (повернутой на угол 30° против часовой стрелки), позиция которой целиком определяется тремя заданными точками А, В и С. Будем считать, что точка А является начальной точкой, а точка В — конечной. Основной причиной задания точки С является необходимость указания, с какой стороны от направленного отрезка АВ должна лежать вычерчиваемая кривая. Оба заданных вектора связей dAB и dAC отмечены на рисунке в виде связей в трех местах, а именно как отрезки DF, GH и IK. Три заданные точки А, В, С и два заданных вектора dAB и dAC позволяют определить позиции точек D, E, F, G, H, I, J, K на рисунке. (Мы не будем требовать, чтобы угол САВ был прямым углом или чтобы длина отрезка АВ совпадала с длиной отрезка АС, поэтому вместо квадрата каждая буква П может иметь форму произвольного параллелограмма). В общем случае пунктирные линии, показанные на рис. 4, фактически не вычерчиваются. Вместо

этого мы будем выполнять рекурсивное обращение к нашей функции *hilbert* для каждой из четырех точечных букв П на рисунке. Для вычерчивания на экране трех отрезков связок DF, GH и IK будем обращаться к нашей функции *draw*.

На рис. 5 представлен результат работы программы.

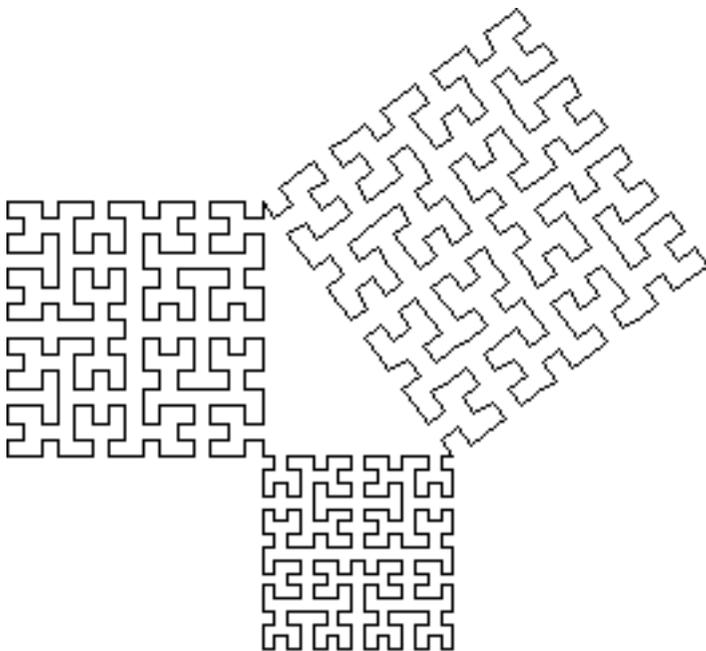


Рис. 5

1.4.4. Фракталы

Взгляните на рис. 6. На нем представлена замкнутая кривая, которая называется *фрактальной кривой* или просто *фракталом*. Фрактал подобен острову с береговой линией, кажущейся ровной издали, но становящейся совершенно нерегулярной по мере приближения. Фигуру, показанную на рис. 6, можно построить с помощью рекурсии, причем с увеличением глубины рекурсии мы получим замкнутую

область, граница которой становится очень большой по сравнению с самой областью.

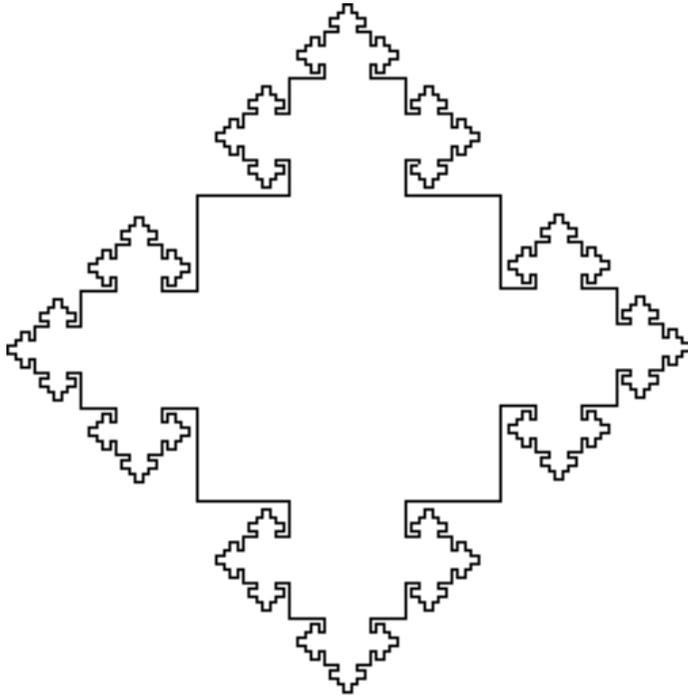


Рис. 6

С помощью программы SQFRACT можно получить такую картинку. Первые четыре аргумента функции *side* программы представляют собой координаты концевых точек A и B отрезка прямой линии. Но этот отрезок будет вычерчен только в том случае, если аргумент *n* функции *side* будет равен нулю. В противном случае на этом отрезке будут сформированы две новые точки P и S. Они будут определять концевые точки стороны уменьшенного квадрата (при равенстве $PS = f * AB$), как показано на (рис..7). Из рисунка очевидно, что координаты точки Q можно вычислить следующим образом:

$$x_Q = x_P + (y_S - y_P)$$

$$y_Q = y_P + (x_S - x_P).$$

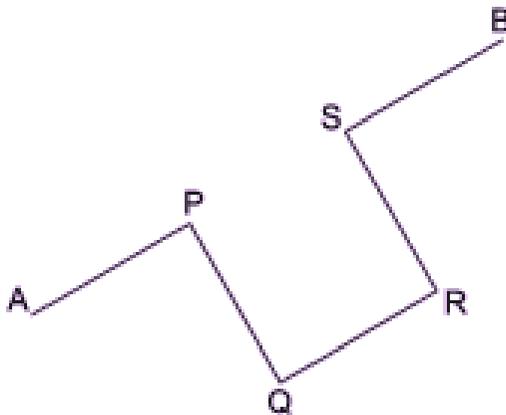


Рис. 7

(Напомним, что аналогичный способ формирования новой точки уже обсуждался более подробно при рассмотрении кривой Гильберта). Координаты точки R определяются очень просто, поскольку она находится в таком же отношении к точке Q, как точка S относится к точке P. Теперь можно вычертить отрезок AP, выполнить рекурсивное обращение к функции *side* для сторон PQ, QR, RS меньшего квадрата и закончить вычерчиванием отрезка SB.

Вместо непосредственного вычерчивания отрезков AP и SB для них можно рекурсивно обратиться к функции *side*. Хотя в данном конкретном случае это и не дает удовлетворительного результата, но полезна сама идея. Она приводит к целому классу интересных новых кривых, состоящих из отрезков прямых линий, которые, в отличие от рис.6, имеют почти одинаковую длину. (Напомним, что с подобной ситуацией мы встречались в случае кривых Гильберта).

Рассмотрим общую программу FRCURVE для генерации таких кривых. Во-первых, базовая фигура может быть задана либо в виде горизонтального отрезка прямой линии, либо в виде правильного многоугольника. Во-вторых, вместо вычисления позиций новых точек P, Q, R, S («модельных точек») относительно позиций концевых точек A и B, как на рис. 7, пользователь в качестве входных данных может задать любое количество таких точек, не обязательно четыре. Введем

локальную систему координат, в которой точка А совпадает с точкой начала $(0, 0)$, а точка В — с точкой $(1, 0)$. Тогда позиции модельных точек могут быть выражены в этих локальных координатах. Рассмотрим для примера рис. 8, где определены три новые точки с координатами (x, y) : $(0.45, 0)$, $(0.50, 0.45)$ и $(0.55, 0)$.

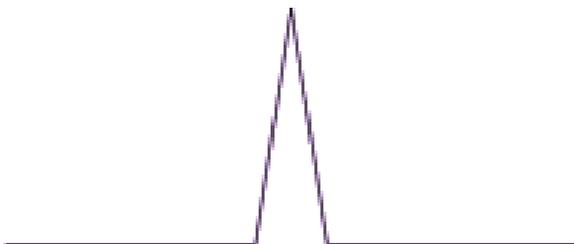


Рис. 8

Напомним, что обе концевые точки $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$ неявно добавляются к модельным точкам, которые мы должны ввести, поэтому вообще число модельных точек всегда на две точки больше, чем заданное число. Если же всю фигуру целиком применять к каждой из ее четырех частей, то получим рис. 9 и так далее.



Рис. 9

Поскольку мы можем задать правильный многоугольник, например, с четырьмя сторонами, то программа FRCURVE, в которой реализована эта операция, сформирует изображение, показанное на рис. 10.

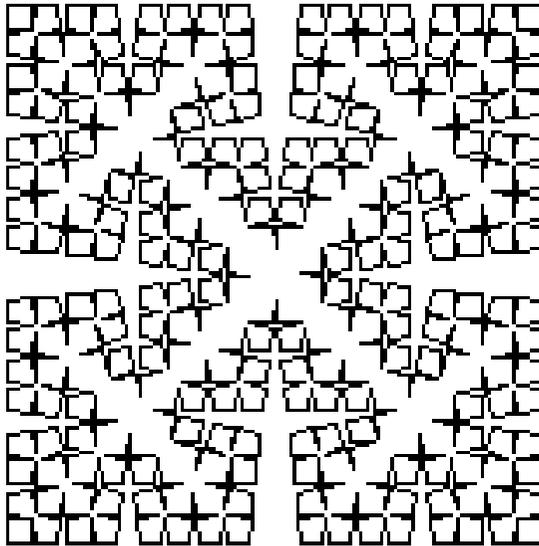


Рис. 10

Программу FRCURVE можно использовать для получения большого разнообразия интересных рисунков. Например, если ввести следующие семь пар чисел, определяющие пары координат по оси x и y для семи модельных точек на единичном интервале, то получим изображение фрактала Минковского.

0.25 0
0.25 0.25
0.5 0.25
0.5 0
0.5 -0.25
0.75 -0.25
0.75 0

2. Фрактальная размерность

2.1. О размерностях

Обычное понятие размерности мы считаем интуитивно ясным и легко определяемым математически. Понятие размерности линейного пространства известно из элементарной геометрии и линейной алгебры. Размерность многообразия - это размерность евклидовых шаров (областей, окрестностей), из которых склеено многообразие и т.д. Однако в математике, механике, физике встречаются множества, для которых понятие размерности нуждается в специальном обсуждении и, более того, для них можно определить не одну, а несколько различных размерностей. Причем эти размерности могут между собой не совпадать. Интуитивно ясно, что речь идет о множествах, устроенных локально "существенно хуже", чем открытые области в евклидовом пространстве. Строго говоря, разные понятия размерности можно определить для произвольного топологического пространства. Но для "хороших" пространств, к которым относятся многообразия, все эти числа (размерности) совпадают. Однако, как только мы переходим к рассмотрению более сложных, экзотических (а иногда в некотором смысле "патологических") объектов, разные понятия размерности приводят нас, вообще говоря, к разным числам. Раньше считалось, что это происходит в основном для класса пространств, редко встречающихся на практике. Однако недавно выяснилось, что такие аномальные объекты встречаются сплошь и рядом в классических областях математики. Это суть фракталы.

Начнем обсуждение понятия размерности.

2.2. Парадокс Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра

Измерение площади - процедура, не всегда легко осуществимая на практике. Рассмотрим боковую поверхность цилиндра (радиусом R и высотой H), изображенную на рис. 1. Ее площадь равна $A = 2\pi RH$. Но если мы попытаемся измерить площадь боковой поверхности этого цилиндра на практике с помощью линейек, то нам придется тем или иным образом *триангулировать* поверхность, например так, как это показано на рис.1. Разделив поверхность на m полос и n секторов, как показано на этом рисунке, мы получим оценку площади боковой поверхности цилиндра в виде суммы A_{Δ} площадей всех малых

треугольников. Разбивая поверхность на все более мелкие треугольники, т. е. устремляя $n \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$, мы ожидаем, что и $A_\Delta \rightarrow A$. Но подобный прогноз верен не всегда. Площадь всех треугольников можно записать в виде

$$A_\Delta = \pi RH \frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{\pi^4 m^2}{n^4} \left(\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right)^4} \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi RH \left\{ 1 + \sqrt{1 + (R/H)^2 (\pi^2 m/n^2)^2} \right\}.$$

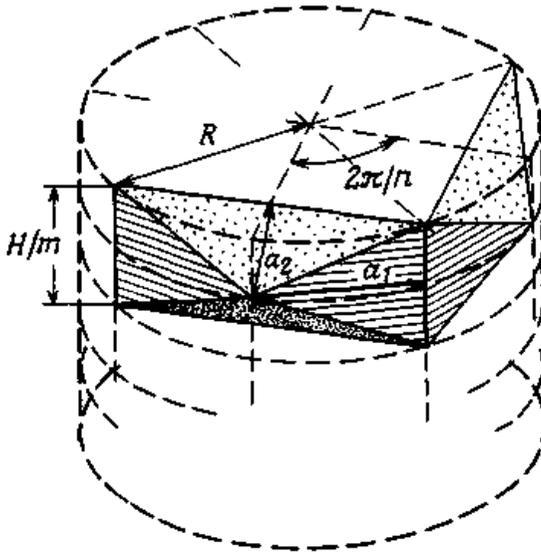


Рис.1. Боковая поверхность цилиндра радиусом R и высотой H равна $2\pi RH$. Поверхность аппроксимируется с помощью триангуляции, как показано на рисунке.

Первые слагаемые здесь соответствуют треугольникам того типа, который на рис. 1 обозначен a_1 . Вторые, те, что с квадратным корнем, соответствуют треугольникам, обозначенным на рис.1 через a_2 . Нетрудно видеть, что если $m/n^2 \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$, то суммарная площадь треугольников стремится к ожидаемому пределу. Но если мы воспользуемся триангуляцией, для которой $m = \lambda n^2$, то обнаружим, что $A_\Delta > A$ и что в действительности A_Δ может принимать сколь угодно большие значения. Выбирая $m = n^\beta$, мы получаем $A_\Delta \sim n^{\beta-2}$ при $\beta > 2$.

Следовательно, когда отдельные треугольники становятся все меньше и меньше, суммарная площадь треугольников неограниченно возрастает. Вместо того чтобы улучшаться, аппроксимация при уменьшении величины треугольников ухудшается. К аналогичным проблемам приводят и многие другие способы триангуляции. Возникающая ситуация известна под названием парадокса Шварца с площадью боковой поверхности цилиндра. Нетрудно понять, в чем здесь дело. При увеличении отношения m/n^2 аппроксимирующая поверхность, состоящая из треугольников, все сильнее и сильнее складывается в гармошку, и в пределе треугольника типа a_2 практически перпендикулярны поверхности цилиндра. Нам могут возразить, что возникшие трудности связаны с плохим выбором триангуляции. Но как следует выбирать «хорошую» триангуляцию, если нам нужно оценить площадь более сложной или неровной поверхности? Оказывается, что для этого лучше воспользоваться методами, которые изложены в следующем разделе. Методы, о которых идет речь, применимы и в более простом случае классических гладких кривых и поверхностей, и в более сложном случае кривых, поверхностей и объемов «монстров».

2.3. Фрактальная размерность

Мандельброт предложил следующее *пробное* определение фрактала: *Фракталом называется множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого строго больше его топологической размерности.* Это определение в свою очередь требует определений терминов *множество, размерность Хаусдорфа-Безиковича (D) и топологическая размерность (D_T)*, которая всегда равна целому числу. Для наших целей мы предпочитаем нестрогие определения этих терминов и наглядные иллюстрации (с использованием простых примеров), а не более строгое, но формальное изложение тех же понятий. Мандельброт сузил свое предварительное определение, предложив заменить его следующим: *Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому.* Строгого и полного определения фракталов пока не существует. Дело в том, что первое определение при всей правильности и точности слишком ограничительно. Оно исключает многие фракталы, встречающиеся в физике. Второе определение содержит существенный отличительный признак, подчеркиваемый в нашей книге и наблюдаемый в эксперименте: фрактал выглядит одинаково, в каком бы масштабе его ни наблюдать. Взять хотя бы некоторые кучевые

облака. Они состоят из огромных «горбов», на которых возвышаются «горбы» поменьше, на тех - «горбы» еще меньше и т.д. вплоть до самого малого масштаба, который вы в состоянии разрешить. На самом деле, располагая только внешним видом облаков и не используя никакой дополнительной информации, размер облаков оценить невозможно.

Фракталы, о которых пойдет речь в этой книге, можно рассматривать как множества точек, вложенные в пространство. Например, множество точек, образующих линию в обычном евклидовом пространстве, имеет топологическую размерность $D_T = 1$ и размерность Хаусдорфа - Безиковича $D = 1$. Евклидова размерность пространства равна $E = 3$. Так как для линии $D = D_T$ линия, согласно определению Мандельброта, не фрактальна, что подтверждает правильность определения. Аналогично множество точек, образующих поверхность в пространстве с $E = 3$, имеет топологическую размерность $D_T = 2$ и $D = 2$. Мы видим, что и обычная поверхность не фрактальна независимо от того, насколько она сложна. Наконец, шар, или полная сфера, имеет $D = 3$ и $D_T = 3$. Эти примеры позволяют определить некоторые из рассматриваемых нами типов множеств.

Центральное место в определении размерности Хаусдорфа - Безиковича и, следовательно, фрактальной размерности D занимает понятие расстояния между точками в пространстве. Как измерить «величину» множества \mathcal{S} точек в пространстве? Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхностей или объем тела состоит в том, чтобы разделить пространство на небольшие кубы с ребром δ , как показано на рис. 2.

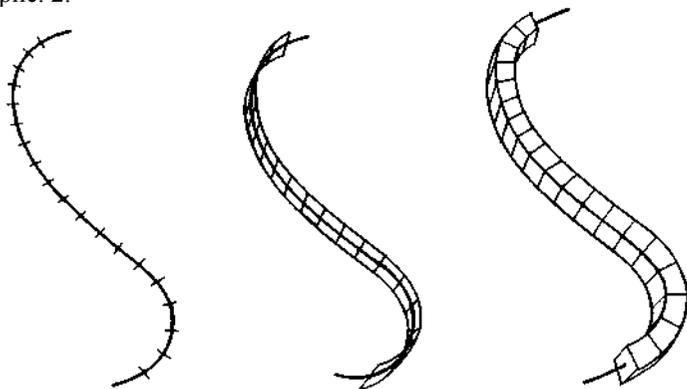


Рис. 2. Измерение «величины» кривой.

Вместо кубов можно было бы взять небольшие сферы диаметром δ . Если поместить центр малой сферы в какой-нибудь точке множества, то все точки, находящиеся от центра на расстоянии $r < (1/2)\delta$, окажутся покрытыми этой сферой. Подсчитывая число сфер, необходимых для покрытия интересующего нас множества точек, мы получаем меру величины множества. Кривую можно измерить, определяя число $N(\delta)$ прямолинейных отрезков длины δ , необходимых для того, чтобы покрыть ее. Разумеется, для обычной кривой $N(\delta) = L_0/\delta$. Длина кривой определяется предельным переходом

$$L = N(\delta)\delta \rightarrow L_0\delta^0.$$

В пределе при $\delta \rightarrow 0$ мера L становится асимптотически равной длине кривой и не зависит от δ .

Множеству точек можно поставить в соответствие и *площадь*. Например, площадь кривой можно определить, указывая число кругов или квадратов, необходимых для ее покрытия. Если $N(\delta)$ -число этих квадратов, а δ^2 - площадь каждого из них, то площадь кривой равна

$$A = N(\delta)\delta^2 \rightarrow L_0\delta^1.$$

Аналогично *объем* V кривой можно определить как величину

$$V = N(\delta)\delta^2 \rightarrow L_0\delta^2.$$

Разумеется, что для обычных кривых A и V обращаются в нуль при $\delta \rightarrow 0$, и единственной представляющий интерес мерой является длина кривой. Рассмотрим далее множество точек, образующих поверхность (рис. 3).

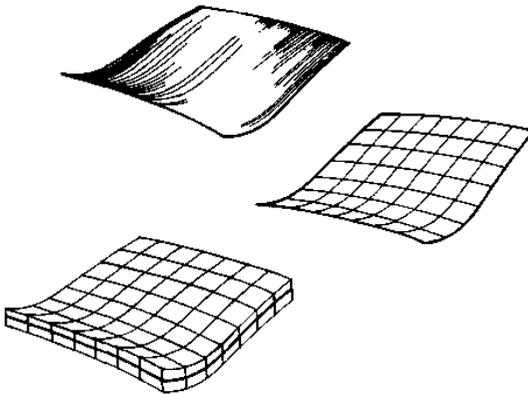


Рис.3. Измерение «величины» поверхности.

Нормальной мерой такого множества служит площадь A , и мы имеем

$$A = N(\delta) \cdot \delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^0.$$

Как нетрудно видеть, для обычной поверхности число квадратов, необходимых для ее покрытия, определяется в пределе при $\delta \rightarrow 0$ выражением $N(\delta) = A_0/\delta^2$, где A_0 - площадь поверхности.

Поверхности можно поставить в соответствие *объем*, образуя сумму объемов кубов, необходимых для покрытия поверхности:

$$V = N(\delta) \delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^1.$$

При $\delta \rightarrow 0$ этот объем, как и следует ожидать, обращается в нуль. Можно ли поверхности поставить в соответствие какую-нибудь *длину*? Формально мы можем принять за такую длину величину

$$L = N(\delta) \delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} A_0 \delta^{-1},$$

которая расходится при $\delta \rightarrow 0$. Этот результат имеет смысл, так как поверхность невозможно покрыть конечным числом прямолинейных отрезков. Мы заключаем, что единственной содержательной мерой множества точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве, является площадь.

Нетрудно видеть, что множества точек, образующих кривые, могут быть закрученными так сильно, что длина их окажется бесконечной, и, действительно, существуют кривые (кривые Пеано), заполняющие плоскость. Существуют также поверхности, изогнутые столь причудливым образом, что они заполняют пространство. Для того чтобы мы могли рассматривать и такие необычные множества точек, полезно обобщить введенные нами меры величины множества.

До сих пор, определяя меру величины множества точек \mathcal{S} в пространстве, мы выбирали некоторую пробную функцию $h(\delta) = \gamma(d) \delta^d$ - отрезок прямой, квадрат, круг, шар или куб - и покрывали множество, образуя меру $M_d = \sum h(\delta)$. Для прямолинейных отрезков, квадратов и кубов геометрический коэффициент $\gamma(d) = 1$, для кругов $\gamma = \pi/4$ и для сфер $\gamma = \pi/6$. Мы заключаем, что в общем случае при $\delta \rightarrow 0$ мера M_d равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора d -размерности меры. Размерность Хаусдорфа-Безиковича D множества \mathcal{S} есть критическая размерность, при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) N(\delta) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } d > D; \\ \infty & \text{при } d < D. \end{cases} \quad (1)$$

Мы называем M_d d -мерой множества. Значение M_d при $d = D$ часто конечно, но может быть равно нулю или бесконечности; существенно, при каком именно значении d величина M_d изменяется скачком. Заметим, что в приведенном выше определении размерность Хаусдорфа-Безиковича фигурирует как *локальное* свойство в том смысле, что эта размерность характеризует свойства множеств точек в пределе при исчезающе малом диаметре, или размере, δ пробной функции, используемой для покрытия множества. Следовательно, фрактальная размерность D может также быть локальной характеристикой множества. В действительности здесь существует несколько тонких пунктов, заслуживающих рассмотрения. В частности, определение размерности Хаусдорфа-Безиковича позволяет покрывать множество «шарами» не обязательно одного и того же размера при условии, что диаметры всех шаров меньше δ . В этом случае d -мера есть *нижняя грань*, т. е., грубо говоря, минимальное значение, получаемое при всех возможных покрытиях.

Знакомыми являются случаи $D = 1$ для линий, $D = 2$ для плоскостей и искривленных гладких поверхностей и $D = 3$ для шаров и других тел конечного объема. Как будет показано на примерах, существуют множества, для которых размерность Хаусдорфа-Безиковича не является целой и называется фрактальной.

Определение (1) фрактальной размерности может быть использовано на практике. Обратимся к береговой линии, изображенной на рис. 4.



Рис.4. Побережье южной части Норвегии. Береговая линия перечерчена из географического атласа и представлена в цифровом виде с помощью растра, состоящего примерно из 1800×1200 ячеек. Изображенная сверху квадратная решетка имеет шаг $\delta \sim 50$ км.

Мы покрыли береговую линию множеством квадратов со стороной δ , приняв за единицу длины протяженность обреза карты. Подсчитав число квадратов, необходимых для покрытия береговой линии, мы получили число $N(\delta)$. Далее мы можем поступить так, как подсказывает нам формула (1), и вычислить $M_d(\delta)$ или продолжить подсчет и найти $N(\delta)$ при меньших значениях δ . Так как из формулы (1) следует, что асимптотически, в пределе при малых δ ,

$$N(\delta) \sim \frac{1}{\delta^D}, \quad (2)$$

мы можем определить фрактальную размерность береговой линии, измерив угловой коэффициент (наклон) графика $\ln N(\delta)$ как функции от $\ln \delta$. Для береговой линии, изображенной на рис.4, такой график построен на рис.5.

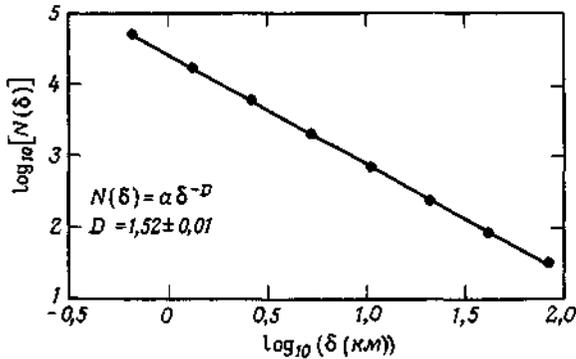


Рис.5. Число ячеек размером $\delta \times \delta$, необходимых для покрытия береговой линии, изображенной на рис. 2.1 как функция шага δ (км). Прямая в дважды логарифмических координатах соответствует зависимости $N(\delta) = a\delta^{-D}$ и построена по результатам измерений. Фрактальная размерность $D \approx 1,52$.

Как показывают вычисления, $D \approx 1,5$. Размерность D , определяемую по формуле (2) путем подсчета числа клеток, или ячеек, необходимых для покрытия множества в зависимости от размера клетки, принято называть *размерностью, определяемой по подсчету клеток*, или *клеточной размерностью*.

2.4. Подобие и скейлинг

Прямая-особое множество точек в пространстве: при любом изменении масштаба мы получим то же самое множество точек. Кроме того, произведя над прямой параллельный перенос, мы снова получим то же

самое множество точек. Прямая *инвариантна* относительно параллельного переноса и изменения масштаба, или скейлинга, - можно сказать, что прямая *самоподобна*.

Уточним наше утверждение. Зададим точки в пространстве их декартовыми координатами $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Прямая, проходящая через точку \mathbf{x}_0 в направлении $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, есть множество точек \mathcal{S} , определяемое соотношением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Параметр t здесь любое действительное число. Если изменить масштаб длины в *одно и то же* число раз r для всех компонент радиус-вектора \mathbf{x} , точки \mathbf{x} отобразятся в новые точки $\mathbf{x}' = r\mathbf{x} = (rx_1, rx_2, rx_3)$, и мы получим новое множество точек $r(\mathcal{S})$, определяемое соотношением

$$\mathbf{x}' = r(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) = \mathbf{x}_0 + t'\mathbf{a} - (1 - r)\mathbf{x}_0. \quad (3)$$

Здесь $t' = rt$ снова любое действительное число. Если сдвинуть новое множество точек $r(\mathcal{S})$, подвергнув все его точки параллельному переносу на величину $(1 - r)\mathbf{x}_0$, то в результате мы получим исходное множество точек \mathcal{S}' : прямая инвариантна относительно изменения масштаба длины. Прямая инвариантна и относительно параллельного переноса $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot n$, где n -любое действительное число.

Как показывают аналогичные соображения, плоскость инвариантна относительно параллельных переносов в любом направлении, лежащем в ней самой, и относительно изменения масштабов длины. Наконец, трехмерное пространство инвариантно относительно параллельных переносов в любом направлении и относительно изменения масштабов длины.

Другие множества точек не обладают столь прочными симметриями-инвариантностью относительно параллельных переносов и скейлинга. Окружность не инвариантна ни относительно параллельного переноса, ни относительно скейлинга, а инвариантна относительно поворотов вокруг собственного центра. Фракталы также не обладают свойствами некоторых или даже всех этих простых инвариантностей.

Полезно рассмотреть *ограниченные* множества, такие, как конечный отрезок прямой. Отрезок прямой не обладает трансляционной симметрией - любой сдвиг его всегда порождает новое множество точек. Но если изменить длины в r раз, где $r < 1$, то получится новое множество точек $\mathcal{S}' = r(\mathcal{S})$, которое составит небольшую часть прямой. Этим отрезком прямой, подвергнув его параллельному переносу, можно покрыть часть исходного прямолинейного отрезка \mathcal{S} . При надлежащем выборе числа r мы можем однократно покрыть исходный отрезок N непересекающимися отрезками. Можно сказать, что множество \mathcal{S} *самоподобно* с коэффициентом подобия r . Для отрезка

прямой единичной длины мы можем выбрать $r(N) = 1/N$, где N - любое целое число. Прямоугольный участок плоскости можно покрыть его уменьшенными копиями, если их длины изменить в $r(N) = (1/N)^{1/2}$ раз. Аналогично прямоугольный параллелепипед можно покрыть его уменьшенными копиями, если выбрать $r(N) = 1/N^{1/3}$. В общем случае масштабный множитель следует выбирать равным

$$r(N) = (1/N)^{1/d}. \quad (4)$$

Размерность подобия d для прямых, плоскостей и кубов равна соответственно 1, 2 и 3.

Рассмотрим теперь кривую Кох на рис. 6.

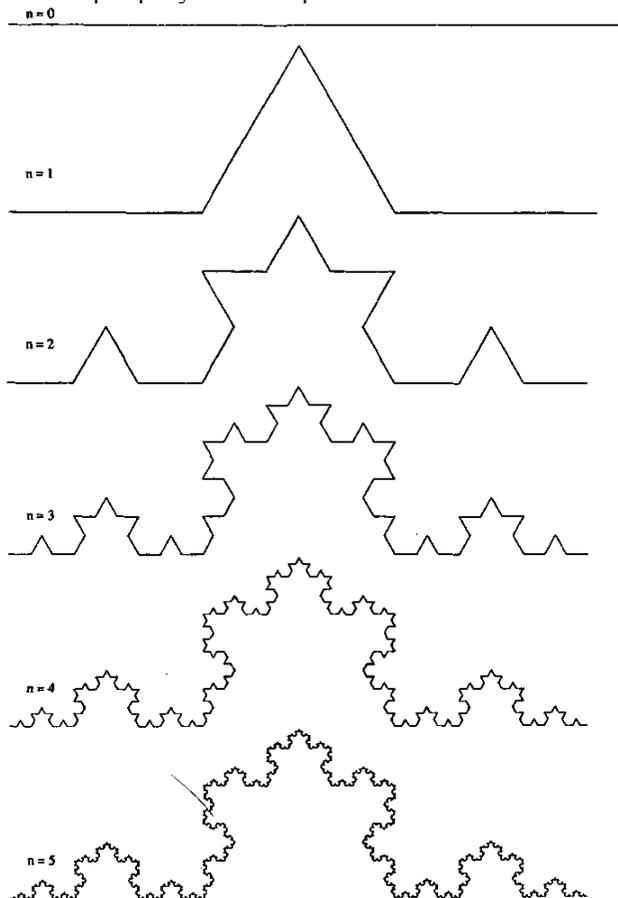


РИС. 6. Построение триадной кривой Кох.

С масштабным множителем $r = 1/3$ мы получаем первую треть всей кривой. Нам необходимо $N = 4$ таких фрагментов, чтобы покрыть исходное множество его уменьшенными копиями, подвергая их повторным параллельным переносам и поворотам. Мы можем также выбрать масштабный множитель $r = (1/3)^n$ и покрыть исходное множество его $N = 4^n$ уменьшенными копиями. Для триадной кривой Кох масштабный множитель определяется выражением

$$r(N) = (1/N)^{1/D} \quad (5)$$

с размерностью подобия d , равной размерности Хаусдорфа - Безиковича $D = \ln 4 / \ln 3$.

В общем случае *размерность подобия* D_s определяется выражением

$$D_s = -\ln N / \ln r(N). \quad (6)$$

Для самоподобных фракталов размерность Хаусдорфа-Безиковича D равна D_s , и для таких фракталов мы будем опускать индекс S у размерности подобия.

Размерность подобия легко поддается определению для различных фракталов, получающихся с помощью различных вариантов построения Кох. Рассмотрим предфрактал Кох, построенный с единичным квадратом в качестве заправки и с образующим элементом, состоящим из $N = 8$ ломаных длиной $r = 1/4$, изображенных на рис.7.

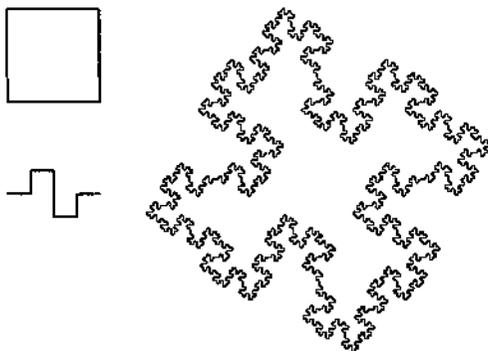


РИС.7. Построение квадратной кривой Кох.

Эта кривая имеет размерность подобия $D = -\ln 8 / \ln 1/4 = 3/2$ и равна размерности Хаусдорфа-Безиковича множества, получающегося после бесконечно большого числа итераций. Заметим, однако, что, поскольку в качестве заправки мы используем единичный квадрат, фигура в целом *не выдерживает* преобразования подобия. Каждый фрагмент «береговой линии» самоподобен, но, уменьшив всю кривую в r раз, мы

получим уменьшенную копию оригинала, и вполне возможно, что оригинал *нельзя* будет покрыть такими уменьшенными множествами. Дело в том, что фрактальная скейлинговая инвариантность достигается только в пределе при $\delta \rightarrow 0$, и мы заключаем, что фрактальная природа кривых Кох есть, строго говоря, *локальное* свойство. Замечательная кривая Кох изображена на рис.8.

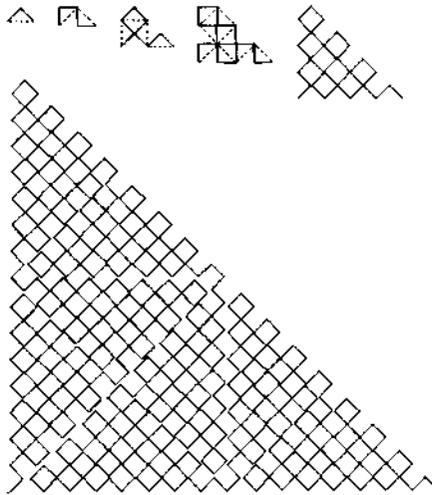


РИС. 8. Треугольный невод, $D = 1,944$. Для нескольких первых поколений ломаных предыдущее поколение показано штриховыми линиями. Каждое из поколений изображено в увеличенном виде, чтобы можно было проследить структуру кривой.

Эта кривая без самопересечений заполняет прямоугольный равнобедренный треугольник. Заправкой служит единичный интервал, а образующий элемент, показанный на рис.8, состоит из $N = 2$ звеньев длиной $r = 0,99 \cdot 1\sqrt{2}$. Мы выбрали коэффициент 0,99 для того, чтобы нам легче было проследить за структурой кривой, так как при $r = 1/\sqrt{2}$ каждое поколение выглядит просто как бумага «в клеточку». Определяемое этим построением фрактальное множество имеет размерность $D = -\ln 2 / \ln (0,99/\sqrt{2}) = 1,944$. Как видно из рис.8, образующий элемент используется в двух вариантах: один сдвигает середину отрезка прямой влево, другой вправо. Кроме того, каждое новое поколение предфракталов начинается с чередующихся левых и правых образующих элементов. На рис. 8 каждое новое поколение показано в увеличенном виде. Это сделано для того, чтобы прямолинейные

отрезки имели заданную длину и за структурой кривой можно было следить без ухудшения разрешающей способности.

Попытаемся теперь слегка изменить правила построения. Пусть при первом использовании образующего элемента середина образующего отрезка смещается влево. Каждое последующее поколение начинается с образующего элемента, смещенного вправо, а затем смещения середины вправо и влево чередуются. Несколько первых поколений и 11-е поколение показаны на рис. 9.

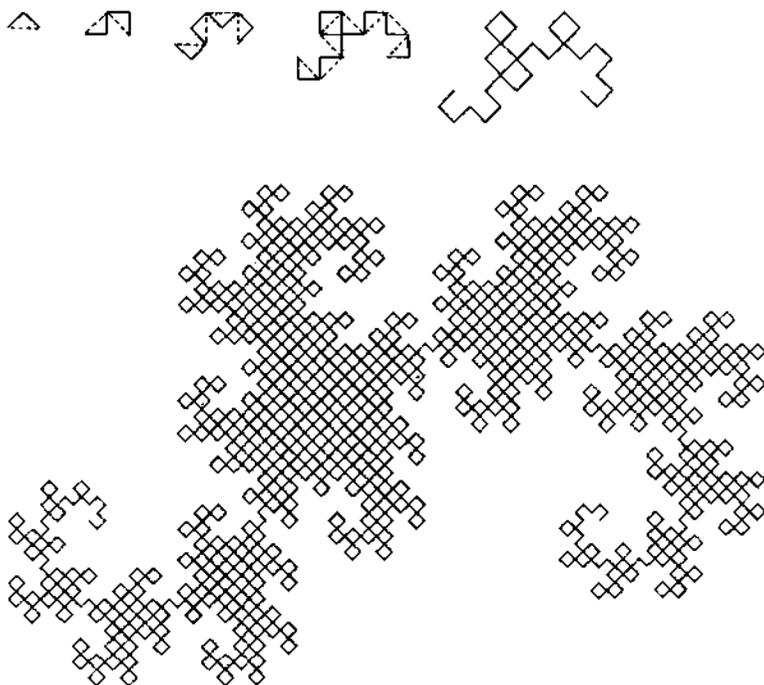


РИС.9. Дракон Хартера-Хейтуэя, $D = 2$.

Предельная фрактальная кривая называется драконом Хартера-Хейтуэя.

Если сохранить правила построения треугольного невода, но воспользоваться при этом образующим элементом, изображенным на рис.10, то получится самопересекающаяся кривая, заполняющая плоскость.

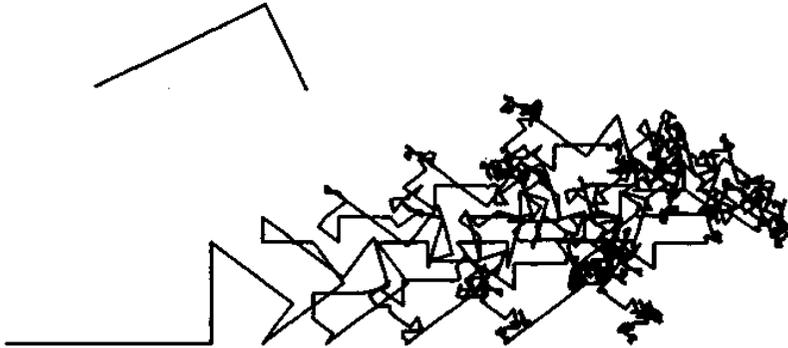


РИС.10. Модифицированный треугольный невод, $D = 2$. Образующий элемент, изображенный в левом верхнем углу, покрывает единичный отрезок и преобразуется с двумя коэффициентами подобия $r_1 = 2/\sqrt{5}$ и $r_2 = 1/\sqrt{5}$.

10-е поколение показано на рис.10. Образующий элемент разбивает единичный отрезок на две части, расположенные под прямым углом друг к другу. Длинный катет изменяется с масштабным множителем $r_1 = 2\sqrt{5}$, а короткий - с другим масштабным множителем, $r_2 = 1\sqrt{5}$. В этом случае мы уже не можем при определении размерности подобия использовать формулу (6). Мандельброт определил размерность подобия D как размерность, для которой выполняется соотношение

$$\sum_i r_i^D = 1. \quad (7)$$

В рассматриваемом случае $D = 2$. Верно также, хотя и не доказано, утверждение о том, что эта размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа - Безиковича данного фрактального множества. Кроме того, при использовании соотношения (7) возникает вопрос о том, как быть с перекрывающимися частями кривой.

2.5. Топологическая размерность \dim .

$$\{U_i\}$$

Напомним, что система подмножеств топологического пространства X называется его покрытием, если каждая точка $x \in X (\forall x \in X)$

принадлежит какому-то из множеств (хотя бы

U_i , т.е. $\forall x \in X \exists U_i \in \{U_i\} | x \in U_i$. Будем рассматривать сейчас лишь конечные покрытия.

Кратностью покрытия $\{U_i\}$ называется *наибольшее* из таких чисел n ($n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) - целое неотрицательное число , что существует n элементов покрытия $\{U_i\}$ имеющих непустое пересечение (т.е. всегда существует хотя бы (по крайней мере) одна точка, принадлежащая n различным элементам покрытия - всем этим $\{U_j\} (j = \overline{1, n})$ одновременно).

Сформулируем понятие топологической размерности, восходящее к работам Брауэра, Урысона, Менгера.

Рассмотрим для простоты компакт, т.е. замкнутое ограниченное множество. Каждый компакт при $\forall \varepsilon > 0$ допускает ε -покрытие, т.е. может быть представлен в виде объединения конечного числа $< \varepsilon$ замкнутых множеств, каждое из которых имеет диаметр $< \varepsilon$. Или из любого открытого его покрытия всегда можно выбрать конечное подпокрытие (система множеств $\{V_j\}$ называется подпокрытием, $\forall V_j \in U_i \in \{U_i\}$ если хотя бы одному U_i).

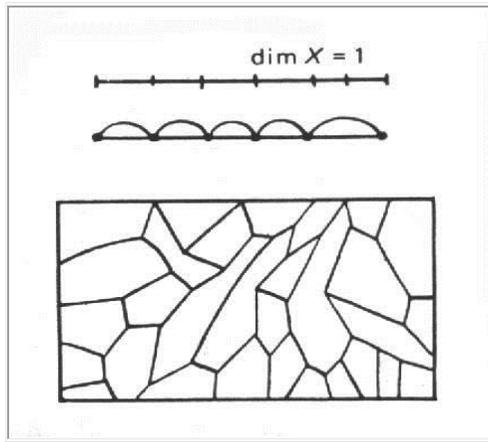
Определение. Топологической размерностью d_T или $dim_{\text{компакта}}$ X называется *наименьшее* из таких целых чисел n , что во всякое открытое покрытие пространства X можно вписать замкнутое

подпокрытие кратности $\leq n + 1$. Если таких чисел нет, то

$$\dim X \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$$

полагается $\dim X = n$. Топологическая размерность называется также брауэровской размерностью или просто размерностью.

Наглядный смысл этого определения довольно прост. Например, при $n = 2$ оно утверждает, что всякая двумерная "площадка" может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями (замкнутыми множествами) так, что камни примыкают друг к другу не более чем по три (рис.).



В тоже время эта площадка не может быть вымощена сколь угодно мелкими камнями так, чтобы были только примыкания по два. При заполнении некоторого трехмерного объема достаточно мелкими камнями (например кирпичной кладкой) необходимо возникают уже примыкания по четыре.

Другим подходом к понятию размерности является идея Хаусдорфа.

2.6. Размерность Хаусдорфа d_H (фрактальная размерность)

Как уже говорилось, точка имеет размерность равную нулю, отрезок, окружность, вообще любая обычная кривая на плоскости или в пространстве - размерность 1, круг, сфера - двумерны, тела - трехмерны. Во всех перечисленных случаях размерность равна числу независимых переменных, необходимых для того, чтобы задать точку на рассматриваемом объекте. Однако смысл понятия "размерность" шире. Оно характеризует более "тонкие" топологические свойства объектов и совпадает с числом независимых переменных, необходимых для описания объекта, только в частных случаях. С одномерными объектами мы связываем понятие длины, с двумерными площади и т.д. Но как можно представить себе множество с размерностью $3/2$? По видимому, для этого требуется нечто промежуточное между длиной и площадью, и если длину условно назвать 1-мерой, а площадь - 2-мерой, то требуется $(3/2)$ -мера. В 1919 году Феликс Хаусдорф действительно определил такую α -меру для

$$\alpha \geq 0, (\alpha \in \mathcal{R})$$

любого и на этой основе каждому множеству в евклидовом пространстве сопоставил число, названное им метрической размерностью. Идеи Хаусдорфа, не опубликовавшего больше ни одной работы, в этом направлении, были развиты А.С. Безиковичем, который длительное время был автором или соавтором практически всех работ по данной тематике. В последующие годы размерность Хаусдорфа-Безиковича получила применение в некоторых узких областях математики, но ничто не предвещало той популярности этого понятия за пределами математики, которая сейчас наблюдается.

Рассмотрим известные выражения для длины, площади и объема шара в евклидовом пространстве. Диаметр (длина) шара радиуса r в \mathcal{R}^1 , составляет $2r$. Площадь шара в \mathcal{R}^2 равна πr^2 . Объем в \mathcal{R}^3 равен $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Соответствующие формулы в евклидовом пространстве любого целого числа измерений хорошо известны:

$$V_d = \gamma(d) \cdot r^d, d = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

$$\gamma(d) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^d / \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma(x)$$

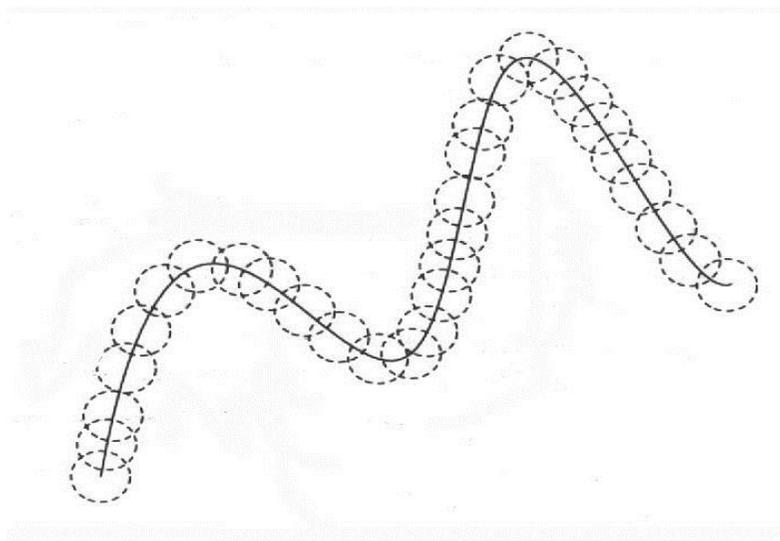
где $\Gamma(x)$ - гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} dt, x > 0. \quad (2)$$

Первый шаг в построении теории дробной размерности состоит в определении d -меры шара радиуса r в \mathcal{R}^n , где d - любое неотрицательное вещественное число. Это достигается путем распространения формулы (1) на все вещественные $d > 0$.

Например, мера шара в $3/2$ -мерном пространстве определяется как $\gamma(3/2) \cdot r^{3/2}$.

Следующий шаг заключается в переносе понятия d -меры с шара на произвольное множество $A \subset \mathcal{R}^n$. Для этого построим покрытие A множеством шаров $B_\varepsilon(x_i)$ (рис.).



Просуммируем их объемы:

$$\sum_{i=1}^M \gamma(d) \cdot \varepsilon^d. \quad (3)$$

Определение. ε -фрактальной d -мерой множества называется число

$$\mu(A, d, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{M\} \cdot \varepsilon^d \equiv N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \quad (4)$$

или $\mu(A, d, \varepsilon) = \inf\{\sum \gamma(d) \cdot \varepsilon^d \mid \text{всевозможным окрытиям множества } A\}$.

$$A_1 = [0, 1] \in R^1 \quad N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1$$

Например, если $\varepsilon = 0.1$, то $N(0.1) = \left\lceil \frac{1}{0.2} \right\rceil + 1 = 6$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ этот \inf может только увеличиваться. Следовательно, $\mu(A, d, \varepsilon)$ всегда существует предел при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение. Фрактальной d -мерной сферической мерой Хаусдорфа называется число

$$\mu_F(A, d) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(A, d, \varepsilon) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon^d \cdot N(\varepsilon)) \equiv \mu_F(A, d). \quad (5)$$

Часто бывает:

$$\mu_F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu(A, d, \varepsilon). \quad (6)$$

Безикович показал, что для каждого X всегда существует число $d_H \in \mathcal{R}$, что d -мерная мера Хаусдорфа компакта X бесконечна при $d < d_H$, и напротив равна 0, при $d > d_H$.

Если $A_1 = [0, 1]$, то при $d = 1$, $\mu_F(A_1, 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \cdot \left(\left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \right) = \frac{1}{2}$.
В $d > 1$

тоже время для

$$\mu_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) = 0$$

А для

$$d < 1 \quad \mu_F(A_1, d) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon^d \cdot \left(\left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} \right\rfloor + 1 \right) = +\infty$$

В общем случае замкнутого ограниченного множества A легко видеть, что если

$$\begin{aligned} & \mu_F(A, d) = 0 \quad d > d' \\ & \mu_F(A, d) > 0 \quad \forall d < d' \Rightarrow \mu_F(A, d) = +\infty \end{aligned}$$

то для

$$d_H \in [0, +\infty)$$

Следовательно, существует такое число, что

$$\begin{aligned} & \mu_F(A, d) = 0 \quad d > d_H \quad \mu_F(A, d) = +\infty \\ & \forall d < d_H \quad \mu_F(A, d) \end{aligned}$$

в то время как может быть любым числом из интервала $[0, +\infty]$

Очевидно,

$$d_H = \inf\{d \mid \mu_F(A, d) = 0\}. \quad (7)$$

Определение. Число d_H , удовлетворяющее соотношению:

$$d_H = \inf\{d \mid \mu_F(A, d) = 0\}$$

называется *размерностью Хаусдорфа-Безиковича (метрической или фрактальной размерностью)*

множества A . Обозначается как d_H или d_F .

$$A_1 = [0, 1]$$

Например,

для

$$\mu_F(A_1, d) = \begin{cases} 0, & d > 1; \\ +\infty, & d < 1; \\ \frac{1}{2}, & d = 1. \end{cases} \quad d_H(A_1) = 1$$

Значит,

Вернемся теперь к формуле (4):

$$\mu(A, d, \varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \Rightarrow N(\varepsilon) = \frac{\mu}{\varepsilon^d}. \quad (8)$$

Прологарифмируем обе части:

$$\log N(\varepsilon) = \log \mu - \log \varepsilon^d \Rightarrow d = -\frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (9)$$

или

$$d = d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}. \quad (10)$$

Для большинства "хороших" объектов, пространств, множеств *dim*_{*i*}

d_H

совпадают, однако существуют объекты для которых $dim < d_H$

. Это и есть фракталы.

2.7. Размерность Минковского d_M

Размерность Минковского может служить аналогом размерности Хаусдорфа-Безиковича, удобным для использования в прикладных задачах. Эти размерности как правило совпадают, но алгоритм определения размерности Минковского несколько проще.

Определение размерности Минковского (Герман Минковский)

d_M

для кривой (фрактальной или гладкой) в общих чертах сводится к следующему. Пусть центр небольшого евклидова шара (круга) радиуса r движется вдоль кривой, замечая *площадь Минковского*, то есть

$$S(r)$$

площадь, возникающей при движении шара. Разделим площадь

$$S(r)$$

на $2r$ и устремим r к нулю. В случае гладкой кривой мы получили бы в пределе длину кривой, но для фрактальной кривой

$$F(r)/2r$$

результат бесконечный. Действительно, отношение

$$d_M > 1$$

пропорционально величине r^{1-d_M} , которая при

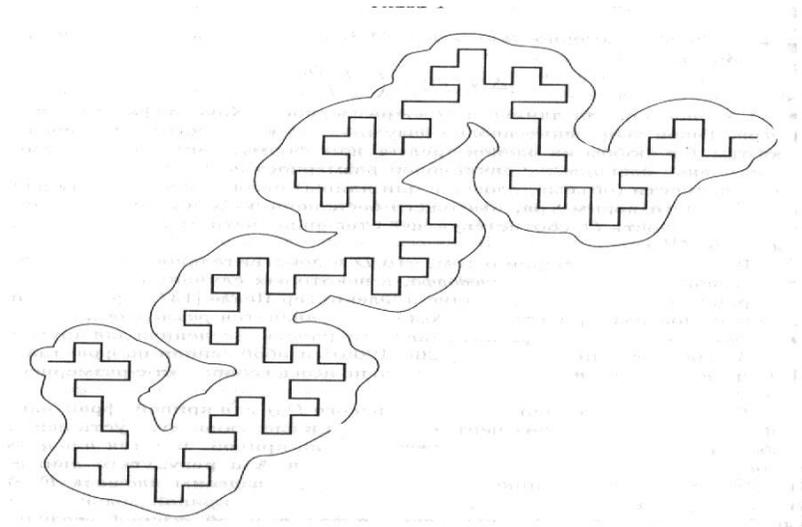
$$d_M$$

расходится для $r \rightarrow 0$. Значение величины d_M служит мерой скорости расхождения и называется *размерностью Минковского-Булигана*. Ее можно вычислить по формуле:

$$d_M = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln S(r)}{\ln \left(\frac{1}{r} \right)} + 2. \quad (11)$$

$$S(r) \sim r^{-d_M} \quad d_M = -1 + 2 = 1$$

В случае гладкой кривой $d_M = 1$ и $d_H = 1$, как и следовало ожидать.



Для всех строго самоподобных фракталов размерность Минковского d_M равна размерности Хаусдорфа-Безиковича d_H . Если эти размерности не совпадают, то

$$d_M > d_H. \quad (12)$$

Это говорит о том, что размерность Минковского несколько "грубее" размерности Хаусдорфа-Безиковича, так как не учитывает некоторые тонкие структуры объекта.

2.8. Кривые Мандельброта-Гивена и Серпинского

Построение кривых Кох, изображенное на рис.11, принадлежит Мандельброту и Гивену.

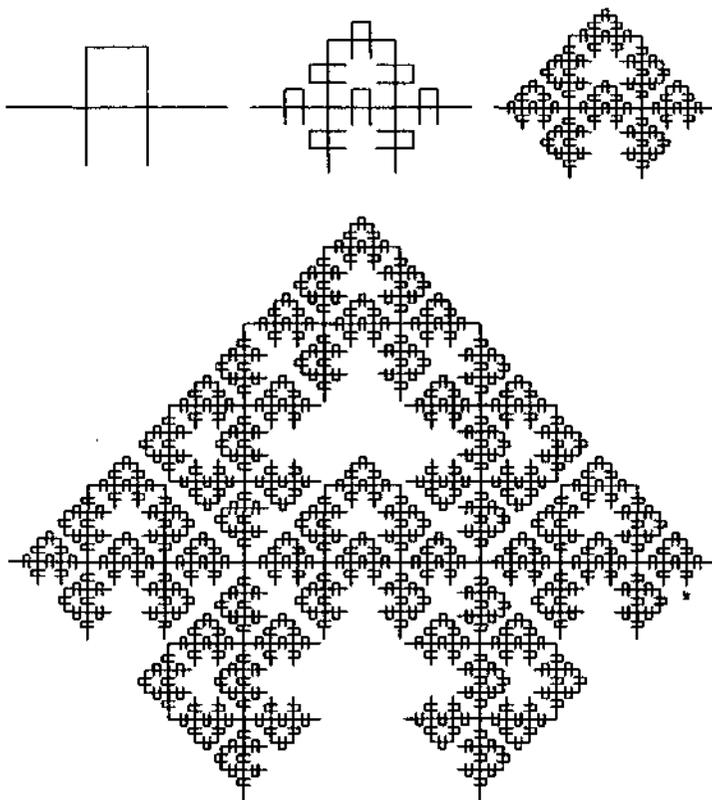


РИС.11. Последовательные этапы построения кривой Мандельброта-Гивена. Высота образующего элемента несколько уменьшена, чтобы можно было проследить структуру кривой. Фрактальная размерность $D_B = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$. Мандельброт и Гивен описывают также случайные варианты этой кривой.

Образующий элемент для этой кривой делит прямолинейный отрезок на части длиной $r = 1/3$ и соединяет их в *петлю*, состоящую из трех частей, к которой пристраиваются две *ветви*. Мандельброт и Гивен использовали эту кривую и аналогичные кривые в качестве моделей перколяционных кластеров, которые мы

рассмотрим позже. Кривая Мандельброта-Гивена интересна тем, что имеет петли всех возможных размеров и ветви (выступы) всех возможных размеров. И выступы, и петли декорированы петлями и выступами и т. д. При каждой итерации (переходе от одного поколения предфракталов к следующему) образующий элемент производит замену каждого прямолинейного звена в предфрактале на $N = 8$ звеньев, уменьшенных с $r = 1/3$. Используя формулу (6) для размерности подобия, мы заключаем, что кривая Мандельброта-Гивена имеет фрактальную размерность $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$

Вообразим кривую Мандельброта-Гивена, изготовленную из какого-нибудь электропроводного материала, и пусть ток течет от левого конца кривой к правому. Ясно, что ни в одной ветви, возникающей из двух вертикальных отрезков образующего элемента, тока не будет. Ток будет течь только по остовам - по кривой, которая получится, если от кривой Мандельброта-Гивена отсечь все ветви, соединенные с исходным прямолинейным отрезком (затравкой) только одной связью. Отбросив все ветви, мы получим кривую, изображенную на рис.12.

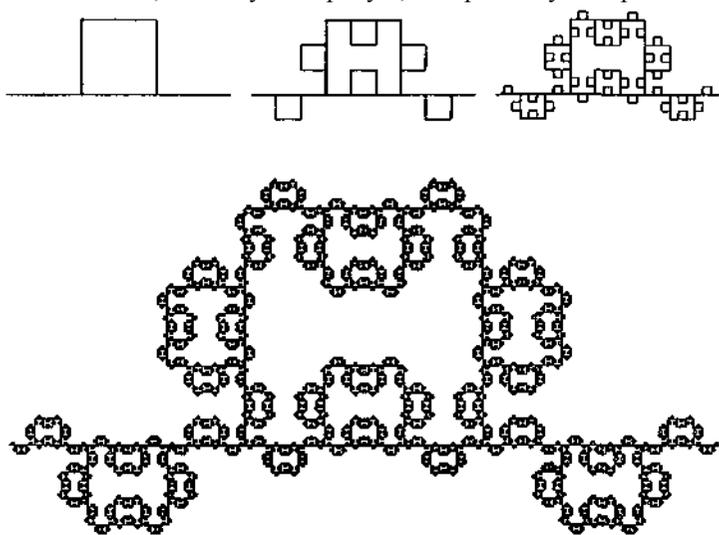


РИС. 12. Построение кривой Мандельброта-Гивена без ветвей. Эта кривая получена с помощью образующего элемента с одной петлей. Фрактальная размерность $D_B = \ln 6 / \ln 3 = 1,63\dots$

(При построении этой кривой образующий элемент применялся в таких направлениях, чтобы углы получающейся ломаной не соприкасались между собой.) Фрактальная размерность такой кривой

без свободных («висячих») концов равна $D_B = \ln 6 / \ln 3 = 1,63\dots$, так как образующий элемент заменяет каждый прямолинейный отрезок $N = 6$ отрезками, уменьшенными ($r = 1/3$) копиями заменяемого отрезка. В скольких местах мы можем перерезать ординарную (односвязную) связь, чтобы концы затравки оказались разъединенными? Каждый раз, применяя образующий элемент, мы порождаем $N = 2$ односвязных связей, поэтому эти связи образуют множество точек с фрактальной размерностью $D_{sc} = \ln 2 / \ln 3 = 0,63\dots$

Кривые Мандельброта-Гивена обладают многими интересными геометрическими свойствами, которые не находят отражения в фрактальной размерности кривой как целого. Действительно, такие подмножества, как остов, односвязные связи и другие, также являются фрактальными множествами со своими собственными фрактальными размерностями. Удалось выяснить, что многие физические процессы естественным образом выбирают те подмножества структур, на которых они происходят, и поэтому при рассмотрении таких процессов необходимо использовать много фрактальных размерностей (более подробно об этом позже).

Существует еще одно построение, порождающее кривую с петлями всех размеров. Это салфетка Серпинского, изображенная на рис. 13.



РИС.13. Построение треугольной салфетки Серпинского. Затравка - треугольник со всеми внутренними точками. Образующий элемент исключает из затравки центральный треугольник. *Справа*: четвертое поколение предфракталов; фрактальная кривая получается в пределе при бесконечно большом числе поколений и имеет фрактальную размерность $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$

При каждом применении образующего элемента треугольник, рассматриваемый вместе с внутренними точками, заменяется $N = 3$ треугольниками, уменьшенными с коэффициентом $r = 1/2$, поэтому из соотношения (6) следует, что размерность подобия в этом случае равна $D = \ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$. С салфеткой Серпинского тесно связана другая кривая - так называемый ковер Серпинского. Он изображен на рис.14.

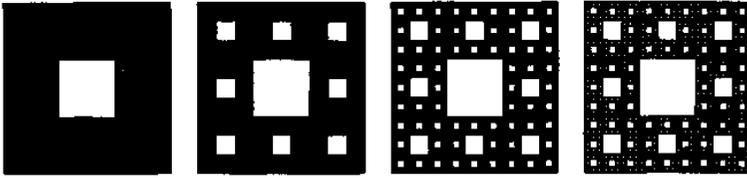


РИС.14. Построение ковра Серпинского. Затравка квадрат, а образующий элемент (слева) состоит из $N = 8$ квадратов, полученных из затравки преобразованием подобия (сжатием) с коэффициентом подобия $r = 1/3$. Справа: четвертый этап построения; размерность подобия $D = \ln 8 / \ln 3 = 1,89\dots$

Бесконечно много поколений предфракталов порождают фрактальную кривую. «Толстые» (черные) участки предфракталов при переходе к предельной фрактальной кривой исчезают, а полный периметр дыр в ковре Серпинского становится бесконечным.

Кривые Серпинского использовались в качестве моделей многих физических явлений. Гефен и др. опубликовали отчет о первом систематическом исследовании критических явлений, происходящих вблизи фазовых переходов в спиновых системах, носителем которых служат самоподобные фрактальные решетки. В эксперименте Гордона и др. была измерена температура $T_C(H)$ перехода сверхпроводящей фазы в нормальную как функции от приложенного магнитного поля H на образце алюминиевой пленки, имевшей структуру предфрактала 10-го поколения салфетки Серпинского. Зависимость температуры фазового перехода $T_C(H)$ имеет вид самоподобной фрактальной кривой и находится в превосходном количественном согласии с теоретическими предсказаниями.

Еще о скейлинге

К обсуждению масштабной инвариантности, или скейлинга, часто бывает полезно подходить с другой точки зрения. Рассмотрим изображенную на рис. 6 кривую Кох как график некоторой функции $f(t)$. Этот график представляет собой геометрическое место точек (x_1, x_2) плоскости, заданное соотношением $(x_1, x_2) = (t, f(t))$. Если $\lambda = r = (1/3)^n$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ есть масштабный множитель, то триадная кривая Кох обладает тем свойством, что

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t)$$

с показателем $\alpha = 1$. Заметим, что в случае кривой Кох функция $f(t)$ неоднозначна. Тем не менее скейлинговое соотношение выполняется

для любой точки множества. Аналогичное построение применимо и к функциям, заданным на всех положительных действительных числах. Например, степенная функция $f(t) = bt^\alpha$ удовлетворяет соотношению *однородности*

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \quad (8)$$

при *всех* положительных значениях масштабного множителя X . Функции, удовлетворяющие соотношению (8), принято называть *однородными*. Однородные функции играют очень важную роль в описании термодинамики фазовых переходов. Многое из того, что удалось достичь в последние годы в понимании критических явлений вблизи фазовых переходов второго рода, укладывается в следующее утверждение: **критическая часть свободной энергии \mathcal{F} таких систем удовлетворяет скейлинговому соотношению**

$$\mathcal{F}_c(\lambda t) = \lambda^{2-\alpha} \mathcal{F}_c(t). \quad (9)$$

Здесь $t = T/T_c - T/T_c$ есть относительная температура, измеряемая от температуры фазового перехода T_c , а α в данном случае - критический показатель удельной теплоемкости. Выбирая λ так, чтобы выполнялось равенство $\lambda t = 1$ (такой выбор масштабного множителя допустим, поскольку соотношение (9) выполняется при *любом* значении λ), получаем критическую часть свободной энергии в виде $\mathcal{F}_c(t) =$

$= t^{2-\alpha} \mathcal{F}_c(1)$. Из термодинамического определения теплоемкости $C = -T \partial^2 \mathcal{F} / \partial t^2$ следует, что при $t \rightarrow 0$ удельная теплоемкость ведет себя как $C \sim t^{-\alpha}$ (такое поведение согласуется с экспериментальными данными). Аналогичная скейлинговая зависимость описывает статистические свойства протекания, или *перколяции*, вблизи *порога протекания*. Современная *ренормгрупповая теория* критических явлений объясняет, почему свободная энергия имеет скейлинговую форму и позволяет вычислять критические показатели.

Разумеется, и степенная функция, и многие другие функции, удовлетворяющие скейлинговому соотношению, не являются фрактальными кривыми. Однако масштабно-инвариантные фракталы обладают скейлинговой симметрией, и большинство рассматриваемых Мандельбротом фракталов в том или ином смысле масштабно-инвариантны. Мандельброт отмечает, что масштабно-инвариантные фракталы могут использоваться в качестве приближения при описании природы - аналогично тому, как ранее мы использовали при описании природных тел прямые, плоскости и другие гладкие кривые и поверхности. Поразительно, сколь многого удается достичь, используя

только масштабно-инвариантные фракталы, поэтому тщательное исследование их свойств - задача весьма благодарная.

2.9. Функция Вейерштрасса-Мандельброта

В качестве примера масштабно-инвариантной фрактальной кривой рассмотрим фрактальную функцию Вейерштрасса - Мандельброта $W(t)$, определяемую соотношением

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t}) e^{i\varphi_n}}{b^{(2-D)n}}. \quad (10)$$

Следует заметить, что $W(t)$ зависит от b тривиальным образом, так как только параметр b определяет, какая часть кривой видна, когда аргумент t изменяется в заданном интервале. Параметр D должен принимать значения в диапазоне $1 < D < 2$, φ_n - произвольная фаза (каждый выбор фазы φ_n соответствует другой функции $W(t)$). Функция Мандельброта -Вейерштрасса непрерывна, но не дифференцируема ни в одной точке! Простая разновидность этой функции получается, если положить $\varphi_n = 0$. Косинусной фрактальной функцией Вейерштрасса - Мандельброта называется действительная часть функции $W(t)$:

$$C(t) = \operatorname{Re} W(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos b^n t)}{b^{(2-D)n}}. \quad (11)$$

Этой функции посвящена работа Берри и Льюиса. Принято считать, что эта функция *фрактальна* с размерностью D . Известно, что она действительно имеет размерность D , если под этим термином понимать клеточную размерность, но, по-видимому, не размерность Хаусдорфа - Безиковича. Молдин доказал, что фрактальная размерность $D(W_b)$ функции Вейерштрасса-Мандельброта заключена в пределах

$$D - (B/b) \leq D(W_b) \leq D.$$

Входящая в это неравенство постоянная B достаточно велика для того, чтобы оно выполнялось и при больших b . Мы вычислили значения функции Вейерштрасса - Мандельброта при нескольких значениях параметров в интервале «времени» $0 \leq t \leq 1$ (рис.15).

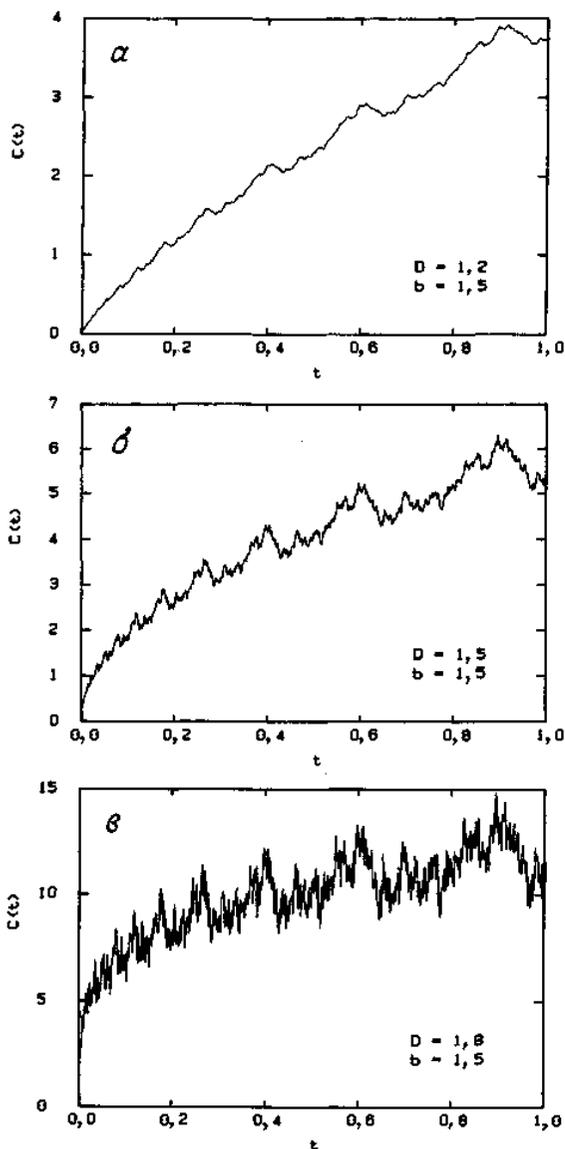


РИС.15. Фрактальная функция Вейерштрасса-Мандельброта $C(t)$ с $b = 1,5$:
а) $D = 1,2$; б) $D = 1,5$; в) $D = 1,8$.

При малых значениях D функция по существу гладкая, но когда D возрастает до 2, начинает сильно флуктуировать и напоминает шум в электронных цепях. Этот шум накладывается на общий тренд к возрастанию. Функция $C(t)$ - однородная и удовлетворяет соотношению однородности

$$C(bt) = b^{2-D} C(t). \quad (12)$$

Следовательно, если мы знаем функцию $C(t)$ на некотором интервале значений t , то тем самым она известна при любых t . В качестве примера сравним функцию $C(t)$ при $b=1,5$ и $D = 1,8$ (рис.16, а) с той же функцией, вычисленной в интервале $0 \leq t \leq b^{-4}$ (рис.16,б).

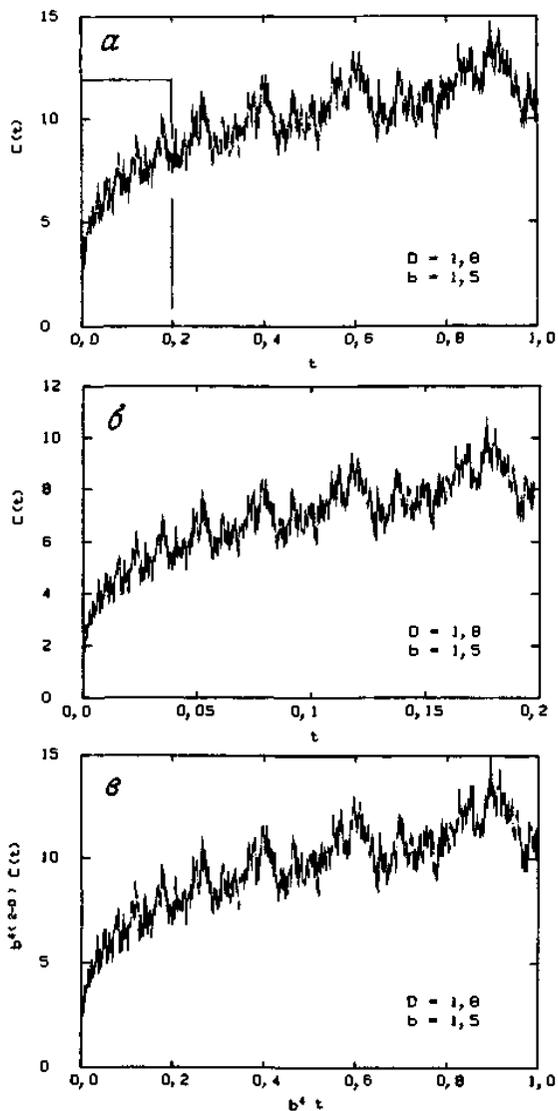


РИС. 16. Косинусоида Вейерштрасса-Мандельброта с $D = 1,8$ и $b = 1,5$:
a) $0 \leq t \leq 1$; *б*) $0 \leq t \leq b^{-4}$; *в*) кривая из примера *б*, преобразованная к отрезку $[0, 1]$.

Нетрудно видеть, что графики на обоих рисунках подобны. Действительно, из соотношения (2.16) следует, что если в кривой, изображенной на рис. 16, б, заменить t на $b^4 t$ и $C(t)$ на $b^{4(2-D)} C(t)$, как это сделано на рис. 16, в, то в результате получится исходная функция, изображенная на рис. 16, а. В этом и проявляются скейлинговые свойства функции $C(t)$.

Следует подчеркнуть, что кривая $C(t)$ не самоподобна, а самоаффинна, так как и в направлении оси t , и в направлении оси $C(t)$ мы использовали различные масштабные множители r .

Функцию Вейерштрасса - Мандельброта можно использовать для получения случайных фрактальных кривых, выбирая случайным образом фазу φ_n из интервала $(0, 2\pi)$. Такие функции рассматривали Берри и Льюис. Одна из последних работ по функции Вейерштрасса - Мандельброта выполнена Фоссом.

2.10. Фрактальная размерность кластеров

Определение размерности Хаусдорфа-Безиковича D и тем самым фрактальной размерности множества точек требует, чтобы диаметр δ покрывающих множеств стремился к нулю. Что же касается физических систем, то они, вообще говоря, обладают характерным минимальным линейным размером, таким, как радиус R_0 атома или молекулы. Применительно к идеям, изложенным выше, это означает, что математическую линию необходимо заменить линейной цепочкой «молекул», или *мономеров*. Как показано на рис. 17, двумерное множество точек мы заменяем плоским набором мономеров, а объем-некоторой упаковкой сфер.

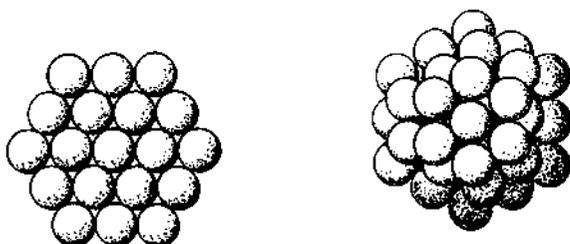


РИС. 17. Простые упаковки сфер.

Число мономеров в цепи длиной $L=2R$ равно

$$N = (R/R_0)^1.$$

Для набора мономеров, образующих круглый диск, получаем

$$N = \rho(R/R_0)^2.$$

Плотность числа мономеров ρ для плотно упакованных сфер составляет $\pi/2\sqrt{3}$. Выписанные нами соотношения применимы только в пределе при $R/R_0 \gg 1$, поскольку и периметр круглого диска, и сферическую поверхность шара можно покрыть мономерами только приближенно. Для трех перечисленных только что случаев мы можем указать асимптотическую форму для соотношения между числом частиц и размером «кластера», который оценивается по радиусу R наименьшей сферы, содержащей кластер внутри себя; она имеет вид

$$N = \rho(R/R_0)^D, \quad N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Величина D в этом соотношении «число частиц-радиус» называется *размерностью кластера*. Так как масса всех мономеров одинакова, число частиц N часто интерпретируют как массу, ρ - как плотность массы, а размерность кластера называют *размерностью массы*.

Плотность ρ зависит от того, как упакованы мономеры. Например, если сферы упакованы в объеме случайным образом, то плотность понижается с $\rho = \pi/3 \sqrt{2} = 0,7405$ до $0,637$. Для других разновидностей кластеров выражение для плотности ρ содержит множители, учитывающие *форму* кластера. Например, для эллипсоида вращения с отношением полуосей b/a величина ρ для плотной

упаковки сфер определяется выражением $\rho = (b/a)\pi/3\sqrt{2}$. В то же время размерность кластера D не зависит от формы кластера или от того, является ли упаковка мономеров упаковкой плотной, случайной или скважистой с равномерным распределением дыр.

Важно сознавать, что размерность D , определяемая соотношением (13), может быть нецелой, т.е. *фрактальной*. Чтобы пояснить это обстоятельство, обратимся снова к триадной кривой Кох. Построение триадной кривой Кох на рис. 6 состоит из повторного применения образующего элемента, который разбивает прямолинейные отрезки на более мелкие отрезки. Альтернативная точка зрения состоит в том, чтобы рассматривать каждый предфрактал как некую конструкцию из мономеров: один мономер соответствует одному образующему элементу. На рис. 18 показан такой подход к построению фракталов.

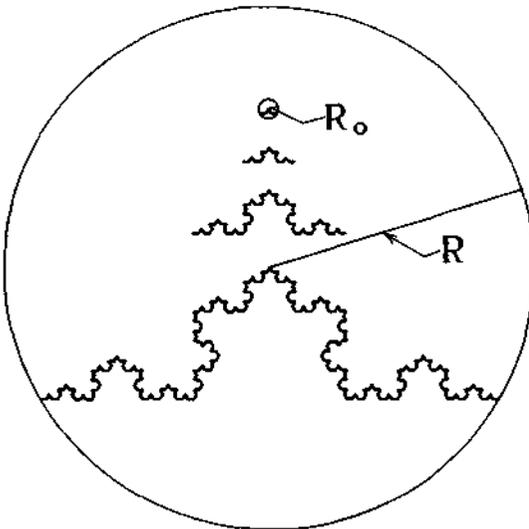


РИС. 18. Триадные классы Кох.

Радиус мономера, т.е. образующего элемента, равен $R_0 = 1/\sqrt{3}$, если образующий элемент, как обычно, покрывает единичный отрезок. Сам образующий элемент представляет собой наименьший кластер, или исходное поколение в процессе роста кластера. Первое поколение содержит $N=4$ мономеров и имеет радиус $R = 3R_0$. В следующем поколении число мономеров возрастает до $N = 4^2 = 16$, а радиус кластера - до $R = 3^2R_0 = 9R_0$. В n -м поколении получаем $N=4^n$ и $R = 3^nR_0$. Мы видим, что триадные «кластеры» Кох удовлетворяют соотношению *число частиц-радиус* (13) вида $N = (R/R_0)^D$ с

размерностью кластера, равной фрактальной размерности $D = \ln 4 / \ln 3$ триадной кривой Кох. В общем случае мы называем показатель D в соотношении число частиц-радиус *фрактальной размерностью кластера*.

Фрактальная размерность кластера служит количественной характеристикой того, как кластер заполняет занимаемое им пространство. Рассмотрим кластер на рис.19, полученный с помощью процесса *ограниченной диффузией агрегации (ОДА)*.

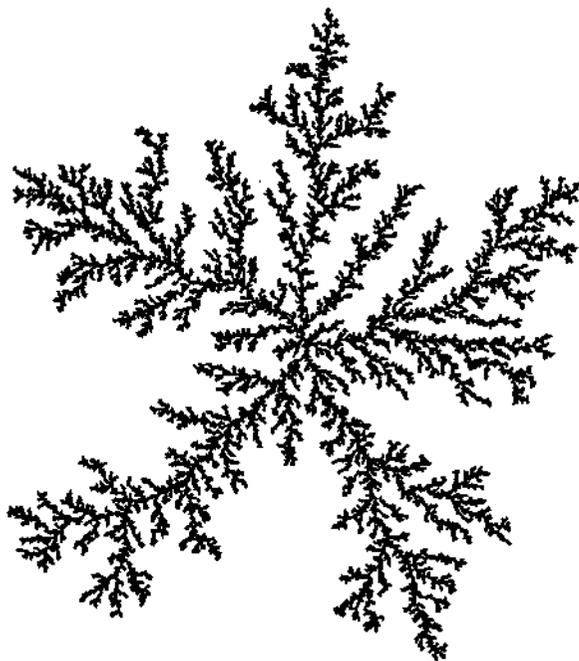


РИС.19. Кластер, возникающий в результате двумерной ограниченной диффузией агрегации с $D = 1,71$. Кластер, содержащий 50000 частиц, получен с помощью внерешеточного моделирования. Частица, совершающая случайные блуждания, движется из выбранной наугад точки на большой окружности, проведенной вокруг кластера. Кластер растет из зародыша в центре. Соприкасаясь с кластером, блуждающая частица прилипает к нему, после чего из новой наугад выбранной точки на окружности начинает двигаться следующая частица, совершая случайные блуждания. Порождающая кластер компьютерная программа составлена Полом Микином.

В этом процессе мономеры поступают из удаленного источника и диффундируют, совершая случайные блуждания. Достигнув кластера, блуждающие мономеры прилипают к нему. Процесс агрегации такого типа порождает кластеры с фрактальной размерностью $D(2) = 1,71$ в случае диффузии на плоскости, т. е. для размерности пространства $E = 2$. Обширные численные эксперименты были проведены в пространстве с $E = 3$ и позволили получить кластеры с фрактальной размерностью $D = 2,50$.

Следует подчеркнуть, что если кластер пористый или случайный, то это само по себе еще не означает, что он фрактальный. Фрактальный кластер отличается тем свойством, что с ростом размеров его плотность убывает по закону, описываемому *показателем в соотношении число частиц-радиус*. Если предпочтительнее ввести плотность числа частиц, то оказывается, что плотность на радиусе r для кластеров, аналогичных изображенному на рис. 19, определяется выражением

$$\rho(r) \sim R_0^{-D} r^{D-E}$$

и что эта плотность постоянна, только когда фрактальная размерность D равна евклидовой размерности E пространства, в котором находится кластер. Фрактальные кластеры имеют плотность, убывающую с увеличением расстояния от начала.

Фрактальная размерность кластера служит количественной характеристикой одной из особенностей кластера, а именно заполнения им пространства. Заметим, что фрактальная размерность кластера *не описывает его форму*. Существуют и другие характерные особенности кластера, которые также допускают количественное описание. Например, *разветвленность* кластера есть мера числа связей, которые нужно перерезать, чтобы изолировать произвольно большую часть кластера.

Структуры, порождаемые процессом ОДА, наблюдались во многих системах различного типа, в которых динамика роста описывается уравнением Лапласа. Позже мы опишем несколько подробнее фрактальные структуры, возникающие при образовании вязких пальцев в ячейках Хеле-Шоу и в пористых средах. Здесь же мы обсудим несколько аналогичных экспериментально наблюдавшихся структур. Например, Нимейер и др. наблюдали структуры типа ОДА при пробое диэлектриков и обнаружили фрактальную размерность

$D \sim 1,7$. Эти же исследователи создали модель пробоя диэлектрика для численного воспроизведения процесса. Предложенная ими модель полезна во многих отношениях и связана с моделью ОДА. Мацусита и др. наблюдали структуру типа ОДА, изображенную на рис. 20.

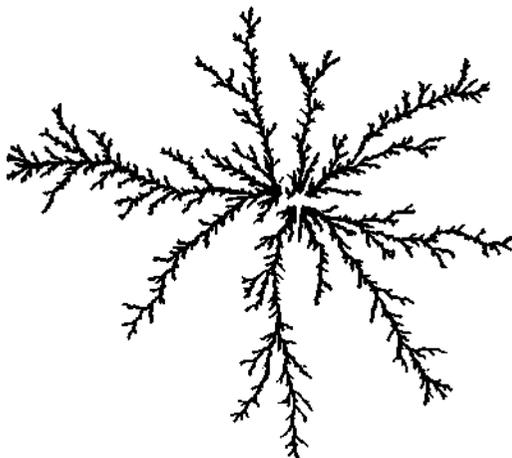


РИС.20. Дендрит металла, выращенный электроосаждением цинка на поверхности раздела водного раствора сульфата цинка и *n*-бутилацетата. Фрактальная размерность $D \approx 1,63$.

Листок металлического цинка растет в двух измерениях и имеет фрактальную размерность кластера с $D \approx 1,63$. Брэди и Болл обнаружили, что электроосажденная медь при условиях, когда рост ограничен диффузией, образует трехмерные фракталы с фрактальной размерностью $D = 2,43 \pm 0,03$, согласующейся с значением 2,5 для трехмерных кластеров типа ОДА.

2.11. Измерения фрактальных размерностей кластеров

Для различных систем опубликованы результаты измерений фрактальных размерностей кластеров, определяемых выражением (13), и показано, что описание экспериментальных данных с помощью фракталов полезно и позволяет рационально представлять их.

Агрегация протеинов. Агрегация протеинов иммуноглобулина типа IgG проводилась с помощью квазиупругого рассеяния света.

Имуноглобулин в растворе при нагревании имеет тенденцию к агрегированию. Кинетика агрегации описывается уравнением

Смолуховского:

$$\frac{dn_k}{dt} = \sum_{i+j=k} n_i A_{ij} n_j - 2 \sum_j n_k A_{kj} n_j. \quad (14)$$

Здесь $n_k(t)$ -концентрация кластеров, содержащих k молекул, как функция от времени. Вероятность того, что кластер, состоящий из i молекул, образует с кластером, состоящим из j молекул, новый кластер, состоящий из $k = i+j$ молекул, пропорциональна A_{ij} . Из уравнения (14) следует, что эффективный гидродинамический радиус кластера (R) по наблюдениям квазиупругого рассеяния света возрастает как функция времени и определяется выражением $\langle R \rangle = R_0(1 + \gamma t)^{1/D}$,

если кластеры удовлетворяют соотношению число частиц-радиус (13), записанному в виде

$$i = (\langle R \rangle / R_0)^{1/D}. \quad (15)$$

Здесь R_0 - радиус мономера, а γ -зависящая от температуры кинетическая постоянная. Из результатов, представленных на рис.21, заключаем, что фрактальная размерность кластеров для агрегатов IgG равна $D = 2,56 \pm 0,3$.

Результаты, получаемые при различных температурах и концентрациях, ложатся на одну кривую, если выполняется соотношение (15), т.е. если кластеры фрактальны. В этом нетрудно убедиться, взглянув на рис.21.

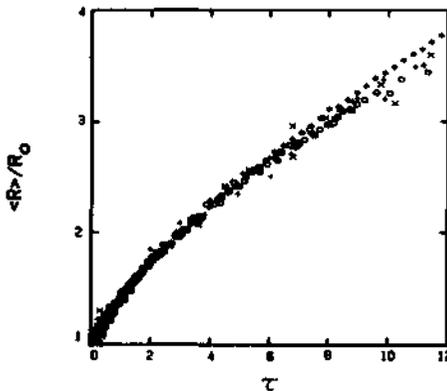


РИС.21. Эффективный гидродинамический радиус агрегатов IgG как функция приведенного времени $\tau = \gamma t$ при различных температурах и концентрациях. Фрактальная размерность кластера $D = 2,56 \pm 0,3$.

Кластеры коллоидного золота. Вейтц , Хуанг и Оливериа исследовали агрегаты коллоидного золота с помощью электронной микроскопии и рассеяния света. На рис. 22 воспроизведены некоторые из полученных этими группами электронных микрофотографий кластеров коллоидного золота. По оценкам экспериментаторов такие кластеры представляют собой фракталы с фрактальной размерностью $D \sim 1,75$. На рис. 22 ясно видно, что в кластерах имеются дыры всех размеров, совместимых с размером кластера. Кроме того, кластеры различных размеров по виду подобны.

+

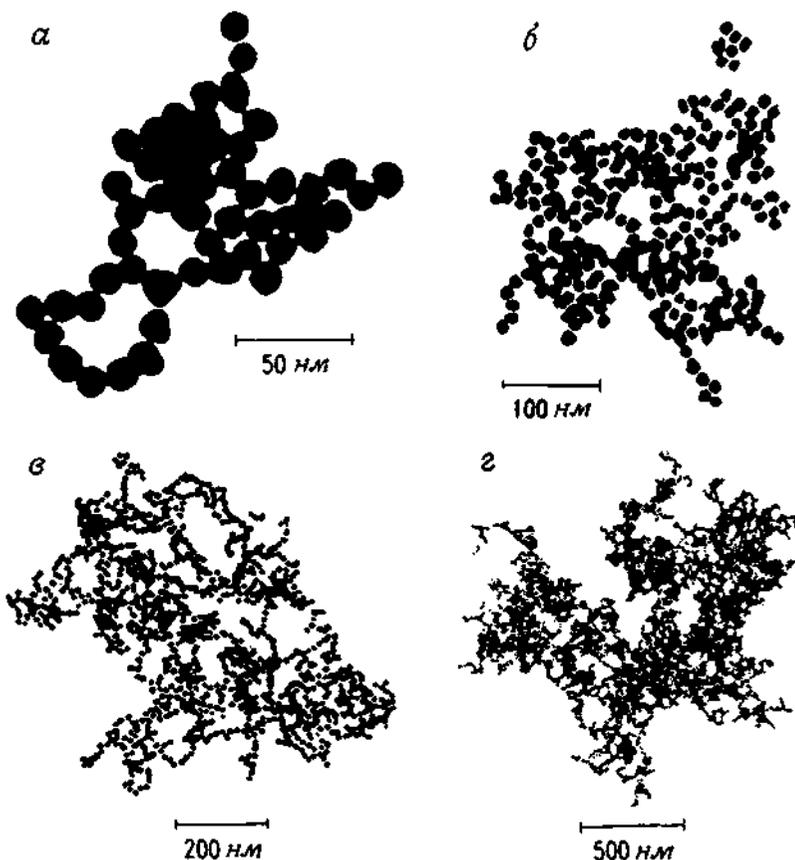


РИС.22. Фотографии кластеров золота, полученные с помощью просвечивающего электронного микроскопа.

Анализ электронных микрофотографий привел к фрактальности размерности $D = 1,7 \pm 0,1$ (рис.23).

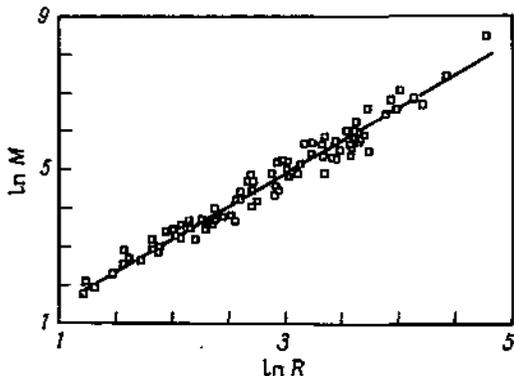


РИС.23. Вариация массы как функция размеров коллоидных агрегатов золота. За единицу массы принята масса отдельной частицы, за единицу линейных размеров-диаметр отдельной частицы. Прямая соответствует фрактальной размерности $D = 1,7 \pm 0,1$

Видимые на микрофотографиях проекции кластеров не компактны. Это согласуется с тем, что наблюдаемая фрактальная размерность меньше 2.

Для исследования агрегатов коллоидного золота Вейтц и др. использовали и рассеяние света, и малоугловое рассеяние нейтронов. В обоих случаях интенсивность рассеянного излучения как функция угла рассеяния определяется выражением

$$S(q) \sim q^{-D}, \quad q = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (16)$$

где q - длина вектора рассеяния, θ -угол рассеяния и λ -длина волны выбранного излучения. Величина D по-прежнему фрактальная размерность кластера, задаваемая соотношением (17), но R и R_0 теперь радиусы гирации.

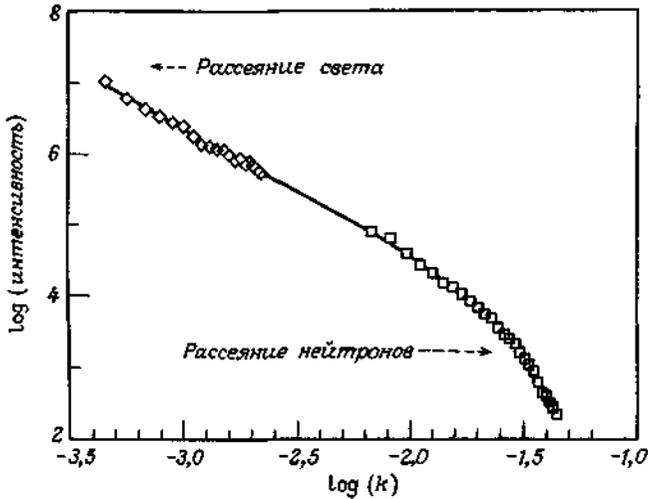


РИС. 3.8 Рассеяние света и малоугловое рассеяние нейтронов на коллоидных кластерах золота, образованных в результате ОДА, как функция рассеянного волнового вектора $k = (4\pi/\lambda) \sin \theta$ (в единицах Å^{-1}). Кривая, проведенная по экспериментальным точкам, соответствует $D \approx 1,79$.

Анализируя данные рассеяния, Вейтц и др. заключили, что фрактальная размерность агрегатов составляет величину $D \approx 1,79$. Это согласуется с данными, полученными при анализе электронных микрофотографий (рис.24).

Кластеры коллоидного кварца. Шефер и др. исследовали коллоидные агрегаты небольших частиц кремнезема (кварца) с помощью рентгеновского излучения и рассеяния света. Агрегаты из частиц кварца

радиусом $R_0 \sim 27 \text{ Å}$ образовались в растворе при изменении pH или концентрации соли. Комбинируя два различных метода-рассеяние видимого света и рентгеновского излучения, исследователи сумели охватить широкий диапазон размеров кластеров (рис. 25).

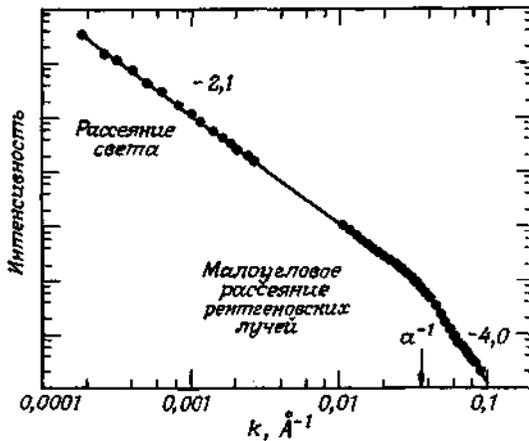


РИС.25. Интенсивность малоуглового рассеяния рентгеновского излучения и рассеяния света на агрегатах силикагеля: $D = 2,12 \pm 0,05$.

Полученные ими данные охватывают диапазон от R_0 до $R \sim 10^4 \text{ \AA}$, а измеренное ими значение фрактальной размерности $D = 2,12 \pm 0,05$ отличается высокой точностью. Изменение наклона кривой на рис. 25 обусловлено тем, что отдельные частицы не являются фрактальными кластерами, и, когда вектор рассеяния достигает обратного радиуса частицы a^{-1} , к характеристике поведения нефрактальных частиц применяется интенсивность излучения.

Используя малоугловое рассеяние нейтронов, Синха и др. исследовали порошки из мелких частиц кварца, спрессованные до различных плотностей от 0,009 до 0,45 г/см³. Выяснилось, что для этой системы интенсивность рассеянного излучения нейтронов также определяется соотношением (20), а фрактальная размерность порошков достигает величины $D = 2,52 \pm 0,05$.

Къемс и Фрелтофт использовали малоугловое рассеяние нейтронов для исследования фрактальной структуры коллоидного кварца и в растворе, и в виде сухих порошков. Исследователи обнаружили, что в растворе коллоидный кремнезем образует кластеры с фрактальной размерностью $D = 2,4 \pm 0,1$, в то время как сухие порошки при двух плотностях (получаемых при прессовании порошков) дают $D = 2,55 \pm 0,07$.

Кварцевые аэрогели-твердые тела, которые могут быть приготовлены в виде легкого и разреженного материала с плотностью менее 1/20

плотности кварца. Куртенс и Вашер исследовали аэрогели с помощью упругого когерентного малоуглового рассеяния нейтронов и пришли к выводу, что аэрогели представляют собой фракталы с $D = 2,40 \pm 0,03$. Эти же авторы занимались изучением и динамикой аэрогелевых материалов.

2.12. Принцип самоподобия фракталов

Фракталы сложно рассматривать как множество точек, вложенных в пространство. Когда речь идет об обычных геометрических объектах:

линия, поверхность, шар, то их топологические размерности d_T известны и являются целыми числами.

Рассмотрим, как вводится мера некоторого множества точек G , вложенного в пространство при определении размерности Хаусдорфа-Безиковича (d_{HB}).

Простой способ измерить длину кривых, площадь поверхности или объем тела состоит в том, чтобы разделить их на небольшие элементы – отрезки длиной r , квадраты со стороной r или на небольшие кубы с ребрами r (рис. 26). Такой способ, например, применен попугаем в известном м/ф, когда он установил, что длина удава составляет 38 попугаев. С математической точки зрения мы применим некоторую элементарную меру (мерило, величина чего-то), как пробную функцию

$h(r) = r^d$, где d – размерность меры.

Пусть для некоторой кривой β (рис.26) длиной L_0 , получено $N(r)$ прямолинейных отрезков длиной r , аппроксимирующих данную кривую. Тогда, если $r \rightarrow 0$, получим:

$$L = N(r) \cdot r \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_0 r^0 = L_0 \quad (17)$$

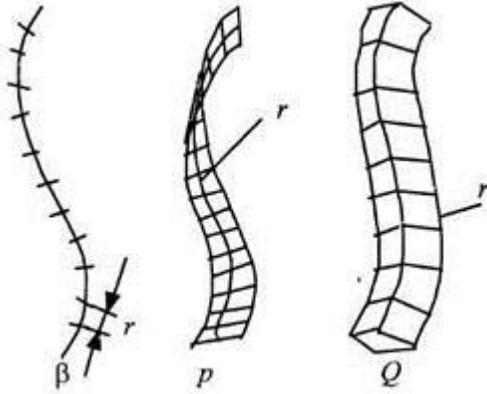


Рис. 26. Измерение «величины» различных множеств точек с помощью отрезков, квадратов и кубов с ребрами r .

В пределе при $r \rightarrow 0$ мера L становится равной длине кривой L_0 и не зависит от r .

Множеству точек кривой β можно поставить в соответствие и площадь. Если $N(r)$ – число квадратов, r^2 – площадь каждого из них, то площадь кривой β определяется как:

$$S = N(r)r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_0 r \quad . (18)$$

Аналогично, объем V кривой β может быть найден как:

$$V = N(r)r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_0 r^2 \quad .(19)$$

Разумеется, что для обычных кривых β площадь S и объем V обращаются в нули при $r \rightarrow 0$ и тогда единственной (представляющей интерес) мерой является длина кривой L .

Теперь перейдем к поверхности P (рис.26), для которой в качестве меры множества точек возьмем площадь:

$$S = N(r)r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 r^0 = S_0 \quad .(20)$$

Можно ли для поверхности P в качестве меры взять объем? Формально это выглядит следующим образом:

$$V = N(r)r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 r^1 \quad .(21)$$

При $r \rightarrow 0$ этот объем для обычной поверхности также равен нулю.

Поставим другой вопрос: можно ли поверхности P поставить в соответствие какую-нибудь длину?

Формально мы можем принять за такую длину величину:

$$L = N(r) \cdot r \xrightarrow{r \rightarrow 0} S_0 \cdot r^{-1} \quad , (22)$$

которая расходуется при $r \rightarrow 0$.

Этот результат объясняет, что поверхность невозможно покрыть конечным числом прямолинейных отрезков.

Вывод: единственной мерой множества точек, образующих поверхность в трехмерном пространстве является площадь.

Однако существуют «монстры», подобные кривой Пеано, «снежинке Коха» и другие, для которых требуется обобщить меру величины множества точек.

До сих пор, определяя меру величины множества точек G в пространстве, мы выбирали некоторую элементарную меру (пробную функцию) $h(r)$. Введем для пробной функции некоторый геометрический коэффициент $\gamma(d)$, зависящий от пробной функции:

$$h(r) = \gamma(d)r^d, \quad (23)$$

Для прямолинейных отрезков, квадратов, кубов геометрический коэффициент принимается равным $\gamma(d) = 1$, однако для других геометрических объектов он будет иным. Так, например, для круга

$$\gamma(d) = \frac{\pi}{4}, \quad \text{для сферы} \quad \gamma(d) = \frac{\pi}{6}.$$

После выбора пробной функции $h(r)$ множество G покрывается $N(r)$ пробными функциями (элементарными мерами) и определяется мера этого множества:

$$M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} h(r) = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d)r^d. \quad (24)$$

Анализируя это выражение, можно сделать вывод, что при $r \rightarrow 0$ мера M_d равна бесконечности (при $d=0$ получаем $r^0 = 1$ и

$$M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d)$$

или нулю (при некоторой величине d малая величина r приближается к нулю). Отсюда следует вывод, что моменту перехода M_d из нуля в бесконечность соответствует некоторое конечное значение d .

Размерность Хаусдорфа-Безиковича d_{HB} множества точек G есть критическая размерность, при которой мера M_d изменяет свое значение с нуля на бесконечность:

$$M_d = \sum_{i=1}^{N(r)} \gamma(d) r^d = \gamma(d) N(r) r^d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } d > d_{HB} \\ \infty & \text{при } d < d_{HB} \end{cases} \quad (25)$$

Приняв $\gamma(d) = 1$, то есть, покрыв множество точек прямолинейными объектами (отрезок, квадрат, куб) и приравняв M_d некоторой конечной величине, например 1, получим:

$$N(r) r^{d_{HB}} = 1, \quad (26)$$

откуда размерность Хаусдорфа-Безиковича определим по формуле:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (27)$$

Если d_{HB} является дробной, то размерность Хаусдорфа-Безиковича будем обозначать d_f и называть *фрактальной размерностью* Хаусдорфа-Безиковича.

Теперь перейдем к построению и изучению самоподобных фракталов.

Рассмотрим несколько примеров на построение множеств с использованием формулы (27).

Возьмем отрезок прямой единичной длины (это можно сделать для любого отрезка, приняв длину этого отрезка за единицу, т.к. размерность длины в данном случае не играет никакой роли). Разделим отрезок на $N_1(r)$ равных частей, где r – длина каждой части. Каждую часть можно считать копией исходного отрезка, уменьшенной в $\frac{1}{r}$ раз. Очевидно, что $N_1(r) \cdot r = 1$. Назовем исходный отрезок сегментом 0-й итерации (0-го поколения). Ясно, что если мы используем формулу (27), то получаем:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N_1(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln(N_1(r))}{\ln(N_1(r))} = 1$$

то есть исходный отрезок без дополнительных преобразований имеет размерность Хаусдорфа-Безиковича, совпадающую с топологической размерностью.

Поступим теперь по-другому: от исходного отрезка AB (сегмента 0-й итерации) (рис. 27, а) перейдем, например, к образующей 1-й итерации самоподобного фрактала CD , где число сегментов равно 7, а длина

каждого отрезка по-прежнему равна $r = \frac{1}{3}$, (рис. 27, б).

Если теперь использовать формулу (27), то получим:

$$d_{HB} = \frac{\ln(N(r))}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{1,94}{1,1} = 1,81 = d_f$$

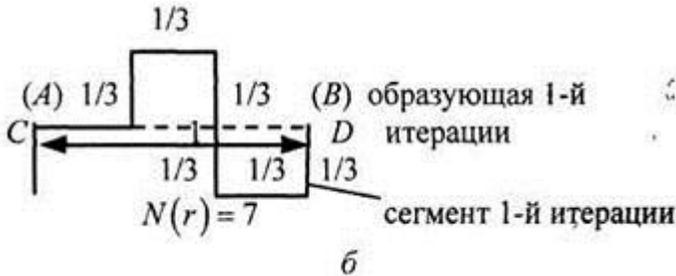
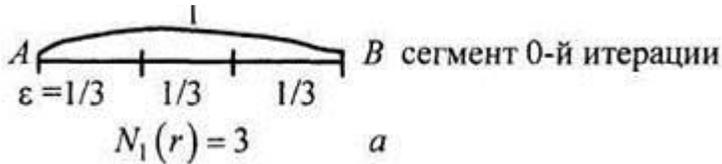


Рис. 27 – Построение образующей самоподобного фрактала с $r = 1/3$, $N(r) = 7$

Таким образом, величина $d_f = 1,81$ (фрактальная размерность самоподобного фрактала с образующей CD) показывает, что кривая CD в 1,81 раза «более извилистая» на отрезке AB , чем сам отрезок AB . Можно провести и обратную процедуру, выкидывая, например, часть отрезков длины r из сегмента AB . В этом случае размерность образующей будет меньше размерности сегмента AB , то есть $d_f \in [0,1]$.

Построение самого фрактального множества (самоподобного фрактала) производят последовательным использованием сегмента $\frac{1}{4}$ -й итерации для образующей $(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$ итерации. При $i \rightarrow \infty$ получим предельное (фрактальное) множество.

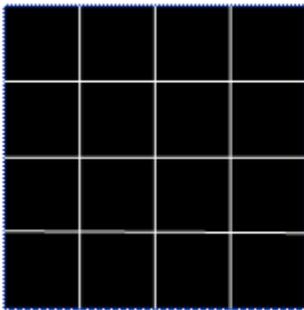
Аналогичный алгоритм используется и для двумерных объектов, например, квадратов. Возьмем квадрат единичной площади (квадрат 0-й итерации) и, разделив каждую сторону на $N_1(r)$ равных частей длиной r , получим $N_2(r)$ квадратов, подобных исходному, но имеющих сторону в $\frac{1}{r}$ раз меньше исходной (рис. 28, а). Сформируем образующую 1-й итерации самоподобного фрактала, выкидывая из исходного квадрата $N_3(r) \in [1, N_2(r)]$ квадратов (рис. 28, б):

$$r = \frac{1}{4}, N_1(r) = 4, N_2(r) = 16, N_3(r) = 10$$

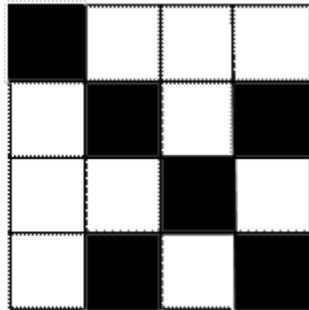
Если теперь определить число копий исходного квадрата в образующей 1-й итерации, то оно равно:
 $N(r) = 6 = N_2(r) - N_3(r)$

Найдем фрактальную размерность получаемого множества:

$$d_f = \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 6}{\ln 4} = \frac{1,79}{1,39} = 1,29$$



а



б

Рис. 28. Квадрат 0-й итерации, $N_2(r) = 16$ (а) и образующая самоподобного фрактала $N(r) = 6$ (б)

Аналогичную процедуру можно производить над геометрическими объектами размерности $n > 2$.

Из проведенного анализа следует, что для того, чтобы найти размерность самоподобного фрактала, необходимо определить число элементарных мер (пробных функций) $N(r)$ образующей 1-й итерации (число подобъектов), вычислить коэффициент подобия r и использовать формулу (27).

Рассмотрим построение некоторых классических фрактальных множеств.

2.13. L-системы тертл-графики

Классические фракталы

Примерами классических фракталов являются снежинка Кох, ковер Серпинского, губка Менгера, пыль Кантора и множество других.

Снежинка Кох представляет собой замкнутую кривую,

составленную из трех одинаковых фракталов, каждый из которых строится на стороне равностороннего треугольника. Процедуру построения рассмотрим на примере одной из сторон треугольника. Она выполняется для каждой из сторон.

Пусть K_0 – исходный отрезок (одна сторона треугольника). Разделим его на 3 части и уберем среднюю часть. Вместо средней части добавим два новых отрезка той же длины так, чтобы в центре отрезка образовался новый (маленький) равносторонний треугольник, но без основания. В результате получим новое множество K_1 (см. рис. 29).

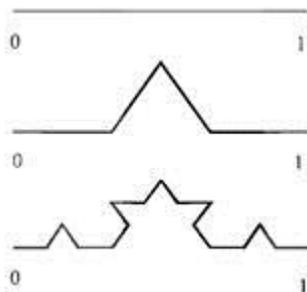


Рис. 29. Построение снежинки Кох: $a - K_0$; $b - K_1$; $в - K_2$

Данную процедуру можно выполнять многократно над каждым из отрезков, получая все новые и новые множества K_2, K_3 и т.д. В результате на n -м шаге итерационного процесса получим снежинку Кох (рис.30).

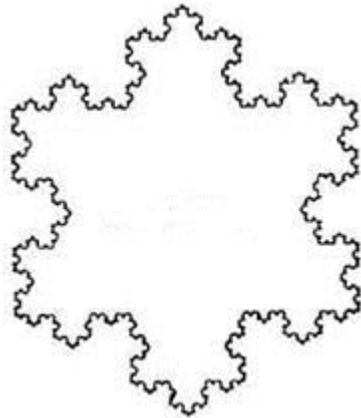


Рис. 30. Снежинка Кох

Поскольку $N = 4$, а $r = \frac{1}{3}$, то размерность фрактала:

$$d_f = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618$$

Особенностью данного фрактала является бесконечная длина предельной кривой, описывающей его границу. Действительно, длина

кривой $K_1 - l_1 = \frac{4}{3}$, длина кривой $K_2 - l_2 = \frac{4^2}{3^2}$, на n -ом шаге

итерационного процесса длина кривой $l_n = \frac{4^n}{3^n}$. При $n \rightarrow \infty$ длина

предельной кривой для одной стороны фрактала $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^n} \rightarrow \infty$.

Алгоритмы построения таких фракталов, как ковер Серпинского, пыль Кантора и других, во многом сходны с алгоритмом построения снежинки Коха.

Принцип построения ковра состоит в разбиении некоторой замкнутой области (исходного множества) на непересекающиеся подобласти (непересекающиеся подмножества), обязательно содержащие внутреннюю подобласть, и последующем удалении именно внутренней подобласти. Процедура итеративно повторяется с каждым из оставшихся подмножеств. Наиболее иллюстративно это видно на примере ковра, построенного на базе прямоугольного треугольника (рис.31), хотя ковер можно строить, взяв за основу квадрат или другую плоскую фигуру.

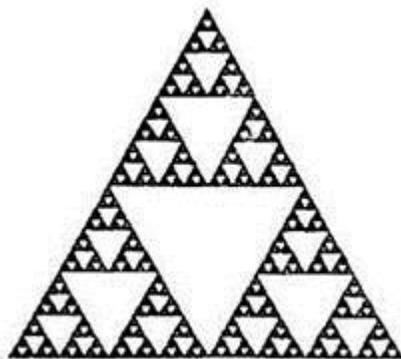


Рис. 31. Ковер Серпинского

Пусть исходным множеством S_0 является равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобьем его на четыре меньших треугольника и удалим внутренний треугольник без замыкающих его сторон. Получим множество S_1 . Выполним аналогичную операцию над оставшимися треугольниками. В результате будет иметь место множество S_2 . Продолжая итерационный процесс, на n -м шаге получим множество S_n (рис.32).

Предельное множество и образует ковер Серпинского. Так как

$$r = \frac{1}{2}$$

коэффициент подобия $\frac{1}{2}$, а количество элементов, участвующих в итерационном процессе, $N = 3$, то размерность фрактала (ковра), построенного на основе треугольника, равна:

$$d_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$$

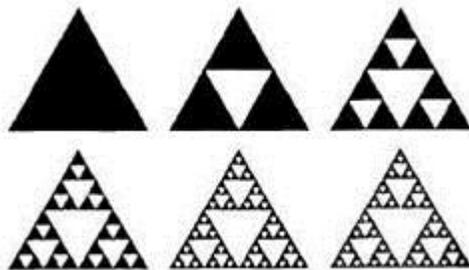


Рис. 32. Построение ковра Серпинского

Так же как и снежинка, данный ковер имеет свою особенность, а именно то, что предельное множество S имеет площадь нулевой меры.

Действительно, на первом шаге удаляется $1/4$ площади треугольника, на втором шаге 3 треугольника площадью $1/4^2$ от исходного и т.д.

Поскольку площадь в пределе равна

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 3^{i-1} \frac{1}{4^i} = 1$$

то мера равна нулю.

К множествам нулевой меры относится и *пыль Кантора* (фрактальная пыль). Принцип построения этого множества состоит в следующем. На первом шаге отрезок единичной длины $[0,1]$ разбивается на три части и удаляется средний, открытый интервал. На последующих шагах вновь удаляются центральные части оставшихся отрезков, не включая их концы (рис.33). Предельным множеством является пыль Кантора.

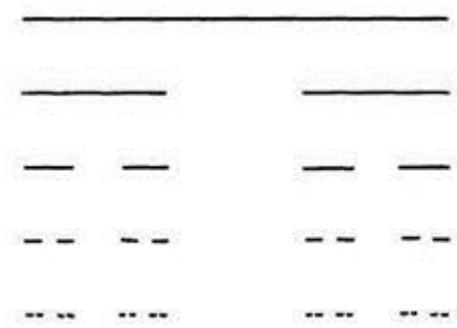


Рис.33. Построение пыли Кантора

Так как $N = 2$, а коэффициент подобия $r = \frac{1}{3}$, то размерность фрактала равна:

$$d_f = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,6309.$$

Подсчитаем длину выбрасываемых интервалов. На первом шаге выбрасывается интервал длиной $1/3$. На втором шаге выбрасываются два интервала длиной $1/3^2$ с длины исходного единичного отрезка. На

n -м шаге выбрасываются 2^{n-1} интервалов каждый длиной $\frac{1}{3^n}$. Таким образом, общая длина выбрасываемых интервалов для предельного множества составит:

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \frac{1}{3^i} = 1$$

Для рассмотренных выше классических фракталов характерен единый принцип построения – добавляются либо выбрасываются отдельные линии или области. Процесс повторяется многократно (*итерационно*). Этот процесс лег в основу *L*-систем, позволяющих создавать отдельную, достаточную большую группу самоподобных фракталов. С помощью *L*-систем, использующих подсистему графического вывода под названием *тертл-графика* (от английского turtle – черепаха), обычно строят связанные и несвязанные фрактальные множества – снежинки, ковры, кривые, а также фрактальные деревья, растения, русла рек и т.д.

Сущность *тертл-графики* состоит в том, что изображающая точка (черепашка) движется по экрану монитора прямолинейно, дискретными шагами, оставляя или не оставляя свой след. После каждого перемещения она может повернуться на некоторый угол в ту, или иную сторону, или продолжить движение вновь по прямой. Так образуется непрерывная или разрывная дискретная линия на экране. Изображающая точка может вернуться на несколько шагов назад, не прерывая свой след, и начать движение в новом направлении. В этом случае происходит ветвление траектории движения.

Изображающая точка движется по командам, задаваемым кодовыми словами. **В каждой точке экрана положение изображающей точки задается тремя параметрами x, y, α (x, y – координаты точки; α – направление движения).** Кодовое слово состоит из указаний перемещения на один шаг с оставлением или неоставлением следа, увеличением или уменьшением направления движения на некоторый угол \ominus , открытием ветви, закрытием ветви.

***L*-систему образуют алфавит, инициатор (слово инициализации, аксиома) и набор порождающих правил, определяющих преобразование аксиомы для организации итерационного процесса.**

Алфавит состоит из набора отдельных символов. Каждый символ представляет собой микрокоманду, предписывающую определенное действие, выполняемое изображающей точкой.

Например:

F – переместиться вперед на один шаг, прорисовывая след;

b – переместиться вперед на один шаг, не прорисовывая след;

[– открыть ветвь;

] – закрыть ветвь;

+ – увеличить угол α на величину Θ ;

-- уменьшить угол α на величину Θ .

Из элементов алфавита можно создавать слова инициализации (аксиомы). Например, L -система, позволяющая нарисовать на экране равносторонний треугольник, следующая:

$$\Theta = \frac{\pi}{3},$$

аксиома: $F + +F + +F$.

Изображающая точка имеет первоначальное направление движения

под углом $\frac{\pi}{3}$. Согласно команде F выполняется движение на один

шаг. По команде + и + осуществляется поворот на угол $2 \frac{\pi}{3}$. Следующая команда F предписывает движение еще на один шаг. Команды + и + поворачивают изображающую точку вновь в

положительном направлении на угол $2 \frac{\pi}{3}$. Окончательная команда F замыкает треугольник.

Порождающее правило предназначено для замены микрокоманды в аксиоме группой микрокоманд. Например, если в приведенной выше аксиоме команду F заменить порождающим правилом $newf = F - F + +F - F$, то изображающая точка при движении по экрану нарисует снежинку Кох. **Порождающее правило** – это разновидность рекурсивной процедуры. Глубина рекурсии показывает, какое количество итераций по замене микрокоманд группой микрокоманд необходимо выполнить.

С помощью микрокоманд ветвления осуществляется построение деревьев и растений. Порождающие правила позволяют многократно выполнять ветвления не только от линии основного направления движения изображающей точки, но и от построенных ранее ветвей. На рисунках 34–35 изображены фракталы, построенные с помощью микрокоманды ветвления.

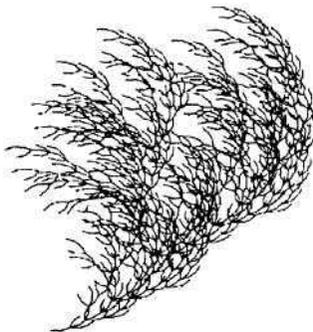


Рис. 34. Куст после 4-х итераций

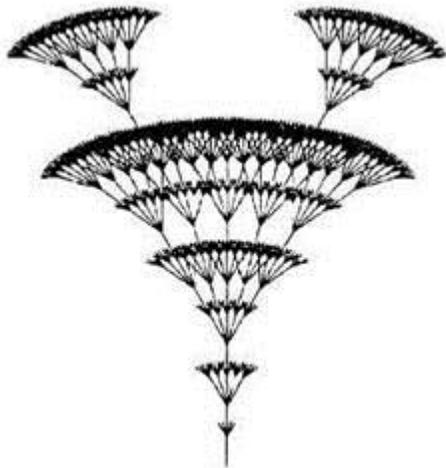


Рис. 35. Цветок после 3-х итераций

2.14. Система итерированных функций

Как отмечалось ранее, процедура построения фракталов представляет собой итерационный процесс – переход от одного множества к другому. На каждом шаге выполняются преобразования над множеством, полученном на предыдущем шаге. Данный алгоритм можно представить в виде следующей схемы:

$$E_i = T_i(E_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Здесь $T_i(E_{i-1})$ – преобразования, выполняемые на i -м шаге над

множеством E_{i-1} (E_0 – исходное компактное множество).

На каждом шаге итерационного процесса выполняются однотипные преобразования. В общем же случае на каждом шаге могут выполняться

различные преобразования, определяемые следующим образом:

$$T(E) = \bigcup_{j=1}^m T_j(E) \quad (33)$$

Преобразования вида (33) называются *преобразованиями Хатчинсона*. Преобразования Хатчинсона позволяют строить разнообразные фракталы за счет выбора элементарных преобразований $T_j(E)$.

Необходимо отметить, что если преобразования $T_j(E_{i-1})$ заранее определены, то получаемый результат совершенно не зависит от выбора исходного компактного множества E_0 . Кроме того, не любые преобразования T порождают фракталы.

Если, например, преобразование Хатчинсона получено с использованием двух аффинных преобразований:

$$T(\mathbf{x}) = T_1(\mathbf{x}) \cup T_2(\mathbf{x}),$$

где

$$T_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,373 \\ 0,6 & 0,6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,353 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$T_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,187 \\ 0,137 & 0,8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,1 \end{bmatrix},$$

то можно построить фрактал под названием «лист» (рис.36).



Рис.36. Фрактал «лист»

Если использовать четыре аффинных преобразований вида:

$$T_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,3726 \\ 0,671 \end{bmatrix},$$

$$T_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,1146 \\ 0,2232 \end{bmatrix},$$

$$T_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,255 & 0 \\ 0 & 0,255 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,6306 \\ 0,2232 \end{bmatrix},$$

$$T_4(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0,370 & -0,642 \\ -0,642 & 0,370 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,6356 \\ -0,061 \end{bmatrix},$$

то получим фрактал под названием «кристалл» (рис.37).

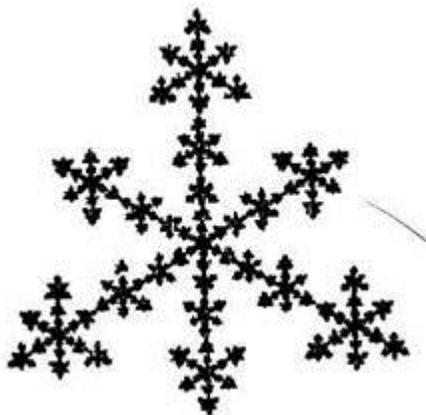


Рис. 37. Фрактал «кристалл»

Задача построения предельного множества E (аттрактора из исходного компактного множества E_0) в результате итерационного процесса с заданным преобразованием $T_i(E)$ является прямой задачей. Ее особенностью является то, что вид аттрактора определяется только коэффициентами аффинного преобразования (если такое используется) и не зависит от выбора исходного множества E_0 . В то же время можно поставить обратную задачу, а именно, определить совокупность отображений, для которых заданное множество является аттрактором. **Обратная задача значительно сложнее прямой, однако имеет огромное прикладное значение, в частности, в области сжатия изображений.**

Необходимость сжатия изображений обусловлена различными факторами. Основными являются:

- разгрузка каналов связи и, соответственно, снижение себестоимости передачи данных;
- экономия памяти компьютеров за счет архивации изображений и др.

2.15. Фракталы на комплексной плоскости

В системах автоматического управления процесс управления осуществляется итерационно – следующее состояние системы зависит от настоящего (и даже предыдущих):

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (34)$$

Если функция управления содержит нелинейности, то процесс обычно представляется на комплексной плоскости, чтобы можно было отобразить мнимые корни уравнения n -ой степени.

Идея использования комплексных чисел вместо действительных была выдвинута Мандельбротом. Он поставил задачу пронаблюдать итерационный процесс не на прямой, а на плоскости. Процесс Мандельброта математически представляется выражением:

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c. \quad (35)$$

где $c = x + iy$.

Выбрав произвольное число z_0 , возведем его в квадрат и прибавим константу c для того, чтобы получить z_1 . Затем повторим вычисления для того, чтобы получить z_2, z_3 и т. д.

Давайте начнем с простейшего из возможных значений константы c , а именно $c = 0$. Тогда при каждой итерации вычисляется точный квадрат

числа: $z_0 \rightarrow z_0^2 \rightarrow z_0^4 \rightarrow z_0^8 \dots$. Для этой последовательности имеются три возможности:

1. При $|z| < 1$ числа получаются все меньшими и меньшими, их последовательность приближается к нулю. Таким образом, нуль

является аттрактором этого процесса, так как все точки меньше 1 движутся к нему.

2. При $z > 1$ числа становятся все большими и большими, стремясь к бесконечности. Таким образом, для этого процесса аттрактором является бесконечность.

3. При $z=1$ точки находятся на расстоянии 1 от нуля. Их последовательности лежат на границе двух областей притяжения, в данном случае на окружности единичного радиуса с центром в нуле.

Ситуация ясна – плоскость делится на две зоны влияния, а границей между ними является просто окружность.

Сюрпризы начинаются, когда мы выберем ненулевое значение c , например $c = -0.12375 + 0.56508i$. Здесь для последовательности $z_0 — z_1 — z_2 …$ также имеются три из перечисленных выше возможностей, но внутренний аттрактор уже не является нулем, а граница уже не является гладкой, то есть отличается от окружности. Эта граница показана на рисунке 38.

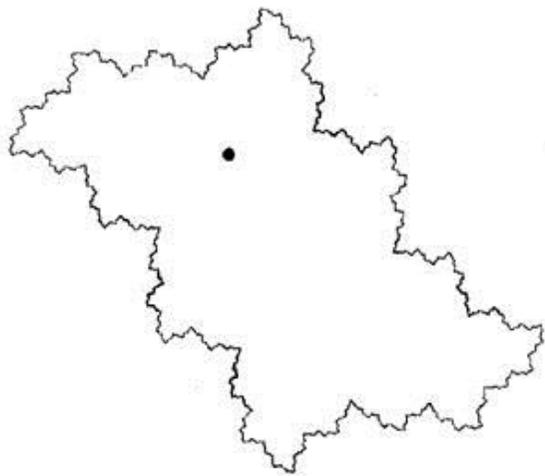


Рис. 38. Бассейн с одной притягивающей точкой

Она сильно изломана, причем под лупой она выглядит так же изломанной, как и без нее.

Именно это Б. Мандельброт назвал фрактальной структурой такой границы. Она напоминает линию морского берега.

Изменяя значение c , Мандельброт получил множество точек, которые определяли границу перехода от устойчивости к хаосу (описаны в 1975 г.).

Одной из характерных особенностей этой границы является ее самоподобие. Если взглянуть на любой из ее поворотов или заливов, то можно обнаружить, что одна и та же форма встречается в различных местах и имеет разные размеры.

Множества Жюлиа (описаны в 1924 г.) строятся аналогично множеству Мандельброта, только величина c задается постоянной. Процесс итерационных вычислений для каждой точки продолжается до тех пор, пока $z_{n+1}=z_n^2+c$ не уйдёт из круга радиусом 2. Представленное на рисунке 39 множество получается при $c=-0,20+0,75i$.

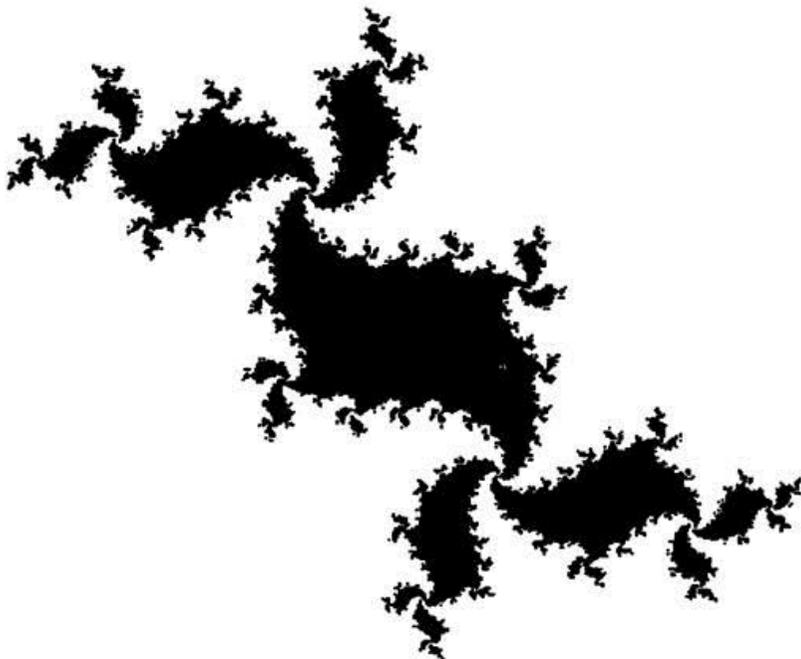


Рис. 39. Заполняющее множество Жюлиа для $z^2 - 0,20 + 0,75i$

Здесь множество Жюлиа представляет собой не единственную деформированную окружность, а состоит из бесконечного числа деформированных окружностей, образующих, однако, связное множество. Внутренние точки этого множества притягиваются не одной неподвижной точке, а к множеству точек.

Ясно, что величина c будет определять вид множества Жюлиа. Правило, по которому множество Жюлиа будет принимать тот или иной вид, определяет граница множества Мандельброта M . Оно представлено на рисунке 40 как закрашенная черным цветом часть комплексной c -плоскости.

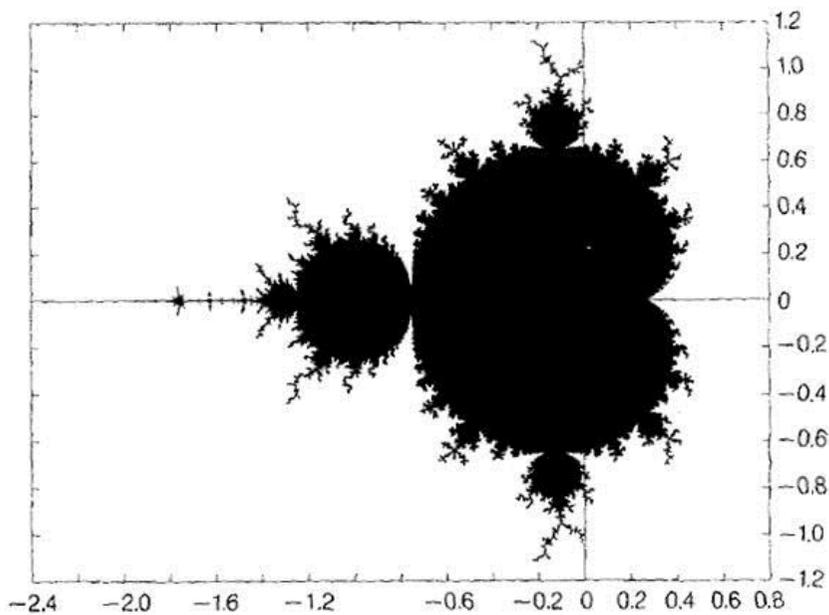


Рис. 40. Вид границы множества Мандельброта на комплексной плоскости

На рисунке 41 показаны изменения вида множества Жюлиа в различных граничных точках множества M .

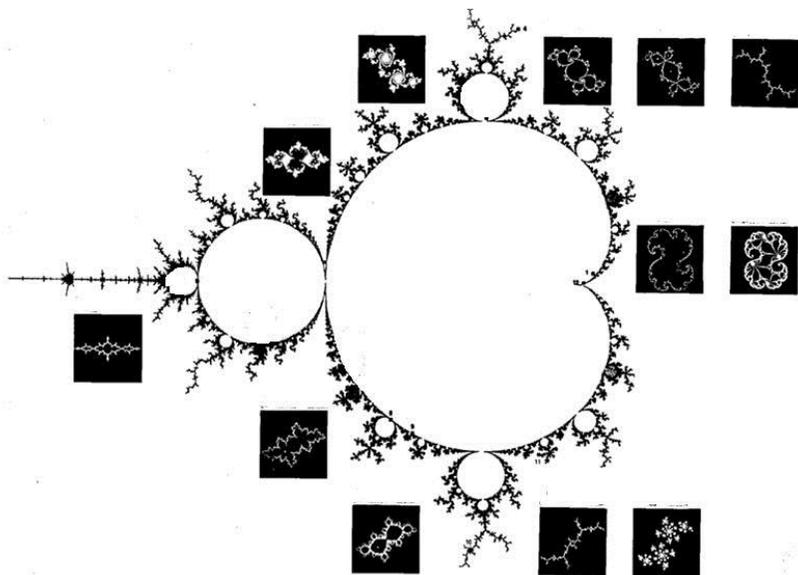


Рис. 41. Изменения вид множества Жюлиа по границе множества Мандельброта

Каждое комплексное число c либо принадлежит черной структуре M , либо нет. Соответствующие множества Жюлиа процесса $x \rightarrow x^2 + c$ существенно различаются. Они представляют собой связанные структуры, когда c лежит внутри M , и рассыпаются на бесконечное число кусочков, когда c лежит снаружи.

Представим себе некоторый путь в c -плоскости, начинающийся внутри M и заканчивающийся вне его. Если менять c , двигаясь вдоль этого пути, то качественные изменения происходят с соответствующими множествами Жюлиа тогда, когда c пересекает границу M : они, как будто взорвавшись, превращаются в облако из бесконечного числа точек. В этом смысле граница множества M определяет момент математического фазового перехода для множеств Жюлиа отображения $x \rightarrow x^2 + ic$.

2.16. Случайные фракталы

Все объекты, с которыми сталкивается человек, можно разделить на искусственные и естественные. Все искусственные объекты имеют, как правило, четкие формы, в то время как формы естественных объектов в большинстве своем являются неправильными. Поэтому такие образования, как горные хребты, береговые линии или облака не обладают подобием, в смысле неизменностью, при линейном увеличении или уменьшении. При изменении масштаба рассмотрения объектов случайным образом меняются их отдельные элементы. Принцип самоподобия в приведенных случаях необходимо рассматривать со статистических позиций, то есть **понятие «подобный» необходимо толковать как «похожий»**.

Отдельную группу, предназначенную для моделирования природных объектов, образуют **случайные фракталы**. Наиболее наглядным случайным фракталом является рандомизированная снежинка Кох. Для ее получения достаточно на каждом шаге итерационного процесса обращать вовнутрь или наружу вершину нового строящегося треугольника (рис.42).

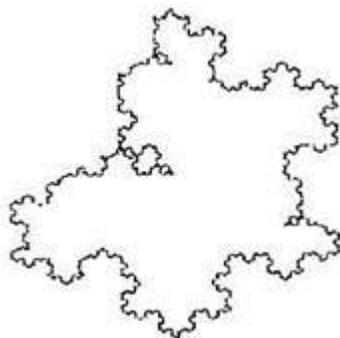


Рис. 42. Рандомизированная кривая Кох

Фрактальная размерность построенной таким образом кривой остается прежней. Предельная кривая рандомизированной снежинки Кох может служить прекрасной моделью, например, контура облака или острова.

Аналогичный подход может быть реализован при построении фракталов с помощью L -систем, когда случайным образом реализуется, например, операция ветвления. Построенные таким образом деревья, растения или снежинки будут иметь более естественный вид. В приведенных примерах рандомизации подвергаются лишь отдельные параметры итерационного процесса, в то время как сам алгоритм (**система итерированных функций**) построения фракталов остается неизменным – детерминированным.

Очевидно, что итерационный процесс также может быть случайным. Для того, чтобы в результате этого процесса осуществлялось построение именно фракталов, необходимо выполнение принципа **статистического самоподобия**. Свойством статистического самоподобия обладает винеровский процесс (броуновское движение), имеющий нормальное распределение.

Винеровский процесс является **марковским** («будущее» процесса не зависит от «прошлого»), если значение процесса в *текущий* момент времени зависит только от значений в предыдущий момент времени и величины приращения. Пример винеровского процесса показан на рисунке 43.

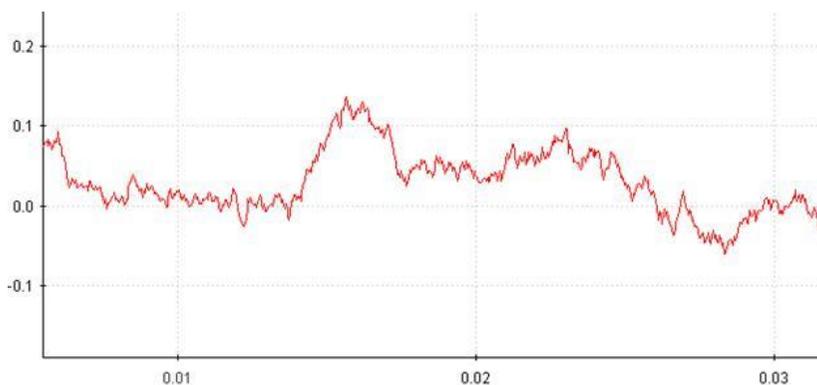


Рис. 43. График винеровского процесса во времени

Говоря формально, некоторая переменная z подчиняется винеровскому процессу, если она имеет следующие свойства.

Свойство 1. Изменение Δz на протяжении малого промежутка времени Δt удовлетворяет равенству:

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t}, \quad (36)$$

где ε – случайная величина, подчиняющаяся стандартному нормальному распределению $\sigma(0,1)$, $\sqrt{\Delta t}$ – стандартное отклонение, зависящее от времени процесса.

Свойство 2. Величины Δz на двух малых промежутках времени Δt являются независимыми.

Из первого свойства следует, что величина Δz имеет нормальное распределение, у которого математическое ожидание равно нулю, стандартное отклонение равно $\sqrt{\Delta t}$, а дисперсия равна Δt .

Второе свойство означает, что величина z подчиняется **марковскому процессу (независимости одного распределения от другого)**.

Квадратный корень получается из-за того, что при анализе марковского процесса дисперсии изменений переменной в последовательные моменты складываются, а стандартные отклонения – нет. Если дисперсия изменений переменной в течение одного года равна 1,0, то дисперсия изменений этой переменной в течение двух лет будет равна 2,0, а через три года – 3,0. В то же время стандартные отклонения изменений переменных через два и три года будут равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, соответственно. Строго говоря, мы не должны говорить, что стандартное отклонение изменений переменной за один год равно 1,0 в год. Следует говорить, что оно равно «корню квадратному из единицы в год». Это объясняет, почему величину неопределенности часто считают пропорциональной квадратному корню из времени.

Приращения винеровского процесса обладают свойствами статического самоподобия. Для них справедливо:

$$\Delta X(\Delta t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} \Delta X(r \Delta t), \quad (37)$$

или

$$X(t + \Delta t) - X(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{\sqrt{r}} [X(t + r \Delta t) - X(t)]$$

для любого $r > 0$.

Здесь величина \sqrt{r} является коэффициентом статистического самоподобия, а символ $\stackrel{\Delta}{=}$ означает, что две случайные величины имеют одинаковые дифференциальные законы распределения.

Определим фрактальную размерность винеровского процесса. Без потери общности полагаем, что значения аргумента находятся в интервале $[0,1]$. Разделим этот интервал на n равных подинтервалов

$$\Delta t = \frac{1}{n}$$

одинаковой длины $\frac{1}{n}$ и таким же образом разделим вертикальную ось на подинтервалы длины Δt , как показано на рисунке 44.

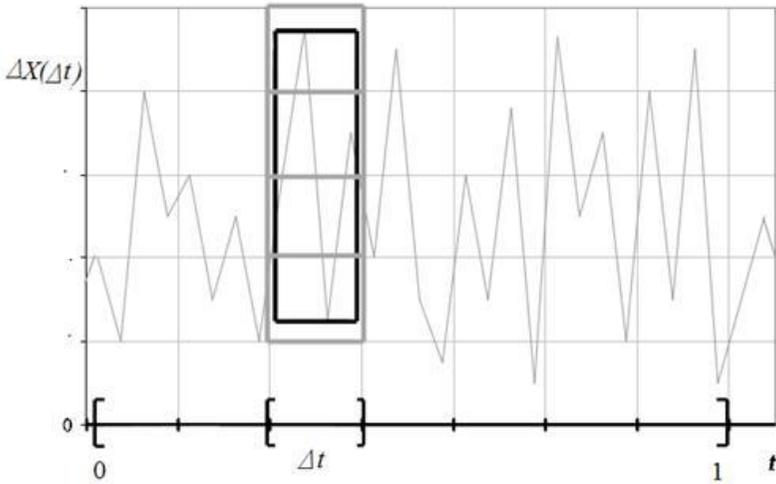


Рис. 44. Клеточное покрытие функции на подинтервале

$$\frac{|\Delta X|}{\Delta t}$$

Выражение $\frac{|\Delta X|}{\Delta t}$ будет служить в качестве оценки числа квадратов N размера Δt , необходимых для покрытия части графика $y = X(t)$, расположенной над одним подинтервалом. Это число пропорционально $\sqrt{\Delta t}$ – отклонению (многие считают квадратный корень из времени величиной неопределенности).

Всего имеется $\frac{1}{\Delta t}$ таких подинтервалов, поэтому общее число квадратов пропорционально $\Delta t \cdot \sqrt{\Delta t} = \Delta t^{\frac{3}{2}}$, то есть:

$$N(\Delta t) \approx \Delta t^{\frac{3}{2}}$$

Таким образом, фрактальная размерность винеровского процесса:

$$d_f = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln N(\Delta t)}{\ln \Delta t} = 1,5.$$

Наиболее удобно фрактальный винеровский процесс определить при помощи параметра Херста H ($0 < H < 1$), который характеризует уровень самоподобия для случайного процесса. При $H = 1/2$ фрактальный винеровский процесс совпадает с классическим винеровским процессом. В таком случае фрактальная размерность и параметр H связываются выражением:

$$d_f = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lg(N(\Delta t))}{\lg(\Delta t)} = 2 - H. \quad (38)$$

Как видно из (38), изменяя параметр H , можно менять фрактальную размерность.

Визуально можно отметить следующие изменения в реализациях фрактального винеровского процесса для различных значений H (рис.45).

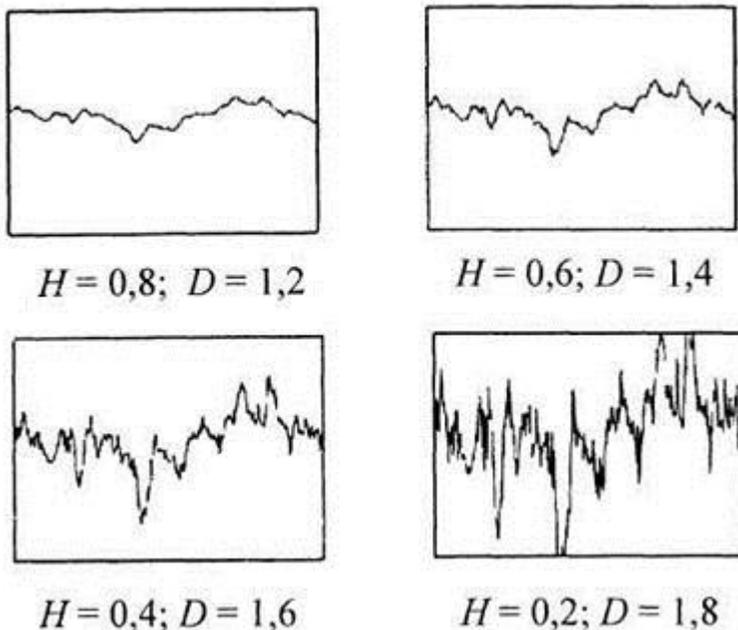


Рис. 45. Реализации фрактального винеровского процесса

Увеличение H приводит не только к уменьшению d_f , но и к уменьшению дисперсии процесса, то есть он становится менее «изрезанным», более гладким, с небольшими отклонениями от математического ожидания. Изменяя H , можно менять вид случайного фрактала.

2.17. Применение случайных фракталов для моделирования

Рассмотренные выше теоретические положения определяют сущность случайных фракталов. Одномерные классические и фрактальные винеровские процессы может быть и не имеют самостоятельного значения при моделировании природных образований, однако являются основой для построения двумерных процессов, с помощью

которых можно моделировать естественные ландшафты – горные хребты, лесную поверхность, волнение моря и т.д.

Двумерный фрактальный винеровский процесс (поверхность)

определяется следующим образом: – это функция двух аргументов $\mathbf{X}(x, y)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\mathbf{X}(0,0) = 0$ и почти все реализации процесса непрерывны;

2) Приращения процесса $\mathbf{X}(x, y)$:

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{X}(x + \Delta x, y + \Delta y) - \mathbf{X}(x, y),$$

где $\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$, $\Delta y = y(t_2) - y(t_1)$ являются случайной величиной, имеющей нормальный интегральный закон распределения.

Фрактальная размерность двумерного винеровского процесса равна:

$$d_f = 3 - H$$

На рисунках 46-48 приведены примеры части фрактальной поверхности (функция $\max\{\mathbf{X}, 0\}$), соответствующие двумерным винеровским процессам с различными значениями параметра H .
Изменяя значение H , можно моделировать самые разнообразные типы земной поверхности – от равнин до горных хребтов.

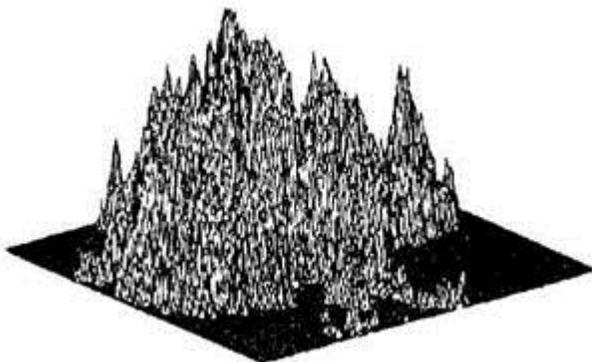


Рис. 46. Двумерный фрактальный винеровский процесс; $H = 0,5$

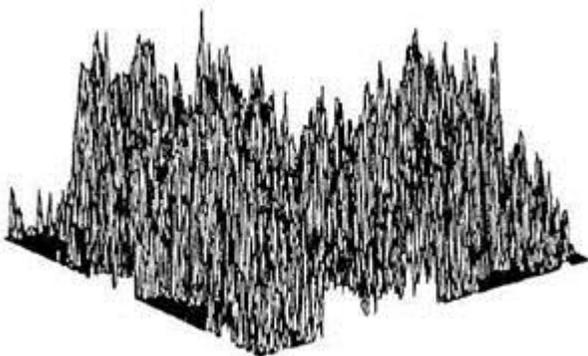


Рис. 47. Двумерный фрактальный винеровский процесс: $H = 0,2$

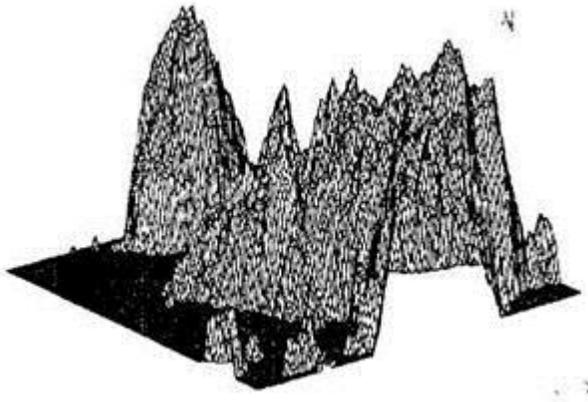


Рис. 48. Двумерный фрактальный винеровский процесс: $H = 0,8$

Для моделирования одномерных и двумерных фрактальных винеровских процессов более эффективно использование преобразования Фурье. При этом случайный процесс начинает обладать некоторой памятью, что позволяет достигнуть некоторой регулярности на модели процесса.

Моделирование основывается на том, что спектральная плотность фрактального винеровского процесса аппроксимируется степенной

функцией $\frac{1}{f^{2H+1}}$,

то есть:

$$S_x(f) \approx k \frac{1}{f^{2H+1}}, \quad (49)$$

которая убывает при увеличении частоты f .

Основная идея моделирования фрактального винеровского процесса состоит в произвольном задании спектральной плотности $S_X(f)$, сохраняющей требуемые свойства, определенные зависимостью (49), и последующем применении обратного преобразования Фурье.

Моделирование осуществляется на конечном интервале изменения аргумента функции $X(t)$, то есть рассматривается функция $X_T(t)$. Поскольку используются средства вычислительной техники, то в итоге формируется числовая последовательность $X_T[nT_0]$, являющаяся дискретной аппроксимацией $X_T(t)$:

$$X_T[nT_0] = X_T(t) \Big|_{t=nT_0}, \quad n = \overline{0, N-1}$$

где T_0 – шаг дискретизации процесса, N – число дискретных отсчетов.

Практическая реализация выполняется следующим образом. Синтезируется дискретное преобразование Фурье для числовой последовательности $X_T[nT_0]$ в виде:

$$X_n = \frac{K}{n^{H+0.5}}, \quad n = \overline{0, N-1} \quad (50)$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \tilde{X}(j\omega, T)$$

Здесь

Зависимость (50) определяется в данной форме в силу справедливости соотношения (49). Поскольку для каждого значения n X_n является произвольным комплексным числом, то коэффициент K можно задать в форме:

$$K = v e^{2\pi j u} \quad (51)$$

где v – значение нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, u – значение равномерно распределенной случайной величины на отрезке $[0,1]$.

К синтезированному комплексному вектору X_n применяется обратное дискретное преобразование Фурье. Результатом является искомая числовая последовательность $X_T[nT_0]$.

При построении случайных фрактальных поверхностей двумерных фрактальных винеровских процессов используются те же процедуры, что и в одномерном случае. В отличие от одномерного случая вместо вектора X_n вначале синтезируется двумерная матрица $X_{n,k} : n, k = \overline{0, N-1}$, удовлетворяющая условию:

$$|X_{n,k}|^2 = \frac{k}{(n^2 + k^2)^{H+1}}, \quad (52)$$

а затем применяется двумерное обратное преобразование Фурье.

2.18. Метод "Систем Итерируемых Функций"

Метод "Систем Итерируемых Функций" (Iterated Functions System - IFS) появился в середине 80-х годов как простое средство получения фрактальных структур.

IFS представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое. Наиболее простая IFS состоит из аффинных преобразований плоскости:

$$\begin{aligned} X' &= A * X + B * Y + C \\ Y' &= D * X + E * Y + F \end{aligned}$$

В 1988 году известные американские специалисты в теории динамических систем и эргодической теории Барнсли и Слоан предложили некоторые идеи, основанные на **соображениях теории динамических систем, для сжатия и хранения графической информации**. Они назвали свой метод **методом фрактального сжатия информации**. Происхождение названия связано с тем, что геометрические образы, возникающие в этом методе, обычно имеют фрактальную природу в смысле Мандельброта.

На основании этих идей Барнсли и Слоан создали алгоритм, который, по их утверждению, позволит сжимать информацию в 500-1000 раз. Вкратце метод можно описать следующим образом. Изображение кодируется несколькими простыми преобразованиями (в нашем случае аффинными), т.е. коэффициентами этих преобразований (в нашем случае A,B,C,D,E,F).

Например, закодировав какое-то изображение двумя аффинными преобразованиями, мы однозначно определяем его с помощью 12-ти коэффициентов. Если теперь задаться какой-либо начальной точкой (например $X=0$ $Y=0$) и запустить итерационный процесс, то мы после первой итерации получим две точки, после второй - четыре, после третьей - восемь и т.д. Через несколько десятков итераций совокупность полученных точек будет описывать закодированное

изображение. Но проблема состоит в том, что очень трудно найти коэффициенты IFS, которая кодировала бы произвольное изображение.

Для построения IFS применяют кроме аффинных и другие классы простых геометрических преобразований, которые задаются небольшим числом параметров. Например, проективные:

$$X' = (A1 * X + B1 * Y + C1) / (D1 * X + E1 * Y + F1)$$

$$Y' = (A2 * X + B2 * Y + C2) / (D2 * X + E2 * Y + F2)$$

или квадратичные:

$$X' = A1 * X * X + B1 * X * Y + C1 * Y * Y + D1 * X + E1 * Y + F1$$

$$Y' = A2 * X * X + B2 * X * Y + C2 * Y * Y + D2 * X + E2 * Y + F2$$

преобразования на плоскости.

В качестве примера использования IFS для построения фрактальных структур, рассмотрим кривую Коха и "дракона" Хартера-Хейтуэя. Выделим в этих структурах подобные части и, для каждой из них вычислим коэффициенты аффинного преобразования. В аффинный коллаж будет включено столько аффинных преобразований, сколько существует частей подобных целому изображению.

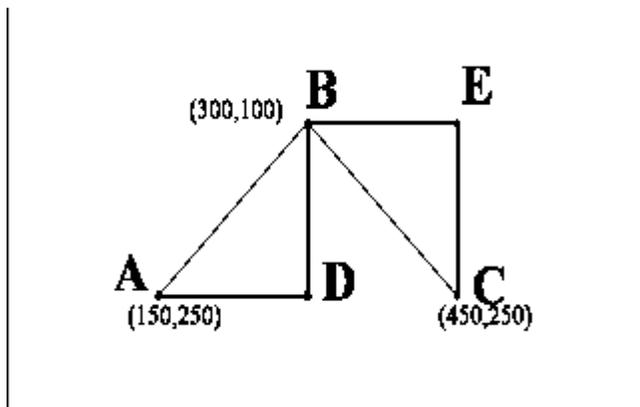


Рис. 53. Заготовка для построения IFS "дракона" Хартера-Хейтуэя.

Построим IFS для "дракона" Хартера-Хейтуэя. Для этого расположим первое поколение этого фрактала на сетке координат дисплея 640 x 350 (рис.53). Обозначим точки получившейся ломаной **A**, **B**, **C**. По правилам построения у этого фрактала две части, подобные целому - на рис.53 это ломаные **ADB** и **BEC**. Зная координаты концов этих отрезков, можно вычислить коэффициенты двух аффинных преобразований, переводящих ломаную **ABC** в **ADB** и **BEC**:

$$X' = -0.5 * X - 0.5 * Y + 490$$

$$Y' = 0.5 * X - 0.5 * Y + 120$$

$$X' = 0.5 * X - 0.5 * Y + 340$$

$$Y' = 0.5 * X + 0.5 * Y - 110$$

Задавшись начальной стартовой точкой (например $X=0$ $Y=0$) и итерационно действуя на нее этой IFS, после десятой итерации на экране получим фрактальную структуру, изображенную на рис.6, которая представляет собой "дракон" Хартера-Хейтуэя. Его кодом (сжатым описанием) является набор коэффициентов двух аффинных преобразований.

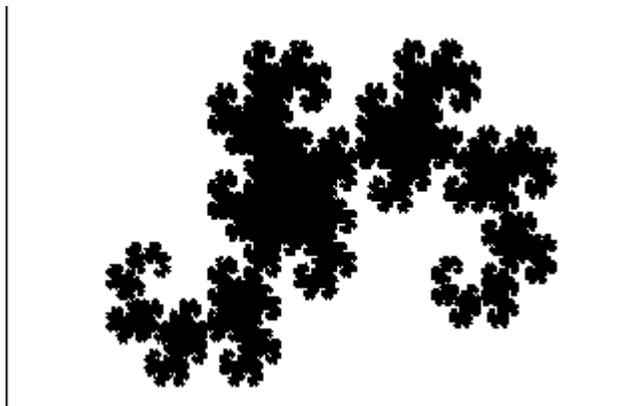


Рис.54. "Дракон" Хартера-Хейтуэя, построенный с помощью IFS в прямоугольнике 640x350.

Аналогично можно построить IFS для кривой Кох. Нетрудно видеть, что эта кривая имеет четыре части, подобные целой кривой. Для нахождения IFS опять расположим первое поколение этого фрактала на сетке координат дисплея 640 x 350 (рис.55).

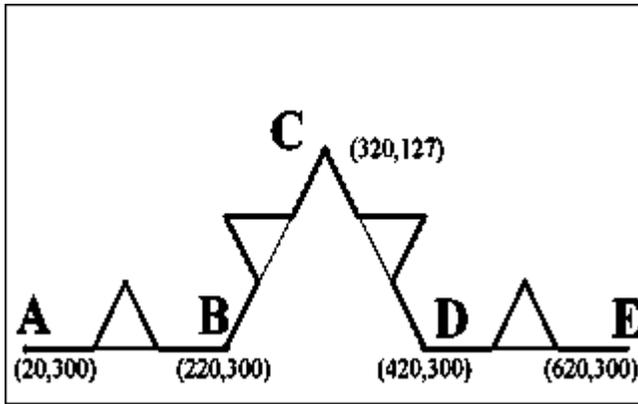


Рис. 55. Заготовка для построения IFS кривой Кох.

Для ее построения требуется набор аффинных преобразований, состоящий из четырех преобразований:

$$\begin{aligned} X' &= 0.333 * X + 13.333 \\ Y' &= 0.333 * Y + 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X' &= 0.333 * X + 413.333 \\ Y' &= 0.333 * Y + 200 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X' &= 0.167 * X + 0.289 * Y + 130 \\ Y' &= -0.289 * X + 0.167 * Y + 256 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X' &= 0.167 * X - 0.289 * Y + 403 \\ Y' &= 0.289 * X + 0.167 * Y + 71 \end{aligned}$$

Результат применения этого аффинного коллажа после десятой итерации можно увидеть на рис.56.

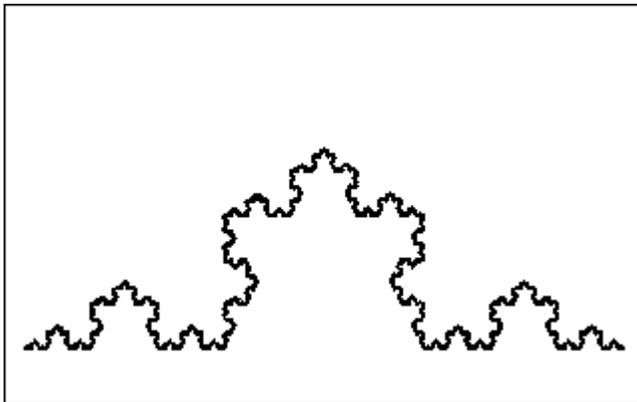


Рис. 56. Кривая Кох, построенная с помощью IFS в прямоугольнике 640x350.

Использование IFS для сжатия обычных изображений (например фотографий) основано на выявлении локального самоподобия, в отличие от фракталов, где наблюдается глобальное самоподобие и нахождение IFS не слишком сложно (мы сами только-что в этом убедились). По алгоритму Барнсли происходит выделение в изображении пар областей, меньшая из которых подобна большей, и сохранение нескольких коэффициентов, кодирующих преобразование, переводящее большую область в меньшую. Требуется, чтобы множество "меньших" областей покрывало все изображение. При этом в файл, кодирующий изображения будут записаны не только коэффициенты, характеризующие найденные преобразования, но и местоположение и линейные размеры "больших" областей, которые вместе с коэффициентами будут описывать локальное самоподобие кодируемого изображения. Восстанавливающий алгоритм, в этом случае, должен применять каждое преобразование не ко всему множеству точек, получившихся на предыдущем шаге алгоритма, а к некоторому их подмножеству, принадлежащему области, соответствующей применяемому преобразованию.

3. Фрактальные временные ряды

Многие наблюдения природных процессов приводят к временным зависимостям или рядам измерений. Например, имеются длинные ряды измерений температуры воздуха. В них ясно прослеживаются

годовые вариации. Длительное измерение температуры обнаруживает ее беспорядочное поведение как на коротких, так и на длинных временных интервалах. Временные последовательности измерений таких величин, как температура, сток рек, количество осадков или толщина колец деревьев, можно исследовать с помощью *метода нормированного размаха*, или *метода Херста*. Такие последовательности измерений характеризуются показателем H , показателем Херста. Запись измерений представляет собой кривую фрактальной размерности $D = 2 - H$.

3.1. Эмпирический закон Херста и метод нормированного размаха

Херст занимался изучением Нила и решением задач, связанных с накоплением водных ресурсов. Он открыл новый статистический метод, *метод нормированного размаха* (метод R/S). В качестве введения в этот метод рассмотрим оз. Альберт-пример, приведенный Херстом. На рис. 1 отложены измерения годового стока как функция времени.

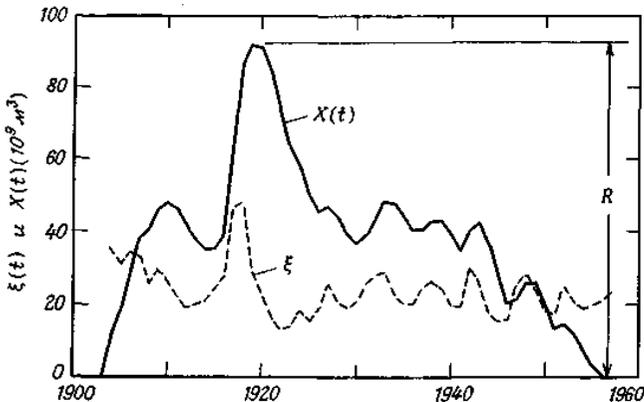


РИС. 1. Годовой сток оз. Альберт $\xi(t)$ (штриховая линия) и накопленное отклонение от среднего стока $x(t)$ (сплошная линия). Указан размах R .

Задача заключается в том, чтобы найти оптимальный объем резервуара по заданному набору измерений стока воды из озера. Оптимальен тот резервуар, который никогда не переполняется и не пустеет. В течение каждого года t такой резервуар принимает приток $\xi(t)$ из озера, в то

ремя как регулируемый объем воды (сток) $\langle \xi \rangle_\tau$ спускается из водохранилища. Сколько воды должно храниться в водохранилище, чтобы каждый год из него можно было спускать объем воды, равный среднему притоку за этот период? Средний приток за период τ лет равен

$$\langle \xi \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \xi(t). \quad (1)$$

Это среднее должно равняться объему, ежегодно спускаемому из резервуара. Пусть $X(t)$ -накопившееся отклонение притока $\xi(t)$ от среднего $\langle \xi \rangle_\tau$:

$$X(t, \tau) = \sum_{u=1}^t \{ \xi(u) - \langle \xi \rangle_\tau \}. \quad (2)$$

Для оз. Альберт эта кривая показана на рис. 1. Разность максимального и минимального накопленного притока X назовем *размахом* R . Эта величина равна емкости, необходимой для поддержания среднего стока за выбранный период. Для достаточно большого резервуара, который никогда не переполняется и не опустошается, R представляет собой разность между максимальным и минимальным количествами воды в резервуаре. Явное выражение для R имеет вид

$$R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau) - \min_{1 \leq t \leq \tau} X(t, \tau). \quad (3)$$

где t - дискретное время, принимающее целочисленные значения, а τ -длительность рассматриваемого промежутка времени. Определения этих величин иллюстрирует рис. 2.

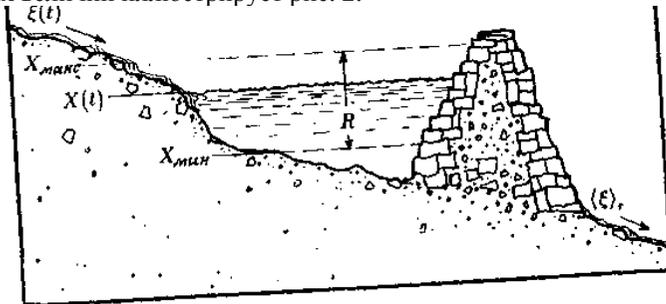


РИС. 2. Резервуар с притоком $\xi(t)$ и средним стоком $\langle \xi \rangle_\tau$. Накопленное отклонение регулируемого стока от притока равно $x(t)$. Размах R равен разности максимального и минимального наполнения резервуара.

Ясно, что размах зависит от рассматриваемого периода τ , и мы ожидаем, что R растет с τ . Для данных по оз. Альберт в период 1904-1957 гг., приведенных на рис. 1, получаем $R(53) = 91 \cdot 10^9 \text{ м}^3$, в то время как для первых 30 лет (рис. 3) размах составляет всего лишь $R(30) = 73 \cdot 10^9 \text{ м}^3$.

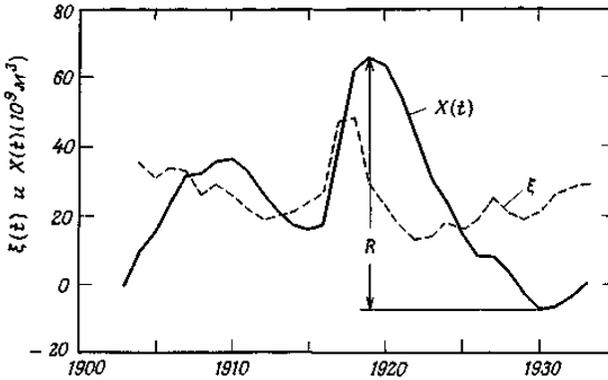


РИС. 3. Накопленное в первые 30 лет отклонение от среднего стока $x(t)$ в оз. Альберт. Указан размах R .

Херст исследовал многие природные процессы, такие, как сток рек, отложение ила и рост колец деревьев. При этом он использовал безразмерное отношение R/S , где S - стандартное отклонение, т.е. квадратный корень из дисперсии. Используя это безразмерное отношение, можно сравнивать размах для разных явлений. Стандартное отклонение можно оценить по наблюдениям:

$$S = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{t=1}^{\tau} \{ \xi(t) - \langle \xi \rangle_{\tau} \}^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Как обнаружил Херст, для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах R/S очень хорошо описывается эмпирическим соотношением

$$R/S = (\tau/2)^H. \quad (5)$$

Показатель Херста H (сам Херст обозначал его через K) более или менее симметрично распределен вокруг среднего значения 0,73 со стандартным отклонением, равным примерно 0,09.

Рис. 4 иллюстрирует качество соответствия между эмпирическим законом Херста (5) и наблюдениями.

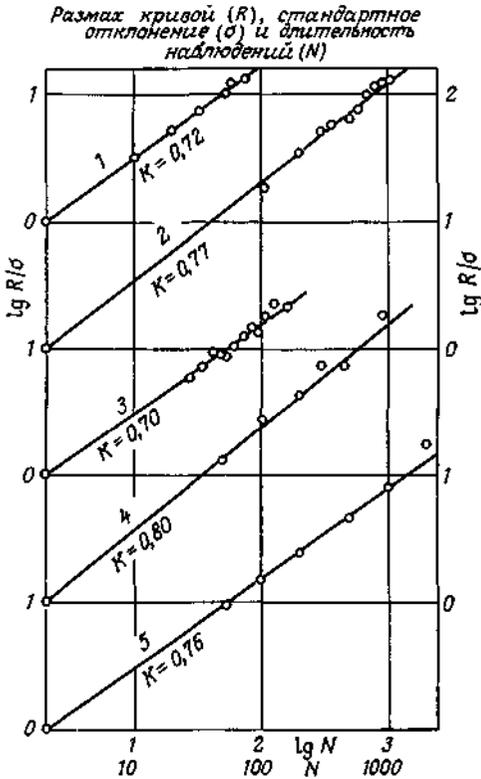


РИС. . Метод нормированного размаха для различных естественных процессов. По оси абсцисс указана длительность анализируемого периода $\tau = N$ в годах . Приведены данные для следующих объектов: 1 - сток рек, $K = 0,72$; 2- р. Рода, $K = 0,77$; 3- уровень осадков, $K = 0,70$; 4-кольца деревьев, $K = 0,80$; 5-слоистые отложения оз. Саки, $K = 0,76$.

Собранные Херстом статистические данные показаны в табл. 1, из которой видно, что для многих естественных процессов $H > 1/2$.

Таблица 1.

Значения $H (= K)$ для различных естественных процессов

Гидрометеорологическая характеристика	Период измерений (года)	Количество		Среднее	Стандартное отклонение	Размах	Коэффициент автокорреляции
		объектов	выборов измерений				
<i>Водообмен</i>							
Сток рек	10-100	39	94	0,72	0,091	0,50-0,94	
р. Роза	80-1080	1	66	0,77	0,055	0,58-0,86	$0,025-0,26$ $n = 15$
Уровень рек и озер	44-176	4	13	0,71	0,082	0,59-0,85	$0,07 \pm 0,08^*$ $n = 65$
Уровень осадков	24-211	39	173	0,70	0,088	0,46-0,91	
<i>Слоистые отложения</i>							
Оз. Саки	50-2000	1	114	0,69	0,064	0,56-0,87	$-0,07-0,11$ $n = 39$
Оз. Мозн и Тимискаминг	50-1200	2	90	0,77	0,094	0,50-0,95	
Оз. Коринто и Хейлибери	50-650	2	54	0,77	0,098	0,51-0,91	
<i>Метеоданные</i>							
Температура	29-60	18	120	0,68	0,087	0,46-0,92	
Давление	29-96	8	28	0,63	0,070	0,51-0,76	
Число солнечных пятен	38-190	1	15	0,75	0,56	0,65-0,85	
Кольца деревьев и индекс ветвления у ели	50-900	5	105	0,79	0,076	0,56-0,94	
<i>Суммарные и средние значения по разделам</i>							
Водообмен		83	346	0,72	0,08	0,46-0,94	
Слоистые отложения		5	258	0,74	0,09	0,50-0,95	
Метеоданные		32	268	0,72	0,08	0,46-0,94	
Общие суммарные и средние значения	10-2000	120	872	0,726	0,082	0,46-0,95	

* Включая сток рек.

Это наблюдение Херста вызывает интерес потому, что при *отсутствии* долговременной статистической зависимости отношение R/S должно быть асимптотически пропорционально $\tau^{1/2}$, если временные ряды связаны со случайными процессами с независимыми значениями и конечной дисперсией: как показано Херстом и Феллером, для случайного процесса с независимыми значениями и конечной дисперсией

$$R/S = (\pi \tau / 2)^{1/2}. \quad (6)$$

3.2. Моделирование случайных рядов

Херст решил проверить соотношение (6) с помощью «метода Монте-Карло». Он смоделировал случайный процесс с независимыми значениями бросанием n монет τ раз и в качестве случайной переменной выбрал $\xi =$ (число «орлов») - (число «решек»). Вероятность того, что при бросании n монет выпадет k «орлов», равна $(1/2)^n (n!/k!(n-k)!)$. Если этот набор монет бросают τ раз, то k и, следовательно, ξ , определяются биномиальным распределением, которое при больших τ и n приближается к нормальному, гауссову

распределению. Прямым вычислением можно показать, что для этого процесса

$$R = \sqrt{\frac{\pi}{2} n \tau} - 1.$$

Поскольку стандартное отклонение разности числа «орлов» и числа «решек» равно удвоенному стандартному отклонению k и равно $S = \sqrt{n}$, в пределе больших τ мы получаем соотношение (6).

Херст провел эксперимент, бросив 10 монет 1000 раз - на бросание 10 монет 100 раз у него ушло около 35 мин! Можно промоделировать этот процесс на компьютере, используя генератор (псевдо)случайных чисел, который выбирает — 1 или + 1 с равной вероятностью. Будем считать, что «орлы» соответствуют единицам со знаком «плюс». По $n = 10$ таким выборкам мы вычисляли значение $\zeta(t)$ как сумму полученных чисел. «Бросание монет» повторялось 2500 раз и заняло меньше секунды. Получившаяся последовательность значений случайных независимых величин $\zeta(t)$ отложена на рис. 5.

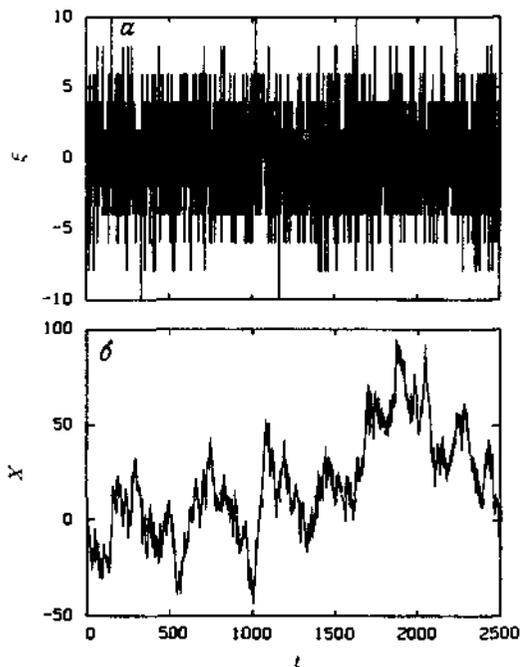


РИС. 5. а - Последовательность независимых случайных чисел $\zeta(t)$, полученная «бросанием» 10 «монет» 2500 раз; б-накопленное отклонение от среднего значения (нуля) $x(t) = \sum_{n=1}^t \zeta(u)$.

Последовательность $\xi(t)$ выглядит как шум. Чтобы получить реалистичский график, соединили линиями точки $(t, \xi(t))$ и $(t - 1, \xi(t - 1))$ для $t = 1, \dots, 2499$. Накопленное отклонение от среднего, $X(t)$, также показано на рис. 5.

Здесь также соединили линиями отдельные точки $(t, X(t))$, представляющие собой запись набора значений, принимаемых случайной переменной. Заметим, что значение $X(t)$ совпадает с положением в момент t частицы, которая случайно блуждает вдоль линии с шагами единичной длины. Этот случайный процесс является упрощенным вариантом случайного блуждания, которое имеет гауссово распределение длин шагов и обсуждается позже. Можно показать, что на периодах, намного превышающих время между шагами, и на расстояниях, намного превышающих длину шага, рассматриваемое случайное блуждание с единичным шагом асимптотически переходит в обычное броуновское движение. Рассчитали значения R/S для данных, подобных показанным на рис. 5, начав с последовательности из $\tau = T = 50\,000$ бросаний 10 монет. Промежуток времени τ , на котором анализировалась временная последовательность, называется *запаздыванием*. Уменьшили запаздывание τ вдвое и получили из исходного временного ряда два независимых значения R/S , характеризующих по отдельности половинные выборки. Затем τ уменьшалось вдвое еще и еще раз до тех пор, пока не выполнялось условие $\tau < 8$; на каждом шаге число независимых областей удваивалось. Как следует из определений (3) и (4), при $\tau = 1$ R/S должно быть равно 1. Результаты, соответствующие одному и тому же значению запаздывания τ , усреднялись и значения R/S откладывались в двойном логарифмическом масштабе как функция запаздывания (рис. 6).

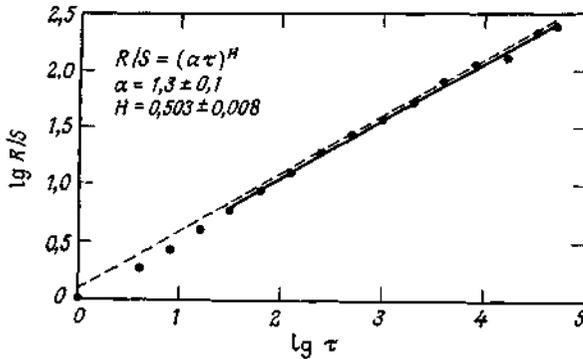


РИС. 6. Отношение R/S как функция запаздывания τ (черные кружки) для переменной $\zeta(t)$, определенной как разность числа «орлов» и «решек» при бросании 10 монет $T=50000$ раз. Нормальная (гауссова) зависимость $R/S = \sqrt{\pi\tau}/2$ показана штриховой линией. Сплошная линия показывает аппроксимацию наблюдаемых значений R/S зависимостью $R/S = (a\tau)^H$. Полученные параметры этой зависимости равны $a = 1,3 \pm 0,1$ и $H = 0,503 \pm 0,008$.

Асимптотика отношения R/S , ожидаемая для независимой случайной переменной и описываемая соотношением (6), показана на рис. 6 штриховой линией. Как видим, результаты моделирования хорошо описываются асимптотическим законом при $\tau > 20$, но при $\tau < 20$ кривая проходит значительно ниже асимптотики. Если с помощью метода наименьших квадратов аппроксимировать наблюдаемые значения R/S законом $(a\tau)^H$ при $\tau > 20$, получаем оценки $a = 1,3 \pm 0,1$ и $H = 0,503 \pm 0,008$, которые согласуются с асимптотической зависимостью $(1,57\tau)^{1/2}$. Указанные ошибки представляют собой стандартные отклонения, найденные из ковариационной матрицы, которая получена при аппроксимации. Таким образом, эти ошибки характеризуют, насколько хорошо наблюдаемые значения укладываются на штриховую прямую. Обычно изменения H от одной серии бросаний монеты к другой несколько превышают приведенные ошибки. Например, если в аппроксимацию включить все точки $\tau \geq 4$, получаются оценки $a = 1,04 \pm 0,08$ и $H = 0,516 \pm 0,006$, дающие завышенное значение H и заниженное значение a .

3.3. Моделирование долговременных изменений

Пытаясь объяснить статистику R/S с $H \sim 0,72$, Херст поставил эксперимент с помощью «вероятностной колоды карт». На картах из этой колоды нанесены числа $-1, +1, -3, +3, -5, +5, -7, +7$, причем число карт каждого вида пропорционально соответствующей ординате на нормальной частотной кривой. Всего в колоде 52 карты: 13 единиц, 8 троек, 4 пятерки и 1 семерка. Эти числа довольно точно приближаются к гауссовой нормальной частотной кривой. Колоду сначала хорошо тасуют, а затем снимают. Число на открытой карте записывают. Колоду вновь слегка тасуют, опять снимают и т.д. Можно считать, что записанные числа соответствуют наблюдениям величины, которая имеет частотное распределение, близкое к нормальной, гауссовой кривой.

Эта процедура занимает меньше времени, чем бросание монет: за 20 мин Херст получил этим способом 100 случайных чисел.

Смоделировали эту процедуру и, как и следовало ожидать, получили результаты, очень близкие к показанным на рис. 5 и 6.

Затем Херст произвел обобщение своей процедуры, приведшее к смещенному случайному ряду: «Колода тасуется и открывается одна карта; после записывания номера на карте она возвращается в колоду. Затем колода сдается на две руки и если, к примеру, на открытой карте стояло число $+3$, то 3 карты с наибольшими положительными числами передаются с первой руки на вторую и со второй руки снимаются 3 карты с наибольшими отрицательными числами. При этом на второй руке накапливается определенное смещение. После этого на нее передается джокер». Как и раньше, это смещенное вероятностное распределение карт на второй руке Херст использовал для генерации случайной последовательности. Если при снятии открывается джокер, то колода перетасовывается и начинается новая смещенная сдача.

Херст проделал 6 таких экспериментов, в каждом из которых было по 1000 снятий колоды, и определил значение показателя $H = 0,714 \pm 0,091$, которые согласуются с его наблюдениями долговременной статистики природных явлений!

Смоделировали на компьютере такое смещенное случайное блуждание, и получившаяся последовательность значений случайной переменной $\xi(t)$ (рис. 7, а) сильно отличается от аналогичной последовательности независимых случайных чисел, показанной на рис. 5, а.

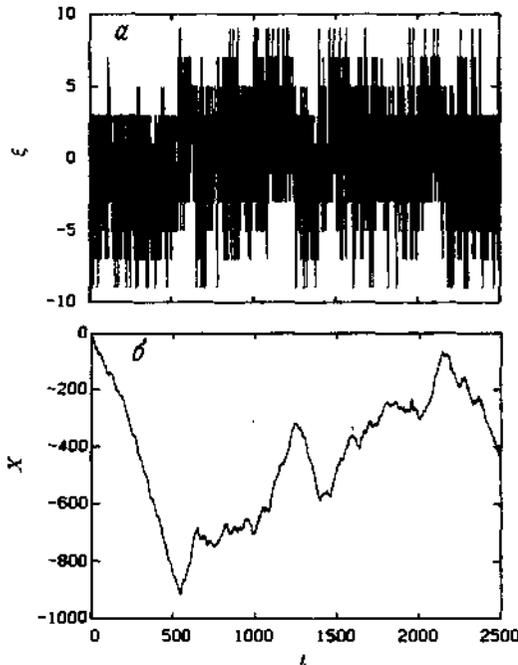


РИС. 7. а-Последовательность смещенных случайных чисел $\xi(t)$, которая образована вытягиванием «карт» из смещенного набора, получившегося после 2500-кратного повторения процедуры Херста; б-накопленное отклонение от (нулевого) среднего значения $X(t) = \sum_{u=1}^t \xi(u)$.

Накопленное отклонение от среднего

$$X(t) = \sum_{u=1}^t \xi(u),$$

изображенное на рис. 7,б, обнаруживает сильные вариации при меньшем «шуме». Итак, при малых значениях запаздывания t размах выборки R , деленный на *среднее по выборке* значение S , меньше, чем значение этого отношения для процесса с независимыми приращениями (см. рис. 5,б). Однако при значениях t , превышающих 100, величина R/S для смещенного процесса заметно выше, чем для несмещенного. Аппроксимируя полученные значения R/S в диапазоне $20 < t < 2500$, мы получили $a = 0,62 \pm 0,07$ и показатель $H = 0,71 \pm 0,01$, что согласуется с экспериментами Херста с вероятностными картами. Становится ясным, что смещенный процесс Херста приводит к отклонениям, которые поддерживаются в среднем в течение $x = n$

снятий колоды, если на каждой руке n карт. В данном случае джокер открывается в среднем после 27 снятий колоды. Поэтому если на какой-то руке накоплено положительное смещение, суммарное число будет увеличиваться, а если смещение отрицательно, будет тенденция к дальнейшему уменьшению. На больших промежутках времени полученная таким образом случайная последовательность будет близка к случайному процессу с независимыми приращениями и асимптотическое поведение по-прежнему будет описываться соотношением (6).

Рис. 8 иллюстрирует R/S -анализ описанного выше смещенного процесса Херста при 100000 снятиях вероятностной колоды. Прямая, полученная аппроксимацией данных для $\tau > 20$, дает $a = 0,8 \pm 0,2$ и кажущееся значение показателя Херста $H = 0,65 \pm 0,02$. Ясно, что эта прямая не очень хорошо описывает результаты моделирования.

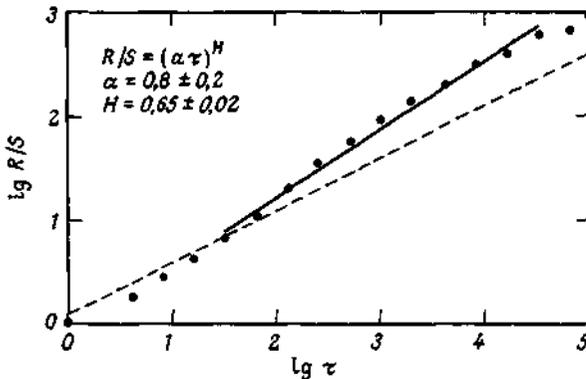


РИС. 8. Значения R/S как функция запаздывания τ (черные кружки) для случайной переменной $\xi(t)$, полученной снятием карт из смещенного набора после повторения процедуры Херста $T=100000$ раз. Асимптотическое гауссово поведение $R/S = \sqrt{\pi\tau}/2$ показано штриховой линией. Показанная сплошной линией аппроксимация этих точек законом $R/S = (a\tau)^H$ получена при $a = 0,8 \pm 0,2$ и $H = 0,65 \pm 0,02$.

Если вычислить кажущееся значение показателя Херста, аппроксимируя результаты в диапазоне $\tau_{\min} \leq \tau \leq 4096$, то мы обнаружим, что оценка H заметно уменьшается, когда $\tau_{\min} \sim 27$, а это — среднее время нахождения джокера в смещенной выборке (рис. 9).

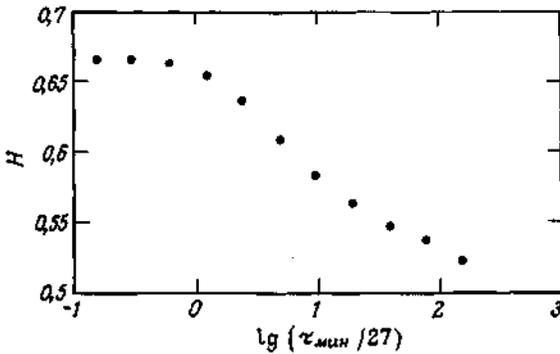


РИС. 9. Кажущееся значение показателя Херста H как функция минимального запаздывания t_{\min} при аппроксимации зависимости R/S от t на рис. 8 степенным законом. Использована последовательность из 100000 случайных чисел, полученных с помощью смещенной процедуры Херста.

Приближение к гауссовой асимптотике происходит очень медленно. В общем кажущееся значение H приближается к 0,5 по мере увеличения t_{\min} , но оценки значения H становятся все менее определенными, поскольку для точности аппроксимации нужны данные в диапазоне, охватывающем несколько декад. Можно заключить, что моделирование не приведет к асимптотическому закону, если только не рассматриваются *очень* длительные измерения.

Анализ одной из самых длинных выборок методом нормированного размаха был проведен Мандельбротом и Уоллисом при исследовании древних климатических изменений по толщине слоев в слоистых илистых отложениях оз. Тимискаминг в Канаде. Эти данные охватывают период в 1809 лет; полученное по ним кажущееся значение показателя Херста очень велико ($H = 0,96$) и не заметно никаких признаков отклонений от этой зависимости (рис. 10).

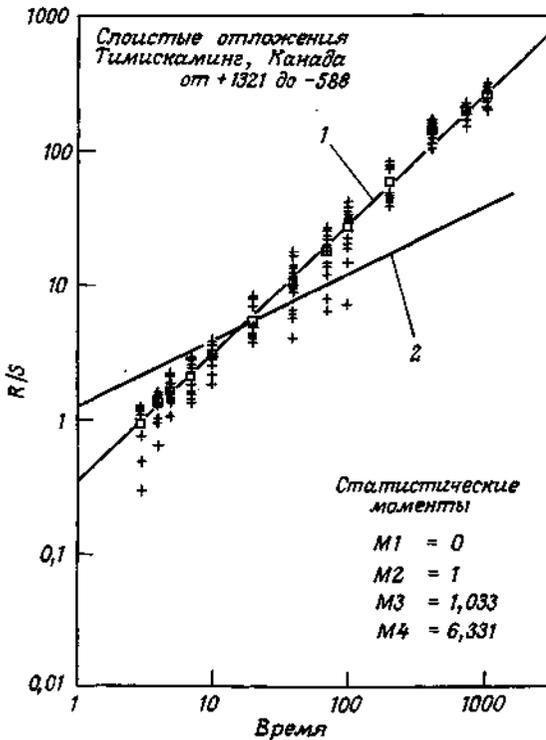


РИС. 10. R/S для толщины слоев в отложениях оз. Тимискаминг (Канада) как функция запаздывания τ в годах.

Почему же природные процессы подчиняются статистике Херста? Это открытый вопрос. Однако смещенное блуждание Херста, моделируемое с помощью джокера в вероятностной колоде карт, дает ключ к ответу. Сток реки зависит не только от недавних осадков, но и от более ранних дождей. Поток воды в крупных системах рек типа Нила или сток оз. Альберт должны зависеть от содержания воды на их обширных бассейнах. Количество воды, запасенное в бассейнах таких рек и водоемов, будет увеличиваться в течение долгих периодов, когда уровень осадков выше среднего. Избыток запасенной воды затем поддержит сток в засушливые годы. Если в течение долгого времени дождей меньше обычного, то общий уровень воды в бассейне реки падает, в последующий период обильных дождей часть воды будет поглощена почвой и сток останется меньше нормального. Эти эффекты «памяти» моделируются джокером в колоде Херста. Что касается стока

рек, то фрактальные свойства области, откуда они питаются водой, также могут способствовать фрактальному поведению стока. Модель обобщенного броуновского движения, рассматриваемая позже, учитывает эффекты памяти.

Показано, что для того, чтобы получить гауссову статистику, даже в системах с умеренными эффектами памяти требуются исключительно длительные ряды наблюдений. Поэтому неясно, насколько уверенно значения показателя Херста H , превышающие $1/2$, в исследованиях методом R/S указывают на поддерживающиеся тенденции (персистентность), и вновь требуются дополнительные исследования. В качестве примера анализа методом R/S рассмотрим результаты, воспроизведенные на рис. 11.

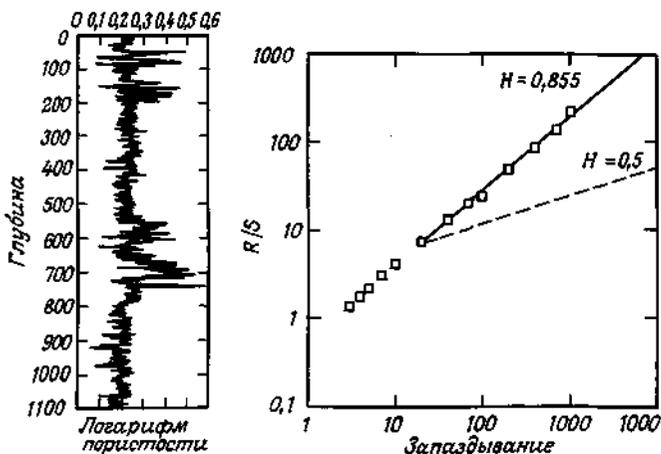


РИС. 11. Пористость как функция глубины (в футах) по анализу кернов (слева). R/S как функция запаздывания для измерений пористости (справа). Сплошной линией показана аппроксимация с $R = 0,855$. Штриховая линия - процесс со статистически независимыми приращениями.

Пористость как функция глубины определялась по кернам, полученным при бурении скважины. Как видно из рисунка, пористость сильно флуктуирует. Анализ методом R/S , результаты которого показаны на рис. 11 справа, ясно указывает на присутствие поддерживающейся тенденции, характеризуемой показателем Херста $H = 0,855$. Автор этой работы обсуждает также свойства дисперсии флуктуации пористости, которые приводят к тому же значению H .

3.4. Методы определения фрактальной размерности временных рядов

Существуют несколько подходов к определению фрактальной размерности:

- 1) клеточная размерность;
- 2) поточечная размерность;
- 3) корреляционная размерность;
- 4) информационная размерность.

Клеточная размерность. Используется при исследовании размерности линий и площадей с фрактальной природой. Её суть заключается в том, что линия или площадь накрывается сеткой с размером ячейки δ . Затем подсчитывается количество клеток $N(\delta)$, накрывающих исследуемую линию (или площадь). Далее величина δ несколько раз уменьшается и для каждого нового значения δ определяется соответствующее количество клеток $N(\delta)$. На рисунке 12 приведена иллюстрация этого процесса.

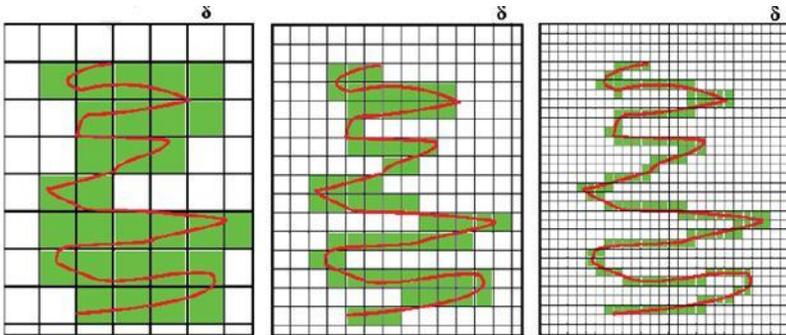


Рис. 12. Покрывание кривой линии клетками с различными размерами δ

В результате этого получаем несколько пар значений $N(\delta) - \delta$, для которых вычисляем логарифмы.

Теперь построим систему координат в двойном логарифмическом масштабе $\lg N(\delta) \mapsto \lg \delta$ и нанесем точки с координатами $[\lg N(\delta), \lg \delta]$ на плоскости. Проведем прямую линию через эти точки, как показано на рисунке 13.

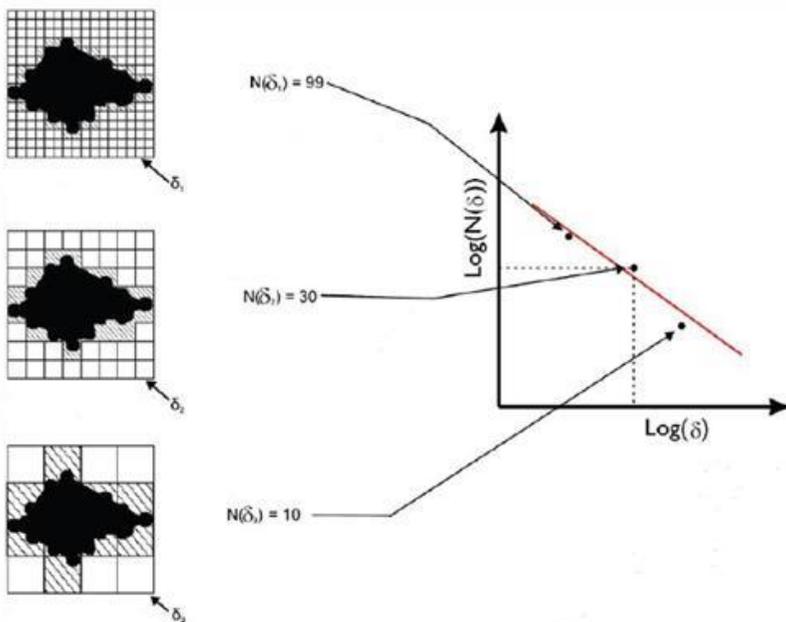


Рис. 13. Построение системы координат с двойным логарифмическим масштабом

Далее определим угол наклона этой линии α , как показано на рисунке 14.

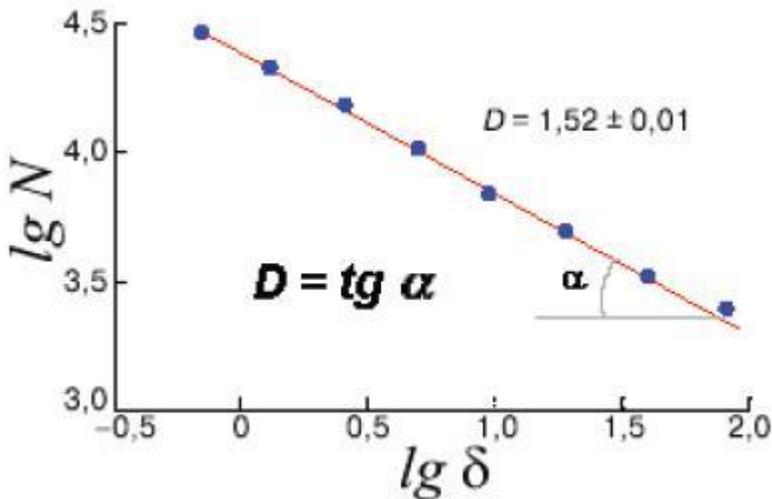


Рис. 14. Определение клеточной фрактальной размерности D по наклону прямой линии

Клеточная фрактальная размерность D представляется выражением:

$$D = \operatorname{tg} \alpha . (7)$$

Поточечная (фрактальная) размерность. Рассмотрим какую-нибудь траекторию в фазовом пространстве на протяжении длительного времени (рис.15).

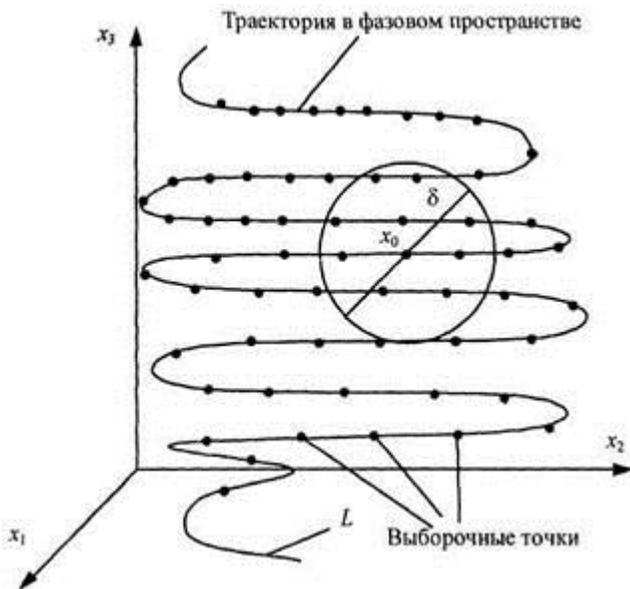


Рис. 15. Геометрические построения для нахождения поточечной (фрактальной) размерности

Проведем выборку точек на траектории (достаточно большое число N_0) произвольным образом. Опишем вокруг какой-нибудь точки x_0 на траектории сферу диаметра δ (или куб с ребром δ) и подсчитаем число выборочных точек $N(\delta)$, попавших внутрь сферы.

Вероятность того, что выборочная точка окажется внутри сферы, определяется выражением:

$$P(\delta) = \frac{N(\delta)}{N_0}, \quad (8)$$

где N_0 – общее число точек на траектории.

Размерность траектории для некоторой области точек $X^{(i)}$ фазового пространства имеет вид:

$$d_{\mathcal{P}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln P(\delta, X^{(i)})}{\ln \delta} \quad (9)$$

Пусть длина всей кривой L равна 1 (это всегда можно допустить).

Пусть r – расстояние между отдельными точками. Тогда $N(r) \cdot r$, где $N(r)$ – число точек, попавших в сферу, определяет длину кривой $L(\delta)$ в сфере диаметра δ , а $N_0 r = 1$.

Имеем:

$$L(\delta) = \frac{N(r) \cdot r}{N_0 \cdot r} = N(r) \cdot r$$

Рассмотрим отрезок δ (диаметр сферы). Если вновь принять длину этого отрезка за 1, то число отрезков, покрывающих длину $\delta = 1$, определится как $\frac{1}{r}$, в то же время число отрезков, покрывающих $L(\delta)$, равно:

$$N(r) \cdot r \cdot \frac{1}{r} = N(r)$$

Тогда:

$$d_{\mathcal{F}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N(r)}{\ln \left(\frac{1}{r} \right)}$$

и мы получим исходную формулу.

Как видно, здесь вновь использовался основной принцип – принцип самоподобия фракталов. Для многих фракталов это определение не зависит от $\mathbf{x}^{(i)}$, но для других аттракторов $d_{\mathcal{F}}$ зависит от $\mathbf{x}^{(i)}$, поэтому лучше воспользоваться усредненной поточечной размерностью.

Выберем случайным образом множество точек $M < N_0$ и в каждой точке вычислим $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}^{(i)})$, после чего определим усредненную поточечную размерность:

$$\overline{d_{\mathcal{F}}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad (10)$$

Корреляционная (фрактальная) размерность. Эта размерность широко используется для определения меры упорядоченности движений и является нижней оценкой хаусдорфовой размерности странного аттрактора.

На первом этапе определяется корреляционный интеграл $C(\delta)$ по формуле:

$$C(\delta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbb{1} \left[\delta - \|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\| \right] \quad (11)$$

где $\mathbb{1}[z]$ – функция Хевисайда; $\|\cdot\|$ – какая-либо норма.

Функция Хевисайда представляет собой единичную ступенчатую функцию, которая приобретает значение 1 в момент Z . Применение функции Хевисайда позволяет обнаружить момент, когда мера переходит из нуля к бесконечности.

Норма – это правило, означающее, что сопряжённым алгебраическим числам соответствует некоторое рациональное число.

Фактически двойная сумма в (11) определяет число пар $\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}$, расстояние $\|\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{x}^{(j)}\|$ между которыми не превышает δ . Предполагается, что $\mathbf{x}^{(i)}$ – вектор, описывающий положение изображающей точки $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}(t_i)$ в фазовом пространстве в момент времени t_i , где $t_i = t_0 + iT, i = 1, 2, \dots, N, T$ – некоторый заданный промежуток времени. При малых δ корреляционный интеграл $C(\delta) \sim \delta^{d_{jc}}$, поэтому корреляционную размерность d_{jc} можно определить по наклону зависимости $\ln C(\delta)$ от $\ln \delta$ или:

$$d_{jc} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C(\delta)}{\ln \delta} \quad (12)$$

В случае изучения скалярной динамической системы или одной координаты вектора состояния \mathbf{X} фрактальную размерность можно определить с помощью процедуры Паккарда-Такенса.

Пусть x_i – реализация одной из координат фазового пространства системы $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$. Введем в рассмотрение новое фазовое пространство (пространство вложения размерности p), точки которого определяются векторами $y_j^{(p)} = \{x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+p-1}\}$, сконструированными из последних значений величин $x(j = 1, 2, \dots, n = N - p + 1)$. При изменении t получим в этом пространстве траекторию, воспроизводящую некоторое множество, корреляционная размерность которого $d_{fc}^{(p)}$ может быть вычислена через корреляционный интеграл:

$$C^{(p)}(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n I(\delta - \|y_j^{(p)} - y_k^{(p)}\|) \quad (13)$$

Фрактальная размерность определяется по наклону зависимости $\ln C^{(p)}$ от $\ln \delta$, или:

$$d_{fc}^{(p)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln C^{(p)}(\delta)}{\ln \delta} \quad (14)$$

Изменяя размерность p векторов y , проанализируем зависимость $d_{fc}^{(p)}$ от p (кривую Папкарда-Такенса). Оказывается, что размерность $d_{fc}^{(p)}$ с ростом p увеличивается. Однако если регистрируемый сигнал есть проявление *детерминированного хаоса*, то при некотором $p = p_0$ величина $d_{fc}^{(p)}$ перестает расти (!). *Достигнутое при этом значение $d_{fc}^{(p)}$ принимается за размерность d_{fc} исходной системы.* Если же

рост $d_{\varepsilon}^{(p)}$ продолжается без насыщения, то это свидетельствует о том, что наблюдаемый сигнал шумовой (!).

Таким образом, ***обычный случайный процесс можно рассматривать как движение системы на аттракторе бесконечной размерности. Конечная размерность аттрактора означает, что данный сигнал можно воссоздать с помощью динамической системы.***

Это особенно важно при решении задач управления, когда необходимо отличать детерминированный хаос от обычных шумов и помех. Дело в том, что наличие внутреннего порядка в детерминированном хаосе позволяет в принципе управлять им, в то время как **шумовой хаос неуправляем.**

Покажем, что минимальное число динамических переменных, необходимое для описания наблюдаемого хаотического движения,

оценивается как $[d_{\varepsilon}] + 1$, где $[d_{\varepsilon}]$ – целая часть фрактальной размерности. Эта оценка может быть использована, в частности, для решения одной из самых сложных задач, возникающих при идентификации модели рассматриваемой системы, – **задачи определения количества динамических параметров, необходимых для описания системы.**

Рассмотрим примеры, связанные с применением процедуры Паккарда-Такенса. Первый и второй примеры иллюстрирует идентификацию размерности математической модели, третий – диагностику объекта управления, третий .

Пример 1. На рисунке 16 представлены графики пульсации давления глубинного насоса для различных жидкостей, полученные с помощью тензодатчиков с глубины 390 метров.

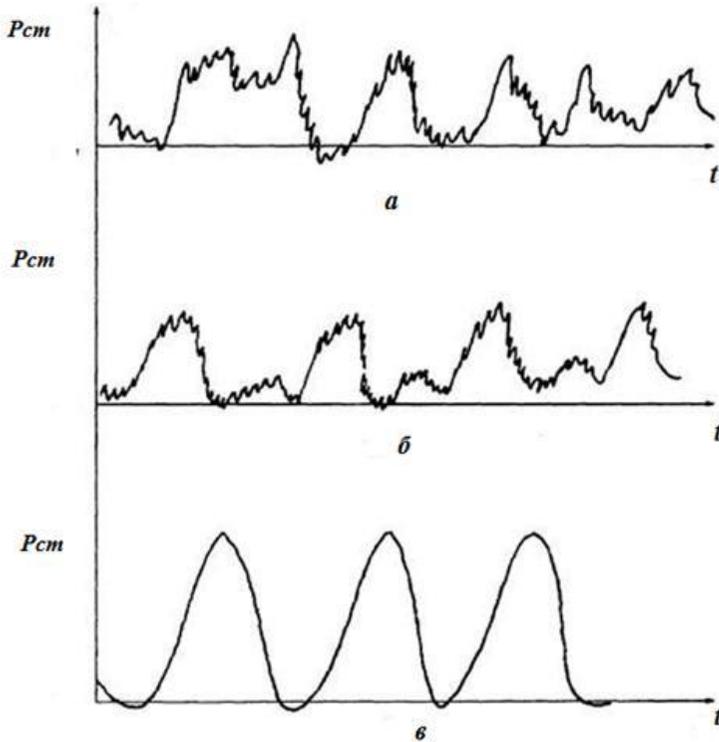


Рис. 16. Пульсация давления в скважине: P – давление, μ – вязкость, $P_{ст}$ – статическое давление, а – $\mu = 1,0 \mu$, Па·с (вязкость пластовой воды); б – $\mu = 50 \mu$, Па·с (дегазированная нефть), в – $\mu = 500 \mu$, Па·с (водоэмульсионная смесь)

Как видно из рисунка 16, при большой вязкости (рис.16,в) начинаются периодические колебания с периодом, равным продолжительности одного цикла качания насоса. С уменьшением вязкости μ движения усложняются и можно предположить, что устанавливаются хаотические колебания при малых μ (рис.16, а).

Проверка этой гипотезы выполнена процедурой Паккарда-Такенса. На рисунке 17 построена зависимость корреляционной размерности $d_{\mathcal{E}}^{(p)}$ от размерности p вектора \mathbf{y} .

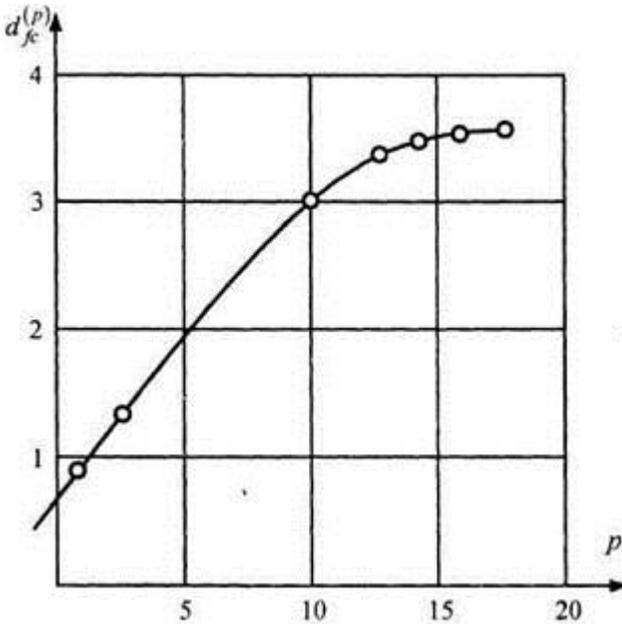


Рис. 17. Построение кривой Паккарда-Такенса для выявления хаоса и определения фрактальной размерности ($\mu = 1,0 \mu, \text{Па} \cdot \text{с}$)

Из рисунка видно, что при $p = 12$ наступает насыщение $d_{\mathcal{E}}^{(p)}$. Следовательно, в данном случае действительно наблюдается

детерминированный хаос, причем $[d_{\mathcal{E}}] = 3$, поэтому минимальное число динамических переменных, необходимых для описания наблюдаемых колебаний, равно 4.

Пример 2. В одной из работ приводятся результаты исследования выделения сейсмической энергии землетрясений в различных диапазонах магнитуд (от 3 до 8 баллов) с использованием каталогов землетрясений Японских островов. Графики зависимости фрактальных размерностей D_c от размерностей пространства вложения m приведены на рисунке 18.

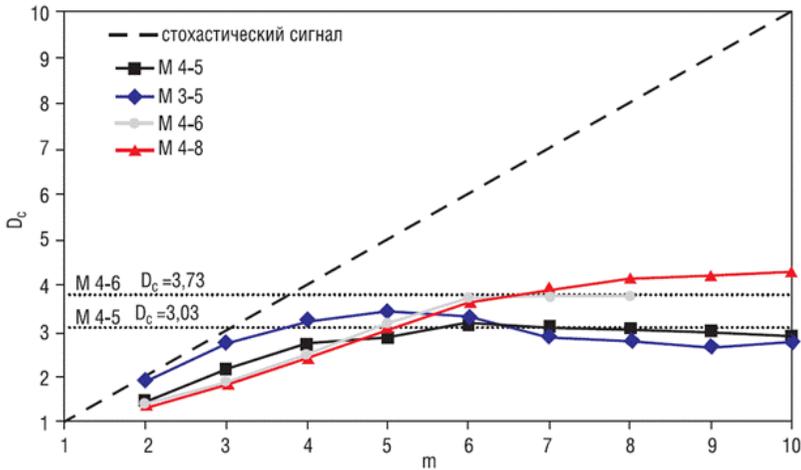


Рис. 18. График изменения фрактальной размерности D_c от размерности пространства вложения m

Установлено, что при $m > 5$ наклон линейных участков графиков перестает увеличиваться и зависимость выходит на горизонтальный участок. Таким образом, в данном случае размерность вложения $m = 6$, а $D_c = 3,03$. При анализе землетрясений в диапазоне магнитуд от 4 до 6 получено значение $m = 6$, а $D_c = 3,73$. При анализе

землетрясений в диапазоне магнитуд от 3 до 5 получено значение $m = 5$, а $D_c = 2,98$.

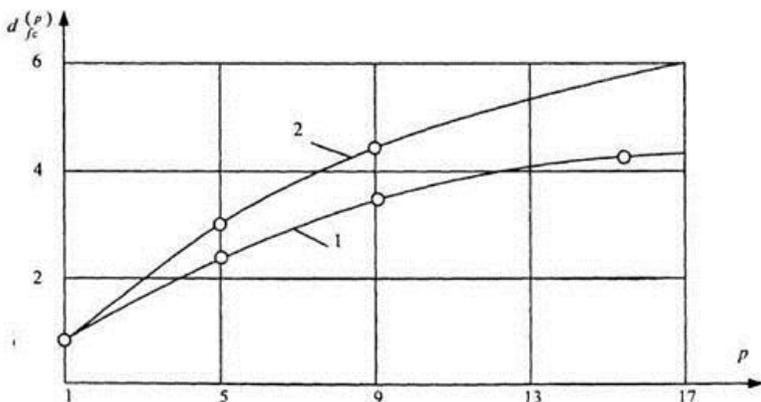
Из приведенных данных следует вывод, что процесс, приводящий к выделению сейсмической энергии в данном диапазоне магнитуд (от 1 до 8), не является случайным, а зависит от 5-6 основных параметров.

Пример 3. При бурении скважины одной из важнейших технических задач является оценка степени износа долота с целью его своевременной замены. Косвенная оценка состояния бурильного инструмента по изменению механической скорости проходки не всегда надежна, поскольку изменение скорости проходки может быть связано с изменением свойств породы, а не износом долота. Для диагностики состояния долота применена оценка значения корреляционной размерности пульсаций давления промывочной жидкости.

На рисунке 19 представлены графики рассчитанных корреляционных размерностей для изношенного и неизношенного инструментов.

Видно, что неизношенное долото характеризуется конечной

фрактальной размерностью $d_f = 4,5$, в то время как фрактальная размерность изношенного инструмента не ограничивается конечной величиной и определяет случайный процесс, а не детерминированный хаос.



1 – неизношенный инструмент; 2 – изношенный инструмент

Рис. 19. Кривые Пакарда-Такенса для выявления хаоса и определения фрактальной размерности

3.5. Фрактальная антенна

Фрактальные антенны – относительно новый класс электрически малых антенн (ЭМА), принципиально отличающийся своей геометрией от известных решений. По сути, традиционная эволюция антенн базировалась на евклидовой геометрии, оперирующей объектами целочисленной размерности (линия, круг, эллипс, параболоид и т. п.). Главное отличие фрактальных геометрических форм – их дробная размерность, что внешне проявляется в рекурсивном повторении в возрастающем либо уменьшаемом масштабах исходных детерминированных или случайных шаблонов. Фрактальные технологии получили распространение при формировании средств фильтрации сигналов, синтезе трехмерных компьютерных моделей природных ландшафтов, сжатии изображений. Вполне естественно, что фрактальная "мода" не обошла стороной и теорию антенн. Тем более, что прообразом современных фрактальных технологий в антенной технике явились предложенные в середине 60-х годов прошлого века логопериодические и спиральные конструкции. Правда, в строгом математическом смысле такие конструкции на момент разработки не имели отношения к фрактальной геометрии, являясь, по сути, лишь фракталами первого рода. Сейчас исследователи, в основном методом

проб и ошибок, пытаются использовать известные в геометрии фракталы в антенных решениях.

В результате имитационного моделирования и экспериментов установлено, что фрактальные антенны позволяют получить **практически тот же коэффициент усиления, что и обычные, но при меньших габаритах, что важно для мобильных приложений.**

Рассмотрим результаты, полученные в области создания фрактальных антенн самых различных типов.

Начало практическому применению фрактальных антенн в 1995 году положил, как принято считать, американский инженер Натан Коэн. Первой конструкцией фрактальной антенны с наиболее полно изученными электромагнитными и направленными свойствами стала антенна на основе префрактальной кривой Коха. При построении линии Коха исходный отрезок длиной z , именуемый **инициатором фрактала**, делится на три равные части. Центральный участок заменяют равносторонним треугольником со стороной $z/3$. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длиной $z/3$ каждый. Этот процесс повторяется для каждого отдельного сегмента ломаной линии: во второй итерации на отрезках $z/3$ строятся треугольнички со сторонами $z/9$, на них – треугольнички со сторонами $z/27$ (третья итерация) и т.д.

Каждый шаг синтеза увеличивает длину результирующей кривой в соответствии с выражением:

$$L = z \left(\frac{4}{3} \right)^n, \quad (15)$$

где n – число итераций.

Этот эффект миниатюризации антенн является существенным лишь при пяти-шести первых итерациях фрактала.

Строго говоря, в антенных решениях используются не подлинные фракталы, а лишь несколько первых их итерационных форм, получивших в геометрии название кривых, заполняющих пространство.

Стандартным вариантом фрактала Коха принято называть фрактал с углом θ при основании, равным 60° . Ученый Пенсильванского университета К. Дж. Виной предложил рассматривать угол при основании иницирующего треугольника в качестве параметра, характеризующего антенную конструкцию. Изменяя этот угол, можно получать аналогичные рекурсивные кривые разной размерности (рис.20). Кривые сохраняют свойство самоподобия, однако результирующая длина линии может быть различной, что влияет на характеристики антенны.

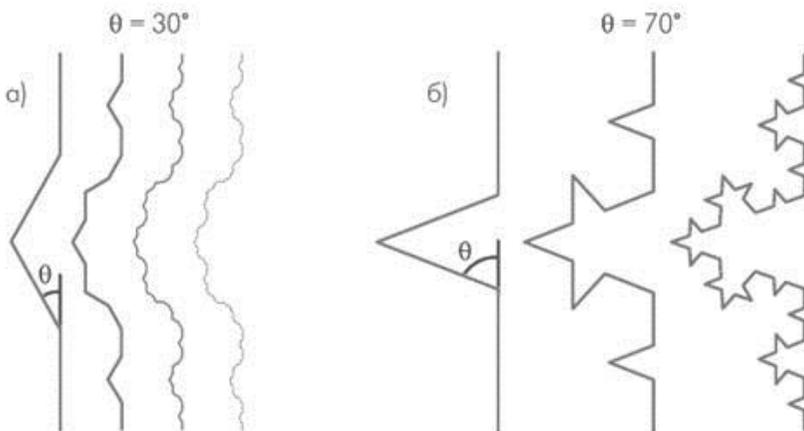


Рис. 20. Вид кривой Коха при $\theta = 30^\circ$ (а) $\theta = 70^\circ$ (б)

Виной первым исследовал корреляцию между свойствами антенны и размерностью D обобщенного фрактала Коха. Было показано, что по мере увеличения угла θ размерность фрактала также увеличивается, и при $\theta \rightarrow 90^\circ$ приближается к $D=2$. С увеличением размерности нелинейно возрастает и общая длина ломаной линии, определяемая соотношением:

$$L_{n,\theta} = \left(\frac{2}{1 - \cos \theta} \right)^n \cdot L_0, \quad (16)$$

где L_0 – длина линейного диполя, расстояние между концами которого то же, что и у ломаной Коха, n – номер итерации.

Переход от $\theta = 60^\circ$ к $\theta = 80^\circ$ на шестой итерации позволяет увеличить общую длину префрактала более чем в четыре раза.

Между рекурсивной размерностью и такими свойствами антенны, как первичная резонансная частота, внутреннее сопротивление на резонансе и многодиапазонные характеристики, существует прямая связь. На основе компьютерных расчетов Виной получил зависимость

первой резонансной частоты диполя Коха f_k от размерности D , номера итерации n и резонансной частоты прямолинейного диполя f_D той же высоты, что и ломаная Коха (по крайним точкам):

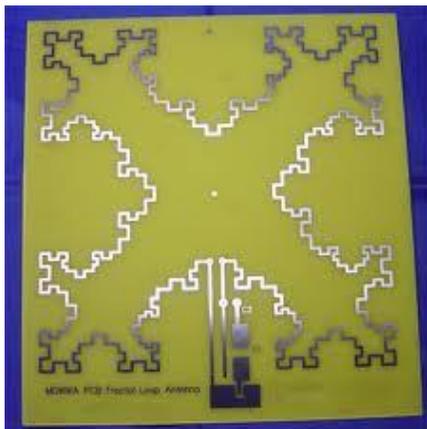
$$f_k = f_D \left[1 - \exp \left(\frac{n-1}{n} \frac{\ln D}{D} \right) \right]. \quad (17)$$

Все рассмотренные до сих пор конфигурации ломаной Коха синтезировались рекурсивно. Однако, согласно Виной, если нарушить это правило, в частности, задавая разные углы θ на каждой новой итерации, свойства антенны можно изменять с большей гибкостью.

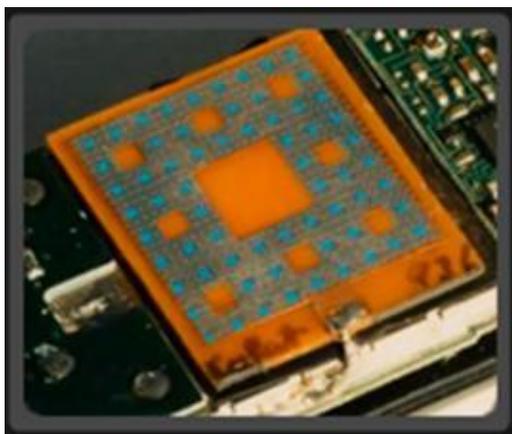
Для мобильных средств связи с частотой несущей $\sim 2,4$ Гц габариты такой антенны в печатном исполнении составляют $12,33 \times 10,16$ мм ($\sim 0,10-0,12 \lambda$), полоса пропускания – $\sim 20\%$ и КПД – 93% . Диаграмма направленности по азимуту почти равномерна, коэффициент усиления в пересчете ко входу фидера составляет $\sim 3,4$ дБ.

В настоящее время разработано довольно большое количество фрактальных антенн с применением различных классических

фракталов. На рисунке 21 показаны варианты антенн для мобильных телефонов, в которых применены крест Минковского (рис.21,а) и ковер Серпинского (рис. 21,б).



а



б

Рис. 21. Варианты исполнения фрактальных антенн

Таким образом, возможность выбора множества разнообразных параметров антенной системы на основе ломаной Коха позволяет при проектировании удовлетворять различные требования, предъявляемые к значению внутреннего сопротивления и распределению резонансных частот.

4. Мультифракталы

Мультифрактал — комплексный фрактал, который может детерминироваться не одним единственным алгоритмом построения, а несколькими последовательно сменяющими друг друга алгоритмами. Каждый из них генерирует паттерн со своей фрактальной размерностью. Для описания мультифрактала вычисляют мультифрактальный спектр включающий в себя ряд фрактальных размерностей присущих элементам данного мультифрактала.

Мультифракталы - неоднородные фрактальные объекты для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины, его фрактальной размерности

d_H

, а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми

d_H

величиной d_H , такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами.

Проще всего пояснить, что понимается под "неоднородным фракталом" на примере треугольника Серпинского, построенного с помощью СИФ. Мы показали, что система итерируемых функций для этого фрактала состоит из трех преобразований на комплексной плоскости, каждое из которых выбиралось с одинаковой вероятностью, равной 1/3.

Допустим, однако, что в методе случайных итераций мы теперь по какой-то причине отдали предпочтение одной из вершин треугольника и стали выбирать ее с вероятностью 90 %. Две же остальные вершины равноценны и на их долю приходится по 5 %.

Точки внутри треугольника распределены теперь крайне неравномерно. Тем не менее по обычной терминологии данное множество точек является фракталом, так как сохранилось основное свойство фрактала - самоподобие.

Однако несмотря на неравномерность распределения точек по фракталу, его фрактальная размерность осталась при этом прежней,
 $d = \ln 3 / \ln 2$

. Покрытие этого множества все более и более мелкими треугольниками можно осуществить по тому же алгоритму, что и ранее. Такое совпадение заставляет нас заняться поиском иных количественных характеристик, которые могли бы отличить неравномерное распределение точек от равномерного.

4.1. Обобщенные размерности Реньи d_q

Дадим теперь общее определение мультифракталов. Рассмотрим фрактальный объект, занимающий некую ограниченную область A , имеющую $diam = L$ в евклидовом пространстве размерности d . Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой

$$N \gg 1$$

множество из N , как-то распределенных в этой области. В конце концов предполагаем, что $N \rightarrow \infty$.

Множество точек может представлять собой некоторую популяцию, состоящую из особей одного вида распределенных по области A . Такой популяцией могут быть, например, народонаселение или сеть метеостанций. Обе популяции неравномерно распределены по поверхности Земли. Пространственное распределение энергии, распределение ошибок в канале связи, распределение примесей в жидких средах, масс в веществе - примеры таких популяций. Важно отметить, что неравномерное распределение особей остается в силе независимо от линейного масштаба.

Разобьем всю область A на гиперкубические ячейки со стороной $\epsilon \ll 1$ и объемом ϵ^d соответственно. Далее нас будут интересовать

только занятые ячейки, в которых содержится хотя бы одна точка.

$$N(\varepsilon)$$

Обозначим $N(\varepsilon)$ число таких ячеек, оно очевидно зависит от ε .

$$n_i(\varepsilon)$$

Пусть $n_i(\varepsilon)$ - число точек в i -й ячейке. Тогда величина

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i(\varepsilon)}{N} \quad (1)$$

$p_i(\varepsilon)$ - есть вероятность того, что некоторая точка содержится в i -м кубике. То есть эта вероятность характеризует относительную заселенность ячейки. По правилу нормировки вероятностей:

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i(\varepsilon) = 1. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение так называемую *обобщенную статистическую*

сумму, характеризуемую показателем q :

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon), \quad (3)$$

$$-\infty \leq q \leq +\infty$$

где

Определение. *Спектром обобщенных фрактальных размерностей Реньи, характеризующих распределение точек в области A называется совокупность величин:*

$$d_q = \frac{\tau(q)}{q-1} \quad (4)$$

где

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (5)$$

Для обычного однородного фрактала все эти размерности совпадают.

$$d_q = d = const \quad q$$

То есть если $d_q = d = const$, т.е. не зависит от q , то рассматриваемое множество точек представляет собой обычный, регулярный фрактал, который характеризуется всего лишь одной

$$d_H$$

величиной - фрактальной размерностью d_H . Напротив, если функция

$$d_q \quad q$$

как-то меняется с q , то рассматриваемое множество точек является мультифракталом.

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется

$$\tau(q)$$

нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение

$$Z(q, \varepsilon)$$

статистической суммы $Z(q, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \quad (6)$$

Следует иметь в виду, что предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ надо выполнять, помня, что ему всегда предшествует предел $N \rightarrow \infty$.

Покажем теперь, как ведет себя обобщенная статистическая сумма в случае обычного регулярного фрактала с фрактальной размерностью d . В этом случае во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество точек

$$n_i(\varepsilon) = \frac{N}{N(\varepsilon)}, \quad (7)$$

то есть фрактал является однородным. Тогда очевидно, что

$$p_i(\varepsilon) = \frac{1}{N(\varepsilon)}$$

относительные населенности всех ячеек тоже одинаковы и обобщенная статистическая сумма принимает вид:

$$Z(q, \varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon). \quad (8)$$

Учтем теперь, что, согласно определению фрактальной размерности d , число занятых ячеек при достаточно малом ε ведет себя следующим образом:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-d}. \quad (9)$$

Подставляя это в формулу (8) и сравнивая с (6), мы приходим к выводу, что в случае обычного фрактала функция

$$\tau(q) = (q - 1)d, \quad (10)$$

т.е. является линейной. Тогда все $d_q = d$ и действительно не зависят от q . Для фрактала, все обобщенные фрактальные размерности которого совпадают, часто используется термин *монофрактал*.

Если распределение точек по ячейкам неодинаково, то фрактал является неоднородным, т.е. представляет из себя мультифрактал, и для его характеристики необходим целый спектр обобщенных

фрактальных размерностей d_q , число которых, в общем случае, бесконечно.

$$q \rightarrow \infty$$

Так, например, при основной вклад в обобщенную статистическую сумму (3) вносят ячейки, содержащие наибольшее

число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся

наибольшей вероятностью их заполнения p_i . Наоборот, при $q \rightarrow -\infty$

основной вклад в сумму (3) дают самые разреженные ячейки с малыми значениями чисел заполнения p_i . Таким образом,

функция d_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое множество точек A .

4.2. Фрактальная размерность d_0 и информационная размерность d_1 .

Выясним теперь, какой физический смысл имеют обобщенные фрактальные размерности d_q для некоторых конкретных значений q .

Так, при $q = 0$ из выражения (3) следует, что

$$Z(0, \varepsilon) = N(\varepsilon). \tag{11}$$

С другой стороны, согласно формулам (6) и (4),

$$Z(0, \varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-d_0}. \quad (12)$$

Сопоставляя эти два равенства, мы приходим к соотношению

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-d_0}.$$

Это означает, что величина d_0 представляет собой обычную хаусдорфову размерность множества A . Она является наиболее грубой характеристикой мультифрактала и не несет информации о его статистических свойствах.

Выясним теперь смысл величины d_1 . Поскольку при $q = 1$ в силу условия нормировки вероятности (2), статистическая сумма равна

$$Z(1, \varepsilon) = 1, \quad (13)$$

$$\tau(1) = 0$$

то d_1 . Таким образом, мы имеем неопределенность в

выражении (4) для d_1 . Раскроем эту неопределенность с помощью очевидного равенства

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \cdot \exp[(q - 1) \ln p_i]. \quad (14)$$

$$q \rightarrow 1$$

Теперь, устремляя $q \rightarrow 1$, раскладывая экспоненту и учитывая условие нормировки (2), получаем

$$Z(q \rightarrow 1, \varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} [p_i + (q-1)p_i \ln p_i] = 1 + (q-1) \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (15)$$

В результате мы приходим к следующему выражению

$$d_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}. \quad (16)$$

С точностью до знака числитель в этой формуле представляет собой

$S(\varepsilon)$ энтропию фрактального множества:

$$S(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i \ln p_i. \quad (17)$$

Такое определение энтропии множества полностью идентично

используемому в термодинамике, где под p_i понимается вероятность обнаружить систему в квантовом состоянии i . В результате величина

d_1 обобщенной фрактальной размерности $S(\varepsilon)$ связана с энтропией соотношением

$$d_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \quad (18)$$

В термодинамике энтропия есть мера беспорядка в системе.

Поскольку, как следует из (18),

$$S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-d_1}, \quad (20)$$

то величина d_1 характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность d_1 часто называют *информационной размерностью*. Она показывает, как информация, необходимая для определения местоположения точки, возрастает при стремлении размера ячейки ε к нулю.

4.3. Корреляционная размерность d_2

Рассмотрим еще один частный случай, $q = 2$, и покажем, какой физический смысл имеет обобщенная фрактальная размерность d_2 . Для нее справедливо следующее выражение

$$d_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2}{\ln \varepsilon}. \quad (21)$$

Определим парный корреляционный интеграл

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{n,m} \theta(\varepsilon - |r_n - r_m|), \quad (22)$$

где суммирование производится по всем парам точек нашего

фрактального множества с радиус-векторами r_n и r_m ; $\theta(x)$ - ступенчатая функция Хевисайда, $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$, если $x < 0$. Сумма в выражении (22) определяет n, m

число пар точек для которых расстояние между ними меньше, чем ε . Поэтому, поделенная на N^2 , она определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием меньшим, чем ε^{12} .

Эту же вероятность можно определить по-другому. Величина p_i согласно своему определению (1), представляет собой вероятность попадания точки в i -ю ячейку с размером ε . Следовательно, p_i^2 величина p_i^2 представляет собой вероятность попадания в эту ячейку

двух точек. Суммируя по всем занятым ячейкам, мы получаем вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества A лежат внутри одной ячейки с размером ε . Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или порядка ε . Таким образом, с точностью до численных коэффициентов, принимая во внимание равенство (21), получаем

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^2 \approx \varepsilon^{d_2}. \quad (23)$$

Мы приходим к выводу, что обобщенная размерность d_2 определяет зависимость корреляционного интеграла $I(\varepsilon)$ от ε в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. По этой причине величину d_2 обычно называют *корреляционной размерностью*.

4.4. Свертывание и чертова лестница

В физике мы обычно рассматриваем распределение примесей на поверхности или в объеме. Намагниченность любого магнетика флуктуирует в пространстве. В качестве членов (особей) популяции можно было бы рассматривать локальные магнитные моменты. Многие переменные подвержены флуктуациям. Например, золото встречается в высоких концентрациях лишь в немногих местах, в более низких концентрациях в существенно большем числе мест и в очень низких концентрациях почти повсюду. Важно отметить, что это утверждение остается в силе независимо от линейного масштаба, будь он глобальным, порядка нескольких метров или микроскопическим. С исследованием распределения физических или каких-нибудь других величин на геометрическом носителе связаны *мультифрактальные меры*.

Основные понятия, лежащие в основе того, что теперь принято называть мультифракталами, были первоначально введены Мандельбротом при обсуждении турбулентности и впоследствии распространены им на многие другие ситуации. Применительно к турбулентности многофрактальный подход был развит Фришем, Паризи и др. Особый интерес к мультифракталам начался с работ Грассбергера, Хентшеля и Прокаччи. Аналогичную функцию размерности предложили Бадии и Полити.

Анализ экспериментальных результатов и введение функции $f(\alpha)$ Фришем, Паризи и др. позволили достичь согласия между простой теоретической моделью и наблюдениями. Эти авторы продемонстрировали полезность использования мультифракталов при описании экспериментальных данных. Аналогичный подход развивали в своих работах Бенсимон и др., Холси и др., Глазьер и др.. Предложенная Фейгенбаумом и др. термодинамическая формулировка мультифракталов позволяет распространить эти идеи и на модель

Изинга. Неаналитичности в обобщенных размерностях мультифрактальных множеств, представляющих физический интерес, могут быть интерпретированы по Катцену и Прокачке как фазовые переходы.

Распределение токов в фрактальной сети резисторов может быть описано с помощью понятий, непосредственно связанных с мультифракталами. См., например, работы де Аркангелиса и др., Раммала и др., Аарони и Блюменфельда и др.

Применительно к ОДА и связанным с ней процессам роста мультифракталы рассматривали Микин и др., Микин и Холси и др. Ниттман и др. проанализировали образование вязких пальцев в ячейках Хеле-Шоу и обнаружили признаки, свидетельствующие о мультифрактальной структуре вязких пальцев. Молей и др. исследовали динамику роста вязких пальцев при больших капиллярных числах. *Наблюдаемый рост* допускает количественное описание с помощью мультифрактальной структуры. Фрактальным агрегатам и их фрактальным мерам посвящен обзор Микина.

Идея о том, что фрактальная мера может быть представлена взаимосвязанными фрактальными подмножествами, изменяющимися по степенному закону с различными показателями, открывает новый простор для применений фрактальной геометрии к физическим системам. Исследование мультифракталов представляет собой быстро развивающуюся область физики фракталов.

Условимся понимать под канторовским множеством нечто, отличное от абстрактного триадного канторовского множества. Будем считать затравкой не единичный отрезок, а стержень из какого-нибудь материала с плотностью $\rho_0 = 1$. Исходный стержень имеет длину $l_0 = 1$ и, следовательно, массу $\mu_0 = 1$. Операция, связанная с применением образующего элемента, состоит из разрезания стержня на две половины равной массы $\mu_1 = \mu_2 = 0,5$, которые затем в результатековки укорачиваются до длины $l_1 = 1/3$ (одинаковой для обеих половин). В результате такой обработки плотность возрастает до

$\rho_1 = \mu_1/l_1 = 3/2$. Повторяя всю процедуру, мы получаем в n -м поколении $N = 2^n$ маленьких стержней, каждый из которых имеет длину $l_i = 3^{-n}$ и массу $\mu_i = 2^{-n}$ при $i = 1, \dots, N$. Заметим, что масса в ходе обработки сохраняется, поэтому

$$\sum_{i=1}^N \mu_i = 1. \quad (24)$$

Мандельброт сравнивает этот процесс со *свертыванием* молока, так как первоначально равномерное распределение массы в результате разбивается на множество мелких областей с высокой плотностью. Из сказанного следует, что масса отрезка длиной l_i , где $l_i \leq \delta$, определяется выражением

$$\mu_i = l_i^\alpha. \quad (25)$$

Скейлинговый показатель здесь равен $\alpha = \ln 2 / \ln 3$. Плотность каждого из малых отрезков стержня определяется выражением

$$\rho_i = \frac{\mu_i}{l_i} = \rho_0 l_i^{\alpha-1} \quad (26)$$

и расходится при $l_i \rightarrow 0$. Скейлинговый показатель давно известен в математике как показатель Липшица-Гёльдера, который мы обсудим позже. Этот показатель ведаёт сингулярностью плотности и может быть назван *показателем сингулярности*.

На рис. 1 изображен вариант триадного канторовского множества.

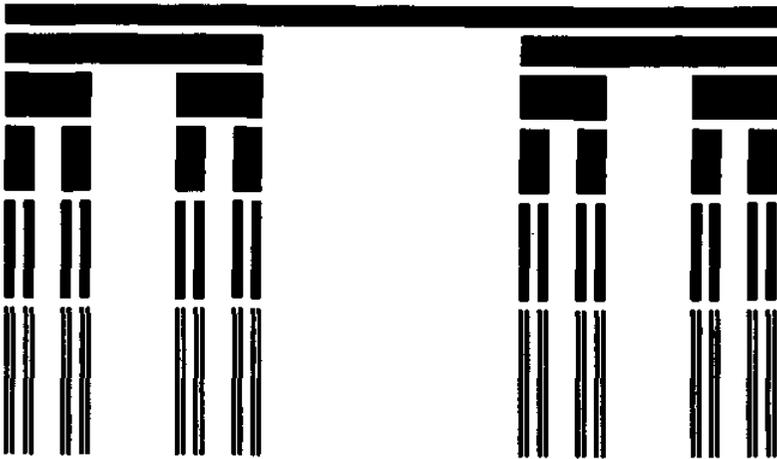


РИС. 1. Триадный канторовский стержень. Стержень единичной длины и единичной массы делится пополам. Каждая половина подвергается перековке, в результате которой ее длина сокращается, а плотность увеличивается. Высота стержня в i -м поколении пропорциональна его плотности ρ_i . Показатель Липшица-Гёльдера $\alpha = \ln 2 / \ln 3$, фрактальная размерность носителя массы $f = D = \ln 2 / \ln 3$.

Высота каждого фрагмента определяется его плотностью ρ_i . Видно, что эта модификация канторовского построения требует скейлингового показателя α для описания того, как возрастает высота фрагментов стержня при уменьшении их ширины. Можно сказать, что

сингулярности с показателем α имеют *носитель* с фрактальной размерностью $f = D$.

Выше мы рассматривали μ_i как вклад фрагмента в массу канторовского стержня. Полученные результаты остались бы неизменными, если бы под μ мы понимали электрический заряд, магнитный момент, гидродинамическую завихренность или вероятность для некоторых явлений. В общем случае μ может быть *мерой* любой величины, имеющей носителем геометрическое множество.

На основе канторовского стержня можно получить конструкцию, так называемую *чертову лестницу*. Выбрав за начало отсчета левый конец стержня ($x = 0$), изображенного на рис. 1, запишем массу, содержащуюся на отрезке $[0, x]$, в виде

$$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt = \int_0^x d\mu(t).$$

Здесь «плотность» $\rho(x)$ равна нулю в промежутках и равна бесконечности во всех бесконечно многих точках, образующих канторовское множество. Масса $M(x)$ остается постоянной на интервалах, соответствующих пустым промежуткам. Длины таких интервалов в сумме равны 1, т.е. длине всего исходного стержня. Следовательно, на отрезке, равном длине интервала, $M(x)$ не изменяется. Отсюда можно было бы сделать заключение, что $M(x) = 0$, и такое заключение было бы правильным для обычной гладкой кривой. Но масса возрастает бесконечно малыми скачками в точках канторовского множества, и эти скачки в сумме дают $M(1) = 1$. Зависимость массы от x , представленная на рис. 2, напоминает лестницу (называемую чертовой лестницей), которая почти всюду горизонтальна.

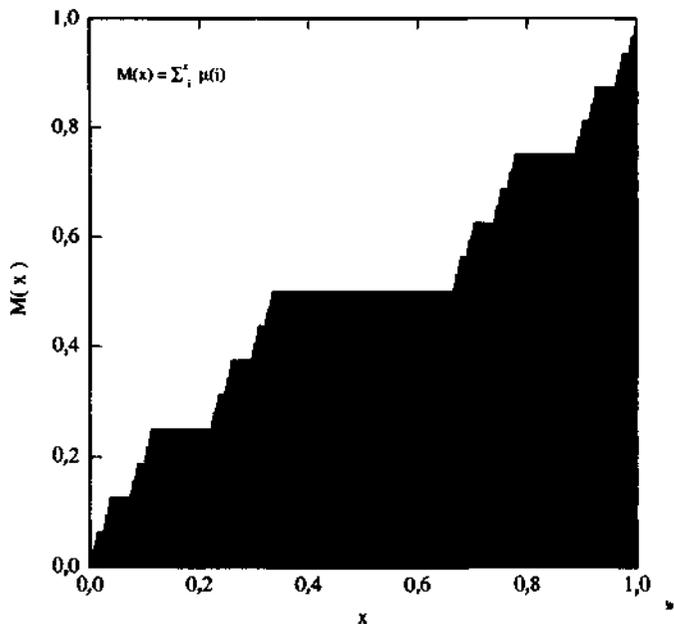


РИС. 2. Масса триадного канторовского стержня как функция координаты, отсчитываемой вдоль стержня. Эта кривая называется *чертовой лестницей*.

Самоаффинная природа чертовой лестницы становится очевидной, если взглянуть на рис. 2.

4.5. Биномиальный мультипликативный процесс

Популяции или распределения, порожденные мультипликативным процессом, находят многочисленные применения и обладают тем преимуществом, что многие свойства таких распределений легко поддаются анализу. Начнем с одномерного примера. Пусть популяция состоит из \mathcal{N} членов, распределенных по отрезку прямой $\mathcal{S} = [0, 1]$. Нас будет интересовать предел при $\mathcal{N} \rightarrow \infty$. Будем считать, что \mathcal{N} - выборка из основного распределения (при конечных \mathcal{N}). Чтобы определить распределение, разделим отрезок \mathcal{S} на части (ячейки) длиной $\delta = 2^{-n}$. Тогда для покрытия этого отрезка \mathcal{S} нам понадобятся $N = 2^n$ ячеек. Здесь n -число поколений при двоичном разбиении отрезка \mathcal{S} . Обозначим ячейки индексом $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Распределение популяции по отрезку при разрешении δ характеризуется набором чисел \mathcal{N}_i , показывающих, сколько членов популяции находится в i -й

ячейке. Удобной мерой содержимого i -й ячейки может служить доля $\mu_i = \mathcal{N}_i / \mathcal{N}$ числа членов популяции, попавших в i -ю ячейку, от полной численности популяции. Набор \mathcal{M} долей, т. е.

$$\mathcal{M} = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}, \quad (27)$$

дает полное описание распределения популяции при разрешении δ . Мера $M(\mathcal{Z})$ части, или подобласти \mathcal{Z} , отрезка \mathcal{S} определяется суммой

$$M(\mathcal{Z}) = \sum_{i \in \mathcal{Z}} \mu_i. \quad (28)$$

В общем случае на этом все и заканчивается: описать распределение членов популяции по отрезку можно единственным способом, а именно задавая \mathcal{M} при достаточно хорошем разрешении, т.е. при достаточно малом δ . Но если \mathcal{M} обладает скейлинговым свойством, то относительно распределения можно сказать гораздо больше. Покажем это на простом примере.

Рассмотрим следующий мультипликативный процесс, порождающий меру на единичном отрезке $\mathcal{S} = [0, 1]$. Разделим \mathcal{S} сначала на две части равной длины $\delta = 2^{-1}$. Сопоставим левую часть с долей p популяции и тем самым наделим левую часть мерой $\mu_0 = p$. На правой части поместим оставшуюся долю и наделим правую часть мерой $\mu_1 = 1 - p$. Увеличим разрешение до $\delta = 2^{-2}$. Мультипликативный процесс производит разбиение каждой части на две половины (по длине). В результате разбиения мы получаем следующие доли популяции в ячейках:

$$\mathcal{M}_2 = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^2-1} = \mu_0 \mu_0, \mu_0 \mu_1, \mu_1 \mu_0, \mu_1 \mu_1.$$

Следующее поколение ($n = 3$) мы получаем, производя разбиение каждой ячейки на две новые ячейки. Ячейка, содержащая меру μ_i оказывается разделенной на левую подячейку с мерой $\mu_i \mu_0$ и на правую подячейку с мерой $\mu_i \mu_1$. Весь отрезок $[0, 1]$ оказывается при этом разбитым на ячейки длиной $\delta = 2^{-3}$, и поэтому набор \mathcal{M} в третьем поколении состоит из следующего упорядоченного перечня мер:

$$\mathcal{M}_3 = \{\mu_i\}_{i=0}^{2^3-1} = \mu_0 \mu_0 \mu_0, \mu_0 \mu_0 \mu_1, \mu_0 \mu_1 \mu_0, \mu_0 \mu_1 \mu_1, \\ \mu_1 \mu_0 \mu_0, \mu_1 \mu_0 \mu_1, \mu_1 \mu_1 \mu_0, \mu_1 \mu_1 \mu_1.$$

При дальнейших итерациях этого процесса получают все более короткие отрезки, содержащие все меньшую долю полной меры. На рис. 3 показаны мера $\mu(x)$ ячейки, расположенной в точке x , и мера

$$M(x) = \sum_{i=0}^{x \cdot 2^n} \mu_i \quad (29)$$

для области $[0, x]$ после 11 итераций мультипликативного процесса.

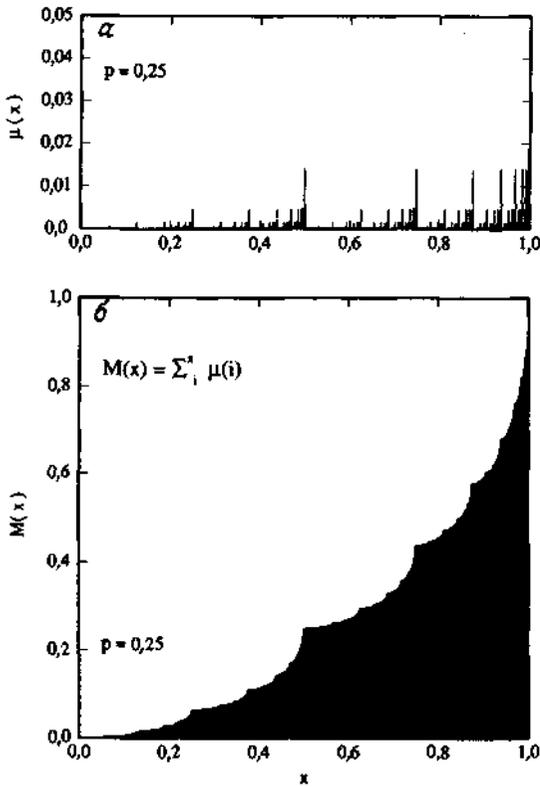


РИС. 3. Мера $M(x)$ для биномиального мультипликативного процесса после $n = 11$ поколений с $\mu_0 = p = 0,25$ и $\mu_1 = 1 - p = 0,75$: а—мера, или содержание, μ ячейки как функция номера сегмента (координаты точки) $x = i \cdot 2^{-11}$; б—мера $M(x)$ для интервала $[0, x]$ как функция от x .

Здесь x указывает индекс ячейки $i = x \cdot 2^n$. Мера $M(x)$ -скейлинговая в том смысле, что левая половина фигуры на рис. 3 получается из всей фигуры и правая половина получается из всей фигуры с помощью соотношений

$$M(x) = \begin{cases} pM(2x) & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ p + (1 - p)M(2x - 1) & \text{при } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (30)$$

Соотношения (30) описывают *аффинное* преобразование функции $M(x)$. С этим понятием мы подробнее познакомимся позже.

После n поколений мы получаем $N = 2^n$ ячеек, перенумерованных последовательно индексом $i = 0, \dots, N - 1$. Длина i -й ячейки равна $\delta_n = 2^{-n}$, а мера, или доля популяции в i -й ячейке, равна $\mu_i = \mu_0^k \mu_1^{(n-k)}$, k - число нулей в двоичной дроби, представляющей число $x = i/2^n$. В этом нетрудно убедиться, если записать индекс ячейки i в виде двоичной дроби:

$$x = i/2^n = \sum_{v=1}^n 2^{-v} \varepsilon_v. \quad (31)$$

«Знаки», или «цифры», ε_v принимают только два возможных значения: 0 или 1. Например, в третьем поколении первой ячейке ($i = 0$) соответствует двоичная дробь 0,000; ячейке с $i = 1$ - дробь 0,001; следующей ячейке - дробь 0,010 и, наконец, последней ячейке с $i = 7$ - дробь 0,111. Для записи всех ячеек в n -м поколении необходимы двоичные дроби с n знаками после запятой.

На рис. 3, а показана мера ячеек, порожденная в 11-м поколении мультипликативного процесса с $p = 0,25$. Как видно из рис. 6.3, а, существует одна ячейка с наибольшей мерой $(1-p)^n$, 11 ячеек с мерой $(1-p)^{n-1}p$ и т.д. В общем случае при $\xi = k/n$ и $k = 0, 1, \dots, n$ существует

$$N_n(\xi) = \binom{n}{\xi n} = \frac{n!}{(\xi n)! (1 - \xi)n!} \quad (32)$$

ячеек с мерой

$$\mu_\xi = \Delta^n(\xi), \text{ где } \Delta(\xi) = \mu_0^k \mu_1^{(1-k)} = p^\xi (1-p)^{1-\xi}. \quad (33)$$

Полная мера отрезков, представляющих популяцию, равна

$$M(x=1) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mu_i = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \Delta^n(\xi) = (\mu_0 + \mu_1)^n = 1. \quad (34)$$

Ячейки, описывающие распределение популяции, полностью покрывают отрезок и содержат всю меру, т.е. любого члена популяции.

4.6. Тριάдное канторовское множество

Мы уже ввели несколько размерностей: размерность Хаусдорфа-Безиковича, топологическую размерность, евклидову размерность, размерность подобия, скейлинговую размерность, размерность кластера и клеточную размерность. Канторовские множества

позволяют проиллюстрировать достаточно много важных и интересных специфических особенностей, присущих фракталам. Очень простое построение, предложенное Кантором, позволяет получать фрактальные множества с фрактальной размерностью в интервале $0 < D < 1$. Как показано на рис.4, заправкой служит единичный отрезок $[0, 1]$, а образующий элемент делит его на три равные части и отбрасывает открытую среднюю часть, оставляя ее концевые точки.



РИС.4. Построение триадного канторовского множества. Заправка – единичный отрезок $[0, 1]$. Образующий элемент удаляет среднюю треть. На рисунке показаны первые пять поколений.
 $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$.

Затем образующий элемент применяется к каждому из двух оставшихся подынтервалов и т. д. Такая процедура очень быстро приводит к очень коротким отрезкам. Поскольку наша графика имеет конечное разрешение, мы обнаруживаем, что 6-е поколение отрезков неотлично от 5-го. После бесконечного числа поколений оставшееся бесконечное множество точек рассеяно по единичному отрезку. Это множество называется *канторовской пылью*.

Вычислим теперь для канторовского множества различные размерности, введенные нами в предыдущих разделах.

Начнем с размерности Хаусдорфа – Безиковича. В n -м поколении канторовское множество состоит из $\mathcal{N} = 2^n$ отрезков

длиной $l_i = (1/3)^n$, $i = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$. Если попытаться

покрыть множество прямолинейными отрезками длины $\delta = l_i$ и

расположить их аккуратно, то нам удастся покрыть все отрезки n -го поколения и, следовательно, все точки канторовского множества.

Мера, определяемая известной формулой, равна величине

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \delta^d = 2^n (1/3)^{nd} = \delta^{d-D}.$$

Эта мера расходится или стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, если только мы не выберем $d = D = \ln 2 / \ln 3 = 0,6309$. Топологическая размерность канторовского множества определяется величиной $D_T = 0$. Так как

$D_T < D$, мы заключаем, что триадное канторовское множество есть фрактальное множество с фрактальной размерностью

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{-- фрактальная размерность} \quad (35)$$

Описываемое здесь канторовское множество не вполне самоподобно. Однако мы можем расширить его с помощью процедуры экстраполяции, охватывающей область $[0, 3]$ двумя канторовскими множествами, которые покрывают интервалы $[0, 1]$ и $[2, 3]$. Повторяя этот процесс неограниченное число раз, мы можем построить самоподобное множество на полупрямой $[0, \infty]$. Если изменить масштаб в $r = 1/3$ раза, то, чтобы покрыть исходное множество, нам понадобится $N = 2$ таких множеств. Из определения *размерности подобия* D_s получаем

$$D_s = \frac{\ln N}{\ln(1/r)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{-- размерность подобия.} \quad (36)$$

Размерность подобия совпадает с фрактальной размерностью триадного канторовского множества.

Формула (36) позволяет тривиальным образом построить канторовское множество с любой заданной размерностью из интервала $0 < D < 1$. В качестве примера на рис. 5 показаны два различных построения, которые оба приводят к одной и той же размерности $D = 1/2$.



РИС. 5. Два построения канторовского множества с $D = 1/2$. *Вверху:* $N = 2$ и $r = 1/4$; *внизу:* $N = 3$ и $r = 1/9$.

Внешне два множества «выглядят» по-разному, хотя они оба имеют одну и ту же фрактальную размерность: у них различная *лакунарность*.

Размерность кластера, или размерность массы, мы получим, если рассмотрим экстраполированный вариант канторовского множества. Начнем с «мономеров» длиной R_0 и образуем «кластер» из $N = 2$ мономеров длиной $R = 3R_0$, после чего все повторим сначала, приняв димер за новый исходный мономер, и т. д. Кластер из $N = 2^n$ мономеров имеет диаметр $R = 3R_0^n$. Следовательно, фрактальная размерность этого кластера равна

$$D_c = \frac{\ln N}{\ln R} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \text{— размерность кластера.} \quad (37)$$

Размерность кластера совпадает с фрактальной размерностью этого канторовского множества.

Мы заключаем, что для весьма простого триадного канторовского множества все определенные выше различные размерности совпадают.

4.7. Скейлинг с неравными отношениями

Что произойдет, если два отрезка в образующем элементе канторовского множества не будут равными? На рис. 6 показан канторовский стержень, который получается, когда первый отрезок образующего элемента имеет длину $l_1 = 1/4$, а второй — $l_2 = 2/5$.



РИС.6. Построение двухмасштабного канторовского стержня с $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 2/5$. Фрактальная размерность такого канторовского множества $D = 0,6110$.

Вычислим фрактальную длину такого весьма простого канторовского множества \mathcal{S} .

Это фрактальное множество \mathcal{S} может быть покрыто некоторым числом \mathcal{N} пересекающихся отрезков $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_{\mathcal{N}}$. Пусть l_i — евклидова длина (диаметр) i -го множества, так что \mathcal{S}_i уместается в (гипер)кубе с ребром l_i . При разбиении с $l_i \leq \delta$ d -мера, использованная для определения размерности Хаусдорфа-Безиковича, равна

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D, \\ \infty, & d < D. \end{cases} \quad (38)$$

Критическая размерность $d = D$, получающаяся в пределе при $\delta \rightarrow 0$, есть фрактальная размерность данного множества. Заметим, что это определение совпадает с определением, данным Манделбротом для кривых Хельги фон Кох, для которых различные отрезки уменьшались в отношении $r_i = l_i$. *Размерность подобия* D_s такого множества есть размерность, удовлетворяющая соотношению

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} r_i^{D_s} = 1, \quad (39)$$

В качестве примера рассмотрим канторовское множество, построенное, как на рис.6. В n -м поколении число отрезков равно $\mathcal{N} = 2^n$. Самый короткий отрезок имеет длину $l_1^n = (1/4)^n$, самый длинный- $l_2^n = (2/5)^n$. Всего имеется $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ отрезков длиной $l_1^k l_2^{n-k}$ при $k = 0, 1, \dots, n$. В n -м поколении мера M_d определяется выражением

$$M_d = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} l_1^k l_2^{(n-k)d} = (l_1^d + l_2^d)^n. \quad (40)$$

Так как $n \rightarrow \infty$ при $\delta = l_2^n \rightarrow 0$, мы заключаем, что мера M_d остается конечной в том и только в том случае, если $d = D$, где D удовлетворяет соотношению

$$(l_1^D + l_2^D) = 1. \quad (41)$$

Численное решение уравнения (41) при $l_1 = 1/4$ и $l_2 = 2/5$ дает $D = 0,6110$.

4.8. Фрактальные подмножества

В n -м поколении $N_n(\zeta)$ отрезков имеют длину $\delta_n = 2^{-n}$ и одну и ту же меру μ_n . Эти отрезки образуют подмножество $\mathcal{S}_n(\xi)$ единичного отрезка $\mathcal{S} = [0, 1]$. Точки множества $\mathcal{S}_n(\xi)$ имеют среди первых знаков после запятой в двоичном разложении x -координаты одинаковое количество нулей, равное $k = \zeta n$. Разумеется, различным точкам соответствуют различные последовательности нулей и единиц. В пределе при $n \rightarrow \infty$ величина ζ равна доле нулей в представлении точки множества \mathcal{S}_ζ бесконечной двоичной дробью. Множество \mathcal{S}_ζ - *фрактальное* множество точек. Чтобы убедиться в этом, покроем множество отрезками длины δ , образуем d -меру $M_d(\mathcal{S}_\zeta)$, и определим

фрактальную размерность $D(\xi)$ этого множества, исследуя, как ведет себя M_d при $\delta \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$:

$$M_d(\mathcal{S}_\xi) = \sum_{\mathcal{S}_\xi} \delta^d = N_n(\xi) \delta^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D(\xi), \\ \infty, & d < D(\xi). \end{cases} \quad (42)$$

Используя формулу Стерлинга для факториала

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \quad (43)$$

получаем из формулы (32) приближенное выражение для $N_n(\xi)$:

$$N_n(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n \xi(1-\xi)}} \exp\{-n(\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi))\}. \quad (44)$$

Замечая, что в нашем случае $n = -\ln \delta / \ln 2$, мы заключаем, что меру M_d в формуле (42) (если пренебречь членом $n^{-1/2}$, дающим только логарифмическую поправку) можно представить в виде

$$M_d(\mathcal{S}_\xi) \sim \delta^{-f(\xi)} \delta^d, \quad (45)$$

где показатель $f(\xi)$ определяется выражением

$$f(\xi) = -\frac{\xi \ln \xi + (1-\xi) \ln(1-\xi)}{\ln 2}. \quad (46)$$

Следовательно, d -мера M_d для множества \mathcal{S}_ξ остается конечной при $\delta \rightarrow 0$ лишь при условии, если $d = f(\xi)$, поэтому фрактальная размерность $D(\xi)$ множества \mathcal{S}_ξ равна $f(\xi)$.

Популяция, порождаемая мультипликативным процессом, распределяется по множеству точек в единичном интервале $\mathcal{S} = [0, 1]$.

Это множество представляет собой объединение (теоретико-множественную сумму) подмножеств \mathcal{S}_ξ :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\xi} \mathcal{S}_\xi. \quad (47)$$

Точки в любом подмножестве \mathcal{S}_ξ имеют, не строго говоря, *одинаковую* плотность населенности. Множества \mathcal{S}_ξ фрактальны с фрактальными размерностями, определяемыми выражением (46). Их фрактальная размерность зависит от параметра ξ . На рис. 7, а представлен график зависимости $f(\xi)$ от ξ .

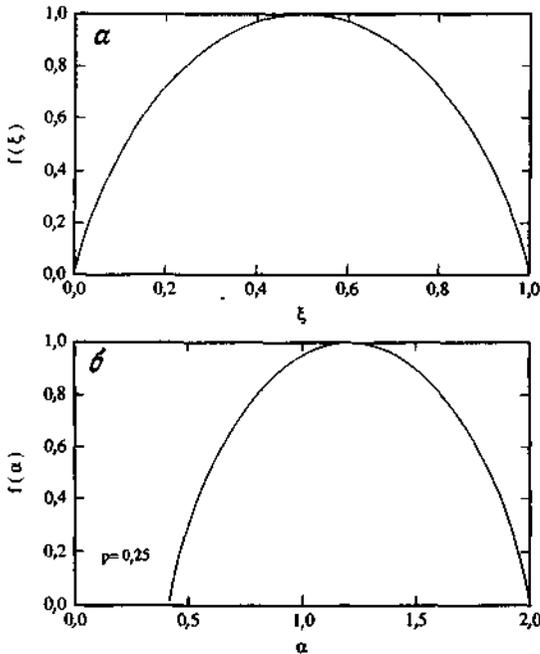


РИС.7. Фрактальные подмножества меры, порожденные биномиальным мультипликативным процессом с $p = 0,25$.

α - фрактальная размерность f подмножеств \mathcal{S}_ξ интервала, содержащих точки x , в двоичном разложении которых (т.е. числа x) доля нулей составляет ξ , как функция от ξ ; $\bar{\alpha}$ - фрактальная размерность f подмножеств \mathcal{S}_α с показателем Липшица-Гёльдера α как функция от α .

Мера $M(x)$ популяции, распределенной по единичному отрезку, полностью характеризуется объединением фрактальных множеств. Каждое слагаемое в объединении фрактально и имеет свою фрактальную размерность. Это - одна из причин, обусловивших выбор термина *мультифрактал*.

4.9. Показатель Липшица-Гёльдера α

Показатель ξ не очень удобен, и на практике предпочитают пользоваться показателем Липшица - Гёльдера α . Особенности меры $M(x)$ характеризуются показателем α . Рассмотрим меру, порожденную

мультипликативным процессом в n -м поколении. Эта мера - неубывающая функция от x с приращениями $\mu_\xi = \Delta^n(\xi)$, имеющими при всех x среди первых n «знаков» представления числа x в виде двоичной дроби, т.е. $x = \sum_{v=1}^n 2^{-v} \varepsilon_v$, ровно $\xi \cdot n$ нулей. Выберем точку $x(t)$, соответствующую заданному значению ξ ; эта точка принадлежит множеству \mathcal{S}_ξ . Мера $M(x)$ определена и в точке $x(\xi) + \delta$, где $\delta = 2^{-n}$. Приращение меры $M(x)$ между этими двумя точками равно μ_ξ , и

$$\mu_\xi = M(x(\xi) + \delta) - M(x(\xi)) = \delta^\alpha, \quad (48)$$

где показатель α определяется соотношением

$$\mu_\xi = \delta^\alpha. \quad (49)$$

В последующих поколениях мы получаем все новые и новые точки множества \mathcal{S}_ξ , и соотношение (48) остается в силе даже в пределе при $n \rightarrow \infty$. Функция $M(x)$, удовлетворяющая соотношению (48), имеет производную при всех x , если $\alpha = 1$, постоянна при $\alpha > 1$ и *сингулярна* при $0 \leq \alpha \leq 1$.

Из формул (33) и (49) при $\delta = 2^{-n}$ следует, что мера для мультипликативной популяции имеет показатель Липшица-Гёльдера

$$\alpha(\xi) = \frac{\ln \mu_\xi}{\ln \delta} = - \frac{\xi \ln p + (1 - \xi) \ln(1 - p)}{\ln 2}. \quad (50)$$

Это выражение для α остается в силе для всех точек множества \mathcal{S}_ξ и линейно по ξ . Кроме того, α зависит от веса p , определяющего разбиение отрезка. Для мультипликативной меры с $p \leq 1/2$ показатель Липшица-Гёльдера α удовлетворяет неравенству $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{\min} &= - \ln(1 - p) / \ln 2 \quad \text{при } \xi = 0, \\ \alpha_{\max} &= - \ln p / \ln 2 \quad \text{при } \xi = 1. \end{aligned} \quad (51)$$

Между параметрами ξ и α существует взаимно-однозначное соответствие, что позволяет записывать множество \mathcal{S}_ξ как \mathcal{S}_α . Мера $M(x)$ характеризуется множествами \mathcal{S}_α , которые в теоретико-множественной сумме составляют единичный интервал $\mathcal{S} = [0, 1]$:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha. \quad (52)$$

Мера $M(x)$ имеет *сингулярности* с показателем Липшица - Гёльдера α на фрактальных множествах \mathcal{S}_α с фрактальной размерностью $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$. Кривая $f(\alpha)$ для меры популяции, порожденной мультипликативным процессом с $p = 0,25$, показана на рис.7, б. В работе Менево и Сринивасана показано, что экспериментальные данные по полностью развитой турбулентности очень хорошо описываются только что представленным мультипликативным про-

цессом. Биномиальный мультипликативный процесс с $p = 0,7$ приводит к кривой $f(\alpha)$, которая с высокой точностью описывает наблюдаемый мультипликативный спектр поля диссипации (рис.8).

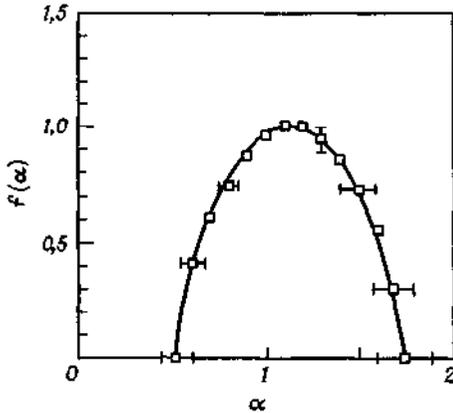


РИС.8. Мультифрактальный спектр для одномерных сечений, проведенных через диссипационное поле в полностью развитых турбулентных течениях (турбулентность за решеткой, след за круговым цилиндром, пограничный слой, атмосферная турбулентность). Квадратики соответствуют экспериментальным средним, сплошная кривая $f(\alpha)$ - биномиальному мультипликативному процессу с $p = 0,7$.

4.10. Кривая $f(\alpha)$

Кривая $f(\alpha)$ на рис.7,б имеет несколько характерных особенностей, которые мы обсудим в разд.4.13. Производная от $f(\alpha)$ имеет вид

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\ln \xi - \ln(1 - \xi)}{\ln p - \ln(1 - p)}. \quad (53)$$

Максимум функции $f(\alpha)$ равен $f(\alpha_0) = 1$. В точке максимума

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}, \\ f_{\max} &= f(\alpha_0) = 1, \\ \alpha_0 &= -\frac{\ln p + \ln(1 - p)}{2 \ln 2}. \end{aligned} \quad (54)$$

Справедливо следующее общее утверждение: максимальное значение фрактальной размерности подмножеств \mathcal{S}_α равно фрактальной размерности носителя меры. В рассматриваемом случае эта фрактальная

размерность равна 1, так как мера определена на всем единичном отрезке. Для мер, определенных на фракталах с фрактальной размерностью D , получаем $f_{\max}(\alpha) = D$. Здесь множество \mathcal{S}_{α_0} имеет фрактальную размерность 1. Это не означает, что множество \mathcal{S}_{α_0} покрывает отрезок, — \mathcal{S}_{α_0} содержит некоторую долю точек отрезка.

Максимум функции $f(\alpha)$ достигается в точке $\alpha_0 = 1,207\dots$ при $p = 0,25$. Функция $M(x)$ имеет производную, равную нулю, в точках, где $\alpha > 1$. Но $M(x)$ -сингулярная функция, так как точки, в которых $\alpha(\xi) \leq 1$, образуют всюду плотное множество.

Обсуждение свойств функции $M(x)$ — дело не простое, поскольку затрагивает такие вопросы, как принадлежность (или непринадлежность) предельных точек к последовательности точек, порожденных мультипликативным процессом. Мы вернемся к обсуждению свойств этой функции позже, а пока ограничимся утверждением о том, что $M(x)$ имеет производную, равную нулю почти всюду. Тем не менее, когда x возрастает от 0 до 1, функция $M(x)$ также возрастает от 0 до 1. График ее — та самая *чертова лестница*, о которой мы уже упоминали. Длина кривой от начала до конца в точке (1,1) равна 2. Термин «почти всюду» означает здесь «во всех точках, за исключением множества с мерой Лебега, равной нулю». Эти исключительные точки могут быть покрыты отрезками прямой сколь угодно малой суммарной длины. Нетрудно видеть, что двоичные дроби имеют нулевую (линейную) меру. Запишем все такие дроби по порядку: $1/2, 1/3, 3/4, 1/8, 3/8, \dots$ Покроем первую точку отрезком длиной δ^2 , следующую точку — отрезком длиной δ^3 , третью точку — отрезком длиной δ^4 и т. д. Бесконечная последовательность таких отрезков покрывает все двоичные дроби, а суммарная длина всех отрезков равна $l = \delta^2 + \delta^3 + \dots = \delta^2/(1 - \delta)$ и стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Существует еще одна характерная точка $\alpha_{\mathcal{S}}$ кривой $f(\alpha)$:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1, \quad \xi = p, \quad (55)$$

$$f(\alpha_S) = \alpha_S = S,$$

$$S = -\{p \ln p + (1 - p) \ln(1 - p)\} / \ln 2,$$

в которой прямая, проведенная через начало координат под углом 45° к положительному направлению оси α , касается кривой $f(\alpha)$. Фрактальная размерность множества \mathcal{S}_{α_S} таких точек равна S . В величине S нетрудно узнать (информационную) энтропию биномиального мультипликативного процесса. В мультипликативном процессе общего

вида, где отрезок подразделяется на b ячеек с весами p_0, p_1, \dots, p_{b-1} , нетрудно видеть, значение $f(\alpha_s)$ равно величине

$$S = - \sum_{\beta=0}^{b-1} P_{\beta} \log_b P_{\beta}, \quad (56)$$

где \log_b - логарифм по основанию b . В следующем разделе мы покажем, что почти вся мера $M(x)$ сосредоточена на множестве $\mathcal{S}_{\alpha s}$.

4.11. Концентрация меры

Мультипликативный процесс порождает популяцию, которая концентрирует подавляющую часть первоначально равномерно распределенной популяции на множестве-носителе. В n -м поколении мера на множестве $\mathcal{S}_n(\xi)$ определяется выражением

$$M(\mathcal{S}_n(\xi)) = N_n(\xi) \mu_{\xi} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp \left\{ -\frac{n}{2p(1-p)} (\xi - p)^2 \right\}. \quad (57)$$

Приближенное выражение в правой части получается из формул (33) и (44) при разложении экспоненциальной функции относительно максимального значения при $\xi = p$. Мера множества $\mathcal{S}_n(\xi)$ как функция от ξ имеет очень острый пик в окрестности $\xi = p$ и с увеличением n убывает, как $n^{-1/2}$. Однако конечная часть ϕ полной меры $M(x = 1)$ содержится в объединении множеств

$$\mathcal{S}_{\phi} = \bigcup_{(p-\sigma) \leq \xi \leq (p+\sigma)} \mathcal{S}_n(\xi), \quad (58)$$

где $\sigma \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В этом нетрудно убедиться, если заметить, что мера множества \mathcal{S}_{ϕ} определяется выражением

$$\begin{aligned} M(\mathcal{S}_{\phi}) &= \frac{n}{\sqrt{2n\pi p(1-p)}} 2 \int_p^{(p+\sigma)} d\xi \exp \left\{ -\frac{n(\xi - p)^2}{2p(1-p)} \right\} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} dt \exp \{ -t^2 \} \end{aligned} \quad (59)$$

(напомним, что $\xi = k/n$, поэтому $\sum_k \dots \rightarrow n \int d\xi \dots$), где верхний предел интегрирования τ вычисляется по формуле

$$\tau = \sigma \sqrt{\frac{n}{2p(1-p)}}. \quad (60)$$

Верхний предел τ определяется условием $M(\mathcal{S}_\phi) = \phi$, т.е. условием, согласно которому мера множества \mathcal{S}_ϕ составляет конечную (отличную от нуля) долю $0 < \phi < 1$ от всей популяции. Найдя $\tau = \tau(\phi)$, мы получаем

$$\sigma = \tau(\phi) \sqrt{\frac{2p(1-p)}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (61)$$

Это доказывает, что мера *сосредоточена* на множестве \mathcal{S}_ϕ . В пределе при $n \rightarrow \infty$ мы заключаем, что множество \mathcal{S}_ϕ по существу совпадает с множеством $\mathcal{S}(\xi = p)$ и имеет фрактальную размерность, определяемую энтропийной размерностью \mathcal{S} . Описанный выше процесс концентрации меры Мандельброт называет *свертыванием*. Подведем итоги. Мы установили, что доля *меры*, сколь угодно близкой к 100%, сосредоточена в множествах с таким значением $\xi \approx p$, при котором величина $N(\xi)\mu_\xi$ близка к своему максимуму. Эти множества имеют фрактальную размерность, определяемую энтропией мультипликативного процесса. Разумеется, аналогичные рассуждения приводят к заключению о том, что конечная доля точек отрезка содержится в множествах с $\xi \approx 1/2$, для которых величина $N(\xi)$ близка к своему максимуму. Эти множества имеют фрактальную размерность, определяемую фрактальной размерностью носителя, которая в рассматриваемом случае равна 1.

4.12. Последовательность показателей массы $\tau(q)$

Фрактальные структуры, наблюдаемые экспериментально, например береговые линии или контуры вязких пальцев, могут быть получены с помощью численного моделирования. И экспериментальные наблюдения, и результаты численного моделирования представимы в виде множеств точек \mathcal{S} , образующих кривые или фигуры. При анализе структур таких множеств наиболее широко используется метод *подсчета клеток*. При этом методе *E-мерное* пространство наблюдений разбивается на (гипер)кубы с ребром δ , после чего производится подсчет числа $N(\delta)$ кубов, содержащих *по крайней мере одну точку* множества \mathcal{S} . Ясно, что такой подсчет дает грубую оценку меры множества \mathcal{S} и число $N(\delta)$ не несет в себе никакой информации о *структуре* этого множества. Например, если береговая линия сильно изрезана и пересекает какую-то клетку n_i раз, то при подсчете эта клетка все равно дает вклад в общее число клеток, покрывающих множество \mathcal{S} , равный 1, что не вполне «честно». Существует ли

способ, позволяющий придавать клеткам с $n_i > 1$ больший вес, чем клеткам с $n_i = 1$?

Ответ на этот вопрос содержит две основные составляющие: *свертывание* меры $M(x)$ на множестве, о котором шла речь в разд. 4.5, и неравные масштабные множители, рассмотренные в разд.4.8. Грассбергер, Хентшель и Прокачча и Грассбергер и Прокачча воспользовались мерой, позволяющей учесть проблему свертывания. Тесно связанная с ней мера, позволяющая преодолеть также трудности, связанные с неравными масштабными множителями, предложена Холси и др. Обе меры с точностью до обозначений совпадают с вероятностными мерами, которые рассматривали Мандельброт и Фосс. Микин ввел близкое по смыслу понятие - набор показателей массы для поверхности.

Пусть множество \mathcal{S} , состоящее из N точек, имеет в i -й ячейке \mathcal{N}_i точек. Эти точки можно рассматривать как выборку, отражающую распределение меры на множестве. Воспользуемся «массой», или *вероятностью* $\mu_i = \mathcal{N}_i / \mathcal{N}$, соответствующей i -й клетке, и построим меру, которую можно записать в виде

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q \delta^d = N(q, \delta) \delta^d \rightarrow \begin{cases} 0, & d > \tau(q), \\ \infty, & d < \tau(q). \end{cases} \quad (62)$$

Эта мера обладает *показателем* массы $d = \tau(q)$, при котором она не обращается в нуль и в бесконечность, когда $\delta \rightarrow 0$. Показатель массы $\tau(q)$ для данного множества зависит от того, какой порядок момента q выбран. Мера характеризуется всей последовательностью показателей $\tau(q)$, определяющих, по какому степенному закону изменяются в зависимости от δ вероятности $\{\mu_i\}$. Из формулы (62) следует, что взвешенное число клеток $N(q, \delta)$ представимо в виде

$$N(q, \delta) = \sum_i \mu_i^q \sim \delta^{-\tau(q)}, \quad (63)$$

а показатель массы определяется выражением

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (64)$$

Прежде всего заметим, что, выбирая $q = 0$ (q -порядок момента), мы получаем $\mu_i^q = 1$. Следовательно, $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$ это просто число клеток, образующих покрытие множества, а $\tau(0) = D$ есть фрактальная размерность множества. Вероятности нормированы: $\sum_i \mu_i = 1$, и из формулы (64) следует, что $\tau(1) = 0$.

Выбор больших значений q , например $q = 10$ или 100 , в соотношении (63) способствует повышению вклада ячеек с относительно большими значениями μ_i , поскольку, если $q \gg 1$ и $\mu_i > \mu_j$, то $\mu_i^q \gg \mu_j^q$. Наоборот,

выбор $q < 1$ способствует повышению вклада ячеек с относительно малыми значениями меры μ_i на ячейке. Эти пределы удобнее всего рассматривать, вводя производную $d\tau(q)/dq$, определяемую с помощью предела

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i^q \ln \mu_i}{(\sum_i \mu_i^q) \ln \delta}. \quad (65)$$

Пусть μ_- - минимальное значение μ_i в сумме. Тогда

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_i \mu_i^q) \ln \mu_-}{(\sum_i \mu_i^q) \ln \delta},$$

где штрих у знака суммы указывает на то, что суммирование проводится только по ячейкам с $\mu_i = \mu_-$. Последнее выражение запишем в виде

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_-}{\ln \delta} = - \alpha_{\max}. \quad (66)$$

Здесь мы воспользовались определением (49) показателя Липшица-Гельдера α . Аналогичные рассуждения в пределе при $q \rightarrow +\infty$ приводят к заключению о том, что минимальное значение α определяется выражением

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \mu_+}{\ln \delta} = - \alpha_{\min}, \quad (67)$$

где μ_+ - наибольшее значение μ_i , которое соответствует наименьшему значению α . В следующем разделе мы покажем, что и в общем случае $\alpha = - d\tau/dq$.

При $q = 1$ получим такое выражение для $d\tau/dq$:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q=1} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(\delta)}{\ln \delta}; \quad (68)$$

оно имеет особый интерес: здесь $S(\delta)$ - (информационная) энтропия разбиения меры $\mathcal{M} = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}$ по ячейкам размера δ . Энтропию разбиения можно записать в виде

$$S(\delta) = - \sum_i \mu_i \ln \mu_i \sim - \alpha_1 \cdot \ln \delta. \quad (69)$$

Показатель

$$\alpha_1 = - (d\tau/dq)|_{q=1} = f_{\varphi}$$

есть также фрактальная размерность множества, на котором сосредоточена мера; он задает степенной закон, по которому изменяются при изменении размера δ ячейки энтропия (разбиения) меры. Заметим, что энтропия разбиения $S(\delta)$ при разрешении δ может быть выражена через энтропию S меры по формуле

$S(\delta) = - S \ln \delta$ (см. также выражение (58)). Типичное поведение последовательности показателей массы $\tau(q)$ можно проиллюстрировать примером меры на отрезке, порожденной мультипликативным биномиальным процессом. Можно показать, что для этого процесса

$$N(d, \delta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{qk} (1-p)^{q(n-k)} = (p^q + (1-p)^q)^n. \quad (70)$$

Число поколений, как и прежде, определяется выражением $n = -\ln \delta / \ln 2$, поэтому, используя соотношение (64), получаем

$$\tau(q) = \frac{\ln(p^q + (1-p)^q)}{\ln 2}. \quad (71)$$

Получающаяся последовательность показателей массы показана на рис.9.

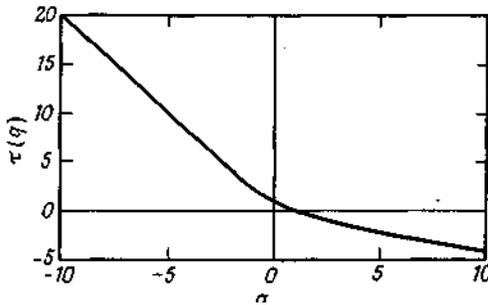


РИС.9. Последовательность показателей массы $x(q)$ как функция порядка q момента для меры $M_d(q, \delta)$ биномиального мультипликативного процесса с $p = 0,25$.

При $q = 0$ из формулы (71) находим, что $\tau(0) = 1$. Это размерность носителя, т.е. единичного отрезка.

4.13. Соотношение между $\tau(q)$ и $f(\alpha)$

Последовательность показателей массы связана с кривой $f(\alpha)$ общей зависимостью, которая может оказаться полезной в приложениях. Носителем мультифрактальной меры является множество \mathcal{S} - объединение фрактальных подмножеств \mathcal{S}_α с индексом α , выбранным из континуума допустимых значений:

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{S}_{\alpha}. \quad (72)$$

Какие фрактальные размерности описывают меру? Так как полное множество \mathcal{S} фрактально с фрактальной размерностью D , подмножества имеют фрактальную размерность $f(\alpha) \leq D$. Для фрактальных подмножеств с фрактальной размерностью $f(\alpha)$ число $N(\alpha, \delta)$ отрезков длиной δ , необходимых для того, чтобы покрыть множества \mathcal{S}_α с индексом α в интервале от α до $\alpha + d\alpha$, равно

$$N(\alpha, \delta) = \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)}. \quad (73)$$

Здесь $\rho(\alpha)d\alpha$ - число множеств от \mathcal{S}_α до $\mathcal{S}_{\alpha+d\alpha}$. Для этих множеств мера μ_α в ячейке величины δ степенным образом зависит от δ (см. формулу (25)), что позволяет нам записать соотношение $\mu_\alpha = \delta^\alpha$, и поэтому меру M для множества \mathcal{S} ; задаваемую соотношением (62), можно представить в виде

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)} \delta^{q\alpha} \delta^d = \int \rho(\alpha) d\alpha \delta^{q\alpha - f(\alpha) + d}. \quad (74)$$

Интеграл в правой части мажорируется интегралом, в котором подынтегральное выражение заменено его максимальным значением, т. е. таким, для которого

$$\left. \frac{d}{d\alpha} \left\{ q\alpha - f(\alpha) \right\} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = 0. \quad (75)$$

Следовательно, интеграл в выражении (74) асимптотически определяется формулой

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^{q\alpha(q) - f(\alpha(q)) + d}. \quad (76)$$

Величина M_d остается конечной в пределе при $\delta \rightarrow 0$, если параметр d равен показателю массы $\tau(q)$, определяемому как

$$\tau(q) = f(\alpha(q)) - q\alpha(q), \quad (77)$$

где $\alpha(q)$ - решение уравнения (75). Таким образом, показатель массы может быть выражен через показатель Липшица-Гельдера $\alpha(q)$ для массы и фрактальную размерность $f(\alpha(q))$ множества-носителя этого показателя.

В то же время, если показатели массы $\tau(q)$ известны, то мы можем определить показатель Липшица-Гельдера и f , используя формулы (75) и (77), и тогда имеем

$$\alpha(q) = -\frac{d}{dq}\tau(q), \tag{78}$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) + \tau(q).$$

Эти два уравнения задают параметрическое представление кривой $f(\alpha)$, т. е. фрактальной размерности $f(\alpha)$ носителя сингулярностей меры с показателем Липшица-Гельдера α . Кривая $f(\alpha)$ характеризует меры и эквивалентна последовательности показателей массы $\tau(q)$. Пара уравнений (78) задает преобразование Лежандра от независимых переменных τ и q к независимым переменным f и α . Для простого примера биномиального мультипликативного процесса с показателем массы $\tau(q)$, определяемым соотношением (71) (см. рис. 9), два уравнения (78) позволяют восстановить кривую $f(\alpha)$, показанную на рис. 7, б.

Максимум кривой $f(\alpha)$ достигается при $df(\alpha)/d\alpha = 0$. Из уравнения (75) следует, что в точке максимума $q = 0$, а из уравнения (78)-что $f_{\text{макс}} = D$, так как нами было доказано равенство $\tau(0) = D$, где D - фрактальная размерность носителя меры. Различные соотношения между кривой $f(\alpha)$ и последовательностью показателей массы сведены в табл. 1.

Таблица 1

q	$\tau(q)$	$\alpha = -d\tau(q)/dq$	$f = q\alpha + \tau(q)$
$q \rightarrow -\infty$	$\sim -q\alpha_{\text{макс}}$	$\rightarrow \alpha_{\text{макс}} = -\ln \mu_- / \ln \delta$	$\rightarrow 0$
$q = 0$	D	α_0	$f_{\text{макс}} = D$
$q = 1$	0	$\alpha_1 = -S(\delta)/\ln \delta$	$f_s = \alpha_1 = S$
$q \rightarrow +\infty$	$\sim -q\alpha_{\text{мин}}$	$\rightarrow \alpha_{\text{мин}} = -\ln \mu_+ / \ln \delta$	$\rightarrow 0$

Некоторые значения и пределы последовательности показателей массы $\tau(q)$ и кривой $f(\alpha)$ для мультифрактальной меры $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$, носителем которой является множество с фрактальной размерностью D . Здесь q -порядок момента меры \mathcal{M} (см. соотношение (62)). Наибольшая и наименьшая вероятности, соответствующие ячейкам величины δ , равны соответственно μ_- и μ_+ . $S(\delta)$ -энтропия разбиения меры \mathcal{M} по ячейкам величины δ . Мера имеет энтропию $S = -\lim_{\delta \rightarrow 0} S(\delta)/\ln \delta = f_s$, равную фрактальной размерности множества, на котором сосредоточена мера.

4.14. Свертывание с несколькими масштабами длины

Рассмотрим обобщение биномиальной мультипликативной меры на случай, когда ее носителем является канторовское множество, изображенное на рис.10.

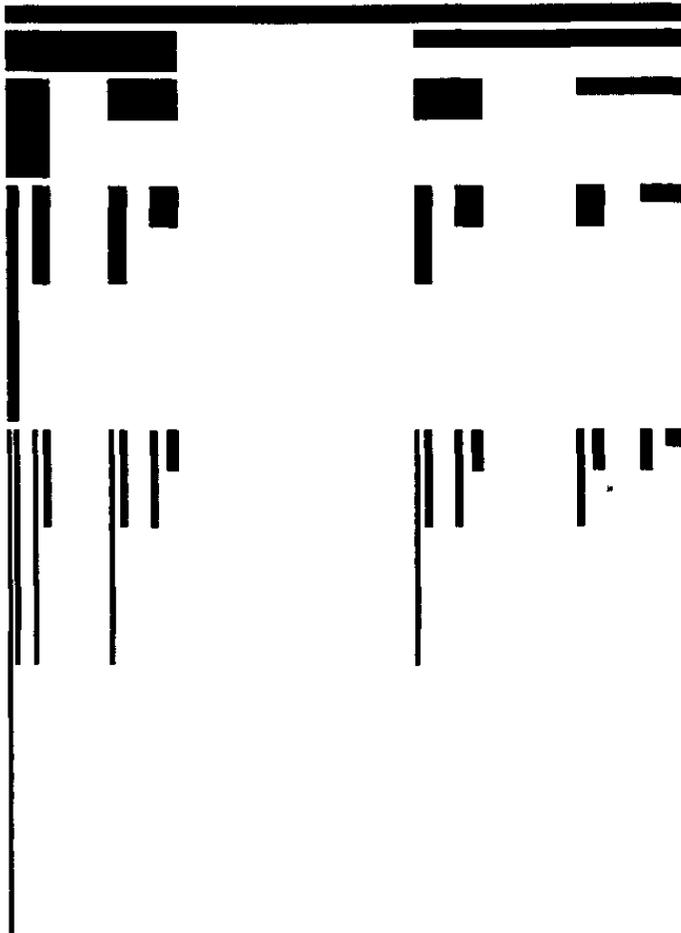


РИС.10. Двухмасштабная фрактальная мера на канторовском стержне с $l_0 = 0,25$ и массой $p_0 = 0,6$ и $l_1 = 0,4$ с массой $p_1 = 0,4$. Высота стержней в n -м поколении пропорциональна плотности $\rho_i = \mu_i/l_i$. Фрактальная размерность канторовской пыли, служащей носителем меры, равна $D = 0,6110$.

В каждом поколении каждый из уцелевших отрезков подразделяется на две части: меньшую с относительной длиной $l_0 = 0,25$ и большую с относительной длиной $l_1 = 0,4$, а средняя часть вырезается. Меньшую часть мы сопоставляем с долей $p_0 = 0,6$ меры, сосредоточенной на предшествующем («материнском») отрезке, а большую часть-только с долей $p_1 = 0,4$ той же меры.

Если мы попытаемся применить к канторовскому стержню (рис.10) определение (62), то убедимся в том, что это определение неадекватно, так как все ячейки, используемые для покрытия множества, имеют *одну и ту же* величину δ . Холси и др. воспользовались мерой, которая является комбинацией двух обобщений (38) и (62). Пусть, как в определении (38), фрактальное множество \mathcal{S} может быть разбито на некоторое число N непересекающихся частей $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_{N-1}$, покрывающих все множество. Обозначим через l_i евклидову длину i -й части. Тогда подмножество \mathcal{S}_i уместается в (гипер)кубе с ребром l_i , но $l_i < \delta$ при всех i , и мера определяется соотношением

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=0}^{N-1} \mu_i l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, d > \tau(q), \\ \infty, d < \tau(q). \end{cases} \quad (49)$$

Эта мера также имеет показатель массы $d = \tau(q)$, при котором мера при $\delta \rightarrow 0$ не обращается ни в нуль, ни в бесконечность.

Проиллюстрируем применение меры на примере двухмасштабного ($l_0 = 0,25; l_1 = 0,4$) канторовского множества с мерой, порожденной мультипликативным процессом ($p_0 = 0,6; p_1 = 0,4$) (см. рис.10). Так как в n -м поколении канторовского стержня на рис. 10 мы имеем $\binom{n}{k}$ отрезков длиной $l_0^k l_1^{n-k}$ и вес

$$\mu_k = p_0^k p_1^{n-k},$$

мера легко вычисляется и определяется выражением

$$M_d(q, \delta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p_0^k l_0^k)^k (p_1^k l_1^k)^{n-k} = (p_0^k l_0^k + p_1^k l_1^k)^n. \quad (80)$$

Эта мера остается конечной с $\delta = l_1$ при $n \rightarrow \infty$ в том и только в том случае, если мы выберем $d = \tau(q)$, где $\tau(q)$ -решение уравнения

$$p_0^q l_0^{\tau(q)} + p_1^q l_1^{\tau(q)} = 1. \quad (81)$$

Уравнение (81) было решено относительно $\tau(q)$ численно. Но так как показатель массы $\tau(q)$ известен, кривую $f(q)$, изображенную на рис.11, мы находим, как прежде (с помощью второго из соотношений (78)).

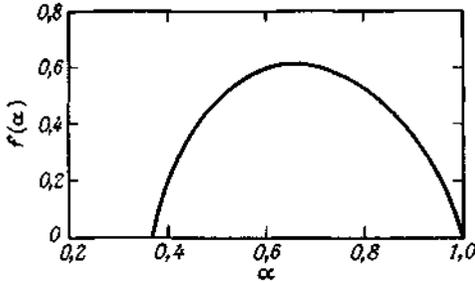


РИС. 11. Кривая $f(\alpha)$ для двух-масштабной фрактальной меры на канторовском стержне \mathcal{S} с $l_0 = 1/4$, $l_1 = 2/5$ и массами $p_0 = 3/5$, $p_1 = 2/5$. Кривая описывает фрактальную размерность f подмножеств \mathcal{S}_α с показателем Липшица – Гёльдера α как функцию α .

При $q = 0$ показатель массы $\tau(0)$ равен $D = 0,6110$; то же значение мы получили для фрактальной размерности множества, пользуясь определением (38) меры множества. В пределе при $q \rightarrow \infty$ мы получаем $p_0^q \gg p_1^q$. Следовательно, в левой части уравнения (81) главным является первый член, и $\tau(q)$ определяется просто уравнением $p_0^q l_0^{\tau(q)} = 1$.

Решая его, получаем

$$\tau(q)|_{q \rightarrow +\infty} = -q\alpha_{\text{мин}}, \text{ где } \alpha_{\text{мин}} = \frac{\ln p_0}{\ln l_0} = 0,3685. \quad (82)$$

Аналогично при $q \rightarrow -\infty$ главным становится член, содержащий p_1 , и

$$\tau(q)|_{q \rightarrow -\infty} = -q\alpha_{\text{макс}}, \text{ где } \alpha_{\text{макс}} = \frac{\ln p_1}{\ln l_1} = 1. \quad (83)$$

Холси и др. проанализировали меру, задаваемую соотношением (79), связав ее с размерностью D_q , введенной Грассбергером, Хентшелем и Прокаччей и Грассбергером и Прокаччей и определяемой соотношением

$$D_q = \tau(q)/(1 - q), \quad (84)$$

где численный множитель $(1 - q)$ модифицирует показатель массы с таким расчетом, чтобы для множеств постоянной плотности в E -мерном пространстве выполнялось равенство $D_q = E$. Спектр фрактальных размерностей D_q задается предельным соотношением

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(q, \delta)}{\ln \delta}. \quad (85)$$

Порядком момента q может быть любое число в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, и функция D_q есть *спектр фрактальных размерностей для фрактальной меры на множестве \mathcal{S}* . Если мы выберем значение $q = 0$ для порядка момента q , то получим $\mu_i^{q=0} = 1$. Следовательно, $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$ есть просто число клеток, необходимое для того, чтобы покрыть множество, и величина $D_{q=0} = D$ равна фрактальной размерности множества. В пределе при $q \rightarrow \infty$ мы получаем, что $D_\infty = \alpha_{\text{мин}}$, в то время как $D_{-\infty} = \alpha_{\text{макс}}$.

Из-за сингулярности $1/(1 - q)$, входящей в определение размерности D_q , при вычислении $N(q, \delta)$ в пределе $q \rightarrow 1$ необходимо соблюдать некоторую осторожность. Замечая, что $\mu_i^q \doteq \mu_i \mu_i^{q-1} = \mu_i \exp\{(q - 1) \ln \mu_i\}$ и используя то, что $\exp\{(q - 1) \ln \mu_i\} \rightarrow 1 + (q - 1) \ln \mu_i$ при $q \rightarrow 1$, получаем

$$\ln\left(\sum_i \mu_i^q\right) \rightarrow \ln\left\{1 + (q - 1) \sum_i \mu_i \ln \mu_i\right\} \approx (q - 1) \sum_i \mu_i \ln \mu_i.$$

Мы воспользовались здесь тем, что $\sum_i \mu_i = 1$. Таким образом, показано, что $D_{q=1}$ определяется выражением

$$D_1 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i \ln \mu_i}{\ln \delta}. \quad (86)$$

Эта размерность описывает скейлинговое поведение *энтропии* разбиения меры на множестве \mathcal{S} . Энтропия $S(\delta)$, вводимая в статистической физике для вероятностей $\{\mu_i\}$, распределенных по ячейкам величины δ , определяется соотношением

$$S = - \sum_i \mu_i \ln \mu_i \sim - D_1 \ln \delta. \quad (87)$$

Исходя из соотношений, выведенных в предыдущем разделе, мы заключаем, что $\alpha = D$ при $q = 1$.

Чтобы получить какое-то представление о спектре размерностей, рассмотрим обычный евклидов случай. Для равномерно распределенной меры в E -мерном пространстве с постоянной плотностью точек разделим пространство на $N = \delta^{-E}$ ячеек объемом δ^E . Тогда $\mu_i = \delta^{qE}$ и

$$\sum_{i=1}^N \mu_i^q = \sum_{i=1}^N \delta^{qE} = \delta^{(q-1)E}.$$

Подставляя это соотношение в определение (85), заключаем, что спектр фрактальных размерностей D_q для равномерно распределенной меры в пространстве равна евклидовой размерности:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \delta^{(q-1)E}}{\ln \delta} = E. \quad (88)$$

Таким образом, мы утверждаем, что спектр фрактальных размерностей сводится к одному значению E для равномерно распределенной меры и не зависит от порядка момента q , т.е. не имеет структуры. Этот результат объясняет также использование множителя $1/(1-q)$ в определении величин D_q . Попутно заметим, что энтропия определяется выражением $S = -\sum_i \mu_i \ln \mu_i = \ln \mathcal{N} = -E \ln \delta$, поэтому энтропийная размерность в этом случае действительно равна E .

На рис. 12 показан спектр фрактальных размерностей D_q как функция порядка момента q для канторовского стержня, изображенного на рис.10.

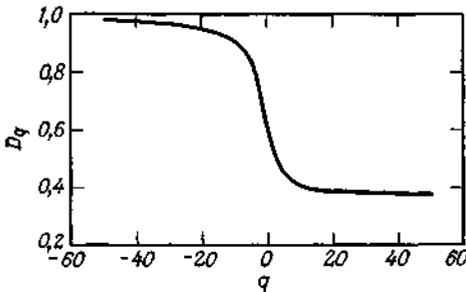


РИС. 12. Спектр фрактальных размерностей D_q как функция порядка q момента для триадной канторовской пыли с $l_0 = 1/4$, $l_1 = 2/5$ и массами $p_0 = 3/5$, $p_1 = 2/5$. $D_\infty = \ln p_0 / \ln l_0 = 0,3685$ и $D_{-\infty} = \ln p_1 / \ln l_1 = 1$.

4.15. Мультифрактальная конвекция Рэля-Бенара

Примером приложения идей к гидродинамической неустойчивости при тепловой конвекции может служить работа Энсена и др. Эти авторы исследовали тепловую конвекцию ртути в небольшой ячейке площадью $0,7 \times 1,4 \text{ см}^2$ и высотой $0,7 \text{ см}$. Температура дна поддерживалась на уровне $T_{\text{дно}} = T_{\text{верх}} + \Delta T$, т.е. выше температуры верхней поверхности. При этом в ячейке возникала конвекция с образованием двух валов с горизонтальными осями.

При увеличении разности температур ΔT выше некоторого критического значения конвективные валы теряли устойчивость и начинали совершать поперечные колебания с частотой $\omega_0 \approx 230 \text{ мГц}$. Энсен с соавторами возмущали систему, помещая ячейку в горизонтальное магнитное поле и пропуская переменный электрический ток между

низом и верхом в центре ячейки. Частота переменного тока составляла $\omega_{\text{пер}} = \Omega\omega_0$. Отношение частот Ω есть число вращений и выбрано так, чтобы оно было иррациональным числом-золотым сечением $\Omega = \Omega_{\text{ЗС}} = (\sqrt{5} - 1)/2$. Обоснование именно такого выбора дает теория динамических систем.

В результате возмущения температура, измеряемая термометром вблизи дна ячейки, начинает нерегулярно флуктуировать во времени. Развертка таких флуктуаций представляет собой временной ряд температур x_t , где t -время, измеряемое в интервалах между наблюдениями. На рис. 13 показан график зависимости x_{t+1} от x_t , построенный по 2500 наблюдениям x_t .

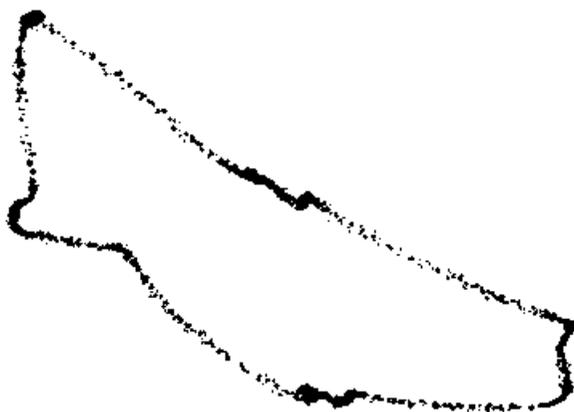


РИС.13. Экспериментальный аттрактор для тепловой конвекции. Временной ряд температур x_t использован для определения температуры в момент времени $t + 1$, т. е. для построения графика зависимости x_{t+1} от x_t . Построенная кривая соответствует проекции аттрактора движения в фазовом пространстве.

Расположение экспериментальных точек отражает существование странного аттрактора в фазовом пространстве для движения этой системы. Точки на аттракторе, образующие временной ряд, сосредоточены в различных областях фазового пространства с неодинаковой интенсивностью. Некоторые скопления экспериментально наблюдаемых точек на рис. 13 обусловлены тем, что являются проекциями истинного аттрактора в фазовом пространстве. Но если мы воспользуемся для представления временного ряда трехмерным про-

странством с координатами (x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) , то такого рода эффект

проекция исчезает и в действительности анализ экспериментальных данных проводится в пространстве.

Енсен с соавторами анализировали экспериментальные данные следующим образом. Выберем на траектории какую-нибудь точку x_i и, отправляясь от нее, подсчитаем число m_i шагов вдоль временного ряда, которые необходимо совершить прежде, чем текущая точка не окажется от исходной на расстоянии, не превышающем δ . Вероятность p_i попасть в гиперкуб с ребром δ по оценке есть величина $p_i \sim 1/m_i$.

Вычислим по формуле (79) меру $M_d(q, \delta)$. Не следует, однако, забывать о том, что сумма в формуле (79) берется по клеткам, образующим покрытие множества точек, а не по точкам множества. Это легко исправить, так как число точек в i -й ячейке

$$\sim \sum_{\epsilon^i} 1/p_i.$$

Используя экспериментальные точки, получаем

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^q \sum_i (m_i(\delta))^{1-q}. \quad (89)$$

Мера в соотношении (89) вычислена для ячеек величины δ , которая изменяется на два порядка, и критическая размерность определена по графику соотношения

$$\sum_i m_i(\delta)^{(1-q)} \sim \delta^{-\alpha(q)}, \quad (90)$$

построенному в дважды логарифмических координатах.

Вычислив критическую размерность, находим $\alpha(q)$ и $f(q)$ по формулам (78). Точки, полученные в результате такой обработки экспериментальных данных, представлены на рис.14.

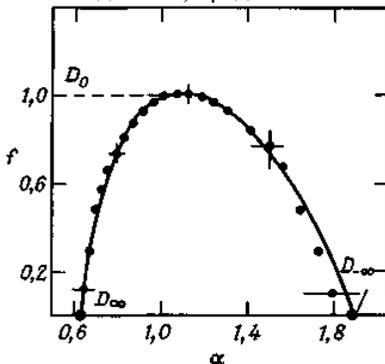


РИС.14. Кривая $f(\alpha)$ для тепловой конвекции. Точки заимствованы из наблюдаемого временного ряда. Показана кривая $f(\alpha)$ для критического отображения окружности на себя. Следует подчеркнуть *отсутствие* свободных параметров и замечательное согласие теории с данными наблюдений.

Интервалы ошибок для точек авторы оценивали, варьируя диапазон изменения δ , в пределах которого степенной закон (90) давал хорошее приближение к наблюдаемым значениям. Общий вид кривой $f(\alpha)$, построенной по экспериментальным точкам, аналогичен кривой для двухмасштабного канторов-ского стержня (рис. 11). Заметим, что такой анализ использует больше экспериментальной информации, чем содержится на рис.13, так как p , явно зависит от последовательности точек на рис. 13 во времени.

Важно то, что кривая на рис14 построена *не* путем подгонки под экспериментальные точки, а вычислена независимо для *отображения окружности на себя* с числом вращения, равным золотому сечению! **Отображение окружности на себя - это итерационное отображение, переводящее одну точку в какую-то другую точку окружности.** Обозначим точки на окружности углами θ , образуемыми радиусами, проведенными в точки, с некоторым выделенным направлением. Начав с произвольной точки θ_0 , образуем последовательность точек с помощью повторного применения отображения:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi\theta_n. \quad (91)$$

Это отображение исследовано весьма подробно. Оно имеет странный аттрактор для критического цикла, возникающего при критическом значении $K = 1$ с числом вращений $\Omega = \Omega_{ЗС}$. Кривая на рис. 14 есть кривая $f(\alpha)$ для этого отображения окружности на себя.

Данные, представленные на рис.14, показывают, что тепловая конвекция, возмущаемая с числом вращений, равным золотому сечению, и критическое отображение окружности на себя обладают одинаковой фрактальной структурой и поэтому принадлежат к *одному и тому же классу универсальности*. Кроме того, фрактальная размерность множества есть максимальное значение, найденное для f , которое дает $f = D_o = 1$. Этого можно было ожидать, так как носителем меры в рассматриваемом случае является окружность, которая одномерна.

В заключение заметим, что определение надлежащих вероятностей p_i - задача далеко не тривиальная. Действительно, нахождение правильной процедуры определения формулы (62) для меры экспериментального множества эквивалентно правильному выбору *параметра порядка* для фазового перехода. После того как параметр порядка установлен, становится применим весь аппарат теории фазовых переходов Ландау, и критическое поведение можно вычислять с помощью методов ренормгруппы. Но для правильного выбора параметра порядка необходимо глубокое понимание исследуемого явления.

4.16. ОДА и гармонические меры

Рассмотрим кластер, образовавшийся в результате процесса ОДА. Как лучше всего описать поверхность или периметр таких фрактальных структур? Один из методов количественного описания таких поверхностей связан с *гармонической мерой*. Эта (вероятностная) мера определяется (относительно данного кластера) как вероятность $p(r)dr$ того, что совершающая случайное блуждание частица, приближаясь к кластеру из бесконечности, впервые достигнет границы кластера в точке, расположенной между точками \mathbf{r} и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$.

На практике гармоническую меру оценивают с помощью численного моделирования. Сначала кластер, возникающий в результате ОДА, выращивают с помощью алгоритма Уиттена - Сандера, когда же число частиц в кластере станет равным N , а диаметр кластера достигнет L , рост *останавливают*. Кластер, получающийся в результате ОДА и представленный на рис. 6.12, *a*, типичен.

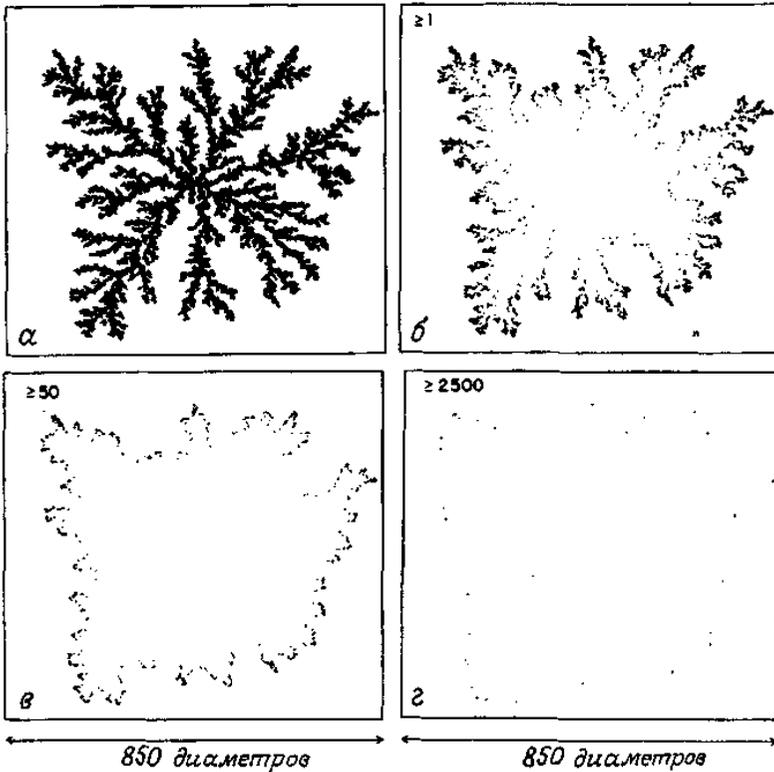


РИС.15. Результат моделирования, в котором 10^6 частиц, совершающих случайные блуждания, были использованы для зондирования двумерного кластера, полученного с помощью внерешеточной ОДА. После того как частица соприкасается с кластером, ее удаляют, и новая частица начинает случайное блуждание из случайно выбранной точки на окружности, ограничивающей кластер извне. а) кластер из 50000 частиц, полученный с помощью ОДА; б-г) места, в которых находятся частицы, входившие в соприкосновение со случайно блуждающими частицами не менее 1 раза, ≥ 50 раз и ≥ 2500 раз.

В нем нет петель, а число узлов N_p на периметре, т. е. число возможных точек роста, пропорционально числу N частиц в кластере. Оба числа изменяются по степенному закону в зависимости от радиуса гирации R_g или диаметра L кластера:

$$N_p \sim N \sim L^D. \quad (92)$$

Фрактальная размерность кластеров ОДА в двумерном случае есть величина $D = 1,71$. Возможные точки роста на периметре кластера ОДА перенумерованы индексом $k = 1, \dots, N_P$.

Для данного кластера ОДА гармоническая мера оценивается с помощью дополнительного численного моделирования, в ходе которого поверхность кластера ОДА зондируется большим числом \mathcal{N} случайно блуждающих частиц. После того как частица входит в соприкосновение с кластером, ее удаляют, и из случайным образом выбранной точки на окружности, описанной вокруг кластера, выпускают новую частицу, также совершающую случайные блуждания. Вероятность p_k того, что случайно блуждающая частица соприкоснется с k -м узлом на периметре, по оценке равна $p_k = \mathcal{N}_k / \mathcal{N}$, где \mathcal{N}_k - число контактов случайно блуждающих частиц с k -м узлом периметра. Набор вероятностей

$$\mathcal{P} = \{p_k\}_{k=1}^{N_P} \quad (93)$$

содержит приращения гармонической меры $M_{\mathcal{P}}$ при разрешении δ , соответствующем диаметру диффундирующих частиц.

Спектр фрактальных размерностей для гармонической меры вычисляется, как в разд. 4.13. Необходима, однако, небольшая модификация, связанная с тем, что теперь мы используем частицы фиксированного диаметра δ и исследуем рост диаметра L кластера. Соотношение (63) принимает вид

$$N(q, L) = \sum_k p_k^q \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^{-\tau(q)} \sim L^{\tau(q)}. \quad (94)$$

Макаров показал, что информационная размерность $f(q=1)$ равна единице для гармонической меры на границе *любой* связной области в двух измерениях. При других значениях q для определения информационной размерности необходимо проводить численное моделирование. Вершины выступов имеют наибольшие вероятности и дают наибольшие вклады в сумму, стоящую в правой части соотношения (94), при $q > 1$. Точные оценки размерностей D_q могут быть получены в этом же диапазоне значений. Но при $q \ll 1$ наибольшие вклады в сумму дают наименьшие вероятности, а оценить их точно очень трудно, так как для случайно блуждающей частицы вероятность проникнуть в самую глубь «фиорда» практически равна нулю. После того как в результате численного моделирования получен показатель массы $\tau(q)$, открывается возможность найти из двух уравнений (6.48) показатель Липшица - Гёльдера α и фрактальную размерность $f(\alpha)$ подмножеств S_α , на которых гармоническая мера имеет сингулярности с показателем α . Амитрано и др. воспользовались электростатическим вариантом

задачи об ОДА и решили получающиеся уравнения численно. Полученная ими кривая $f(\alpha)$ представлена на рис.16, а.

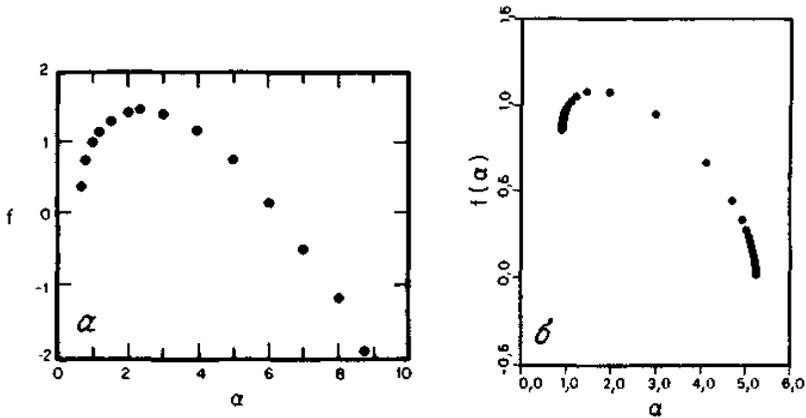


РИС.16. *а* -кривая $f(\alpha)$ для гармонической меры на кластерах, полученных с помощью ОДА. Наибольший из оцениваемых кластеров содержал 150 частиц; *б* -кривая $f(\alpha)$ для гармонической меры, вычисленной для структуры с вязкими пальцами, которая наблюдалась в ячейке Хеле-Шоу.

Заметим, что кривая $f(\alpha)$ имеет фрактальную размерность подмножества узлов, образующих носитель гармонической меры; поэтому можно ожидать, что $f(\alpha) > 0$. Отрицательные значения $f(\alpha)$ на рис. 16 не имеют физического смысла и обусловлены усреднением по большому числу результатов вычислений вероятностей p_k .

Гармоническая мера дает полезную характеристику сложной поверхности фрактальных кластеров. Можно было бы ожидать, что максимум кривой $f(\alpha)$ достигается при $q = 0$. Но $p_k^0 = 1$, и $N(q = 0, L)$ есть просто число узлов на периметре N_p , в силу чего $f_{\max} = D = 1,71$.

Численные эксперименты, выполненные Амитрано и др, дают $f_{\max} \approx 1,5$. Столь низкое значение f можно объяснить тем, что в своих экспериментах Амитрано и др. учитывали только очень малые кластеры, содержащие ≤ 150 частиц. Максимальное значение f , оцененное с помощью анализа гармонической меры для структуры вязких пальцев (рис.16,б), оказывается еще меньше.

4.17. Фрактальные полугруппы

4.17.1. Начальные определения

Цель этого раздела заключается в том, чтобы познакомить читателя с некоторыми результатами и техническими средствами теории фрактальных полугрупп. Мы не ставили перед собой задачи дать детальный или даже подробный обзор состояния этой теории по современной литературе.

Мы включаем в изложение, возможно в несколько укороченном варианте, те доказательства, технический аппарат которых представляет практический интерес.

Многие теоремы, которые относятся к фрактальным полугруппам, основываются на **свойствах компактности, локальной компактности или дискретности**.

Отметим, что всякая алгебраическая полугруппа оказывается фрактальной, если ввести на ней фрактальные элементы (любое множество открыто). В этой фрактальной геометрии все функции дискретно-непрерывны. В частности, конечная полугруппа будет компактной фрактальной полугруппой.

В дальнейшем изложении мы будем применять обозначение A^* , $A \setminus B$ и \square для замыкания множества, разности двух множеств и пустого множества соответственно. Элемент x и точечное множество $\{x\}$ мы не будем различать. Терминам фрактальной теории отдается преимущество перед терминами алгебры там, где из контекста не возникает недоразумений. Все рассматриваемые в этом разделе полугруппы будут фрактальными. Многие ранее полученные результаты для конечных полугрупп распространяются на фрактальные полугруппы.

Когда мы говорим, что множество *замкнуто*, это значит, что оно замкнуто в фрактальном пространстве и это не означает, что оно замкнуто относительно полугрупповой операции (т.е. есть подполугруппой).

Определение. *Фрактальной полугруппой* называется непустое, хаусдорфово фрактальное пространство S с заданным на нем непрерывным ассоциативным законом умножения

$$S \times S \rightarrow S,$$

который обычно не обозначается никаким символом и записывается просто с помощью последовательного размещения элементов. S называется *фрактальным пространством полугруппы*, и если из

контекста не следует двусмысленности, связанной с законом умножения, мы говорим, что S является фрактальной полугруппой.

Для подмножеств $A, B \subset S$ AB обозначает множество $\{ab \mid a \in A, b \in B\}$ и A^2 обозначает множество $\{aa' \mid a, a' \in A\}$. Два факта будут очень важны для нас в дальнейшем. Первый из них заключается в том, что произведение компактных пространств компактно, а второй — в том, что образ при непрерывном отображении компактного пространства тоже будет компактным. Так как A и B — компактные подмножества фрактальной полугруппы S , то AB — также компактное подмножество, и, в частности, если множество A компактно, то для любого элемента $x \in S$ xA и Ax тоже компактны.

В теории фракталов будем называть *гомеоморфизмом* взаимно однозначное сюръективное непрерывное отображение, обратное к которому также непрерывно. Для фрактальных полугрупп *гомеоморфизмом* будем называть отображение, что является гомеоморфизмом пространств и изоморфизмом соответствующих алгебраических полугрупп.

Минимальный идеал фрактальной полугруппы S , как правило, будем обозначать символом $K(S)$. Для компактной фрактальной полугруппы S $K(S)$ существует и его построение полностью известно. На языке алгебраических полугрупп $K(S)$ есть полностью простым. В частности, $K(S)$ компактен и представляет собой дизъюнктивное объединение семейства компактных групп (см. теорему 8).

Множество всех идемпотентов фрактальной полугруппы S , как правило, обозначается символом $E(S)$. *Фрактальной подгруппой* фрактальной полугруппы S называется подмножество G в S , которое является группой (в алгебраическом смысле) с операцией, унаследованной от фрактальной полугруппы S . Закон умножения в фрактальной подгруппе G , очевидно, будет непрерывным, и если G локально компактна, то операция взятия обратного элемента также будет непрерывной, поэтому G окажется фрактальной группой. Для каждого идемпотента $e \in E(S)$ существует максимальная фрактальная группа в S , единицей которой является элемент e (см. лемму 1).

Франгом называется компактная связная фрактальная полугруппа, *кланом* называется компактная связная фрактальная полугруппа (франг) с единицей. На рис. 17 показанные некоторые простые примеры фрактальных полугрупп с обычным для каждого примера законом умножения: действительный отрезок $[0, 1]$, единичный круг D в комплексной плоскости и для фиксированного $n \geq 1$ выпуклое подмножество в D , содержащее корни n -й степени из единицы $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ (все это изображено для случая $n = 3$).

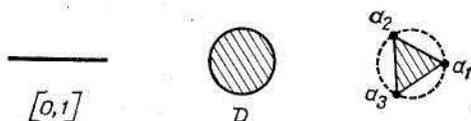


Рис.17.

Заметим, что каждая из этих фрактальных полурупп действительно представляет собой клан.

4.17.2. Дуги и фрактальные полуруппы

Нитью называется фрактальная полуруппа, пространство которой является *дугой*, т.е. хаусдорфовым множеством мощности континуум, каждая точка которого разрезает само множество, а две точки, которые не разрезают множество, концевые. (Замкнутый действительный интервал $[a, b]$ с $a < b$ представляет собой дугу с концевыми точками a и b .) *Стандартной нитью* или *I фрактальной полу группой* называется нить, одна концевая точка которой является нулем (т.е. нулевым элементом фрактальной полу группы), а другая — единицей.

Строение нитей интересно само по себе, а также потому, что многие из известных нитей (особенно это относится к *I* фрактальным полу группам) лежат в больших фрактальных полу группах. Доказано, что *I* фрактальная полу группа, которая не имеет внутренних (не концевых) идемпотентов, должна быть гомеоморфна действительному интервалу $[0, 1]$. (Однако в общем случае *I* фрактальная полу группа не обязательно должна быть метрической; она может быть «слишком длинной».) Получены дальнейшие результаты в направлении характеристики *I* фрактальных полу групп (см. теорему 5). Получены более общие результаты о нитях, которые полностью описывают построение нитей с идемпотентными концами, охарактеризованы метризуемые нити с нулем и единицей. Одним из наиболее важных результатов относительно *I* фрактальных полу групп является то, что все они абелевы. Мы опишем их строение, но сперва необходимо дать некоторые определения.

Определение 1. 1) *Единичной нитью* называется фрактальная полу группа, изоморфная фрактальной полу группе $[0, 1]$ с обычным законом умножения.

2) *Ниль-нитью* называется фрактальная полу группа, которая изоморфна фрактальной полу группе $[1/2, 1]$ с законом умножения, определенным соотношением $x \cdot y = \max \{1/2, \text{обычное произведение элементов } x \text{ и } y\}$ [см. пример 2 (1)].

3) *Мин-нитью* называется дуга, для которой задано упорядочение разделяющих точек, а закон умножения определяется соотношением $xy = \min\{x, y\}$. (На дуге A упорядочение разделяющих точек определяется следующим образом: выбирается одна концевая точка a и для $x, y \in A$ кладется $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x = a$ или $x = y$, или x разделяет точки a и y в A . Доказано, что этот порядок линейен.)

Теорема 1. Пусть S является I фрактальной полугруппой. Зададим упорядочение разбивающих точек, выбрав в качестве минимального элемента нуль. Тогда $E(S)$ замкнуто и для $x, y \in E(S)$ $xy = \min\{x, y\}$. Дополнение $E(S)$ будет объединением не имеющих общих элементов открытых интервалов и если P — один из них, то P^* будет фрактальной подполугруппой в S , являющейся единичной нитью или ниль-нитью. И наконец, если $x \in P$ и $y \notin P$, то $xy = \min\{x, y\}$. В частности, S — абелева полугруппа.

Не все нити являются абелевыми полугруппами, неабелевыми могут быть даже те из них, концевые точки которых идемпотентны. Это показывает следующий пример.

Пример 1. Пусть S — подмножество в плоскости, определяемое соотношением

$$S = ([0, 1] \times 0) \cup (0 \times [0, 1]) \quad (\text{см. рис.18}).$$

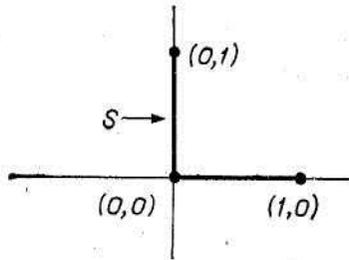


Рис.18

Определим умножение в S , полагая

$$(x, y) (x', y') = (xx', xy' + y).$$

Мы получили неабелеву нить с единицей, но без нуля. Однако каждый элемент p , принадлежащий вертикальному сегменту, *будет левым нулем*, т.е. $pS=p$. Заметим, что горизонтальный сегмент является единичной нитью.

В соответствии с теоремой 1 нить только с двумя идемпотентами — концевыми точками (т.е. I фрактальная полугруппа, которая не имеет внутренних идемпотентов), является или единичной нитью или ниль-нитью.

Рассмотрим, какова структура фрактальной полугруппы, если ее пространство есть произвольная n клетка для $n > 1$ и если потребовать, чтобы множество идемпотентов совпадало с границей? В частности, обладает ли 2-клетка строением соответствующей фрактальной полугруппы?

В примере 3(3) будет представлена фрактальная полугруппа, пространство которой есть 2-клетка и идемпотентами которой являются граничные точки и еще одна внутренняя точка. Однако нет стандартной процедуры, которая бы исключила внутренний идемпотент из этой фрактальной полугруппы. В общем случае определить построение фрактальной полугруппы с необходимыми геометрическими свойствами на пространстве S очень трудно, как правило, несколько легче подобрать непрерывную функцию $S \times S \rightarrow S$ с этими свойствами, но получить еще при этом закон ассоциативности тяжело. Поэтому новые примеры обычно строятся с помощью уже известных фрактальной полугрупп; приемы построения этих примеров описаны в разделе 4.18.3.

Из теоремы 1 следует, что нетривиальный гомоморфизм из действительной I фрактальной полугруппы сохраняет размерность, хотя в общем случае мало что можно сказать об изменении размерности при гомоморфизмах полугрупп.

Под размерностью мы понимаем индуктивную или фрактальную размерность.

Определение 2. *Однопараметрической фрактальной полугруппой в S называется функция $\sigma: [0, 1] \rightarrow S$, которая непрерывна, взаимно однозначна и удовлетворяет соотношению $\sigma(x + y) = \sigma(x) \sigma(y)$ всякий раз, когда $x, y, x + y \in [0, 1]$. $\sigma([0, 1])$ есть дуга как подпространство в S , поскольку $[0, 1]$ компактен, S хаусдорфово, а σ непрерывна и взаимно однозначна, откуда следует, что σ -гомеоморфизм $[0, 1]$ в S . Как правило, мы будем называть образ отрезка $[0, 1]$ относительно отображения σ однопараметрической фрактальной полугруппой. Отметим, что этот образ не обязан быть фрактальной подполугруппой в S , так как отрезок $[0, 1]$ не замкнут относительно сложения. В качестве примера однопараметрической фрактальной полугруппы, которая не является фрактальной подполугруппой, возьмем интервал $[1/2, 1]$ действительной оси, где S есть единичный комплексный круг с обычным комплексным умножением (см. рис. 19).*

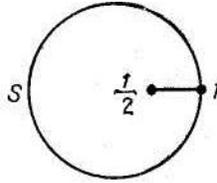


Рис. 19

Лемма 1. Если $e \in E(S)$, то существует максимальная фрактальная подгруппа $H(e)$ фрактальной полугруппы S , содержащая e , и $H(e) = \{x \in eSe \mid xx' = e = x'x \text{ для некоторого } x' \in Se\} = \{x \in S \mid x \cup x = e \cup eS \text{ и } x \cup Sx = e \cup Se\}$.

Ниже рассмотрим теорему, которая все еще является основным инструментом для изучения фрактальных полугрупп. Скажем, что дуга A в S *выходит из идемпотента* $e \in S$ тогда и только тогда, когда $A \cap H(e) = e$. Пример однопараметрической фрактальной полугруппы, данный в определении 2 служит также примером дуги, которая выходит из идемпотента.

Теорема 2. Пусть S — локально компактная фрактальная полугруппа с единицей 1. Предположим, что существует компактная фрактальная подгруппа G в $H(1)$, открытая в $H(1)$, но не являющаяся открытой в S . Предположим, что существует окрестность 1, не содержащая других идемпотентов. Тогда S содержит однопараметрическую фрактальную полугруппу, которая выходит из 1.

Доказательство этой теоремы ее все еще встречает трудности. Следует отметить, что если нам не нужны выходящие однопараметрические фрактальные полугруппы, то они могут использовать теорему, гарантирующую существование однопараметрических фрактальных групп в локально компактных фрактальных группах. В результате теоремы возникает вопрос, существует ли дуга или однопараметрическая фрактальная полугруппа, которая выходит из неизолированного идемпотента, и является ли однопараметрическая фрактальная полугруппа в S подмножеством нити, которая принадлежит S . Как показывают примеры, приведенные далее, ответы на эти вопросы отрицательны, хотя справедливо, что франг должен вести себя достаточно хорошо около идемпотента вне $K(S)$, так как доказано, что каждая окрестность такого идемпотента содержит дугу. Однако эти дуги могут не содержать идемпотент, они не обязаны быть фрактальными подполугруппами в S или даже однопараметрическими фрактальными полугруппами.

Определение 3. Произведением фрактальных полугрупп S и W называется декартово произведение пространств $S \times W$ с покомпонентным законом умножения, т.е. $(x, y)(x', y') = (xx', yy')$.

Примеры 2. Пусть $I=[0,1]$ — действительный отрезок с обычным умножением, C — единичная окружность, а D — единичный круг в комплексной плоскости с обычным комплексным умножением.

1) $I \times C$ — фрактальная полугруппа, пространство которой есть боковая поверхность цилиндра, с единицей $(1,1)$ и минимальным идеалом $0 \times C$.

Положим

$$S = (0 \times C) \cup \{(e^{-t}, e^{2\pi i t}) | 0 \leq t < \infty\},$$

так что S есть базисная окружность $0 \times C$ вместе с бесконечной спиральной обмоткой вокруг нее (см. рис.20).

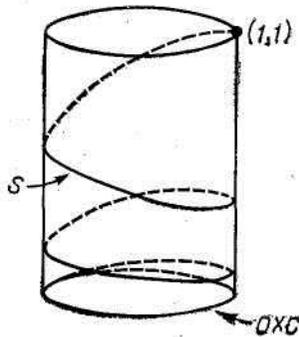


Рис. 20

Заметим, что S является кланом с единицей $(1,1)$ и $K(S) = 0 \times C$. Любая дуга в S , что выходит из $(1,1)$, есть однопараметрическая фрактальная полугруппа, но наименьший подфранг, содержащий такую дугу, есть вся фрактальная полугруппа S . Следовательно, не существует такой дуги, которую можно было бы продолжить до нити в S . Мы будем называть фрактальную полугруппу S единичной спиральной фрактальной полугруппой.

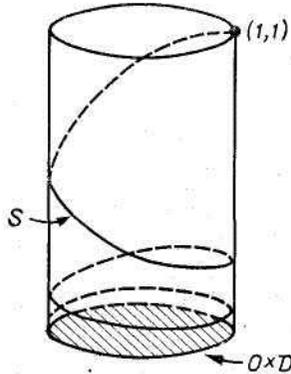


Рис. 21

2) $I \times D$ есть фрактальная полугруппа, пространство которой — цилиндр, с единицей $(1,1)$ и минимальным идеалом $(0,0)$ (см. рис.21). Спиральная фрактальная полугруппа S , определенная в пункте 1, будет фрактальной подполугруппой в $I \times D$; $T = S \cup (0 \times D)$ также будет фрактальной подполугруппой. T есть объединения спиральной обмотки, которая начинается с нижнего основания цилиндра плюс это основание. Заметим, что T является кланом с единицей $(1,1)$ и нулем, $K(T) = (0,0)$. Таким образом, мы опять получаем, что любая дуга, выходящая из точки $(1,1)$, является однопараметрической фрактальной полугруппой, но ее нельзя продолжить до нити в T .

3) Рассмотрим пример в котором мы получим клан T' , в котором нет дуг, выходящих из единицы, и вообще единица не лежит в дуге. И дуга, конечно, не будет открытой в E (T'). В пространстве E^3 рассмотрим круг D_i , определяемый соотношениями $x^2 + y^2 \leq (1/i)$ и $z = 1 - (1/i)$, где $i = 1, 2, 3, \dots$, так что круги D_i сходятся к точке $u = (0, 0, 1)$. Из центра круга D_{i+1} проводим криволинейный луч A_i , который остается в пределах конуса, определяемого центром круга D_{i+1} и границей круга D_i и обматывается над границей D_i , как в примере 2. Положим $T_i = A_i \cup D_i$ и для каждого $i = 1, 2, 3, \dots$ зададим в T_i умножение так же, как оно определялось для T в примере 2. Тогда центр круга D_i будет нулем для T_i . Пусть $T_\infty = u$ и $T' = \bigcup \{T_i / i = \infty, 1, 2, \dots\}$. Дополним определение умножения в T' следующим образом: будем считать, что ∞ больше любого целого числа и если $x \in T_i$, $y \in T_j$ и $i < j$, то положим $xy = yx = x$. Тогда T' будет кланом с нулем $K(T) = (0, 0, 0)$ и единицей u и в T' нет дуги, содержащей точку u (см. рис.22).

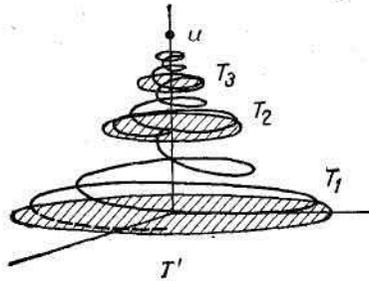


Рис. 22

Следует, конечно, проверить непрерывность умножения для каждого i на $T_i \cap T_{i+1}$, а также ассоциативность умножения в T' . Это умножение не было бы непрерывным, если бы начало спирали фрактальной полугруппы T_i находилось бы в единице круга D_{i+1} , а не в его нуле. Заметим, что T' строится из однотипных спиралей по аналогии с тем, как I фрактальные полугруппы строятся с единичных, ниль- и мин-нитей (см. теорему 1 и определение 4). Заметим также, что в каждой окрестности точки u имеются невырожденные связанные фрактальные группы (границы кругов D_i при достаточно большом i), и интуитивно ясно, что их наличие препятствует построению дуги, которая выходит из u . Это действительно так и следует из теоремы.

Теорема 3. Если S есть франг, в котором каждая фрактальная подгруппа вполне несвязна, то для каждого идемпотента $e \in S \setminus K(S)$ существует фрактальная подполугруппа I в S , которая содержит e в качестве единицы, пересекает $K(S)$ и является I фрактальной полугруппой.

Основным инструментом, которым использовался в доказательстве этой теоремы, была теорема об однопараметрической фрактальной полугруппе (см. теорему 2).

Определение 4. *Неприводимой фрактальной полугруппой* называется клан T , в котором нет собственного континуального подмножества, содержащего единицу фрактальной полугруппы T , пересекающего $K(T)$ и являющегося также фрактальной подполугруппой.

Возможная ситуация, когда неприводимая фрактальная полугруппа не будет *фрактальным неприводимым* пространством, для ее единицы и минимального идеала, т.е. может существовать собственное континуальное подмножество, которое соединяет единицу и минимальный идеал, хотя соединяющей их собственной континуальной фрактальной подгруппы нет. Например, S , T и T' в

примерах 2 — неприводимые фрактальные полугруппы, но T и T' тем не менее не являются фрактально неприводимыми. Была выдвинута гипотеза, что неприводимые полугруппы должны быть абелевыми. После многочисленных попыток доказать справедливость этого предположения было показано, что фрактально неприводимый клан является абелевым. Было доказано, что неприводимая фрактальная полугруппа абелева. Формулировка основной теоремы приводится далее.

Пример фрактальной полугруппы T' в примерах 2(3) показывает, что неприводимые фрактальные полугруппы могут быть значительно более сложными, чем нити или просто одна спираль; в действительности, они строятся из базисных блоков (которые будем называть *цилиндрическими фрактальными полугруппами*), вводимых вместе способом, более сложным, но похожим на способ, которым I фрактальные полугруппы строятся из единичных ниль- и мин-нитей.

Строение неприводимых фрактальных полугрупп имеет особое значение, так как большинство франгов содержит их согласно следующему результату.

Лемма 2. Если S — франг и $e \in S \setminus K(S)$, то S содержит неприводимую фрактальную полугруппу, которая пересекает $K(S)$ и имеет единицей элемент e .

Доказательство этой леммы простое. Заметим, что $\{eSe\}$ есть семейство кланов, которые содержат e и пересекают $K(S)$. Это семейство линейно упорядочено по включению (семейство имеет только один член). По лемме 1 такое семейство имеет максимальный элемент и тогда его пересечение — неприводимая фрактальная полугруппа, что и требовалось доказать.

Следующая теорема — центральный аспект в исследовании о неприводимых фрактальных полугруппах.

Теорема 4. Неприводимая фрактальная полугруппа будет абелевой и неприводимые фрактальные полугруппы представляют собой кланы, для которых S/\mathcal{H} обладает естественным строением I фрактальной полугруппы, где \mathcal{H} - отношение эквивалентности на S , которое определяется соотношением

$$\mathcal{H} = \{(x, y) \in S \times S \mid x \cup Sx = y \cup Sy \text{ и } x \cup xS = y \cup yS\}.$$

Отношение \mathcal{H} , определенное здесь, есть одно из *отношений* на S и согласно определению 3 максимальная фрактальная подгруппа $H(e)$, содержащая элемент e , является \mathcal{H} классом для e . S/\mathcal{H} есть пространство, получаемое в результате отождествления точек в каждом \mathcal{H} классе и, в частности, при этом фрактальные подгруппы из S

стягиваются в точки, поэтому S/\mathcal{H} не содержит невырожденных связных фрактальных групп.

Рассмотрим, например, единичную спираль S из примеров 2 (1). \mathcal{H} классом каждого элемента $x \in S \setminus (0 \times C)$ будет сам x и единственным другим \mathcal{H} классом будет базисная окружность. Следовательно, S/\mathcal{H} есть S , у которой базисная окружность стянута в точку. Очевидно, что мы получили дугу. Аналогично для T из примеров 2 (2): \mathcal{H} классами являются множества, которые были описаны раньше, кроме того, каждая окружность в круге $0 \times D$ радиуса r , $0 \leq r \leq 1$, с центром в $(0, 0)$ тоже будет \mathcal{H} классом (см. рис.23).

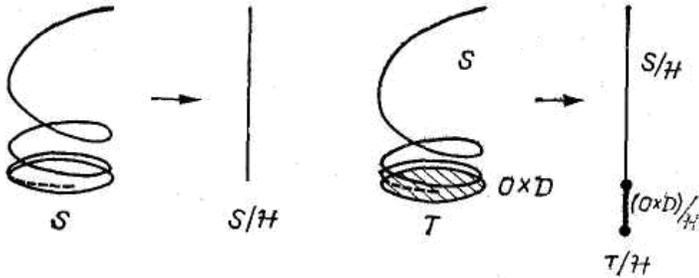


Рис. 23

Ясно, что отношение \mathcal{H} можно определить для любой фрактальной полугруппы S и оно будет отношением эквивалентности, так что пространство S/\mathcal{H} определено корректно, и если S — компактная, то S/\mathcal{H} — хаусдорфово пространство (можно пользоваться несколько более слабыми условиями, чем компактность, чтобы пространство S/\mathcal{H} было хаусдорфовым). Однако в общем случае S/\mathcal{H} не обладает естественной структурой фрактальной полугруппы, т.е. произведение (в S) двух \mathcal{H} классов может не содержаться в другом \mathcal{H} классе. Это можно выразить, сказав, что \mathcal{H} может не быть отношением *конгруэнтности* (относительно формального определения см. теорему 6). Если фрактальная полугруппа S *нормальна*, т.е. $xS = Sx$ для каждого $x \in S$, то S/\mathcal{H} будет обладать естественной структурой фрактальной полугруппы. Очевидно, если S — абелева, то S нормальна, и это одна из причин, по которой очень важно знать, является ли фрактальная полугруппа абелевой..

4.17.3. Построение новых полугрупп

Определение произведения фрактальных полугрупп (см. определение 3) представляет один из основных способов построения новых фрактальных полугрупп из имеющихся. Другая основополагающая идея состоит в замене части заданной фрактальной полугруппы на что-то другое. Этот метод описан в определении 5 и в пункте "Склеивание Б", посвященном методу склеивания.

5. Определение фрактальной фактор-полугруппы. Пусть S — компактная фрактальная полугруппа и I — замкнутый идеал. Пусть S/I обозначает обычное фрактальное фактор-пространство, получаемое в результате отождествления всех точек из I , а $\phi: S \rightarrow S/I$ — каноническое отображение. Тогда S/I есть фрактальная полугруппа с умножением, определяемым равенством $\phi(x)\phi(y)=\phi(xy)$, такая фрактальная фактор-полугруппа называется *фрактальной фактор-полугруппой* P .

Поскольку I — идеал, умножение в S/I определено корректно. Компактность S и замкнутость I применяются для доказательства непрерывности умножения и хаусдорфовости пространства S/I (см. теорему 6).

3. Примеры фрактальных фактор-полугрупп P . 1) Ниль-нитка является фрактальной фактор-полугруппой P единичной нити. Действительно, из пункта 2 определения 1 видно, что ниль-нитка есть $[0, 1] / [0, 1/2]$, где в $[0, 1]$ рассматривается обычное умножение действительных чисел.

2) Несвязная фрактальная полугруппа может быть преобразована в связную, если существует замкнутый идеал, который пересекает все ее компоненты. Пусть, например, W — фрактальная конечная полугруппа с n элементами и $I = [0, 1]$ — обычный единичный отрезок. Тогда $W \times I$ — компактная фрактальная полугруппа с n компонентами; множество $W \times 0$ будет замкнутым идеалом, который пересекает все компоненты, поэтому $W \times I / W \times 0$ будет связным веером. На рис. 24 изображен случай для $n = 2$.



Рис. 24

3) Пусть S^1 — фрактальная полу группа на одномерной сфере, а $I = [0, 1]$ будет I фрактальная полу группа. Обозначим через $T = S^1 \times I$ произведение фрактальных полу групп. Очевидно T представляет собой пустой цилиндр. Множество $I_r = S^1 \times [0, r]$ является идеалом фрактальной полу группы T для $r \in [0, 1)$ и фрактальная фактор-полу группа $P T/I_r$ фрактально есть 2-клетка, граничная сфера которой будет фрактальной подполу группой (см. рис.25).

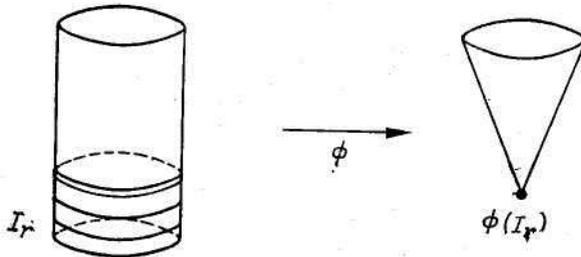


Рис. 25

Описанная в пункте 3 ситуация поддается обобщению, если вместо S^1 рассмотреть S^{n-1} , где $n \geq 2$. Мы получим строение фрактальной полу группы на n клетке, которая содержит граничную $(n-1)$ сферу как фрактальную полу группу. Существует теорема, из которой следует, что клан на n -клетке с нулем, граница которой есть фрактальная подполу группа, должен быть фрактальной фактор-полу группой P цилиндра. Эта теорема приводится далее. Она является более общей, поскольку формулируется для L фрактальных полу групп. По определению L *фрактальной полу группой* называется клан на компактной поверхности, такой, что граница этой поверхности есть подфранг. Для доказательства теоремы о L фрактальных полу группах была дополнена теорема об I фрактальных полу группах и доказан вариант теоремы об однопараметрической фрактальной полу группе. Оба эти результата были упомянуты ранее.

5. Теорема. Если S есть L фрактальная полу группа с границей B , то B будет компактной фрактальной группой J ; B действует на S с помощью левых переносов; пространство орбит S' является I фрактальной полу группой и в S существует I фрактальная полу группа J , которая будет также сечением для S' , следовательно, $S = JB$. Если S содержит нуль, то фрактальная полу группа S изоморфна $(J \times B)/K$, где K — идеал $J \times B$. Умножение в S дифференцируемо тогда и только тогда, когда S' — единичная нить. Например, нетрудно показать, что

единичный комплексный круг имеет вид $(I \times C)/K$, где I — стандартная единичная нить, C — группа вращений окружности и $K = (0 \times C)$ (см. рис.20).

Задачи. Предположим, что S — фрактальная полугруппа на компактной поверхности, граница B которой есть фрактальной подполугруппой. Насколько умножение в S определяется умножением в B ? Когда это умножение дифференцируемо?

Относительно строения таких фрактальных полугрупп, если они не имеют единицы, известно очень мало. Показавшего, что в случае, когда S есть замкнутая n клетка и ограничивающая сфера B есть левотривиальная фрактальная подполугруппа в S ($xB = x$ для любого $x \in B$), то или S левотривиальная, или $(S \setminus K(S))^* = BT$ для некоторой I фрактальной полугруппы T , содержащейся в S .

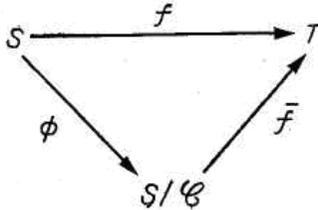
Ранее мы указали, почему хорошо сжимать замкнутый идеал в точку, или, что то же самое, почему фрактальное фактор-пространство P оказывается фрактальной полугруппой. Формально фрактальная фактор-полугруппа P компактной фрактальной полугруппы представляет собой специальный случай общего приема выделений замкнутой конгруэнтности, которая приводит к фрактальной полугруппе в соответствии со следующей теоремой. Большое значение при этом имеет связь между конгруэнтностями и гомоморфизмами, поэтому мы формулируем предложение в полной общности. Отметим, что оно остается справедливым, если прилагательные «компактный» и «компактный хаусдорфовый» заменить на прилагательное «дискретный».

6. Теорема. Предположим, что S — компактная (дискретная) фрактальная полугруппа и \mathcal{C} — замкнутое отношение эквивалентности на S . Пусть $\phi : S \rightarrow S/\mathcal{C}$ — каноническое отображение. Тогда множество S/\mathcal{C} будет компактным и хаусдорфовым (дискретным) в фактор-фрактальности, множество U в которой открыто по определению тогда и только тогда, когда открыто множество $\phi^{-1}(U)$.

Если \mathcal{C} есть еще и конгруэнтностью, то множество S/\mathcal{C} обладает естественным строением фрактальной полугруппы, причем отображение ϕ будет гомоморфизмом. Следовательно, замкнутое отношение конгруэнтности на S индуцирует гомоморфизм фрактальной полугруппы S на другую фрактальную полугруппу. Наоборот, если $f : S \rightarrow T$ есть гомоморфизм из S на T , то отношение

$$\mathcal{C} = f \{ (s, s') \in \mathcal{B}S \times S \mid f(s) = f(s') \}$$

будет замкнутой конгруэнтностью на S и фрактальная полугруппа S/\mathcal{E} изоморфна T , изоморфизм $\bar{f}: S/\mathcal{E} \rightarrow T$ определяется равенством $\bar{f} \phi = f$:



Следующая конструкция, как и фрактальная фактор-полугруппа P , получается в результате применения теоремы 6, но другим способом. Фрактальная фактор-полугруппа P заменяет идеалы на точки, тогда как метод склеивания Б описывает условия, при которых фрактальная подполугруппа может быть заменена другой фрактальной полугруппой.

7. Теорема. Склеивание Б. Пусть S — компактная фрактальная полугруппа и A — замкнутая фрактальная подполугруппа в S . Предположим, что $f: A \rightarrow T$ — сюръективный гомоморфизм. Обозначим как $\Delta(S) = \{(x, x) | x \in S\}$ диагональ фрактальной полугруппы S . Положим

$$\mathcal{E} = \Delta(S) \cup \{(a_1, a_2) \in A \times A | f(a_1) = f(a_2)\}.$$

Тогда \mathcal{E} есть замкнутое отношение эквивалентности на S , и если \mathcal{E} — конгруэнтность, то и S/\mathcal{E} будет фрактальной полугруппой и ее можно рассматривать как фрактальную полугруппу S , у которой вырезана фрактальная подполугруппа A и разрез заклеен фрактальной полугруппой T , причем правила склеивания определяются отображением f . Если A — идеал фрактальной полугруппы S , то \mathcal{E} будет отношением конгруэнтности, когда $f(xa_1) = f(xa_2)$ и $f(a_1x) = f(a_2x)$ для каждого $x \in S$.

4. Примеры 1) Фрактальная фактор-полугруппа P . Пусть A — замкнутый идеал компактной фрактальной полугруппы S и T — одноточечная фрактальная полугруппа, а f — отображение A в T .

2) Клан на листе Мебиуса. Пусть C и I такие, как в примере 2. Положим

$$S = I \times C, A = 0 \times C \text{ и } T = C.$$

Определим отображение $f: A \rightarrow T$, полагая $f(0, z) = z^2$. Легко видеть, что в результате склеивания отождествляются только противоположные точки на базисной окружности фрактальной полугруппы S , а остальная часть S остается без изменения. Для того

чтобы представить себе геометрически, что пространство, полученное в результате склеивания, действительно является листом Мебиуса, можно: 1) разрезать вертикально S пополам и спустить переднюю половину вниз; 2) повернуть переднюю половину на 180° ; 3) склеить два смежных края вместе, это даст нам 2-клетку с отождествленными противоположными точками на базисной окружности фрактальной полугруппы S , исключая угловые точек; 4) снова соединить края разреза так, как они были первоначально, что завершит отождествление противоположных точек базисной окружности фрактальной полугруппы S .

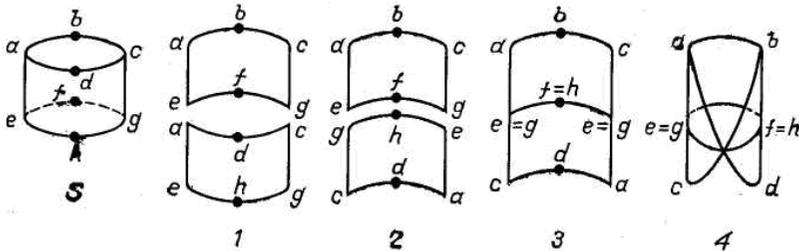


Рис. 26

Теперь получится пространство склейки, в то же время процесс построения этого пространства есть стандартный способ получения листа Мебиуса из клетки (см. рис.26).

3) Клан на зонтике. Пусть множество D такое же, как в примере 2, $A = \{z \in D \mid |z| \leq 1/2\}$, $T = [0, 1/2]$ с действительным умножением. Определим $f: A \rightarrow T$, полагая $f(z) = |z|$ (см. рис.27).

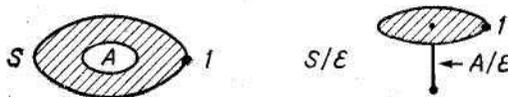


Рис. 27

4) Пусть S — единичная спираль примера 2 (1) и $\{a, b\}$ — фрактальная полугруппа, которая состоит из двух элементов. [Например, умножение может быть тривиальным слева, или $\{a, b\}$ может быть циклической фрактальной группой из двух элементов.] Пусть T — базисная окружность фрактальной полугруппы S , а $W = \{a, b\} \times S$ — обычное произведение фрактальных полугрупп (см. определение 7). Фрактальная полугруппа W компактна, поскольку

такowymi являются фрактальные полугруппы $\{a, b\}$ и S . Пусть $A = \{a, b\} \times T \subset W$, определим отображение $f: A \rightarrow T$ просто как проекцию. Тогда условия теоремы 7 выполняются и в результате склеивания получаем двойную спираль (см. рис. 28).

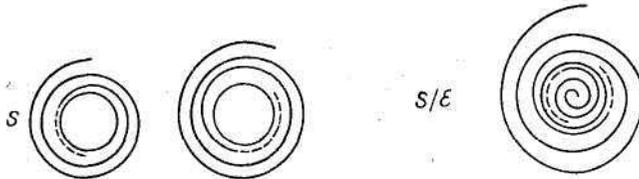


Рис. 28

Так как для любой конечной (или более обще, компактной) фрактальной полугруппы X , $X \times S$ — компактная фрактальная полугруппа, можно таким же способом склеить множество спиралей, мощность которого есть мощность множества X . Сравните этот пример с примером 3 (2).

Во всех предыдущих примерах отображение f должно было выбираться каждый раз так, чтобы индуцированное им отношение эквивалентности оказывалось замкнутой конгруэнтностью.

4.17.4. Некоторые соображения о компактных фрактальных группах

В этом разделе предметом обсуждения будут элементарные, но в тот же время наиболее часто применяемые факты о компактных фрактальных полугруппах. Предварительно мы приведем без доказательства несколько простых, однако достаточно важных результатов, которая нам понадобятся в дальнейшем.

Замечания. Пусть X , Y и Z обозначают хаусдорфовы фрактальные пространства.

1) Если A , $U \subset X$ и U - открытое множество, то из $A^* \cap U \neq \emptyset$ следует, что $A \cap U \neq \emptyset$.

В пунктах 2 и 3 символ \mathcal{A} будет обозначать непустое семейство подмножеств из X , которое является *башней*, т.е. для каждого $A, B \in \mathcal{A}$ или $A \subset B$ или $B \subset A$. Условимся что символ $\bigcap \mathcal{A}$ обозначает множество $\bigcap \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$.

2) Если каждый элемент $A \in \mathcal{A}$ семейства \mathcal{A} есть компактное, непустое множество, то $\bigcap \mathcal{A}$ также компактно и непусто.

3) Пусть $f: X \rightarrow Y$ - непрерывное отображение, тогда $f(\bigcap \mathcal{A}) \subset \bigcap \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$, и если каждое $A \in \mathcal{A}$ компактно, то $f(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$. Следовательно, если X - фрактальная полугруппа и \mathcal{A} — башня компактных подмножеств из X , то $x(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \{xA \mid A \in \mathcal{A}\}$ для каждого элемента $x \in X$.

4) Для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ и множества $A \subset X$ имеется включение $f(A^*) \subset f(A)^*$, и если множество A компактно в X , то $f(A^*) = f(A)^*$. Следовательно, если A и B — подмножества фрактальной полугруппы, то $A^* B^* \subset (AB)^*$, и если A^* и B^* еще и компактны, то $A^* B^* = (AB)^*$.

5) Если $A \subset X$, A компактно и $z \notin A$, то существует такое открытое множество W , что $A \subset W$ и $z \notin W$.

6) Если A и B компактны, $A \times B \subset X \times Y$, $f: X \times Y \rightarrow Z$ - непрерывное отображение и $f(A \times B) \subset W$, где W - открытое множество, то существуют открытые множества U и V , такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $f(U \times V) \subset W$. Следовательно, если $X = Y = Z$ есть фрактальная полугруппа и $AB \subset W$, где W — открытое множество, то существуют открытые множества U и V , такие, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $UV \subset W$.

6. Определение Для элемента $x \in S$ положим $\Gamma_n(x) = \{x^p \mid p \geq n\}^*$,

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(x) \text{ и } N(x) = \bigcap \{\Gamma_n(x) \mid n \geq 1\}.$$

8. Теорема Если $x \in S$ и $\Gamma(x)$ — компактное множество, то $N(x)$ будет идеалом $\Gamma(x)$ и $N(x)$ — фрактальная группа. Следовательно, для элемента x в компактной фрактальной полугруппе степени x скапливаются к некоторому идемпотенту, в частности компактная фрактальная полугруппа содержит идемпотент.

Доказательство. Замкнутое подмножество компактного пространства само компактно, поэтому $N(x)$ есть пересечение непустой башни непустых компактных множеств. Тогда, в соответствии с пунктом 2 вышеприведенных замечаний, множество $N(x)$ компактно и непусто. Непустое пересечение фрактальных подполугрупп фрактальной полугруппы снова будет фрактальной полугруппой, поэтому $N(x)$ — фрактальная полугруппа.

Для того чтобы доказать, что $N(x)$ является идеалом $\Gamma(x)$, мы покажем, что $x^r N(x) = N(x)$ для каждого $r \geq 1$. Следовательно, $\{x^r \mid r \geq 1\} N(x) \subset N(x)$. Тогда согласно пунктам 1 и 4 вышеприведенных замечаний $\Gamma(x)N(x) \subset N(x)$. Имеется дуальное включение: $N(x)\Gamma(x) \subset N(x)$. Пусть поэтому $r \geq 1$. Проведем некоторые вычисления: $x^r N(x) = x^r(\bigcap \{\Gamma_n(x) \mid n \geq 1\})$ и в соответствии с пунктом 3 вышеприведенных замечаний это равно $\bigcap \{x^r \Gamma_n(x) \mid n \geq 1\}$; согласно

пункту 4 вышеприведенных замечаний $x^r \Gamma_n(x) = (x^r \{x^p | p \geq n\})^*$, что равно $\{x^{r+p} | p \geq n\}^* = \Gamma_{r+n}$. Следовательно,

$$x^r N(x) = \bigcap \{ \Gamma_{r+n}(x) | n \geq 1 \} = \bigcap \{ \Gamma_n(x) | n \geq r+1 \},$$

что равно $N(x)$, так как $\Gamma_{r+1}(x) \subset \dots \subset \Gamma_1(x)$.

Поскольку $N(x)$ — фрактальная полугруппа, для того чтобы доказать, что она является фрактальной группой, достаточно показать, что $y(x) = N(x)y = N(x)$ для каждого элемента $y \in N(x)$. Мы показали предварительно, что для каждого $r \geq 1$ $x^r N(x) = N(x)x^r = N(x)$, интуитивно ясно, что последовательности x^r сходятся к точкам множества $N(x)$ и из этого должны бы следовать нужные нам равенства. Для справедливости этих рассуждений необходима компактность. Перейдем к доказательству. Положим $A = \{a \in \Gamma(x) | aN(x) = N(x)\}$. Если бы мы знали, что $A^* \subset A$, то, поскольку $\{x^r | r \geq 1\} \subset A$, мы должны были бы иметь $\Gamma(x) \subset A^* \subset A$ и, в частности, $N(x) \subset A$, что и требуется. Для того чтобы доказать, что $A^* \subset A$, положим $y \in A^*$ и предположим методом от противного, что $y \notin A$. Тогда $yN(x) \not\subset N(x)$, поэтому существует $z \in N(x) \setminus yN(x)$. Так как y и $N(x)$ компактны, $yN(x)$ — также компактное множество, следовательно, из пункта 5 вышеприведенных замечаний вытекает, что существует открытое множество W , такое, что $z \notin W$ и $yN(x) \subset W$. [Отметим, что $N(x) \not\subset W$]. Согласно пункту 6 вышеприведенных замечаний существуют открытые множества U и V , такие, что $y \in U$, $N(x) \subset V$ и $UV \subset W$. Но в соответствии с пунктом 1 вышеприведенных замечаний, поскольку $y \in U \cap A^*$, существует некоторый элемент $a \in U \cap A$; если $a \in U$, то $aN(x) \subset UV \subset W$, если $a \in A$, то $aN(x) = N(x)$, но $a \in A \cap U$, т.е. $a \in U$ и $a \in A$. Мы получили противоречие. Поэтому предположения, что $y \notin A$, неверно, следовательно, $A^* \subset A$.

Из дуальных рассуждений вытекает, что множество $A' = \{a \in \Gamma(x) | N(x)a = N(x)\}$ замкнуто и, следовательно, $\Gamma(x) \subset A'$, поэтому $\Gamma(x) \subseteq A \cap A' = \{a \in \Gamma(x) | aN(x) = N(x) \wedge a = N(x)\}$, в частности $N(x) \subset A \cap A'$. Теорема доказана.

Прежде чем идти дальше, отметим, что доказательство замкнутости A зависело только от компактности $N(x)$, и точно таким же способом можно доказать, что для любого компактного подмножества $N(x)$ фрактальной полугруппы S множества $\{x \in S/xN \supset N\}$, $\{x \in S/xN \subset N\}$, $\{x \in S/Nx \subset N\}$ и $\{x \in S/Nx \supset N\}$ замкнуты.

7. Определение. Действием называется фрактальная полугруппа S , пространство X и непрерывное отображение

$$S \times X \rightarrow X,$$

которое, как правило, не обозначается никаким символом (образ пары элементов s и x обозначается просто как sx) и удовлетворяющее соотношению

$$t_1(t_2x) = (t_1 t_2)x$$

для любых $t_1, t_2 \in S$ и любого $x \in X$.

Читатель, знакомый с теорией автоматов, сразу обнаружит, что действие есть в точности непрерывный автомат. Действия играли ранее вспомогательную роль в различных результатах, таких, как лемма 3, и только позднее они стали предметом детального изучения. Следующая лемма представляет собой полезный инструмент для изучения строения фрактальных полугрупп. Она носит несколько неестественное название - лемма об опухоли (опухоловой леммы).

Лемма 3. Предположим, что S действует на X , $x \in S$ и $\Gamma(x)$ компактно. Пусть A — такое компактное подмножество в X , что $x \supset A$. Тогда $xA = A$ и для каждого элемента $y \in \Gamma(x)$ отображение $a \rightarrow ya$ является гомеоморфизмом A на A . Следовательно, идемпотент в $\Gamma(x)$ есть элемент, действующий как единица на A .

Доказательство. Так как $xA \supset A$, то $x^2A \supset xA \supset A$, и по индукции $x^nA \supset A$ для всех $n \geq 1$. Следовательно, $\{x^n | n \geq 1\} \subset \{y \in S | y \supset A\}$ и последнее множество замкнуто (см. замечание после доказательства теоремы 8), поэтому $\Gamma(x) \subset \{y \in S | y \supset A\}$. Так как $\Gamma(x)$ — компактное множество, то по теореме 8 существует идемпотент $e \in N(x)$ и согласно предыдущему предположению $eA \supset A$. Из этого следует, что для каждого $a \in A$ выполняется равенство $ea = a$ (так как если $a \in eA$, то $a = eb$ для некоторого $b \in A$ и, следовательно, $ea = e^2b = eb = a$). Поэтому $a \rightarrow ea$ — тождественное отображение множества A и, в частности, $eA = A$.

Для того чтобы убедиться, что $yA = A$ для любого элемента $y \in \Gamma(x)$, мы должны еще доказать, что $yA \subset A$. Для этого заметим, что $yA = yeA$, $ye \in N(x)$, так как $N(x)$ — идеал в $\Gamma(x)$ и $N(x)$ — фрактальная группа. Тогда существует элемент $(ye)^{-1} \in N(x)$, такой, что $(ye)(ye)^{-1} = e$. Нам известно, что $(ye)^{-1}A \supset A$, следовательно, $(ye)(ye)^{-1}A \supset yeA$, т.е. $A \supset yeA$. Таким образом, $yA = A$. Наконец, $a \rightarrow ya$ такое же отображение, что и $a \rightarrow yea$, это отображение является гомеоморфизмом, так как оно отображает A на A и обратное ему отображение $a \rightarrow (ye)^{-1}a$ непрерывно.

3. Приложения леммы. 1) Предположим, что S — компактная фрактальная полугруппа, $T = S \times S$ — обычное декартово произведение и умножение в T определяется соотношением

$$(x, y)(x', y') = (xx', y'y')$$

(Заметим, что умножение, определенное в фрактальной полугруппе T , не совпадает с законом умножения в умножении фрактальных полугрупп, введенном в определении 3, т.е. T не является

произведением (умножением) фрактальных полугрупп S . Фрактальная полугруппа T нужна нам для того, чтобы определить некоторое действие.) Очевидно, что T — компактная фрактальная полугруппа и с учетом умножения, определенного в T , она действует на S , а именно

$$[(x, y), s] \rightarrow xsy.$$

Если A и S компактны, $A \subset S$, и если $xAy \supset A$ для некоторых элементов $x, y \in S$, то $x'Ay' = A$ для всех элементов $(x', y') \in \Gamma(x, y)$ [здесь $\Gamma(x, y)$ — это $\Gamma((x, y))$ для элемента (x, y) фрактальной полугруппы T], в частности, S содержит левую и правую единицы для подмножества A .

Доказательство. Фрактальная полугруппа T компактна, так как компактна фрактальная полугруппа S . Тогда по лемме 3 $(x', y') \in \Gamma(x, y)$ для каждого элемента $(x', y') \in \Gamma(x, y)$, т.е. $x'Ay' = A$. Если (e, f) — идемпотент в $\Gamma(x, y)$, то $eAf = A$, откуда получаем $eA = A = Af$, так что e и f — левая и правая единицы соответственно для множества A . [Здесь существенно используется тот факт, что e и f — идемпотенты, так как, вообще говоря, из равенства $xAy = A$ не следует, что $xA = A$ или $Ay = A$. Кроме того, $\Gamma(x, y)$ — всего лишь подмножество в $\Gamma(x) \times \Gamma(y)$, поэтому нельзя утверждать, что $x'Ay' = A$ для каждого $x' \in \Gamma(x)$ и $y' \in \Gamma(y)$.]

2) Компактная фрактальная полугруппа S является *устойчивой*, т.е. из условий $baS \supset aS$ для любых $a, b \in S$ следует, что $baS = aS$, и из условий $Sab \supset Sa$ для любых $a, b \in S$ следует, что $Sab = Sa$. (Устойчивость означает, что отношение $\Gamma \mathcal{D}$ и \mathcal{F} на фрактальной полугруппе S равны).

3) Если S — компактная фрактальная полугруппа и $xS = S$ для некоторого элемента $x \in S$, то S содержит левую единицу — идемпотент в $\Gamma(x)$.

4) Если S — компактная фрактальная полугруппа, $x \in A = A^* \subset S$ и $xA \supset A$, то $\Gamma(x)$ есть фрактальная группа, которая содержится в A . Наиболее важная сторона этого результата заключается в том, что *A не обязательно будет фрактальной подполугруппой*.

Доказательство. Если $x \in A$, то $x^2 \in xA$ и $xA = A$ по лемме 3. Следовательно, $x^2 \in A$. По индукции доказывается, что $x^n \in A$ для всех $n \geq 1$. По условию множество A замкнуто, следовательно, $\Gamma(x) \subset A$. Тогда по лемме 3 $e\Gamma(x) = \Gamma(x)$, где e — идемпотент в $\Gamma(x)$. Но имеется включение $e\Gamma(x) \subset N(x)$, поскольку $N(x)$ — идеал в $\Gamma(x)$. Из этого вытекает, что $\Gamma(x) = N(x)$, следовательно, $\Gamma(x)$ — фрактальная группа.

Следующая лемма дает нам удобное средство для изучения компактных фрактальных полугрупп с разделяющими точками, а также компактных полугрупповых действий на континуумы с разделяющими точками.

5. Лемма. Предположим, что S - компактная фрактальная полугруппа и S действует на континуальное множество X . Если H — подмножество в S с непустой границей $F(H)$ и H^* содержит такую точку x , что $Sx \subset H^*$, то для некоторой точки $p \in F(H)$ имеется включение $S_p \subset H^*$.

На интуитивном уровне строгости формулировка этой леммы означает, что если некоторая точка из множества H^* переводится всей фрактальной полугруппой S внутрь H^* , но эта точка лежит в H^* достаточно глубоко, то ее можно вытянуть из внутренности H^* , т.е. имеется граничная точка множества H , переводимая всей фрактальной полугруппой S также в H^* . Эта лемма оказывается очень полезной, когда H имеет только одну граничную точку, она существенно применяется в доказательстве свойств (1) и (2) в применении леммы 5.

5. Применение леммы. 1) Пусть имеется действие $S \times X \rightarrow X$, где S и X — компактные множества. Пусть J — максимальное множество относительно свойств $\square \neq J \subset X$ и $SJ \subset J$. Если $C \subset X \setminus J$ и C есть пересечения континуальных множеств с одноточечной границей, то C содержит самое большое одну точку.

Это предложение — одно из важнейших вспомогательных средств в роботах, где рассматриваются действия $S \times X \rightarrow X$, для которых X является *континуальным множеством с открытой плотной полупрямой*, т.е. X содержит гомеоморфный образ интервала $(0, 1]$, который плотен в X (т.е. его замыкание равно X), но который открыт в X . Каждая точка в образе $(0, 1)$ является разделяющей. Единичная спираль из примера 2 (1) представляет собой континуальное множество с открытой плотной полупрямой.

2) Пусть S — компактная фрактальная полугруппа, которая действует на отрезок $I = [0, 1]$ так, что $S0 = 0$. Тогда множество нулей этого действия $\{x \in I / Sx = x\}$ имеет вид $[0, c]$ для некоторого $c \in [0, 1]$.

Доказательство. Пусть $Z = \{x \in I / Sx = x\}$ и z есть верхняя грань множества Z , z существует, так как $Z \neq \square (0 \in Z)$ и так как Z ограничено, например, числом 1. Поскольку S — компактная фрактальная полугруппа, нетрудно доказать, что множество Z замкнуто (см. доказательство леммы 3), следовательно, $z \in Z$. Итак, $Z \subset [0, z]$, и $0, z \in Z$. Предположим, что $x \in (0, z)$, тогда x — граничная точка в I как множества $[0, x]$, так и множества $[x, 1]$. Положим $H = [0, x]$ и применим лемму 5. Мы получим, что $Sx \subset [0, x]$, так как $S0=0$. Пусть теперь $H=[x, 1]$, тогда снова из леммы 3 вытекает, что $Sx \subset [x, 1]$, так как $z \in [x, 1]$ и $Sz = z$. Следовательно, $Sx = x$ и поэтому $x \in Z$. Отсюда следует что $(0, z) \subset Z$. Таким образом, получаем $[0, z]=Z$.

Информация, которая содержится в следующей теореме, применяется очень часто. На языке фрактальных полугрупп она утверждает, что минимальный идеал компактной фрактальной

полугруппы вполне простой. Доказательство этого факта, по существу, алгебраическое, компактность необходимая для того, чтобы установить существование минимального левого, правого и двустороннего идеалов. Далее фрактальные свойства не играют никакой роли и то, что идеал вполне простой, показывается так же, как в алгебраической полугруппе.

9. Теорема. Если S — компактная фрактальная полугруппа, то S имеет компактный минимальный идеал $K(S)$, и если \hat{L} и \hat{R} — семейства всех минимальных левых и минимальных правых идеалов фрактальной полугруппы S соответственно, то $K(S) = \bigcup \hat{L} = \bigcup \hat{R}$. Кроме того, если $L \in \hat{L}$ и $R \in \hat{R}$, то $LR = K(S)$ и $L \cap R = H(e)$ для некоторого идемпотента e . Следовательно, $K(S)$ является объединением непересекающихся групп которые непересекаются. Если $x \in K(S)$, то минимальный левый идеал, который содержит x , имеет вид Sx и минимальный правый идеал, который содержит x , имеет вид xS .

Доказательство. Сама фрактальная полугруппа S есть компактный идеал в S , поэтому по лемме Ц существует непустая максимальная башня \mathcal{T} компактных идеалов. Согласно пункту 2 вышеприведенных замечаний $K = \bigcap \mathcal{T}$ — компактное непустое множество, поэтому K будет минимальным компактным идеалом фрактальной полугруппы S . В то же время K — минимальный идеал, так как для любого элемента $x \in K$ множество SxS компактно, оно является идеалом и подмножеством любого идеала, содержащего x . Аналогично S содержит минимальный левый и правый идеалы. K — единственное подмножество в S с перечисленными ранее свойствами. Действительно, если K' — другой минимальный идеал, то $\square \neq KK' \subset K \cap K'$. Следовательно, $K \cap K'$ является идеалом, но тогда $K \cap K' = K = K'$. $\bigcup \hat{L} \subset K$, так как если $L \in \hat{L}$, то L будет левым идеалом. В то же время K — идеал и мы получаем, что $K\hat{L} \subset L \cap K$ и KL — левый идеал. Следовательно, $KL = L \subset K$. Очевидно, объединение $\bigcup \hat{L}$ есть левый идеал, поэтому если мы докажем, что он является еще и правым идеалом, то получим, что $\bigcup \hat{L} = K$. Для того чтобы сделать это, отметим, что $Lx \in \hat{L}$ для каждого $L \in \hat{L}$ и $x \in S$. (В самом деле Lx — левый идеал и если бы M был левым идеалом, содержащимся в Lx , то множество $\{y \in L \mid ux \in M\}$ была бы левым

идеалом, содержащимся в L и, следовательно, равным L , но тогда M равен Lx .) Поэтому

$$(\bigcup \hat{L}) = \bigcup \{Lx/L \in \hat{L}\} = \bigcup \{Lx/L \in \hat{L}, x \in S\} \subset \bigcup \hat{L},$$

так что $\bigcup \hat{L}$ есть правый идеал и $K = \bigcup \hat{L}$. Дуальные рассуждения доказывают, что $K = \bigcup \hat{R}$.

Пусть $L \in \hat{L}$ и $R \in \hat{R}$. Очевидно, что множество LR будет идеалом и $LR \subset K$. Следовательно, $LR = K$. Далее заметим, что если $x \in L$, то $Lx \subset L^2 \subset L$, и из $Lx \in L$ следует, что $Lx = L$. Дуальное утверждение также верно, т.е. если $x \in R$, то $x = R$. Тот факт, что множество $R \cap L$ будет фрактальной группой, доказывается следующим образом. Очевидно, $\square \neq RL \subset R \cap L$ и RL — фрактальная полугруппа.

Если $x \in RL$, то $Lx = L$ и $x = R$ согласно доказанному ранее. Следовательно, $xRL = RLx = RL$, так что RL — группа. Наконец, $R \cap L = (R \cap L)e \subset RL$, где e — идемпотент в RL . Следовательно, $R \cap L = RL$ и поэтому $R \cap L$ есть фрактальная группа.

Пусть $x \in K$, выберем $L \in \hat{L}$ так, что $x \in L$. Очевидно, Sx — левый идеал, а также $Sx \subset SL \subset L$. Следовательно, $Sx = L$. Дуальные рассуждения доказывают, что $x \in xS \in R$.

4.17.5. Индуцированные отношения Γ

Введение. Обычные отношения Γ определяются для фрактальной полугруппы точно так же, как для алгебраической полугруппы. Они являются отношениями эквивалентности и будут замкнуты, если фрактальная полугруппа S компактна. В случае фрактальных полугрупп эти отношения, как и для алгебраических полугрупп, служат одним из фундаментальных средств изучения строения полугруппы. Укажем, например, теорему 4, результаты о построении минимального идеала компактной фрактальной полугруппы, полученные в результате изучения \mathcal{D} класса (см. теоремы 11, 12), теорему об \mathcal{H} классах, принадлежащих общему \mathcal{D} классу (см. теорему 13). Мы определили *относительные идеалы и индуцированные отношения Γ* и обобщили на них во фрактальном случае многие из имеющихся результатов.

Пусть S — фрактальная полугруппа и $T \subset S$ обозначает подмножество. Отметим, что, вообще говоря, T не является фрактальной подполугруппой фрактальной полугруппы S .

8. Определение. Для элементов $x, y \in S$ определим $(x, y) \in \mathcal{L}_T$ тогда и только тогда, когда $T^l x = T^l y$; $(x, y) \in \mathcal{R}_T$ тогда и только тогда, когда $x T^l = y T^l$; $(x, y) \in \mathcal{F}_T$ тогда и только тогда, когда $T^l x T^l = T^l y T^l$; $\mathcal{H}_T = \mathcal{L}_T \cap \mathcal{R}_T$ и $\mathcal{D}_T = \mathcal{L}_T \circ \mathcal{R}_T$. Определенные здесь отношения $\mathcal{L}_T, \mathcal{R}_T, \mathcal{H}_T, \mathcal{F}_T$ и \mathcal{D}_T называются *индуцированными отношениями* Γ полугруппы S . Если $T=S$, мы получим обычные отношения Γ . Нижний индекс писать не обязательно, мы используем его здесь, чтобы подчеркнуть, что рассматриваются индуцированные отношения. Для элемента $x \in S$ символы R_x, L_x, D_x и H_x обозначают \mathcal{R}_T класс, \mathcal{L}_T класс, \mathcal{D}_T класс и \mathcal{H}_T класс соответственно, что содержит x .

Согласно следующей лемме классы индуцированного отношения обеспечивают разложение классов обычного отношения Γ . Это указывает одну из причин, по которой следует считать полезным введение индуцированных отношений, но, кроме того, они являются достаточно мощным техническим инструментом. Многие теоремы об обычных отношениях Γ обобщаются на индуцированные отношения, если T выбирается таким, что $T = T^*$, а также в случае, когда $T^2 \subset T$.

6. Лемма. Для любого подмножества $T \subset S$ каждый класс эквивалентности обычного отношения Γ \mathcal{L}_S является объединением \mathcal{L}_T классов, т.е. $\mathcal{L}_T \subset \mathcal{L}_S$. Аналогично

$$\mathcal{R}_T \subset \mathcal{R}_S, \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_S, \mathcal{H}_T \subset \mathcal{H}_S, \mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_S.$$

11. Теорема. Если $x, y \in S$ и $xy \in R_x \cap L_y$, то $R_y \cap L_x = H_e$ для некоторого $e \in E$ и H_e является подгруппой в S . К тому же $H_x H_y = H_{xy} = R_x \cap L_y$.

Если еще $T^2 \subset T$ и $xT \cup Ty \subset T$, то имеет место диаграмма egg-box Клиффорда, которая изображена на рис.29.

$$L_e = Ly' = L_x$$

$$R_e = R_{x'} = R_y$$

e	x'	y
y'	$y'x'$	$y'y$
x	xx'	xy

Рис.29.

Ее строки обозначают \mathcal{R}_T классы, столбцы обозначают \mathcal{L}_T классы и все они принадлежат \mathcal{D}_T классу. Если $e \in E$, $x \in L_e$ и $y \in R_e$, то $xy \in R_x \cap L_y$. Здесь никакие допущения о множестве T не делаются.

12. Теорема. Пусть S — компактная фрактальная полугруппа и T — замкнутое подмножество. Пространство $Z=S \times S \times S$ с законом умножения, определенным из равенства $(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$, является фрактальной полугруппой, отображение $f : Z \rightarrow S$, где $f(x, y, z) = xyz$, есть гомоморфизм. Если

$$e \in E(S) \text{ и } Z_e = (L_e \cap E) \times H_e \times (R_e \cap E),$$

то $f|Z_e$ будет гомеоморфизмом в S . Следовательно, $f|Z_e$ будет изоморфизмом в S .

Положим $H = \bigcup H_f \{f \in E(S)\}$ и $M_e = \{x \in S / ex, xe \in H\}$. Определим $u : H \rightarrow E$, полагая $u(x)$ единицей для H_f , где H_f есть \mathcal{H}_T класс, который содержит x . Отображение u непрерывно, следовательно, отображение $g : M_e \rightarrow Z$, задаваемое соотношением $g(x) = [u(xe), xe, \text{ и } (ex)]$, непрерывно и отображение $gf(Z_e)$ является обратным для f .

Если Z_e - фрактальная подполугруппа (а это так, когда $D_e \subset H$), то отображение $f|Z_e$ — изоморфизм.

13. Следствие: теорема. Если S - компактная полугруппа и $e \in E \cap K$, то K изоморфен $(Se \cap E) \times eSe \times (eS \cap E)$ с умножением, определяемым соотношениям $(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$, и K будет ретрактом S , как и $K \cap E, eS \cap E, \text{ и } eSe, \text{ и } Se \cap E$.

Доказательство. По теореме 9 $eS \cup Se \subset K, K \subset H$, следовательно, $M_e = S$. К тому же по теореме 9, так как $e \in K$, имеем $L_e = Se$ и $R_e = e$, поэтому согласно определению \mathcal{H} $He = eS \cap Se$. Так как $e = e^2, eS \cap Se = eSe$, и тогда в силу теоремы 12 получаем, что $Z_e = (Se \cap E) \times eSe \times (eS \cap E)$. Z_e имеет требуемое умножение и $f|Z_e$ является изоморфизмом на $(Se \cap E) eSe (eS \cap E)$, последнее множество равно K согласно следующим рассуждениям. Так как $eS = eSeS = eSe^2S, e(eS \cap E) = eS \cap E$ и $(Se \cap E)e = Se \cap E$, мы видим, что

$$(Se \cap E) eSe (eS \cap E) = (Se \cap E) (Se) (eS) (eS \cap E) = (L \cap E) LR (R \cap E),$$

где $L \in \hat{L}, R \in \hat{R}$. По теореме 9 $(L \cap E)L = L, R(R \cap E) = R$ и $LR = K$.

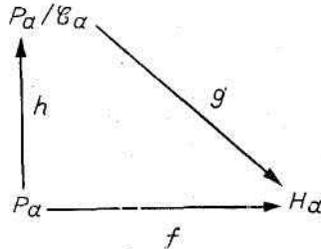
Отображение $fg : S \rightarrow K$ есть ретракция S на K и $ufg : S \rightarrow E \cap K$ есть ретракция S на $E \cap K$.

Рассматривая композиции g с проекциями на соответствующие сомножители Z_e , получаем ретракции S на $Se \cap E, eSe$ и $eS \cap E$.

14. Теорема. Пусть S — компактная фрактальная полугруппа, $T = T^*$ и для элемента $a \in S$ положим

$$P_a = \{x \in S \mid xH_a = H_a\} \text{ и } \mathcal{C}_a = \{(x, y) \in P_a \times P_a \mid xa = ya\}.$$

Если мощность множества H_a больше 1, то P_a будет замкнутой фрактальной подполугруппой, \mathcal{C}_a — замкнутое отношение конгруэнтности на P_a и существует следующая коммутативная диаграмма:



где h — каноническая проекция, $f(x) = xa$, g — гомеоморфизм и P_a / \mathcal{C}_a — компактная фрактальная группа. Если $a^2 = a$, то f есть гомоморфизм и g будет изоморфизмом. Независимо от того, верно или нет равенство $a^2 = a$, существует единственная фрактальная группа G , гомеоморфная H_b для каждого $b \in D_a$ и изоморфная H_b , если H_b содержит идемпотент.

Приведем еще одну структурную теорему, которая представляет определенный интерес.

Для множества $T \subset S$ J называется *максимальным собственным T идеалом*, если $\square \neq J \neq S$,

$$T^i J T^i \subset J$$

и J есть максимальным по включению подмножеством фрактальной полугруппы S , обладающим этими свойствами. Следующий результат обобщает на T идеалы (в случае, когда $T^2 \subset T$) теорему о строении дополнения максимального собственного идеала. Было бы очень хорошо, если бы существовал аналог этой теоремы в случае, когда T не является фрактальной подполугруппой.

15. Теорема. Пусть S — компактная фрактальная полугруппа и T — ее замкнутая фрактальная подполугруппа. Пусть J — максимальный собственный T идеал, положим $A = S \setminus J$. Допустим, что мощность множества A больше 1.

1) Если $TST \subset J$, то или $S = J \cup T_a$ и $A = L_a$ для каждого элемента $a \in A$, или $S = J \cup aT$ и $A = R_a$ для каждого элемента $a \in A$.

2) Если $TST \not\subseteq J$, то $S = J \cup TaT$, $J_a = A$, $L_a = Ta \cap A$ и $R_a = aT \cup A$ для каждого $a \in A$.

3) Если $T \cap A \neq \emptyset$, то или $T \cap J$ — максимальный собственный идеал фрактальной полугруппы T , или T — простая фрактальная полугруппа.

5. Образование вязких пальцев в пористых средах

Проблема образования так называемых вязких пальцев в пористых средах имеет первостепенное значение для добычи нефти. Она представляет интерес и для гидродинамики, и для физики пористых сред. Показано, что вязкие пальцы в пористых средах имеют фрактальную природу. Мы начинаем с введения в проблему образования вязких пальцев в двумерной геометрии (ячейке Хеле-Шоу) и приводим некоторые из соответствующих экспериментальных результатов. Затем мы излагаем экспериментальные результаты относительно образования вязких пальцев в *пористых* средах и, в частности, обсуждаем данные о том, что вязкие пальцы имеют *фрактальную* природу.

Связь между процессом ОДА и известной неустойчивостью фронта вытеснения в пористых средах, где сильно вязкая жидкость (нефть) вытесняется слабо вязкой жидкостью (водой), на первый взгляд может показаться удивительной. На аналогию, существующую между этими двумя явлениями, обратил внимание Патерсон. Она основана на том, что в приближении сплошной среды обе задачи описываются уравнением *Лапласа*.

5.1. Течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу

Ячейка Хеле-Шоу состоит из двух прозрачных пластин, разделенных зазором толщиной b . Хеле-Шоу исследовал в такой ячейке обтекание водой различных предметов. Вводя краситель, он получил разноцветные линии тока и тем самым визуализовал всю картину обтекания. Эти эксперименты служат прямым подтверждением того, что при малых b течение жидкости в ячейке Хеле-Шоу является *потенциальным течением*, характерным для малых чисел Рейнольдса. При увеличении зазора между пластинами при умеренных скоростях

возникает турбулентное течение с хаотически перепутанными линиями тока.

Уравнение для скорости течения \mathbf{U} , выведенное из уравнений Навье - Стокса, которые описывают течение в изображенной на рис. 1 ячейке Хеле-Шоу, имеет вид

$$\mathbf{U} = -\frac{k}{\mu} \nabla(p + \rho g z) = -M \nabla \Phi, \quad (1)$$

где p - давление, ρ - плотность g - составляющая ускорения свободного падения вдоль оси z ячейки.

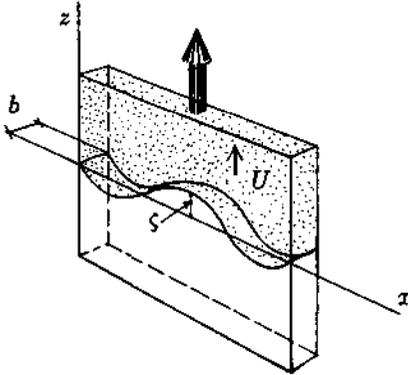


РИС. 1. Геометрия канала Хеле-Шоу.

Подвижность определяется величиной $M = k/\mu$, а потенциал течения - величиной $\Phi = (p + \rho g z)$. Для ячейки, расположенной горизонтально, $g = 0$. Вязкость жидкости равна μ , а *проницаемость* ячейки Хеле-Шоу - величине

$$k = \frac{b^2}{12}. \quad (2)$$

Скорость в уравнении (1) есть *средняя* скорость по толщине ячейки (ширине зазора). Для несжимаемых жидкостей из уравнения неразрывности получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = -\nabla^2(p + \rho g z) = \nabla^2 \Phi = 0. \quad (3)$$

Это уравнение Лапласа. Именно такому уравнению удовлетворяет потенциал в задачах электростатики, диффузии и во многих других областях, поэтому мы можем назвать течения, описываемые уравнением (3), потенциальными течениями. Чтобы найти решение - скорость течения, мы должны помимо уравнения Лапласа удовлетворить граничным условиям, например заданному давлению на

обоих концах ячейки и нулевой скорости жидкости всюду, где жидкость соприкасается со стенками.

Рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 1, где одна жидкость (обозначим ее индексом 1) вытесняет другую жидкость (обозначим ее индексом 2). Поверхность раздела между двумя жидкостями, когда они покоятся, определяется действием капиллярных сил, и между двумя жидкостями существует разность давлений

$$(p_1 - p_2) = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right). \quad (4)$$

Здесь σ – поверхностное натяжение на границе раздела между двумя жидкостями. Два главных радиуса кривизны R_x и R_y описывают границу раздела жидкостей локально, как показано на рис. 2.

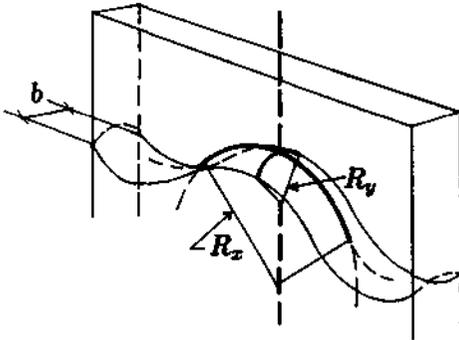


РИС. 2. Геометрия поверхности раздела жидкость-жидкость.

Условимся считать радиусы кривизны положительными, если их центр находится в жидкости 1. Радиус кривизны R_y определяется углом смачивания θ , описывающим, как именно граница раздела двух жидкостей соприкасается с пластинами, которые задают геометрию ячейки. Обычно $R_y \sim b/2$, и, кроме того, мы будем предполагать, что $R_x \gg R_y$. Если жидкости покоятся и жидкость 2 смачивающая, то $p_1 > p_2$. Будем теперь инжектировать жидкость 1 с постоянной скоростью U в точке $z = -\infty$ и отводить жидкость 2 с такой же постоянной скоростью в точке $z = \infty$. Граница раздела между двумя жидкостями в этом случае будет двигаться с постоянной скоростью $U = (0, 0, U)$ вдоль оси z . Но если вязкость вытесняющей жидкости меньше вязкости вытесняемой жидкости, то граница раздела двух жидкостей оказывается *неустойчивой*. Энгельбертс и Клинкаберг, описывая свои наблюдения такого рода неустойчивостей при вытеснении нефти водой в пористой среде,

предложили термин *образование вязких пальцев*. Течение в вязких средах также описывается уравнениями (1) и (3), и поэтому течение в ячейках Хеле-Шоу часто используется для моделирования течения в пористых средах. Однако, как мы увидим, между этими течениями существуют и важные различия, поэтому сама допустимость использования ячейки Хеле-Шоу в качестве модели течения в пористых средах представляется сомнительной.

Теория образования вязких пальцев была развита и сравнена с экспериментами независимо Саффмэнном и Тейлором и Чуоке и др. Физика процесса образования вязких пальцев определяется динамикой движения границы. Предположим, что разность давлений $\Delta p = p_1(z=0) - p_2(z=L)$ поддерживается на длине L конечной ячейки Хеле-Шоу, в которой воздух вытесняет жидкость, обладающую большой вязкостью. Давление в воздухе постоянно и равно давлению на входе $p_1(z=0)$, так как вязкостью воздуха мы пренебрегаем. Мы предполагаем также, что палец выступает в ту сторону, куда движется фронт вытеснения, опережая остальную его часть. Тогда давление на конце пальца также равно $p_1(z=0)$. Следовательно, наибольший градиент давления в сильно вязкой жидкости образуется на конце пальца и определяется выражением

$$\nabla p = \{p_1(z=0) - p_2(z=l)\} / (L - z),$$

где z - положение конца пальца. Этот большой градиент индуцирует максимальную скорость течения жидкости непосредственно перед самым длинным пальцем, который растет быстрее, чем фронт в среднем, а такая ситуация, как нетрудно видеть, неустойчива.

Чтобы проверить на устойчивость движущуюся границу раздела, последуем стандартной процедуре и предположим, что на прямую границу раздела наложено синусоидальное возмущение. Тогда в движущейся системе отсчета положение границы определяется действительной частью выражения

$$\xi = \varepsilon \exp\left(2\pi\gamma t + i\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (5)$$

как показано на рис. 1. Длина волны возмущения равна λ , скорость нарастания возмущения равна γ .

Для устойчивой границы раздела возмущение ζ , затухает со временем, т. е. $\gamma < 0$. Если скорость нарастания возмущения положительна ($\gamma > 0$), то возмущение с бесконечно малой амплитудой ε нарастает экспоненциально.

При решении уравнений (1)-(4), содержащих только линейные члены по ζ , фронт вытеснения оказывается *неустойчивым* относительно возмущений с длиной волны λ , превышающей критическую длину волны λ_c :

$$\lambda \geq \lambda_c = 2\pi \left(\frac{\sigma}{\left(\frac{\mu_2}{k_2} - \frac{\mu_1}{k_1} \right) (U - U_c)} \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Возмущения с более короткими длинами волн стабилизируются поверхностным натяжением на границе раздела. Критическая скорость U_c определяется выражением

$$U_c = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\frac{\mu_2}{k_2} - \frac{\mu_1}{k_1}}. \quad (7)$$

Заметим, что при $\rho_2 > \rho_1$ мы получаем $U_c < 0$, если $\mu_2 > \mu_1$; поэтому система неустойчива даже при $U = 0$. Кроме того, в отсутствие гравитационных эффектов ($g = 0$) граница раздела неустойчива при любой скорости, так как $U_c = 0$.

При всех длинах волн $\lambda > \lambda_c$ фронт вытеснения неустойчив; однако возмущения с длиной волны λ_m , определяемой выражением

$$\lambda_m = \sqrt{3} \lambda_c,$$

имеют наибольшую скорость нарастания и в основном определяют динамику фронта. Следовательно, можно ожидать, что в экспериментах, проводимых в канале Хеле-Шоу с зазором шириной W на первоначально прямой границе раздела разовьются *вязкие пальцы* с характерным периодом λ_m . Используя выражение (2) для проницаемости и предполагая, что вязкость вытесняющей жидкости пренебрежимо мала ($\mu_1 \ll \mu_2$), как в случае глицерина, вытесняемого воздухом, получаем, что в горизонтальной ячейке можно ожидать возникновения вязких пальцев с периодом

$$\lambda_m = \pi b \sqrt{\frac{\sigma}{U\mu}} = \frac{\pi b}{\sqrt{Ca}}. \quad (8)$$

Здесь мы ввели безразмерное *капиллярное число* Ca , определяемое выражением

$$Ca = \frac{U\mu}{\sigma}. \quad (9)$$

Оно показывает, чему равно отношение вязких сил к капиллярным силам.

5.2. Вязкие пальцы в ячейках Хеле-Шоу

Саффмэн и Тейлор, Чуоке и др. не только разработали теорию образования вязких пальцев в канале Хеле-Шоу, но и исследовали это явление экспериментально. На рис. 3 показано, как выглядело вытеснение глицерина воздухом в экспериментах Саффмэна и Тейлора.

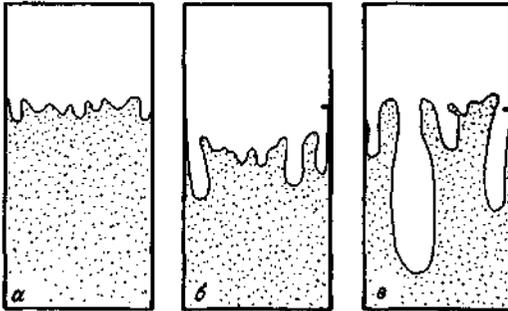


РИС. 3. Образование вязких пальцев в вертикальной ячейке при вытеснении воздухом глицерина (темный цвет) сверху вниз. $U = 0,1$ см/с и $\lambda_c = 1,2$ см. Ранняя стадия с наблюдаемым средним $\lambda \approx 2,2$ см. Более поздняя стадия: начало образования пальцев. Поздняя стадия: более длинные пальцы тормозят рост соседей.

Начальная граница раздела глицерина и воздуха имела мелкие нерегулярности. Заметим, что наблюдавшаяся длина волны составляет около 2,2 см. Это значение очень близко к длине волны, соответствующей максимальной неустойчивости $\lambda_m = \sqrt{3}\lambda_c = 2,1$ см.

Аналогичные вязкие пальцы наблюдали Чуоке и др. (рис. 4).

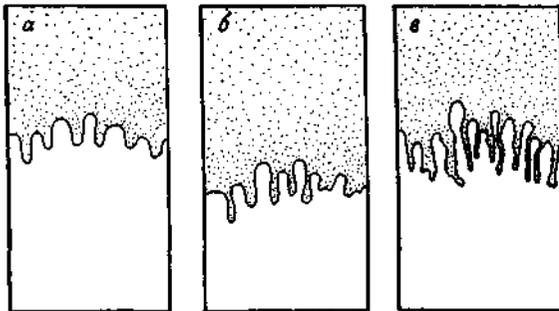


РИС. 4. Водно-глицериновый раствор (темный цвет), с $\mu_1 = 0,552$ пуаз, $\rho_1 = 1,21$ г/см³, вытесняющий нефть с $\mu_2 = 1,39$ пуаз, $\rho_2 = 0,877$ г/см³. Система наклонена под углом $42^\circ 25'$. Поверхностное натяжение на поверхности раздела $\sigma = 33$ дин/см. Нефть смачивает стенки. Критическая скорость $U_c = 0,23$ см/с. а) $U = 0,41$ см/с, $\lambda_m = 3,5$ см, наблюдаемое значение $\lambda = 3,5$ см; б) $U = 0,87$ см/с, $\lambda_m = 2,6$ см, наблюдаемое значение $\lambda = 2,4$ см; в) $U = 1,66$ см/с, $\lambda_m = 1,6$ см, наблюдаемое значение $\lambda = 1,7$ см.

И в этих экспериментах период решетки пальцев очень близок к длине волны λ_m , соответствующей максимальной неустойчивости. Махер наблюдал вязкие пальцы в ситуации, когда поверхностное натяжение можно было сделать очень малым.

Если воздух инжектировать в центре круглой ячейки Хеле-Шоу, то расширяющийся пузырь неустойчив относительно возмущений с длиной волны $\lambda > \lambda_c$, определяемой неравенством (6). Это было показано Патерсоном. И в круглой ячейке возмущение с наибольшей скоростью нарастания имеет длину волны $\lambda_m = \sqrt{3}\lambda_c$. На рис. 5, а показано образование вязких пальцев при очень большом капиллярном числе Ca .

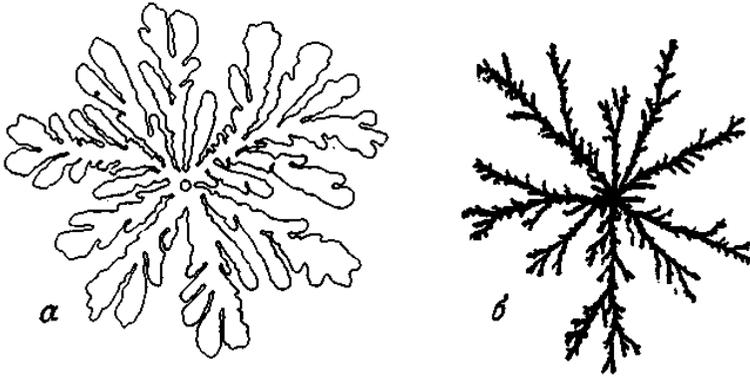


РИС. 5. Радиальное образование вязких пальцев в круглой ячейке Хеле-Шоу: а-воздух вытесняет глицерин при $Ca = 0,1$; б-вода вытесняет неньютоновскую смесь склероглутана с водой, обладающую высокой вязкостью. Эта структура фрактальна с $D = 1,70 \pm 0,05$.

Следует отметить, что по мере того, как структура разрастается, пальцы расширяются. Но, достигнув ширины порядка $2\lambda_m$, пальцы расщепляются на концах, и возникает разветвленная древовидная структура.

Длина волны, соответствующая максимальной неустойчивости, есть величина $\lambda_m \sim Ca^{-1/2}$, поэтому с увеличением капиллярного числа она убывает. Существует практический предел, до которого можно увеличивать капиллярное число, увеличивая скорость течения U . Но поскольку $Ca = U\mu/\sigma$, капиллярное число можно увеличивать, используя жидкости с малым поверхностным натяжением. Ниттман и др. использовали водный раствор склероглутана в качестве жидкости с большой вязкостью и вытесняли его водой. Эти авторы получили границу раздела с очень низким поверхностным натяжением и с $Ca \gg 1$. Наблюдавшиеся ими вязкие пальцы показаны на рис. 5, б. Нетрудно видеть, что пальцы очень узкие и ширина их примерно равна величине зазора между пластинами. Ниттман и др. измерили фрактальную размерность структуры, изображенной на рис. 5,б, с помощью подсчета клеток и получили величину $D = 1,7 + 0,05$.

Бен-Жакоб и др. предложили интересную модификацию ячейки Хеле-Шоу, позволившую продемонстрировать роль анизотропии. На нижней пластине ячейки Хеле-Шоу диаметром 25 см они нанесли правильную шестиугольную сетку из бороздок глубиной $b_1 = 0,015$ дюйма, шириной 0,03 дюйма и расстоянием между бороздками (между ближайшими краями соседних бороздок) 0,03 дюйма. Эффективную анизотропию

ячейки авторы регулировали, изменяя величину зазора b_0 между пластинами, и ввели параметр анизотропии $\alpha = b_1/b_0$. Ниттман и Стэнли предложили модификацию модели пробоя диэлектрика, позволяющую учитывать анизотропию и флуктуации. Расщепление концов пальцев в этой модели начинается под действием флуктуации, в то время как анизотропия способствует дендритному росту. При численном моделировании на основе предложенной ими схемы эти авторы сумели получить структуры, напоминающие экспериментально наблюдаемые, которые представлены на рис. 6.

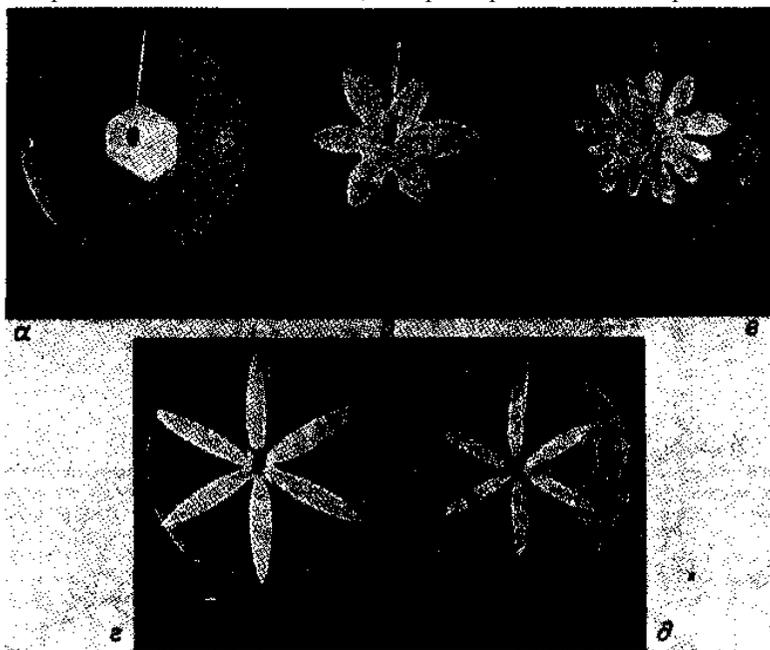


РИС. 6. Две различные морфологии, наблюдавшиеся в эксперименте Хеле-Шоу с анизотропией. Ячейка имеет в поперечнике 25 см. Глицерин (черный цвет) вытесняется воздухом (белый цвет), инжестируемым в центре ячейки. Анизотропия ячейки $\alpha = b_1/b_0 = 0,3$. Последовательность фигур соответствует увеличению давления, под которым подается воздух. *a* - рост с образованием граней; *б* - дендриты, образовавшиеся под действием поверхностного натяжения (при соблюдении осторожности можно заметить, что концы дендритов направлены под углом 30° к основным каналам); *в* - рост с расщеплением концов (в экспериментах с ячейкой больших размеров и более правильной формы этот тип роста, по мнению авторов, соответствует всюду плотному ветвлению); *г* - кинетические дендриты (игольчатые кристаллы растут параллельно проложенным туннелям); *д* - кинетические дендриты при более высоком давлении.

Кроме того, им удалось получить структуры, напоминающие настоящие снежинки.

Бука и др. использовали в качестве жидкости, вытесняемой воздухом в обычной ячейке Хеле-Шоу, *анизотропную жидкость* (нематический жидкий кристалл) и получили структуры, аналогичные тем, которые представлены на рис. 6, б-г. Хорват и др. обнаружили, что образование вязких пальцев в радиальной ячейке Хеле-Шоу с параллельными бороздками на одной из пластин также приводит к богатому разнообразию структур.

5.3. Вязкие пальцы в двумерных пористых средах

Течение жидкости в пористой среде описывается теми же уравнениями (1) и (3), что и течение в ячейке Хеле-Шоу. Единственное отличие состоит в том, что параметр k имеет смысл эффективной проницаемости среды, а не определяется выражением (2). Однако эксперименты показывают, что динамика образования вязких пальцев в пористой среде и в ячейке Хеле-Шоу существенно отличается. На рис. 7 показано, как происходит вытеснение сильно вязкой жидкости (эпоксидной смолы) воздухом при средних капиллярных числах $Ca = 0,04$ в двумерной пористой среде, состоящей из случайно упакованного одинарного слоя стеклянных шаров, заключенных между двумя стеклянными пластинами.

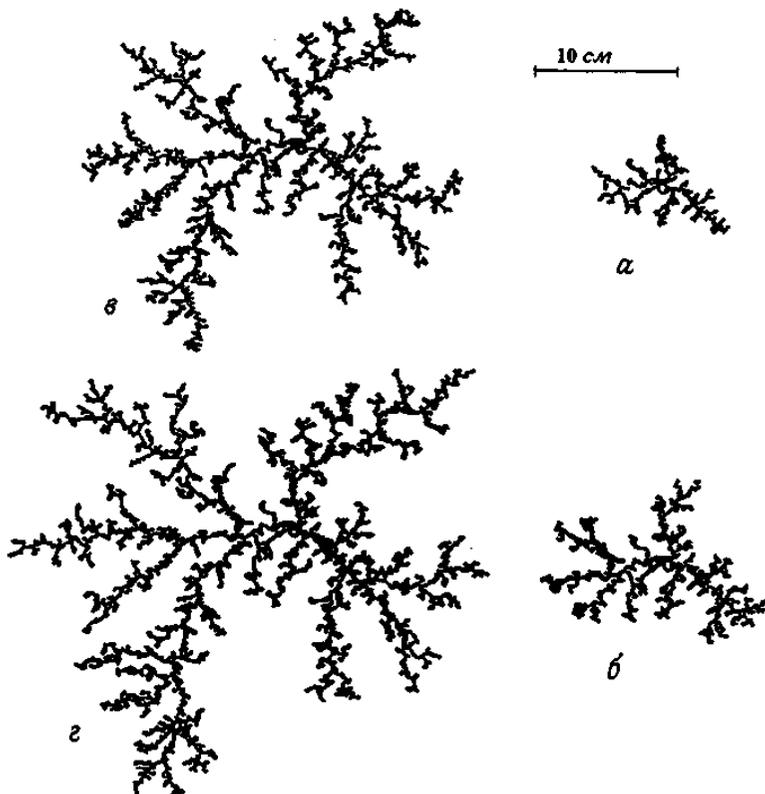


РИС. 7. Пальцы воздуха (черный цвет), вытесняющие жидкую эпоксидную смолу в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1,6 мм, которые уложены в один слой между двумя стеклянными пластинами диаметром 40 см. Центр инъекции расположен рядом с центром структуры. а) $t = 2$ с после начала инъекции; б) $t = 3,9$ с; в) $t = 17,2$ с; г) $t = 19,1$ с. Капиллярное число $Ca = 0,04$.

Наблюдавшиеся структуры с образованием вязких пальцев анализировались следующим образом. Изображения дискретизировались с помощью цифровой записи, и каждая клетка, содержавшая воздушную часть (на рисунке воздух изображен черным цветом), принималась за «мономер», после чего измерялось расстояние r_i от данного мономера до центра инъекции. Затем в духе соотношения «число частиц-радиус» было подсчитано число $N(r) = N(r_i < r)$ клеток с воздухом внутри окружности радиуса r с центром в точке инъекции. Общее число клеток с воздухом равно N_0 , а радиус гирации для структуры с вязкими

пальцами есть величина $R_g = (N_0^{-1} \sum_i r_i^2)^{1/2}$. На рис. 8 показана зависимость величины $N(r)/N_0$ от r/R_g для каждой из структур с вязкими пальцами, изображенных на рис. 7, и для аналогичных экспериментов, в которых в качестве сильно вязкой жидкости использовался глицерин.

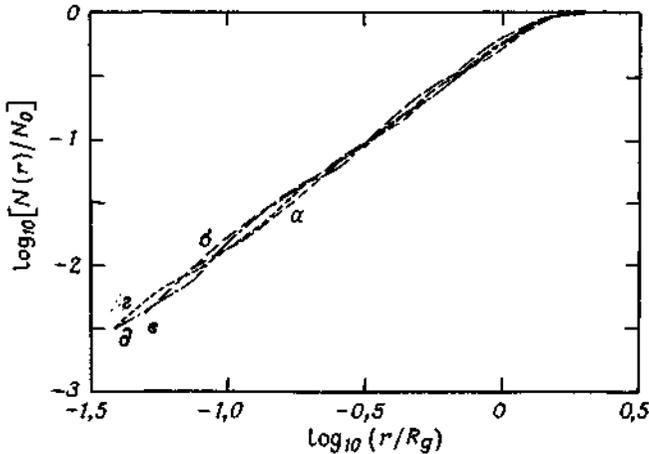


РИС. 8. Нормированный объем структуры с вязкими пальцами $N(r)/N_0$ как функция приведенного радиуса (r/R_g) для структур, представленных на предыдущем рисунке, а) $R_g = 1,7$ см; б) $R_g = 2,9$ см; в) $R_g = 5,2$ см; г) $R_g = 6,6$ см; д) другой эксперимент с воздухом, вытесняющим глицерин в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1 мм, которые уложены в один слой между двумя стеклянными пластинами диаметром 40 см с $R_g = 6,7$ см при $Ca = 0,15$.

Самое важное в полученных результатах состоит в том, что данные всех экспериментов, т.е. данные для различных жидкостей и различных моментов времени для любой данной жидкости, ложатся на одну кривую. Прямая на рис. 8 свидетельствует о существовании соотношения число частиц-радиус вида

$$N(r) = N_0 \left(\frac{r}{R_g} \right)^D f(r/R_g). \quad (10)$$

Экспериментальным данным на рис.7 лучше всего соответствует $D = 1,62 + 0,04$, фрактальная размерность структур с вязкими пальцами в двумерных пористых средах.

Почему экспериментальные данные для ячейки Хеле-Шоу при сравнимых капиллярных числах на рис. 5, а и данными на рис. 7 столь заметно различаются? В обоих случаях вязкость вытесняющей жидкости пренебрежимо мала, а динамика течения сильно вязкой жидкости описывается уравнением Лапласа. Важное различие между ячейкой Хеле-Шоу и ячейкой с пористой средой заключается в граничном условии. В случае ячейки Хеле-Шоу ширина зазора b между пластинами является единственным параметром размерности длины помимо диаметра круглой ячейки, входящим в задачу. В случае двумерной пористой среды, т. е. круглой ячейки, состоящей из *одного* слоя стеклянных шаров, характерный размер поры также равен b и поэтому задача о течении жидкости характеризуется по всем пространственным направлениям «микроскопическим» масштабом. Таким образом, хотя *средняя* скорость течения жидкости U определяется уравнением (1), которое в случае пористой среды называется *уравнением Дарси*, и условием неразрывности (3), в силу чего для давления $p(\mathbf{r})$ возникает уравнение Лапласа, в действительности задачи совершенно различны из-за различия граничных условий. В случае ячейки Хеле-Шоу характерный масштаб длины в плоскости ячейки определяется капиллярными силами (в действительности-критической длиной волны λ_c), в то время как в пористой среде масштаб длины всегда определяется величиной пор. Таким образом, динамика фронта вытеснения совершенно различна. В случае ячейки Хеле-Шоу эта динамика зависит только от распределения давления и граничных условий на двух пластинах. В пористой среде давление также всюду определяется уравнением Лапласа (3). Однако «решение» о вытеснении жидкости из данной поры на поверхности раздела принимается не на основе абсолютного значения разности давления между воздухом и жидкостью, а скорее на основе сравнения давления в воздухе и капиллярного давления в горле данной поры, так как в узкую пору воздуху проникнуть труднее. Последнее обстоятельство привносит в задачу элемент случайности, так как ширина пор в горле-случайная величина с некоторым распределением. Таким образом, динамика фронта образования вязких пальцев в пористых средах имеет две главные составляющие: глобальное распределение давления, удовлетворяющее уравнению Дарси и, следовательно, уравнению Лапласа, и локальные флуктуации в геометрии пор. Рост *фрактальной* структуры является результатом совместного действия этих двух факторов. В том, что для получения фрактальных вязких пальцев требуется случайность на уровне геометрии пор, нетрудно убедиться, взглянув на рис. 9: изображенная на нем структура с вязкими пальцами заведомо не

фрактальна. Чен и Уилкинсон показали с помощью натуральных и численных экспериментов, что случайность в структуре пор необходима для образования фрактальных вязких пальцев.

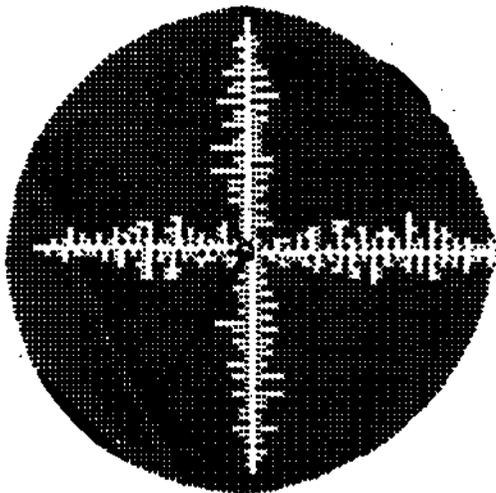


РИС. 9. Образование вязких пальцев при вытеснении воздухом глицерина в двумерной среде, образованной расставленными в узлах квадратной решетки цилиндрами диаметром 1 мм, заключенными между двумя пластинами из пластика. Капиллярное число $Ca = 0,05$.

Если от вытеснения жидкости при высоких капиллярных числах перейти к вытеснению жидкости при очень *низких* капиллярных числах $Ca \sim 10^{-4}$, то наблюдаются фрактальные структуры, характерные для инвазивной перколяции, или *перколяции с вытеснением*.

Химическое растворение пористой среды. Даккор исследовал химическое растворение пористой среды протекающей через нее агрессивной жидкостью. Он поместил пластину толщиной 1 мм чистого гипса ($CaSO_4 \cdot 0,5H_2O$) между двумя прозрачными пластинами. Дистиллированная вода инжескировалась в центре диска, тем самым в пористом гипсе создавалось некоторое течение. Гипс слегка растворим в дистиллированной воде, поэтому текущая вода постепенно проделала в нем некоторую систему ходов. Даккор, используя сплав Вуда, сделал отпечаток этих ходов и растворил остальной гипс. Полученные им структуры при нескольких скоростях течения показаны на рис. 10.

Структуры растворения при высоких скоростях течения очень напоминают структуры с вязкими пальцами, наблюдаемые при течениях в двумерной вязкой среде (рис. 7) и при моделировании ОДА (рис. 3).



РИС. 10. Фотографии двумерных структур, возникающих при химическом растворении пористого пластика радиальным потоком воды при различных скоростях инъекции: а) $48 \text{ см}^3/\text{ч}$; б) $4 \text{ см}^3/\text{ч}$; в) $2 \text{ см}^3/\text{ч}$.

Даккор предложил модификацию модели ОДА, учитывающую перенос растворенного материала. Численные эксперименты на основе этой модели очень точно воспроизводят экспериментально наблюдаемые структуры. При высоких скоростях течения структуры растворения по существу являются структурами ОДА и имеют фрактальную размерность $D = 1,6 \pm 0,1$. Даккор и Ленорман использовали этот метод для исследования трехмерных структур растворения, образуемых течением в пористых средах.

5.4. Образование вязких пальцев и ОДА

Процесс ограниченной диффузией агрегации можно рассматривать как задачу, в которой частицы совершают случайное блуждание до тех пор, пока они не достигают «поверхности» кластера, на которой переходят в состояние покоя. Соответственно поверхность в точке присоединения частицы вырастает на один шаг. В континуальном пределе частицы, совершающие случайное блуждание, описываются уравнением диффузии. Пусть $C(\mathbf{r}, t)$ - концентрация блуждающих частиц. Тогда уравнение диффузии представимо в виде

$$\frac{\partial C(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathcal{D} \nabla^2 C(\mathbf{r}, t). \quad (11)$$

Коэффициент диффузии в общем случае определяется соотношением Эйнштейна $\mathcal{D} = (1/2)\Gamma a^2$ для частиц, перемещающихся на шаг a в случайных направлениях со скоростью Γ .

При стационарном подводе блуждающих частиц может быть достигнуто стационарное состояние $\partial C/\partial t = 0$, и тогда уравнение диффузии (11) сводится к уравнению Лапласа.

$$\nabla^2 C = 0. \quad (12)$$

Локально гладкая граница движется со скоростью

$$V_{\perp} = - \mathcal{D} \mathbf{n} \cdot \nabla C|_s, \quad (13)$$

в направлении, перпендикулярном поверхности с нормалью \mathbf{n} . Поток жидкости в пористой среде описывается *уравнением Дарси* (1). Для несжимаемой жидкости оно сводится к уравнению Лапласа (3). Это такое же уравнение, как (12), но с ϕ вместо концентрации C . Однако на самом деле задача о двумерном вытеснении жидкости в пористых средах более сложная. Стандартный подход состоит в принятии гипотезы о применимости уравнения (1) к каждой из жидкостей. Известно, что фронт вытеснения неустойчив и что если вязкость μ_1 вытесняющей жидкости меньше вязкости μ_2 вытесняемой жидкости, то образуются «пальцы». В пределе, когда вязкостью вытесняющей жидкости можно пренебречь, например когда жидкость вытесняется газом, фронт вытеснения движется со скоростью $M \bar{\nabla} \phi$, аналогичной скорости (13) в случае ОДА. Патерсон был первым, кто обратил внимание на аналогию, существующую между ОДА и течением в пористых средах. Он произвел численный эксперимент для стандартной ячейки, выполненной по так называемой пятиточечной схеме: вытесняющая жидкость инжектируется через отверстие в центре квадрата, а отводится вместе с вытесняемой жидкостью через четыре отверстия, расположенные по углам квадрата. Четверть такой квадратной ячейки представлена рис. 11.

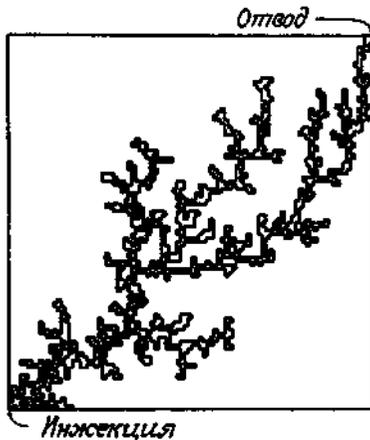


РИС. 11. Моделирование фронта вытеснения в момент пробоя для 1/4 стандартной ячейки с инъекцией вытесняющей жидкости в центре и четырьмя отверстиями для вытесняемой жидкости по углам квадрата. Вытесняющая жидкость имеет бесконечную подвижность.

В той степени, в какой верна аналогия между ОДА и течением в пористых средах, фрактальная размерность фронта вытеснения должна быть равна 1,7, как для ОДА, на плоскости и 2,5 для вытеснения в трехмерном пространстве. Если отношения подвижностей конечны, то аргументация должна быть надлежащим образом изменена, так как в противоположном пределе, когда вытесняющая жидкость имеет большую вязкость, фронт вытеснения, как известно, устойчив и, следовательно, должен иметь фрактальную размерность 1 в двумерном случае и 2 в случае трехмерного фронта вытеснения.

Ранее мы видели, что ОДА и образование вязких пальцев в пористых средах во многом выглядят одинаково. Образующиеся в том и в другом случае структуры имеют приблизительно одну и ту же фрактальную размерность. Мы можем продемонстрировать, как сказывается на течении, описываемом уравнением Лапласа, изменение граничного условия. На рис. 12 представлен результат численного моделирования ОДА: диффундирующие частицы испускаются с верхнего обреза рамки.

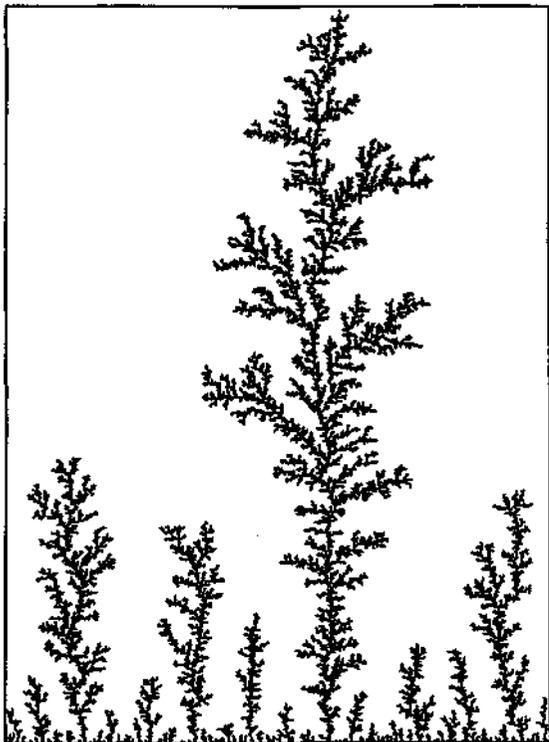


РИС. 12. Рост за счет ОДА с прямой. Частицы начинают случайное блуждание от верхней границы и упруго отражаются от боковых стенок. Достигнув нижней границы или одного из деревьев, частица прилипает к ним. Нижняя граница имеет в длину 801 ячейку, длина самого длинного пальца-1099 ячеек. Число частиц равно 47 348.

Соприкасаясь с нижним обрезом рамки, частица становится корнем нового дерева. Частица, которая касается любого из уже существующих деревьев, прилипает к нему в месте соприкосновения. Очередная частица начинает случайное блуждание из наугад выбранной точки на верхнем обрезе рамки, как только предыдущая частица поглощается. От вертикальных стенок диффундирующие частицы отражаются. Результаты численного моделирования и

натурных экспериментов на рис. 13 выглядят очень похоже.

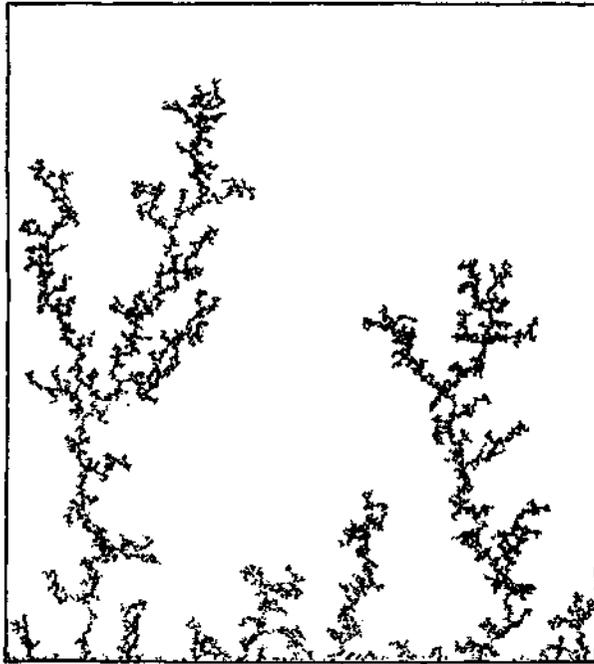


РИС. 13. Образование вязких пальцев при вытеснении глицерина воздухом (черный цвет) в двумерной модели пористой среды. Модель состоит из стеклянных бусин диаметром 1 мм, образующих плотнейшую упаковку в один слой между двумя прозрачными пластинами. Модель расположена горизонтально. Воздух инжектируется вдоль верхнего края ячейки, вытесняемый глицерин выходит из ячейки вдоль ее нижнего края.

Патерсон и др., Ленорман и Царконе также получили дендритные структуры с вязкими пальцами при больших капиллярных числах, работая с квазидвумерными моделями, в которых имеется много слоев частиц, а в остальном сохраняется геометрия канала Хеле-Шоу. Мацусита и др. наблюдали аналогичные фрактальные дендритные структуры в выращенном методом электроосаждения металлическом цинке.

Численное моделирование ОДА позволяет с высокой точностью описывать скорость, с которой растут вязкие пальцы при больших капиллярных числах.

5.5. Вязкие пальцы в трехмерных пористых средах

Несколько наблюдений за образованием вязких пальцев в пористых средах подтверждают, что нарисованная выше картина качественно сохраняется в трехмерном случае. Энгельбертс и Клинкаберг наблюдали вытеснение нефти водой в песчанике и производили выборочную инспекцию различных сечений. Вода содержала флуоресцин, и при фотографировании в ультрафиолетовом свете водные пальцы становились видимыми (рис. 14).

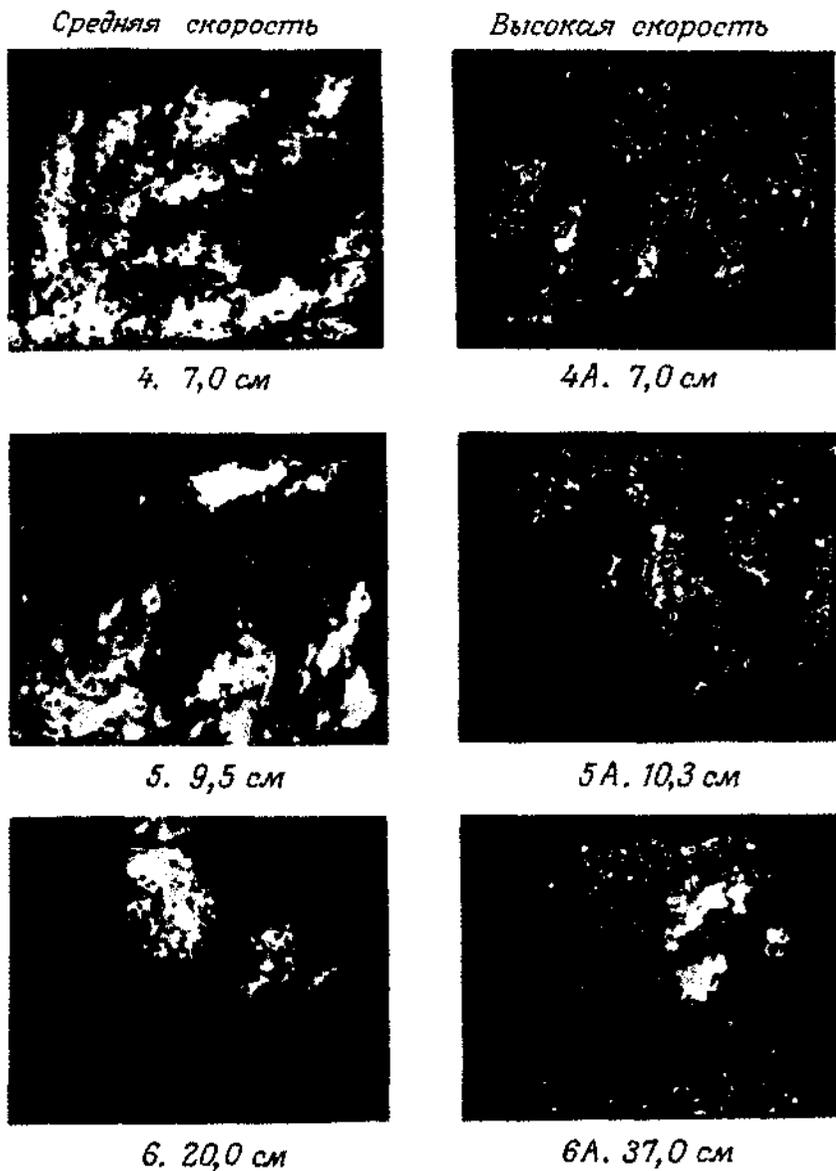


РИС. 14. Распределение воды в различных сечениях после введения 5% объема пор. Отношение вязкостей $\mu/\mu_0 = 24$.

При виде весьма нерегулярных очертаний водных пальцев на сечениях всех размеров напрашивается мысль о фрактальном описании.

Ван Меирс и ван Меирс и ван дер Поль наблюдали рост вязких пальцев в пористых средах при вытеснении нефти водой с отношением вязкостей, равным 80, на прозрачных моделях, изготовленных из уплотненного пирексового порошка. Результаты представлены на рис. 15.

Средняя скорость



$$R = Q = 2,3 \%$$

Высокая скорость



$$R = 13 \%; Q = 23 \%$$



$$R = Q = 6,0 \%$$



$$R = 20 \%; Q = 34 \%$$



$$R = Q = 9,5 \%$$



$$R = 34 \%; Q = 180 \%$$



$$R = Q = 12 \%$$



$$R = 52 \%; Q = 650 \%$$

РИС. 15. Линейное вытеснение нефти водой при отношении вязкое гей нефти и воды, равное 80, в трехмерной пористой среде. Q - общий объем инжектированной жидкости. R - объем «заполнения», выраженный в процентах от общего объема пор.

Общая фракталоподобная структура вязких пальцев очень напоминает ту, которая наблюдалась в кластерах, образующихся при ОДА. Другое наблюдение образования вязких пальцев в квадратной пяти-точечной ячейке представлено на рис. 16.

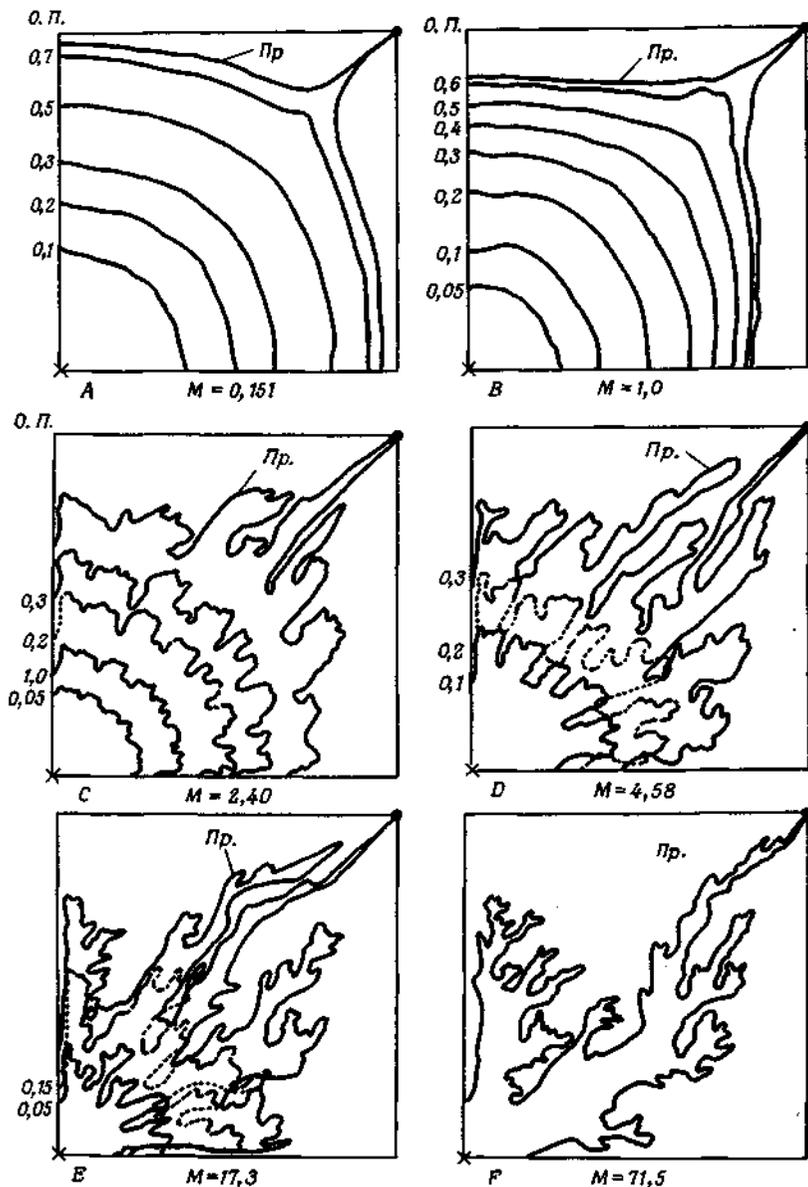


РИС. 16. Фронты вытеснения при различных отношениях подвижностей M и объемах заполненных пор (О. П.) до пробоя (Пр.) .

Хаберман изготовил упрочненный вариант „образцов из спрессованных песчинок, покрывая песчинки тонким слоем эпоксидной смолы. Песчинки помещались между окошками из лусита так, чтобы образовать ячейки размером $15 \times 15 \times 1/8$ кубических дюймов. В различных экспериментах в качестве жидкостей использовались углеводороды, спирты, гликоли и вода.

Существует поразительное сходство между результатами численных экспериментов Патерсона, кластерами, возникающими в результате ОДА, и фронтами вытеснения, наблюдаемыми при больших отношениях подвижностей. Замеченная Патерсоном аналогия между кинетикой агрегации и фронтами вытеснения в пористых средах очень точна и хорошо описывает образование вязких пальцев в двумерных средах при больших капиллярных числах (см. разд. 5.3). Но в игру могут вступать и другие факторы. Например, смачивающие свойства жидкостей и пористой среды также оказывают влияние на ширину пальцев в реалистических системах.

Эксперименты на трехмерных системах гораздо труднее поддаются количественному анализу. Однако, опубликованные в литературе экспериментальные данные подтверждают вывод о том, что при больших отношениях подвижностей даже в трехмерном случае фронты вытеснения имеют фрактальную структуру. Клеман и др. подтвердили, что в своих трехмерных экспериментах они наблюдали фрактальные фронты. Как распространить аналогию Патерсона с тем, чтобы смоделировать ситуацию, в которой отношение подвижностей конечно и/или капиллярное число невелико, остается открытым вопросом.

5.6. Мультифрактальный рост вязких пальцев

Вязкие пальцы, возникающие при вытеснении сильно вязких жидкостей слабо вязкими жидкостями в пористых средах, порождают фрактальные структуры (см. рис. 7), обладающие замечательным сходством с фракталами, возникающими при ОДА. Показано, то *динамика* ОДА и образования вязких пальцев также одинакова. Величина самого длинного пальца и радиус гирации как функции времени совпадают при численном моделировании ОДА и экспериментальных наблюдениях образования вязких пальцев в двумерной пористой среде.

Ранее мы обсудили мультифрактальную природу гармонической меры для кластеров, возникающих при ОДА. Распределение градиентов давления на поверхности растущей структуры с вязкими пальцами

соответствует гармонической мере в ОДА. Однако эти градиенты давления не доступны экспериментальному наблюдению. Учитывая это, мы ввели *новую меру* - *меру новых точек роста*, которая служит многофрактальной характеристикой динамики роста вязких пальцев . На рис. 17 показана структура с вязкими пальцами, образовавшаяся в эксперименте по вытеснению глицерина воздухом при больших капиллярных числах.

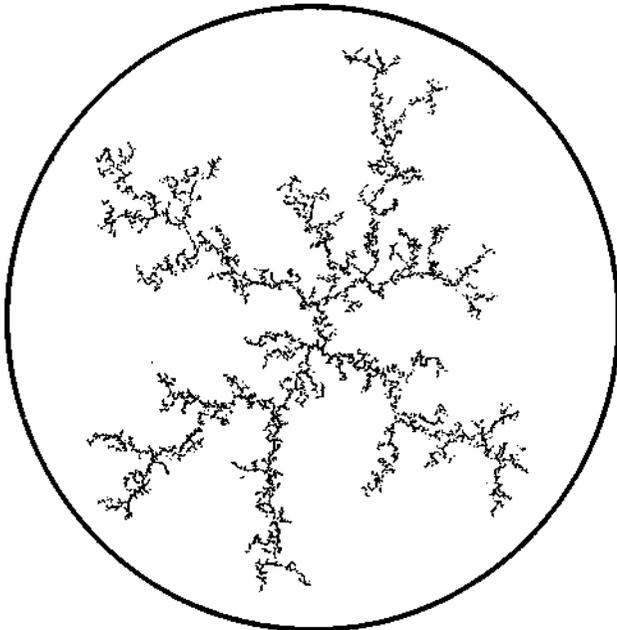


РИС.17. Образование вязких пальцев с фрактальной размерностью $D = 1,64 \pm 0,04$ в двумерной пористой среде, состоящей из стеклянных шариков диаметром 1 мм, насыпанных случайным образом в один слой между двумя пластинами из пластика. Воздух (черный) вытесняет глицерин при капиллярном числе $Ca = 0,15$. Структура наблюдалась при $t = 0,8t_0$ (время пробы $t_0 = 28,6$ с).

Структуры с вязкими пальцами растут главным образом на концах пальцев. Новые поры, в которые проникает воздух за небольшой интервал времени, показаны на рис.18.

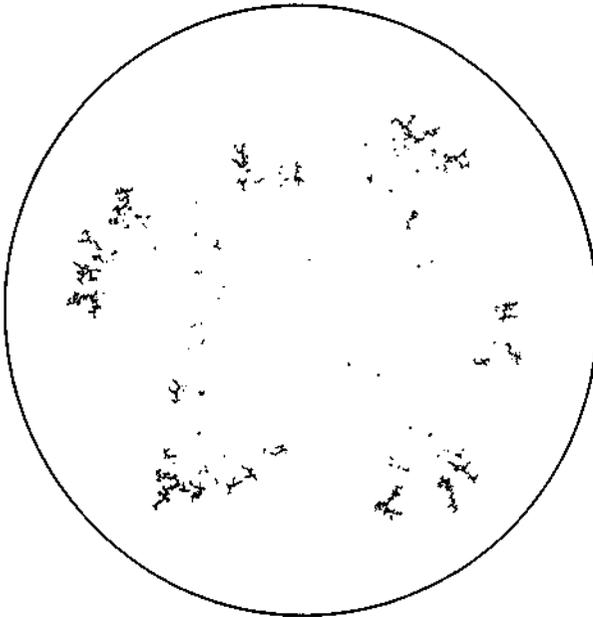


РИС.18. Зона активного роста структуры с вязкими пальцами, показанной на рис.17. Интервал времени между двумя структурами, использованными для построения зоны роста, равен 2,8 с, что соответствует относительному приращению времени $\Delta t/t_0 = 0,10$.

В экспериментах измеряли массу m_i островов роста, изображенных на рис.18. Острова перенумерованы в произвольном порядке индексом $i=1,2,\dots,N_j$, где N_j —число узлов, в которых наблюдается рост.

Пусть $m_0 = \sum_i^N m_i$ —полная масса островов. Введем

нормированную массу

$$\mu_i = \frac{m_i}{\sum m_i} = \frac{m_i}{m_0}. \quad (14)$$

Набор $\mathcal{M} = \{\mu_i\}$ характеризует *наблюдаемый* рост структуры. Это множество приращений основной *меры новых точек роста* $\mathbf{M}_\#$ на уровне разрешения эксперимента. Новую меру $\mathbf{M}_\#$ не следует путать с гармонической мерой $M_\#$, рассмотренной ранее на примере ОДА.

Любая экспериментально наблюдаемая структура с вязкими пальцами является реализацией некоторого стохастического процесса. В любой момент своего роста структура с вязкими пальцами может захватить любой вакантный узел («пору») на периметре структуры. Обозначим

узлы на периметре индексом k . Тогда динамика роста вязких пальцев в принципе определяется набором $\mathcal{H} = \{p_k\}$ вероятностей того, что следующей окажется захваченной k -я пора на периметре. Набор \mathcal{H} вероятностей роста есть не что иное, как набор приращений гармонической меры $M_{\mathcal{H}}$ экспериментально наблюдаемой структуры с вязкими пальцами на уровне разрешения эксперимента. При захвате очередной поры мера $M_{\mathcal{H}}$ *изменяется*, так как изменяется периметр структуры. Рост, происходящий в любом узле, изменяет вероятности роста во всех узлах периметра. *Мера новых точек роста* $M_{\#}$ выражает интегральный эффект последовательности процессов проникновения в поры, и мы заключаем, что мера $M_{\#}$ лишь косвенно связана с гармонической мерой.

В следующих разделах мы проанализируем эксперименты по образованию вязких пальцев, связывая полученные данные с фрактальной мерой зон активного роста.

Фрактальное множество точек роста. Рассмотрим множество точек \mathcal{N} , на котором мы наблюдали рост, т. е. множество пор, в которые проникла вытесняющая жидкость. Точки этого множества имеют $\mu_i > 0$, и множество \mathcal{N} есть граница раздела между старыми точками роста и новыми точками роста. Число точек в множестве \mathcal{N} равно N_I и увеличивается по мере того, как растет структура с вязкими пальцами. Мы ожидаем, что для фрактальной структуры N_I удовлетворяет соотношению

$$N_I = a \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{D_I}. \quad (15)$$

Здесь D_I - размерность растущей поверхности раздела, δ - размер клетки того покрытия, посредством которого производится анализ структуры, и R_g - радиус гирации. Мы могли бы воспользоваться вместо радиуса гирации R_g длиной самого большого пальца, так как с точностью до ошибки эксперимента эти величины пропорциональны. Соотношение (15) показывает, что с увеличением размеров растущей структуры с вязкими пальцами N_I возрастает, а с уменьшением размера δ ячейки, т. е. с уменьшением разрешения, с которым анализируется множество точек \mathcal{N} , число N_I убывает.

Подсчитали N_I для трех последовательностей структур в экспериментах. На рис. 19 приведен график зависимости N_I от соответствующего радиуса гирации R_g в дважды логарифмическом масштабе.

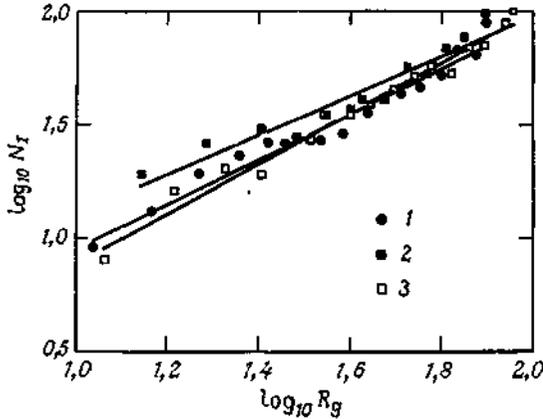


РИС.19. Число точек роста как функция радиуса гирации по трем экспериментам с вытеснением глицерина. Прямые получены в результате подгонки соотношений (15) по экспериментальным точкам. Значения подгоночных параметров: 1) $a = 0,9 \pm 0,2$; $D_I = 1,01 \pm 0,05$; 2) $a = 1,7 \pm 0,6$; $D_I = 0,87 \pm 0,08$; 3) $a = 0,6 \pm 0,1$; $D_I = 1,11 \pm 0,04$. Фрактальная размерность растущей поверхности $D_I = 1,0 \pm 0,1$.

Проводя прямые, наименее уклоняющиеся от экспериментальных точек, находим, что множество точек \mathcal{N} - фрактал с размерностью

$$D_I = 1,0 \pm 0,1 \quad (16)$$

и амплитудой $a = 1,1 \pm 0,5$. Граница между старыми и новыми точками роста - это *фрактальная пыль* на плоскости, имеющая фрактальную размерность 1.

Размерность по подсчету клеток множества точек \mathcal{N} при заданном радиусе гирации получается путем варьирования величины клетки δ . Подгоняя соотношение (16) к данным, полученным при подсчете клеток, получаем оценку для фрактальной размерности границы между старыми и новыми точками роста: $D_I = 1,0 \pm 0,2$. Некоторая неопределенность этой оценки связана с тем, что наблюдаемое множество точек \mathcal{N} представляет собой лишь *конечную выборку* из основной фрактальной меры. Для любого конечного множества точек $N_I(b \rightarrow 0) = \text{const}$. Это соответствует размерности, равной нулю. Переход к $D = 0$ обусловлен конечным разрешением экспериментальных наблюдений.

Микин, Уиттен и др. исследовали растущую границу между старыми и новыми точками роста, численно моделируя ОДА, и нашли, что N_I

возрастает как $N_0^{0,625+0,02}$, где N_0 -масса кластера. Из этого результата следует, что размерность $D_I = 1,07 \pm 0,04$, так как $N_0 \sim R_g^D$, где $D = 1,71$ есть фрактальная размерность кластеров, возникающих при ОДА. Микин и Уиттен определили число частиц N_I , соприкасающихся с начальным кластером, состоящим из N_0 частиц, после того как к нему добавилось K частиц. Эти авторы обнаружили, что при $K \rightarrow \infty$ число N_I стремится к некоторому пределу. Таким образом, N_I зависит только от структуры кластера и не зависит от K в пределе больших K .

Удалось достичь удовлетворительного согласия между экспериментом и численным моделированием, и пришли к заключению, что и эксперименты, и численное моделирование дают $D_I \approx 1$ в качестве фрактальной размерности границы между старыми и новыми точками роста.

Кривая $f(\alpha)$. До сих пор мы рассматривали только множество точек с $\mu_i > 0$. Выделим теперь *подмножество* \mathcal{N}_μ , состоящее из всех точек роста, для которых $\mu \leq \mu_i \leq \mu \pm \Delta\mu$. Если задать меру масштабно-инвариантным образом, то окажется, что такие подмножества являются фрактальными. Имея это в виду, мы зададим подмножества точек роста с помощью показателя Липшица - Гельдера α , определив его соотношением (49):

$$\mu = \left(\frac{\delta}{R_g} \right)^\alpha. \quad (17)$$

Это соотношение по существу представляет собой определение показателя α :

$$\alpha = \frac{\ln \mu}{\ln (\delta/R_g)}. \quad (18)$$

В определении показателя α можно вместо R_g использовать длину наибольшего вязкого пальца. Такая замена повлекла бы за собой небольшой сдвиг в значениях α , не существенный для больших кластеров.

Выберем показатель Липшица - Гельдера в интервале от α до $\alpha + \Delta\alpha$. Из соотношения (17) находим соответствующий интервал для μ_i структуры с вязкими пальцами и радиусом гирации R_g , наблюдаемой при разрешении δ . Множество точек роста, образующих островки, которые и порождают μ_i в соответствующем интервале, есть множество \mathcal{N}_α . Множество всех точек роста можно представить в виде объединения всех таких множеств:

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{N}_\alpha. \quad (19)$$

Если \mathcal{N}_α -фрактальное множество, то мы полагаем, что число точек $\mathcal{N}_\alpha(\delta, R_g)$ в этом множестве удовлетворяет скейлинговому соотношению, аналогичному соотношению (15):

$$N_\alpha(\delta, P_g) = \Delta \alpha \rho_\alpha(\delta, P_g) = \Delta a b_\alpha \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{f(\alpha)}. \quad (20)$$

Число точек в множестве пропорционально ширине интервала $\Delta\alpha$, поэтому мы ввели плотность ρ_α , не зависящую от этого интервала. В этой связи еще раз подчеркнем, что конечные множества точек (а при обработке экспериментальных результатов мы с необходимостью рассматриваем конечные множества) представляют собой лишь выборки из фрактальных множеств \mathcal{S}_g , которые определены только в асимптотическом пределе бесконечных систем или бесконечного разрешения.

Соотношение (20) в принципе может быть использовано для определения фрактальной размерности $f(\alpha)$ множества-носителя значений меры, характеризуемых показателем α так же, как при определении фрактальной размерности точек роста в предыдущем разделе. К сожалению, оказалось, что наши модели слишком малы и это исключает возможность применения прямого подхода. Тем не менее мы можем получить оценку кривой $f(\alpha)$, используя измеренные значения μ_i . Прежде всего заметим, что максимальное значение $f(\alpha)$ можно найти, используя для общего числа точек роста следующее выражение:

$$N_I = \int d\alpha \rho(\alpha). \quad (21)$$

Из соотношений (15) и (20) получаем

$$a \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{D_I} = \int d\alpha b_\alpha \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{f(\alpha)}. \quad (22)$$

Соотношение (22) справедливо при R_g и δ , изменяющихся в довольно широких пределах, если подынтегральное выражение имеет резкий максимум при некотором значении α_0 . Если это так, то мы можем вычислить интеграл методом перевала и получить, что

$$f(\alpha_0) = D_I. \quad (23)$$

Амплитуда a зависит от вида функциональных зависимостей b_α и f_α и ее нельзя определить в общем виде. Заметим также, что, поскольку N_α — подмножество множества точек роста, справедливо соотношение

$$0 \leq f(\alpha) \leq D_I, \quad (24)$$

которое согласуется с равенством (23).

Чтобы получить кривую $f(\alpha)$, воспользуемся наблюдаемыми значениями $\{\mu_i\}$, построим гистограмму плотности $\rho(\alpha)$ и график зависимости

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\rho(\alpha)) - \ln b_0}{\ln(R_g/\delta)} \quad (25)$$

от параметра α , определяемого соотношением (18). Параметр b_0 соответствует масштабно-независимой части интеграла соотношения (22) и выбран так, что максимальное значение кривой $f(\alpha)$ равно D_I и достигается при $b_0 \sim 1,4$. Результат такого анализа для трех независимых экспериментов представлен на рис.20.

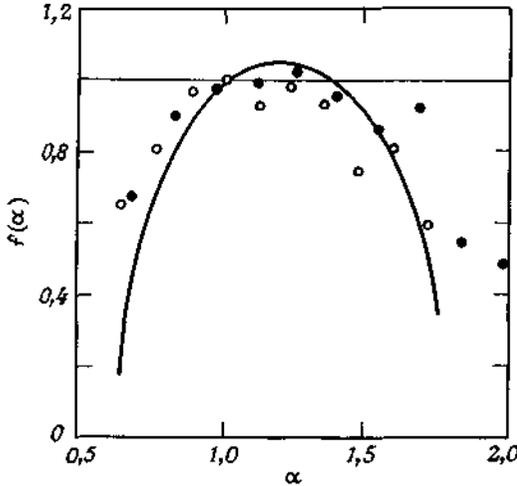


РИС.20. Кривая $f(\alpha)$ для фрактальной меры нового роста, описывающая динамику образования вязких пальцев в пористых моделях. Черные и светлые кружки соответствуют структурам с $R_g/\delta \sim 170$ и 80 клеткам. Кривая $f(\alpha)$ получена по кривой $\tau(q)$.

Заметим также, что b_α в принципе может сильно зависеть от α . Следовательно, использование параметра b_0 вместо b_α в соотношении (25) при анализе экспериментальных данных означает, что мы получаем *эффективный* показатель $f(\alpha)$. Чтобы получить вид функциональной зависимости b_α , необходимы эксперименты с высоким разрешением.

Момент меры. Фрактальную меру, определенную на точках можно проанализировать на основе моментов наблюдаемой меры μ_i , определяемых соотношением

$$N(q, \delta, R_g) = \sum_{i=1}^{N_I} \mu_i^q = N(q) \left(\frac{R_g}{\delta} \right)^{\tau(q)}. \quad (26)$$

При $q = 0$ мы находим, что число $N(q = 0, R_q)$ равно полному числу островов N_I в зоне роста. Из соотношений (15) и (26) заключаем, что $\tau(q = 0) = D_I$ и $N(q = 0, R_q) = a$.

Показатель массы $\tau(q)$ мы находим, подгоняя кривую (26) к экспериментальным данным, а показатели $f(\alpha)$ и α определяем из соотношений (78). Это преобразование позволяет нам перейти от усредненной кривой $\tau(q)$ к кривой $f(\alpha)$ (рис.20).

Большие значения α соответствуют малым значениям μ_i . В экспериментах обнаружили, что определить очень малые значения μ чрезвычайно трудно из-за конечного разрешения. Это ограничивает точность результатов при больших значениях α . В прямом анализе, которому посвятили предыдущий раздел, и в изложенном выше анализе на основе показателя $\tau(q)$ использован один и тот же набор наблюдений $\{\mu_i\}$ для трех различных экспериментов и 13 различных наблюдений зоны роста. Рассеяние точек, обнаруженное при прямом анализе, дает лучшее представление ограниченного разрешения при экспериментальных наблюдениях, чем гладкая усредненная кривая, определяемая по показателю массы $\tau(\delta)$. Заметим, что в обоих случаях мы использовали для определения неизвестных амплитуд скейлинговые свойства N_I . Это снижает максимум кривой $f(\alpha)$ до 1.

Подчеркнем, что гармоническая мера M_H отлична от меры множества новых точек роста M_m , соответствующих наблюдаемому росту. Периметр кластеров, образующихся при ОДА, пропорционален их массе. Все узлы, принадлежащие периметру таких кластеров, имеют ненулевую вероятность попадания в них частицы, совершающей случайное блуждание, т.е. являются носителями гармонической меры. Следовательно, можно ожидать, что $f(\alpha)$ принимает максимальное значение 1,71 при значении α , соответствующем $\delta = 0$. В противоположность этому носителем меры множества новых точек роста, как следует из самого названия, являются новые точки роста \mathcal{N} . Это множество узлов представляет собой фрактальное множество с размерностью $D_I \approx 1$. Следовательно, можно ожидать, что максимум функции $f(\alpha)$ равен D_I .

6. Распространении жидкости через среду

Бродбент и Хаммерсли рассмотрели общую ситуацию, возникающую при *случайном* распространении *жидкости* через *среду*, когда абстрактные термины «жидкость» и «среда» могут быть интерпретированы в соответствии с физическим смыслом задачи. В обычных процессах диффузии случайность есть не что иное, как случайные блуждания частиц жидкости. Примером могут служить нерегулярное тепловое движение молекул в жидкости. Другой пример случайности, «вмороженной» в среду, Хаммерсли назвал *протеканием*, или *перколяционным* процессом, поскольку жидкость в среде ведет себя, как вода в перколяторе (кофеварке).

Процессы диффузии, такие, как распространение растворимого вещества в растворителе или движение электронов в полупроводнике, ныне хорошо поняты. Интерпретацию процессов диффузии как случайных блужданий см. в др разделах.

Диффундирующая частица может достигать любой точки в среде.

Иначе обстоит дело в случае протекания. Наиболее характерной особенностью перколяционных процессов является существование *порога протекания*, ниже которого процесс распространения жидкости ограничен *конечной* областью среды. В качестве примера Бродбент и Хаммерсли рассмотрели распространение заболевания деревьев, при котором те сбрасывают листву и перестают расти, в саду, где деревья посажены в узлах квадратной решетки. Если расстояния между деревьями возрастают настолько, что вероятность заражения соседнего дерева падает ниже критического значения p_c , то заболевание по саду не распространяется. Порогом протекания для этой задачи служит вероятность $p_c = 0,59275$ для протекания от узла к узлу квадратной решетки. Другой пример - просачивание воды или радиоактивных отходов в трещины и разломы горной породы. Вопрос заключается в том, останется ли вода локализованной в каком-то объеме или будет распространяться все дальше и дальше. И в этой задаче можно ожидать, что существует критический порог концентрации трещин.

Величину порога протекания можно определить с помощью численного моделирования. Аналогичной проблемой, имеющей огромный практический интерес, является распространение воды, вытесняющей нефть в пористых породах. В этом случае распространяющийся фронт жидкости (воды) может запереть нефть в некоторой области («ловушке»), что приводит, как показали Уилкинсон и Виллемсен, к *инвазивной перколяции*. Случайность, связанная с инвазией (вторжением) вытесняющей жидкости, зависит,

помимо прочего, от динамики образования ловушек. Идеи и понятия теории протекания применимы и к распространению и взаимосвязи трещин и разломов в горных породах и в материалах, используемых в технике.

Во многих приложениях не существует резкого различия между перколяционными процессами и диффузией. Важным случаем является диффузия от источника. Возникающий фронт диффузии имеет геометрическую структуру, тесно связанную с фрактальной геометрией протекания. На это впервые обратили внимание Саповал и др..

О перколяционных процессах существует обширная литература. Великолепное введение в теорию протекания принадлежит перу Штауффера. Аарони и Штауффер дали точное изложение теории и обсудили несколько важных приложений. Более ранние обзоры Шанте и Киркпатрика, Киркпатрика, Штауффера и Эссама содержат много существенных деталей.

Задача о протекании допускает очень простое описание и приводит к множеству фрактальных структур. Основные понятия теории протекания мы проиллюстрируем на примере двумерного протекания на квадратной решетке.

6.1. Протекание от узла к узлу на квадратной решетке

Запомним случайным образом некоторую долю (равную $p = 0,5$) узлов квадратной сетки, т.е. квадратной решетки, какими-нибудь объектами, как показано на рис. 1.

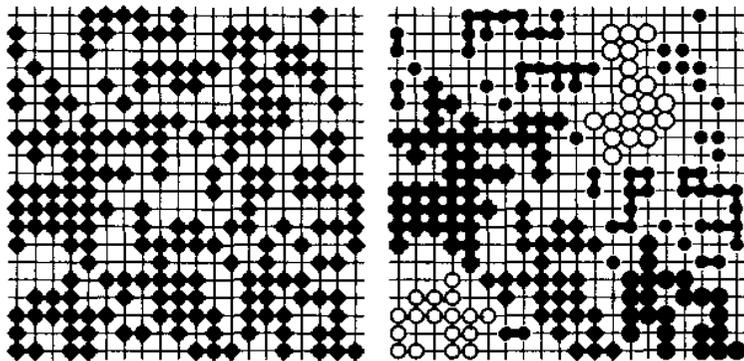


РИС. 1. Слева: квадратная решетка, половина узлов которой занята «порами». Справа: связанные образования, или «кластеры». Наибольшие кластеры для большей наглядности изображены другими символами пор. Решетка состоит из $L \times L$ узлов с $L = 20$.

Эти объекты соответствуют порам в матрице. Соседние поры соединены между собой небольшими капиллярными каналами. Жидкость, инжектированная в любую пору, может вторгнуться только в пору, непосредственно соединенную с данной капиллярным каналом, или «связью». Поры, или «узлы», связанные с выбранным центром инъекции, образуют так называемый *кластер*. На рис. 1 наибольший кластер содержит 46 узлов, второй по величине кластер содержит 29 узлов и т.д. Существует несколько кластеров, содержащих лишь по одной поре. Рассматривая рис. 1, мы быстро замечаем, что ни один из кластеров не простирается по всей решетке. Следовательно, невозможно инжектировать жидкость в узел у левого края решетки и наблюдать, что она вытечет где-то у правого края образовавшейся структуры.

К чему приводит повышение вероятности p иметь пустую пору в узле решетки, показано на рис. 2.

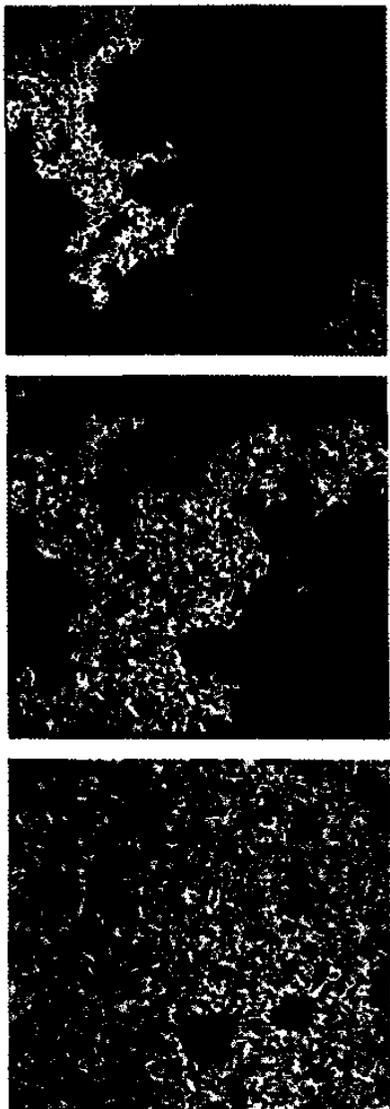


РИС. 2. Влияние последовательного увеличения вероятности заполнения p на квадратной решетке 160×160 . Значения вероятности заполнения сверху вниз: $p = 0,58; 0,60; 0,62$. На каждой из трех фигур наибольший кластер показан светлым цветом. Менее крупные кластеры показаны более темным цветом. Незанятые узлы показаны черным цветом.

Кластеры различной величины изображены различным цветом (от черного до белого на рис. 2). Наибольший (белый) кластер растет от кластера умеренных размеров при $p = 0,58$ до очень большого кластера, содержащего значительную часть всех узлов, при $p = 0,62$. При $p = 0,6$ наибольший кластер простирается по всей решетке, соединя левый и правый края решетки с ее нижним краем. Такой кластер называется *простирающимся по всей решетке*, или *перколяционным*, кластером. При повторении численных экспериментов всякий раз получаются новые конфигурации кластеров. Кластер, простирающийся по всей решетке, впервые возникает при $p = p_c \approx 0,593$. Численное моделирование на очень больших решетках показало, что вероятность образования простирающегося по всей решетке кластера при $p < p_c$ падает до нуля при $L \rightarrow \infty$. При $p > p_c$ простирающемся по всей решетке кластеру принадлежит конечная доля узлов. В случае протекания от узла к узлу на квадратной решетке *критическая вероятность* p_c , при которой впервые возникает кластер, простирающийся по всей решетке, равна $0,59275 \pm 0,0003$.

Вероятность протекания $P_\infty(p)$ определяется как вероятность того, что жидкость, инжектированная в каком-то одном случайно выбранном узле, оросит бесконечно много пор. Заметим, что вероятность иметь пору в том узле, где мы намереемся инжектировать жидкость, равна p . Вероятность того, что жидкость оросит бесконечно много пор, если ее инжектировать в пору, о которой известно, что та принадлежит кластеру, равна $P_\infty(p)/p$. На практике нам приходится рассматривать конечные системы, состоящие из N пор. Для квадратных решеток $N = L^E$, где $E = 2$ есть евклидова размерность пространства, в котором находится решетка. При численном моделировании мы определяем число узлов $M(L)$, принадлежащих наибольшему кластеру на решетке $L \cdot L$, и оцениваем вероятность протекания $P_N(p)$, которая равна величине $M(L)/L^2$, усредненной по результатам многих численных экспериментов, аналогичных представленным на рис. 2. Вероятность протекания определяется выражением

$$P_\infty(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(p). \quad (1)$$

Для квадратной решетки мы оценивали вероятность протекания $P_N(p)$ на решетках $L \cdot L$ при $L = 50, 200$ и 450 узлов, производя соответственно 200, 100 и 10 независимых выборок. Результаты оценки вероятности протекания представлены на рис.3.

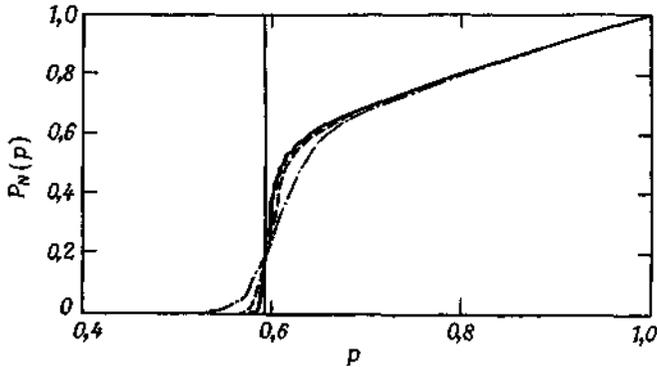


РИС. 3. Вероятность $P_N(p)$ принадлежности узла наибольшему кластеру как функция вероятности p того, что данный узел не заполнен - пора на квадратной решетке $L \times L$. Сплошная кривая построена при $L = 450$, штриховая - при $L = 200$ и 50. Вертикальная линия соответствует $p = p_c = 0,59275$.

При низкой концентрации пор p вероятность протекания P_N пренебрежимо мала. При увеличении p вероятность принадлежности узла к наибольшему кластеру резко возрастает вблизи $p_c = 0,593$, и при $p \rightarrow 1$ вероятность протекания P_N возрастает почти линейно до единицы. При увеличении L перколяционный переход при p_c становится более резким.

Критическая вероятность определяется как наибольшее значение вероятности p , при котором $P_\infty = 0$. Формально это можно записать в виде

$$p_c = \sup \{p, \text{ такового, что } P_\infty(p) = 0\}. \quad (2)$$

Следовательно, по определению $P_\infty(p) = 0$ при $p \leq p_c$. Перколяционный процесс претерпевает переход из состояния локальной связности к состоянию, в котором связи простираются неограниченно далеко. Экстенсивное моделирование и теоретические соображения показывают, что вблизи p_c вероятность протекания убывает по степенному закону

$$P_\infty(p) \sim (p - p_c)^\beta \text{ при } p > p_c \text{ и } p \rightarrow p_c. \quad (3)$$

Показатель β равен $5/36 = 0,1389\dots$ для двумерного и $\beta \approx 0,4$ для трехмерного протекания. В этом случае протекание аналогично магнитным фазовым переходам, при которых локальный порядок магнитных моментов возрастает в определенных пределах, когда температура понижается до температуры перехода T_c материала. Ниже T_c магнитные моменты в среднем выстраиваются по всему образцу, и мы получаем магнит. Многие теоретические методы, развитые для

исследования фазовых переходов, были применены к задачам протекания. Кроме того, по аналогии с теорией фазовых переходов были определены различные критические показатели. Так, для многих магнитных материалов вблизи критической точки намагничивание $m(T)$ убывает по степенному закону $(T_c - T)^\beta$ при β в интервале 0,3 — 0,5 для трехмерных фазовых переходов. Разумеется, при численных экспериментах вероятность протекания P_N остается отличной от нуля даже при $p < p_c$. Следует заметить, что в численном эксперименте, результаты которого представлены на рис. 3, нам неоднократно встречались случаи, когда самые большие кластеры почти соединяли противоположные стороны решетки при $p \approx p_c$. В оценки, представленные на рис. 3, эти случаи не входят.

6.2. Бесконечный кластер при p_c

Как растет масса, или число узлов, $M(L)$ наибольшего кластера с увеличением характерного размера L решетки? При $p > p_c$ мы ожидаем, что $m(L) \approx p_n(p) \cdot L^2$, где правая часть при $L \rightarrow \infty$ стремится к $P_\infty(p)L^2$, а $P_\infty(p)$ есть просто плотность узлов, принадлежащих перколяционному кластеру. В то же время при $p < p_c$ мы ожидаем, что $m(L) / L^2 \rightarrow 0$ при $L \rightarrow \infty$, так как $P_\infty(p < p_c) = 0$. При $p = p_c$ можно ожидать, что $M(L)$ будет возрастать *почти* как L^2 . Экстенсивные исследования зависимости $M(L)$ от L привели к следующему результату:

$$M(L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \ln L & \text{при } p < p_c, \\ L^D & \text{при } p = p_c, \\ L^E & \text{при } p > p_c. \end{cases} \quad (4)$$

(Знак \sim мы используем для обозначения и асимптотического равенства, и асимптотической пропорциональности. Это принято в литературе по теории протекания и позволяет избавляться от указания коэффициентов пропорциональности справа от знака \sim .)

Масса перколяционного кластера составляет при $p > p_c$ *конечную* долю всех узлов. Ниже p_c кластер, простирающийся по всей решетке, как правило, не существует. Однако если $M(L)$ интерпретировать как размер $s_{\text{макс}}$ *наибольшего* кластера, то оказывается, что $M(L)$ лишь очень слабо, т.е. логарифмически, возрастает с увеличением.

На пороге протекания $p = p_c$ масса кластера, простирающегося по всей решетке (он является и наибольшим кластером), возрастает с увеличением L по степенному закону L^D . Результаты численных экспериментов на квадратной решетке представлены на рис.4. Они

показывают, что перколяционный кластер на пороге протекания имеет *фрактальную* структуру с фрактальной размерностью D . Фрактальный перколяционный кластер на пороге протекания часто называют *внутренним* перколяционным кластером. Для результатов, представленных на рис. 4, фрактальная размерность D по оценкам имеет значение $\approx 1,89 \pm 0,03$. Указанная ошибка имеет статистическую природу и характеризует качество подгонки степенного закона к результатам численного моделирования, представленным на рис. 4.

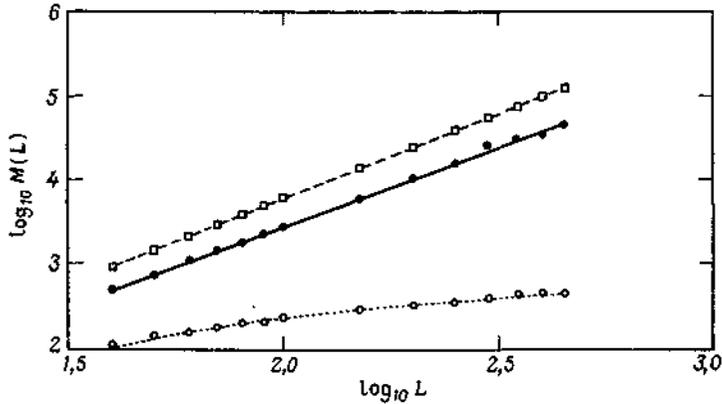


РИС. 4. Масса наибольшего кластера как функция линейного размера L квадратной решетки. Черные кружки соответствуют $p = p_c = 0,593$. Сплошная линия - зависимость $M(L) = AL^D$ с $D = 1,89$. При $p = 0,65$ (светлые квадраты) кривая, проведенная через экспериментальные точки (штриховая линия), дает $D = 2,03$. При $p = 0,5$, т. е. при $p < p_c$, экспериментальные точки (светлые кружки) ложатся на прямую $M(L) = A + B \ln L$ (показанную пунктиром).

Анализ систематических ошибок - дело тонкое. Когда перколяционный кластер на конечной решетке размером L составляет лишь часть внутреннего перколяционного кластера, то некоторые из узлов, не входящих в перколяционный кластер на решетке размером L , на самом деле принадлежат внутреннему перколяционному кластеру, так как соединены с ним связями, лежащими вне рассматриваемого фрагмента. При $p > p_c$ численное моделирование на квадратной решетке приводит к фрактальной размерности $d = 2,03 \pm 0,01$ для перколяционного кластера. И в этом случае ошибка имеет статистическую природу, а D есть угловой коэффициент прямой, проведенной через точки, полученные с помощью численного моделирования при $p = 0,65$ и представленные на рис.4. По точкам, соответствующим на этом рисунке наибольшим кластерам, была построена подгоночная прямая $M(L) = A + B \ln L$ с $B = -426$ и $A = 327$. Она проведена на рис. 4

штриховой линией. Все результаты численных экспериментов, представленные на рис. 4, согласуются с асимптотическим поведением, описываемым соотношением (4.).

Сайкес и Эссам показали, что порог протекания от узла к узлу на треугольной решетке равен $p_c = 1/2$ (*точный* результат). Это позволяет получать результаты для внутренних перколяционных кластеров с очень малой погрешностью, производя численные эксперименты на треугольной решетке. Такие результаты, полученные Штауффером и представленные на рис. 5, позволяют получить для фрактальной размерности D оценку, согласующуюся с точным значением $D = 91/48$.

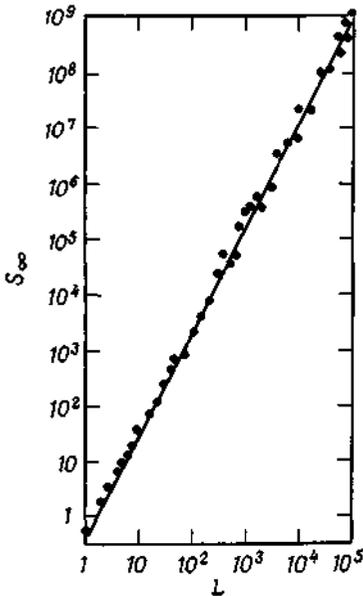


РИС. 5. Размеры перколяционного кластера на пороге кластеризации $p_c = 1/2$ треугольной решетки как функция линейного размера L решетки. Угловой коэффициент прямой в дважды логарифмических координатах дает при больших L фрактальную размерность $D = 91/48$.

Как показывают результаты численных экспериментов, это значение возникает в задачах с протеканием от узла к узлу на всех двумерных решетках.

Мы заключаем, что при протекании от узла к узлу на двумерных решетках внутренний перколяционный кластер имеет *фрактальную структуру*, и с увеличением L масса такого кластера возрастает в среднем как

$$M(L) \sim \bar{A} L^D, \quad D = 91/48 = 1,895\dots \quad (5)$$

Среднее берется по многим реализациям внутреннего перколяционного кластера. Амплитуда \bar{A} есть эффективная амплитуда, вычисленная по значениям амплитуд для кластеров конечных размеров. Степенной закон (5) для массы внутреннего перколяционного кластера выполняется только *асимптотически* при больших L . При реалистических значениях L это скейлинговое соотношение следует модифицировать, введя в него поправочные члены :

$$M(L) = AL^D + A_1 L^{D_1} + A_2 L^{D_2} + \dots, \quad (6)$$

где $D > D_1 > D_2$. Определить поправочные члены с помощью прямых численных экспериментов довольно трудно. Аарони и др. предложили метод трансфер-матрицы, упрощающий решение этой задачи. Как правило, в двумерных задачах $D_1 \approx D - 1$.

Заметим, что кривая Мандельброта-Гивена имеет фрактальную размерность $D = 1,892$ и может служить хорошей моделью для перколяционного кластера.

6.3. Самоподобие перколяционных кластеров

Внутренний бесконечный кластер (перколяционный кластер) *статистически самоподобен*. Рассмотрим перколяционный кластер при $p = 0,6$, показанный на среднем снимке рис. 2. Если разрешение не слишком велико, то все детали оказываются размазанными, но в целом кластер остается подобным себе при большем разрешении.

Сохраняется общая структура кластера, например то, что в нем имеются дырки всех возможных размеров. Такое самоподобие тесно связано с фрактальной структурой внутреннего перколяционного кластера, и ему с помощью ренормировки *реального пространства* можно придать количественный характер. Суть этой ренормировки лучше всего можно продемонстрировать на примере протекания от узла к узлу на треугольной решетке с $p_c = 1/2$.

Рассмотрим перколяционный кластер на треугольной решетке с $p = p_c$, изображенный на рис. 6.

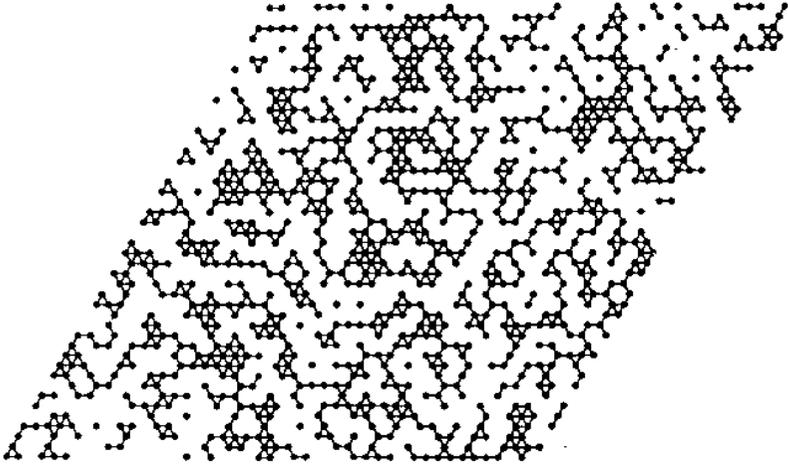


РИС. 6. Перколяционные кластеры на треугольной решетке при пороге перколяции $p_c = 1/2$.

На треугольной решетке мы легко можем изменять ее масштаб в $b = \sqrt{3}$ раза, группируя занятые узлы, т.е. пустые поры, так, как показано на рис. 7.

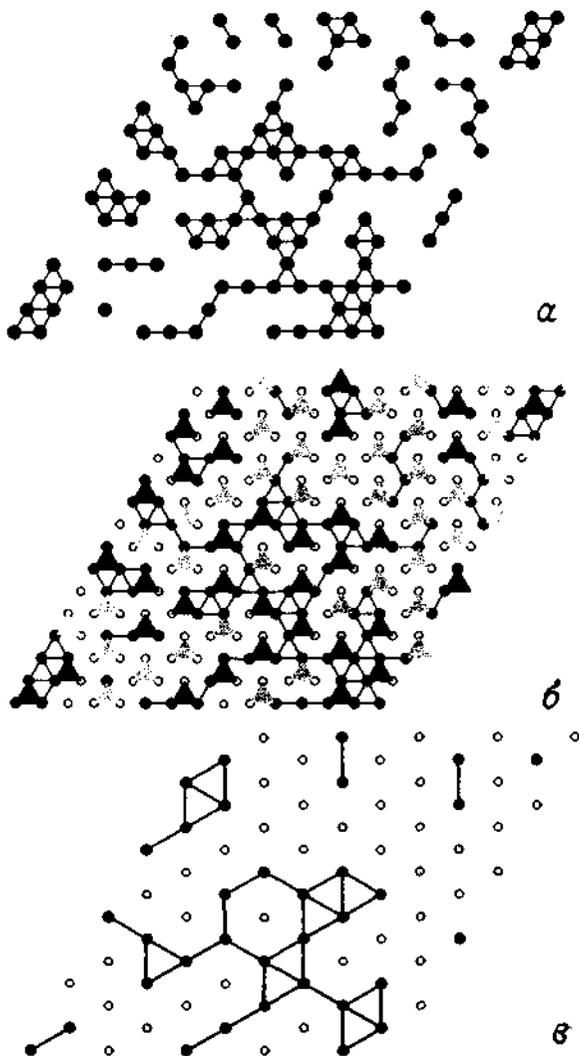


РИС. 7. a - кластеры на пороге кластеризации p_c на треугольной решетке; b - огрубление треугольной решетки в $b = \sqrt{3}$ раз. Занятые узлы изображены черными кружками, незанятые (поры) - светлыми. Группы из трех узлов образуют блоки, обозначенные заштрихованными треугольниками. Если большинство узлов, принадлежащих треугольнику, занято, то треугольник выкрашен в черный цвет; c - огрубленная перколяционная решетка, на которой черные узлы соответствуют черным треугольникам на решетке b .

Исходная ячейка с $b^2 = 3$ узлами заменяется одним новым узлом, который считается свободной порой (занятым узлом), если большинство узлов исходной ячейки занято. Такое преобразование подобия гарантирует, что кластер из двух или трех пустых пор становится пустой порой в более грубой решетке, изображенной на рис. 7, б.

Результатом такого огрубления является новая решетка с новой концентрацией p' занятых узлов. Для простого примера, представленного на рис. 7, а, вероятность найти блок из трех занятых узлов, как нетрудно заметить, равна p^3 , так как каждый из узлов заполняется независимо с вероятностью p . Вероятность найти два занятых узла равна $3p^2(1 - p)$, так как существуют три различных расположения пустого узла. Следовательно, новую концентрацию p' можно представить в виде

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p). \quad (7)$$

Огрубление полученной решетки можно производить снова и снова. И при каждой итерации новая концентрация занятых узлов выражается через старую соотношением (7). На рис. 8 приведен график изменения концентрации $p' - p$, вызванного одной итерацией ренормализационной процедуры, как функции от старой (до ренормировки) концентрации p занятых узлов.

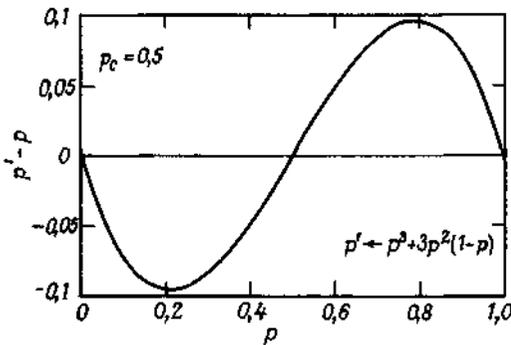


РИС. 8. Изменение концентрации занятых узлов $p' - p$ как функция концентрации занятых узлов p на треугольной решетке до огрубления решетки в $b = \sqrt{3}$ раз.

Заметим, что $p = p_c = 0,5$ удовлетворяет итерационному уравнению (7), поэтому p_c есть неподвижная точка ренормировки. Если мы начинаем с решетки, для которой $0 < p < p_c$, то $p' - p < 0$ и новая концентрация занятых узлов оказывается меньше исходной. Следовательно, если мы начинаем с большой треугольной решетки и неоднократно применяем

ренормализационное преобразование, то в конце концов у нас получается решетка с пустыми узлами. С другой стороны, если мы начинаем с $1 > p > p_c$, то концентрация возрастает с каждой итерацией, и в конце концов мы получаем грубую решетку, все узлы которой заняты, т. е. «заполнены» пустыми порами. В критической точке (при $p = p_c$), как нетрудно видеть, ренормировка *не изменяет* концентрацию занятых узлов, и грубая решетка также находится на пороге протекания. Критическая точка есть *неподвижная точка* ренормализационного преобразования. Кроме нее существуют еще две тривиальные неподвижные точки: $p = 0$ и $p = 1$. Действие процедуры ренормировки, схематически показанное на рис. 7 для большой треугольной решетки на пороге протекания, представлено на рис. 9.

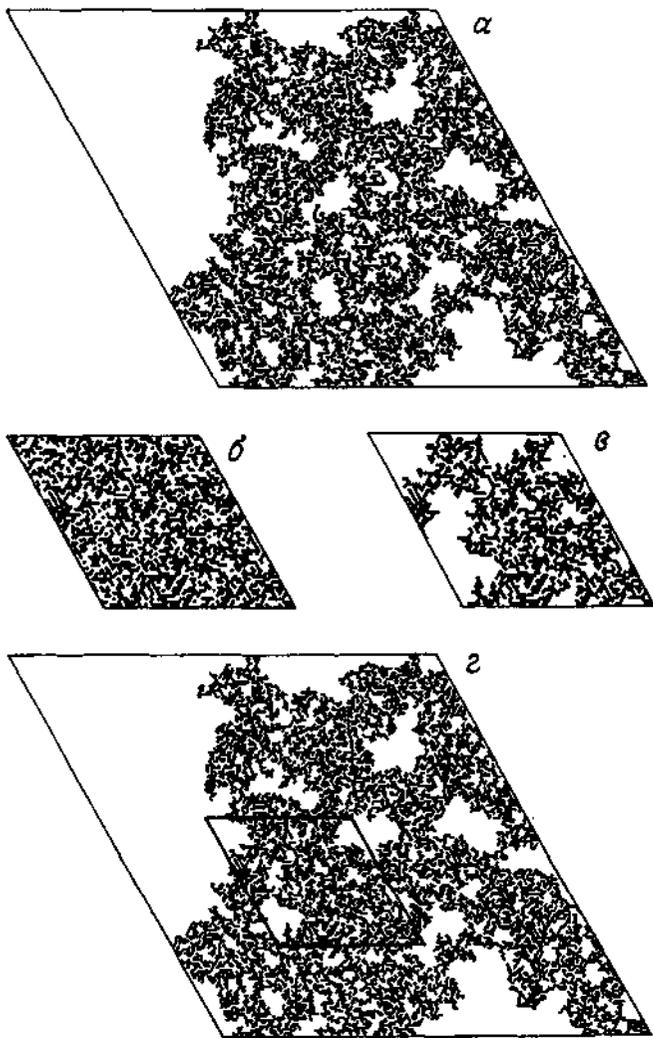


РИС. 9. Самоподобие и эффект огрубления на треугольной решетке при $p = p_c$. Преобразование подобия производится с коэффициентом $b = \sqrt{3}$. Соответствующая процедура дважды проиллюстрирована на рис. 7. a - перколяционный кластер на пороге кластеризации на исходной доске 180×180 ; b - занятые узлы, полученные после преобразования подобия исходной решетки с коэффициентом подобия $b = 3$; v - перколяционный кластер на решетке \bar{b} , подвергнутой преобразованию подобия; $г$ -решетка, подвергнутая преобразованию подобия, вставлена в то место исходной решетки, которое

обведено рамкой. Общий вид перколяционного кластера, получившегося в результате такой операции, вы видите на этом рисунке.

Качественно структура расположения занятых узлов, полученная при двукратном применении ренормализационного преобразования (рис. 9, б), неотличима от фрагмента исходной решетки. Перколяционный кластер на преобразованной решетке (см. рис. 9, в) качественно такой же, как исходный перколяционный кластер. Важно отметить, что скейлинговые преобразования не влияют на вероятность p заполнения узла, и, следовательно, система, находившаяся при $p = p_c$, после ренормализационного преобразования остается на пороге протекания. По виду решетки невозможно отличить, на каком уровне огрубления, или увеличения, «сделан снимок». Этот аспект самоподобия мы проиллюстрировали с помощью подобно измененного фрагмента решетки, вставленного на то же место в исходной решетке. Из статистического самоподобия следует, что возникающий в результате преобразования перколяционный кластер является равновероятной реализацией процесса, порождающего перколяционные кластеры. Статистическое самоподобие внутреннего перколяционного кластера можно использовать для получения количественного утверждения о массе кластера. Степенная зависимость (5) массы $M(L)$ кластера остается в силе и для кластера после преобразования подобия с коэффициентом b . Но линейный размер преобразованной решетки равен всего лишь L/b , и, следовательно, число узлов $M(L/b)$ должно быть равно $\bar{A}(L/b)^D$. Из соотношения (5) следует, что массы кластеров при двух масштабах связаны между собой скейлинговым соотношением

$$M(L) = b^D M(L/b). \quad (8)$$

Это соотношение выполняется только асимптотически в пределе больших L и L/b . Но оно имеет место при *всех* значениях масштабного множителя, согласующихся с этим ограничением. Справедливо и обратное утверждение о том, что из скейлингового соотношения (8) следует степенная зависимость. Так как левая часть соотношения (8) не зависит от b , масса кластера $M(L)$ должна быть *однородной функцией*, и единственно возможной формой для $M(L)$ становится степенная зависимость $M(L) \sim L^D$. Фрактальная геометрия внутреннего перколяционного кластера и статистическое самоподобие взаимосвязаны, и эта взаимосвязь количественно выражается соотношением (8).

6.4. Конечные кластеры при протекании

Величина кластеров при перколяции может варьироваться в широких пределах (см. рис. 2). Если вероятность занятия узла опускается ниже p_c , то размеры кластеров постепенно убывают. Выше p_c кластеры различной величины существуют в дырах перколяционного кластера. Число узлов s в кластере и его линейная протяженность имеют характерные распределения. Порог протекания определяется распределением кластеров по величине, которое не имеет характерного масштаба, т.е. должно быть степенным распределением. Чтобы придать этому распределению более точный смысл, введем радиус гирации (гирорадиус) $R_g(s)$ кластера, состоящего из s узлов:

$$R_g^2(s) = \frac{1}{2s^2} \sum_{i,j} (r_i - r_j)^2. \quad (9.)$$

Радиус гирации есть не что иное, как среднеквадратичный радиус кластера, измеряемый от центра тяжести последнего. Рассмотрим конечный кластер, изображенный на рис. 10.

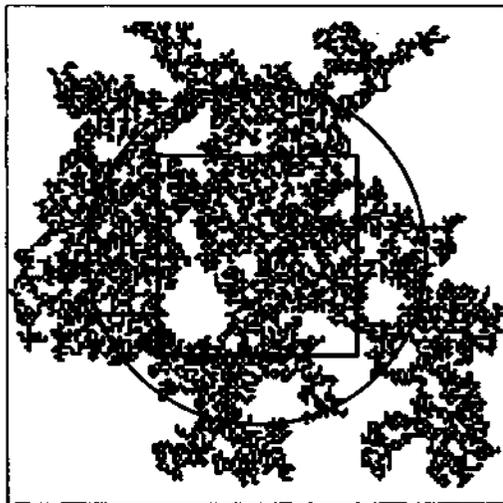


РИС. 10. Конечное состояние кластера на квадратной решетке при p_c . Радиус окружности равен радиусу гирации $R_g(s) = 51$ кластера, содержащего 6700 узлов. Квадрат в центре имеет сторону $L = 60$. Наименьший квадрат, вмещающий кластер, имеет сторону $L_s = 150$.

Если, мы поместим этот конечный кластер (при $p = p_c$) внутрь клетки со стороной $L \leq 2R_g(s)$, то он окажется частью внутреннего перколяционного кластера, простирающегося по всей клетке, и, как и прежде, мы получим зависимость $M_S(L) \sim L^D$. Когда сторона клетки возрастет больше $2R_g$, мы увидим края кластера. При достаточно больших L весь кластер окажется внутри клетки со стороной L_g и все сомнения относительно конечности кластера рассеются, так как масса кластера уже не будет возрастать с увеличением L . Эти соображения можно резюмировать следующим образом. Если на кластер, состоящий из s узлов, наложить клетку со стороной L , то масса $M_g(L)$, оказавшаяся внутри клетки, определяется соотношением

$$M_s(L) = L^D f(L/R_g) \rightarrow \begin{cases} \bar{A}(L/R_g)^D & \text{при } L \ll R_g(s), \\ s & \text{при } L \gg R_g(s). \end{cases} \quad (10)$$

Переходная функция $f(x)$ здесь стремится к постоянной амплитуде \bar{A} в соотношении (5) при $x = L/R_g(s) \rightarrow 0$. Но так как масса $M_S(L)$ при $x \gg 1$ должна перестать зависеть от L , мы заключаем, что $f(x) \sim x^{-D}$, поэтому член L^D , стоящий перед f в соотношении (10), выпадает. В результате мы получаем следующее соотношение между радиусом гирации и числом узлов в кластере:

$$s = M_s(L \gg R_g) \sim L^D (L/R_g)^{-D} \sim R_g^D. \quad (11)$$

Соотношение $s \sim R_g(s)^D$ было подтверждено многочисленными численными экспериментами. На рис. 11 показаны результаты, полученные Гроссманом и Аарони, Аарони относительно зависимости s от L_s , где L_s -длина стороны наименьшей клетки, вмещающей в себя кластер.

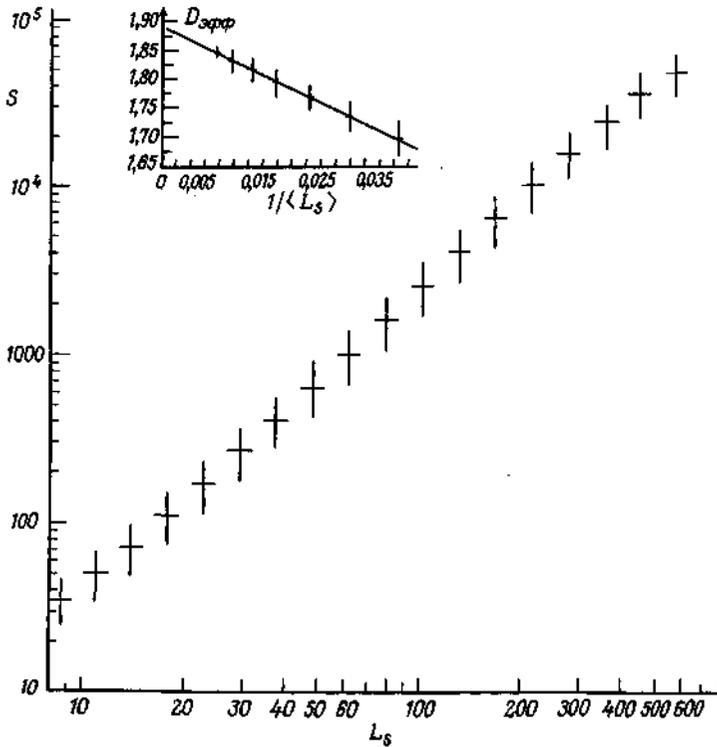


РИС. 11. Зависимость масс кластеров s (числа узлов) от линейных размеров L_s кластеров для квадратной решетки при $p_c = 0,5927$. Диапазоны ошибок указывают одно стандартное отклонение относительно среднего. На врезке показан результат экстраполяции прямой с угловым коэффициентом

$$D_{эфф} = \partial \ln s / \partial \ln L_s$$

при $s \rightarrow \infty$, где $D = 1,89 \pm 0,01$.

Кластеры не имеют характерных размеров, которые не зависели бы от размера самого кластера, и поэтому можно ожидать, что $M(L_s)$ изменяется по степенному закону как L_s^D . Это отчетливо видно на рис. 11. На врезке показана экстраполяция «эффективной» фрактальной размерности, вычисленной по части кривой $s(L_s)$ по формуле $D_{эфф} =$

$= \partial \ln s / \partial \ln L_s$. Полученное значение совпадает в пределе больших кластеров с ожидаемым значением фрактальной размерности $D = 1,89 \pm 0,01 \approx 91/48$. Размерность $D_{эфф}$ может быть получена путем подгонки прямой относительно $1/L_s$. Это свидетельствует о том, что главная поправка D_I в уравнении (6) определяется соотношением $D_I = D - 1$. Интервалы ошибок указывают на разброс значений параметра s в «окнах» линейного размера L_s . В свою очередь существование этого разброса подчеркивает, что степенной закон $s \sim L_s^D$ применим только к *средним* величинам. Интервалы ошибок имеют фиксированную длину в логарифмической шкале. Это позволяет заключить, что флуктуации значения s при заданном значении L_s определяются соотношением

$$\langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2 \sim L_s^{2D}. \quad (12)$$

Такие флуктуации называются *лакунарностью*.

6.5. Распределение величины кластеров при $p = p_c$

Рассмотрим теперь распределение размеров кластеров, полученных при критическом значении p_c (на пороге протекания) и представленных на рис. 2. Пусть n_s - среднее число кластеров, содержащих s узлов, *на один узел*. Иначе говоря, число кластеров, содержащих s узлов, на решетке $L \times L$ должно быть по этой оценке равно $n_s L^2$. Следовательно, если мы выбираем узел случайным образом, то с вероятностью, пропорциональной sn_s , он принадлежит кластеру, состоящему из s частиц, поскольку «столкнуться» с таким кластером блуждающая частица может s способами. Таким образом, нормированная на один узел вероятность c_s того, что выбранный случайным образом узел принадлежит кластеру, состоящему из s узлов, определяется выражением

$$c_s = \frac{sn_s}{\sum_s sn_s}. \quad (13)$$

Нормирующий множитель $1/\sum_s sn_s$ есть просто доля узлов решетки, принадлежащих *конечным* кластерам. Средняя масса кластера есть величина

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{s=1}^{L^D} s \cdot sn_s(L)}{\sum_s sn_s}. \quad (14)$$

При численном моделировании на конечной решетке со стороной L нам необходимо установить, что n_s зависит от L , поэтому в соотношении (14) эта зависимость записана как $n_{s,L}$. Сумма в числителе правой части берется по всем кластерам от самых маленьких

с $s = 1$ до самых больших, с числом частиц порядка $s_{\text{макс}} \sim L^D$. Соображения масштабной инвариантности позволяют найти асимптотическую зависимость для $n_s(L)$.

Рассмотрим решетку $L \times L$ на пороге протекания. Преобразование подобия с коэффициентом b переводит ее в решетку $(L/b) \times (L/b)$, которая также находится на пороге протекания. Вероятность того, что случайно выбранный на решетке $L \times L$ узел принадлежит кластеру, состоящему из s частиц, равна $sn_s(L)$, где n_s - среднее число кластеров, содержащих s узлов, в расчете на один узел решетки. Преобразование подобия уменьшает гирорадиус кластера с $R_g(s)$ до $R_g(s') = R_g(s)/b$. Из соотношения (11) следует, что кластер, содержащий s узлов, отображается в кластер, содержащий всего лишь $s' = s/b^D$ узлов. Следовательно, вероятность $sn_s(L)$ можно выразить через вероятность $s'n_s(L/b)$ того, что узел, случайно выбранный на решетке $(L/b) \times (L/b)$, принадлежит кластеру, содержащему s' частиц, который в свою очередь отображается в кластер, содержащий s частиц:

$$sn_s = b^{-2} s' n_{s'}, \text{ где } s' = s/b^D. \quad (15)$$

Множитель b^{-2} в правой части здесь обусловлен тем, что для каждого узла на решетке $(L/b) \times (L/b)$ существуют b^2 узлов на решетке $L \times L$. Это означает, что правую часть соотношения (15) нужно разделить на b^2 , так как мы рассматриваем вероятность, приходящуюся на один узел решетки.

Распределение величин кластеров зависит от L только через переменную $s/s_{\text{макс}} \sim 2/L^D$, так как наибольший кластер на решетке $L \times L$ ограничен и содержит не более $s_{\text{макс}} \sim L^D$ узлов. Учитывая это, мы используем для $n_s(L)$ следующую зависимость:

$$n_s(L) = s^{-\tau} g(s/L^D). \quad (16)$$

Здесь $g(x)$ - переходная функция, которая должна стремиться к константе при $s/L^D \rightarrow 0$, так как в пределе при $L \rightarrow \infty$ распределение кластеров по величине должно стать независимым от размера решетки. Степенная зависимость в формуле (16) необходима потому, что величина n_s должна удовлетворять соотношению (15). Подставляя выражение (16) в формулу (15), получаем соотношение

$$\begin{aligned} s^{1-\tau} g(s/L^D) &= b^{-2} (s/b^D)^{1-\tau} g[(s/b^D)/(L/b)^D] = \\ &= b^{-(2+D-\tau D)} s^{1-\tau} g(s/L^D). \end{aligned} \quad (17)$$

Из соотношения (17) мы заключаем, что $2 + D - \tau D = 0$, и распределение кластеров по величине на пороге протекания определяется степенным законом

$$n_s \sim s^{-\tau}, \text{ где } \tau = (E + D)/D. \quad (18)$$

Показатель τ зависит от евклидовой размерности $E = 2$ решетки. Мы явно указываем E в выражении для τ , так как соотношение (18) выполняется и для протекания на гиперкубических решетках при $E < 6$. При $E \geq 6$ для вывода зависимости необходимо привлекать дополнительные соображения.

Соотношение (16) можно представить в виде

$$n_s(L) = s^{-\tau} g(s/L^D) = L^{-D\tau} n(s/L^D) = L^{-E-D} n(s/L^D). \quad (19)$$

Новая переходная функция $n(x)$ здесь определяется выражением $n(x) = x^{-\tau} g(x)$. Эта зависимость для $n(x)$ удобна, когда требуется оценить, как различные средние изменяются в зависимости от размеров L решетки. Например, средняя величина кластера, определяемая соотношением (12), вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle s \rangle_L &\sim \sum_{s=1}^{L^D} s^2 n_s(L) / \sum_s s n_s \approx \\ &\approx L^{2D-E} \int_{1/L^D}^1 d\frac{s}{L^D} \left(\frac{s}{L^D}\right)^2 n(s/L^D) \sim \\ &\sim L^{2D-E}. \end{aligned} \quad (20)$$

Нормировочный множитель удовлетворяет равенству $\sum_s s n_s = p_c$, так как он выражает долю узлов, принадлежащих конечным кластерам. Последнее соотношение возникает потому, что интегральная аппроксимация суммы зависит только от переменной $x = s/L^D$ и сходится при нижнем и верхнем пределах. Таким образом, интеграл перестает зависеть от L в пределе больших L . Этот результат показывает, что средняя величина кластера на пороге протекания $\langle s \rangle_L \sim L^{2D-E}$ с увеличением L растет медленнее, чем величина наибольшего кластера $s_{\max} \sim L^D$.

Аналогичным образом можно найти и средний радиус тирании конечных кластеров на пороге протекания:

$$\langle R_g^2(s) \rangle_L = \frac{\sum_s R_g^2(s) s n_s}{\sum_s s n_s} \sim L^{2-(E-D)}. \quad (21)$$

Формула (21) означает, что в задаче о перколяции *не каждый* отрезок может быть выбран за длину стороны L решетки, так как величина

$$\langle R_g^2(s) \rangle_L \text{ не пропорциональна } L^2.$$

Изложенные выше соображения характерны для применения идей скейлинга в теории протекания и теории критического поведения при фазовых переходах второго рода. Существенным аспектом этого подхода является *самоподобная* структура процесса протекания на пороге. Это самоподобие приводит к степенным зависимостям

различных величин. Но не каждый показатель степенного закона можно считать фрактальной размерностью. Многие из возникающих показателей могут быть выражены через фрактальную размерность и (евклидову) пространственную размерность решетки. Соотношения (20) и (21) могут служить примерами *скейлинга конечных масштабов*, широко используемого при численном моделировании на пороге протекания для определения критических показателей.

6.6. Корреляционная длина ξ

Как вблизи порога перколяции p_c , так и при вероятности, сильно отличающейся от p_c , перколяционные кластеры характеризуются числом узлов s и гирорадиусом $R_g(s)$. На каких расстояниях сохраняется связность открытых пор (узлов)? *Длина связности* ξ определяется как квадратный корень из *среднего* квадрата расстояния между занятыми узлами, принадлежащими одному и тому же конечному кластеру. Длина связности называется также *корреляционной длиной*. Таким образом определенная корреляционная длина равна квадратному корню из значения $R_g^2(s)$, усредненного по распределению размеров кластера.

Чтобы вычислить ξ , рассмотрим отдельный узел кластера, состоящего из s узлов. Рассматриваемый узел связан с $s - 1$ узлами, и средне-квадратичное расстояние до этих узлов равно $R_g^2(s)$. Вероятность того, что некоторый узел принадлежит к кластеру размера s , равна sn_s . Следовательно, длина связности равна

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_g^2(s) s^2 n_s(p)}{\sum_s s^2 n_s(p)}. \quad (22)$$

Чтобы упростить это выражение, мы заменили число узлов, с которыми связан данный узел, с $s - 1$ на s . Распределение размеров кластера $n_s(p)$ здесь рассматривается как функция p и равно среднему числу кластеров *конечного* размера s в расчете на один узел.

Как следует из соотношения (21), при $p = p_c$ гирорадиус беспрельдно увеличивается с увеличением размеров системы, поэтому $\xi = \infty$ при $p = p_c$. При значениях p_c , близких к p , парная длина связности имеет степенную особенность

$$\xi(p) \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (23)$$

При двумерном протекании $\nu = 4/3$. С помощью перенормировки треугольной решетки, обсуждавшейся в разд. 6.3, можно понять происхождение этого степенного закона и получить хорошее

приближенное выражение для показателя ν . Если треугольная решетка с концентрацией p укрупняется на множитель $b = \sqrt{3}$, то концентрация на полученной решетке p' определяется равенством (7). Новая корреляционная длина равна

$$\xi' = \xi(p') = \xi(p)/b. \quad (24)$$

Вблизи особой точки p_c перенормировочное преобразование (7) линейно по $(p - p_c)$ (см. рис.8.). Раскладывая соотношение (7) по $(p - p_c)$ вблизи $p_c = 1/2$, получаем следующее выражение для p' :

$$p' = p_c + \Lambda(p - p_c) \text{ при } |p - p_c| \ll p_c. \quad (25)$$

где $\Lambda = 3/2$. Подставляя это выражение в (24), мы видим, что ξ — *одно-родная* функция $p - p_c$:

$$\xi(\Lambda|p - p_c|) = b^{-1} \xi(|p - p_c|). \quad (26)$$

Как и раньше, этому соотношению удовлетворяют только степенные функции (23), и, подставляя сюда (23), мы получаем

$$(\Lambda|p - p_c|)^{-\nu} = b^{-1} |p - p_c|^{-\nu}. \quad (27)$$

Из этого уравнения находим показатель ν , определяющий вид особенности корреляционной длины вблизи p_c :

$$\nu = \ln b / \ln \Lambda = \ln \sqrt{3} / \ln(3/2) \approx 1,355, \quad (28)$$

что согласуется с точным значением $\nu = 4/3$ для двумерного случая .

Этот вывод представляет собой простой пример общего метода вычисления критических показателей с помощью перенормировочного преобразования. Заметим, что использованное масштабное преобразование приближенно, поскольку при таком преобразовании связность кластеров может изменяться.

С помощью соображений подобия найти вид распределения размеров кластера $n_s(p)$. Рассмотрим кластеры, гирорадиусы которых удовлетворяют неравенству $r_g(s) < \xi$. Поскольку гирорадиус удовлетворяет соотношению $s \sim \xi^D$, число узлов таких кластеров подчиняется неравенству $s < \xi^D$. На масштабах, меньших ξ , свойства кластера ничем не отличаются от критических параметров, характерных для p_c , откуда следует, что на этих масштабах распределение размеров определяется выражением (19), но с заменой размера области L на ξ . Итак, мы получили

$$n_s(p) = \begin{cases} \xi^{-E - D} \mathcal{N}(s/\xi^D) & \text{при } s \ll \xi^D, \\ 0 & \text{при } s \gg \xi^D. \end{cases} \quad (29)$$

При $x \ll 1$ функция перехода $\mathcal{N}(x)$ быстро уменьшается, а при $x \gg 1$ изменяется как $x^{-\tau}$, т.е. так же, как и функция перехода $n(x)$ в (19).

Пользуясь этим распределением размеров, можно показать, что средний размер кластера равен

$$\langle s \rangle_{\xi} = \frac{\sum_s s^2 n_s(p)}{\sum_s s n_s} \sim \xi^{2D-E}. \quad (30)$$

Вывод этого соотношения аналогичен выводу (20).

При $p \geq p_c$ вероятность (в расчете на один узел) того, что данный узел принадлежит *бесконечному* перколяционному кластеру, равна $p_{\infty}(p)$.

Любой узел занят с вероятностью p и принадлежит одному из конечных кластеров с вероятностью $\sum_s s n_s(p)$. Занятые узлы, не входящие ни в один конечный кластер, должны принадлежать бесконечному кластеру. Это утверждение можно записать в виде

$$P_{\infty}(p) = p - \sum_s s n(p). \quad (31)$$

Используя автомодельный вид распределения размеров кластера, мы приходим к следующему автомодельному выражению для вероятности протекания¹:

$$P_{\infty} \sim (p - p_c)^{\beta} \sim \xi^{D-E}. \quad (32)$$

Из этого равенства находим выражение для показателя β в вероятности протекания:

$$\beta = (E - D)^{\nu} = 5/36 \text{ при } E = 2 \text{ и } 0,4 \text{ при } E = 3. \quad (33)$$

Число узлов в самом большом кластере, $M(L)$, зависит от того, насколько он близок к p_c . Для областей размером $L \ll \xi$ этот кластер наибольшего размера простирается по всей решетке и $M(L) \sim L^D$.

Однако при $L \gg \xi$ ситуация меняется: размеры конечных кластеров не превышают ξ и функция $M(L)$ должна переходить в $M(L) = \bar{\rho} L^E$, где средняя плотность $\bar{\rho}$ равна $\bar{\rho} = P_{\infty} \sim \xi^{D-E}$. Этот переход описывается однородной функцией $m(x)$, такой, что

$$M(p, L) = L^D m(L/\xi), \text{ где } \xi \sim |p - p_c|^{-\nu}. \quad (34)$$

Численное моделирование очень четко обнаруживает этот переход (рис. 12).

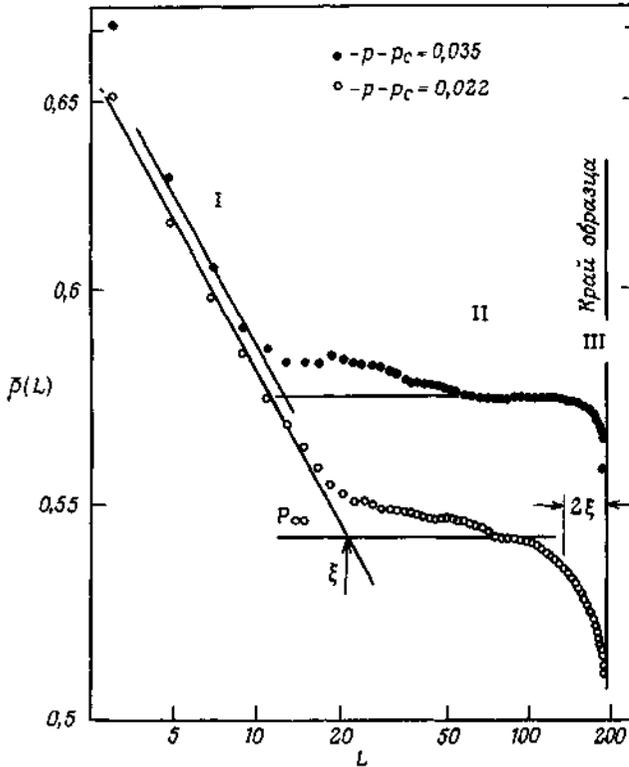


РИС. 12. Плотность узлов кластера максимального размера в области размером L , окружающей занятый узел. Черные кружки: $p - p_c = 0,35$; светлые кружки: $p - p_c = 0,022$. При $L < \xi$, наклон графика равен $D - 2$ при $D \approx 1,9$, а высота плато при $L > \xi$ равна $P_\infty(p)$.

Как мы показали в этом разделе, длина связности, или корреляционная длина ξ , расходится при критическом значении концентрации. Эта особенность имеет степенной вид с показателем, который довольно точно оценивается с помощью перенормировки. С практической точки зрения разнообразные переходные функции и степенные зависимости вблизи критического значения концентрации удобно выражать через ξ . Мы также показали, что показатели, характеризующие различные зависимости вблизи порога протекания, связаны соотношениями подобия, которые выражают их через фрактальную размерность D перколяционного кластера, размерность пространства $E = 2$ и показатель ν , характеризующий корреляционную длину.

6.7. Остов перколяционного кластера

Мы обсуждаем теорию перколяции, используя образ «жидкости», смачивающей «поры» после ее впрыскивания в каком-либо одном узле. При таком подходе предполагается, что поры пусты и ничто не мешает жидкости заполнить любую пору. Этот процесс можно реализовать на практике, впрыскивая ртуть в пористый материал, из которого предварительно откачан воздух.

Рассмотрим поры, образующие решетку и заполненные несжимаемой жидкостью (маслом). Впрыскивается другая жидкость (вода). Она может вытеснить масло только вдоль *остова* перколяционного кластера. Части перколяционного кластера, связанные с его остовом через единственный узел, называются *обособленными ветвями*. Чтобы отделить обособленную ветвь от остова, достаточно удалить этот единственный узел, т. е. перерезать одну *обособленную связь*.

Вытесняющая жидкость (вода) не может проникнуть в обособленные ветви, потому что запертому там маслу просто некуда деться.

Остов включает все узлы, лежащие на всех возможных траекториях несамопересекающегося случайного блуждания, начинающихся в узле (узлах) впрыскивания и заканчивающихся на границе области. Несамопересекающееся случайное блуждание не может привести в обособленную ветвь, потому что иначе для возвращения на остов пришлось бы дважды побывать в том единственном узле, связывающем с ним эту ветвь.

Конкретная реализация перколяционного кластера и его остова показана на рис. 13 для перколяции по узлам квадратной решетки на пороге протекания.



РИС. 13. Перколяционный кластер и его остов (черный цвет) по результатам моделирования на квадратной решетке размером 147×147 при $p_c = 0,593$.

Остов связывает узел, находящийся в центре квадратной решетки размером 147×147 , с узлами на ее границе. Перколирующий кластер содержит 6261 узел, в то время как в остове всего 3341 узел.

Была изготовлена лабораторная модель перколяционного кластера, показанного на рис. 13. Модель сделана из эпоксидной смолы и имеет цилиндрические поры диаметром 1,1 мм и высотой 0,7 мм. Поры связаны каналами шириной 0,7 мм. Модель заполнялась вязким подкрашенным глицерином. Обычный эксперимент по вытеснению состоял в том, что в центре объема впрыскивался воздух, который вытеснял глицерин, вытекавший из модели. Результаты эксперимента, показанные на рис. 14, очень наглядно иллюстрируют, что вытеснение происходит только вдоль остова.

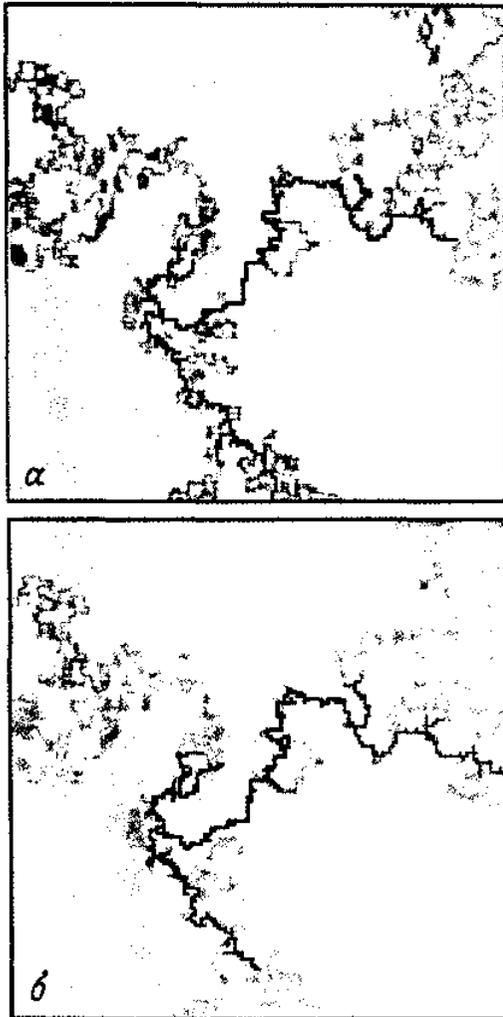


РИС. 14. *a* - Воздух, вытесняющий глицерин с большим капиллярным числом в перколяционном кластере, показанном на рис. 13; *б*- численное моделирование вытеснения жидкости в том же перколяционном кластере. Различными оттенками серого цвета показаны поры, которые воздух занимает в последовательные моменты времени. И в эксперименте, и при численном моделировании число пор, заполненных воздухом, в последовательные моменты времени составляло 30 (черные), 86, 213, и, наконец, 605 (светло-серые) при начале перколяции. Остов показан очень бледным серым цветом.

Процесс вязкого вытеснения в фрактальном перколяционном кластере можно моделировать численно, решая уравнение движения с соответствующими граничными условиями. На рис. 14 приводим также результаты численного моделирования течений в перколяционном кластере, исследованном в лабораторном эксперименте, при высоких капиллярных числах.

Результаты, полученные в лабораторном эксперименте и при численном моделировании, очень хорошо согласуются. И в эксперименте, и в численных результатах совпадают 70-80% узлов, заполненных воздухом на каждом этапе вытеснения. Отдельные реализации численной модели также совпадают друг с другом примерно на 75%. Это согласие говорит о том, что на пороге протекания вытеснение почти полностью определяется *геометрическими* факторами, потому что численная модель не учитывает такие эффекты, как межфазные напряжения и смачиваемость, которые, как известно, влияют на свойства двухфазных течений в пористых средах.

Вид остова перколяционного кластера зависит от того, как расположено место (или места) впрыскивания и место (места) вытекания. Для примера рассмотрим перколяционный кластер на границе протекания p_c , показанный на рис. 2, б. Остов, связывающий отдельный узел на левой границе с отдельным же узлом на правой границе, показан на рис. 15, а, а на рис. 15, б изображен остов, связывающий все узлы левой и правой границ.

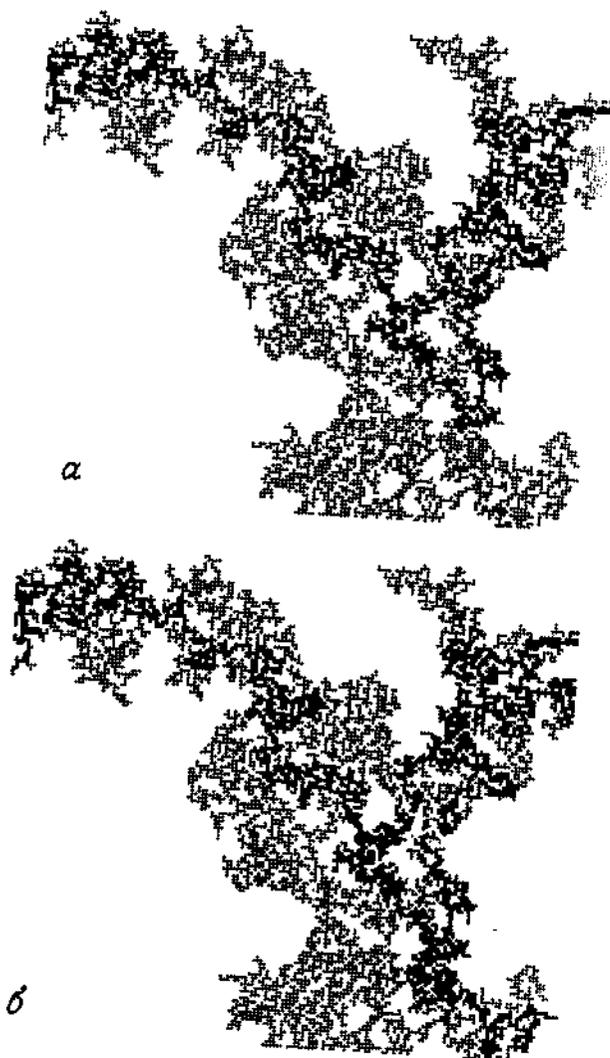


РИС. 15. Остовы перколяционного кластера на квадратной решетке, показанного на рис. 2, б, при критической концентрации p_c . а - Остов, связывающий отдельный узел на левой границе решетки размеров 160×160 с отдельным узлом на правой границе; б-остов, связывающий все узлы на левой и правой границах.

Узлы остова образуют подмножество узлов перколяционного кластера, и каждый узел перколяционного кластера является также частью по меньшей мере одного остова. Поскольку перколяционные кластеры фрактальны и их размерность равна $D = 1,89$, остовы перколяционных кластеров также фрактальны и их размерность подчиняется неравенству $D_B \leq D$. Большое число численных моделей (на пороге протекания p_c) показали, что масса $M_o(l)$ остова, связывающего границы квадрата со стороной l , равна

$$M_o(L) \sim L^{D_B}, \text{ где } D_B \approx 1,61. \quad (35)$$

Оценки фрактальной размерности остова заключены в пределах $D_B \approx 1,62 \pm 0,02$. Кривая Мандельброта-Гивена может служить разумной моделью остова перколяционного кластера, и ее фрактальная размерность $D_B = 1,63\dots$ достаточно близка к размерности остова. Процесс вязкого вытеснения в перколяционном кластере выделяет лишь некоторое *подмножество* узлов остова. Это подмножество зависит от капиллярного числа. Лабораторные эксперименты и численные расчеты показывают, что фрактальная размерность структуры вязких пальцев равна $D \sim 1,3$ при высоких значениях Ca и $1,5$ при низких Ca .

Изучая различные *физические* явления, происходящие на фракталах, мы получим в общем различные фрактальные размерности. Это происходит потому, что выбор конкретного физического процесса, происходящего на фоне фрактальной геометрии, по сути дела равнозначен выбору меры этого фрактального множества. Поэтому изучение физических явлений на фрактальных множествах естественным образом приводит к понятию мультифракталов, обсуждавшихся в предыдущей главе. Распределения тока и флуктуации сопротивления фрактальных цепей, состоящих из (нелинейных) сопротивлений, приводят к бесконечным наборам показателей, или мультифракталам.

Остовы имеют много геометрических особенностей, которые также фрактальны. Рассмотрим две точки, связанные остовом, который показан на рис. 15,а. Длина кратчайшего пути между этими точками $l_{\text{мин}}$ (равная числу узлов, которые необходимо посетить на этом пути) оказывается следующим образом зависящей от размера области l , т. е. евклидова расстояния между точками:

$$l_{\text{мин}} \sim L^{D_{\text{мин}}}, \text{ где } D_{\text{мин}} = 1,15 \pm 0,02. \quad (36)$$

На изображениях остовов, показанных, например, на рис. 15, заметно, что они состоят из «пузырей», соединенных «перемычками». Перемычки, которые Стэнли называет также красными связями, обладают тем свойством, что если их перерезать, то остов распадается

на две части и жидкость больше не может протечь от места впрыскивания до места вытекания. В пузырях связи продублированы и перерезание такой связи, т.е. удаление узла, не прерывает течения. Связи, соединяющие узлы внутри пузырей, Стэнли называет синими связями. Причина такой «раскраски» связана с электрическим аналогом протекания, когда ток течет сквозь перколяционный кластер от одного контактного узла (места впрыскивания) к другому краю кластера, где находится другой узел контакта. Весь ток протекает при этом через перемычки, и они раскаляются докрасна. В пузырях ток имеет возможность растечься по многим связям, и они остаются относительно холодными. Множество, состоящее из красных связей, образует подмножество узлов остова, которое также является фрактальным. Если увеличивается расстояние L между парой узлов на разных концах остова, то число красных связей растет по степенному закону:

$$N_{\text{красн}} \sim L^{D_{\text{красн}}}, \text{ где } D_{\text{красн}} = 1/\nu = 3/4. \quad (37)$$

Было показано, что соотношение $D_{\text{красн}} = 1/\nu$ между фрактальной размерностью множества красных связей и показателем ν , который определяет особенность корреляционной длины ξ , при $p = p_c$, точно выполняется и в случае большего числа измерений. Почти вся масса остова сосредоточена в пузырях, так как фрактальная размерность множества красных связей намного меньше размерности остова. Поэтому фрактальная размерность множества узлов, принадлежащих пузырям, равна размерности остова. Кривые Мандельброта- Гивена содержат много тонких (красных) связей. Фрактальная размерность множества таких связей равна $0,63\dots$, что несколько меньше $D_{\text{красн}}$ для перколяционного кластера.

При анализе явлений переноса в перколяционных кластерах возникает много разных оценок размерности. По сути дела, вновь обнаруживается мультифрактальное поведение.

6.8. Перколяция с вытеснением

Протекание с вытеснением - это *динамический* перколяционный процесс, введенный Уилкинсоном и Виллемсеном для описания течения двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Рассмотрим вытеснение масла водой в пористой среде. Если вода нагнетается очень медленно, то этот процесс происходит при очень низких капиллярных числах Ca . Это значит, что капиллярные силы полностью преобладают над вязкими и поэтому динамика вытеснения

определяется процессами в масштабе отдельных пор. В пределе бесконечно малых капиллярных чисел можно пренебречь всеми скачками давления как в *вытесняющей* (воде), так и в *вытесняемой* жидкости (масле). Однако между этими двумя жидкостями сохраняется разность давлений (капиллярное давление), равное

$$(P_{\text{вытесняющее}} - P_{\text{вытесняемое}}) = \frac{2 \sigma \cos \theta}{r} \quad (38)$$

Здесь σ -межфазное натяжение на границе жидкостей, θ -краевой угол между поверхностью раздела и стенкой поры, а r -радиус кривизны поры в месте контакта жидкостей.

Часто случается так, что вода - «смачивающая» жидкость, а масло - «несмачивающая», т.е. краевой угол больше 90° и вода спонтанно вытесняет масло из пористой среды, если только давление воды не поддерживается на более низком уровне, чем давление масла. Важно отметить, что разность давлений зависит от локального радиуса поры или ее горловины в точке раздела жидкостей. В пористой среде должны присутствовать вариации r (и, возможно, краевого угла) и поверхность раздела должна смещаться так, чтобы повсюду удовлетворялось уравнение (38). Капиллярные силы наиболее велики в самых узких местах системы пор. Таким образом, если горловины уже пор, то поверхность раздела воды и масла быстро движется сквозь горловины и тормозится, попадая в крупные поры. В согласии с подобными простыми теоретическими моделями и экспериментальными результатами это движение можно представить в виде ряда дискретных скачков, так что на каждом временном шаге вода вытесняет масло из самой малой из имеющихся пор, занятых маслом. Уилкинсон и Виллемсен предложили моделировать этот процесс в идеализированной среде, в которой решетку пор можно рассматривать как регулярную решетку с узлами и связями, играющими роль пор и связывающих их каналов (горловин). Случайность привносится в эту среду путем приписывания узлам и связям случайных чисел, которые характеризуют размеры соответствующих пор и горловин.

Моделирование процесса на выбранной реализации решетки состоит, таким образом, в расчете движения поверхности раздела воды и масла по мере того, как она продвигается через самые малые из имеющихся пор, заполняя их вытесняющей жидкостью.

Этот подход применим и в том случае, когда несмачивающая жидкость, скажем воздух, вытесняет смачивающую жидкость. Тогда давление в вытесняющей жидкости больше, чем в вытесняемой, и поверхность раздела быстро распространяется через крупные поры, застревая в узких горловинах между порами. На рис. 16 показан пример структур, возникающих в этом случае.

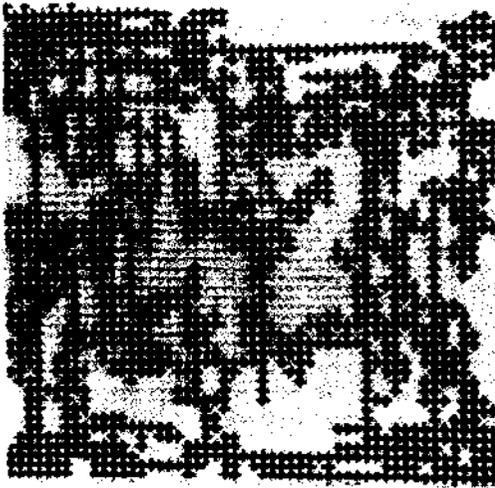


РИС. 16. Перколяция с вытеснением воздуха водой (показана черным) в модели, состоящей из регулярной решетки цилиндров диаметром 2 мм и высотой 0,7 мм, заключенной между параллельными пластинами. Вода *не* смачивает вещество модели. Вода втекает в верхнем левом углу и вытекает внизу справа. Вытеснение происходит при $Ca \approx 10^{-5}$.

Из рис. 16 явствует, что вытесняющая жидкость *захватывает* области вытесняемой жидкости. По мере продвижения вторгающейся жидкости она способна полностью охватить области, заполненные вытесняемой средой, т.е. полностью отрезать кластеры вытесняемой жидкости от узлов на входе в решетку. Это одна из причин возникновения проблемы «остаточной нефти» - экономической проблемы нефтепромыслов. Поскольку нефть несжимаема, можно сформулировать правило: **вода не может вытеснить нефть из захваченных областей.**

Теперь мы можем дать простое описание алгоритмов анализа перколяции с вытеснением.

1. Припишем каждому узлу на решетке размером $L \times L$ случайное число r , принадлежащее отрезку $[0, 1]$.
2. Выберем места впрыскивания вытесняющей жидкости и места вытекания вытесняемой среды.
3. Найдем *узлы роста* как узлы, занятые вытесняемой жидкостью u соседствующие с вытесняющей средой.

4. Пропустим вытесняющую среду в тот узел роста, в котором случайное число r принимает наименьшее значение.
 5. *Захват*: узлы роста в областях, полностью окруженных вытесняющей жидкостью, теряют активность и исключаются из списка узлов роста.
 6. Процесс вытеснения заканчивается, когда вытесняющая жидкость достигает узла, через который жидкость вытекает из системы. В этой модели вытесняющая жидкость проникает от одного узла к другому, всегда выбирая узел роста с наименьшим случайным числом. Подчиняясь этому алгоритму, вытесняющий кластер растет в соответствии с *локальными* свойствами решетки. Правило, запрещающее вытеснение из захваченных областей, привносит в модель нелокальные черты. На вопрос, является ли данная область захваченной или нет, нельзя ответить, оставаясь на локальном уровне, необходимо провести в системе *глобальный* поиск.
- Представляет интерес сравнение перколяции с вытеснением, не приводящей к появлению захваченных областей, с обычным перколяционным процессом, который описан в предшествующих разделах. При обычной перколяции рост кластеров можно описать следующим образом. Узлам решетки $L \times L$ приписываются случайные числа r из отрезка $[0, 1]$ и на решетке помещается затравка. Тогда для выбранного значения вероятности p ($0 \leq p \leq 1$) кластер растет, занимая все узлы, в которых случайные числа r удовлетворяют неравенству $r \leq p$. Рост перколяционного кластера прекращается, когда на границе (периметре) кластера больше не оказывается таких случайных чисел. Только в том случае, если затравка окажется на внутреннем перколирующем кластере на пороге p_c или на перколирующем кластере при $p > p_c$ перколирующий кластер вырастет до размера всей решетки. В отличие от этого процесса при перколяции с вытеснением кластер растет, всегда выбирая наименьшее из доступных случайных чисел, каким бы большим оно ни было. Однако, после того как на некотором шаге выбрано какое-нибудь большое число r_0 , вовсе не обязательно, чтобы в дальнейшем выбирались еще большие числа, $r \geq r_0$, - в общем случае на поверхности раздела станут доступными меньшие числа и выбраны будут именно они. Кластер, показанный на рис. 17, образовался именно при таком процессе, увеличиваясь до тех пор, пока он не достиг границы системы.

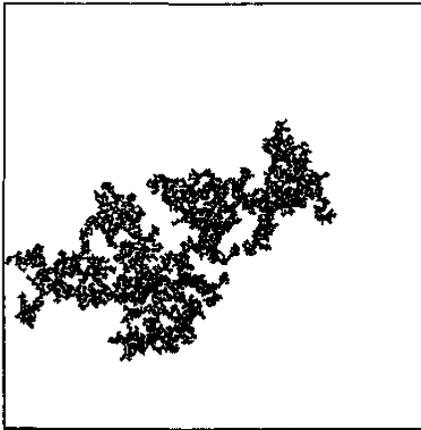


РИС. 17. Кластер, выросший при перколяции с вытеснением (без захвата) из центрального узла решетки размером 300×300 . Кластер, содержащий 7656 узлов, растет до тех пор, пока не достигнет одной из границ решетки

Кластер, показанный на рис. 17, который возник при протекании с вытеснением, очень похож на перколяционный кластер, изображенный на рис. 10. Уилкинсон и Виллемсен моделировали процесс вытеснения на решетках размером $L \times 2L$, впрыскивая вытесняющую жидкость на левой границе и прослеживая процесс до тех пор, пока не наступало протекание, т.е. пока вытесняющая жидкость не достигала правой границы. Геометрия этого эксперимента иллюстрируется рис. 18.

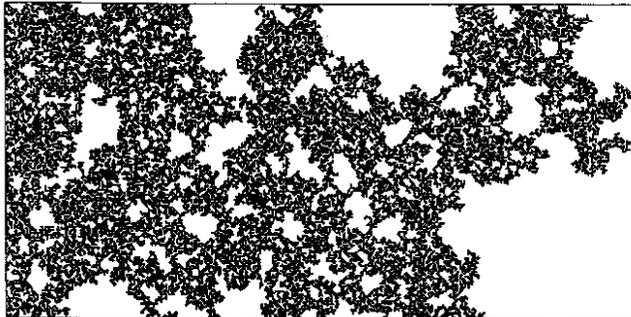


РИС. 18. Перколяция с вытеснением (без захвата) на решетке размером 100×200 с квадратными ячейками. Вытесняющая жидкость (черная) втекает через узлы на левой границе, а вытесняемая среда вытекает через правую границу. Протекание наступает, едва вытесняющая жидкость коснется правой границы.

Естественно, что если при конечном размере области продолжать вытеснение достаточно долго, то вытесняющая жидкость постепенно заполнит всю решетку. Как показали Уилкинсон и Виллемсен, число узлов $m(L)$ центральной части (размером $L \times L$) решетки в момент наступления протекания растет с размером решетки по закону

$$M(L) = AL^{D_{\text{вытесн}}}, \text{ где } D_{\text{вытесн}} \approx 1,89. \quad (39)$$

Это соотношение аналогично зависимости (5), и фрактальная размерность $D_{\text{вытесн}}$ при перколяции с вытеснением, но без образования захваченных областей оказывается равной фрактальной размерности внутреннего перколяционного кластера при значении концентрации p_c . Поэтому есть основания полагать, что процесс перколяции с вытеснением принадлежит к тому же классу универсальности, что и обычная перколяция.

В двумерных системах возможность образования захваченных областей очень сильно меняет картину перколяции с вытеснением. На рис. 19 показан кластер, возникающий, когда при перколяции с вытеснением допускаются захваты.

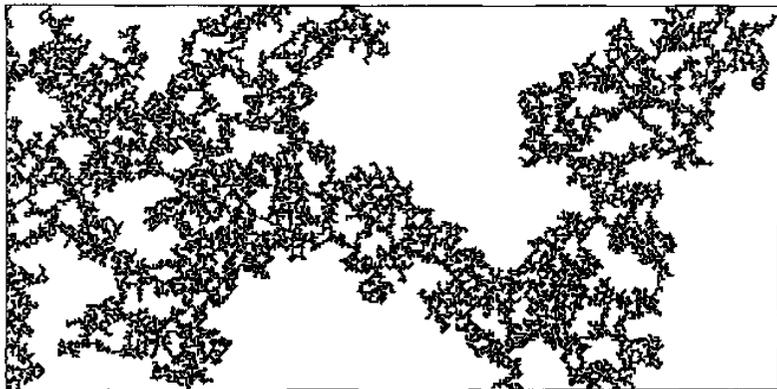


РИС. 19. Перколяция с вытеснением и захватом на решетке размером 100×200 с квадратными ячейками. Вытесняющая жидкость (черная) втекает через узлы на левой границе, а вытесняемая жидкость вытекает через правую границу. Протекание наступает, когда вытесняющая жидкость касается правой границы.

Сравнение с кластером, изображенным на рис. 18, показывает, что возможность захвата приводит к сильному увеличению размеров полостей внутри кластера. Это проявляется в зависимости от размера

решетки числа узлов $M(L)$, лежащих в центральной части решетки размером $L \times L$ при впрыскивании на одной стороне:

$$M(L) = AL^{D_{\text{закв}}}, \text{ где } D_{\text{закв}} \approx 1,82. \quad (40)$$

Этот результат был получен Уилкинсоном и Виллемсеном. Было предпринято *экспериментальное* исследование очень медленного вторжения воздуха в двумерную систему из 250 000 заполненных глицерином капилляров, имеющих случайные сечения и образующих квадратную сетку (рис. 20).

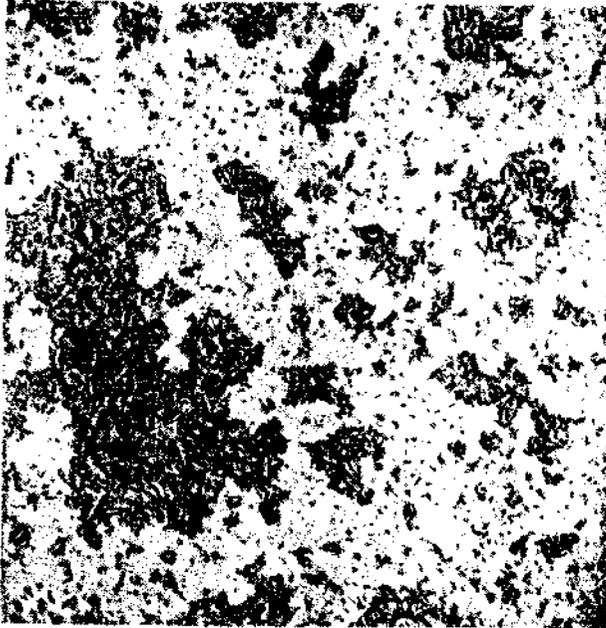


РИС. 20. Вытеснение смачивающей жидкости (черная) несмачивающей жидкостью (белая), впрыскиваемой на левой границе решетки. Полупроницаемая мембрана на правой границе не позволяет несмачивающей жидкости покидать систему.

Этот эксперимент продолжался и после наступления протекания. На правой границе образца могла помещаться полупроницаемая мембрана, не позволявшая воздуху выходить из системы; процесс вытеснения прекращался, когда захватывалась вся оставшаяся вытесняемая жидкость. Как обнаружилось, число капилляров заполненных воздухом, в квадратах размером L подчинялось

зависимости (40) с $1,80 < D_{\text{захв}} < 1,83$ в согласии с численными расчетами.

Мы получали перколяционные кластеры с захваченными областями в следующем эксперименте. Воздух впрыскивался в центре двумерной круглой модели пористой среды, состоящей из слоя стеклянных сфер, которые размещались случайным образом между двумя пластинами. В согласии с ожидаемым результатом получившийся кластер, изображение которого приведено на рис. 21, имеет фрактальную размерность $D = 1,84 \pm 0,04$.

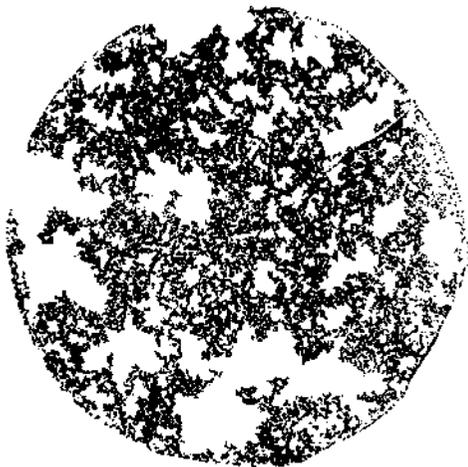


РИС. 21. Воздух (черный) вытесняет глицерин (белый) при очень малом значении капиллярного числа $Ca \approx 10^{-5}$ в двумерной модели, составленной из слоя случайным образом упакованных сфер диаметром 1 мм. Фрактальная размерность кластера, состоящего из вытесняющего воздуха, равна $D \approx 1,84$.

Как видим, при образовании захваченных областей перколяция с вытеснением приводит к образованию фрактальных структур, фрактальная размерность которых меньше, чем при вытеснении без захвата или при обычной перколяции. Результаты экспериментов по вытеснению несмешивающихся жидкостей из двумерных пористых сред при очень низких капиллярных числах согласуются с результатами исследования перколяции с вытеснением при возможности захвата, представления о которой предложены Уилкинсоном и Виллемсеном.

Однако в трехмерных системах ситуация в корне меняется. Рассмотрим обычную перколяцию в простой кубической (п.к.) решетке, где

каждый узел окружен шестью соседними узлами. Порог протекания для такой решетки равен $p_c(\text{п.к.}) \approx 0,3117$, а фрактальная размерность внутреннего перколяционного кластера, образующегося при критической концентрации p_c , равна $D \approx 2,5$. Важно, что в этом случае имеется диапазон значений вероятности $p_c \leq p < (1 - p_c)$, в котором перколяция происходит как по занятым, так и по свободным узлам, и оба типа узлов образуют бесконечные кластеры. Напротив, на двумерной квадратной решетке перколяция возможна либо по занятым, либо по свободным узлам и не существует диапазона значений вероятности, в котором перколирующими являются оба типа кластеров. Интересно отметить, что перколяция на треугольной решетке представляет собой промежуточный случай, поскольку в этом случае $p_c = 0,5$ является порогом перколяции одновременно как по занятым, так и по свободным узлам.

Качественное отличие двух- и трехмерных систем распространяется и на перколяцию с вытеснением. Согласно Уилкинсону и Виллемсену, размерность кластера вторгающейся жидкости в момент наступления протекания равна $d \approx 2,52$ как при захвате, так и без него. Существование целого интервала значений концентрации, в котором возможна перколяция и вытесняющей, и вытесняемой жидкостей, сильно уменьшает эффективность захвата. Даже когда вытесняющая жидкость уже может протекать от одной поверхности трехмерного образца до противоположной, большинство узлов все еще занято вытесняемой средой. Если продолжать процесс вытеснения, то захват вытесняемой жидкости начинается при $p = (1 - p_c)$. Уилкинсон и Виллемсен нашли, что в этом состоянии число узлов вытесняющего кластера растет как L^2 , так что такие узлы составляют *конечную долю* $\approx 0,66$ полного числа узлов простой кубической решетки размера $L \times L \times L$. Таким образом, в пределе, когда вытесняемая жидкость захвачена, вытесняющий кластер *не* является фрактальным. Диас и Уилкинсон рассмотрели соответствующую модель - перколяцию с захватом, которая учитывает правило захвата, но пренебрегает эффектами, связанными с вытеснением. Эти исследователи проанализировали распределение размеров захваченных областей и получили серьезные указания на то, что вблизи критической точки свойства перколяции с вытеснением и захватом принадлежат к тому же классу универсальности, что и обычная перколяция в трехмерных системах.

Трехмерный процесс перколяции с вытеснением трудно осуществить в эксперименте. Клемен и др. впрыскивали с очень малой скоростью несмачивающий сплав Вуда снизу в уплотненное дробленое стекло и затем исследовали вертикальные и горизонтальные срезы цилиндрического образца. Они пришли к выводу, что, судя по

горизонтальным срезам, перпендикулярным к направлению потока, сплав Вуда растекался по пористой среде самоподобным образом и фрактальная размерность распределения металла в срезе оказалась равной $\approx 1,65$. Эта величина несколько превышает фрактальную размерность 1,50, которую, как ожидается, должно иметь сечение внутреннего перколяционного кластера. Однако нельзя пренебрегать влиянием силы тяжести, из-за которого фрактальная размерность горизонтальных срезов зависит от их уровня.

6.9. Фрактальный диффузионный фронт

Ранее мы отмечали, что процесс диффузии может распространяться бесконечно и его динамика определяется случайным характером движения частиц. Напротив, случайность процесса перколяции связана со *средой*, и существует порог, ниже которого процесс перколяции ограничен конечными областями или кластерами. Показано, что *диффузионный фронт*, возникающий при диффузии от источника, имеет фрактальную структуру, которая связана с так называемой *скорлупой* перколяционного кластера. Описательный термин «скорлупа» был впервые введен Мандельбротом и подробно обсуждался Фоссом.

Рассмотрим диффузию частиц на квадратной решетке от линейного источника, как показано на рис..22.

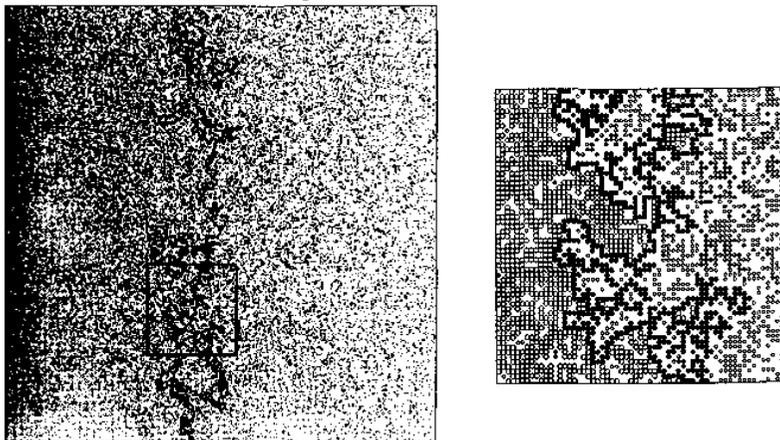


РИС. 22. Диффузия «частиц» (черные кружки) от источника, занимающего левую сторону решетки, узлы которой показаны как светлые квадраты. *Скорлупа* кластера диффундирующих частиц состоит из тех частиц (отмеченных черными квадратами), которые связаны с источником и

соседствуют с узлами, связанными с правой границей. Справа показано увеличенное изображение области, выделенной квадратом на левой части рисунка. На этой увеличенной части скорлупа показана черными кружками, узлы, связанные с источником, изображены крупными кружками, а остальные занятые узлы отмечены малыми кружками.

Частицы испускаются источником, который занимает всю левую границу рисунка. Каждая частица через каждые τ секунд перескакивает на один из четырех ближайших узлов, удаленных на расстояние a . Связь случайных блужданий с диффузией в одномерных системах довольно подробно обсуждается позже. Коэффициент диффузии \mathcal{D} определяется соотношением Эйнштейна, которое при принятых здесь обозначениях принимает вид

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\tau} a^2. \quad (41)$$

Перемещения диффундирующих частиц вдоль оси x , перпендикулярно линии источника, и вдоль оси y , параллельно источнику, статистически независимы. Средний квадрат смещения за время t определяется в двумерном случае - равенствами

$$\langle [x(t) - x_0]^2 \rangle = \langle [y(t) - y_0]^2 \rangle = 2\mathcal{D}t, \quad (42)$$

если начальные координаты частицы $-x_0$ и y_0 . Диффузионная длина l определяется как среднеквадратичное смещение частицы от начального положения:

$$l^2 = \langle [x(t) - x_0]^2 \rangle + \langle [y(t) - y_0]^2 \rangle = 4\mathcal{D}t = 2a^2 t/\tau. \quad (43)$$

Хорошо известно, что вероятность обнаружить частицу на расстоянии x от линейного источника, расположенного при $x = 0$, определяется выражением

$$p(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/l} du \exp(-u^2), \quad (44)$$

если решетка имеет ширину L и бесконечно протяженна вдоль оси x . Эта вероятность постепенно уменьшается от единичного значения у источника и быстро падает при $x > L$.

На рис. 22 видно, что если зафиксировать состояние процесса диффузии в какой-то момент времени, то мы увидим решетку, часть узлов которой занята частицами точно так же, как при процессе перколяции, обсуждавшемся в предыдущих разделах. Но в настоящем случае вероятность того, что данный узел занят, зависит от расстояния x от источника и определяется равенством (44). Вблизи источника $p(x) \approx 1$, а это значение превышает порог перколяции на квадратной решетке; следовательно, по узлам, занятым частицами, возможна

перколяция. На некотором расстоянии от источника вероятность присутствия частиц в узлах падает ниже p_c , и такие узлы образуют только изолированные кластеры.

В электрическом аналоге этой системы частицы, лежащие в соседних узлах, считаются связанными электрическими контактами. К примеру, представьте себе атомы золота, диффундирующие от источника в непроводящее вещество. Граница между совокупностью узлов, которые (электрически) связаны с источником, и незанятыми, изолирующими узлами называется *скорлупой* этой области. В связи с определением скорлупы следует соблюдать некоторую осторожность. Пара узлов, занятых частицами, считается связанной с пустыми узлами, если занятые и пустые узлы соседствуют вдоль направлений x или y . Понятие связности мы вводим и для пустых узлов. Однако для того, чтобы получить хорошо определенную границу между занятыми и свободными узлами, необходимо считать, что свободный узел связан, если свободен также хотя бы один из окружающих узлов. Другими словами, определяя связность для свободных узлов, мы включаем в рассмотрение не только соседей в направлениях x и y , но и четыре узла, расположенные на концах диагоналей. Скорлупа состоит из всех узлов, которые связаны с источниками u являются соседями свободных узлов, связанных с изолирующим краем образца. Говоря образным языком, узлы, связанные с источником, составляют «сушу», а связанные свободные узлы — это «море». Если прогуливаться по самой границе соленой воды, то мы будем находиться на скорлупе. Заметьте, что это правило исключает берега озер и луж, состоящих из изолированных групп свободных узлов среди суши (такие озера наполнены пресной водой), а также берега островов в море вдали от скорлупы, которые не связаны с источником. На рис. 22 показаны результаты численного моделирования диффузии на решетке размером 300×300 по прошествии периода $t = 9 \cdot 10^4 \tau$ после начала процесса при диффузионной длине $l \approx 300 a$. Скорлупа смещается в сторону увеличения x по мере увеличения времени и, следовательно, диффузионной длины $\ell = a \sqrt{2t/\tau}$. Увеличивается со временем и с величиной l также и ширина области, покрытой скорлупой. Чтобы более точно сформулировать это свойство, введем вероятность $p_k(x) dx$ того, что узел с координатой между x и $x + dx$ принадлежит скорлупе. Тогда координата x_k и ширина σ_k скорлупы определяются выражениями

$$x_h = \int_0^{\infty} dx x p_h(x), \quad (45)$$

$$\sigma_h^2 = \int_0^{\infty} dx (x - x_h)^2 p_h(x).$$

Важно также заметить, что координата скорлупы x_k удовлетворяет соотношению

$$p(x_h) = p_c. \quad (46)$$

Как следует из этого равенства, найдя вероятность p того, что узел на расстоянии x_k от источника оказывается занятым, мы получим очень точную оценку порога протекания. Для двумерной квадратной решетки была получена оценка $p_c = 0,592802 \pm 10^{-5}$, в другом случае анализ скорлупы перколяционных кластеров дал оценку $p_c = 0,59275 \pm 3 \cdot 10^{-5}$. Для треугольной решетки было получено значение $p_c = 0,5011 \pm 0,0003$, согласующееся с точным значением $p_c = 1/2$.

Анализ структуры скорлупы на масштабах, меньших ее ширины a_k , позволяет определить число узлов $M(R)$, лежащих на скорлупе в области радиусом R :

$$M(R) \sim R^{D_h}, \text{ где } D_h = 7/4. \quad (47)$$

Скорлупа является фрактальным объектом. Аппроксимацией численных результатов получена оценка $D_h = 1,76 \pm 0,02$. Однако дальнейший анализ результатов численных расчетов (который мы обсудим ниже) привел к предположению о точном равенстве $D_k = 1,75$. На пространственных масштабах, меньших ширины скорлупы, она представляется самоподобным фракталом с фрактальной размерностью $\approx 1,75$. Аналогичная оценка фрактальной размерности скорлупы перколяционных кластеров была получена в других работах. В этом случае исследование кластеров различного размера привело к оценке $D_k = 1,74 \pm 0,02$, а двухточечная корреляционная функция для узлов, лежащих на скорлупе, приводит к значению $D_k = 1,76 \pm 0,01$. В согласии со всеми этими результатами еще одно исследование скорлупы перколяционных кластеров дает оценку ее фрактальной размерности $1,751 \pm 0,002$.

Самоподобие скорлупы ясно видно на рис. 23.

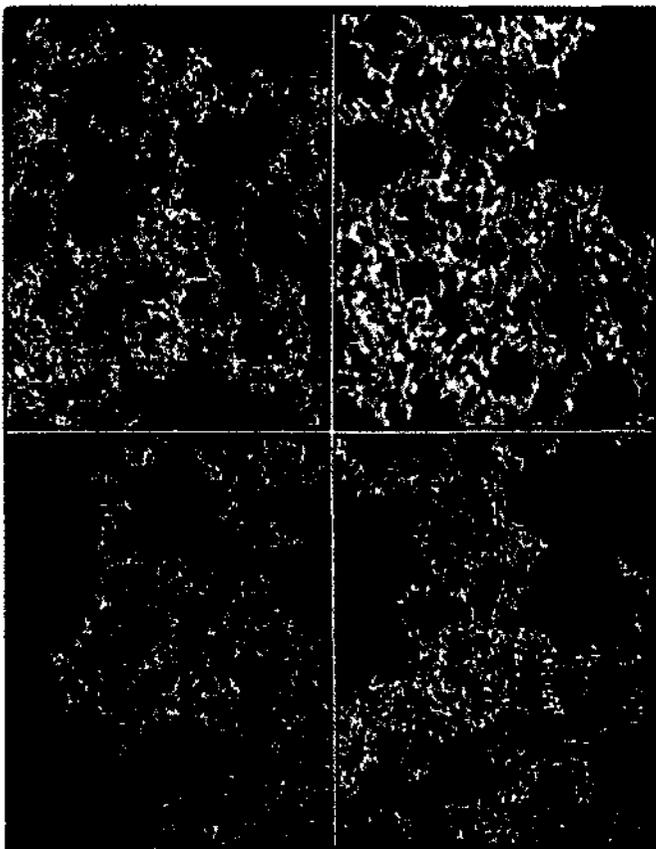


РИС. 23. Самоподобие диффузионного фронта. Структура скорлупы показана последовательным увеличением центральной части участка фронта. Каждый раз делается двукратное увеличение. Самоподобие проявляется в том, что понять, каков масштаб каждого из рисунков, можно только после пристального сравнения.

Не вызывает сомнения, что при выбранной геометрии скорлупа на самом деле самоаффинна. (Отличие самоподобия от самоаффинности рассмотрено позже) Дело в том, что если рассмотреть диффузию на полосе шириной $2L$, а не L , то на данный момент времени число узлов, лежащих на скорлупе, тоже удвоится. С такой точки зрения диффузионный фронт является одномерным объектом. Поэтому было предпринято исследование свойств подобия числа узлов, лежащих на

скорлупе $M_h(L, l)$, и ее ширины $\sigma_h(L, l)$. Результаты численных расчетов аппроксимируются зависимостями

$$M_h(L, l) = ALl^\alpha, \text{ где } A = 0,96 \text{ и } \alpha = 0,425 \pm 0,005, \\ \sigma_h(L, l) = Bl^{\hat{\alpha}}, \text{ где } B = 0,46 \text{ и } \hat{\alpha} = 0,57 \pm 0,01. \quad (48)$$

Эти численные результаты и аппроксимации (48) показаны на рис. 24.

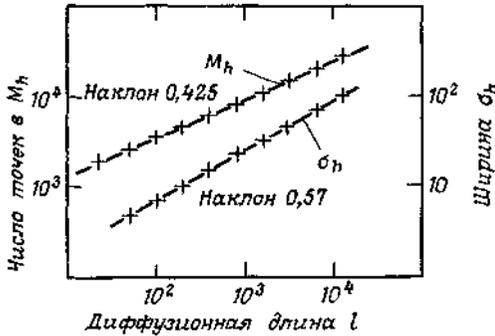


РИС. 24. Изменение числа узлов на скорлупе M_h и ее ширины σ_h с изменением диффузионной длины l .

Можно привести следующие рассуждения, приводящие к связи между показателем $\hat{\alpha}$ и показателем ν корреляционной длины. Когда координата x не совпадает с координатой фронта x_k , концентрация узлов, занятых частицами, отличается от p_c . В таких областях присутствуют озера и острова. Характерный размер этих образований равен корреляционной длине ξ , которая в нашем случае зависит от координаты и определяется соотношением (23) в несколько измененном виде:

$$\xi = \xi_0 |p(x) - p_c|^{-\nu}. \quad (49)$$

Если расстояние от x_k до некоторого кластера (озера или острова), характерный размер которого $\xi(x)$, равно ξ , то с конечной вероятностью этот кластер касается границы раздела и поэтому находится внутри нее.

Иначе говоря,

$$\sigma_h = K \xi(x_h \pm \sigma_h). \quad (50)$$

Здесь k - постоянная порядка единицы. В это выражение можно подставить зависимость (49) и, разлагая выражение (44) для $p(x)$ в ряд Тейлора, получаем

$$\sigma_h = K \xi_0 \left[\sigma_h \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{x=x_h} \right]^{-\nu}. \quad (51)$$

Из (44) находим
 $(\partial p / \partial x)_{x=x_h} \propto 1 / \ell$

и, таким образом, приходим к выражению

$$\sigma_h = K' \xi_0' (\sigma_h / \ell)^{-\nu}. \quad (52)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_h \sim \ell \hat{\alpha} \sim \ell^{1+\nu}. \quad (53)$$

Итак, показатель $\hat{\alpha}$, который определяет изменение ширины скорлупы с диффузионной длиной l , следующим образом выражается через показатель ν , описывающий особенность корреляционной длины:

$$\hat{\alpha} = \frac{\nu}{1 + \nu}. \quad (54)$$

Используя точное значение $\nu = 4/3$, получаем оценку $\hat{\alpha} = 4/7 = 0,5714$, а численные расчеты дают $\hat{\alpha} = 0,57 \pm 0,01$.

Мы уже упоминали, что на масштабах, меньших ширины скорлупы, она является самоподобным фракталом. Поэтому в ячейке размером $\sigma_k \times \sigma_k$ число узлов, принадлежащих скорлупе, должно быть равным

$$M_h(L, \ell) \frac{\sigma_h}{L} \sim \sigma_h^\alpha = \ell^\alpha \ell^{1+\nu}, \quad (55)$$

где последнее равенство вытекает из (48) и (54). Таким образом,

$$\alpha = \frac{\nu}{1 + \nu} (D_h - 1) = 3/7 = 0,429 \dots, \quad (56)$$

где использованы значения $D_k = 7/4$ и $\nu = 4/3$. Получаемое значение $\alpha = 0,425 \pm 0,005$ хорошо согласуется с ожидаемой величиной.

Было замечено, что отношение $M_h(L/\ell) \sigma_h / L \ell$ при $l \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине, примерно равной 0,441. В сочетании с законом подобия (55) это обстоятельство приводит к предположению, что фрактальная размерность скорлупы равна

$$D_h = \frac{1 + \nu}{\nu} = 7/4 = 1,75. \quad (57)$$

Этот результат согласуется с численным исследованием глобальной структуры перколяционных кластеров. Часто интерес представляет не скорлупа кластера, а его *внешняя граница*. Внешней границе принадлежат те узлы, которых может достичь частица конечного размера, когда она приближается к кластеру снаружи и касается множества занятых узлов. Именно эта характеристика кластера важна при изучении адсорбции частиц конечного размера на фрактальную

поверхность. Отличие внешней границы от скорлупы определяется тем, что в силу своего конечного размера пробная частица не может проникнуть во многие фиорды. Известно, что фрактальная размерность внешней границы равна $D_e = 1,37 + 0,03$. Эвристические рассуждения приводят к точному значению $D_e = 4/3$. Определение внешней границы можно обобщить, введя понятие *достижимой границы* -совокупности всех узлов на границе, которые связаны с бесконечностью каналом свободных узлов, минимальная ширина которого превышает r (диаметр пробной частицы). Численные расчеты показали, что фрактальная размерность достижимой границы также равна $D_e = 4/3$ и не зависит от r , если диаметр пробной частицы превышает определенный порог, зависящий от вида решетки.

Шоу исследовал фронт вытеснения, образующийся при испарении воды из квазидвумерной пористой среды. В этой работе показано, что фронт устойчив и его локальная структура типична для процесса перколяции с вытеснением (рис. 25, а).

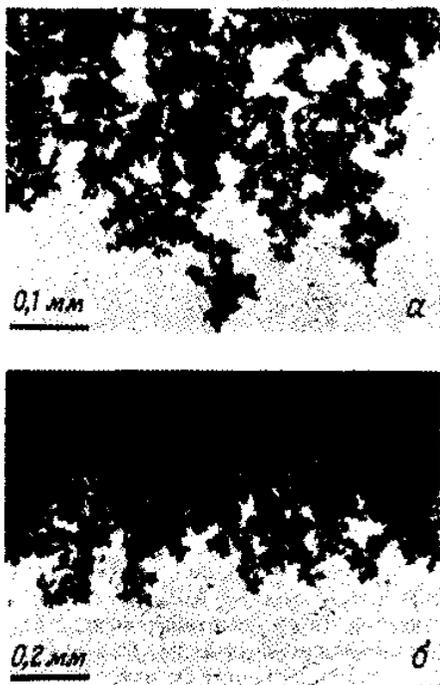


РИС. 25. Фронт испарения в тонком слое кремниевых сфер. Изображение получено в проходящем свете; сухие поры кажутся темными. а-Участок фронта испарения; б-на изображении большего масштаба видно, что фронт устойчив.

Фрактальная размерность фронта оказалась равной $D = 1,89 \pm 0,03$. В более крупном масштабе (рис. 25, б) фронт имеет структуру, очень похожую на структуру скорлупы, показанной на рис. 22. Анализ показал, что фрактальная размерность переднего фронта равна $D = 1,38 \pm 0,02$, что согласуется с ожидаемым значением D_e .

Открытие фрактальной структуры диффузионного фронта заслуживает особого внимания. Процесс диффузии изучают уже давно и о нем известно все, что можно извлечь из уравнения диффузии, которое описывает и нестационарные диффузионные фронты, подобные определяемым соотношением (44); тем не менее диффузионный фронт обладает внутренней структурой, которая оказывается фрактальной. Не следует забывать, что эта фрактальная структура присутствует и в масштабах, сравнимых с диффузионной длиной $\ell = \sqrt{4Dt}$, которая безгранично растет со временем. Поэтому, даже если диффузия протекает на атомарном уровне, фрактальные структуры вполне могут обнаруживаться в макроскопических масштабах.

Россо и др. обобщили эти результаты на случай трехмерной диффузии на простой кубичной решетке. При обсуждении перколяции с вытеснением мы уже столкнулись с тем, что свойства связности в двух- и трехмерных системах качественно различны (рис. 26).

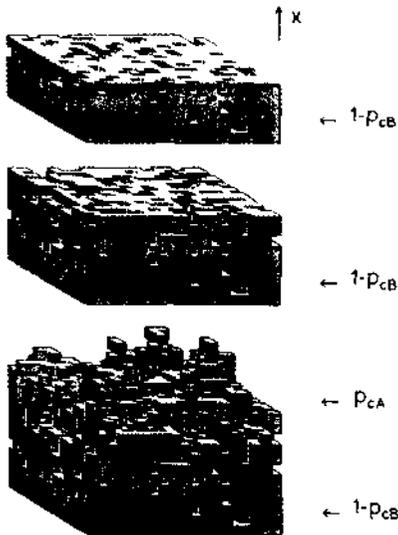


РИС. 26. Вид перколяционной системы размером $19 \times 19 \times 19$ узлов. Кубики изображают частицы, а вероятность занятия узла уменьшается с 1 на нижней граничной плоскости системы до 0 наверху. Показаны только те узлы, занятые частицами, которые связаны с нижней границей системы, a — Верхний

рисунок показывает шесть нижних рядов в самой плотной части системы; б-на среднем рисунке верхний слой находится при концентрации, соответствующей порогу перколяции на квадратной решетке; е-нижний рисунок показывает все узлы, связанные с нижней граничной плоскостью системы. Стрелками показаны плоскости, на которых концентрация равна $1 - p_{cB}$ и p_{cA} .

Диффундирующие частицы считаются связанными, если они оказываются ближайшими соседями, т.е. соседствуют вдоль направлений x , y или z . При таком определении связности порог перколяции по узлам равен $p_{cA} \approx 0,3117$. Свободный (изолирующий) узел считается связанным с другим свободным узлом, если последний является одним из 26 соседних узлов, лежащих на кубе со стороной $3a$ с центром на рассматриваемом узле.

При таком определении связности порог перколяции по свободным узлам равен $p_{cB} \approx 0,097$. На рис. 26 ясно видно, что в диапазоне концентраций $p_{cA} \leq p \leq (1 - p_{cB})$ перколяция возможна одновременно для частиц и дырок.

Скорлупа кластера занятых узлов, связанных с нижней граничной плоскостью системы, состоит из узлов, которые связаны с нижней границей и имеют ближайшими соседями свободные узлы, связанные с самой верхней плоскостью. Интересно, что при тех значениях p , когда возможна одновременная перколяция узлов и дырок, почти все занятые узлы лежат на скорлупе. *Поверхность* диффузионного фронта, которая совпадает со скорлупой, содержит конечную долю узлов и поэтому имеет фрактальную размерность 3. С этой точки зрения она ведет себя как обычное твердое тело. Однако любой точки этого твердого тела можно коснуться снаружи, т.е. каждая его точка лежит на поверхности. В этом смысле такая система представляет собой идеальную пористую среду.

7. Случайное блуждание и фракталы

Случайность присуща всем природным явлениям. Даже в самых правильных кристаллах есть множество случайно разбросанных включений и других дефектов. По сути дела, даже если бы кристалл был идеальным и каждый атом занимал в нем строго определенное место, то и это состояние поддерживалось бы лишь в среднем, поскольку атомы совершают постоянное тепловое движение. Поэтому даже системы, наиболее близкие к идеальным, в реальном состоянии содержат элементы случайности. **Имеются веские основания**

считать, что многие природные явления описываются наилучшим образом как фракталы. Однако, если мы хотим применить фракталы к описанию природы, следует развить концепцию *случайных фракталов*.

Ввиду исключительной важности *броуновского движения*, или процесса *случайных блужданий*, в физике, химии и биологии мы начнем с обсуждения этого явления как примера случайного процесса, обладающего фрактальными свойствами. Простейший случай - одномерное случайное блуждание - затем можно обобщить на большее число измерений. Мы также рассмотрим *обобщенное броуновское движение*, впервые введенное Мандельбротом. Применение метода нормированного размаха, предложенного Херстом, показывает, что статистические свойства многих природных явлений действительно лучше всего описываются на языке обобщенного броуновского движения.

7.1. Броуновское движение

Роберт Браун (Броун) первым понял, что неупорядоченное движение микроскопических частиц пылицы имеет не биологическую природу, как думали до него, а физическую. Все подвержено тепловым флуктуациям, и молекулы, макромолекулы, вирусы, пылинки и другие компоненты окружающего нас мира находятся в вечном движении в постоянных случайных столкновениях, обусловленных их тепловой энергией. Частица вещества, имеющая абсолютную температуру T , несет среднюю кинетическую энергию $(3/2) kT$, где k - постоянная Больцмана. Как показал Эйнштейн, эта энергия не зависит от размера частицы. Наши знания о тепловом равновесии и путях его достижения зиждутся в основном на обширнейших результатах, полученных при исследовании явления, названного *«броуновским движением»*. С помощью микроскопа можно воочию убедиться, что движение *«броуновской частицы»* представляет собой набор шагов в случайно выбираемых направлениях, причем длина шага имеет некоторую характерную величину. Поэтому в описаниях броуновского движения можно часто встретить термин *«случайное блуждание»*.

Подчеркнем, что в броуновском движении независимы не положения частицы в разные моменты времени - смещение частицы в течение одного промежутка времени не зависит от ее же смещения в течение другого интервала времени.

Увеличив разрешение микроскопа и временное разрешение, с которым регистрируется движение, мы вновь получим подобное случайное блуждание. Как мы увидим ниже, броуновское движение самоподобно. Если время рассматривать как дополнительное измерение, то зависи-

мость положения частицы как функция времени, называемая **диаграммой движения**, является не самоподобной, а *самоаффинной*. Различие понятий «самоподобие» и «самоаффинность» будет играть важную роль в последующих разделах этой книги.

На языке броуновского движения можно наиболее глубоко понять явление диффузии.

7.2. Одномерное случайное блуждание

Рассмотрим частицу, которая движется вдоль прямой линии - назовем ее осью x , перепрыгивая на расстояние $+\zeta$ или $-\zeta$ каждые τ секунд. При моделировании диффузии ζ , отождествляется с микроскопической длиной (скажем, с диаметром частицы), а τ - с микроскопическим временем (временем столкновений).

Пусть ξ -не фиксированная величина. Зададим ее гауссовым, или нормальным, распределением вероятностей

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}\tau}\right). \quad (1)$$

Процесс случайного блуждания в атомарных масштабах можно описать следующим образом. На каждом интервале длительностью τ длина шага ζ , выбирается случайным образом и вероятность того, что ζ заключено между ξ и $\xi + d\xi$, равна $p(\xi, \tau)d\xi$. Последовательность таких чисел (длин шагов) $\{\xi_i\}$ является набором *независимых* гауссовых случайных чисел. Дисперсия этого набора равна

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 p(\xi, \tau) d\xi = 2\mathcal{D}\tau. \quad (2)$$

Параметр \mathcal{D} - это *коэффициент диффузии*. Как следует из равенства (2), коэффициент диффузии подчиняется *соотношению Эйнштейна*:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2\tau} \langle \xi^2 \rangle, \quad (3)$$

где $\langle \xi^2 \rangle$ - средний квадрат длины шага. Соотношение (3) справедливо при довольно общих предположениях, даже когда скачки разделены неодинаковыми интервалами времени и распределение вероятностей длины скачка ζ дискретно, непрерывно или имеет произвольный вид. Перейдем с *стандартному* гауссову случайному процессу, заменив $\xi/\sqrt{2\mathcal{D}\tau}$ на ξ , так что вновь определенное ξ имеет нулевое среднее значение и дисперсию $\langle \xi^2 \rangle = 1$. На рис. 1, а показана последовательность *стандартных* гауссовых случайных чисел.

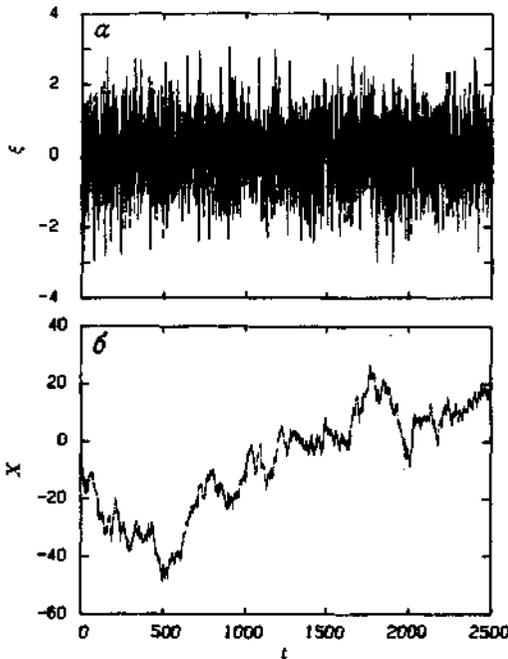


РИС. 1. Последовательность независимых гауссовых случайных чисел с нулевым средним значением и единичной дисперсией: а-независимые случайные шаги «частицы»; б-координата частицы. Время измерено в единицах «атомарного» интервала времени между шагами τ .

Последовательность ξ_1, ξ_2, \dots определяет последовательность длин шагов случайного блуждания, а координата частицы на оси x равна

$$X(t = n\tau) = \sum_{i=1}^n \xi_i. \quad (4)$$

Кривая на рис.1,б показывает как координата частицы меняется со временем. В действительности эта кривая - дискретный набор точек, но мы просто не потрудились отрывать карандаш от бумаги между точками. В пределе произвольно малой длительности шага набор случайных чисел переходит в случайную функцию $X(t)$. График случайной функции выглядит подобно кривой на рис. 1, б и его называют диаграммой случайной функции $X(t)$. Мандельброт называет эту диаграмму функцией Брауна и обозначает ее $B(t)$.

7.3. Свойства подобия одномерных случайных блужданий

На практике броуновское движение наблюдается с конечным разрешением, поэтому необходимо рассмотреть случай, когда координата частицы регистрируется через каждый промежуток времени $b\tau$, где b - некоторое произвольное число. Начнем с наблюдения каждого второго шага, т. е. возьмем $b = 2$ (рис. 2).

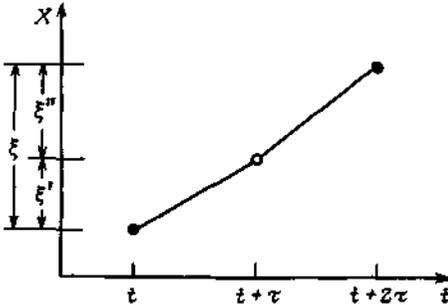


РИС. 2. Приращение ξ координаты броуновской частицы за время 2τ равно сумме двух независимых приращений ξ' и ξ'' .

Тогда приращение координаты частицы ξ равно сумме двух независимых приращений ξ' и ξ'' . Совместная вероятность $p(\xi'; \xi'', \tau) d\xi' d\xi''$ того, что первое приращение ξ' заключено в интервале $[\xi', \xi' + d\xi']$, а второе, ξ'' , в интервале $[\xi'', \xi'' + d\xi'']$, выражается через функцию $p(\xi, \tau)$ из (1) соотношением

$$p(\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau) p(\xi'', \tau).$$

Совместная плотность вероятности представляет собой произведение двух плотностей вероятности для каждой из переменных по отдельности, поскольку эти два приращения статистически независимы. Оба приращения должны складываться в полное приращение ξ , и интегрирование по всем возможным комбинациям ξ' и ξ'' приводит к следующему выражению для плотности вероятности значений ξ :

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' p(\xi - \xi', \tau) p(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D 2\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4D 2\tau}\right). \quad (5)$$

Итак, мы видим, что при анализе с половинным временным разрешением приращения координаты частицы остаются гауссовым случайным процессом с $\langle \xi \rangle = 0$. Однако дисперсия увеличилась: $\langle \xi^2 \rangle = 4D\tau$. Эти рассуждения легко обобщить на случай интервала $b\tau$ между наблюдениями:

$$p(\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}b\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\mathcal{D}b\tau}\right). \quad (6)$$

Мы приходим к заключению, что какое бы число b микроскопических временных шагов ни разделяло моменты наблюдений, приращения координаты частицы всегда составляют гауссов случайный процесс с независимыми значениями с $\langle \xi \rangle = 0$ и дисперсией

$$\langle \xi^2 \rangle = 2\mathcal{D}t \quad \text{при} \quad t = b\tau. \quad (7)$$

На рис. 3 показаны положения частицы, регистрируемые на каждом четвертом шаге процесса из 10000 независимых шагов с нулевым средним и единичной дисперсией, т.е. того же процесса, который изображен на рис. 1.

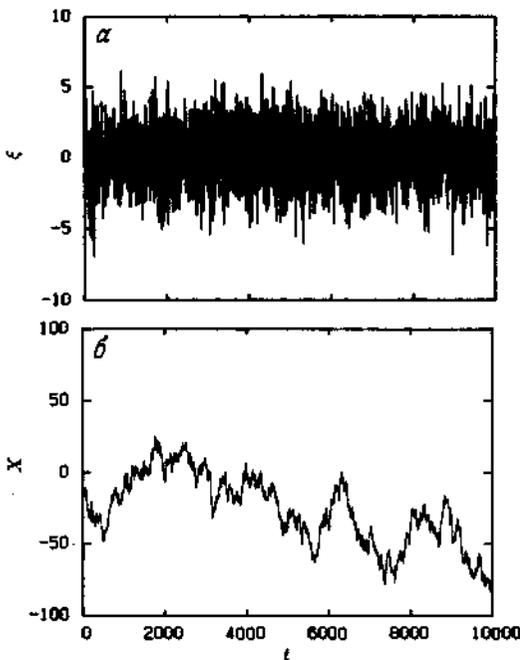


РИС. 3. Последовательность независимых гауссовых случайных чисел с нулевым средним и единичной дисперсией при «регистрации» на каждом четвертом временном шаге, т.е. через интервалы времени 4τ : а-независимые случайные шаги «частицы»; б-координата частицы. Единица измерения времени - «неделимый» период τ между шагами.

Каждое приращение здесь - сумма 4 независимых шагов, и мы видим, что рис. 1, а и 3, а мало чем отличаются, разве что масштабом приращений, которые стали теперь примерно вдвое больше. Точно так же *диаграмма* движения на рис. 3, б имеет те же статистические свойства, что и диаграмма на рис. 1, б, но уже с другой ценой деления по оси x . Однако для любой конечной реализации эти две диаграммы будут иметь совершенно различный локальный вид и вертикальные масштабы не будут отличаться на ожидаемый множитель \sqrt{b} . Свойство броуновских диаграмм не менять «вида» при изменении разрешения называется *масштабной инвариантностью*, или *симметрией*, броуновских диаграмм. Это *свойство подобия* (скейлинга) броуновского движения можно выразить в явном виде, преобразовав соотношение (1) с помощью замены $\xi = b^{1/2}\xi$, $\hat{\tau} = b\tau$, т. е. изменив масштаб времени в b раз, а масштаб длины-в $b^{1/2}$ раз. В результате такого преобразования получаем следующее соотношение подобия для плотности вероятности:

$$p(\xi = b^{1/2}\xi, \hat{\tau} = b\tau) = b^{-1/2}p(\xi, \tau). \quad (8)$$

Множитель $b^{-1/2}$ обеспечивает правильную нормировку плотности вероятности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi, \hat{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi p(\xi, \tau) = 1.$$

Соотношение (8) показывает, что броуновский случайный процесс *инвариантен в смысле распределения* при преобразовании, которое меняет масштаб времени в b раз, а масштаб длины в $b^{1/2}$ раз. Как будет обсуждаться ниже, преобразования, которые меняют масштабы времени и расстояния в разных пропорциях, называются *аффинными*, а зависимости, которые в некотором смысле сохраняют свой вид при аффинном преобразовании, называются *самоаффинными*.

Распределение вероятности координаты частицы $X(t)$ находится теми же методами, что и выше, и мы получаем выражение

$$P(X(t) - B(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mathcal{D}|t - t_0|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4\mathcal{D}|t - t_0|}\right), \quad (9)$$

которое удовлетворяет соотношению подобия

$$P(b^{1/2}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-1/2}P(X(t) - X(t_0)). \quad (10)$$

Зная распределение вероятности координаты частицы, можно найти следующие выражения для среднего значения координаты и ее дисперсии:

$$\langle X(t) - X(t_0) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0,$$

$$\langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 2\mathcal{D} |t - t_0|, \quad (11)$$

где $X(t_0)$ - координата частицы в некоторый начальный момент t_0 , а ΔX - приращение координаты, $\Delta X = X(t) - X(t_0)$.

Координата броуновской частицы $X(t)$ -случайная функция времени t .

Винер ввел случайную функцию, описывающую броуновское движение. Рассмотрим стандартный гауссов случайный процесс с независимыми значениями $\{\xi\}$. Пусть приращение координаты броуновской частицы определяется выражением

$$X(t) - X(t_0) \sim \xi |t - t_0|^H \quad (t \geq t_0) \quad (12)$$

для любой пары моментов времени t и t_0 . Здесь $H = 1/2$ для обычного броуновского движения. Соотношение (12) служит определением *случайной функции* и применимо в момент t_0 независимо от того, известны значения $X(t)$ в более ранние моменты времени $t < t_0$ или нет. Соотношение (12) часто дополняют условием $X(0) = 0$, но это лишь дело удобства. Имея определение, выраженное соотношением (12), можно найти координату $X(t)$ по координате $X(t_0)$, выбирая случайное число ξ из гауссова распределения, умножая его на некоторую степень приращения времени $|t - t_0|$ и складывая результат с известной координатой $X(t_0)$. Эта процедура применима и при $t < t_0$. Функция, определяемая соотношением (12), непрерывна, но она не имеет производных. Как следует из определения (12), случайная функция $X(t)$ имеет распределение (9).

Из соотношения (9) вытекает, что преобразованная переменная x , определяемая выражением

$$x = \frac{X(t) - X(t_0)}{\sqrt{2\mathcal{D}\tau} (|t - t_0|/\tau)^H}, \quad (13)$$

при всех t и t_0 имеет гауссово распределение вероятностей

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad (14)$$

с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

7.4. Обобщенное броуновское движение

Понятие *обобщенного броуновского движения* введено Мандельбротом через обобщение случайной функции $X(t)$ путем замены показателя $H = 1/2$ в соотношениях (12) и (13) на любое действительное число из

интервала $0 < H < 1$; результат обобщения обозначается $B_H(t)$. Действительно обобщенными являются случаи, когда $H \neq 1/2$, а случай $H = 1/2$ соответствует *независимым* приращениям и описывает броуновское движение; в этом случае мы будем использовать обозначение

$$B(t) = B_{1/2}(t).$$

Если в выражениях (13) и (14) обозначение координаты точки $X(t)$ заменить на $B_H(t)$, то будет ясно, что обобщенный броуновский процесс имеет нулевое среднее приращение

$$\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0,$$

а *дисперсия приращений* $V(t - t_0)$ имеет вид

$$V(t - t_0) = \langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2\mathcal{D}\tau (|t - t_0|/\tau)^{2H} \sim |t - t_0|^{2H}. \quad (15)$$

Как видим, и для обычного, и для обобщенного броуновского движения со временем дисперсия растет.

Важно понять, что обобщенное броуновское движение имеет бесконечно большое время корреляции. В частности, приращения в прошлом скоррелированы с будущими приращениями: если известно приращение $B_H(0) - B_H(-t)$ за период времени от $-t$ до 0, то вероятность иметь приращение $B_H(t) - B_H(0)$, усредненная по распределению прошлых приращений, равна

$$\langle [B_H(0) - B_H(-t)][B_H(t) - B_H(0)] \rangle.$$

Положим для удобства $B_H(0) = 0$ и будем использовать такие единицы измерения, чтобы выполнялись равенства $\tau = 1$ и $2\mathcal{D}\tau = 1$. Функцию корреляции будущих приращений $B_H(t)$ с прошлыми $-B_H(-t)$ можно записать в виде

$$C(t) = \frac{\langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle}{\langle B_H^2(t) \rangle} = 2^{2H-1} - 1, \quad (16)$$

нормированном на дисперсию B_H . Последнее соотношение непосредственно вытекает из (15).

Прежде всего заметим, что при $H=1/2$ корреляция *прошлых* и *будущих* приращений $C(t)$ отсутствует при всех t , как и должно быть для случайного процесса с *независимыми приращениями*. Однако при $H \neq 1/2$ мы получаем $C(t) \neq 0$ *независимо* от t . Это свойство обобщенного броуновского движения, заключающееся в *персистентности* (сохранении тенденции) и *антиперсистентности*. При $H > 1/2$ *поддерживается* имеющаяся тенденция. Если в этом случае приращения были положительными в течение некоторого времени в прошлом, т.е. происходило увеличение, то и впредь в среднем будет происходить увеличение. Таким образом, для процесса с

$H > 1/2$ тенденция к увеличению в прошлом означает тенденцию к увеличению в будущем и, более того, это справедливо для произвольно больших t . И наоборот, тенденция к уменьшению в прошлом означает, в среднем, продолжение уменьшения в будущем.

Случай $H < 1/2$ характеризуется *антиперсистентностью*. В этом случае рост в прошлом означает уменьшение в будущем, а тенденция к уменьшению в прошлом делает вероятным увеличение в будущем.

Следует заметить, что поведение статистического ряда, описываемое выражением (16), противоречит обычно допускаемым или доказываемым свойствам статистических рядов и физических систем. Как правило, в статистической физике подразумевается предположение, что события могут быть скоррелированы, если они разделены во времени не более чем на Δt , но они непременно окажутся некоррелированными в пределе $\Delta t \rightarrow \infty$.

Подобная статистическая независимость на больших интервалах во времени и/или пространстве является существенной составной частью представлений о тепловом равновесии. Имеются и исключения: по мере приближения к точке фазового перехода второго порядка, например к критической точке жидкости, в корреляционных функциях плотности появляется компонента, которая не содержит ни пространственного, ни временного собственного масштаба.

Вследствие этого свободная энергия системы содержит критическую компоненту, которая подчиняется соотношению подобия, и степенное поведение корреляционных функций становится не исключением, а правилом.

Что касается временных рядов наблюдений, то при обсуждении метода Херста мы убедились, что его применение ко многим естественным явлениям обнаруживает, что они характеризуются персистентностью на широком интервале временных масштабов. Для моделирования временных рядов, описывающих подобные явления, полезно обобщенное броуновское движение.

7.5. Определение обобщенного броуновского движения

Чтобы глубже понять природу обобщенного броуновского движения, можно реализовать этот процесс с помощью численного моделирования и получить данные, аналогичные представленным на рис. 1 для обычного броуновского движения. Мандельброт и Ван Несс определили случайную функцию $B_H(t)$ с нулевым средним примерно следующим образом:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t (t - t')^{H-1/2} dB(t'). \quad (17)$$

Здесь $\Gamma(x)$ - гамма-функция. Согласно этому определению, значение случайной функции в момент t зависит от всех предшествующих (в моменты $t' < t$) приращений $dB(t')$ обычного гауссова случайного процесса $B(t)$ с нулевым средним и единичной дисперсией.

Обозначение $dB(t)$ для случайной переменной становится понятным, если попытаться вычислить интеграл, заменив его суммой. С тем чтобы аппроксимировать интеграл, выберем единицу измерений времени так, чтобы t принимало целочисленные значения, и разделим каждый единичный интервал времени на n малых временных шагов. Тогда переменную интегрирования можно записать как $t' = in$, где $i = -\infty, \dots, -2/n, -1/n, 0, 1/n, \dots, t/n$. Приращение $dB(t')$ исходного гауссова процесса с независимыми значениями можно теперь записать в виде $n^{-1/2}\zeta_i$, где ζ_i теперь дискретная гауссова случайная переменная с нулевым средним и единичной дисперсией. Множитель $n^{-1/2}$ перед ζ учитывает перенормировку броуновских приращений при уменьшении шага по времени (см. 8)). Итак, мы получаем следующее приближенное выражение:

$$B_H(t) \simeq \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=-\infty}^n \left(t - \frac{i}{n}\right)^{H-1/2} n^{-1/2}\zeta_i. \quad (18)$$

Очевидно, что этот ряд не сходится, а с ним расходится при $t' \rightarrow -\infty$ и интеграл в выражении (17). Это грубое определение случайной функции $B_H(t)$ необходимо заменить на более точное, использованное Мандельбротом и Ван Нессом. При заданном значении $B_H(t = 0)$

$$B_H(t) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^t K(t - t') dB(t'). \quad (19)$$

Здесь вместо простого степенного ядра, которое присутствовало в определении (17), появляется модифицированное ядро:

$$K(t - t') = \begin{cases} (t - t')^{H-1/2} & \text{при } 0 \leq t' \leq t, \\ \{(t - t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2}\} & \text{при } t' < 0. \end{cases} \quad (20)$$

При $t' \rightarrow -\infty$ это ядро убывает достаточно быстро, чтобы выражение (19) подходящим образом определяло случайную функцию $B_H(i)$.

Соотношение (19) имеет вид общего уравнения линейного отклика. Здесь независимое гауссово приращение $dB(t')$, имеющее значение 1 в момент t' , в более поздний момент t вносит вклад в смещение фрактальной броуновской частицы $B_H(t)$, который определяется функцией отклика $K(t - t')$ через линейное соотношение. Необычное свойство функции $K(t) \sim t^{H-1/2}$ состоит в том, что эта степенная функция не имеет собственного масштаба времени, или единицы времени. Изменяя масштаб времени на множитель b , мы получаем следующий *масштабированный* вид соотношения (19):

$$B_H(bt) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \int_{-\infty}^b K(bt - t') dB(t'). \quad (21)$$

Введем здесь новую переменную интегрирования $t' = b\hat{t}$ и воспользуемся следующим *статистическим* свойством гауссова процесса с независимыми приращениями: $dB(t' = b\hat{t}) = b^{1/2}d\hat{B}(\hat{t})$. Используя тогда соотношение $K(bt - b\hat{t}) = b^{H-1/2}K(t - \hat{t})$, получим выражение

$$B_H(bt) - B_H(0) = b^H \{B_H(t) - B_H(0)\}, \quad (22)$$

справедливое в статистическом смысле при *всех* значениях b . В частности, можно положить $t = 1$ и $\Delta t = bt$ и прийти к выводу, что приращение координаты фрактальной броуновской частицы, равное

$$B_H(\Delta t) - B_H(0) = |\Delta t|^H \{B_H(1) - B_H(0)\} \sim |\Delta t|^H, \quad (23)$$

статистически пропорционально $|\Delta t|^H$. Отсюда следует, что дисперсия приращений определяется соотношением (15) с $t_0 = 0$ и $\Delta t = t - t_0$. Конечно, именно этот результат заставляет нас предпочесть для B_H определение (19).

7.6. Моделирование обобщенного броуновского движения

Как видим, дискретный аналог $B_H(t)$, определяемый соотношением (18), пришлось изменить, выбрав подходящее ядро, чтобы сделать ряд сходящимся. Однако при любом вычислении B_H придется использовать конечное число членов, тогда суммы будут иметь смысл только на конечном интервале M целочисленных значений времени t . Для приближенного расчета интеграла разобьем каждый шаг по целочисленному времени на n интервалов и получим следующее приближенное выражение :

$$B_H(t) - B_H(t - 1) = \frac{1}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \sum_{i=n(t-M)}^{nt} K\left(t - \frac{1}{n}\right) n^{-1/2} \xi_i. \quad (24)$$

Здесь $\{\xi_i\}$ с $i = 1, 2, \dots, M, \dots$ есть набор гауссовых случайных чисел с единичной дисперсией и нулевым средним. Ядро K определяется выражением (20). Изменив индекс суммирования и перегруппировав члены в сумме, мы получим следующее выражение для дискретных приращений при обобщенном броуновском движении:

$$B_H(t) - B_H(t - 1) = \frac{n^{-H}}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right)} \left\{ \sum_{i=1}^{nt} (i)^{H-1/2} \xi_{(1+n(M+i)-i)} + \sum_{i=1}^{n(M-1)} ((n+i)^{H-1/2} - (i)^{H-1/2}) \xi_{(1+n(M-1+i)-i)} \right\}. \quad (25)$$

Пользуясь соотношением (25), по последовательности гауссовых случайных чисел можно составить последовательность *приращений* B_n . Заметим, что это приближение эквивалентно вычислению скользящего среднего, со степенной весовой функцией, от гауссова процесса. Поскольку в сумму включены лишь M целочисленных временных шагов, при $t \gg M$ приращения станут независимыми и в этом приближении B_n превратится в гауссов процесс с независимыми приращениями.

Алгоритм, который определяется выражением (25), неэкономичен, поскольку для вычисления каждого значения приращения B_n приходится вычислять сумму nM членов. Мандельброт предложил быстрый алгоритм моделирования обобщенного гауссова шума, основанный на вычислении с весами суммы ряда марковских гауссовых переменных с увеличивающимися корреляционными временами и прибавлении высокочастотной компоненты, имеющей марковские гауссовы свойства. Но для наших целей лучше подходит описанный выше алгоритм, и мы удовлетворимся моделированием на умеренных интервалах времени M .

Увеличение n необходимо для более точного описания поведения $B_H(t)$ на малых интервалах времени (которое здесь не очень существенно) и для иллюстративных целей мы положили $n = 8$.

Рассчитали B_n по гауссову процессу с 27 500 независимыми шагами, из которых первые 2500 шагов показаны на рис.1. На рис.4 приводим фрактальный шум, т. е. приращения B_n , определяемые как разность $\Delta B_H(t) = B_H(t) - B_H(t - 1)$. Для обычных броуновских приращений $H = 1/2$, и получаемый шум является гауссовым процессом с независимыми значениями, который обычно называют *белым шумом*.

Фрактальные шумы, показанные на рис. 4, соответствуют $H = 0,7$ и $H = 0,9$.

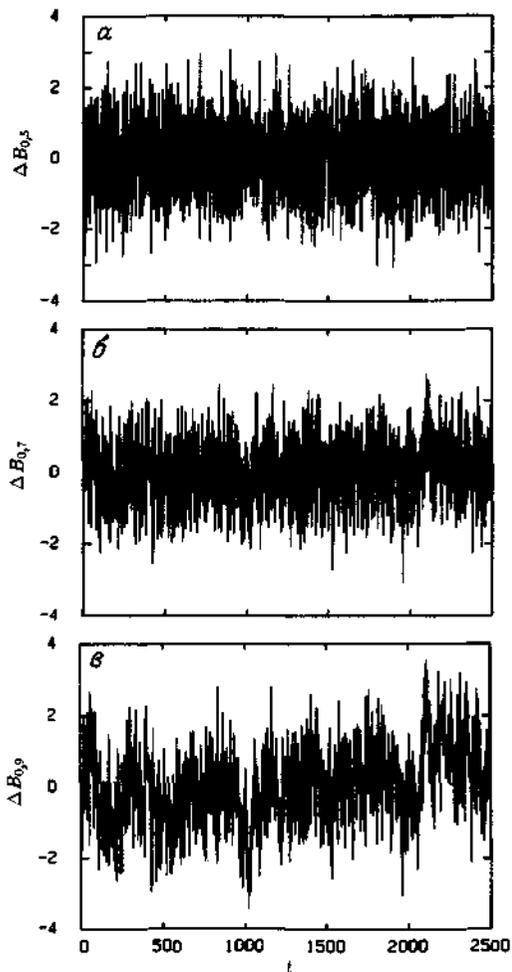


РИС. 4. Фрактальный шум, или приращения фрактальной броуновской функции B_{α} , рассчитанной при $M = 700$ и $n = 8$: а-обычные броуновские приращения при $H = 1/2$; б-фрактальные приращения при $H = 0,7$; в — фрактальные приращения при $H = 0,9$.

При увеличении H не происходит существенной перестройки процесса. Однако более внимательный анализ показывает, что по мере

увеличения H усиливается низкочастотный шум, который приводит к большим отклонениям амплитуды (по сравнению с высокочастотными компонентами).

На рис. 5 показано изменение с t фрактальной броуновской функции $B_H(t)$ при $B_H(0) = 0$.

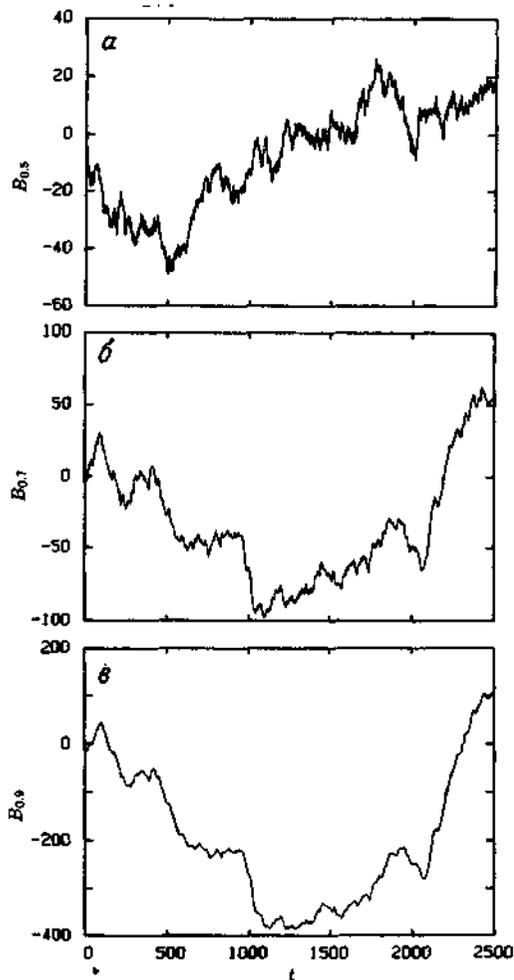


РИС. 5. Фрактальная броуновская функция B_H , рассчитанная при $M = 700$, $n = 8$ при условии $B_H(0) = 0$: а-обычная броуновская функция при $H = 1/2$; б-фрактальная броуновская функция при $H = 0,7$; в-фрактальная броуновская функция при $H = 0,9$.

Эта функция описывает положение частицы, которая начинает движение из начала координат и движется вдоль оси x с шагами, показанными на рис. 4. С увеличением величины H увеличивается амплитуда вариаций координаты положения частицы и в такой же степени уменьшается шум.

При фрактальном движении с $H > 1/2$ отклонения от начала координат по сравнению со случаем броуновского движения аномально велики. Действительно, при фрактальном броуновском движении дисперсия координаты определяется соотношением (15), и, используя соотношение Эйнштейна в виде (11), мы можем определить коэффициент аномальной фрактальной диффузии выражением

$$\mathcal{D}_H \sim \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \mathcal{D} |t|^{2H-1}. \quad (26)$$

Такая аномальная диффузия играет важную роль в анализе процессов фрактального переноса. Она возникает во многих случаях, как, например, при рассмотрении электрической проводимости случайных сред. Следует подчеркнуть, что аномальный характер диффузии, описываемой соотношением (26), связан с фрактальными свойствами блужданий в евклидовом пространстве. Если блуждание происходит на фрактальном множестве, погруженном в евклидово пространство, то коэффициент диффузии остается аномальным, но характеризуется другим показателем степенной зависимости от времени.

Как следует из соотношения (15), нормированная дисперсия приращений зависит от времени запаздывания t как

$$V(t) = \langle [B_H(t) - B_H(0)]^2 \rangle / \langle B_H^2(t) \rangle = |t|^{2H}. \quad (27)$$

Величину $V(t)$ можно оценить из зависимостей, показанных на рис. 5. Получающиеся функции $V(t)$ при разных значениях H очень хорошо аппроксимируются ожидаемым законом (27). Однако в результате использования конечной величины M и конечной длительности исходного броуновского движения с независимыми приращениями значения $V(t)$, полученные при численном моделировании, оказываются меньше ожидаемых теоретических значений при запаздывании порядка $t \geq M$ (рис. 6).

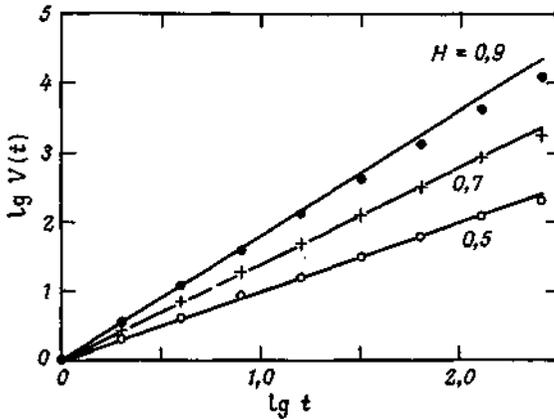


РИС. 6. Дисперсия приращений фрактальной броуновской функции $V(t)$, рассчитанной при $M = 700$, $n = 8$ при условии $B_n(0) = 0$. Сплошными линиями показаны зависимости $V(t) = |t|^{2H}$ при $H = 0,5, 0,7$ и $0,9$.

Таким образом, при $t \sim M$ приближенный дискретный фрактальный шум начинает переходить в белый шум. Увеличивая M , можно неограниченно увеличить область, в которой модель шума остается фрактальной. Однако, если нужно получить фрактальный шум на очень больших интервалах времени, следует пользоваться более экономичными алгоритмами.

7.7. Метод R/S для обобщенного броуновского движения

Соотношение подобия (22) привело к выводу (23) о том, что случайная функция $B_H(\Delta t)$ пропорциональна $|\Delta t|^H$. Отсюда следует, [146], что размах $R(\tau)$ при запаздывании τ также является случайной функцией, которая подчиняется закону подобия

$$R(\tau) \sim \tau^H.$$

Поскольку для истинной дисперсии мы имеем $S = 1$, а дисперсия выборки значений нормированной фрактальной броуновской функции близка к единице, отсюда вытекает, что нормированный размах R/S подчиняется статистической зависимости

$$R(\tau)/S \sim \tau^H. \quad (28)$$

Итак, мы пришли к заключению, что показатель Херста H можно оценить, аппроксимируя экспериментальные или модельные результаты соотношением (28).

Для проверки этого соотношения мы применили метод R/S к анализу результатов численного моделирования функции B_{II} . На рис. 9.7 показаны результаты применения метода R/S к гауссову процессу с независимыми приращениями, показанному на рис. 1.

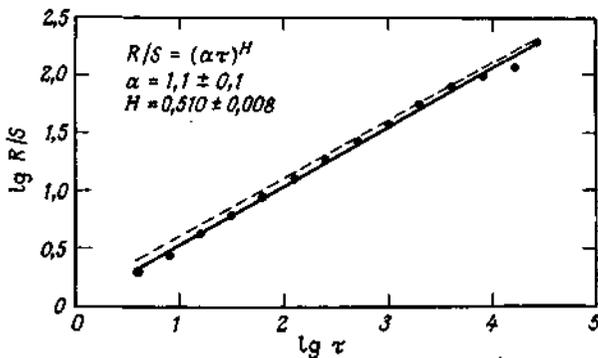


РИС. 7. Отношение R/S в зависимости от запаздывания τ для стандартной гауссовой переменной с независимыми значениями ζ . Штриховой линией показана ожидаемая теоретическая асимптотика $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$. Сплошной линией показана аппроксимирующая зависимость $R/S = (\alpha\tau)^H$ при $H = 0,510 \pm 0,008$ и $a = 1,1 \pm 0,1$.

Для нашей модели показатель Херста равен $H = 0,510 \pm 0,008$, что хорошо согласуется с теоретическим значением $H = 1/2$.

На рис. 8 приведены результаты расчета R/S для фрактальной броуновской функции $B_{0,9}(t)$, показанной на рис. 4, в. Как видим, эти результаты сильно отличаются от случая обычного броуновского процесса.

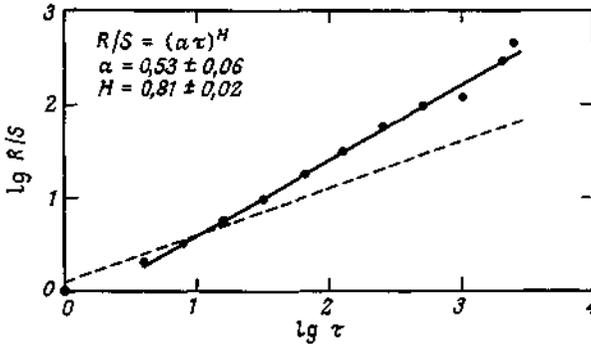


РИС. 8. Отношение R/S в зависимости от запаздывания τ для фрактальной броуновской функции $B_H(t)$ с $H = 0,9$. Штриховой линией показана асимптотическая зависимость для гауссова процесса с независимыми значениями, $R/S = \sqrt{\pi\tau/2}$. Сплошная линия - аппроксимация $R/S = (a\tau)^H$ при $H = 0,81 \pm 0,02$ и $a = 0,53 \pm 0,06$.

Однако найденное значение показателя Херста $H = 0,81 \pm 0,02$ несколько меньше значения $H = 0,9$, использованного при моделировании. Впрочем, следует помнить, что наша модель дает лишь *приближенно* фрактальные броуновские функции, поскольку мы используем конечное время памяти $M = 700$ и конечное разрешение $n = 8$. Поэтому естественно, что оценка показателя Херста по численной модели несколько занижена, — при запаздывании $\tau > 700$ наша модель переходит в гауссов процесс с независимыми значениями, а для него $H = 1/2$. Можно заключить, что показатель Херста можно точно оценить, анализируя хорошо определенные наборы данных, состоящие примерно из 2500 измерений.

7.8. Последовательные случайные сложения

Р. Ф. Фосс предложил методы построения не только обычной фрактальной броуновской функции, но и фрактальных броуновских поверхностей и объемов. Свой алгоритм он назвал *последовательным случайным сложением*. Используя для иллюстрации рис. 9.9, опишем этот алгоритм.

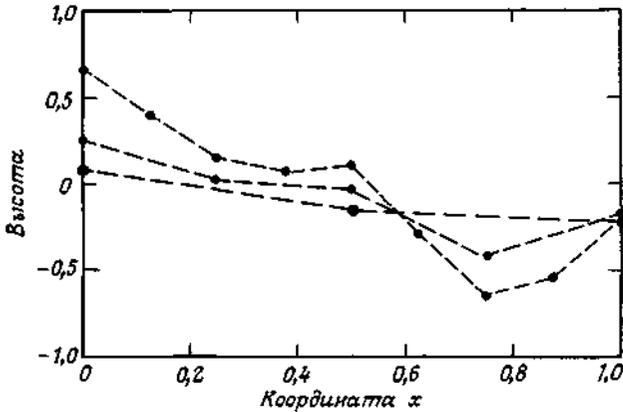


РИС. 9. Процедура последовательных случайных сложений. Точки, принадлежащие одному и тому же поколению, соединены линиями. Три самых больших кружка соответствуют первому сложению с тремя начальными значениями высоты, равными нулю. Пять меньших кружков получены после интерполяции первых трех значений к промежуточным точкам и прибавления меньших случайных чисел ко всем пяти ординатам. Самыми маленькими кружками отмечены значения высоты в девяти точках следующего поколения.

Чтобы построить обобщенную броуновскую кривую, высота или вертикальная координата $X(t)$ которой описывается законом обобщенного броуновского движения, следует потребовать, чтобы дисперсия приращений координаты подчинялась соотношению

$$V(t) = \langle [X(t) - X(0)]^2 \rangle = |t|^{2H} \sigma_0^2. \quad (29)$$

Это переписанное соотношение (27); здесь σ_0^2 - (начальная) дисперсия случайных сложений, к обсуждению которых мы переходим.

Нижеследующий процесс, предложенный Фоссом, приводит к обобщенному броуновскому движению при любом разрешении. Отправная точка - последовательность значений координаты

$X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$, заданных для моментов времени t_1, \dots, t_N . Мы выберем $N = 3$, моменты времени $t_i = 0, 1/2, 1$ и примем исходные значения координаты равными нулю. Затем к значениям координаты $X(t_1), X(t_2), X(t_3)$ прибавляются случайные числа, выбранные из нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией, $\sigma^2 = \sigma_1^2 = 1$. Средние значения времени на каждом интервале затем рассматриваются как дополнительные узлы на оси времени; значения координаты в них оцениваются интерполяцией.

Итак, теперь выделены моменты времени $t_1, \dots, t_5 = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$. И

вновь ко всем координатам прибавляются случайные числа с нулевым средним значением и уменьшенной дисперсией

$$\sigma_2^2 = (1/2)^{2H} \sigma_1^2.$$

Между пятью новыми значениями координаты вновь проводится интерполяция к серединам временных интервалов, что приводит к 9 значениям координаты в 9 моментов времени. После n -кратного применения этого алгоритма мы получаем значения координаты обобщенной броуновской частицы в $(1+2^n)$ моментов времени. Эти значения получены с помощью интерполяции и случайного сложения. Дисперсия слагаемых n -го поколения равна

$$\sigma_n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2Hn} \sigma_{n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2Hn} \sigma_0^2.$$

Как показал Фосс, этот процесс приводит к самоаффинным кривым, фрактальная размерность которых равна $D = 2 - H$.

Мы построили такие кривые для различных значений показателя Херста и приводим результаты на рис..10.

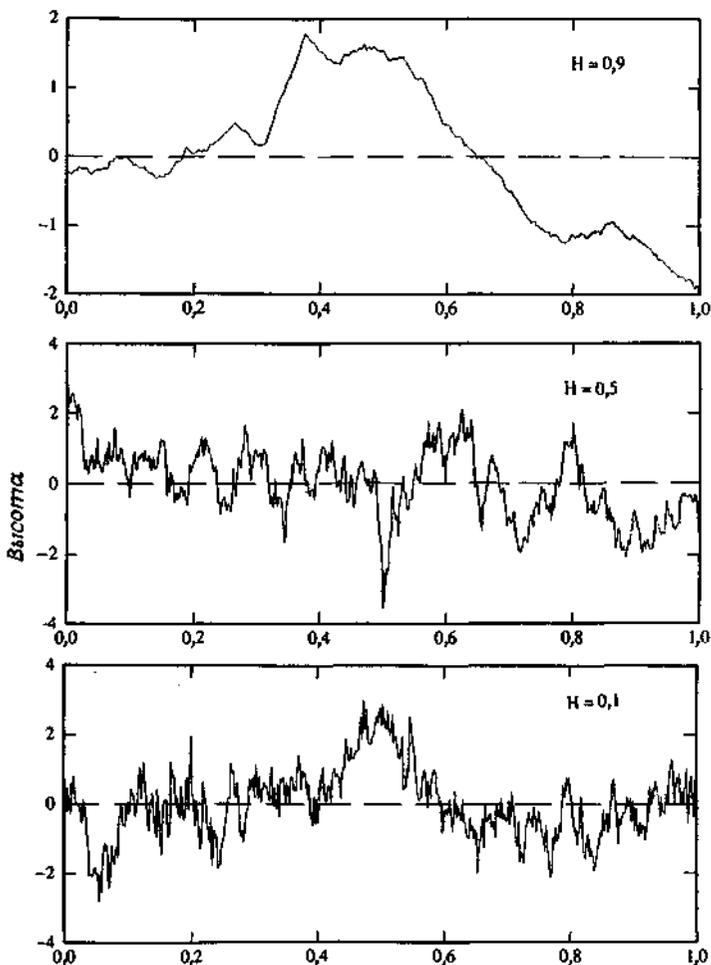


РИС. 10. Фрактальные броуновские кривые, полученные с помощью алгоритма последовательных случайных сложений Фосса при различных значениях показателя Херста H . Фрактальная размерность этих кривых равна $D = 2 - H$. Кривые рассчитывались с разрешением $1/2048$.

Все кривые были преобразованы так, чтобы они имели нулевое среднее значение и единичную дисперсию выборки. Случай $H = 0,5$ соответствует обычному броуновскому движению, встречающемуся во многих приложениях. К примеру, шумы усилителей часто полагают заданными кривой с $H = 0,5$.

Персистентное (поддерживающееся) поведение наблюдается при $0,5 < H < 1$. Примером персистентного процесса с $H = 0,92$ является статистика морских волн, обсуждаемая позже. В этом случае персистентность означает, что если высота волн увеличивалась в течение времени t , то можно ожидать ее увеличения в течение последующего периода примерно такой же длительности. И наоборот, если высота волн оказывается уменьшающейся в течение времени t , то следует ожидать ее дальнейшего уменьшения в течение последующего такого же интервала времени. Другими словами, персистентные стохастические процессы обнаруживают довольно четко выраженные тенденции изменения при относительно малом шуме. В общем, когда приходится сталкиваться с проявлениями персистентных стохастических процессов, возникает соблазн поиска периодичностей (см. рис. 10).

С другой стороны, при *антиперсистентном* стохастическом процессе после возрастания переменной обычно происходит ее уменьшение, а после уменьшения - возрастание. Такое поведение характерно для фрактальных броуновских процессов при значении H , заключенном между 0 и $1/2$. Запись антиперсистентного процесса, например кривая с $H = 0,1$ на рис. 10, выглядит очень зашумленной. У таких кривых уровень локального шума совпадает по порядку величины с глобальными отклонениями сигнала.

Фосс обобщил алгоритм последовательных случайных сложений на двух- и трехмерные системы. Полученные им фрактальные пейзажи генерируются посредством интерполяции на квадратной сетке и тех же случайных сложений с уменьшающейся дисперсией, которые обсуждались выше. Примеры пейзажей, построенных с помощью алгоритма Фосса, приводятся позже.

Фосс показал также, что *заполненность* получаемых фрактальных поверхностей можно контролировать, выбирая коэффициент уменьшения r не равным $1/2$, так что в n -м поколении сложения проводятся при дисперсии $\sigma^2_n = r^{2H} \sigma^2_0$. Фоссу удалось генерировать изображения облаков, находя значения концентрации воды $s(\mathbf{x})$ в трехмерном пространстве и закрашивая белым те области, в которых s превышает определенную постоянную величину. Полученные им изображения облаков по качеству сравнимы с работами лучших художников. С этой точки зрения облака представляют собой фрактальные объемы в четырехмерном самоаффинном пространстве, состоящем из трех пространственных координат и дополнительного измерения - концентрации воды.

7.9. Самоподобие и самоаффинность

Распределение вероятностей для броуновского движения удовлетворяет соотношениям подобия (8) и (10). Но между этими группами соотношений есть и очень важное отличие. Соотношения для броуновского движения носят более общий характер, во-первых, потому, что для него подобие обнаруживается по двум переменным, ζ и t . В этом нет ничего нового - кривая Кох, показанная ранее, зависит от двух переменных x и y , а мы уже показали, что эта кривая самоподобна с коэффициентом подобия r , который непосредственно связан с фрактальной размерностью кривой D . Во-вторых, -и это более важно - время и координата входят в соотношение подобия с *разными* коэффициентами: когда время умножается на коэффициент b , координата умножается на b^H .

С помощью обсуждавшегося ранее соотношения подобия точки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_E)$ E -мерного пространства преобразуются в точки $\mathbf{x}' = (rx_1, \dots, rx_E)$ с *одинаковым* для всех координат значением коэффициента подобия r . Ограниченное фрактальное множество точек \mathcal{S} самоподобно с *отношением подобия* r , если \mathcal{S} является объединением N непересекающихся подмножеств $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$, каждое из которых конгруэнтно множеству $r(\mathcal{S})$, получаемому из \mathcal{S} с помощью преобразования подобия с $0 < r < 1$. Свойство *конгруэнтности* означает, что множество точек \mathcal{S}_i совпадает с множеством точек $r(\mathcal{S})$ после переноса и/или поворота. Тогда гомотетическая размерность равна

$$D_s = \frac{\ln N}{\ln 1/r}. \quad (30)$$

Множество \mathcal{S} *статистически автомодельно*, если оно является объединением N отдельных подмножеств, каждое из которых получено из \mathcal{S} преобразованием подобия с коэффициентом r ($0 < r < 1$) и обладает в точности теми же статистическими свойствами, что и $r(\mathcal{S})$. Часто случайные множества, например береговая линия, являются самоподобными не только для некоторого значения коэффициента подобия r , но и для целого ряда его значений, превышающих некоторый нижний предел (микромасштаб) и меньших некоторого верхнего предела (макромасштаб). Для таких множеств метод *покрытия* дает эффективную оценку фрактальной размерности множества, и эта оценка совпадает с D_s .

Во многих случаях встречаются несамоподобные множества. Например, в случае броуновской частицы ее координата и время являются разными физическими величинами, и вряд ли можно ожидать, что x и t будут иметь одинаковые коэффициенты подобия. Так мы приходим к необходимости обсуждения понятий, связанных с *самоаффинностью*.

Аффинное преобразование переводит точку $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_E)$ в новую точку с координатами $\mathbf{x}' = (r_1 x_1, \dots, r_E x_E)$, где не все коэффициенты подобия r_1, \dots, r_E одинаковы. Пример такого преобразования приведен в следующем разделе.

Ограниченное множество \mathcal{S} *самоаффинно* по отношению к вектору подобия $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_E)$, если \mathcal{S} является объединением N непересекающихся подмножеств $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_N$, каждое из которых конгруэнтно множеству $\mathbf{r}(\mathcal{S})$, получаемому из \mathcal{S} с помощью аффинного преобразования, которое определяется вектором \mathbf{r} . Свойство *конгруэнтности* означает, что множество точек \mathcal{S}_i совпадает с множеством точек $\mathbf{r}(\mathcal{S})$ после переноса и/или поворота.

Множество \mathcal{S} *статистически самоаффинно*, если \mathcal{S} является объединением N непересекающихся подмножеств, каждое из которых получено из исходного множества аффинным преобразованием с помощью \mathbf{r} и имеет в точности те же статистические свойства, что и $\mathbf{r}(\mathcal{S})$.

Фрактальная размерность даже простейших самоаффинных фракталов не определяется однозначно. Эта проблема обсуждалась Мандельбротом. Во-первых, гомотетическую размерность просто нельзя определить, она существует только для самоподобных фракталов. Можно ли определить *размерность по покрытию* D_B ? Для множеств, подобных *графику* фрактальной броуновской функции $B_H(t)$, эту размерность в любом случае можно вычислить формально. Для гауссова процесса с независимыми приращениями зависимость координаты от времени $X(t)$ имеет вид, показанный на рис. 1. Покроем этот график клетками шириной bt вдоль оси времени и длиной ba вдоль пространственной координаты, так что самая малая клетка имеет размеры $\tau \times a$. Тогда размерность по покрытию определяется выражением

$$N(b; a, \tau) \sim b^{-D_B}, \quad (31)$$

где $N(b; a, \tau)$ - число клеток, необходимое для покрытия кривой. Поскольку при численном моделировании мы использовали целочисленные значения времени, минимальная ширина клетки равна $\tau = 1$, а для высоты можно использовать меньшую величину $a = 0,0001$.

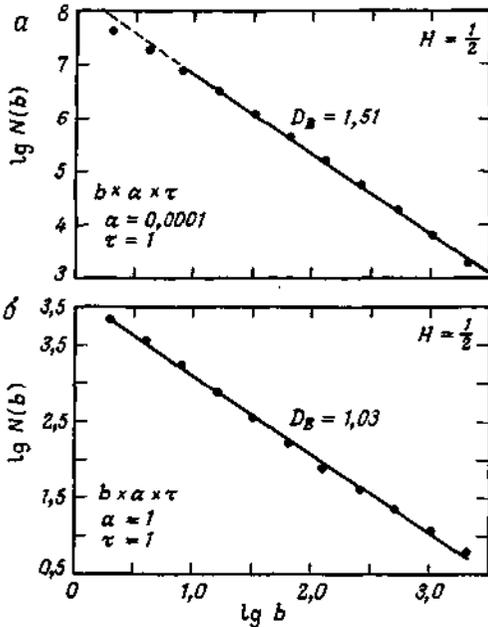


РИС. 11. Число ячеек $N(b; a, \tau)$ размера $b \times (a, \tau)$ как функция масштаба ячеек b для графика $B(t)$ гауссова процесса с 7500 независимыми шагами: а-при $a = 0,0001$ и $\tau = 1$ аппроксимация точек на графике дает $D_B = 1,51 \pm 0,02$; б-при $a = 1$ и $\tau = 1$ мы получаем $D_B = 1,03 \pm 0,02$.

Как видно из рис. 11, а, N действительно обнаруживает зависимость типа (31). Аппроксимируя полученные данные зависимостью (31), получаем оценку $D_B = 1,51 + 0,02$. Если положить $a = 1$, т.е. сделать минимальную длину клетки равной типичной длине шага, получим $D_B = 1,03 + 0,02$ (рис. 11,б).

Отчего возникает это различие? Пусть длительность рассматриваемого периода равна T . Тогда для того, чтобы покрыть ось времени, нужно $T/b\tau$ отрезков длиной $b\tau$. В пределах каждого отрезка диапазон изменения функции имеет порядок величины $\Delta B_H(b\tau) = b^H \Delta B_H(\tau)$; чтобы покрыть такой размах, необходимо взять $b^H \Delta B_H(\tau) / ba$ рядов клеток высотой ba каждая. Итак, для покрытия кривой необходимо количество клеток порядка

$$N(b; a, \tau) = \frac{b^H \Delta B_H(\tau)}{ba} \times \frac{T}{b\tau} \sim b^{H-2} \sim b^{-D_B}. \quad (32)$$

Отсюда находим соотношение

$$D = 2 - H \text{ для самоаффинных кривых. (33)}$$

В этих рассуждениях рассматриваются клетки, размеры которых малы по сравнению как с длительностью процесса T , так и с диапазоном изменения функции; поэтому соотношение $D = 2 - H$ справедливо, когда структура кривой, описывающей фрактальную функцию, исследуется с высоким разрешением, т. е. в локальном пределе. Поскольку для гауссова броуновского движения с независимыми шагами $H = 1/2$, мы ожидаем для него $D = 1,5$, что согласуется с результатом, приведенным на рис. 11, а. И для фрактальной броуновской функции с $H = 0,7$, глядя на рис. 12, мы убеждаемся в справедливости соотношения (33).

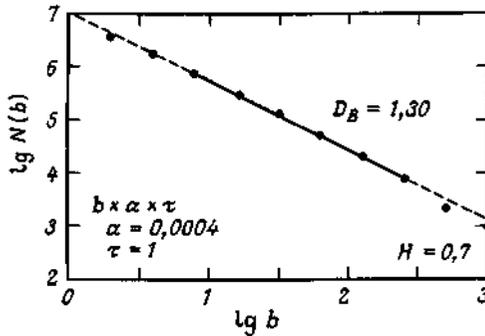


РИС. 12. Число ячеек $N(b; a, \tau)$ размера $b \times (4 \cdot 10^{-4}, 1)$ как функция масштаба ячеек b для графика $V_H(t)$ фрактальной броуновской функции с $H = 0,7$ при учете 2500 шагов. Прямая линия - аппроксимация с $D_B \sim 1,30 \pm 0,02$.

Эти рассуждения неприменимы, когда для покрытия кривой используются клетки, размер которых не мал по сравнению с размахом кривой. В частности, если выбрать величину a порядка характерной длины шага $a = \sqrt{\langle \xi^2 \rangle} = 1$, то на каждом временном отрезке длительностью bt для покрытия кривой размахом $\Delta B_H(bt)$ требуется всего 1 ряд клеток и мы получаем

$$N(b; a, \tau) \sim 1 \times \frac{T}{b\tau} \sim b^{-1}. \quad (34)$$

Теперь размерность по покрытию равна $D_B = 1$. В точности такой же результат получился на рис. 11,б, где также $a = 1$. Заметим, что если продолжать увеличение размера клетки b , то мы всегда будем получать это предельное значение. Увеличивая значение b , мы рано или поздно получаем клетки такого размера, что одна клетка может покрыть весь

диапазон изменения B_n на конечном интервале времени $b\tau$. Теперь увеличим длительность процесса от T до nT . Число клеток, необходимых для покрытия всей кривой, увеличится пропорционально n , откуда следует, что $D = 1$. Глобальная фрактальная размерность самоаффинной кривой равна $D = 1$, т.е. самоаффинные кривые нефрактальны в глобальном смысле.

Мы пришли к выводу, что при анализе самоаффинных фрактальных кривых следует различать *локальную* фрактальную размерность $D = 2 - H$ и *глобальную* фрактальную размерность $D = 1$.

Еще один вид размерности, которую можно вычислить непосредственно, — *внутренняя размерность*, получаемая, когда для измерения длины кривой вдоль нее укладывается эталон или линейка длиной δ . В случае самоподобных фрактальных кривых, подобных береговым линиям, мы ожидаем получить длину порядка

$$L \sim \delta^{1-D}. \quad (35)$$

Однако вряд ли разумно вводить линейку, размерность которой совпадает с размерностями *времени*, когда она укладывается вдоль оси t , и *длины*, когда она ориентирована вдоль оси x . Между тем именно такие свойства требуются в случае самоаффинных кривых. Впрочем, график самоаффинной функции можно перенести на миллиметровку и на ней измерять длину кривой. Выбрав линейку длиной δ , расположенную так, чтобы она покрывала временной шаг длительностью $b\tau$, мы получим следующий вклад в общую длину кривой:

$$\delta = (b^2\tau^2 + b^{2H} [\Delta B_H(\tau)/a]^2)^{1/2}. \quad (36)$$

Если выбрать достаточно сильное увеличение вдоль оси x , т. е. использовать достаточно малое a , то второе слагаемое под квадратным корнем станет преобладающим и мы получаем $\delta \sim b^H$. Число таких отрезков вдоль оси времени равно $T/b\tau \sim b^{-1} \sim \delta^{-1/H}$, и мы получаем общую длину

$$L \sim \delta^{1-1/H} \sim \delta^{1-D}. \quad (37)$$

Итак, в локальном пределе, когда растягивается масштаб оси x , мы получили *внутреннюю размерность* равной $D_D = 1/H$. Если, однако, растягивать ось времени так, что на миллиметровке становятся незаметными флуктуации $X(t)$, преобладающим становится первое слагаемое под квадратным корнем, и мы получаем $\delta \sim b$. Полная длина окажется равной $L \sim \delta \times T/b \sim \delta^0$, и поэтому $D = 1$. И вновь *глобальная* размерность равна $D = 1$, в то время как *локальная* размерность *фрактальна* и равна $D = 1/H$. Иногда эту последнюю величину называют *скрытой* фрактальной размерностью, она связана с фрактальной размерностью *следа* броуновской частицы.

Сведения о разных видах фрактальной размерности собраны в табл.1. Таблица 1

Размерность фрактальной броуновской функции

Размерность	Самоподобная кривая	Самоаффинная кривая	
		локальная	глобальная
Хаусдорфа	D	$1/H$	$2 - H$
клеточная	D_B	$1/H$	$2 - H$
внутренняя	D_D	—	$1/H$
случайного блуждания	D_W	$1/H$	—
подобия	D_S	$\ln N / \ln 1/r = 1/H$	—

7.10. Стратегия смелой игры

Интересный пример сингулярной самоаффинной функции, связанной с теорией игр, обсуждал Биллингсли, популярно изложивший идеи Дьюбинса и Сейвиджа. Для начала рассмотрим такую задачу: игрок приходит в казино с суммой 900 долларов и желанием (или надеждой) увеличить ее до 1000 долларов. На каждый запуск рулетки он ставит по 1 доллару, причем каждый раз вероятность выиграть 1 доллар равна p , а вероятность проигрыша 1 доллара равна $q = 1 - p$. Стратегия этого игрока состоит в том, чтобы играть либо до увеличения своего состояния до 1000 долларов, либо до разорения. Как мы увидим, эта стратегия, которую называют *робкой игрой*, не самая удачная, и гораздо более предпочтительна стратегия *смелой игры*, определяемая ниже. При робкой игре вероятность успеха $M_T(x)$, т. е. вероятность достижения цели $G = 1000$ долларов при начальном капитале $C = 900$ долларов $= xG$, равна

$$M_T(x) = \begin{cases} x & \text{при } p = q = \frac{1}{2}, \\ \frac{(q/p)^{xG} - 1}{(q/p)^G - 1} \approx \left(\frac{p}{q}\right)^{(1-x)G} & \text{при } p \leq \frac{1}{2} \leq q. \end{cases} \quad (38)$$

В нашем случае применимо последнее приближенное равенство, поскольку $q/p > 1$, а C и G —большие числа. Так как размер ставки мал по сравнению с расстоянием до цели, в хорошем приближении можно считать, что капитал игрока увеличивается и уменьшается по закону случайного блуждания. При абсолютно честной игре (равных шансах) это просто процесс несмещенного случайного блуждания и у игрока

вполне разумный шанс выиграть: $M_T(x = 0,9, p = 0,5) = 0,9$. Но ни в одном из существующих казино не ведется абсолютно честная игра. Из 38 полей обычной рулетки 18 полей красные, 18 черные, а 2-зеленые; поэтому $p = 18/38$. Для игрока, который ставит на красное, вероятность успешно увеличить свой капитал от 900 до 1000 долларов, ставя по 1 доллару на каждый запуск рулетки, составляет всего лишь 0,00003.

Предположим, что оптимизм игрока настолько велик, что он надеется превратить начальный капитал 100 долларов в сумму 20000 долларов прежде, чем останется без денег. Если $p = 0,5$, его шанс составляет 0,005, но при $p = 18/38$ вероятность такого выигрыша составляет всего лишь $3 \cdot 10^{-911}$. Нужно быть отчаянным оптимистом, чтобы в таких условиях надеяться на выигрыш. Шансы добиться успеха совершенно ничтожны. Однако ничто не заставляет игрока ставить только по 1 доллару. Предположим, что он ставит по 10 долларов. Тогда его начальный капитал состоит из 10 десятидолларовых банкнот, а цель заключается в увеличении его до 2000 десятидолларовых банкнот. Это соответствует значениям $G = 2000$ и $C = 10$ в соотношении (38).

Вероятность успеха тогда увеличивается от $3 \cdot 10^{-911}$ до примерно $(p/q)^{2000-10} \approx 10^{-91}$. Такая стратегия увеличения ставки неизмеримо увеличивает шансы выигрыша, но тем не менее вероятность успеха остается безнадежно мала.

Большие ставки увеличивают вероятность успеха игры. Это и определяет стратегию смелой игры: «При каждом запуске рулетки игрок ставит все свое состояние, если оно не превышает половины желаемой суммы, в противном случае его ставка равна разности между желаемой и имеющейся суммами». Смелая игра делает максимальной вероятность достижения цели, именно когда $p < 1/2$. При $p = 18/38$ вероятность разбогатеть до $G = 20000$ долларов, начав со 100 долларов, равна 0,003. Как видим, такая стратегия много лучше робкой игры, которую мы обсуждали выше.

Для анализа смелой игры удобно перейти к другому масштабу. Пусть состояние игрока x заключено между 0 и 1, а желаемая сумма равна 1. Обозначим через $M(x)$ вероятность успеха (при смелой игре) при начальном капитале x . Тогда стратегию смелой игры можно описать следующим образом. Предположим, что состояние игрока заключено в пределах $0 \leq x \leq 1/2$ и он ставит сумму x . Если ему суждено увеличить состояние до 1, то он должен выиграть первую ставку (с вероятностью p), а затем с новым капиталом $x + x = 2x$ продвигаться к окончательному успеху (с вероятностью $M(2x)$). Произведение $pM(2x)$ и есть вероятность выигрыша первой ставки и дальнейшего успеха. Таким образом, при начале с $x \leq 1/2$ вероятность достижения цели определяется первым из двух равенств:

$$M(x) = pM(2x) \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$M(x) = p + (1 - p)M(2x - 1) \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \quad (39)$$

Теперь предположим, что игрок начинает игру, имея состояние в пределах $1/2 \leq x \leq 1$, так что ставит сумму $1-x$. Он может выиграть уже при первом запуске рулетки (с вероятностью p). Возможен также первый проигрыш (с вероятностью $q = 1 - p$), и тогда дальнейшая игра будет происходить с исходным капиталом $x - (1 - x) = 2x - 1$ (вероятность успеха $M(2x - 1)$). Поэтому при $1/2 \leq x \leq 1$ вероятность достижения цели определяется вторым из пары равенств (39).

Эти уравнения совпадают с уравнениями, описывающими меру мультипликативного процесса, который обсуждался ранее. Пример вероятности $M(x)$ выигрыша при смелой игре представлен на рис. 13 как функция x для $p = 0,25$. Эта вероятность (мера) является растущей функцией x , причем эта функция сингулярна в том смысле, что почти всюду ее наклон равен нулю.

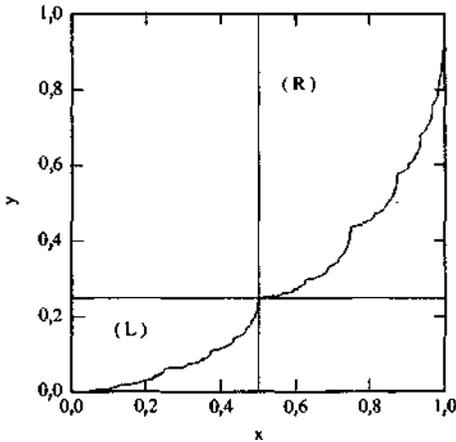


РИС. 13. Пара аффинных преобразований координат L и R , описываемых уравнениями (39), которые отображают единичный квадрат на прямоугольники. Эта пара преобразований дает самоаффинную кривую $y = M(x)$, показанную здесь при $p = 0,25$.

Вероятность достижения цели увеличивается только на множестве точек, для которого мера Лебега равна нулю и левая производная $M(x)$

равна $+\infty$, а правая производная равна нулю. Длина кривой $M(x)$ равна $L = 2$, поэтому это *не* фрактальная кривая, а фрактальная мера.

Уравнения (39) означают инвариантность меры $M(x)$ по отношению к аффинным преобразованиям координат. Эти преобразования имеют вид

$$\begin{aligned} L: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}x, py\right), \\ R: (x, y) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}, p\right) + \left(\frac{1}{2}, (1-p)y\right) \end{aligned} \quad (40)$$

и отображают кривую $y = M(x)$ на себя-кривая самоаффинна. Этих преобразований *два*. Преобразование L отображает единичный квадрат в прямоугольник, помеченный буквой *l* на рис. 13. Оно просто уменьшает масштаб оси x в 2 раза, а масштаб оси y уменьшается множителем p . R-преобразование также укорачивает ось x вдвое, но масштаб оси y уменьшается множителем $1 - p$, а не p . Кроме того, R-преобразование переносит сжатый единичный квадрат, и в итоге он отображается на прямоугольник, помеченный на рис. 13 буквой R.

Мандельброт обсуждает многие свойства самоаффинных фрактальных кривых, которые генерируются семействами аффинных преобразований. Он вводит класс *рекуррентно* самоаффинных фрактальных кривых, для которых справедливы соотношения, приведенные в табл.1. Он же обсуждает дополнительные виды размерности, с помощью которых можно описывать самоаффинные фрактальные кривые.

7.11. Статистика высоты волн

Морские волны надо знать. Они важны для любой деятельности на море и могут оказаться жизненно важными, большая доля потерь человеческих жизней и кораблей связана с крупными штормовыми волнами. Подробные наблюдения высоты волн, их периода и других параметров проводятся во многих местах по всему миру.

Здесь мы проанализируем данные измерений в Тромсёфлакет, предоставленные Норвежским институтом метеорологии. Параметры волн в период 1980-1983 гг. получены с помощью поплавков, регистрирующих уровень водной поверхности. Высота волн регистрировалась

сериями по 2048 измерений через каждые 3 с полусекундным интервалом, т.е. всего в течение примерно 17 мин. Высота волны определялась как разность самого высокого и самого низкого уровней между двумя последовательными пересечениями нулевого уровня воды снизу вверх. Нулевой уровень определялся как текущий средний уровень воды.

Этот обширный набор данных сначала изучался обычными, классическими методами. Например, вычислялась *высота характерной волны* h_s , определяемая как среднее по 1/3 самых крупных волн, зарегистрированных за 17-минутный интервал наблюдений.

Максимальная высота волны, встречающаяся за этот период, h_{\max} , примерно равна $1,8 h_s$. Ниже мы будем обсуждать именно данные по h_s , поскольку эта величина представляет собой робастную меру высоты волн. Дело в том, что волна максимальной высоты, вполне вероятно, проходит не во время периода наблюдений, который составляет всего лишь 9,4% полного времени. В общем максимальную высоту волн можно оценить как $1,8 h_s$. Кроме этих параметров вычислялись и другие характеристики волн, такие, как средний период T_s одной трети самых высоких волн, средний период T_z между пересечениями нулевого уровня и энергетический спектр для 2048 измерений.

Особенно интересна возможность предсказания «девятого вала», т. е. ответ на вопрос: «Каким образом можно получить наилучшую оценку максимальной высоты волны, исходя из ограниченного набора измерений высоты волн?» Такие предсказания должны основываться на понимании статистики высот волн, а она может быть *фрактальной*. Поэтому мы проанализировали данные о высоте волн, рассматривая график $h_s(t)$ как фрактальную кривую, подобную графику фрактального броуновского движения.

7.11.1. Метод R/S для наблюдений h_s

На рис.14 показаны наибольшие значимые высоты волнения h_s на каждый день в 1980 г.

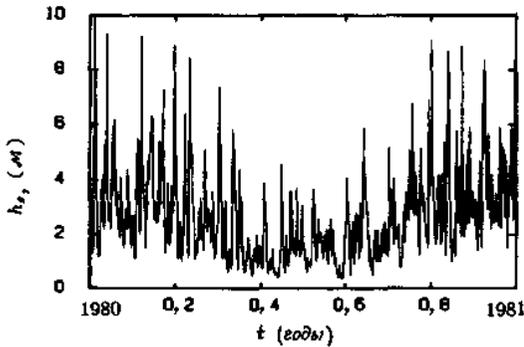


РИС.14. Максимальная высота характерной волны h_s в Тромсёфлакет по наблюдениям, проводившимся каждые 3 ч в течение 1980 г. (Норвежский институт метеорологии).

Максимальное значение h_s равно 10,7 м, а самая сильная волна имела высоту $h_{\text{макс}}$ около 19 м. Существенной особенностью этих данных являются сезонные вариации.

Для интерпретации наблюдаемой высоты волн как шагов броуновского движения мы устанавливаем соответствие $h_s(t) \rightarrow \xi(t)$ и переходим к обозначениям, введенным в предыдущей главе. Теперь можно, не задумываясь, двигаться дальше и вычислить R/S как функцию запаздывания τ для волнения моря в Тромсёфлакет. Как видно из рис.15, мы получаем хорошее согласие с законом Херста $R(\tau)/S \sim \tau^H$ с показателем Херста $H = 0,87 \pm 0,01$.

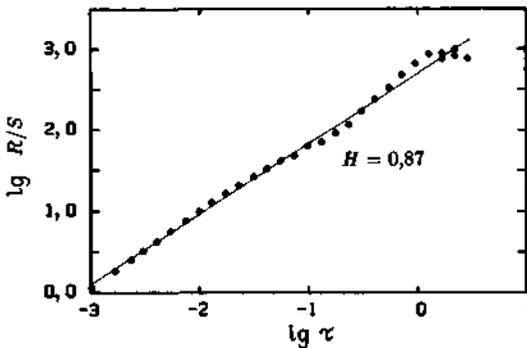


РИС.15. Отношение R/S как функция запаздывания τ для случайного процесса, в котором высота характерной волны h_s в Тромсёфлакет рассматривается как аналог случайного процесса $\{\xi\}$. Линией показана аппроксимация данных законом Херста $R/S \sim \tau^H$ при $H = 0,87 \pm 0,01$.

Это высокое значение показателя Херста указывает на то, что статистика высоты волн *сильно отклоняется от гауссовой*. И поскольку наблюдаемое значение H существенно превышает $1/2$, напрашивается вывод, что высота волнения обнаруживает персистентность.

Однако более внимательное изучение рис. 15 показывает, что при запаздываниях τ около 1 года кривая имеет заметную структуру. Не вызывает сомнения, что эта особенность связана с сезонными вариациями. Присутствие в статистике периодических компонент осложняет ситуацию, и для исключения периодичностей нет общих правил. Мандельброт и Уоллис рассматривали R/S-статистику солнечных пятен, которые, как хорошо известно, обнаруживают 11-летний цикл активности. Их результаты, показанные на рис.16, приводят к кажущемуся значению показателя Херста $H = 0,93$, который сильно превышает $1/2$.

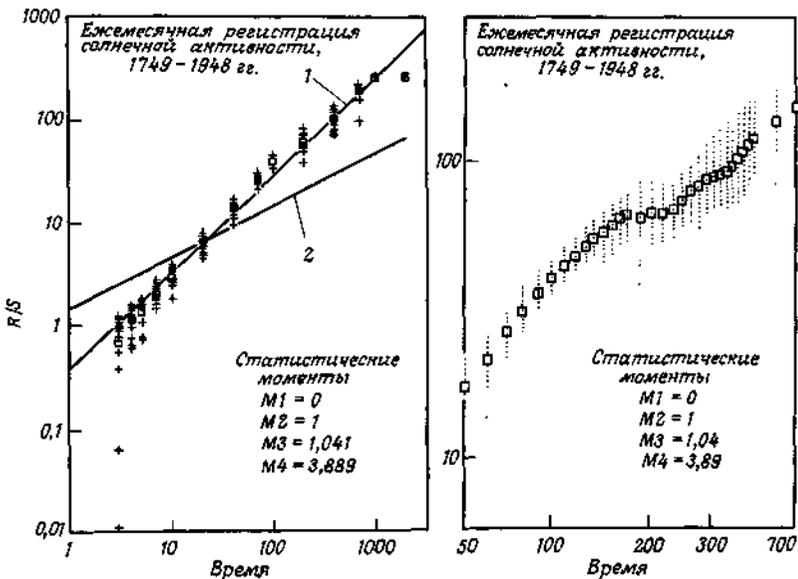


РИС.16. Отношение R/S в зависимости от запаздывания τ для ежемесячных измерений чисел Вольфа, характеризующих солнечную активность. На более детальном графике, показанном справа, ясно заметно влияние 11-летнего цикла.

7.11.2. R/S для данных, очищенных от сезонных вариаций

Вопрос о том, как оценить влияние периодических компонент на получаемое значение показателя Херста, мало обсуждался в научной литературе. Поэтому очистили данные наблюдений от сезонных вариаций. В результате такой поправки можем представить наблюдательные данные в виде временных рядов, подобных показанному на рис.17.

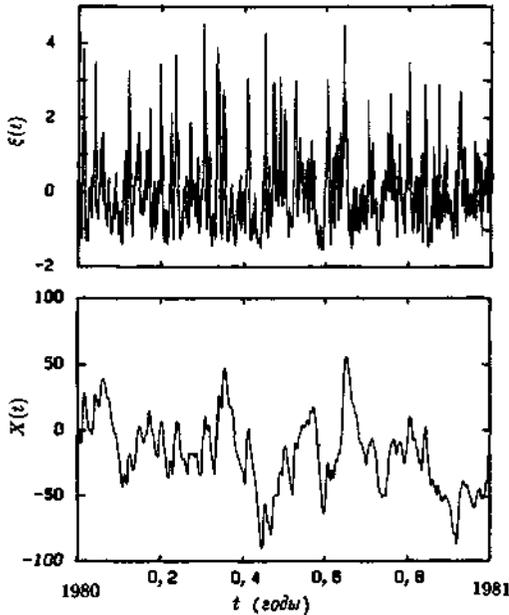


РИС.17. Нормированная высота волн $\zeta(t)$, поправленная на сезонные вариации, как функция времени по наблюдениям h_s в Громсёфлакет. Нижний рисунок показывает сумму $X(t) = \sum_{u=0}^t \zeta(u)$ как функцию времени.

Нормированная высота волн имеет нулевое среднее значение $\langle \zeta \rangle = 0$ и единичную дисперсию $\langle \zeta^2 \rangle = 1$, так что рис. 17 можно непосредственно сравнивать с фрактальным шумом и фрактальными функциями. Из графика $X(t)$ на рис. 17 явствует, что отклонения X велики по сравнению с шумом. Результаты расчета R/S по очищенным высотам волн, показанные на рис.18, теперь обнаруживают *две области* с разными свойствами.

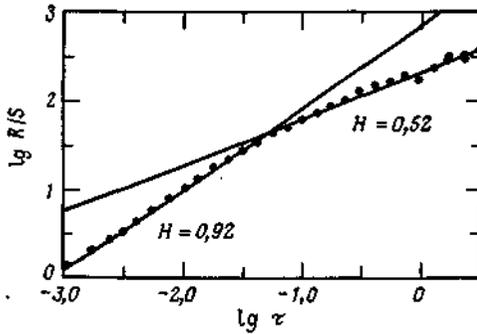


РИС.18. Отношение R/S как функция запаздывания τ (в годах) для процесса, в котором поправленные на сезонные вариации и отнормированные высоты характерной волны в Тромсёфлакет рассматриваются как шаги (обобщенного) случайного блуждания. Линиями показаны аппроксимации законом Херста $R/S \sim \tau^H$. При $\tau < 10$ дней аппроксимация дает $H = 0,92 \pm 0,02$, а при $\tau > 20$ дней мы получили $H = 0,52 \pm 0,02$.

На временах, не превышающих примерно 10 дней, мы сталкиваемся с *персистентной статистикой* с $H = 0,92 \pm 0,02$. Напротив, при запаздываниях, превышающих $\tau = 20$ дней, мы находим $H = 0,52 \pm 0,02$, что согласуется со статистической *независимостью* значений X . При τ около 1 года по-прежнему имеется небольшая аномалия, но она гораздо слабее, чем раньше. Указания на определенно персистентное поведение при $\tau < 10$ дней не изменились по сравнению с зависимостью R/S для исходных данных с рис. 15, для которых $H = 0,94 \pm 0,02$ в этом диапазоне. Это говорит о том, что метод R/S действительно приводит к *робастной* мере статистики временных рядов.

Ранее мы показали, как фрактальную размерность самоаффинной кривой, подобной $X(t)$ на рис.17, можно оценить методом покрытия при условии, что мы будем иметь в виду возможную зависимость результата от размера и формы исходных клеток. На рис. 19 показан результат применения метода покрытия к данным о высоте волн.

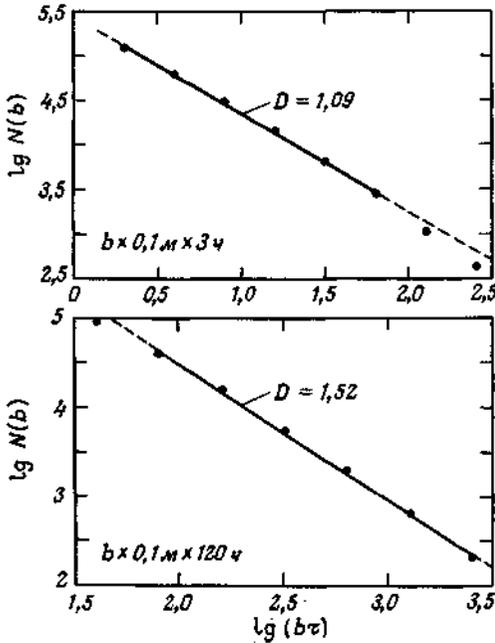


РИС.19. Число ячеек $N(b)$ размера $b \times (a, \tau)$ как функция масштаба ячейки b для суммы нормированных высот волн $X(t)$. Использованы измерения в Тромсёфлакет в период 1980-1983 гг.; выбрано по одному измерению на каждые 3 ч. На верхнем графике минимальный размер ячейки равен $a = 0,1$ м и $\tau = 3$ ч. Прямая соответствует аппроксимации $N \sim b^{-D}$ при $D = 1,09 \pm 0,02$. На нижнем графике также $a = 0,1$ м, но размер ячейки по времени равен $\tau = 120$ ч. Аппроксимация дает $D = 1,52 \pm 0,03$.

Используя малые клетки, мы измеряем *локальную* фрактальную размерность. Наименьший размер клетки, которую можно использовать с нашими данными, определяется разрешением наблюдений, т.е. $a = 0,1$ м и $\tau = 3$ ч. При клетках такого размера мы получили $D = 1,09 \pm 0,02$, что действительно удовлетворяет соотношению (33), где $D = 2 - H$ при показателе Херста $H = 0,92$, найденном для $\tau < 10$ дней. С другой стороны, увеличивая размер клеток до $\tau = 120$ ч вдоль оси времени, мы получаем $D = 1,52 \pm 0,03$, что совпадает со значением, ожидаемым для случайного процесса с независимыми приращениями. И вновь выполняется соотношение $D = 2 - H$, где $H = 0,52$ получено для $\tau > 20$ дней.

Важно помнить, что переход от $D = 1,09$ к $D = 1,52$ объясняется *не* переходом от локальной к глобальной фрактальной размерности самоаффинной кривой. Обе фрактальные размерности были найдены с использованием самого высокого разрешения по высоте волны, допускаемого имеющимися данными (0,1 м), и обе они являются *локальными* размерностями. Наблюдаемая перестройка объясняется переходом от персистентного к случайному поведению, который проявляется в локальных значениях D .

Можно заключить, что статистика высоты волн персистентна с весьма большим значением показателя Херста $H = 0,92 \pm 0,02$; на это указывают как метод R/S , так и оценка размерности по покрытию фрактального графика процесса. На масштабе времени около 2 недель персистентность сменяется случайным процессом с независимыми значениями. Следует также заметить, что это *не* означает, что нормированная высота волн ζ в этом диапазоне представляет собой *гауссов* процесс с независимыми значениями. Это определенно не так, поскольку распределение вероятностей несимметрично и не допускает отрицательных значений высоты волн. Однако, как отмечают Мандельброт и Уоллис, даже очень сильно негауссовы случайные процессы с независимыми значениями, имеющие лог-нормальное, гиперболическое или гамма-распределение приращений, характеризуются значением $H = 1/2$ при обработке методом R/S , который является в сильной степени робаст-ным.

7.12. Соотношение периметра и площади

Для окружностей, квадратов, равносторонних треугольников и других многоугольников отношение периметра к квадратному корню их охватываемой площади

$$\rho = \frac{\text{Периметр}}{(\text{Площадь})^{1/2}}$$

не зависит от размера многоугольника. Отношение ρ одинаково для каждого семейства замкнутых кривых одинаковой формы. Для окружностей, квадратов и равносторонних треугольников это отношение равно соответственно $\rho = 2\sqrt{\pi}$, 4 и $6/3^{1/4}$.

Для семейства *подобных* островов различных размеров отношение длины нефрактальной береговой линии любого острова к квадратному корню из его площади не зависит от размера острова. Однако, если береговая линия фрактальна, то ее длина $L(\delta)$ зависит от длины эталона

δ , с помощью которого меряется длина и $L(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$.
 Напротив, площадь острова $A(\delta)$, измеряемая с помощью его покрытия квадратами площадью δ^2 , остается конечной при $\delta \rightarrow 0$. Как показал Мандельброт, для фрактальных кривых расходящееся отношение ρ следует заменить в каждом случае следующей модификацией:

$$\rho_D = \frac{(\text{Периметр})^{1/D}}{(\text{Площадь})^{1/2}} = \frac{[L(\delta)]^{1/D}}{[A(\delta)]^{1/2}}. \quad (41)$$

Здесь D - фрактальная размерность береговых линий островов, имеющих подобные очертания. Отношение ρ_D не зависит от размера острова, но оно зависит от выбора эталона длины.
 Соотношение периметра и площади, выраженное равенством (41), вытекает из определения фрактальной размерности D , содержащегося в приведенных ранее выражениях. Это можно усмотреть из сравнения двух подобных островов разной площади, показанных на рис.20.

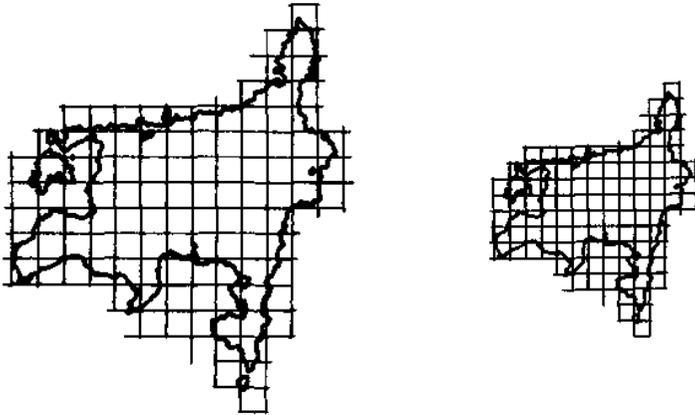


РИС.20. Два подобных острова, обмеряемые с помощью эталона, длина которого зависит от площади острова.

Площадь и длина береговой линии каждого из островов измеряются с помощью эталона, *длина которого $\delta_i^* = \lambda \sqrt{A_i(\delta)}$ зависит от площади* данного острова. Площадь i -го острова равна $A_i(\delta)$, когда она измеряется эталоном фиксированной длины δ , а параметр λ - некоторое произвольно малое число, скажем, 0,0001. Длина береговой линии i -го острова равна периметру многоугольника, состоящего из N_i отрезков длины δ^* , т.е. в этом приближении $L_i(\delta^*) = N_i \delta^*$. Теперь можно сделать замечание: для подобных островов N_x *не зависит* от размера острова. Однако из известного соотношения следует, что длина

береговой линии i -го острова равна

$$L_i(\delta) = L_i^0 \delta^{(1-D)} = L_i(\delta^*) (\delta/\delta^*)^{(1-D)}. \text{ Таким образом, мы}$$

приходим к равенству

$$L_i(\delta) = N_i \delta^{(1-D)} \delta^D.$$

Выразим δ^* через $A(\delta)$,

$$L_i(\delta) = N_i \lambda^D \delta^{(1-D)} [A_i(\delta)]^{D/2},$$

и получим, что отношение

$$\rho_D(\delta) = \frac{[L_i(\delta)]^{1/D}}{[A_i(\delta)]^{1/2}}$$

не зависит от размера острова. Однако это отношение

$$\rho_D(\delta) = N_i \lambda^{1/D} \delta^{(1-D)/D} \text{ зависит от длины } \delta \text{ используемого эталона и}$$

принятого значения произвольного множителя λ . Поэтому, несмотря на то что $\rho_D(\delta)$ связано с *формой* островов, эта величина включает также произвольные множители, и мы по-прежнему не имеем общей характеристики формы острова. Можно заключить, что острова, очертания которых подобны, удовлетворяют *соотношению периметра и площади*

$$L(\delta) = C \delta^{(1-D)} [A(\delta)]^{D/2}, \quad (42)$$

полученному Мандельбротом. Это соотношение удовлетворяется для любого эталона длины δ , достаточно малого, чтобы удовлетворительно обмерять самый малый из островов. Коэффициент пропорциональности $C = N_i \lambda^D$ зависит от произвольного параметра λ . Соотношение (42) лежит в основе практического определения фрактальной размерности в нескольких случаях, обсуждаемых в последующих разделах.

Чтобы привести пример соотношения периметра и площади, рассмотрим остров, ограниченный квадратичной кривой Кох. Первичным элементом кривой является квадрат со стороной a . Генератор кривой при замене каждой ее стороны добавляет малый «полуостров» и вырезает участок «побережья» такого же размера. Поэтому при повторных преобразованиях кривой не меняется охватываемая ею площадь $A(\delta) = a^2$. Периметр кривой n -го порядка, $L_n = 4 \cdot 8^n \cdot (1/4)^n \cdot a$, равен длине береговой линии, если она измеряется с помощью эталона длины $\delta = (1/4)^n a = (1/4)^n \sqrt{A}$. Поэтому порядок кривой n можно выразить через ее площадь, $n = \ln(\delta/\sqrt{4})/\ln(1/4)$, и мы получаем $L_\delta = 4 \cdot 8^n \delta = 4 \delta^{1-D} A^{D/2}$. Здесь $D = 3/2$ есть фрактальная размерность береговой линии острова, ограниченного квадратичной кривой Кох. Итак, такие острова удовлетворяют соотношению *периметра и площади* вида (42) с коэффициентом пропорциональности $C = 4$.

Другой пример связан с триадной кривой Кох. Здесь под островом будем понимать участок плоскости, заключенный между начальным элементом, т. е. отрезком длины a , и предельной кривой Кох. Охватываемая площадь равна $A = \sqrt{3} a^2 / 20$, а полная длина береговой линии n -го порядка равна $L_n = a + 4^n \delta$, если используется эталон длины $\delta = (1/3)^n a$. Это приводит к равенству

$$L_\delta = a + a^D \delta^{(1-D)}.$$

Как видим, если пренебречь первым членом в правой части, то получится *соотношение периметра и площади* (42). Отброшенный член представляет собой нефрактальный прямой участок границы островов. Этот пример показывает, что соотношение периметра и площади (42) может быть справедливо только в пределе малой длины эталона δ , когда длина фрактальной части береговой линии преобладает над вкладом любой *регулярной* части береговой линии. Нетрудно построить более сложные примеры, в которых разные участки берега имеют разные фрактальные размерности. В этом случае анализ показывает, что отношение периметра и площади ρ_D определяется наибольшим значением фрактальной размерности.

7.12.1. Фрактальная размерность облаков

При исследовании геометрии облаков и зон дождя, размеры которых заключены в широком диапазоне от 1 до $1,2 \cdot 10^6$ км², выяснилось, что периметр облака $P = L$ связан с его площадью A соотношением (42) с фрактальной размерностью границы облака $D = 1,35 \pm 0,05$. Эти результаты воспроизведены на рис. 12.2.

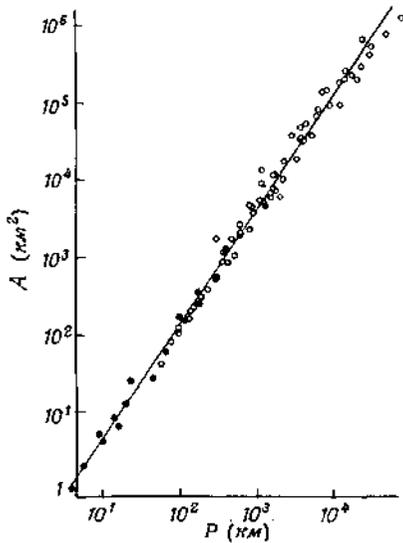


РИС. 21. Площадь дождевых и облачных зон, отложенная как функция их периметров. Черными кружками помечены радиолокационные данные о дождевых зонах, светлыми кружками-спутниковые данные об облачных массивах.

Зоны дождя изучались с помощью отцифрованных радарных изображений, полученных с разрешением $1 \times 1 \text{ km}^2$. Радиолокатор принимает микроволновое излучение, рассеиваемое преимущественно крупными дождевыми каплями. Зона дождя - это связанное множество элементов изображения, в которых интенсивность осадков превышает $0,2 \text{ мм/ч}$ (что соответствует легкому морозящему дождю). Площадь зоны дождя A равна сумме площадей элементов изображения, составляющих связанное множество, а периметр, обозначаемый P или L , определяется числом дождевых элементов изображения, которые соседствуют с элементами без дождевых капель. Кривизна поверхности Земли ограничивает радиолокационные исследования дождевых зон площадью до 40000 km^2 . Результаты изучения дождевых зон представлены на рис. 21 черными точками.

Данные о системах облаков основаны на инфракрасных изображениях облаков над Индийским океаном, наблюдавшихся в узлах квадратной сетки $4,8 \times 4,8 \text{ km}^2$. Изображения были получены геостационарным спутником GOES, предназначенным для исследований окружающей среды. Чтобы избежать эффектов, связанных с изменением размера

элемента разрешения изображений, использовались данные наблюдений лишь в относительно слабо искажаемых областях между 20° северной широты и 20° южной широты и в пределах $\pm 30^\circ$ по долготе от точки поверхности под спутником. Инфракрасный датчик спутника GOES чувствителен в основном к чернотельному излучению, испускаемому облаками и поверхностью Земли. Для облаков, толщина которых превышает примерно 300 м, инфракрасное излучение несет информацию о температуре верхней поверхности облака. Облачные и дождевые массивы физически тесно связаны с тропиками, потому что и те, и другие появляются в областях восходящих конвективных потоков, которые поднимают от поверхности влажный теплый воздух. При адиабатическом расширении этот воздух охлаждается и образует в результате конденсации пара облака и дождевые капли. Эти облака состоят в основном из переохлажденной воды, а не льда. Элементы изображения, в которых температура была ниже -10°C , считались приходящимися на облака. Таким образом, облачные системы, ограниченные уровнем -10°C , включают как кучевые, так и перистые облака. Как и ранее, площадь системы облаков определялась подсчетом числа облачных элементов изображения, а длина периметра определялась числом облачных элементов изображения, которые граничат с чистыми элементами. Результаты, полученные для множества различных облачных систем, отмечены на рис. 21 светлыми кружками. Следует однако заметить, что для компенсации разницы в разрешении радарных и спутниковых данных периметры спутниковых изображений были увеличены на множитель $(1 \text{ км}/4,8 \text{ км})^{(1-D)}$. Этот множитель соответствует множителю $\delta^{(1-D)}$ в равенстве (42). Самое замечательное свойство результатов, представленных на рис.21, заключается в отсутствии сколько-нибудь заметных выпуклостей и изгибов в диапазоне, охватывающем шесть порядков величины по площади. Данные, представленные на рис.21, относятся к облакам различной макроскопической формы, и тем не менее все они укладываются на одну прямую на графике площадь-периметр. Если выбрать другое значение температуры, определяющее границу облака, то площади и периметры меняются, но так, что соответствующие точки смещаются, оставаясь на той же линии. Это соотношение площади и периметра приводит к оценке фрактальной размерности границ облаков $D = 1,35 \pm 0,05$. Важно понимать, что, как следует из этих результатов, в диапазоне от 1 до 10000 км нет каких-либо характерных масштабов длины ξ , связанных с физикой облаков. Этот результат заслуживает внимания потому, что априори можно было бы ожидать появления масштаба $\xi \sim 10 \text{ км}$ - толщины плотной атмосферы. Кроме того, измерения скорости ветра в чистой атмосфере доплеровскими

радары не обнаруживают выделенных масштабов длины в диапазоне от 4 до 400 км, а доплеровские измерения спектра скоростей ветра в зонах дождя не обнаруживают каких-либо выделенных масштабов в диапазоне от 1,6 до 25 км. Это приводит к заключению, что в атмосфере отсутствуют внутренние пространственные масштабы и ее можно наилучшим образом описать как фрактальную - облака, например, представляются *самоаффинными фракталами*. Фрактальная форма градовых облаков изучалась рядом авторов. Эти исключительно мощные конвективные облака наблюдались с помощью радиолокатора, и для них было найдено соотношение периметра и площади, показанное на рис.22.

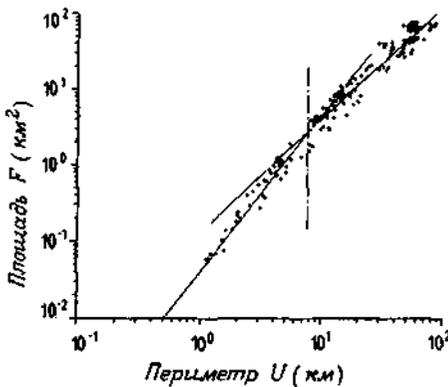


РИС.22. Соотношение периметра и площади градовых облаков, отложенное в двойном логарифмическом масштабе. Каждая точка соответствует определенному моменту времени в процессе эволюции облака. По линейным аппроксимациям (показаны сплошными линиями) были найдены фрактальные размерности (43) для 24 различных градовых облаков.

Каждая точка на этом рисунке соответствует определенному моменту времени (с интервалом 1 мин) в процессе эволюции облака. Из рисунка ясно видно, что наклон зависимости меняется при значении периметра P_0 , отмеченном штрихпунктирной линией. Это значение периметра соответствует диаметру $d_0 \approx P_0/\pi = 3 \pm 1$ км. Линейные аппроксимации наблюдаемого соотношения периметра и площади приводят к оценкам

$$\begin{aligned}
 D &= 1,36 \pm 0,1 && \text{при } P > P_0, \\
 D &= 1,0 \pm 0,1 && \text{при } P < P_0.
 \end{aligned}
 \tag{43}$$

При значениях периметра, превышающих P_0 , эти наблюдения приводят к тому же значению фрактальной размерности границы облака, что и для менее мощных облаков (см. рис.21). Напротив, для пространственных масштабов, меньших примерно 3 км, границы облаков с крайне интенсивной конвекцией оказываются нефрактальными.

Теория фрактальной размерности облаков. Фрактальная размерность границ облаков была рассчитана Хентшелем и Прокаччей в рамках предложенной ими теории относительной турбулентной диффузии. Согласно этим расчетам, размерность заключена в пределах $1,37 < D < 1,41$. Представляет интерес структура этой теории. Основная проблема заключается в том, чтобы объяснить, каким образом облако меняет со временем свою общую форму, сохраняя универсальную фрактальную структуру. (Здесь слово «универсальный» означает, что фрактальная структура не зависит от начальных условий, таких как размер, высота или другие параметры, описывающие начальное состояние облака.) Не вызывает сомнений, что временное развитие облаков происходит не универсальным образом. Согласно Хентшелю и Прокачке, решение этой проблемы связано с тонким взаимодействием пространственных и временных масштабов в развитой однородной турбулентности. Еще раньше ими получен аналогичный результат, согласно которому их модель фрактально однородной турбулентности приводит к фрактальной размерности D_μ турбулентного поля, заключенной в пределах $2,50 < D_\mu < 2,75$.

Хентшель и Прокачка предлагают простую модель облака. Состояние атмосферы определяется заданием таких параметров, как температура, давление, содержание водяного пара и размер капель, а также поля турбулентных скоростей. При радарных наблюдениях критерием различия между облаком и чистой атмосферой служит либо размер капель, либо температура. В рассматриваемой теории какой-нибудь параметр, например локальная температура θ , рассматривается как переменная, переносимая турбулентным полем скорости, но предполагается, что температура не влияет на скорость. С тем же успехом в качестве такой переменной можно выбрать радиус капель. Состояние атмосферы определяется заданием функции $\theta(x, y, z)$, и поэтому эта модель пренебрегает физикой облаков, т.е. связями таких параметров, как температура, влажность и размер капель, учитывая лишь одну, так называемую *пассивную скалярную переменную* - например, θ -и турбулентное поле скоростей ветра, переносящее ее. В данной точке пространства $\mathbf{r} = (x, y, z)$ функция $\theta(x, y, z)$ имеет некоторое определенное значение и, таким образом, можно рассматривать точку (θ, x, y, z) в $E = 4$ -мерном пространстве. Множество точек $\mathcal{S} = \{(\theta, x, y, z)\}$ в четырехмерном пространстве является *фрактальным*; его размерность

равна $D_\theta = 4 - H$, где коразмерность равна H . Определяя облако условием $\theta \leq \theta_0$, мы выделяем некоторую область в четырехмерном пространстве, описывающем атмосферу, фрактальная размерность которой тоже равна D_θ . Однако поверхность облака, определяемая условием $\theta(x, y, z) = \theta_0$, представляет собой множество точек \mathcal{C} в обычном $E = 3$ -мерном пространстве. Это множество является пересечением множества \mathcal{S} и множества $\mathcal{S}_\theta = \{(\theta, x, y, z)\}$, фрактальная размерность которого $D_\theta = 3$. Формально мы имеем $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{S}_\theta$. Фрактальная размерность поверхности облака \mathcal{C} равна $D = 3 - H$. Это следует из эмпирического правила, сформулированного Мандельбротом: коразмерность пересечения двух независимых множеств в is -пространстве почти всегда равна сумме их коразмерностей. В нашем случае это дает

$$(4 - D) = (4 - D_\theta) + (4 - D_0)$$

и, следовательно, $(4 - D) = H + 1$, или $D = 3 - H$, что и утверждалось выше. (Простой контрпример - пересечение основания (исходного элемента) и триадной кривой Кох. Это пересечение является канторовским множеством фрактальной размерности $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,63 \dots$, в то время как эмпирическое правило дает $(2 - D_0) = (2 - \ln 4 / \ln 3) + (2 - 1)$, т. е.

$D_0 = (\ln 4 / \ln 3) - 1 \doteq 0,26 \dots$) Пересекая в трехмерном пространстве поверхность облака плоскостью, параллельной поверхности Земли, мы получаем множество точек \mathcal{P} -границу, размерность которой по эмпирическому правилу Мандельброта равна $D_P = 2 - H$. Итак, если удастся оценить коразмерность H , то мы получим и оценку фрактальной размерности облаков. Результаты радиолокационных наблюдений показывают, что $H = 65 \pm 0,05$ для облаков и зон дождя. Согласно оценке Хентшеля и Прокаччи, фрактальная размерность границы облака (вернее, линии пересечения поверхности облака с плоскостью) заключена в пределах

$$1,37 < D_P < 1,41,$$

что согласуется с результатами наблюдений. Настолько упрощенная модель атмосферы способна привести к оценке фрактальной размерности облаков, которая согласуется с наблюдениями. Можно надеяться, что и в дальнейшем другие примеры наблюдательных оценок фрактальных размерностей будут находить подтверждение в физических моделях соответствующих систем.

Отметим, что облако в четырехмерном пространстве не самоподобно, а самоаффинно. Однако поверхность облака в трехмерном пространстве может быть и самоподобной. Эту особенность подчеркивал Фосс, и ему удалось построить изображения фрактальных облаков такого

изобразительного качества, которое достигалось прежде только художниками.

Лавджой и Мандельброт предложили самоподобную фрактальную модель зон дождя. В этой модели дождевая зона рассматривается как суперпозиция отдельных элементов. Каждый элемент занимает площадь A и приносит в полную интенсивность дождя вклад $\Delta R = \pm A^H$. Этот вклад может как увеличивать, так и уменьшать случайным образом полную интенсивность осадков на площади A . Предполагается, что площадь описывается *гиперболическим* распределением вероятности $\text{Pr}(A > a) \sim a^{-1}$. На рис. 23 показана модель с $H = 0,6$.

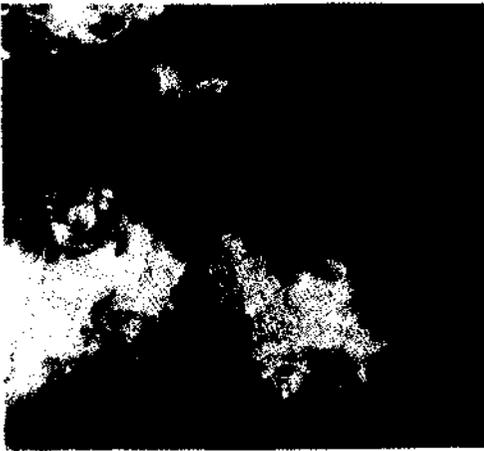


РИС.23. Изображения облаков, построенные с помощью модели фрактальных сумм элементов. Те области, в которых интенсивность осадков меньше определенной границы, показаны черным цветом. Интенсивность осадков откладывается в логарифмическом масштабе, белый цвет соответствует наибольшему ее значению. При моделировании использовалось значение показателя $H = 0,6$.

Получающиеся изображения выглядят вполне реалистичными. Лавджой и Шертцер заметили, что атмосфера стратифицирована и облака не самоподобны, а самоаффинны, поскольку вертикальное направление неравноправно с горизонтальным. Кроме того, сила Кориолиса приводит к закрутке облаков. В этой же работе обобщена модель фрактальной суперпозиции элементов - элементы считаются распределенными не однородно, а на фрактальном множестве точек пространства. И вновь получают реалистичные изображения облаков. Как заметил Мандельброт, самоаффинная функция $\theta(x, y, z)$

преобразуется по автомодельному закону в горизонтальных направлениях x, y при преобразовании $(x, y) \rightarrow (rx, ry)$ и имеет другие законы подобия в направлениях z и θ , с коэффициентами подобия r^G и r^{GH} соответственно. Здесь G - дополнительный показатель Липшица-Гельдера. Учитывая обсуждение мультифрактальных мер, проведенное в этой книге, кажется вероятным, что на самом деле следует рассматривать облака как мультифрактальные меры $M(\mathbf{r})$, определенные в пространстве. Полное описание такой меры, вероятно, потребует введения целого спектра фрактальных размерностей. Короче говоря, облака являются мультифракталами.

7.12.2. Фрактальная размерность рек

Как отметил Мандельброт, реки удовлетворяют соотношению длины и площади вида (42). Здесь мы обсудим некоторые результаты, описанные Хэком, хотя на эту тему есть и более ранние, и более поздние работы, Хэк исследовал реки в Вирджинии и Мэриленде. На рис. 12.5 показана площадь бассейна системы рек A выше по течению от некоторой точки.

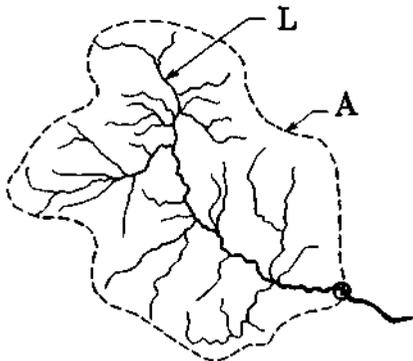


РИС.24. Площадь бассейна A и длина L самой протяженной реки выше данного места на русле.

Как показано на том же рисунке, длина L измеряется вдоль самого *длинного* русла до водораздела бассейна. На рис. 25 показаны результаты, полученные Хэком.

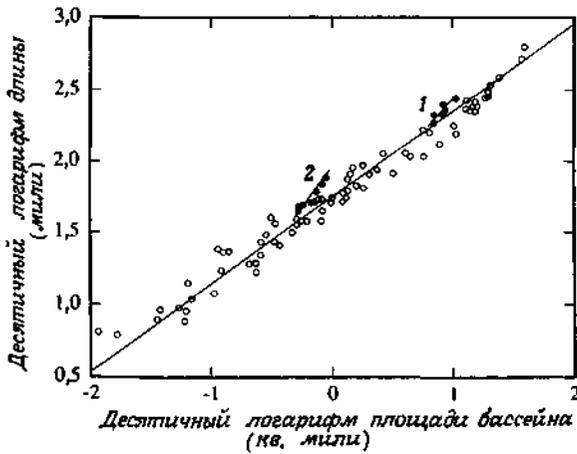


РИС.25. Связь длины реки и площади бассейна. 1-р. Норт-Ривер; 2-р. Ист-Драй-Бранч.

Площади определялись планиметром по топографическим картам, а в некоторых случаях - по данным аэрофотосъемки. Длина рукавов определялась в основном курвиметром по картам и аэрофотографиям вдоль русла с учетом изгибов и поворотов.

Все данные, представленные на рис.25, хорошо описываются прямой линией вида

$$L = 1,4A^{D/2} \text{ при } D = 1,2. \quad (44)$$

Хэк также проверил это соотношение, используя 400 аналогичных измерений, проведенных на северо-востоке Соединенных Штатов, и получил ту же зависимость (44). Итак, можно считать твердо установленным, что на северо-востоке Соединенных Штатов длины рек, отмеренные выше некоторой точки, в среднем пропорциональны площади бассейна (выше той же точки реки), возведенной в степень $(1/2)D = 0,6$, независимо от геологических и топографических особенностей местности. Хэк проанализировал также два района на западе Соединенных Штатов и нашел, что для них $D = 1,4$. Таким образом, соотношение (44) не носит всеобщего характера.

Черные кружки на рис. 25 показывают два частных случая отклонения от общего соотношения длины и площади. Коэффициент в этом соотношении равен 1,4 (если в качестве единиц используются мили и квадратные мили), но были обнаружены его вариации от 1 до 2,5 со средним значением 2,0, которое достигается, когда русло проходит в песчанике.

Следуя Мандельброту, возникает соблазн сказать, что результат (44) указывает на фрактальную размерность рек и их притоков, равную $D = 1,2$. Однако речные системы не самоподобны и рассуждения, приводящие к соотношению длины и площади вида (42), поэтому неприменимы. Отсутствие самоподобия было замечено Хэком, который выразил это наблюдение следующим образом: «Очевидно, что на любой реке с перемещением вниз по течению длина реки должна расти быстрее, чем площадь, охватываемая всеми основными притоками, возведенная в степень 0,6. Существуют протяженные участки русла, на которых в реку не впадает ни один заметный приток. Именно на этих участках длина должна расти быстрее. Это общее наблюдение относится как к коротким, так и к длинным рекам.» Заметим, что для рек, бассейн которых имеет постоянную ширину d , соотношение длины и площади принимает вид $L = A/d$ и для таких рек мы получили бы $D = 2$. С другой стороны, если бы бассейн сохранял форму при подобном увеличении, мы бы получили $D = 1$.

Хэк построил модель системы рек, основанную на методе анализа структуры речных систем, предложенном Хортоном. Хортон классифицирует реки и протоки, приписывая каждому руслу некоторый *порядок*, так что для рек, не имеющих притоков, порядок русла равен $i = 0$. Реки порядка i имеют притоки порядка $(i - 1)$, $(i - 2)$, Таким образом можно построить классификацию всех рек бассейна, так что главная река будет иметь наибольший порядок s . Показатель длины r , определяется как отношение средней длины рек одного порядка к средней длине рек ближайшего меньшего порядка. Это отношение приблизительно постоянно и не зависит от порядка русла. Поэтому средняя длина реки порядка i равна

$$L_i = r_i L_{i-1} = r_i^i L_0,$$

где L_0 - средняя длина самых коротких потоков. Показатель ветвления r_b равен отношению числа рек одного порядка к числу рек ближайшего большего порядка:

$$N_i = r_b N_{i+1} = r_b^{s-i} N_s.$$

Показатель ветвления почти не зависит от порядка русла. Отметим, что $N_s = 1$, поскольку имеется только одна река наивысшего порядка.

Поскольку «длина поверхностного стока примерно постоянна для всех потоков», область, с которой сток идет непосредственно в реки второго порядка, должна иметь ту же среднюю ширину d , что и область прямого стока потоков первого порядка. Поэтому эта площадь растёт прямо пропорционально длине. Хэк заключает, что площадь бассейна порядка s равна

$$A = \sum_{i=0}^s L_i dN_i = A_0 r_b^s \sum_{i=0}^s (r_i/r_b)^i.$$

Ясно, что существование определенной длины поверхностного стока привносит в задачу характерный пространственный масштаб, который несовместим с самоподобием. Пренебрегая этим, мы получаем следующее выражение для порядка s : $s = \ln(A/A_0)/\ln r_b$. Итак, для бассейна порядка s получаем

$$L = L_0 (A/A_0)^{D_s/2}, \text{ где } D_s = 2 \ln r_i / \ln r_b.$$

Хэк рассматривает пример с $r_i = 2,4$ и $r_b = 3,2$, т.е. $D_s = 1,5$. Если в соотношении длины и площади учесть член, связанный с поверхностным стоком, то это соотношение перестает быть степенным. Аппроксимировав его степенным законом, Хэк получил значение $D_s = 1,30$, близкое к наблюдаемому в этой области значению $D = 1,22$.

По сути модель Хэка, которая устанавливает связь показателя ветвления r_b и показателя длины r_i по-видимому, верно описывает наблюдаемое степенное соотношение длины и площади. Однако остается неясным вопрос, как ввести определение фрактальной размерности системы рек. Геометрия потоков и рек требует дальнейшего исследования.

8. Фрактальные поверхности

Широкому интересу к фракталам, по-видимому, в большой степени способствовали интригующие компьютерные пейзажи. Красивые цветные иллюстрации из книги Мандельброта, изображающие долины и вид с «Луны» на восходящую «Землю», одинаково поразили воображение ученых и неспециалистов. Уже давнее популярное изложение работ Мандельброта Гарднером сильно помогло росту такого интереса. Еще более впечатляющие картины с дымкой в долинах, созданные также и Р. Ф. Фоссом, были опубликованы с популярным комментарием в широко известном журнале по микрокомпьютерам. Не вызывает сомнения, что нерегулярность топографии земной поверхности в широком интервале пространственных масштабов служит указанием на то, что с помощью фракталов можно строить полезные модели пейзажей.

8.1. Фрактальная поверхность Кох

Простой способ построения явно фрактальной поверхности состоит в параллельном переносе триадной кривой Кох на расстояние ℓ вдоль направления, перпендикулярного ее плоскости (рис. 1).

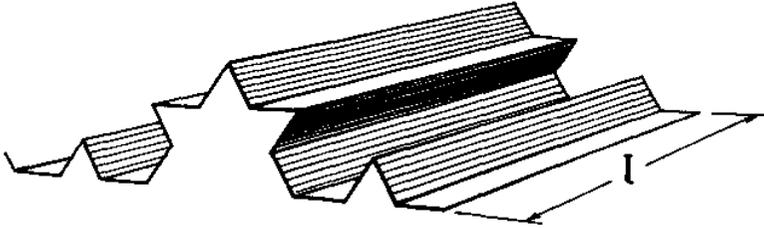


РИС. 1. Триадная поверхность Кох. $D = 2,262\dots$

Чтобы измерить площадь такой поверхности, попробуем покрыть ее полосками длины ℓ и ширины δ . При эталоне малой площади $a = \delta \times \delta$ потребуется

$$N(\delta) = \frac{\ell}{\delta} \cdot \frac{1}{\delta^{D_1}}$$

таких ячеек, чтобы покрыть поверхность. Здесь, как и раньше, фрактальная размерность кривой Кох равна $D_1 = \ln 4 / \ln 3$. Первый множитель в формуле для $N(\delta)$ означает просто, что число ячеек площадью a , необходимых для покрытия каждой полоски, равно ℓ / δ , а второй множитель - это число отрезков длины δ , необходимых для покрытия кривой Кох. Мера определяется выражением

$$M_d = N(\delta)\delta^2 = \ell \delta^{2-D_1-1}.$$

Поскольку мера конечна только при $d = D$, где

$$D = 1 + D_1 = 2,262 \dots,$$

следует, что D - размерность поверхности по Хаусдорфу-Безиковичу. Этот результат - еще одна иллюстрация одного из эмпирических правил Мандельброта для фрактальных множеств: если множество \mathcal{S} является произведением двух независимых фрактальных множеств \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 , то фрактальная размерность \mathcal{S} равна сумме фрактальных размерностей множеств \mathcal{S}_1 и \mathcal{S}_2 .

Мы взяли множество точек \mathcal{S}_1 , определяемое триадной кривой Кох в $E = 2$ -мерном пространстве (ее размерность D_1), и построили множество \mathcal{S} умножением на множество \mathcal{S}_2 , которое представляет собой отрезок прямой длиной ℓ в $E = 1$ -мерном пространстве. Таким образом, каждую точку множества \mathcal{S}_1 мы сопоставили с линией в

$E = 3$ -мерном пространстве. Полученное множество имеет размерность $D = D_1 + D_2$, где $D_2 = 1$ есть размерность линии.

Подобным образом можно построить фрактальные поверхности любой размерности в пределах $2 \leq D \leq 3$, но они не будут реалистичными моделями пейзажей и других нерегулярных поверхностей, которые, как правило, гораздо более изотропны в горизонтальной плоскости, чем результат переноса кривых Кох. Вероятно, такие модели применимы к поверхностям, которые получаются при направленном истирании, шлифовке или полировке.

8.2. Поверхности случайного переноса

Простой способ построения более приемлемых поверхностей заключается в добавлении к вертикальной координате $z(x, y)$, полученной после параллельного переноса фрактальной кривой, дополнительных слоев с подобными профилями, но повернутых относительно первой поверхности. Пусть $z_D(x, y)$ -профиль поверхности, образованной скольжением вдоль оси y фрактальной кривой размерности D , лежащей в плоскости xz . Повернем эту поверхность в плоскости xu на угол ϕ . В результате получим поверхность $z_D(x, y | \phi)$. И наконец, умножим вертикальную координату на множитель h . Таким образом, определена поверхность $z_D(x, y | h, \phi) = h z_D(x, y | \phi)$. Используя поверхности такого профиля, можно построить фрактальные поверхности с возвышением $Z(x, y)$, определяемым как

$$Z(x, y) = \sum z_D(x, y | h, \phi). \quad (1)$$

Если сложить таким образом небольшое число слоев с фиксированным h и случайными ϕ , то получаются поверхности, которые - по крайней мере с разрешением наших расчетов - имеют фрактальную размерность, равную размерности производящей фрактальной поверхности, т.е. $D(Z) = D(z)$. Вопрос, какова фрактальная размерность $D(Z)$ в общем случае крайне сложен.

Чтобы показать сложности, возникающие при нахождении фрактальной размерности таких поверхностей, рассмотрим одну из первых моделей Мандельброта. В простейшей модели z_D -ступенчатая функция, описывающая горизонтальное плато в плоскости xu , рассеченное вдоль прямой $x = 0$ с единичной разностью высот по разные стороны от разлома. Такая производящая поверхность не фрактальна и имеет размерность $D(z) = 1$. Для построения $Z(x, y)$ будем выбирать ϕ из однородного распределения от 0 до 2π и зададим $h = 1/\sqrt{n}$ для n -го

этапа построения (этим высота отдельного обрыва делается пренебрежимо малой по сравнению с общей суммой всех остальных уступов). В результате получается поверхность, показанная на рис. 2.



РИС. 2. Первый пример фрактальных броуновских островов. $D = 2,5$.

Эта поверхность *фрактальна*, ее размерность равна $D = 5/2$, несмотря на то что производящая поверхность *не* фрактальна. Такие поверхности, состоящие из бесконечного числа слоев, Мандельброт называет *броуновскими поверхностями*, потому что любое вертикальное сечение такой поверхности имеет вид кривой, характерной для броуновского движения. Эта поверхность в среднем удовлетворяет соотношению подобия

$$Z(\lambda x, \lambda y) = \lambda^H Z(x, y)$$

для любого λ , и имеет коразмерность $H = 3 - D = 1/2$.

Это соотношение подобия показывает, что фрактальная поверхность самоаффинна, а не самоподобна. Она представляет собой обобщение самоаффинных фракталов на большее число измерений. Напомним, что для самоаффинных поверхностей, так же как и для самоаффинных кривых, следует различать локальную и глобальную фрактальные размерности. Адекватные методы анализа конкретных фрактальных поверхностей до сих пор не ясны.

Если полученный пейзаж заполнить до некоторого уровня «водой», то появляются береговые линии и острова, подобные показанным на рис. 3.



РИС. 3. Первый пример фрактальных броуновских береговых линий. $D = 1,5$.

Фрактальная размерность береговых линий, полученных пересечением поверхности с плоскостью, равна $D = 2 - H = 3/2$ и заметно превышает значение 1,3, наблюдаемое для многих береговых линий. Как отметил Мандельброт, острова характеризуются распределением Корчака

$$\text{Nr}(A > a) \sim a^{-B}, \quad (2)$$

где $\text{Nr}(A > a)$ -число островов, площадь которых A превышает данное число a . Это соотношение называют также *соотношением числа объектов и площади*. Показатель степени в этом соотношении B равен $B = (1/2)D_{\text{берег}} = 3/4$. Согласно Мандельброту, значение, наблюдаемое на поверхности Земли, примерно равно $B \sim 0,65$ и меняется от 0,5 в Африке (один обширный остров, окруженный островами быстро уменьшающегося размера) до 0,75 в Индонезии и Северной Америке (преобладание самых больших островов выражено слабее).

8.3. Построение фрактальных поверхностей

Было построено ряд моделей поверхностей, которые выглядят вполне как настоящие пейзажи, по крайней мере в той мере, которую позволяет простой графопостроитель, доступный большинству исследователей. Приобретен определенный опыт, который

предлагается освоить, прежде чем браться за более сложные изображения.

Как явствует из предыдущего раздела, наложение бесконечного числа случайно ориентированных нефрактальных поверхностей действительно может привести к фрактальной поверхности. На практике удобнее накладывать небольшое число *фрактальных* поверхностей переноса, ориентированных случайным образом. Если производящие поверхности переноса случайны, то можно ожидать получение удовлетворительного результата при вполне разумном объеме вычислений.

Глядя на любой пейзаж, мы охватываем взглядом лишь ограниченную область. Это обстоятельство определяет внешний пространственный масштаб $L_{\text{макс}}$. Кроме того, присутствует и минимальный масштаб $L_{\text{мин}}$, определяемый разрешением нашего глаза или фотопленки, а в нашем случае - выбранной численной точностью расчета координат x и y . Если для построения рельефа использовать синусоидальные поверхности переноса, то легко получить волнистую картину. Для каждой пространственной частоты f мы имеем поверхность переноса вида

$$z(x, y) = C_f \sin(fx)$$

с амплитудой C_f . Далее, наименьшая существенная частота равна $f_{\text{мин}} \sim 1/L_{\text{макс}}$,

поскольку влияние меньших частот сводится к простому однородному сдвигу всей поверхности по высоте. Наибольшая существенная частота определяется разрешением $f_{\text{макс}} \sim 1/L_{\text{мин}}$, поскольку детали меньшего размера разрешить не удастся.

Построим поверхности переноса, пользуясь суперпозицией осциллирующих функций. Прежде всего определим *частотный спектр*, задав пространственные частоты соотношением

$$f_j = f_{j-1}^\alpha = f_0^{\alpha^j}, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Такой спектр *дискретен* и определяется показателем α и низшей частотой f_0 . Чтобы ее влияние было заметно, основная частота f_0 должна превышать $f_{\text{мин}}$. Увеличивая f_0 , мы будем получать изображения, на которых в поле зрения находится более обширное пространство. Параметр α в большой степени определяет общий характер или тип построенного пейзажа. Мы выбирали α из диапазона $0,7 \leq \alpha \leq 1,4$. При малых значениях α получаются горные ландшафты, а при увеличении α возникают спокойные виды, напоминающие пейзажи южной Норвегии. Рекуррентный вид частотного спектра (3) был выбран потому, что он автомоделен.

Реальные пейзажи обычно характеризуются наибольшей амплитудой на низких частотах, и был выбран следующий автомоделный, или масштабно-инвариантный, вид *амплитуд разложения Фурье*:

$$C_f \sim f^{-\beta}. \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности в этом равенстве не существен, поскольку масштаб получившегося изображения будет меняться в соответствии с размерами требуемой картинки. Чтобы получающиеся пейзажи выглядели достоверно, параметр β должен быть заключен в пределах от 1,05 до 1,4. Меньшие из этих значений хороши для горных пейзажей. При таком спектре амплитуд обычно получают самоподобные кривые. На рис. 4 показан амплитудный спектр, в котором масштаб пространственных частот выбран так, что наибольшая из рассматриваемых частот равна 1.

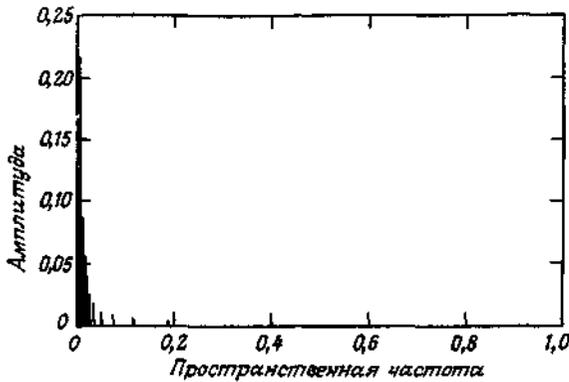


РИС. 4. Амплитудный спектр для $f_0 = 0,004$, $\alpha = 1,1$ и $\beta = 1,1$.

Для получения высоты поверхности как функции координат использовали комплексное преобразование Фурье

$$\mathcal{Z}(x) = \sum_j C_{f_j} \exp(2\pi i f_j x).$$

При вычислении \mathcal{Z} использовался обычный алгоритм *быстрого преобразования Фурье*. Получающийся профиль поверхности имеет действительную и мнимую части $z' = \text{Re}\mathcal{Z}$ и $z'' = \text{Im}\mathcal{Z}$, показанные на рис. 5.

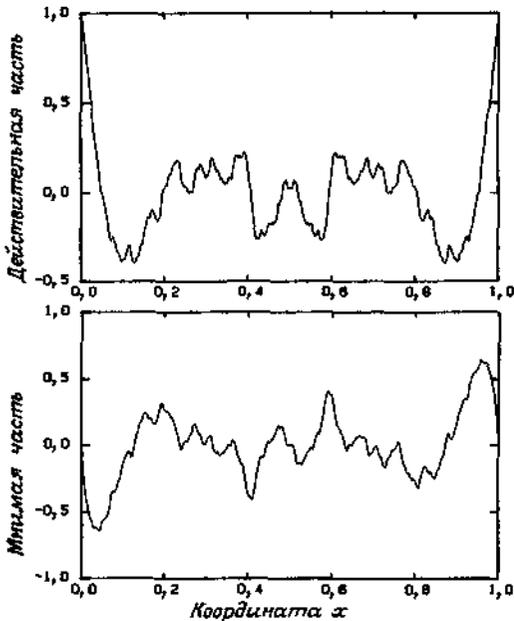


РИС. 5. Действительная и мнимая части Z как функции координаты x для $f_0=0,004$, $\alpha=1,1$ и $\beta=1,1$.

Нерегулярные флуктуации z' и z'' связаны с дискретностью частотного спектра, в котором присутствуют несоизмеримые частоты.

По комплексному профилю Z строятся действительные поверхности переноса, определяемые соотношением

$$z(x, y | \psi) = z' \cos \psi + z'' \sin \psi,$$

где угол ψ выбирается случайным образом из диапазона $0-2\pi$. Полученная таким образом кривая $z(x, 0 | \psi = 0,616)$ показана на рис. 6.

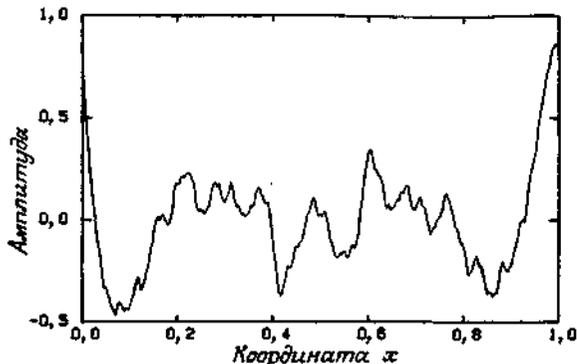


РИС. 6. Профиль функции $z(x, \theta | \psi = 0,616)$.

Строим пейзаж, накладывая несколько таких случайно ориентированных слоев. Чтобы подчеркнуть структуру получающейся поверхности, добавляем до некоторого уровня воды и выбираем угол зрения с определенной высоты. Рис. 7 получен наложением 12 слоев с профилями $z(x, y | \psi, \phi)$ со случайными фазами ψ и углами поворота ϕ .

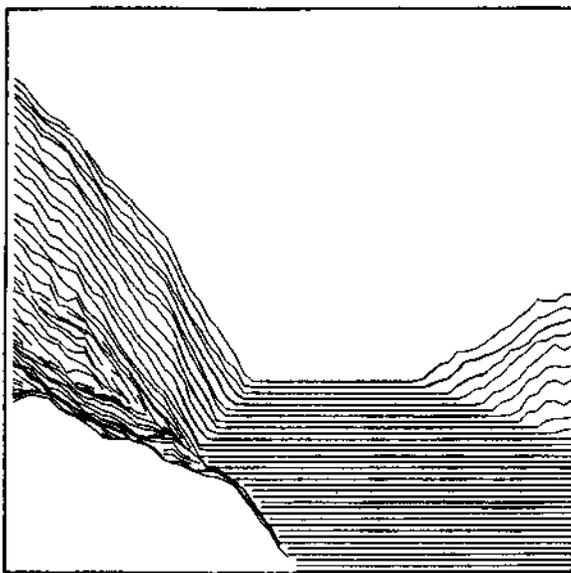


РИС.7. Пейзаж, составленный из 12 слоев. $\alpha = 1,1$, $\beta = 1,1$.

Разрешение рис. 7 таково, что на нем по 1024 точек вдоль единичных расстояний по направлениям x и y . Однако показана только центральная область из 64×64 точек в плоскости xy . Чтобы получить этот рисунок, начертили 64 профиля вида $Z^*(x, y_i)$ с $i = 1, 2, \dots, 64$, причем карандаш отрывался от бумаги, если точки заслонялись уже нанесенными контурами.

Разрешение этого рисунка слишком грубое, и в последующих случаях использовали сетку из 256×256 точек в плоскости xy , выбранных в центральной области 1024-точечных z -профилей. Удовлетворительный результат достигается при использовании 30 профилей, перпендикулярных лучу зрения, причем близкие участки кривых должны заслонять более удаленные. В области, занятой водой, наносились все 256 линий.

Чтобы получить приемлемое изображение пейзажа, необходимо добавить перспективу. При изображении пейзажей с береговыми линиями необходимо также смоделировать кривизну земной поверхности, иначе будет казаться, что пейзаж обрезан вблизи горизонта. Пример пейзажа из четырех слоев, включающего эти особенности, показан на рис. 8.

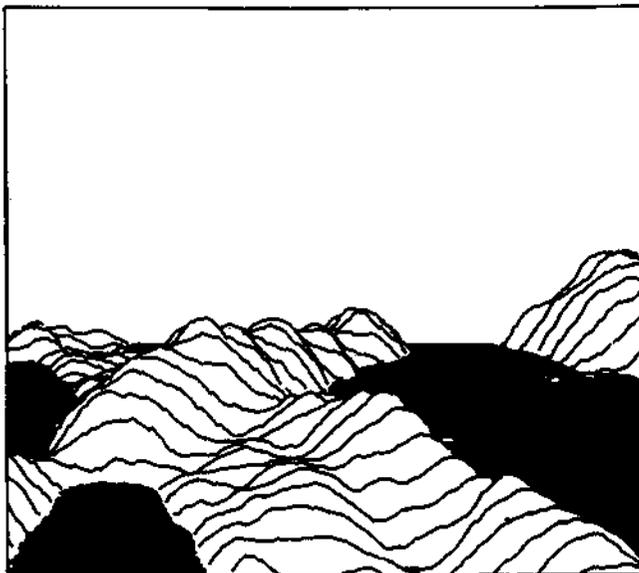


РИС. 8. Пейзаж с перспективой и кривизной, $\alpha = 1,4$, $\beta = 1,1$.

Такой вид вполне можно встретить где-нибудь среди гранитных скал на юге Норвегии. Гладкость поверхностей достигается выбором довольно большого значения $\alpha = 1,4$, из-за чего расстояние между спектральными частотными компонентами быстро растет с увеличением пространственной частоты f . Уменьшение α до 0,8 приводит к довольно изрезанным ландшафтам с фрактальными береговыми линиями, подобным изображенному на рис. 9.

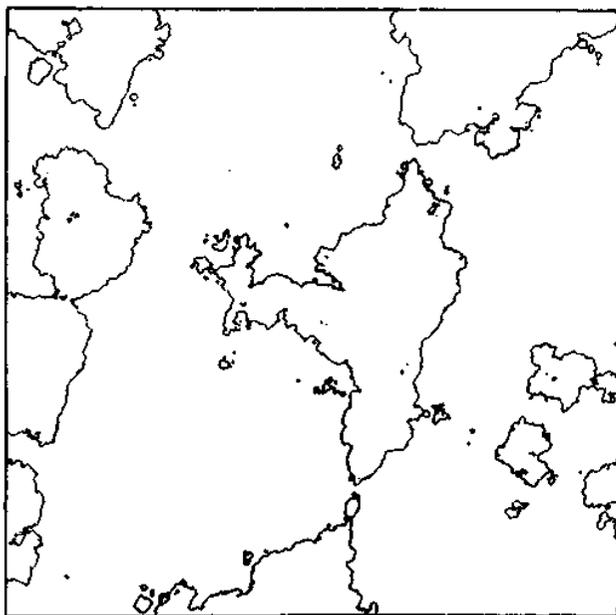
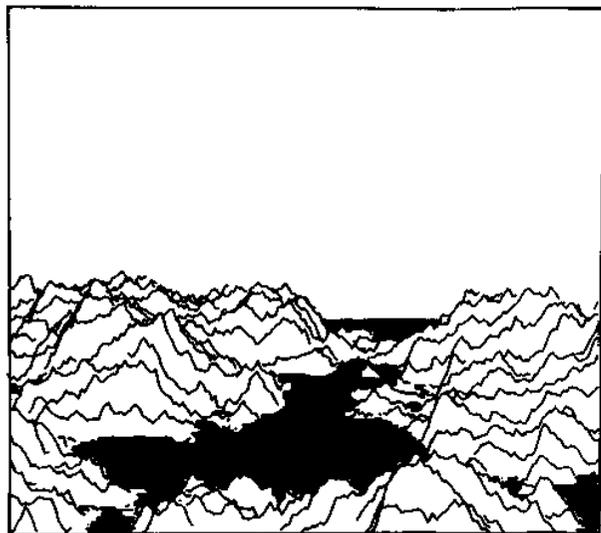


РИС. 9. Фрактальный пейзаж и карта береговой линии, $\alpha = 0,8$, $\beta = 2,0$.
Фрактальная размерность береговой линии $D = 1,15$.

Как мы уже упоминали в предыдущем разделе, наложение большого числа нефрактальных поверхностей переноса вполне может привести к явно фрактальной поверхности, но представленные нами до сих пор рисунки содержат лишь по четыре слоя (12 на рис. 7) и при $\alpha > 1$ профили $z(x, y)$ выглядят довольно гладкими. Поэтому эти поверхности не фрактальны. Что же касается перехода к пределу бесконечного пространственного разрешения (т. е. включения бесконечно больших пространственных частот), то эта возможность подробно не исследовалась.

Береговые линии Вейерштрасса-Мандельброта. Если изменить вид спектра используемых частот, заменив соотношение (3) равенством

$$f_j = b f_{j-1}, \quad \text{где } j = 1, 2, \dots$$

при $f_0 = 1$, и выбрать показатель амплитудного спектра равным $\beta = (2 - D)$, то функция \mathcal{Z} перейдет в фрактальную функцию Вейерштрасса - Мандельброта.

На рис. 10 показан фрактальный ландшафт, для построения которого основная пространственная частота выбрана равной $f_0 = b = 4,7$.

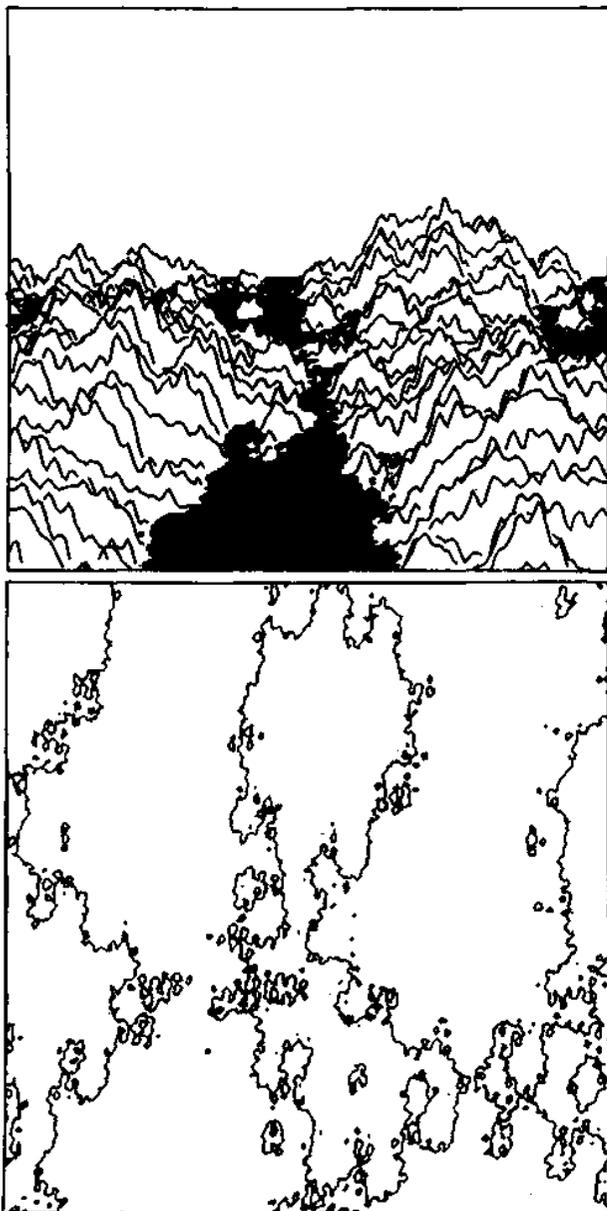


РИС. 10. Пейзаж Вейерштрасса-Мандельброта. $\beta = 0,59$, $b = 4,7$. Размерность береговой линии $D = 1,35$.

Показатель амплитудного спектра выбирался равным $\beta = 0,59$. Пейзаж довольно хаотичен и фрактальная размерность показанной береговой линии оказывается равной $D \approx 1,35$. Эту величину следует сравнить с ожидаемой фрактальной размерностью кривых Вейерштрасса - Мандельброта, определяемой из равенства $\beta = 2 - D$, так что в нашем случае $D = 1,405$ - согласие вполне удовлетворительное при выбранном разрешении.

8.4. Поверхности случайного сложения

В разд. 7.8 мы обсудили алгоритм последовательных случайных сложений, предложенный Фоссом и использованный при моделировании обобщенного броуновского движения. Как показал Фосс, этот алгоритм нетрудно обобщить на большее число измерений. На рис. 11 показаны ландшафты, построенные с помощью этого алгоритма.

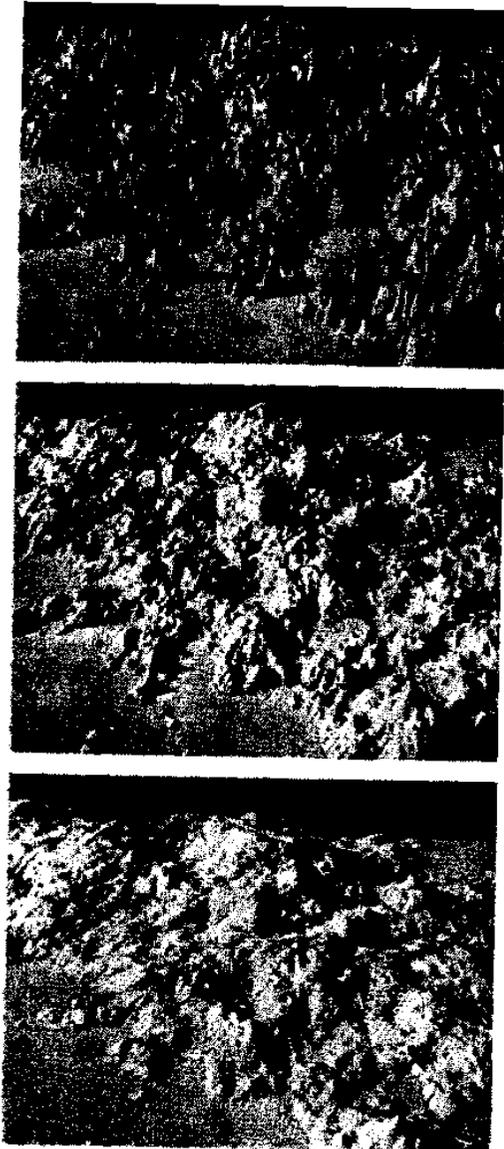


РИС. 11. Фрактальные пейзажи, полученные с помощью алгоритма последовательных случайных сложений Фосса. Эти пейзажи построены на квадратной сетке 1025×1025 . Дисперсия слагаемых на i -м цикле равна $\sigma^2 = (1/\sqrt{2})^{2nH}$, число циклов-18. Использование значения показателя Херста- $H = 0,5, 0,7$ и $0,9$ соответственно на верхнем, среднем и нижнем рисунках.

Вначале зафиксировали высоту $Z = 0$ в четырех углах сетки из 1025×1025 элементов. В программе используется подпрограмма, генерирующая независимые гауссовы случайные числа ξ с нулевым средним и единичной дисперсией. На первом этапе просто получаем одно значение ξ и используем его как уровень поверхности в центре сетки (в точке 513, 513). На втором этапе сначала проводим интерполяцию и находим возвышения в четырех точках с координатами $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$, измеренными в таких единицах, что сторона области, покоящейся сеткой, равна 1. Например, возвышение

в точке $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ равно

$$Z\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(Z(0,0) + Z\left(\frac{1}{2}, 0\right) + Z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + Z\left(0, \frac{1}{2}\right)\right),$$

т.е. результат интерполяции-это просто среднее арифметическое возвышений в ближайших по *диагоналям* точках. Возвышения в двух ближайших точках на границе

$$\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

принимались равными среднему арифметическому от возвышений в ближайших углах области. На этом этапе процесса задавали интерполированные возвышения в 13 точках-в пяти исходных положениях, четырех новых внутренних точках и четырех новых точках на границе. Следующим шагом 13 независимых значений $\xi_{n=1}$ прибавлялись к уже имеющимся возвышениям. При этом гауссовы случайные числа имеют дисперсию

$$\langle \xi_n^2 \rangle = \sigma_n^2 = r^{2nH}, \quad \text{где } r = 1/\sqrt{2} \quad (5)$$

(с $n = 1$). Это то же соотношение, которое использовалось в разд. 7.8, но масштабный коэффициент равен $r = 1/\sqrt{2}$, что отражает изменение в расстояниях между старыми и новыми точками. Применение этой процедуры продолжается, и в следующем цикле добавляются точки

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Возвышения в этих точках определяются как среднее арифметическое возвышений в ближайших к ним узлах, т. е. в узлах, которые лежат в направлениях, параллельных осям. В точках, лежащих на границе, возвышения вновь определяются специальным образом. После каждого цикла этот алгоритм удваивает число точек, в которых задано возвышение, и уменьшает на множитель $r = 1/\sqrt{2}$ - расстояние между такими точками. Пейзажи, показанные

на рис. 11, были получены после 13 циклов применения этого алгоритма. При построении этих ландшафтов использовались *одни и те же* случайные числа, и эти три изображения отличаются только выбранным значением показателя Херста.

Точки, лежащие на границе, преобразуются по-другому, чем внутренние. Это граничное условие приводит к тому, что ландшафты фрактальны только в масштабах, малых по сравнению с размером области, и их фрактальная размерность равна $D = 3 - H$.

Если все точки преобразуются одинаковым образом, то эта процедура приводит к самоаффинным поверхностям. Направления вдоль осей x и y неравноправны с вертикальным направлением вдоль оси z , и мы должны различать локальную и глобальную фрактальные размерности. Горизонтальное сечение этой самоаффинной поверхности дает береговые линии, подобные показанным на рис. 12.

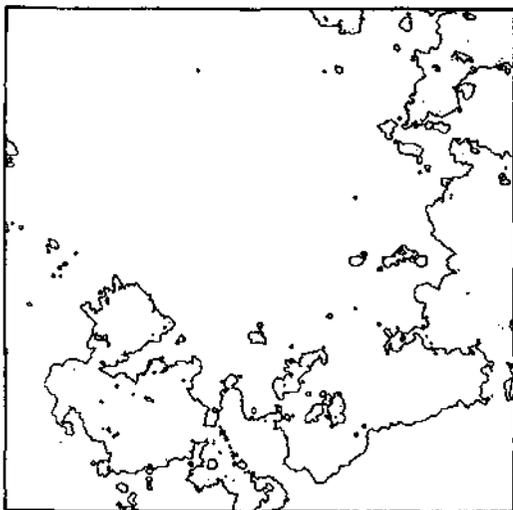


РИС. 12. Береговая линия пейзажа с $H = 0,7$, показанного на рис. 11. Эта линия самоподобна, ее фрактальная размерность равна $D = 2 - H = 1,3$.

Эти линии являются самоподобными фракталами, размерность которых равна $D = 2 - H$, где H - показатель, примененный для построения этих ландшафтов.

Фрактальные пейзажи довольно сложны, их восприятие и интерпретация во многом зависят от возможностей графического представления. Для примера на рис. 13 еще раз изобразили пейзаж с $H = 0,7$ с видом сверху, а также в виде облака.

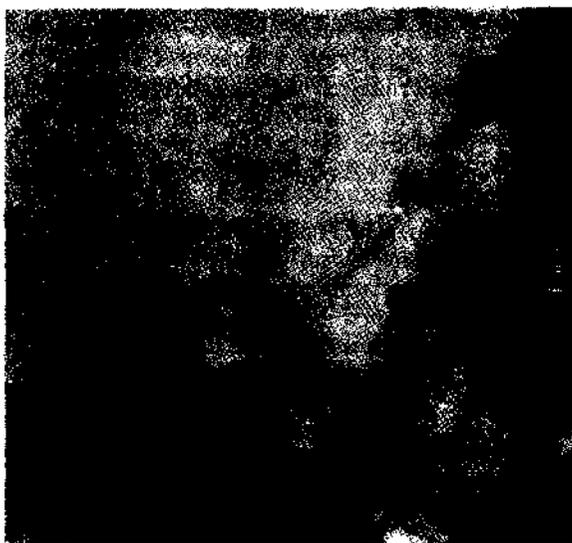


РИС. 13. Фрактальный пейзаж с $H=0,7$. На верхнем рисунке показан вид сверху на пейзаж с рис. 11. На нижнем рисунке этот же пейзаж представлен как «облако». Высоты ниже уровня моря (см. рис. 12) показаны черным. Шкала оттенков серого цвета пропорциональна логарифму высоты над уровнем моря.

Рассмотрим, как могут выглядеть облака, протяженные по горизонтали, при наблюдении снизу.

Образование водяных капель - процесс пороговый, и они образуются, только когда водяной пар перенасыщен выше определенного уровня. Если возвышение ландшафта можно сопоставить с величиной, определяющей образование капель (некоторой комбинации таких параметров, как температура и влажность), то образования капель можно ожидать только там, где возвышение превышает определенный уровень. Изображения облаков на рис. 13 получены следующим образом. Области ландшафта с возвышениями вплоть до некоторого определенного уровня закрашивались черным. Начиная с этого уровня использовалась шкала оттенков серого цвета (от черного до белого), пропорциональная логарифму возвышения. Мы находим, что получившиеся изображения хорошо отражают вид и структуру облаков. Однако такие облака нельзя совместить с изображением ландшафта, так как они двумерны. Фосс построил трехмерные облака, которые отбрасывают тени и которые могут использоваться для построения реалистических сцен.

Внимательное рассмотрение пейзажей, представленных на рис. 11, показывает, что использованный алгоритм создает довольно резкие неровности. Эта особенность применявшегося алгоритма сглаживается только после очень большого числа циклов. На цветных вкладках мы приводим также пейзажи, построенные так, что после каждого цикла пространственный масштаб уменьшается множителем $r = 1/2$. Начав с возвышений в четырех углах области, мы интерполируем их в четыре точки с координатами $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Как и раньше,

к этим возвышениям прибавляются случайные числа, проводится новая интерполяция и т.д. Этот алгоритм использовался Фоссом и рассматривался также Миллером. Пейзажи, построенные с помощью такого модифицированного алгоритма, имеют другую степень заполненности (*лакунарность*) и выглядят вполне удовлетворительно. По мере уменьшения r степень заполненности ландшафта увеличивается и заметно меньшее число масштабов флуктуации. Все рассмотренные пейзажи построены с помощью простой процедуры, которая определяется параметрами α и β , β и b или r и H . Именно в той степени, в которой можно считать эти рисунки приемлемыми изображениями естественных ландшафтов, эта процедура будет полезна для изучения естественной топографии. Качество графики следовало бы улучшить.

Построенные пейзажи не дают какой-либо информации о процессах, которые определяют вид реального ландшафта. Но они дают возможность очень простого алгоритмического описания ландшафтов.

Для описания эллипса необходимы два числа, а для описания представленных здесь ландшафтов требуются три величины α , β и число слоев или r , N и число циклов. Не составляет труда построить пейзажи с более сложной геометрией. Можно было бы наклонить ландшафт и получить пейзаж прибрежной области или же можно добавить слои с другими параметрами.

Было бы желательно рассмотреть модели, в которых построенный ландшафт подвергается эрозии или другим модификациям. Однако, на настоящем этапе развития самое важное достоинство фрактальных пейзажей состоит в том, что их в общем-то легко описать и они служат простым геометрическим инструментом описания сложных поверхностей. Отметим, что достоинство алгоритма Фосса в том, что он позволяет заранее зафиксировать возвышение в определенных точках (например, на границе). Поэтому алгоритм Фосса можно применять для *условного* моделирования, когда заданы сведения о возвышении в некоторых точках. «Ландшафты» могут также описывать распределение на поверхности концентрации, температуры или какой-либо другой величины. Еще одно достоинство алгоритма Фосса состоит в том, что он может применяться повторно до тех пор, пока не будет достигнуто любое наперед заданное разрешение. Данный метод объединяет моделирование пейзажей с анализом наблюдений, а это самый многообещающий подход.

9. Исследования фрактальных поверхностей

В последние годы было опубликовано много исследований фрактальной структуры поверхностей. Фрактальным объявлялось все - от молекулярных поверхностей белков до взлетных полос аэродромов. Эти исследования применяют весь спектр методов химии и физики. Вообще говоря, наблюдаемое фрактальное поведение *не* охватывает широких (в несколько порядков величины) диапазонов пространственных масштабов, и можно сомневаться в надежности найденных оценок фрактальной размерности. Тем не менее проанализирован ряд наблюдений, и здесь мы обсудим некоторые результаты.

9.1. Наблюдаемая топография поверхностей

Сейлс и Томас измерили и проанализировали шероховатость поверхностей разнообразных объектов - от обшивки супертанкеров и бетонных взлетных полос до поверхностей суставов и шлифованных металлических поверхностей. Высота поверхности z измерялась в различных точках x вдоль некоторого направления. Имея большое число измерений по всему имеющемуся участку поверхности, можно рассчитать шероховатость поверхности, определяемую дисперсией

$$\sigma^2 = \langle z^2(x) \rangle.$$

Здесь угловые скобки обозначают усреднение по серии измерений (иногда многократных повторных) топографии поверхности. Точка отсчета по вертикали выбирается так, что $\langle z(x) \rangle = 0$.

Важной мерой статистических свойств поверхности является корреляционная функция, определяемая соотношением

$$C(\Delta x) = \langle z(x + \Delta x)z(x) \rangle.$$

Для стационарных поверхностей корреляционную функцию можно выразить через *спектр мощности* $G(f)$ с помощью преобразования Фурье

$$C(\Delta x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \exp(2\pi i f \Delta x) df.$$

Пространственная частота f связана с длиной волны неровностей поверхности λ , равенством $f = 1/\lambda$. Физические системы имеют конечную протяженность $L_{\text{макс}}$ и соответственно минимальную пространственную частоту $f_{\text{мин}} = 1/L_{\text{макс}}$. Следовательно, корреляционную функцию можно переписать в виде

$$C(\Delta x) = \int_{f_{\text{мин}}}^{\infty} G(f) \exp(2\pi i f \Delta x) df.$$

Сейлс и Томас предполагают, что спектр мощности имеет вид

$$G(f) = k/f^2, \quad (1)$$

и называют постоянной k «изрезанностью». При таком предположении дисперсия равна

$$\sigma^2 = \langle z^2(x) \rangle = \int_{f_{\text{мин}}}^{\infty} G(f) df = k/f_{\text{мин}},$$

т. е. мы получаем $\sigma^2 = kL_0$ и дисперсия увеличивается с размером поверхности, как и ожидается для гауссовых случайных процессов.

На рис. 1 воспроизведены результаты этой работы.

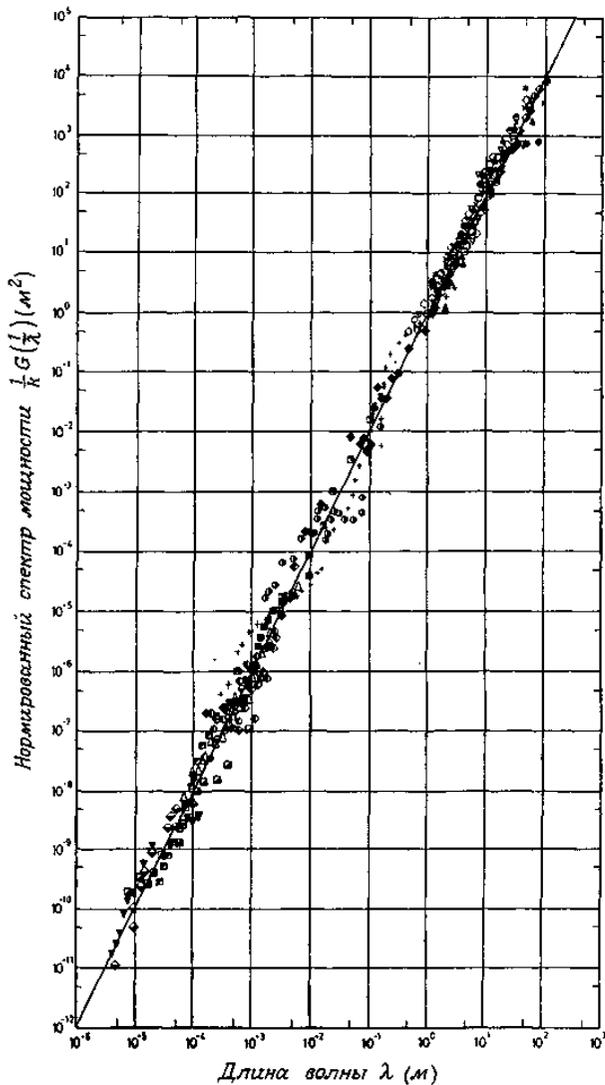


РИС. 1. Нормированный спектр мощности возвышений поверхности $\frac{1}{k}G(l/\lambda)$

как функция длины волны шероховатостей λ для различных поверхностей. Представлены данные о широком классе поверхностей - от лунного моря Познания до танкового полигона в Форт-Ноксе и от поверхности тазобедренного сустава до шлифованных деталей механизмов.

Величина $y = \lg((1/k)G(1/\lambda))$ отложена как функция $x = \lg \lambda$. Если справедливо равенство (1), то мы ожидаем, что этот график должен иметь вид прямой линии с наклоном 2. Сейлс и Томас получили сходимость результатов для 23 типов поверхностей, которые охватывают 8 декад по длине волны. Эти авторы полагают, что величина k однозначно определяет статистические геометрические свойства случайных компонент изотропной поверхности для этого диапазона длин волн.

Следует, однако, заметить, что аппроксимация наблюдаемой спектральной плотности зависимостью (1) определяет k и при выбранной нормировке эта зависимость принимает вид $G(1/\lambda)/k = \lambda^2$. Это равносильно такому преобразованию исходных данных, состоящих из 23 коротких отрезков разного наклона и разбросанных по всей плоскости двойного логарифмического графика, при котором отдельные отрезки смещаются вдоль вертикальной оси y так, что они максимально приближаются к линии $y = 2x$. При указанной процедуре аппроксимация будет выглядеть тем лучше, чем шире диапазон исходных данных.

Берри и Ханни замечают, что статистически изотропные поверхности, на которых не выделен какой-либо масштаб и уровень которых хорошо определен, но недифференцируем, действительно могут иметь спектр *фрактального* вида:

$$G(f) = k/f^\alpha = kf^{-2H-1}. \quad (2)$$

Как показано Мандельбротом, показатель H равен фрактальной коразмерности и следующим образом выражается через фрактальную размерность поверхности D :

$$D = 3 - H.$$

Для *броуновских* поверхностей, т. е. в случае обычной гауссовой статистики, получается равенство (1), использованное Сейлсом и Томасом, поскольку для таких поверхностей $H = 1/2$ и $D = 2,5$. Однако для параметра α следует найти значение, обеспечивающее наилучшую аппроксимацию, и оно оказывается заключенным в пределах от 1,07 до 3,03, что соответствует значениям фрактальной размерности $D = (7 - \alpha)/2$ от 2 до 3. В ответ на это замечание Сейлс и Томас провели новую аппроксимацию своих данных и построили гистограмму оценок спектрального параметра α , показанную на рис. 2.

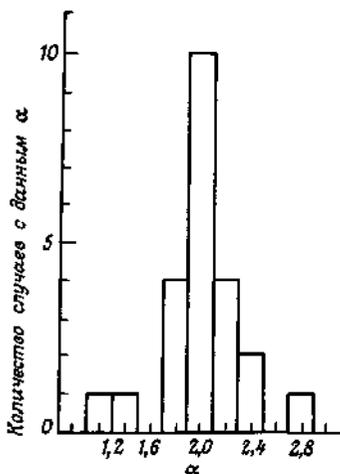


РИС. 2. Гистограмма значений показателя α для 23 серий измерений, представленных на предыдущем рисунке.

Полученные значения α группируются вокруг гауссова значения 2, но распределены по допустимому диапазону от 1 до 3. Этот результат кажется разумным, поскольку вряд ли можно ожидать, что поверхности шариковых подшипников и взлетных полос имеют одинаковые статистические свойства. Тем не менее Сейлс и Томас получили интересные результаты, и их стоит критически проверить на данных высокого качества.

Фрактальные поверхности разлома. Когда разламывается металлическое тело, образующаяся поверхность разлома шероховата и нерегулярна. Мандельброт и др. исследовали фрактальную структуру таких поверхностей. Они изучали разломы образцов мартенситной стали марки 300. Разломы сначала никелировались, а затем шлифовались параллельно плоскости разлома. В результате появлялись «острова» стали, окруженные никелем; при дальнейшей шлифовке острова росли и сливались друг с другом. Длина «береговой линии», или периметр P , и площадь A таких островов измерялись с помощью «эталоны» длиной $\delta = 1,5625$ мкм.

Фрактальные поверхности, подобные поверхностям разлома, должны характеризоваться различными законами подобия в плоскости разлома и поперек нее. Поэтому поверхности разлома могут быть в лучшем случае самоаффинными с *локальной* фрактальной размерностью. Однако пересечение такой самоаффинной поверхности с плоскостью дает береговые линии, которые самоподобны и имеют фрактальную

размерность $D' = D - 1$. Поэтому можно использовать соотношение периметра и площади (7.2), записанное в виде

$$L(\delta) \sim [A(\delta)]^{D'/2}. \quad (3)$$

На рис. 3 показаны результаты Мандельброта и др.

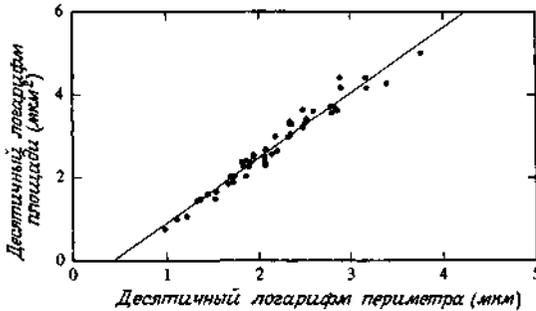


РИС. 3. Соотношение периметра и площади для поверхности разлома мартенситной стали марки 300. Прямой линией показана аппроксимация $A \sim L^{2/D'}$ при $D'=1,28$.

Аппроксимация зависимостью (3) дает оценку $D' = 1,28$, из которой следует, что в заметном диапазоне масштабов поверхность разлома имеет фрактальную размерность $D = 2,28$. Мандельброт и его соавторы проверили оценку фрактальной размерности, проанализировав профили поверхности разлома. Чтобы обнаружить ее профиль, поверхность резрезалась и для измеренных профилей рассчитывалась спектральная плотность $G(f)$. По соотношению (2) была найдена величина H , а затем и фрактальная размерность D поверхности

$$D = 3 - H = 1,26,$$

которая оказалась в хорошем согласии с ранее полученной оценкой. В другой серии экспериментов Мандельброт и др. подвергли образцы мартенситной стали марки 300 тепловой обработке при разной температуре. Затем измерялось количество энергии, которую необходимо вложить, чтобы разрушить образцы, и определялась фрактальная размерность поверхностей разлома. На рис. 4 представлены полученные результаты.

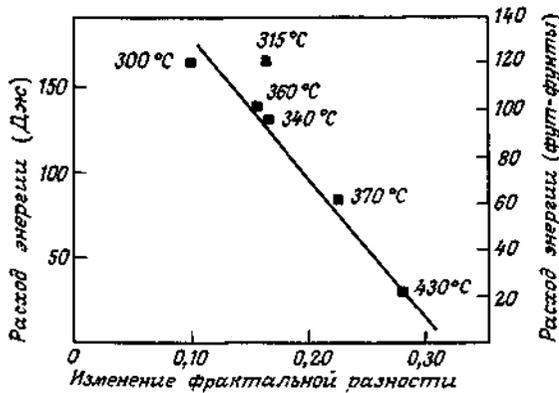


РИС. 4. Связь измеренной фрактальной размерности поверхности разлома D и энергии, необходимой для разлома серии образцов мартенситной стали марки 300, закаленных при различных температурах.

Ясно видно, что фрактальные размерности, заключенные в пределах $D = 2,1 — 2,28$, примерно линейно зависят от вложенной энергии. Связь этой зависимости с характером металлургических процессов неясна, но после открытия зависимости фрактальной размерности разлома от вложенной энергии по крайней мере намечился подход к исследованию топографии поверхности.

9.2. Фрактальная размерность ландшафтов и параметров окружающей среды

Барроу провел анализ обширного ряда измерений параметров окружающей среды и получил оценки фрактальных размерностей различных процессов, сведенные в табл. 1.

Таблица 1.

Оценки D для различных параметров окружающей среды.
Расшифровку символов, обозначающих метод оценки, см. в тексте.

Параметр	Запаздывание τ	$D_{1-\alpha}$	Метод
Почвы – содержание натрия	15,2 м	1,7–1,9	а
– содержание камней (оба – в четырех направлениях)	15,2 м	1,1–1,8	а
Почвы – толщина суглинка	20 м	1,6	а
Почвы – электропроводность (4 направления)	1 м	1,4–1,6	а
Поверхность взлетной полосы	30 см	1,5	б
Почвы – средний показатель конуса	~1 км	1,9	в
– мелкозем и глина в слое 0–15 см	~1 км	1,8	в
– средний диаметр камней на поверхности	~1 км	1,8	в
– крупнопесчаная фракция в слое 0–15 см	~1 км	1,8	в
Растительный покров	~1 км	1,6	в
Золото	различное	1,9	а
Почвы – уровень фосфора	5 м	2,0	в
– рН	5 м	1,5	в
– уровень калия	5 м	1,6	в
– объемная плотность	5 м	1,5	в
– вода, 0,1 бар	5 м	1,5	в
Железная руда в породах			
– хлорит	15 мкм	1,6	а
– кварц	15 мкм	1,9	а
– кварц	5 см	1,6	а
– железо	5 см	1,5	а
– железо (В–З)	100 м	1,7	а
– железо (С–Ю)	100 м	1,8	а
– железо (В–З)	500 м	1,6	а
– железо (С–Ю)	500 м	1,9	а
Морские анемоны	10 см	1,6	г
Дождевые осадки	1 км	1,7	а
Железная руда	3 м	1,4	а
Уровень подземных вод			
Пьезометр 1	1 день	1,6	а
2	1 день	1,6	а
3	1 день	1,8	а
4	1 день	1,3	а
Марки нефти	60 см	1,7	а
Марки меди	2 м	1,7	а
Топографические возвышения	10 м	1,5	а
Почвы – содержание песка	10 м	1,6–1,8	а
– рН	10 м	2,0	а
Урожайность	1–1000 м	1,6–1,8	в
Глубина грунтовых вод	250 м	1,6	а

Разнообразные данные, представленные здесь, можно рассматривать как ряды измерений величины z , выполненных через регулярные интервалы значений координаты x . Случайной функции $z(x)$ соответствует множество точек на плоскости xz , размерность которого

лежит в диапазоне $0 \leq D \leq 2$. Дисперсия приращений определяется формулой

$$V(\Delta x) = \langle [z(x + \Delta x) - z(x)]^2 \rangle$$

и зависит от разности координат как $V(\Delta x) \sim |\Delta x|^{2H}$.

Поэтому фрактальную размерность $D = 2 - H$ можно оценить, пользуясь графиком дисперсии приращений, построенным в двойном логарифмическом масштабе. Этим методом оценивались числа, помеченные в табл. 1 буквой «а». Спектр мощности определяется выражением (2), и оценка фрактальной размерности $D = 2 - H$ также следует из оценки коразмерности H ; соответствующие результаты отмечены буквой «б». Аналогичные оценки по групповым дисперсиям помечены «в», а оценки по ковариациям выделены буквой «г».

Получающиеся значения D попадают в диапазон от 1,4 до 2,0. Высокие значения D , которые указаны для некоторых свойств почв и геологических данных, могут, по-видимому, иногда поставить под сомнение обоснованность методов интерполяционной картографии, и представляется разумным использовать знание D для определения методов построения карт и интерполяции. Результаты этих исследований вызывают интерес, но для оценки их надежности следует критически проанализировать исходные данные и, в частности, выявить диапазон, в котором в зависимости отсутствуют какие-либо пространственные масштабы. Опыт изучения фазовых переходов, для которых масштабная инвариантность хорошо проверена и глубоко понята, говорит о том, что надежные оценки степенных показателей можно получить только из данных, которые охватывают не менее трех декад. Это жесткое ограничение до сих пор не удовлетворено в исследованиях фрактальных поверхностей и параметров окружающей среды.

9.3. Молекулярные фрактальные поверхности

Поверхности могут быть шероховатыми и даже фрактальными вплоть до масштабов молекулярного уровня. Площадь таких поверхностей можно измерять - в духе определения размерности по Хаусдорфу-Безиковичу, -осаждая на исследуемую поверхность молекулы разных размеров и «подсчитывая» их количество. Площадь поверхностей обычно определяют путем измерения *адсорбционных изотерм*. Измеряется количество грамм-молей n молекул, которые *адсорбируются* на поверхности, как функция давления P при данной температуре T :

$$n = f_T(P).$$

Один из методов определения n состоит в измерении давления и объема до и после взаимодействия с адсорбирующей поверхностью. Другой общий метод заключается в определении n прямым взвешиванием. Много специальных методов применимо для изучения адсорбции молекул из растворов.

При интерпретации адсорбционных изотерм часто используется *изотерма Ленгмюра*

$$n = \frac{n_m b P}{1 + b P} \quad (4)$$

Здесь n_m обозначает число грамм-молей, адсорбируемых на мономолекулярный слой. По таким изотермам находят n_m . Площадь поверхности Σ определяется выражением

$$\Sigma = n_m N_A \sigma_0,$$

где σ_0 - площадь, занимаемая одной адсорбированной молекулой, а N_A - число Авогадро. Для многих веществ поверхность, занимаемая при адсорбции одной молекулой, хорошо известна и в общем почти не зависит от подстилающей поверхности. В приложениях часто используется азот, а для него общепринятое значение площади, занимаемой одной молекулой, равно $\sigma_0 = 16,2 \text{ \AA}^2$. Другой широко известный метод, применяемый для интерпретации изотерм адсорбции, был предложен Брюнауэром и др.; так называемые *изотермы Брюнауэра-Эммета-Теллера* применяются для интерпретации более сложных адсорбционных изотерм.

Адсорбция на фрактальные молекулярные поверхности. Авнир, Пфейфер и Фарин рассмотрели площадь поверхностей, которая определяется по изотермам адсорбции, и пришли к выводу, что поверхности многих веществ *фрактальны* и характеризуются фрактальной размерностью, заключенной в диапазоне $2 \leq D \leq 3$. Конкретное значение площади поверхности образца зависит от *размера* используемых молекул. Как отмечают эти исследователи, при масштабе длины δ , определяемом наименьшей площадью адсорбции $\sigma_0 = \delta^2$,

количество вещества, адсорбируемое на образец с фрактальной поверхностью, должно меняться по закону

$$n \sim \delta^{-D} = \sigma^{-D/2} \quad (5)$$

В качестве примера такой зависимости приводим рис.5, где показаны данные об адсорбции спиртов из толуола на пористый силикагель.

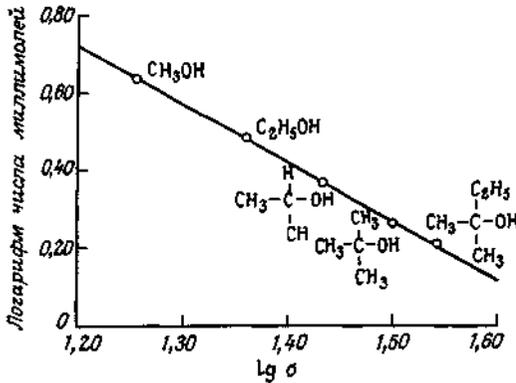


РИС.5. Измерения числа грамм-молей n в мономолекулярном слое на пористом силикагеле как функция площади сечения молекул σ (\AA^2), $D = 3,02 \pm 0,06$.

Полученные молярные числа удовлетворяют соотношению (5) с $D = 3,02 \pm 0,06$ при размере эталона площади σ_0 от 18 до 35 \AA^2 , т. е. значениях δ от 4,2 до 5,9 \AA . Это максимально допустимое значение для фрактальной размерности поверхности. Такая поверхность настолько неровна и пориста, что она практически заполняет объемную область. Отсюда следует, что поверхностные и объемные члены играют равную роль в термодинамических соотношениях. В такой системе мономолекулярный слой адсорбированных молекул имеет свойства объемной фазы, содержащей пустоты, количество которых тем больше, чем меньше их размер. Эту высокую оценку фрактальной размерности поверхности следовало бы уточнить, пользуясь более широким диапазоном эталонов площади.

Рожански и др. исследовали мезопористый силикагель методами адсорбции, электронного энергообмена и рассеяния рентгеновского излучения на малые углы. Как показали все эти различные методы, поверхность крайне нерегулярна и шероховата, ее фрактальная размерность D близка к 3.

Пфейфер и Авнир предложили метод значительного расширения эффективного диапазона изменения площади эталона. Рассмотрим геометрически подобные частицы. Пусть R - радиус наименьшей сферы, описанной вокруг такой частицы. Тогда те же рассуждения, которые привели к соотношению *периметра и площади* (7.2), дают соотношение *площади и объема* для одной частицы

$$A \sim V^{D/3}. \tag{6}$$

Объем частицы V здесь определяется как $V \sim R^3$. При фиксированном объеме $V_s \gg V$, занятом адсорбируемым веществом, число частиц N_s в этом объеме увеличивается с уменьшением их радиуса как $N_s \sim R^{-3}$. Подставляя эти соотношения в (6), мы получаем, что площадь поверхности Σ изменяется с радиусом частиц по закону

$$\Sigma \sim n \sim R^{D-3} \quad (7)$$

при постоянном размере эталона δ . Как мы уже упоминали, число грамм-молекул в мономолекулярном слое n пропорционально Σ при заданном размере молекул. Пользуясь таким методом, Пфейфер и Авнир расширили диапазон измерений, описанных на рис.5, и получили рис.6.

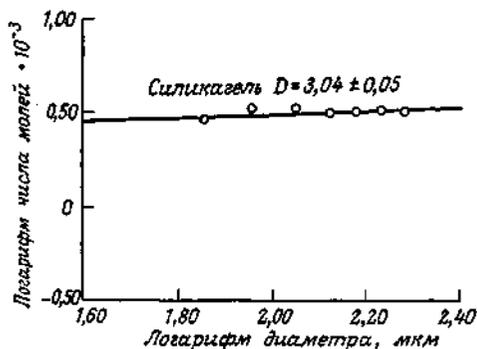


РИС. 6. Измерения числа грамм-молекул n третичного амилового спирта в мономолекулярном слое как функция диаметра адсорбируемых частиц ($2R$) (мкм).

Таким образом, им удалось получить оценку $D = 3,04 \pm 0,05$ в диапазоне размеров эталона от 35 до 256 Å.

Подборка фрактальных размерностей показана в табл. 2.

Таблица 2.

Фрактальная размерность поверхностей по измерениям молекулярной адсорбции

Фрактальная размерность	Происхождение образцов	Диапазон (\AA^2)
<i>Высокие значения</i>		
$2,91 \pm 0,02$	Доломитовая порода из Бельвю, штат Огайо	20–47000
$2,97 \pm 0,01$	Кальцевая порода из Идабель, штат Оклахома	20–47000
$2,88 \pm 0,02$	Гранитные породы с ядерного полигона в штате Невада	16–16500
$2,73 \pm 0,05$	Оплавленные породы с ядерного полигона в штате Невада	14–14300
$2,71 \pm 0,14$	Гранулы активированного угля из оболочек кокосовых орехов (Суруми НС-8)	(16–37)
$2,80 \pm 0,16$	Гранулы активированного угля из оболочек кокосовых орехов (Фуджизава В-СГ)	(16–37)

Продолжение табл. 2

Фрактальная размерность	Происхождение образцов	Диапазон (\AA^2)
$2,90 \pm 0,01$	Карбонатная порода из артезианской скважины, Юкка-Флэт, штат Невада	16-16500
$2,92 \pm 0,02$	Почва (каолинит со следами галлуазита)	150-16500
$2,94 \pm 0,04$	Пористый силикагель	(16-34)
$2,79 \pm 0,03$	Активированная окись алюминия марки F-20 (Алькаа корп.)	16-45100
$2,78 \pm 0,21$	Животный уголь	1400-180000
$2,67 \pm 0,16$	Пористый древесный уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)	(16-47)
<i>Умеренные значения</i>		
$2,57 \pm 0,04$	Пористый пигмент $\alpha = \text{FeOON}$ для магнитных лент	16-980
$2,35 \pm 0,11$	Битос свинцовое стекло Корнинг 0010	21-14900
$2,52 \pm 0,07$	Пыль из угольной шахты в западной Пенсильвании	16-180
$2,33 \pm 0,08$	Пыль из угольной шахты в западной Пенсильвании	16-270
$2,25 \pm 0,09$	Газовая сажа	(16-71)
$2,54 \pm 0,12$	Слабопористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)	(16-47)
$2,30 \pm 0,07$	Слабопористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)	(16-47)
$2,63 \pm 0,03$	Плавиковый шпат из Стефенс-Сити, Виргиния	20-47000
$2,58 \pm 0,01$	Доломит из Вудвилля, штат Огайо	20-47000
$2,46 \pm 0,11$	Стекловидная оплавленная порода с ядерного полигона в штате Невада	14-14300
$2,29 \pm 0,06$	Почва (в основном полевошпатовый кварц и лимонит)	150-21800
<i>Низкие значения</i>		
$2,02 \pm 0,06$	Аэросиль - непористый кремнезем (Degussa)	16-529
$2,15 \pm 0,06$	Сноувит - матовое кварцевое стекло высокой чистоты	16-10600
$2,14 \pm 0,06$	Мадагаскарский кварц (Термал Синдикат)	16-1850
$1,95 \pm 0,04$	Периклаз - электрически плавленый и дробленый магнезит	16-720
$2,02 \pm 0,05$	Синтетический фюзит $\text{Na}_2\text{O} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \times \times 2,67\text{SiO}_2 \cdot m\text{H}_2\text{O}$ (Линде Эйр Продактс)	(16-68)
$2,07 \pm 0,01$	Графит марки Вулкан 3G (2700) (Национальная физическая лаб., Теддингтон, Великобритания)	(16-178)

Продолжение табл. 2

Фрактальная размерность	Происхождение образцов	Диапазон (Å^2)
$2,04 \pm 0,16$	Графит — частично графитизированная газовая сажа, полученная нагреванием до 3200°C	(15–41)
$2,13 \pm 0,16$	Графит — графитизированная газовая сажа (Кейбот корп.)	1400–180000
$2,04 \pm 0,04$	Непористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)	16–47
$1,97 \pm 0,02$	Непористый уголь из оболочек кокосовых орехов (Стандарт Кемикэл Ко., Монреаль)	(16–47)
$2,16 \pm 0,04$	Исландский шпат, кальцит из Чиуауа, Мексика	20–47000

В этом каталоге встречаются поверхности с фрактальными размерностями, занимающими весь диапазон от $D = 2$ до $D = 3$. Эти результаты обнаруживают необходимость дальнейших исследований. В частности, диапазон масштабов, в которых проводятся измерения структуры поверхностей, следует распространить в области, достигающие нижнего и верхнего пределов самоподобия. Вновь обращаясь к опыту исследования фазовых переходов, мы можем сказать, что оценки степенных показателей не надежны, если исходные данные не охватывают по меньшей мере диапазон в три декады. Осознание факта существования молекулярных фрактальных поверхностей существенно повлияет на многие области, связанные со свойствами поверхностей, такие, как катализ, смачивание и технология напыления. Этому направлению исследований суждено большое будущее.

Фрактальная пористость. Бейл и Шмидт опубликовали очень интересную статью, в которой обнаружено, что поверхность микроскопических пор материалов может быть фрактальной. В этой статье получено следующее выражение для интенсивности рассеяния рентгеновского излучения фрактальной пористой поверхностью:

$$S(q) \sim q^{(D-6)}, \quad (8)$$

где модуль вектора рассеяния q определяется так же, как в (3.16). Измерения рассеяния на малые углы образцами бурого угля показали, что поверхность пор фрактальна и ее размерность равна $D = 2,56 \pm 0,03$ в диапазоне величин вектора рассеяния, охватывающем два порядка (рис.7).

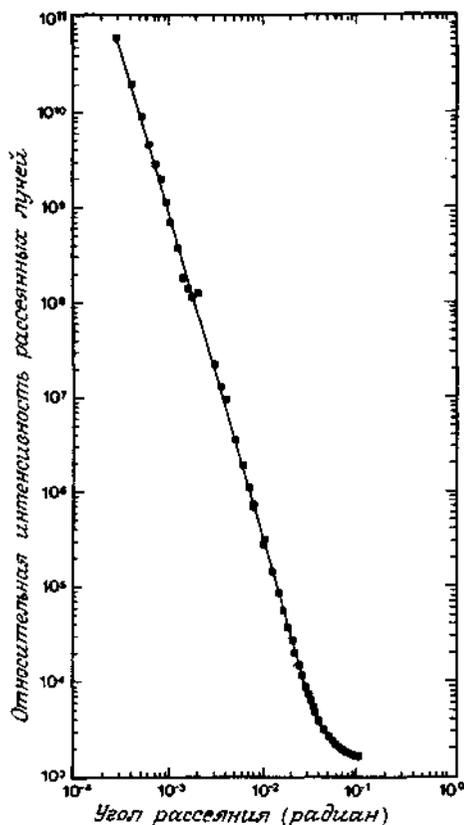


РИС. 7. Интенсивность рентгеновского излучения, рассеянного образцами бурого угля как функция угла рассеяния.

Чтобы должным образом понять фрактальные свойства пор, нужны дальнейшие исследования рассеяния на малые углы. Анализ теории такого рассеяния показал, что эти результаты следует интерпретировать как указание на шероховатость поверхности пор, а не ее фрактальность. Наблюдения рассеяния нейтронов на малые углы показали, что образцы песчаника и глинистых сланцев содержат фрактальные внутренние поверхности пор с величинами D в диапазоне от 2,55 до 2,96 в зависимости от типа породы. Такая структура связана с влиянием частиц глины.

Пористые песчаники изучались Кацем и Томпсоном с помощью сканирующего электронного микроскопа. Фрактальные свойства

поверхностей разлома пород изучались по вторичной электронной эмиссии, индуцированной сканирующим пучком электронов. При каждом значении увеличения вид структуры, регистрируемой электронным пучком вдоль линии его перемещения, ограничен разрешением микроскопа; для изотропных фракталов это ограничивает глубину поля зрения. Глубина поля сканирующего электронного микроскопа уменьшается при увеличении разрешения, так что она всегда меньше глубины пор на поверхности образца. Поэтому на самом деле интенсивность вторичной электронной эмиссии определяется свойствами пересечения линии сканирования с пористой поверхностью. Для объемного фрактала с поверхностной фрактальной размерностью D пересечение с линией представляет собой множество точек размерности $D' = D - 2$. Кац и Томпсон выдвигают гипотезу, что число «особенностей» на единицу длины $N(L)$, разрешаемое при данном увеличении, должно зависеть от масштаба длины L по закону $N(L) \sim L^{-(D-2)}$. Как видно из рис. 8, их наблюдения хорошо укладываются на такую зависимость и приводят к оценке фрактальной размерности $D = 2,78$

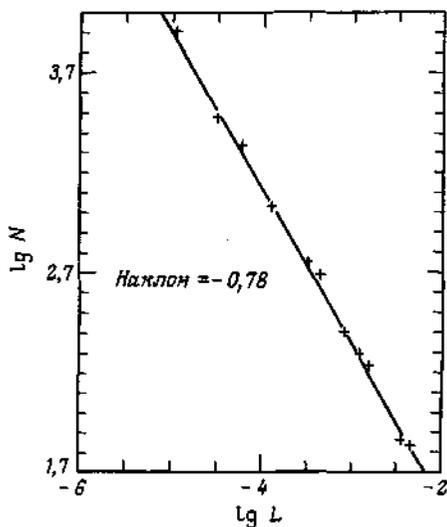


РИС. 8. Число $N(L)$ геометрических особенностей размера L на единице длины как функция L (см) для образцов песчаника с плато Коконино.

Результаты этой работы для разнообразных образцов приведены в табл.3.

Таблица 3.

Фрактальная размерность поверхности пор в песке и песчанике по измерениям вторичной электронной эмиссии. Пористость измерялась непосредственно и оценивалась из соотношения $\phi = (\ell_1/\ell_2)^{3-D}$

Образец	Фрактальная размерность	ℓ_2 (мкм)	Пористость (%)	
			рассчитанная	измеренная
Плотный газоносный песок № 965	2,57	2,5	4,7	5,3–5,6
Плотный газоносный песок № 466	2,68	6	7,6	6,9–7,6
Плато Кокойино	2,78	98	10	11–12,5
г. Навахо	2,81	50	15	16,4
Сент-Питерс	2,87	50	27	24–28

Фрактальная структура пространства пор прослеживается между наименьшим масштабом $l_1 \sim 20 \text{ \AA}$ и наибольшим масштабом l_2 , выше которого нарушается степенная зависимость от L . Кац и Томпсон предлагают следующее соотношение для пористости ϕ :

$$\phi = (l_1/l_2)^{3-D}. \quad (9)$$

Это соотношение они использовали для оценки ϕ по измерениям верхней границы масштабов l_2 и получили удовлетворительные результаты. Однако не приводится доводов в пользу этого соотношения, которое не может иметь общий характер.

9.4. ФРАКТАЛЫ И УНИВЕРСАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Как мы уже говорили, фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Обычно эти части бесконечно уменьшаются или увеличиваются и представляют собой уменьшенную копию целого (по крайней мере, приблизительно).

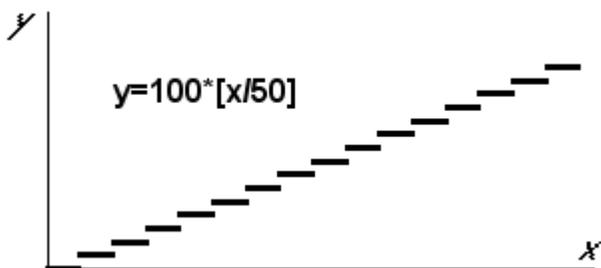
С другой стороны фрактал является функцией – математическим выражением, описывающим эту структуру. Таким образом, получение нового фрактала неразрывно связано с получением

соответствующего математического выражения или системы математических выражений.

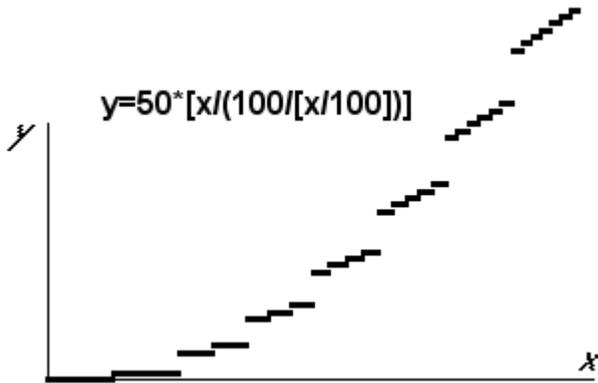
С момента появления понятия "фрактал" постоянно активно ведутся поиски математических выражений способных задавать разнообразие фракталы. По этому проверка универсального уравнения на способность задавать фракталы является вполне логичной.

Под универсальным уравнением понимается математическое выражение вида: $y=[x/a]*[a/x]$, где $[]$ – знак, обозначающий целую часть числа (и далее по тексту). Путем введения в универсальное уравнение различных добавлений и преобразований практически можно получать бесконечное количество производных уравнений, описывающих самые разнообразные объекты.

Универсальное уравнение в своем элементарном виде состоит из двух функций: $[x/a]$ и $[a/x]$. Если посмотреть на приведенный ниже график подобной функции, то можно убедиться, что эти функции сами являются фракталами.



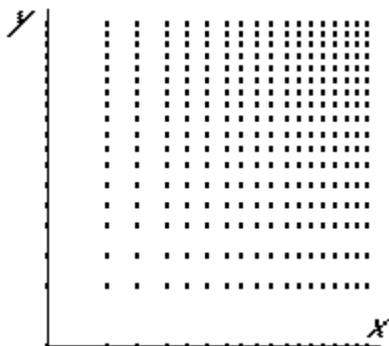
Действительно, любая часть этого графика подобна, как всему графику, так и отдельным другим его частям и размеры этих частей постепенно увеличиваются, что характерно для фракталов. Эти элементарные функции сами могут послужить основой для получения более сложных фракталов, например, приведенного ниже на рисунке:



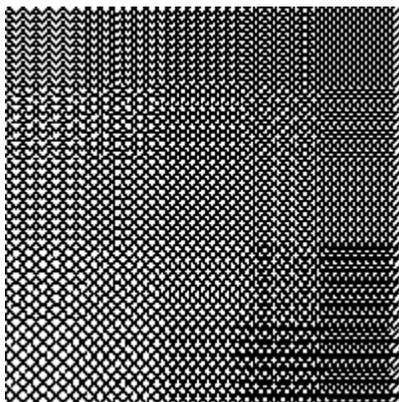
Причем, используя универсальное уравнение можно получить уравнение, задающее своеобразный фрактал – основу для получения других самых разнообразных фракталов:

$$1 = \frac{1}{1 + \left[\frac{|x| - \frac{P}{1 + \left[\frac{|x|}{P} \right]}}{1 + \left[\frac{|y| - \frac{P}{1 + \left[\frac{|y|}{P} \right]}}{1 + \left[\frac{|y|}{P} \right]} \right]} \right]} \cdot \frac{1}{1 + \left[\frac{|y| - \frac{P}{1 + \left[\frac{|y|}{P} \right]}}{1 + \left[\frac{|y|}{P} \right]} \right]}}, \quad (1)$$

где P – число (может быть и функция), определяющее основные свойства фрактала. Фрагмент графика уравнения (1) приведен ниже:



Каждая точка этого графика может служить "инициатором" для построения графика, какой либо функции, в результате чего могут получаться самые разнообразные фракталы. Например, такие, как приведенный ниже:

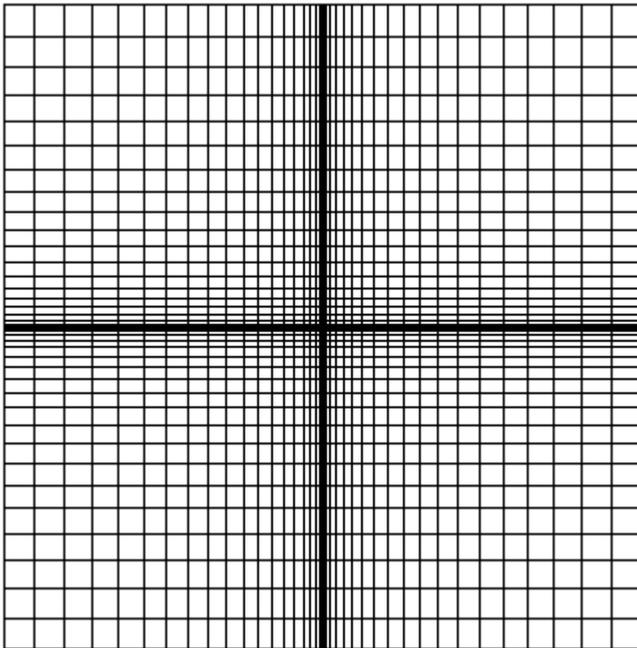


Таким образом, использование универсального уравнения для задания фракталов позволяет получать фракталы отличные от уже известных. Причем принципы построения фракталов на основе универсального уравнения так же отличаются от традиционно используемых. Для задания фракталов используются неявные функции и способность универсального уравнения задавать нестационарные периодические функции. Любой фрагмент фрактала можно построить, не строя и не просчитывая его предыдущие фрагменты.

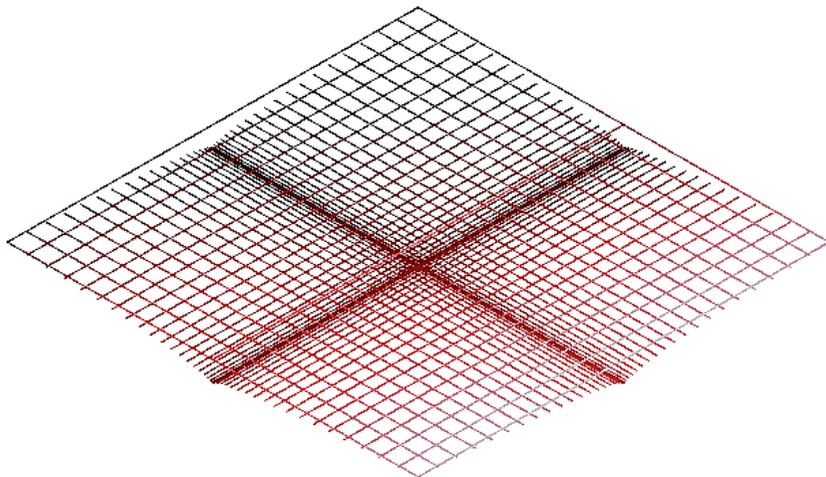
Далее в качестве примеров приводится ряд фракталов, заданных с помощью универсального уравнения.

На приведенном ниже рисунке показан фрагмент фрактала представляющий собой проекцию на плоскость $xу$ графика уравнения:

$$\mathbf{1} = \frac{\mathbf{1}}{\left[\frac{[z]^2}{y} \right] \cdot \left[\frac{y}{[z]^2} \right] + \left[\frac{[z]^2}{x} \right] \cdot \left[\frac{x}{[z]^2} \right]}, \quad (2)$$



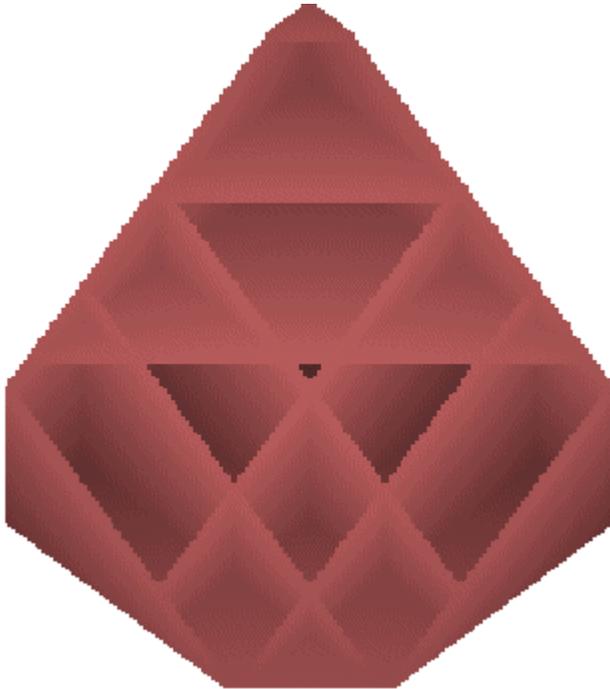
Этот же фрактал по своему интересен и в трехмерном исполнении:



Освещение этого фрактала и других в этом разделе сделано искусственно и никак не связано со способом их задания.

На приведенном ниже рисунке показан фрагмент фрактала, представляющего собой бесконечную коробку, состоящую из постоянно уменьшающихся в размерах ячеек, построенных в соответствии с формулой:

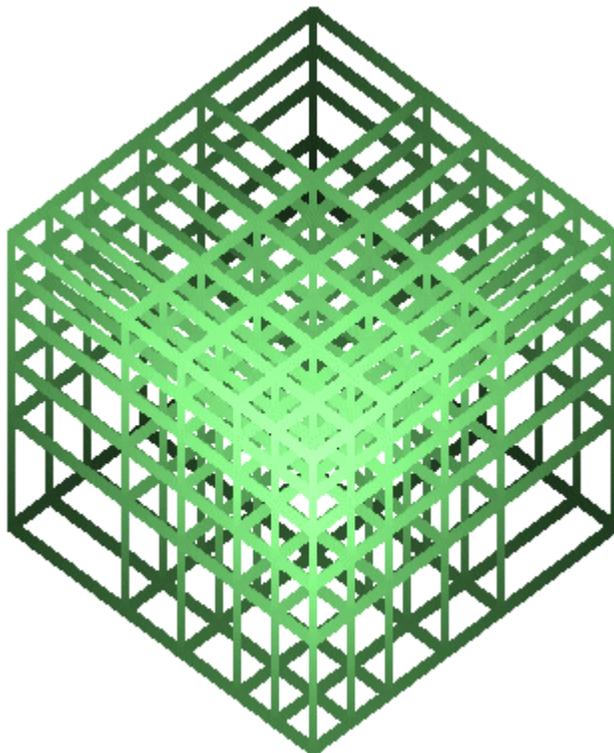
$$1 = \frac{1}{\left[\frac{1}{1+x_p} \right] + \left[\frac{1}{1+y_p} \right] + \left[\frac{1}{1+z_p} \right]}, \quad (3)$$



Для того, что бы лучше разобраться в "устройстве" этого фрактала можно посмотреть [специальную программу](#) построения фрактала "коробка".

На приведенном ниже рисунке показан фрагмент фрактала, представляющего собой объемную бесконечную решетку, состоящую из постоянно уменьшающихся в размерах ячеек, построенных в соответствии с формулой:

$$1 = \frac{1}{\left[\frac{1}{1+x_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{1+z_p} \right] + \left[\frac{1}{1+y_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{1+z_p} \right] + \left[\frac{1}{1+x_p} \right] \cdot \left[\frac{1}{1+y_p} \right]}, \quad (4)$$



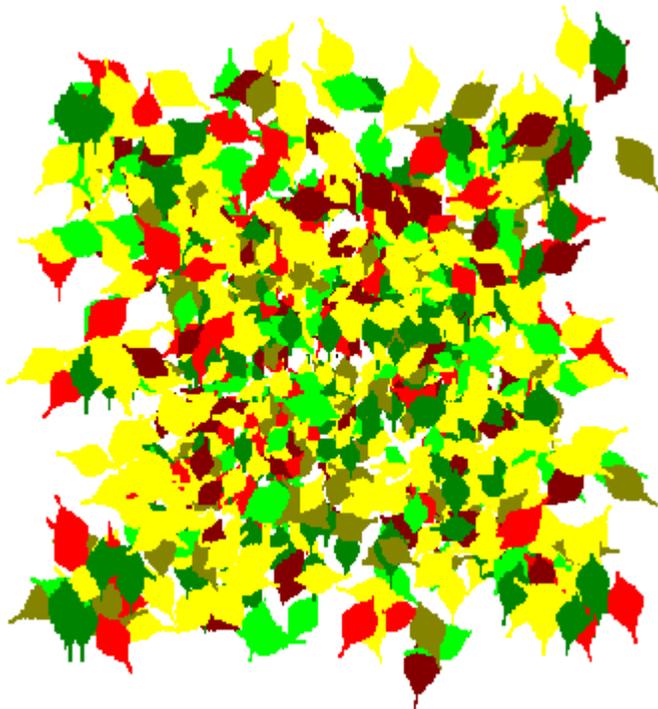
Для того, что бы лучше разобраться в "устройстве" этого фрактала можно посмотреть [специальную программу](#) построения фрактала "объемная решетка".

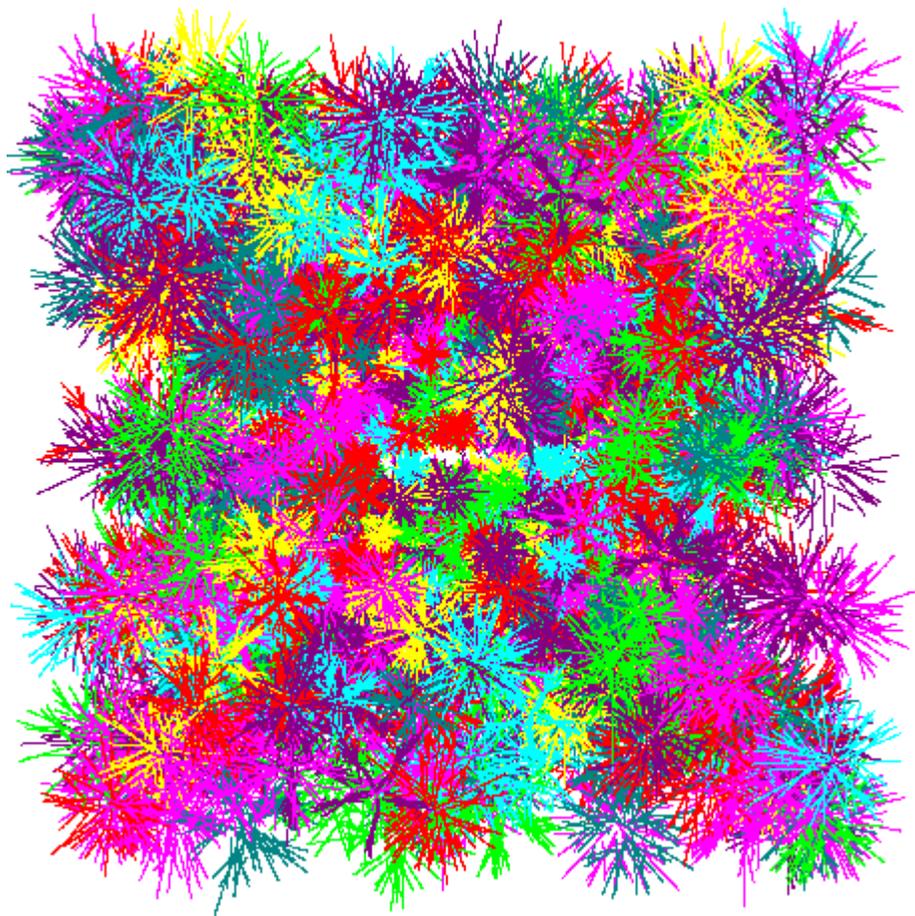
В уравнениях (3) и (4) вычисление параметров осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned}
 x_p &= \left[x - \frac{P}{1 + \left[\frac{x}{P} \right]} \cdot \left[\frac{x \cdot \left(1 + \left[\frac{x}{P} \right] \right)}{P} \right] \right] \\
 y_p &= \left[y - \frac{P}{1 + \left[\frac{y}{P} \right]} \cdot \left[\frac{y \cdot \left(1 + \left[\frac{y}{P} \right] \right)}{P} \right] \right], \\
 z_p &= \left[z - \frac{P}{1 + \left[\frac{z}{P} \right]} \cdot \left[\frac{z \cdot \left(1 + \left[\frac{z}{P} \right] \right)}{P} \right] \right]
 \end{aligned}$$

где P – число (может быть и функция), определяющее основные свойства фракталов "коробка" и "объемная решетка".

Если в функциях, заданных при помощи универсального уравнения, определяющих фракталы, случайным образом менять какие-либо параметры то можно получить стохастические фракталы. В качестве примеров таких фракталов ниже приведены фракталы "опавшие листья" и "цветы".

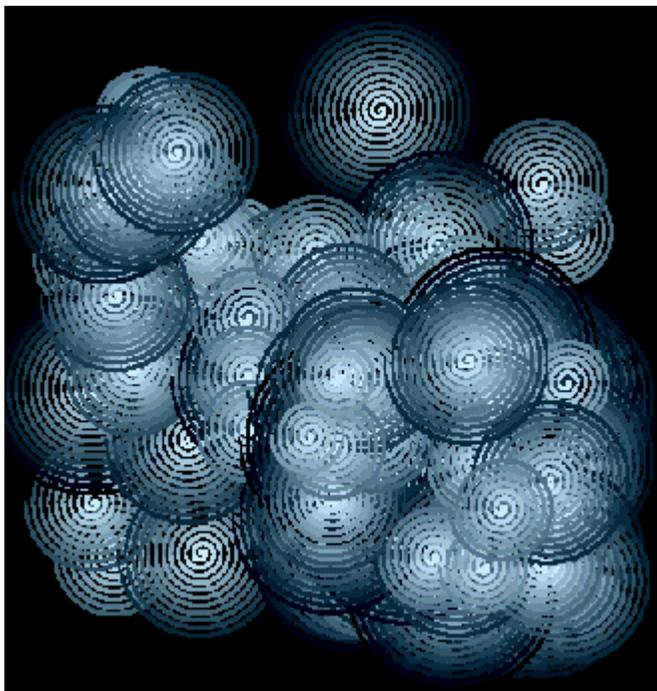


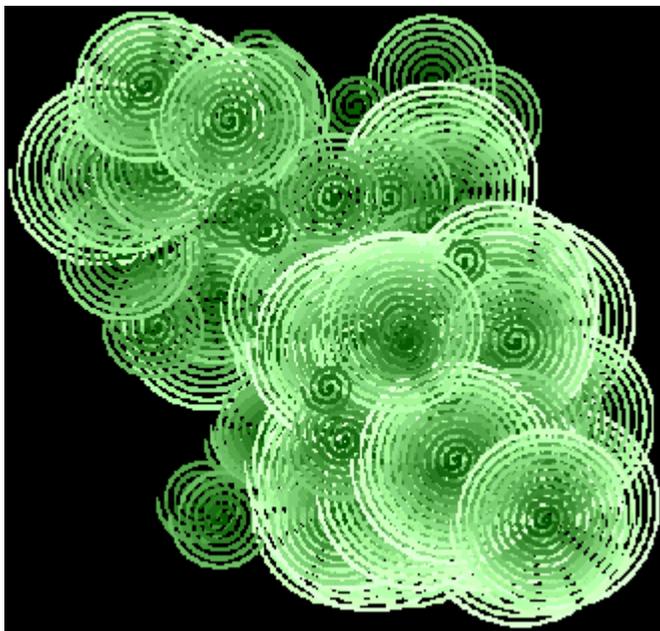


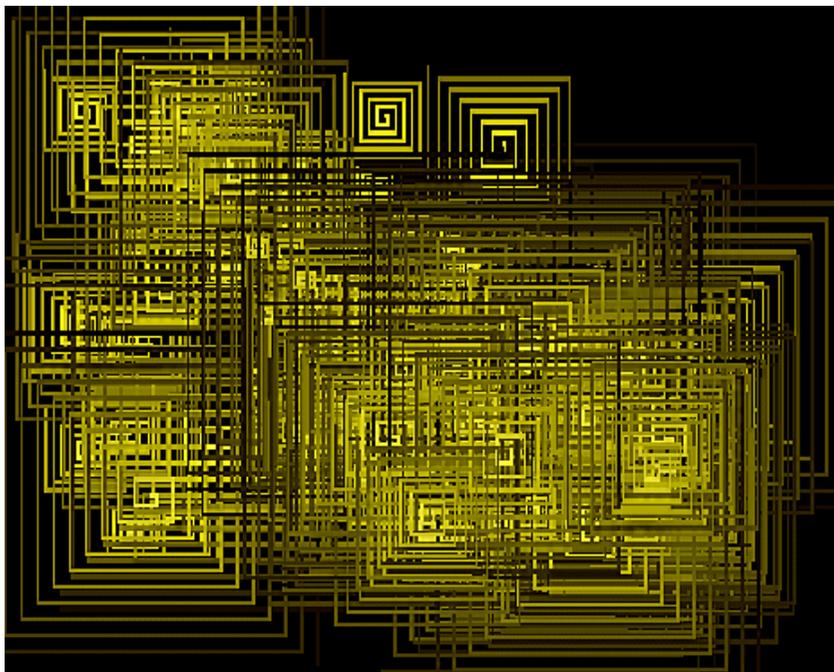
Интересно, что системы уравнений, задающие фракталы "опавшие листья" и "цветы" совсем мало отличаются друг от друга.

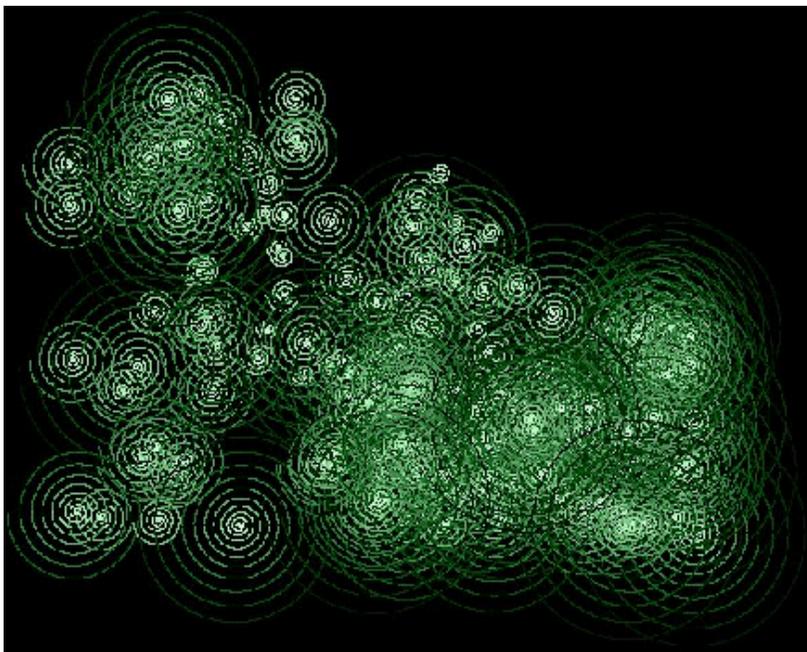
Понаблюдать за построением фракталов "опавшие листья" и "цветы" при изменении исходных параметров можно при помощи [специальной программы](#).

Далее приведены четыре примера стохастических фракталов полученных за счет использования уравнений спиралей и многоугольников, приведенных в статьях "[Уравнения многоугольников и спиралей на их основе](#)" и "[Таблица уравнений спиралей на основе универсального уравнения](#)".









Известно, что универсальное уравнение в своем элементарном виде на графике задает точку, а сумма этих уравнений - соответственно сумму точек. С другой стороны, если взять любой фрактал и начать бесконечно уменьшать однотипные части, его составляющие, то какими бы сложными эти части ни были, они постепенно все вырождаются в точки. Таким образом, можно говорить о том, что **универсальный фрактал должен графически представлять собой набор точек и может задаваться суммой универсальных уравнений.** Причем суммы таких уравнений в общем случае будут бесконечными, так как при представлении какого либо объекта в виде фрактала, состоящего из точек теоретически к уже имеющимся точкам, составляющим объект можно прибавлять бесконечное число новых точек с соответствующим увеличением густоты (плотности) размещения точек в пространстве.

Наблюдать подобные фракталы на статичных рисунках бессмысленно, так как наблюдаться будет только сам объект, представляемый фракталом, а части составляющие фрактал – точки нет. Поэтому для того, что бы разобраться в том, как строятся такие "универсальные фракталы" следует загрузить и выполнить специальные программы: "[Пористая структура](#)" и "[Горка спичек](#)". В

результате выполнения этих программ можно будет наблюдать поточечное построение фракталов в виде своеобразной анимации. Программа "Пористая структура" построит сначала трехмерный объект "набранный" крупными точками, а затем тот же объект, но "набранный" большим количеством более мелких точек с соответствующим появлением более мелких подробностей объекта, что характерно для фракталов. Программа "Горка спичек" строит горку спичек в реалистичном виде, конечно с поправкой на отсутствие антиаллисинга. Явление аллисинга конечно не присуще универсальному уравнению, но для вывода изображений мы вынуждены использовать обычный монитор, который фактически "втискивает" с соответствующими искажениями результаты вычисления координат точек по универсальному уравнению в матрицу монитора.

При работе с программами можно так же заметить, что выполняемые на экране трехмерные построения отличаются от обычной 3D графики. **Обычная 3D графика обеспечивает лишь построение поверхностей объектов, а фракталы на основе универсальных уравнений весь объем, занимаемый объектом, включая его внутренности.** Это обстоятельство очень важно, если фрактал предполагается в дальнейшем использовать для выполнения с ним каких либо операций, например выполнения прочностных расчетов.

Кроме этого отображаемая при помощи программы "Горка спичек" анимация в виде фрактала вместе с программой воспроизведения анимации занимает 11,7 МБ. Это при том, что программа фактически демонстрирует в ходе построения фрактала 246720 отличных друг от друга кадров анимации. Если бы подобную анимацию создавали бы, например, в формате gif, то при среднем размере одного кадра в формате gif 9,4 кБ вся анимация заняла бы 2319 МБ или была бы больше фрактала в 198 раз.

9.5. Системы итерированных функций

Мы обратимся теперь к одному из наиболее важных и глубоких достижений в построении фракталов — системам итерированных функций. Математические аспекты были разработаны Джоном Хатчинсоном, а сам метод стал широко известен благодаря Майклу Барнсли и другим. Подход на основе систем итерированных функций предоставляет хорошую теоретическую базу для математического

исследования многих классических фракталов, а также их обобщений. Разработанная теория непосредственно используется при переходе к исследованию хаоса, связанного с фракталами.

Следует иметь в виду с самого начала, что результат применения системы итерированных функций, называемый аттрактором, не всегда является фракталом. Это может быть любой компакт, включая интервал или квадрат. Тем не менее, изучение систем итерированных функций важно для фрактальной теории, так как с их помощью можно получить удивительное множество фракталов. Теория итерированных функций замечательна сама по себе и служит составной частью общей теории динамических систем, важного раздела математики.

Прежде чем углубиться в теорию систем итерированных функций, рассмотрим пример, а именно ковер Серпинского, который мы уже строили прежде. Для построения мы выбирали в качестве исходного множества треугольник и на каждом шаге выкидывали центральную треугольную часть (не включая границу) образующихся треугольников. Ниже мы рассмотрим два других метода: детерминированный и рандомизированный.

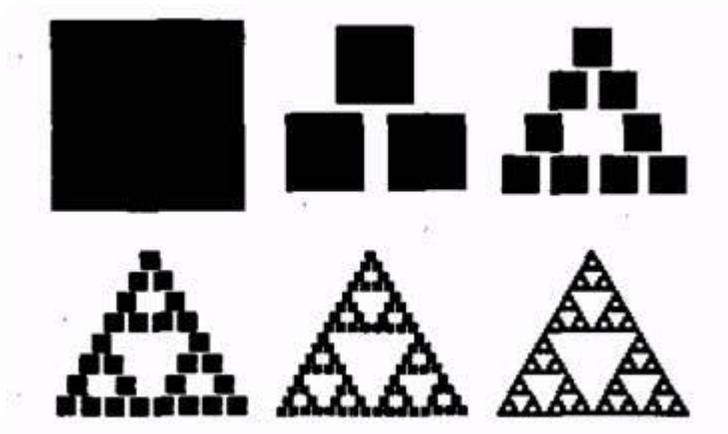


Рис. 1. Построение ковра Серпинского с помощью детерминированной СИФ

Построение ковра Серпинского в детерминированном алгоритме начинается с выбора компактного множества E_0 , например квадрата (рис. 1). Затем задаются аффинные преобразования так чтобы исходное множество E_0 было преобразовано, как показано на втором шаге построения рис. 1. Это достигается путем выбора следующих трех преобразований:

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2 \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$T_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{vmatrix}$$

и преобразование компактного множества E_0 записывается в виде

$$E_1 = T_1(E_0) \cup T_2(E_0) \cup T_3(E_0).$$

После выполнения n таких преобразований, получаем изображение соответствующее ковру Серпинского:

$$E_n = T_1(E_{n-1}) \cup T_2(E_{n-1}) \cup T_3(E_{n-1}).$$

Заметим, что все множество возможных построений определяется набором аффинных преобразований T_1, \dots, T_n .

Обычно коэффициенты аффинного преобразования записываются в матрицу C размером $n \times 6$ элементов:

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{bmatrix},$$

которая полностью описывает фрактальное множество.

В рандомизированном алгоритме, который часто называют игрой в «Хаос», в качестве начального множества выбирают одну точку:

x_0 - начальная точка (с произвольными координатами)

$$x_1 = T_1(x_0) \text{ или } T_2(x_0) \text{ или } T_3(x_0)$$

⋮

$$x_n = T_1(x_{n-1}) \text{ или } T_2(x_{n-1}) \text{ или } T_3(x_{n-1})$$

⋮

На каждом шаге, вместо того чтобы применять сразу три преобразования $T_1(S), T_2(S), T_3(S)$, мы применяем только одно, выбранное случайным образом. Таким образом, на каждом шаге мы получаем ровно одну точку. Оказывается, что после некоторого переходного процесса точки, сгенерированные в рандомизированном алгоритме, заполняют в точности ковер Серпинского.

Замечательным свойством алгоритмов, основанных на теории систем итерированных функций, является то, что их результат (аттрактор) совершенно не зависит от выбора начального множества E_0 или начальной точки x_0 . В случае детерминированного алгоритма это означает, что в качестве E_0 можно взять любое компактное

множество на плоскости: предельное множество по-прежнему будет совпадать с ковром Серпинского. В случае рандомизированного алгоритма, вне зависимости от выбора начальной точки x_0 , после нескольких итераций точки начинают заполнять ковер Серпинского.

Для равномерного распределения точек по экрану в рандомизированном алгоритме аффинные преобразования следует выбирать с вероятностью

$$p_i = \frac{\det(A_i)}{\sum_{j=1}^n \det(A_j)},$$

где $A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$ - матрица соответствующего аффинного преобразования. Очевидно, что $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

В общем случае, для чтобы построить систему итерированных функций введем в рассмотрение совокупность сжимающих отображений:

$$T_1 \text{ - с коэффициентом сжатия } s_1 < 1,$$

$$T_2 \text{ - с коэффициентом сжатия } s_2 < 1,$$

⋮

$$T_n \text{ - с коэффициентом сжатия } s_n < 1.$$

Эти n отображений используются для построения одного сжимающего отображения T .

Таким образом, системой итерированных функций (СИФ) называют совокупность введенных выше отображений вместе с итерационной схемой:

E_0 - компактное множество (произвольное)

$$E_1 = T(E_0) = T_1(E_0) \cup \dots \cup T_n(E_0),$$

$$E_2 = T(E_1),$$

⋮

$$E_n = T(E_{n-1}),$$

⋮

Основная задача теории СИФ — выяснить, когда СИФ порождает предельное множество E_0 :

$$E = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n.$$

Если предел существует, то множество E называют аттрактором системы итерированных функций. Причем аттрактор часто (но не всегда!) оказывается фрактальным множеством. Очевидно, для того чтобы обеспечить сходимость, требуется наложить определенные ограничения на введенные выше преобразования, к примеру запретить точкам уходить на бесконечность.

Основные математические идеи, необходимые для установления условий сходимости, уже были представлены. Если нам удастся показать, что T является сжимающим отображением на метрическом пространстве (K, N) , то мы сможем применить теорию сжимающих отображений. В этом случае аттрактор E есть не что иное, как неподвижная точка отображения T .

Примеры систем итерируемых функций

Кристалл

a	b	c	d	e	f
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,3726	0,6714
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0,1146	0, 2232
0,2550	0,0000	0,0000	0,2550	0, 6306	0, 2232
0,3700	-0,6420	0,6420	0,3700	0,6356	-0,0061

Папоротник

a	b	c	d	e	f
0, 7000	0, 0000	0, 0000	0, 7000	0, 1496	0, 2962
0,1000	-0,4330	0, 1732	0, 2500	0,4478	0, 0014
0,1000	0,4330	-0, 1732	0,2500	0,4445	0, 1559
0,0000	0,0000	0,0000	0,3000	0,4987	0, 0070

Ковер А

a	b	c	d	e	f
0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	0,5000
0, 0000	-0,5000	-0, 5000	0, 0000	0, 5000	0, 5000
-	0,0000	0,0000	-0,5000	0,5000	1,0000
0,5000					

Ковер В

a	b	c	d	e	f
0,5000	0,0000	0,0000	-0,5000	0,0000	1,0000
0,0000	0,5000	0,5000	0, 0000	0, 0000	0, 0000
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,5000	0,0000

Лист

a	b	c	d	e	f
0,4000	-0,3733	0, 0600	0,6000	0,3533	0,0000
-0,8000	-0,1867	0, 1371	0,8000	1, 1000	0, 1000

Ковер Серп...

a	b	c	d	e	f
0,5000	0, 0000	0, 0000	0, 5000	0, 0000	0, 0000
0,5000	0, 0000	0, 0000	0, 5000	0, 5000	0, 0000
0,5000	0,0000	0,0000	0,5000	0,2500	0,4330

Сжатие изображений с использованием СИФ

Из примеров построения фракталов видно, что получаемые таким образом изображения могут быть очень похожими на реальные. Например, с помощью фрактальной геометрии можно получать реалистичные изображения листьев, трав, деревьев, гор, рек и других природных объектов. Причем каждый раз при генерации фрактальных множеств (изображений) используется только матрица коэффициентов C , содержащая коэффициенты сжимающих аффинных преобразований. Можно заметить, что объем данных, занимаемых элементами матрицы C , как правило, много меньше объема сгенерированного изображения, даже если его записать в известных форматах gif, jpeg, tif и др. Таким образом, некоторые реалистичные изображения можно описать коэффициентами аффинных преобразований и генерировать аттрактор с любым масштабом. При таком подходе иногда удается получить довольно большие коэффициенты сжатия от 1:1000 до 1:10000. Кроме того, масштаб сгенерированных изображений с помощью СИФ может быть любым при сохранении хорошего визуального качества.

При сжатии изображений используют трехмерные сжимающие преобразования вида

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e \\ f \\ q \end{vmatrix}.$$

Здесь третья координата z соответствует значению яркости отсчета изображения.

Допустим, что подбирается первое сжимающее преобразование, которое должно описывать область изображения, например, 8x8 пикселей (рис. 2), которая называется ранговой. Для этого перебираются на кодируемом изображении все возможные области большего размера, например 16x16 пикселей (доменные), и к ним применяется сжимающее преобразование T_1 . Коэффициенты данного преобразования подбираются таким образом, чтобы сжатая область

изображения соответствовала размеру 8x8 отсчетов и располагалась на месте ранговой области. Для наилучшего соответствия сжатой доменной области ранговой необходимо перебрать все возможные варианты и среди них выбрать тот, для которого мера d является минимальной.

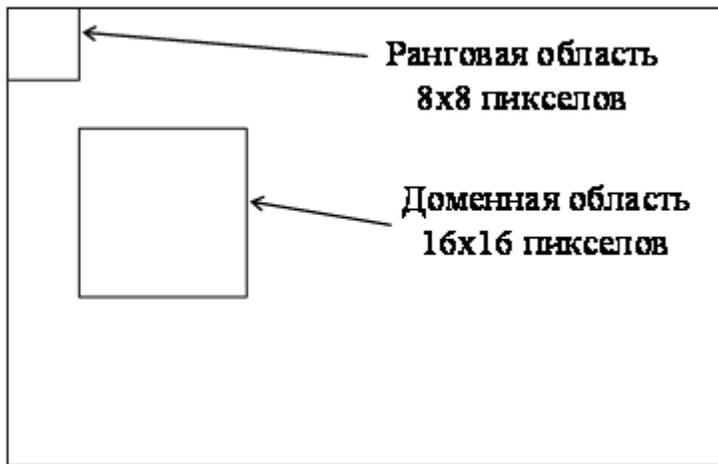


Рис. 2. Иллюстрация ранговой и доменной областей

Таким образом, целью сжатия является определение минимального числа сжимающих преобразований $T_i(\bar{x}), i = \overline{1, n}$, которые бы описывали изображение с наилучшим качеством d . Под качеством описания обычно понимают среднеквадратическую меру между исходным X и преобразованным \hat{X} изображениями:

$$d = \sqrt{\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2}$$

На сегодняшний день подбор сжимающих преобразований является основной проблемой при фрактальном сжатии изображений, т.к. всевозможный перебор вариантов даже для небольших по размерам изображений составляет астрономическое число. Поэтому на практике ограничивают число возможных переборов, например следующим образом.

В **учебном варианте алгоритма**, изложенном далее, сделаны следующие ограничения на области:

1. Все области являются квадратами со сторонами, параллельными сторонам изображения. Это ограничение достаточно жесткое. Фактически мы собираемся аппроксимировать все многообразие геометрических фигур лишь квадратами.

2. При переводе доменной области в ранговую уменьшение размеров производится ровно в два раза. Это существенно упрощает как компрессор, так и декомпрессор, т.к. задача масштабирования небольших областей является нетривиальной.

3. Все доменные блоки — квадраты и имеют фиксированный размер. Изображение равномерной сеткой разбивается на набор доменных блоков.

4. Доменные области берутся “через точку” и по X , и по Y , что сразу уменьшает перебор в 4 раза.

5. При переводе доменной области в ранговую поворот куба возможен только на 00, 900, 1800 или 2700. Также допускается зеркальное отражение. Общее число возможных преобразований (считая пустое) — 8.

6. Масштабирование (сжатие) по вертикали (яркости) осуществляется в фиксированное число раз — в 0,75.

Информацию о размере блоков можно хранить в заголовке файла. Таким образом, мы затратили менее 4 байт на одно аффинное преобразование. В зависимости от того, каков размер блока, можно высчитать, сколько блоков будет в изображении. Таким образом, мы можем получить оценку степени компрессии.

Например, для файла в градациях серого 256 цветов 512x512 пикселей при размере блока 8 пикселей аффинных преобразований будет 4096 (512/8x512/8). На каждое потребуется 3.5 байта. Следовательно, если исходный файл занимал 262144 (512x512) байт (без учета заголовка), то файл с коэффициентами будет занимать 14336 байт. Коэффициент архивации — 18 раз. При этом мы не учитываем, что файл с коэффициентами тоже может обладать избыточностью и архивироваться методом архивации без потерь, например LZW.

Отрицательные стороны предложенных ограничений:

1. Поскольку все области являются квадратами, невозможно воспользоваться подобием объектов, по форме далеких от квадратов (которые встречаются в реальных изображениях достаточно часто).
2. Аналогично мы не сможем воспользоваться подобием объектов в изображении, коэффициент подобия между которыми сильно отличается от 2.
3. Алгоритм не сможет воспользоваться подобием объектов в изображении, угол между которыми не кратен 90°.

Такова плата за **скорость компрессии** и за простоту упаковки коэффициентов в файл. Сам алгоритм упаковки сводится к перебору всех доменных блоков и подбору для каждого соответствующего ему рангового блока.

Как видно из приведенного алгоритма, для каждого рангового блока делаем его проверку со всеми возможными доменными блоками (в том числе с прошедшими преобразование симметрии), находим вариант с наименьшей мерой L2 (наименьшим среднеквадратичным отклонением) и сохраняем коэффициенты этого преобразования в файл. Коэффициенты — это (1) координаты найденного блока, (2) число от 0 до 7, характеризующее преобразование симметрии (поворот, отражение блока), и (3) сдвиг по яркости для этой пары блоков. Сдвиг по яркости вычисляется как:

$$q = \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij} \right] / n^2 ,$$

где g_{ij} — значения пикселей рангового блока (R), а d_{ij} — значения пикселей доменного блока (D). При этом мера считается как:

$$d(R, D) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (0.75r_{ij} + q - d_{ij})^2$$

Декомпрессия алгоритма фрактального сжатия чрезвычайно проста. Необходимо провести несколько итераций трехмерных аффинных преобразований, коэффициенты которых были получены на этапе компрессии.

В качестве начального может быть взято абсолютно любое изображение (например, черное), поскольку соответствующий математический аппарат гарантирует нам сходимость последовательности изображений, получаемых в ходе итераций СИФ, к неподвижному изображению (близкому к исходному). Обычно для этого достаточно 16 итераций.

Поскольку мы записывали коэффициенты для блоков R_{ij} (которые, как мы оговорили, в нашем частном случае являются квадратами одинакового размера) последовательно, то получается, что мы последовательно заполняем изображение по квадратам сетки разбиения использованием аффинного преобразования.

9.6. Фракталы в динамических системах

Можно ли получить фрактальные структуры из физических уравнений. Другими словами: могут ли привычные нам уравнения приводить к появлению фракталов? Ответ на этот вопрос положительный и связан, прежде всего, с одной из интенсивно развивающихся в последние 40 лет областей математической физики - *динамическим хаосом*.

В системах с динамическим хаосом детерминированные уравнения приводят к хаотическим решениям, хаотическим в том смысле, что в них экспоненциально быстро расходятся близлежащие первоначально траектории и возникает неустойчивость. при этом оказалось, что фракталы, как геометрические объекты, могут быть успешно применены при описании траекторий хаотических систем. Более того, можно сказать, что фракталы суть геометрические образы хаоса.

До настоящего момента мы изучали фракталы, которые являются статическими фигурами. Этот подход вполне приемлем до тех пор, пока не возникает необходимость рассмотрения таких природных явлений, как падающие потоки воды, турбулентные завихрения дыма, метеосистемы и потоки на выходе реактивных двигателей. В этих случаях один единственный фрактал соответствует моментальному снимку данного феномена. Структуры, изменяющиеся во времени, мы определяем как динамические системы. Интуитивно понятно, что динамическим соответствием фрактала является хаос. Это означает, что хаос описывает состояние крайней непредсказуемости, возникающей в динамической системе, в то время как фрактальность описывает крайнюю иррегулярность или изрезанность, присущую геометрической конфигурации.

Достаточно скоро стало ясно, что многие хаотические динамические системы, описывающие феномены окружающего нас мира, устроены очень сложно и не могут быть в полной мере представлены традиционными методами математического анализа. По-видимому, нет никакой возможности получить математические выражения для решений в замкнутом виде, даже если использовать специальные функции.

В этом направлении объектами изучения являются аттракторы динамических систем, в частности так называемые *странные аттракторы*.

Рассмотрим знаменитый пример, весьма наглядно демонстрирующий, что стоит за термином "хаотическая динамика". Эдвард Лоренц (E.N. Lorenz) из Массачусетского технологического института в 1961 году занимался численными исследованиями метеосистем, в частности моделированием конвекционных потоков в атмосфере. Он исследовал следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y), \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = \frac{dz}{dt} = -bz + xy. \end{cases} \quad (1)$$

σ, r, b

Где σ, r, b - постоянные положительные параметры. Системе Лоренца присуща существенная зависимость от начальных условий - основная черта хаотической динамики. Существенную зависимость иногда называют эффектом бабочки. Такое название относится к невозможности делать долгосрочные прогнозы погоды.

Проиллюстрируем на примерах, что подразумевается под аттрактором дифференциального уравнения. Кроме того, найдем фрактальную размерность аттракторов конкретных дифференциальных уравнений или приведем оценку этой размерности.

Пример 1. Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -x_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -2x_2. \end{cases} \quad (2)$$

Общее решение этой системы задается формулами

$$x_1(t) = c_1 \cdot e^{-t}, x_2(t) = c_2 \cdot e^{-2t}, c_1, c_2 = const. \quad (3)$$

$x_1(0)$ $x_2(0)$

Если заданы начальные условия $x_1(0)$ и $x_2(0)$, то траектория (то есть решение системы (2)), выходящая из этой точки, задается формулами

$$x_1(t) = e^{-t} \cdot x_1(0), x_2(t) = e^{-2t} \cdot x_2(0).$$

Очевидно, любая траектория при $t \rightarrow +\infty$ стремится к точке $(0, 0)$.

. В этом простейшем случае говорят, что точка является аттрактором A системы (2) (или решений системы (2)):

$$A = (0, 0)$$

. Фрактальная размерность аттрактора A

$$d_F(A) = 0$$

Пример 2. Аттрактор, являющийся предельным циклом.

Пусть дана система двух дифференциальных уравнений, которая в полярных координатах (ρ, φ) на плоскости \mathcal{R}^2 имеет вид:

$$\dot{\rho} = \rho(1 - \rho), \tag{4}$$

$$\dot{\varphi} = 1. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что

$$\varphi(t) = t + c_1. \tag{6}$$

Легко видеть, что окружность

$$\rho(t) = 1 \tag{7}$$

является решением уравнения (4). Действительно $\dot{\rho} = 0$ и правая часть уравнения (4) при $\rho = 1$ обращается в нуль:
 $\rho(1 - \rho^2)|_{\rho = 1} = 0$

Таким образом, окружность (6), (7) является решением системы (4), (5), и притом периодическим с периодом 2π . Действительно, полярная координата φ обладает этим свойством: точки с полярными координатами $(1, \varphi)$ и $(1, \varphi + 2\pi)$ изображают одну и ту же точку на окружности $\rho = 1$.

Теперь заметим, что если $(\rho(t), \varphi(t))$ - решение системы (4), (5) и $0 < \rho(t) < 1$, то из уравнения (4) следует, что $\dot{\rho}(t) = \rho(t) \cdot (1 - (\rho(t))^2) > 0$, то есть функция $\rho(t)$ возрастает, приближаясь к значению $\rho = 1$, а траектория $(\rho(t), \varphi(t)) = (\rho(t), t + c_1)$ совершает спиралеобразное движение внутри окружности $\rho = 1$ (рис.).

$$(\rho_1(t), \varphi(t)) = (\rho_1(t), t + c_1)$$

Если же решение в некоторый

$$\rho_1(t) > 1$$

момент t имеет, то, согласно уравнению (4),

$$\dot{\rho}_1(t) = \rho_1(t) \cdot (1 - (\rho_1(t))^2) < 0 \quad \rho_1(t)$$

и убывает с
 $(\rho_1(t), t + c_1)$

возрастанием t . В этом случае кривая

$$t \rightarrow +\infty \quad \rho = 1$$

спиралеобразно приближается при к окружности
извне этой окружности.

Мы показали, что все траектории системы уравнений (кроме начала

$$\rho = 0$$

координат, являющегося неподвижной точкой системы (4),

$$t \rightarrow +\infty$$

(5)) притягиваются (стремятся) при к окружности

$$\{\rho = 1\} = A$$

. Поэтому эта окружность называется предельным циклом системы (4), (5). Такой предельный цикл (притягивающий) называют аттрактором системы (4), (5). Фрактальная размерность этого

$$d_F(A) = 1$$

аттрактора равна 1:

Пример 3. Оценка фрактальной размерности аттрактора системы уравнений Лоренца.

Вернемся к системе (1). можно показать, что любые решения

$$u(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \geq 0$$

системы () при ограничены в трехмерном пространстве. Точнее имеет место оценка:

$$|u(t)|^2 \leq e^{-2\lambda t} \cdot |u(0)|^2 + c \cdot (1 - e^{-2\lambda t}), \quad (8)$$

где $|u|^2 = |x|^2 + |y|^2 + |z|^2$, $l = \min(1, \sigma)$, c -
 некоторая постоянная, выражающаяся через l, b и σ . Из (8) следует,
 $|u(0)| \leq M$
 что при ограниченных начальных условиях $u(0)$,
 траектории (решения) системы (1) выходящие из $u(0)$
 $t \geq 0$
 ограничены при всех $t \geq 0$:

$$|u(t)|^2 \leq R(M) = M^2 + c, \forall t \geq 0. \quad (9)$$

Следуя общей теории аттракторов дифференциальных уравнений из (8), (9) выводится, что система уравнений Лоренца (1) обладает аттрактором A . Точнее, существует такое замкнутое ограниченное множество A в \mathcal{R}^3 , которое притягивает любые семейства

$|u(0)|^2 \leq M_1$
 траекторий системы (1). Это означает, что при M_1 (где M_1 — любая фиксированная константа) соответствующее таким $\{u(0)\}$ семейство траекторий $\{u(t)\}$ $t \rightarrow +\infty$ стремится к множеству A , называемому аттрактором: $\{u(t)\} \rightarrow A$ $t \rightarrow +\infty$ при M_1 .

Доказано, что например при $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3$ значениях σ, r, b фрактальная размерность

$$d_F(A) \leq 2,538\dots$$

В таких ситуациях (то есть при большом дробном значении фрактальной размерности аттрактора) говорят, что наблюдается явление турбулентности.

Пример 4. Модель Энона. (Henon M.).

Модель (отображение) Энона с дискретным временем задается системой:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь x_n и y_n - динамические переменные, n играет роль времени, a, b - параметры системы. Эта модель может быть получена при рассмотрении динамики ротатора с затуханием при воздействии на него периодических толчков.

Оказалось, что, начиная с некоторых критических значений коэффициентов a и b , в системе возникает хаотическая динамика, а сами полученные наборы точек обнаруживают самоподобную структуру. Дан весь аттрактор Энона при начальных условиях $x_0 = 1, y_0 = -0,1$

. Выделенный прямоугольник дан в увеличенном виде. Он как бы состоит из трех групп, каждая из которых содержит три, две и одну линии. Еще раз повторив процедуру увеличения убеждаемся в существовании самоподобия аттрактора Энона.

Этот аттрактор имеет дробную размерность

$$d_F(A) \approx 1,26 \dots$$

при выбранных нами условиях.

9.7. Проблема Кэли

В 1879 году Артур Кэли поставил задачу итерирования комплексных функций, которая позднее стимулировала исследования Гастона Жюлиа по проблемам теории множеств, названных теперь его именем. Проблема Кэли заключается в исследовании сходимости классического алгоритма Ньютона нахождения кубических корней, но при условии, что вещественные числа заменяются на комплексные.

Метод Ньютона для нахождения вещественного корня $f(x)$ (его также часто называют методом касательных) заключается в следующем. Выберем начальное приближение x_0 , вычислим точки

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

и найдем предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Предполагается, что f, f', f'' существуют и непрерывны в окрестности нуля, скажем при $x = c$.

Если x_0 находится достаточно близко к c и если $f'(c) \neq 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$$

Этот метод не менее эффективен и для комплексных чисел. Это значит, что, стартовав в непосредственной близости от значения корня

$$f(z) = 0$$

уравнения, мы используя итерационный алгоритм

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)},$$

получим последовательность комплексных чисел, быстро сходящуюся к этому корню. возникает правомерный вопрос, а что будет, если

$$z_0$$

начальная точка выбрана в плоскости комплексных чисел не вблизи от корня, а произвольным образом?

$$f(x) = x^3 - 1$$

Для нули равны кубическим корням из 1, и итерации Ньютона принимают вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^2}.$$

Если предположил исследовать поведение этих итераций для

комплексных z_n :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^3 - 1}{3z_n^2}. \quad (1)$$

Имеются три кубических корня из 1, а именно,

$$w_1 = 1, w_2 = 1 + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad w_2 = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

и

Область

w_i $A(w_i) = \{z \in C |$
 притяжения для корня w_i есть множество
 $z_0 = z \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w_i\}$
 если $z_0 = z$, то

$$A(w_1), A(w_2), A(w_3)$$

Кэли поставил задачу описания областей

Уравнение (1) является результатом итерирования функции

$$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \quad (2)$$

Нули $f(z)$ являются неподвижными точками $g(z)$, и так как

$$g''(z) = \frac{f(z) \cdot f''(z)}{(f'(z))^2},$$

они сверхпритягивающие.

Как и в случае вещественных итераций, если начальная точка z_0
 находится достаточно близко к корню w_i , то ньютоновские итерации
 $A(w_i)$
 сходятся к этому корню. Таким образом, каждая область
 w_i
 содержит окрестность w_i . Но какую часть комплексной плоскости
 $A(w_i)$
 занимает $A(w_i)$ и какова ее геометрия? Ответ на этот вопрос крайне
 нетривиален.

Рассмотрим соответствующую задачу для квадратных корней. В этом

$$f(z) = z^2 - 1$$

случае

и ньютоновские итерации имеют вид:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2z_n}.$$

Если z_n лежит в правой полуплоскости, то $z_n \rightarrow +1$ при $n \rightarrow \infty$, а если в левой полуплоскости, то $z_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, за исключением начальных точек z_0 ,

которые равноудалены от двух корней, z_n сходятся к корню, ближайшему к z_0 . Если z_0 лежит на мнимой оси, то в этом случае итерации не сходятся.

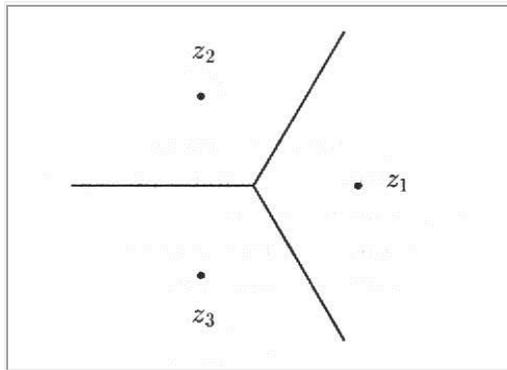
$$z^2 - 1$$

По аналогии со случаем $z^2 - 1$ можно предположить, что в случае

$$z^3 - 1$$

итерированные значения z_n , вычисленные по формуле (1),

сходятся к кубическому корню, ближайшему к z_0 , если такой ближайший корень существует. Таким образом, ответ на вопрос Кэли предположительно выглядит как пирог, разделенный на три равные части (рис.1). Как ни странно, это предположение неверно.



$$g(z) = z - (z^3 - 1)/(3z^2)$$

Теорема. Пусть $z^3 - 1$ - функция Ньютона для g .

Тогда множество Жюлиа для g имеет вид:

$$J(g) = dA(1) = dA(1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = dA(1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (3)$$

$$J(g)$$

то есть $J(g)$ является границей каждой из областей притяжения для

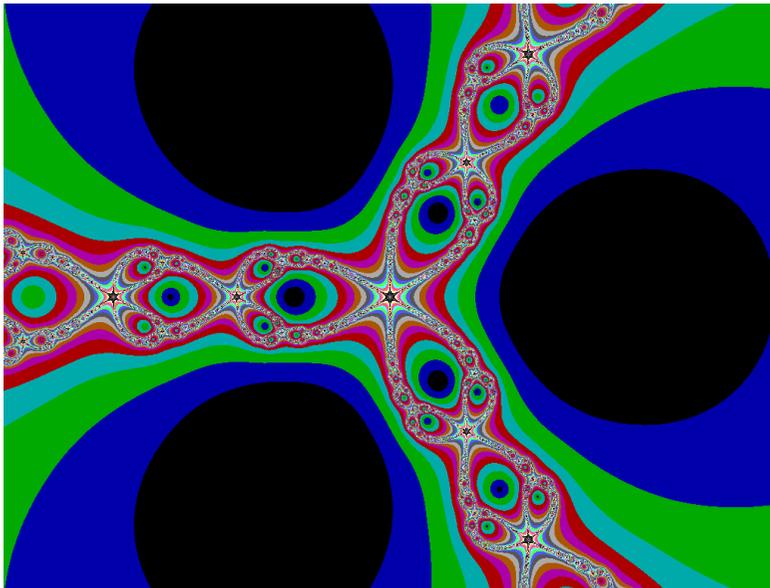
$$1, -1 \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

трех притягивающих неподвижных точек:

Теорема говорит нам о том, что ответ на вопрос Кэли отличается от того, что изображено на рис.1. Кроме начала координат точки на границе любой области притяжения имеют малые окрестности, пересекающиеся ровно с двумя областями. Но выражение (3) говорит о том, что в произвольной окрестности каждой граничной точки любой из этих областей должны находиться точки, принадлежащие всем трем

областям. Правильное изображение трех бассейнов притяжения для $g(z)$

было получено только с помощью компьютера (рис.2).



Граница областей притяжения состоит из сильно переплетенных самоподобных фрактальных структур.

Иными словами можно задать вопрос: как закрасить плоскость тремя красками, чтобы на границе каждой цветной области существовали точки двух других цветов, которые были бы расположены произвольно

$g(z)$

близко? Ответ мы получим, раскрасив области притяжения для разными красками.

10. Синтез фракталов

10.1. L - системы

Существуют два основных способа построения фракталов. Первый способ - использование L-систем (от имени Lindenmayer), второй способ - применение системы IFS (iterated function systems). L-система - это грамматика некоторого языка (достаточно простого), которая описывает инициатор и преобразование, выполняемое над ним, при помощи средств, аналогичных средствам языка Лого (аксиоматическое описание простейших геометрических фигур и допустимых преобразований на плоскости и в пространстве). Приведем фрагмент программы, задающей построение кривой Кох в формате L-системы для программы FRACTINT:

```
Koch {  
Angle 6 // Задается угол поворота  $360 / 6 = 60$ .  
Аxiom F // Это инициатор в виде отрезка (F - вперед).  
F=F+F--F+F // Функция (+ влево, - вправо).  
}
```

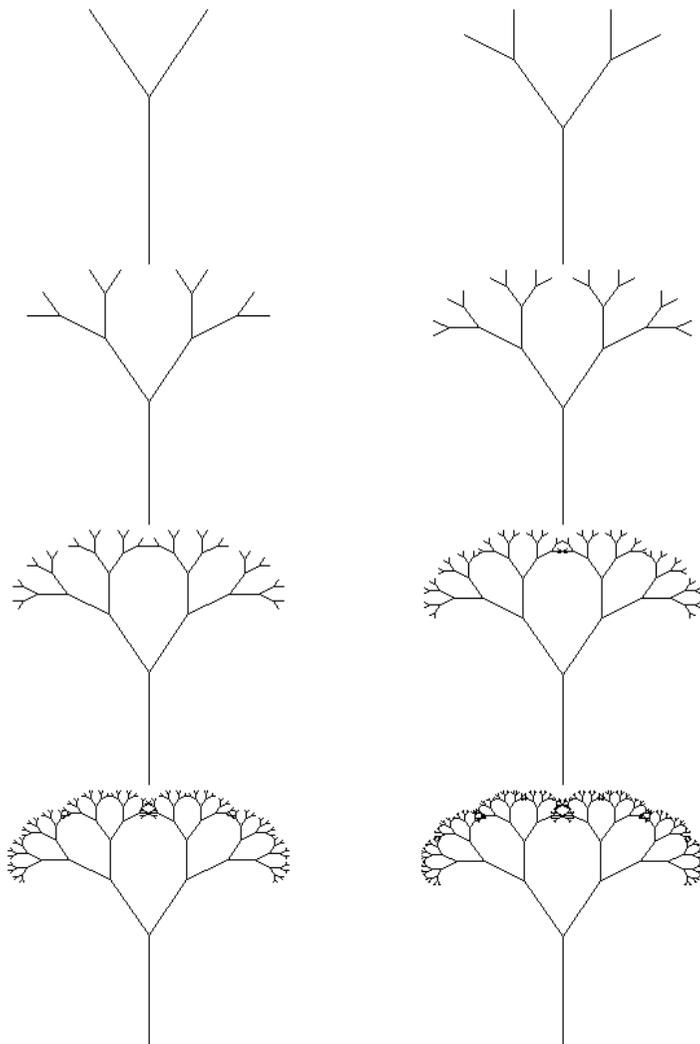


Рис. 1. Пример построения дерева с помощью L - системы

Подобные L-системы применяются в пакете Autodesk 3D Studio для описания цветов и других растений (рис. 1, 2).



Рис. 2. Дерево в пространстве

Приведем фрагмент программы, задающей в формате L-систем для программы FRACTINT:

```
Tree1 { ; Adrian Mariano
; from The Fractal Geometry of Nature by Mandelbrot
angle=12;
axiom +++FX
X=@.6[-FX]+FX
}
```

Отметим, что L-системы предназначены для генерирования предфракталов заданного порядка. Это свойство отличает их от IFS, которые предназначены для построения самих фракталов.

10.2. Системы итерирующих функций (IFS)

Система итерирующих функций - это совокупность сжимающих аффинных преобразований. Как известно, аффинные преобразования включают в себя масштабирование, поворот и параллельный перенос. Аффинное преобразование считается сжимающим, если коэффициент масштабирования меньше единицы.

Рассмотрим подробнее построение кривой Кох с использованием аффинных преобразований. Каждый новый элемент кривой содержит четыре звена, полученных из образующего элемента использованием масштабирования, поворота и переноса.

1. Для получения первого звена достаточно сжать исходный отрезок в три раза. Следует отметить, что то же масштабирование применяется для всех звеньев.
2. Следующее звено строится с использованием всех возможных преобразований, а именно: сжатие в три раза, поворот на -60° и параллельный перенос на $1/3$ по оси X.
3. Третье звено строится аналогично второму: сжатие в три раза, поворот на 60° , параллельный перенос на $2/3$ по оси X.
4. Последнее звено: сжатие в три раза, параллельный перенос на $2/3$ по оси X.

В дальнейшем правила построения кривой Кох будем называть IFS для кривой Кох.

Теперь мы можем найти систему итерирующих функций для описания кривой Кох. Осталось только произвести суперпозицию аффинных преобразований - масштабирования, поворота и параллельного переноса.

Из курса линейной алгебры известна формула вычисления новых координат x', y' при аффинных преобразованиях:

$$\begin{aligned}x' &= x * a - y * b + e \\y' &= x * c + y * d + f\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}a &= \cos(\alpha) * \text{scale}_x, \\b &= \sin(\alpha) * \text{scale}_x, \\c &= \sin(\alpha) * \text{scale}_y, \\d &= \cos(\alpha) * \text{scale}_y, \\e &= \text{move}_x, \\f &= \text{move}_y,\end{aligned}$$

где

scale_x - масштабирование по оси X;
 scale_y - масштабирование по оси Y;
 α - угол поворота;
 move_x - параллельный перенос по оси X;
 move_y - параллельный перенос по оси Y.

Полученные коэффициенты a, b, c, d, e, f для каждого звена и составят требуемую систему итерирующих функций.

Вычислим коэффициенты аффинного преобразования IFS для кривой Кох.

1. Для первого звена коэффициенты аффинного преобразования будут следующими:

$a = 0.3333, b = 0.0000, c = 0.0000, d = 0.3333, e = 0.0000, f = 0.0000$.
Полученное аффинное преобразование является масштабированием на коэффициент $1/3=0,3333$.

2. Вычислим коэффициенты преобразования для второго звена: $a = 0.1667$, $b = -0.2887$, $c = 0.2887$, $d = 0.1667$, $e = 0.3333$, $f = 0.0000$.

3. Коэффициенты для третьего звена будут такими: $a = -0.1667$, $b = 0.2887$, $c = 0.2887$, $d = 0.1667$, $e = 0.6666$, $f = 0.0000$.

4. И наконец, коэффициенты преобразования для последнего звена: $a = 0.3333$, $b = 0.0000$, $c = 0.0000$, $d = 0.3333$, $e = 0.6666$, $f = 0.0000$. Коэффициенты для первого и последнего звеньев кривой Кох практически идентичны и отличаются только параллельным переносом по оси X (коэффициент e).

Второе и третье преобразования включают в себя не только масштабирование и перенос, но и поворот на 60° и -60° . Здесь коэффициенты вычисляются так:

$$\begin{aligned} 0.1667 &= \cos(60) * 1/3, \\ -0.2887 &= -\sin(60) * 1/3. \end{aligned}$$

Приведем матрицу вычисленных коэффициентов, задающих кривую Кох в формате IFS для программы FRACTINT.

Koch						{
0.3333	0.0000	0.0000	0.3333	0.0000	0.0000	0.25
0.3333	0.0000	0.0000	0.3333	0.6666	0.0000	0.25
0.1667	-0.2887	0.2887	0.1667	0.3333	0.0000	0.25
-0.1667	0.2887	0.2887	0.1667	0.6666	0.0000	0.25
						}

Вычисление первых шести параметров было проведено выше. Значение последнего (седьмого) параметра каждого преобразования пропорционально площади, занимаемой звеном. Сумма последних параметров для всех преобразований равна единице. В нашем примере размеры звеньев равны, поэтому седьмой параметр равен $1/4=0.25$ для всех звеньев. В том случае, если оценить приблизительно размеры не удастся, можно использовать формулу вычисления площади $p = \text{abs}(a * d - b * c)$. Следует учитывать то, что эта формула дает не нормализованный результат. Поэтому нам придется еще приводить сумму к единице. Проверим формулу на нашем примере, используя

коэффициенты, задающие кривую Кох в формате IFS для программы FRACTINT:

$$\begin{aligned} 1: & 0.3333 * 0.3333 - 0.0000 * 0.0000 = 0.111 \\ 2: & 0.3333 * 0.3333 - 0.0000 * 0.0000 = 0.111 \\ 3: & 0.1667 * 0.1667 + 0.2887 * 0.2887 = 0.111 \\ 4: & -0.1667 * 0.1667 - 0.2887 * 0.2887 = 0.111 \end{aligned}$$

Теперь подбором нормирующего множителя можно нормализовать значение седьмого параметра до значения 0.25. Седьмой параметр применяется при построении фрактала с использованием IFS. Если для построения фрактала используем систему итерирующих функций, получаем изображение, детализировка которого ограничена только разрешением устройства отображения, в отличие от построения, основанного на L-системе, где точность зависит от заданного порядка предфрактала. Чтобы получить высокое разрешение с использованием L-систем, необходимо задавать большой порядок предфрактала. Но так как построение основано на рекурсивном алгоритме, соответственно получается большая глубина рекурсии и, как следствие, замедление построения.

На этом можно было и завершить описание IFS. Все необходимое для получения систем, итерирующих функций, изложено, а строить фракталы по IFS можно с использованием программы FRACTINT. Метод, основанный на IFS, в отличие от L-систем считается перспективным методом синтеза фракталов, а также сжатия изображений. Рассмотрим, каким образом FRACTINT и аналогичные программы используют IFS для построения фракталов.

Для синтеза фрактала выбирается начальная точка, к которой применяется случайным образом выбранное из IFS преобразование, в результате чего точка перемещается в другой конец экрана. Эта операция повторяется много раз (достаточно 100 итераций), и через некоторое время точка начинает блуждать по аттрактору, (**аттрактор - множество всех возможных траекторий**), который и будет представлять собой изображение фрактала. Каждое новое положение точки окрашивается цветом, отличным от фона. Существует теорема, доказывающая, что полученный аттрактор будет замкнутым. Для того, чтобы блуждающая точка окрашивала новые пиксели, а не блуждала по старым, используют седьмой параметр, который представляет собой вероятность появления конкретного аффинного преобразования из набора преобразований IFS. Если выбрать начальную точку так, чтобы она сразу оказалась на аттракторе, то она начинает блуждать в области этого аттрактора, не перемещаясь в другие области экрана.

Рассматривая каждое преобразование в отдельности, можем заметить, что где бы мы ни начинали, после нескольких итераций, точка перестанет двигаться по экрану. Точка остановки называется неподвижной точкой - это решение системы линейных уравнений двух переменных, которое находится методом простой итерации. Неподвижная точка каждого преобразования входит в состав аттрактора. Поэтому за начальную точку при построении фрактала можно взять неподвижную точку первого преобразования из набора IFS. На рис. 3 изображена кривая Кох, построенная при помощи метода IFS.

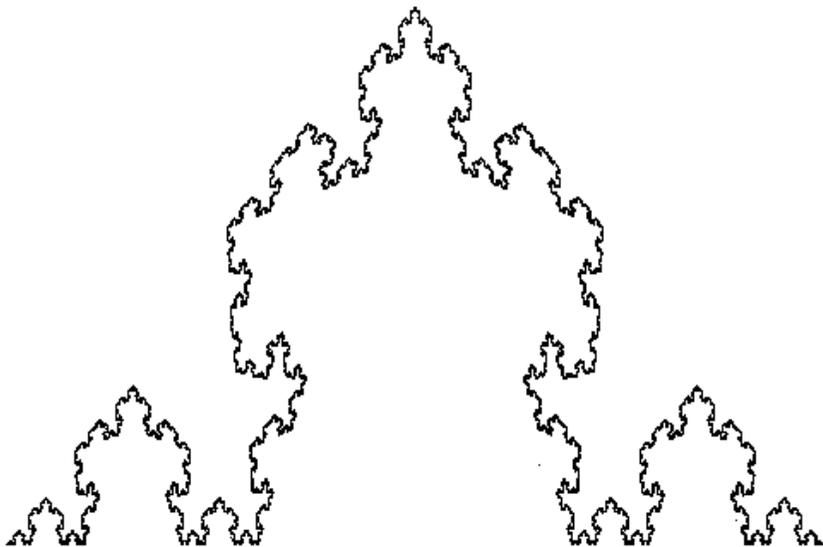


Рис. 3. Изображение кривой Кох, полученное с использованием IFS

Увеличивая разрешение устройства отображения или масштаб, можно увидеть новые части фрактала, которые будут похожи на весь фрактал.

Это самый важный признак фрактала - самоподобность. На рис. 4 показано масштабирование треугольника Серпинского.

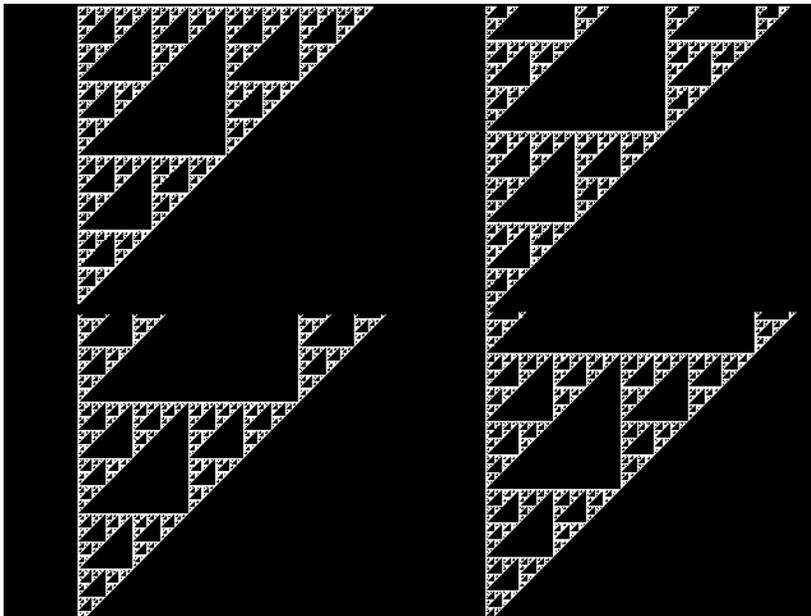


Рис. 4. Масштабирование треугольника Серпинского

10.3. Фрактальный морфинг

Если есть описание еще одного фрактала в формате IFS, например листа папоротника, можно произвести **морфинг** (непрерывное преобразование одного в другой). Приведем фрагмент программы, задающий лист папоротника в формате IFS в пакете FRACTINT (см. рис. 5.).



Рис. 5. Изображение листа папоротника, полученное с помощью IFS

Fern	0	0	0	.16	0	0	{
	.85	.04	-.04	.85	0	1.6	.85
	.2	-.26	.23	.22	0	1.6	.07
	-.15	.28	.26	.24	0	.44	.07
							}

Для осуществления морфинга достаточно линейно интерполировать элементы одной матрицы в те же элементы другой и строить фракталы для каждого из промежуточных состояний. Чтобы получить лучший визуальный эффект, нужно продумать положение строк в матрицах.

При выводе одного фрактала этот факт не играет роли. При построении разных фракталов с использованием IFS можно отметить, что они все имеют разные размеры, и поэтому нуждаются в масштабировании (см. приложение). На рис. 6 приведен пример фрактального морфинга.



Рис. 6. Пример фрактального морфинга "дерева" в "лист папоротника"

10.4. Фрактальное сжатие изображений

При помощи фракталов можно сжимать произвольные изображения с некоторой потерей качества, аналогично сжатию JPEG. Правда, фрактальное сжатие дает лучшие результаты. Методы компрессии, основанные на RLE, Huffman или LZW, не учитывают природы сжимаемых данных и поэтому дают неудовлетворительные результаты при обработке изображений. При фрактальном сжатии изображение переводится в формат IFS, который значительно экономнее, чем просто **BITMAP** или **LZW**.

Сжатие JPEG основано на дискретном синусно-косинусном преобразовании (дискретное преобразование Фурье), которое переводит изображение в амплитудно-фазовую форму. Искажения в области высоких частот не сильно влияют на качество исходных изображений, поэтому их частично отбрасывают, а частично фильтруют НЧ-фильтром с последующим сжатием при помощи RLE и тому подобных методов. Поэтому метод JPEG дает плохие результаты на изображениях, содержащих тонкие линии (текст или чертежи). Для того, чтобы получить прямоугольный сигнал, а тонкая линия именно таким сигналом и является, необходимо использовать область высоких частот, которые в нашем случае фильтруются, подвергаясь при этом искажению.

Основная проблема фрактального сжатия - это то, что компрессия-декомпрессия производится быстро и однозначно, в то время как прямая процедура требует от машины больших интеллектуальных возможностей. Правильное сжатие - это серьезная задача, решение которой можно найти в науке о распознавании образов.

Сжатие происходит следующим образом. Изображение разбивается на части множеством R и покрывается множеством D . Причем элементы множества D больше по площади, чем R . Для каждого элемента R_i перебираются все элементы множества D и строится аффинное преобразование $R(i) \rightarrow D(j)$. Из всех преобразований выбирается одно, которое происходит с наименьшей погрешностью. Аффинное преобразование выполняется по трем координатам - X , Y , Цвет. Приведем это преобразование:

$$\begin{matrix} x & a & b & 0 & x & e \\ y & c & d & 0 & * & y + f \\ c & 0 & 0 & s & c & o \end{matrix}$$

a, b, c, d, e, f - коэффициенты преобразовани на плоскости.

s - контрастность.

o - яркость.

Остальные коэффициенты равны 0, потому что нет необходимости связывать изменение цвета с преобразованием координат. От числа преобразований, то есть мощности множества R, зависит степень компрессии, ведь на каждое преобразование требуется 8 чисел. Множество таких преобразований и составляет систему итерирующих функций

Разбиение на R и покрытие D являются самой сложной частью алгоритма. В простейшем случае это делается так: изображение разбивают регулярной сеткой R(i) по 8 x 8 пикселов. Для каждого R(i) перебирают все возможные D(j) по 16 x 16 (причем есть 8 вариантов для каждого квадрата - 4 поворота на 90° и зеркальная симметрия). Для каждого R(i) вводят свое лучшее преобразование, а потом ищут минимальное покрытие исходного изображения из имеющихся D(j). Оставляют только те преобразования, которые нужны для минимального покрытия.

Декомпрессия производится следующим образом. Выбирают начальное изображение, из которого будут строить оригинал. Самое удивительное, что от выбора начального изображения меняется только скорость стабилизации изображения, то есть время декомпрессии. В настоящее время не известны способы оптимального выбора инициатора, поэтому заполним его случайными числами или константой. К каждому элементу множества R (то есть квадрату 8x8 из инициатора) применяют случайно выбранное аффинное преобразование из имеющейся системы функций. В результате такого действия элементы изображения копируются в другие части экрана с изменением ориентации, яркости и контраста. После того, как все R(i) перебраны, начинаем все сначала. По теореме о системе сжимающих аффинных преобразований изображение будет стремиться к стабильности. Обычно достаточно 10.. 20 итераций.

При компрессии можно не сохранять оригинальные размеры изображения, достаточно просто запомнить их соотношение. А при декомпрессии - задавать те размеры, которые нам больше подходят. Такая возможность позволяет решить задачу экстраполяции исходного изображения. При установке новых размеров, превышающих старые, в новое изображение добавятся элементы, подобные другим элементам изображения. И если обрабатывается природный объект (например гранитный камень), то подмена не будет заметна.

Программа фрактального морфинга

Здесь приведена программа фрактального морфинга, состоящая из двух файлов - IFS.CC и PTR.H. К ней приложен файл данных IFS.IFS, в котором находятся описания нескольких фракталов в формате FRACTINT. При запуске программа строит изображение первого фрактала и ожидает нажати клавиш '+' или '-', с помощью которых можно перейти к изображению второго фрактала и обратно за 10 шагов. Имена фракталов передаются в командной строке. Например:

```
C:\>morph fern tree
```

Для компиляции использовался компилятор Watcom C++/32 ver 10. Переделка программы для других компиляторов вряд ли добавит кому-то проблем.

Ключевая процедура программы - `render()`, строит изображение фрактала по IFS. Процедура `scale()` аналогична предыдущей, только она не рисует, а формирует масштабные коэффициенты. Эти функции пользуются подпрограммами `root()` - нахождение неподвижной точки методом простой итерации и `affine()` - аффинное преобразование координат. `Loadifs()` - считывает описание фрактала в текстовом формате программы FRACTINT. Процедура `morph()` производит линейную интерполяцию между двумя IFS.

Кроме литературы были использованы программы:

FRACTINT - программа представляет коллекцию средств для синтеза всевозможных фракталов;

Vista Pro - детально проработанная программа для синтеза ландшафтов, состоящих из гор, долин, морей, деревьев и облаков;

Planet Generator - небольшая программа, которая с помощью простых средств строит изображения "лунных" пейзажей;

Generato - комплекс программ, предназначенный для тестирования трассировщиков лучей, где меня интересовал только синтезатор деревьев;

POLY Ray - трассировщик лучей (работает быстрее, чем POV Ray).

Программа синтеза фракталов.

```
//
// IFS morph.
//
// morph.cc
//
// (C) 1996 Artyom Sunduchkov.
//
#include "ptr.h"
#include <stdio.h>
#include <bios.h>
#include <graph.h>
#include <stdlib.h>
#include <ctype.h>
#include <string.h>
#define max(a,b) ((a)>(b))? (a):(b)
#define min(a,b) ((a)>(b))? (b):(a)
short MX, MY;
float min_x, min_y, delta_x, delta_y;
void root( float* col, float& x, float& y );
void affine( float& x, float& y, float* col );
short loadifs( float* ifs, char* name );
void scale( float* ifs, short n );
void render( float* ifs, short n );
void morph( float* ifs, float* ifs1, float* ifs2, short n, float
phase );
void main( int argc, char** argv )
{ printf( "\n+-----+\n"
"| >>> FRACTAL <<< morph.  |\n"
"|                               |\n"
"| (C) 1996 Artyom Sunduchkov. |\n"
"+-----+\n\n" );
```

```
if( argc < 3 ) {

printf( "Use: morph <fractal 1> <fracatal 2>\n" );
return; }

float ifs1[ 4*7 ], ifs2[ 4*7 ];
if( !loadifs( ifs1, argv[ 1 ] ) || !loadifs( ifs2, argv[ 2 ] )
)
{ printf( "Can't load fractals.\n" ); return;

}

_setvideomode(          _VRES16COLOR          );
if( _grstatus() != _GROK ) return;

videoconfig vc;
_getvideoconfig( &vc );
MX = vc.numxpixels - 1;
MY = vc.numypixels - 1;
_setcolor( 10 );
float min_x, min_y, delta_x, delta_y;
float phase = 0.0, df = 0.0;
float ifs[ 4*7 ];
short quit = 0;
while( !quit )
{ morph( ifs, ifs1, ifs2, 4, phase ); scale( ifs, 4 );
_clearscreen( 0 ); render( ifs, 4 );

switch( _bios_keybrd( 0 ) )
{ case 283: quit = !0;

break; case 18989: df = -0.1;

break; case 20011: df = 0.1;

break; default: df = 0.0;

}
phase += df; }
```

```
_setvideomode( _TEXT80 ); } // main( ).
short loadifs( float* ifs, char* name )
{ FilePtr fractals( "IFS.IFS", "rt" ); if( !fractals ) {

printf( "Can't open file IFS.IFS\n" );
return 0; }

char a;
char name0[ 256 ];
do
{ while( !isalpha(a = fgetc(fractals)) && a != '*' ); if( a ==
'*' ) {

printf( "Fractal %s not found.\n", name );
return 0; } ungetc( a, fractals ); fscanf( fractals,
"%s", name0 );
} while( strcmp( name, name0 ) );
while( ((a = fgetc(fractals)) != '{') && a != EOF );
if(a != '{')
{ printf( "Syntax error near %s.\n", name ); return 0;

}
short n = 0;
float* col = ifs;
while( fscanf( fractals, " %f %f %f %f %f %f %f\n",

&col[0], &col[1], &col[2], &col[3], &col[4], &col[5],
&col[6]) == 7)
{ col += 7; ++n;

}
return n; } // loadifs( ).
//
// Аффинное преобразование координат.
//
void affine( float& x, float& y, float* col )
{ float nx; nx = x*col[ 0 ] + y*col[ 1 ] + col[ 4 ]; y = x*col[
2 ]
+ y*col[ 3 ] + col[ 5 ]; x = nx;
```

```
    }
    //
    // Нахождение неподвижной точки.
    //
    void root( float* col, float& x, float& y )
    { x = y = 1.0; for( short i = 0; i < 100; ++i )

        affine( x, y, col ); }
    //
    // Линейная интерполяция между двумя IFS.
    //
    void morph( float* ifs, float* ifs1, float* ifs2, short n, float
    phase )
    { for( short j = 0, k = 0; j < n; ++j )

        for( short i = 0; i < 7; ++i, ++k ) ifs[ k ] =
        (1-phase)*ifs1[ k ] + phase*ifs2[ k ];
    } // morph( ).
    //
    // Итеративная визуализация IFS
    // с использованием коэффициентов масштабирования.
    //
    void render( float* ifs, short n )
    { float x, y;

        root( ifs, x, y );
        srand( 0 );
        for( long i = 0; !_bios_keybrd( 1 ); ++i )
        { float k = rand( ) / (float)RAND_MAX; float* col = ifs;
          float
          p = 0; for( short j = 0; j < n-1; ++j, col += 7 ) {

            p += col[ 6 ];
            if( k <= p ) break;

          }
          affine( x, y, col );
          _setpixel( (x-min_x)/delta_x*MX, MY-(y-
          min_y)/delta_y*MY
          ); }
```

```
} // render().
//
// Нахождение коэффициентов для масштабирования на
// экране.
//
void scale( float* ifs, short n )
{ float max_x, max_y;

max_x = -1e10,
min_x = 1e10,
max_y = -1e10,
min_y = 1e10;
float x, y;
root( ifs, x, y );
srand( 0 );
for( long i = 0; i < 10000; ++i )
{ float k = rand() / (float)RAND_MAX; float* col = ifs;
float
p = 0; for( short j = 0; j < n-1; ++j, col += 7 ) {

p += col[ 6 ];
if( k <= p ) break;

}
affine( x, y, col );
max_x = max( x, max_x );
min_x = min( x, min_x );
max_y = max( y, max_y );
min_y = min( y, min_y ); }

delta_x = max_x - min_x;
delta_y = max_y - min_y;
} // scale().
//
// FilePtr, BytePtr, ...
//
// ptr.h
//
// (C) 1995 Artyom Sunduchkov.
//
```

```
#ifndef __PTR__
#define __PTR__
#include <stdio.h>
typedef unsigned char byte;
template <class T> class Ptr
{ public:

Ptr( long size ) { data = new T[ size ]; }
Ptr( T* p ) { data = p; }
Ptr() { data = NULL; }
void init( long size ) { data = new T[ size ]; }
void done() { delete data; data = NULL; }
~Ptr() { done(); }
operator T*() { return data; }
private: T* data;

};

typedef Ptr <byte > BytePtr;
typedef Ptr <short> ShortPtr;
typedef Ptr <long > LongPtr;
typedef Ptr <float> FloatPtr;
class FilePtr
{ public:

FilePtr( const char* n, const char* a )
{ ptr = fopen( n, a );

}
FilePtr( FILE* p ) { ptr = p; }
~FilePtr() { fclose( ptr ); } operator
FILE*() { return ptr; }
private: FILE* ptr;

};
#endif
//
// Фракталы в формате FRACTINT
//
// ifs.ifs
//
```

// Все IFS приведены к 4 функциям.

//

curl { 0.04 0.22 0.31 -0.03 0.63 -1.74 0.13

-0.02 0.00 -0.32 0.26 -0.17 -1.35 0.01 0.79 0.06 -0.03 0.73 -
0.02

1.03 0.74

-0.03 -0.30 0.35 -0.04 -0.68 -0.94 0.12 }

davis { -0.50 -0.30 0.30 -0.50 -6.07 -3.58 0.33 -0.50 -0.29
0.29

-0.50 5.92 3.50 0.33

0.00 -0.59 0.59 0.00 -0.09 -0.04 0.34 .0 .0 .0 .0 .0 .0

}

leaf { 0.14 0.01 0.00 0.51 -0.08 -1.31 0.06 0.43 0.52 -0.45
0.50

1.49 -0.75 0.37 0.45 -0.49 0.47 0.47 -1.62 -0.74 0.36 0.49
0.00 0.00

0.51 0.02 1.62 0.21

}

binary { .5 .0 .0 .5 -2.563477 -0.000003 .333333 .5 .0 .0 .5
2.436544 -0.000003 .333333 .0 -.5 .5 .0 4.873085 7.563492
.333333 .0

.0 .0 .0 .0 .0 }

coral { .307692 -.531469 -.461538 -.293706 5.401953

8.655175 .40

.307692 -.076923 .153846 -.447552 -1.295248 4.152990 .15
.000000

.545455 .692308 -.195804 -4.893637 7.269794 .45 .0 .0 .0 .0
.0 .0

.0 }

crystal { .696970 -.481061 -.393939 -.662879 2.147003

10.310288

.747826 .090909 -.443182 .515152 -.094697 4.286558

2.925762 .252174

.0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0

.0 .0 .0 }

dragon { .824074 .281482 -.212346 .864198 -1.882290 -
0.110607
.787473 .088272 .520988 -.463889 -.377778 0.785360
8.095795 .212527
.0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0
.0 .0 .0 }

fern { 0 0 0 .16 0 0 .01

.85 .04 -.04 .85 0 1.6 .85
.2 -.26 .23 .22 0 1.6 .07 -.15 .28 .26 .24 0 .44 .07 }

floor { .0 -.5 .5 .0 -1.732366 3.366182 .333333 .5 .0 .0 .5
-0.027891 5.014877 .333333 .0 .5 -.5 .0 1.620804 3.310401
.333333 .0
.0 .0 .0 .0 .0 .0 }

koch { .307692 -.000000 .000000 .294118 4.119164
1.604278 .2 .192308
-.205882 .653846 .088235 -0.688840 5.978916 .3 .192308
.205882
-.653846 .088235 0.668580 5.962514 .3 .307692 -.000000
.000000
.294118 -4.136530 1.604278 .2 }

spiral { .787879 -.424242 .242424 .859848 1.758647
1.408065 .895652

-.121212 .257576 .151515 .053030 -6.721654 1.377236
.052174
.181818 -.136364 .090909 .181818 6.086107 1.568035
.052174 .0 .0
.0 .0 .0 .0
}

swirl5 { .745455 -.459091 .406061 .887121 1.460279
0.691072 .912675

-.424242 -.065152 -.175758 -.218182 3.809567 6.741476
.087325 .0

.0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0 .0

}
tree { 0 0 0 .5 0 0 .05

.42 -.42 .42 .42 0 .2 .4
.42 .42 -.42 .42 0 .2 .4 .1 0 0 .1 0 .2 .15

}
triangle { .5 0 0 .5 0 0 .33 .5 0 0 .5 0 1 .33 .5 0 0 .5 1 1 .34 .0
0 0 .0 0 0 .00 }

triangle2 { -0.40 0.00 0.00 -0.40 0.24 0.37 0.23

0.50 0.00 0.00 0.50 -1.37 0.25 0.36
0.21 0.00 0.00 0.21 1.00 1.47 0.06
0.50 0.00 0.00 0.50 0.76 -1.16 0.36 }
zigzag2 { -.632407 -.614815 -.545370 .659259 3.840822
1.282321
.888128 -.036111 .444444 .210185 .037037 2.071081
8.330552 .111872

.0 .0 .0 .0 .0 .0 .0
.0 .0 .0 .0 .0 .0 .0

}

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении собраны сложные формулы, математические определения и иные сведения, не вошедшие в основной текст; сюда же помещены некоторые математические и другие дополнения.

Аффинность (само-) и подобие

Термины самоподобный и самоаффинный (неологизм) применяются в тексте и к ограниченным, и к неограниченным множествам (не внося двусмысленности). Во многих описаниях турбулентности, равно как и в моих ранних работах, термин самоподобный употребляется в «общем» смысле, включая в себя и понятие самоаффинности, однако в настоящей работе общее значение оставлено за термином масштабно-инвариантный.

1. Самоподобие

Преобразование подобия представляет собой преобразование в евклидовом пространстве \mathbf{R}^E , определяемое вещественным коэффициентом $r > 0$. При таком преобразовании точка $x = (x_1, \dots, x_S, \dots, x_E)$ переходит в точку $r(x) = (rx_1, \dots, rx_S, \dots, rx_E)$, а множество S , соответственно, в множество $r(S)$.

Ограниченные множества. Ограниченное множество S самоподобно (относительно коэффициента r и целого числа N), если S представляет собой объединение N непересекающихся подмножеств, каждое из которых конгруэнтно множеству $r(S)$.

Термин конгруэнтно означает «тождественно с точностью до смещения и / или поворота».

Ограниченное множество S самоподобно (относительно массива коэффициентов $r^{(1)} \dots r^{(M)}$), если S представляет собой объединение N непересекающихся подмножеств, соответственно конгруэнтных $r^{(n)}(S)$.

Ограниченное случайное множество S статистически самоподобно (относительно коэффициента r и целого числа N), если S представляет собой объединение N непересекающихся подмножеств, каждое из которых имеет вид $r(S_n)$, где N множеств S_n конгруэнтны по своему распределению множеству S .

Неограниченные множества. Неограниченное множество S самоподобно относительно коэффициента r , если множество $r(S)$ конгруэнтно множеству S .

2. Самоаффинность

Аффинное преобразование в евклидовом E - мерном пространстве определяется совокупностью положительных вещественных коэффициентов $r = (r_1, \dots, r_\delta, \dots, r_E)$. При этом преобразовании каждая точка $x = (x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E)$ переходит в точку

$$r(x) = r(x_1, \dots, x_\delta, \dots, x_E) = (x_1 r_1, \dots, x_\delta r_\delta, \dots, x_E r_E)$$

а множество S , как следствие, переходит в множество $r(S)$.

Ограниченные множества. Ограниченное множество S самоаффинно (относительно вектора коэффициентов r и целого числа N), если S представляет собой объединение N непересекающихся подмножеств, каждое из которых конгруэнтно множеству $r(S)$.

Неограниченные множества. Неограниченное множество S самоаффинно относительно вектора коэффициентов r , если множество $r(S)$ конгруэнтно множеству S .

Вышеприведенное определение часто применяется при следующих условиях: а) множество S представляет собой график функции $X(t)$ из скалярного времени t в $(E-1)$ -мерный евклидов вектор; б) $r_1 = \dots = r_{E-1} = r$; в) $r_E \neq r$. В этом случае прямое определение выглядит следующим образом: вектор – функция $X(t)$ от времени самоаффинна (относительно показателя α и фокального времени t_0), если существует некоторый показатель $\ln r_E / \ln r = \alpha > 0$ – такой, что при любом $h > 0$ функция $h^{-\alpha} X[h(t-t_0)]$ независима от h .

Полустойчивость по Ламперти. Случайные неограниченные самоаффинные множества полустойчивыми.

Аллометрия. Ранне отмечалось, что при изменении высоты дерева (имеется в виду дерево растительного происхождения) в r раз

диаметр его ствола изменяется в $r^{3/2}$ раз. Можно сказать больше: представляющие точки, координаты которых и определяют различные линейные меры деревьев, аффинны друг другу. Биологи называют такие фигуры аллометрическими.

Броуновские фрактальные множества

Вследствие большого разнообразия всевозможных броуновских множеств, возникает необходимость по возможности в строгой терминологии.

1. Броуновская функция из прямой в прямую

Этим термином обозначается классическое обыкновенное броуновское движение, иначе называемое функцией Винера, функцией Башелье или функцией Башелье – Винера – Леви. Приводимое ниже определение позволяет классифицировать различные обобщения такой функции.

Допущения. А) Временная переменная t есть вещественное число.

Б) Пространственная переменная x есть вещественное число. В)

Параметр H равен $1/2$. Г) Вероятность $\Pr(X < x)$ задается

функцией ошибок $\text{erf}(x)$, которая представляет собой распределение приведенной гауссовой случайной величины с

$$\langle X \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle X^2 \rangle = 1.$$

Определение. Броуновская функция из прямой в прямую $B(t)$ есть случайная функция, такая, что при любых t и Δt верно следующее:

$$\Pr \left([B(t + \Delta t) - B(t)] / |\Delta t|^H < x \right) = \text{erf}(x)$$

Белый гауссов шум. Функция $B(t)$ непрерывна, но не дифференцируема. Это означает, что производная $B'(t)$ не существует в виде обыкновенной функции, а представляет собой обобщенную функцию (распределение Шварца). **Называется эта производная белым гауссовым шумом.** Можно записать функцию $B(t)$ как интеграл $B'(t)$.

Самоаффинность. Понятие распределения вероятностей применимо не только к случайным величинам, но и к случайным функциям. Если положить $B(0) = 0$, то распределение вероятностей нормированной функции $t^{1/2} B(ht)$ не зависит от t . Такая масштабная инвариантность является проявлением самоаффинности.

Спектр. С точки зрения спектрального или гармонического анализа, спектральная плотность функции $B(t)$ пропорциональна f^{-1-2H} , т.е. f^{-2} . Однако смысл спектральной плотности f^{-2} требует особого рассмотрения, так как функция $B(t)$ нестационарна, а обычная теория ковариантности и спектра Винера – Хинчина имеет дело со стационарными функциями. Поэтому о спектрах мы поговорим позже – в разделе, посвященном функции Вейерштрасса.

Недифференцируемость. Функция $B(t)$ непрерывна, но не дифференцируема. Рассмотрение недифференцируемости предлагается отложить до раздела функция Вейерштрасса.

2. Обобщенные броуновские функции

Любое из упомянутых в предыдущем разделе допущений можно естественным образом обобщить, а любой процесс, получаемый в результате обобщения одного или нескольких допущений,

существенно отличается от исходной функции $B(t)$ и находит области приложения.

А. Вещественное (скалярное) время t можно заменить точкой в евклидовом пространстве \mathbb{R}^E (где $E > 1$) либо точкой на [окружности](#) или на сфере.

Б. Вещественную (скалярную) величину X можно заменить точкой в евклидовом пространстве \mathbb{R}^E (где $E > 1$) либо точкой на [окружности](#) или на сфере.

В. Параметру H можно присвоить иное, нежели $1/2$, значение. Гауссово распределение erf допускает любое значение параметра H из интервала $0 < H < 1$.

Г. Гауссово распределение erf можно заменить одним из негауссовых распределений, рассматриваемых в разделе [устойчивые случайные величины](#) и функции леви.

Кроме того, функцию $B(t)$ можно обобщить через ее представление в виде [белого шума](#). Эта процедура дает существенно иные результаты.

3. Исключение тренда

Разброс броуновской функции из прямой в прямую $B(t)$ в интервале от $t = 0$ до $t = 2\pi$ можно разбить на две части: а) тренд, определяемый выражением

$$B^*(t) = B(0) + (t/2\pi)[B(2\pi) - B(0)], \text{ и б) осциллирующий}$$

остаток $B_B(t)$. В случае броуновской функции $B(t)$ эти члены оказываются статистически независимыми.

Тренд. График тренда $B^*(t)$ представляет собой прямую, угловой коэффициент наклона которой является случайной гауссовой величиной.

Броуновский мост. «Лишенный тренда» осциллирующий член $B_B(t)$ тождествен по своему распределению броуновскому мосту, определяемому как броуновская функция из прямой в прямую, ограниченная условием $B(2\pi) = B(0)$.

Ошибочное исключение тренда. Сталкиваясь с выборками неизвестного происхождения, многие статистики – практики, работающие в экономике, метеорологии и других подобных областях, спешат разбить их на тренд и осцилляцию (и еще добавочные периодические члены). Тем самым они имплицитно допускают, что получаемые при этом слагаемые можно приписать различным порождающим механизмам, и что эти слагаемые статистически независимы.

Последнее допущение можно признать обоснованным только в том случае, если выборка порождена броуновской функцией $B(t)$.

4. Броуновские функции изокривности в прямую

Броуновский мост с петлями. Возьмем периодическую функцию от t , которая на временном промежутке $0 < t \leq 2\pi$ совпадает с броуновским мостом $B_B(t)$, и выберем случайным образом (равномерно) приращение Δt на интервале $[0, 2\pi]$. Функция $B_B(t + \Delta t)$ статистически стационарна и может быть представлена как случайный ряд Фурье – Броуна – Винера. Коэффициентами

являются независимые гауссовы [случайные величины](#), причем их фазы полностью случайны, а модули пропорциональны n^{-1} (т.е. f^{-2}), а совокупная спектральная энергия в области частот, превышающих f , пропорциональна f^{-1} .

Практическое следствие, касающееся моделирования.

Моделирование функции $B(t)$ неизбежно производится на конечном временном промежутке. Если в качестве такого промежутка взять интервал $[0, 2\pi]$, то можно использовать при моделировании дискретные конечные [методы Фурье](#). Сначала с помощью быстрого [преобразования Фурье](#) вычисляется броуновский мост, а затем добавляется необходимый случайный тренд.

Броуновский мост с нечетными петлями. Функции

$$B_O(t) = \frac{1}{2}[B_B(t) - B_B(t + \pi)]$$
 и

$$B_E(t) = \frac{1}{2}[B_B(t) + B_B(t + \pi)]$$

представляет собой суммы гармонических составляющих мостовой функции $B_B(t)$ с нечетными и с четными номерами, соответственно. Достоинство нечетной суммы состоит в том, что ее можно получить непосредственно из белого гауссова шума $B'(t)$, построенного на окружности:

$$B_O(t) = \int_{-\pi}^0 B'(t-s) ds - \int_0^{\pi} B'(t-s) ds$$

Броуновская функция из прямой в [окружность](#). Возьмем

броуновскую функцию $B(t)$, отбросим ее целую часть, и умножим дробный остаток на 2π . Результат определяет положение точки на

единичной [окружности](#). Эта броуновская функция из прямой в окружность упоминается здесь, в основном, для того, чтобы никто не перепутал ее с какой-либо из вышеописанных, весьма отличных от нее, функций.

5. Дробные броуновские функции из прямой в прямую

Для определения этой функции (обозначим ее $B_H(t)$) возьмем обыкновенную броуновскую функцию из прямой в прямую и изменим

значение показателя H с $\frac{1}{2}$ на любое вещественное число,

удовлетворяющее неравенству $0 < H < 1$. Функции с $H \neq \frac{1}{2}$ оказываются вполне дробными.

Все функции $B_H(t)$ непрерывны и недифференцируемы.

Корреляция и спектр. Очевидно,

что
$$\langle [B_H(t + \Delta t) - B_H(t)]^2 \rangle = |\Delta t|^{2H}$$
.

Спектральная плотность функции $B_H(t)$ пропорциональна f^{-2H-1} .

Показатель не является [целым числом](#) – в этом и заключается одна из причин, побудивших Мандельброта предложить

для обозначения функций $B_H(t)$ термин дробные.

Дискретный дробный гауссов шум. Этот шум определяется как

последовательность приращений функции $B_H(t)$ на последовательных единичных временных интервалах. Его [корреляция](#) равна

$$2^{-1} \left[|d+1|^{2H} - 2|d|^{2H} + |d-1|^{2H} \right].$$

Долгосрочная корреляция. Персистентность и

антиперсистентность. Положим $B_H(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и определим

предыдущее приращение как $-B_H(-t)$, а последующее приращение

как $B_H(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle -B_H(-t)B_H(t) \rangle &= 2^{-1} \left\{ \langle [B_H(t) - B_H(-t)]^2 \rangle \right\} - 2 \langle [B_H(t)]^2 \rangle = \\ &= 2^{-1} (2t)^{2H} - t^{2H} \end{aligned}$$

Разделив результат на $\langle B_H(t)^2 \rangle = t^{2H}$, получим [корреляцию](#),

которая оказывается независимой от t : она равна $2^{2H-1} - 1$. В

классическом случае $H = 1/2$ корреляция, как и ожидалось,

обращается в нуль. При $H > 1/2$ корреляция положительна,

выражает персистентность и при $H = 1$ возрастает до единицы. При

$H < 1/2$ корреляция отрицательна, выражает антиперсистентность и

при $H = 0$ уменьшается до $-1/2$.

То, что эта [корреляция](#) не зависит от t и в тех случаях, когда она не

обращается в нуль, является следствием самоаффинности функции $B_H(t)$.

Однако при изучении случайности многие очень удивляются, впервые столкнувшись с тем фактом, что [корреляции](#) прошедших и будущих событий могут быть независимы от времени, не обращаясь при этом в нуль.

Практическое следствие для моделирования. При генерации случайной функции для всех целочисленных значений времени в интервале от $t = 0$ до $t = T$ выбор алгоритма, как правило, не зависит от значения T ; алгоритм выбирают заранее, а затем выполняют его требуемое количество раз. Алгоритмы, необходимые для генерации дробных броуновских функций, имеют существенное отличие: они неизбежно зависят от T .

Фрактальные размерности. Для графика $D = 2 - H$. Для нуля – множества и других множеств уровня $D = 1 - H$.

6. Дробная броуновская функция из окружности или тора в прямую

Дробные броуновские функции из окружности в прямую гораздо более изошрены, чем функции, описанные в подразделе 4. Простейшая из них представляет собой сумму дробного ряда Фурье – Броуна – Винера, который, по определению, имеет независимые гауссовы коэффициенты и полностью случайные фазы, причем модули

коэффициентов пропорциональны $n^{-H-1/2}$. Дробная броуновская функция из тора в прямую представляет собой сумму двойного ряда Фурье с такими же свойствами.

Исходя из поверхностной аналогии, можно предположить, что дробную броуновскую функцию из окружности в прямую можно получить с помощью процесса, применимого и в недробном случае:

образовать тренд $B_H^*(t)$ дробной броуновской функции из прямой в прямую, затем исключить этот тренд из функции $B_H(t)$ и повторением получить периодическую функцию.

К сожалению, полученная таким образом периодическая функция и

сумма ряда Фурье с коэффициентами $n^{-H-1/2}$ суть разные

случайные функции. В частности, ряд Фурье стационарен, в то время

как многократно повторенная функция $B_H(t)$ с исключенным трендом – нет. Например, на некотором малом интервале по обе стороны от $t = 0$ многократно повторенный мост с исключенным трендом объединяет два непоследовательных подучастка функции $B_H(t)$. Ограничения, имеющегося в определении моста, вполне достаточно для того, чтобы объединенный участок оказался непрерывным, но совершенно не достаточно для того, чтобы сделать его стационарным. Такой участок, к примеру, совсем не тождествен по своему распределению некоторому малому участку, составленному из последовательных подучастков по обе стороны от точки $t = \pi$.

Вычислить дробную броуновскую функцию из прямой в прямую с помощью конечных дискретных методов Фурье теоретически невозможно; на практике же это вполне осуществимо, однако требует немалой сноровки. Наиболее прямолинейная процедура заключается в следующем:

а) вычисляем соответствующую функцию из окружности в прямую, б) отбрасываем ее за исключением ограниченного участка, соответствующего малому подынтервалу периода 2π (скажем, $0 < t < t^*$ и в) прибавляем к результату отдельно вычисленную низкочастотную составляющую. При $H \rightarrow 1$ значение t^* должно стремиться к нулю.

Фрактальные размерности. Для полного графика $D = 2 - H$.

Когда множество уровня непусто, $D = 1 - H$.

Критический переход при $H = 1$. Дробный ряд Фурье – Броуна – Винера с независимыми гауссовыми коэффициентами,

пропорциональными $n^{-1/2-H}$, сходится в непрерывную сумму при всех $H > 0$. Когда значение параметра H пересекает единицу,

сумма становится дифференцируемой. Что касается дробного броуновского процесса, то он определен лишь до $H = 1$. Различие в диапазоне допустимых значений параметра H может служить подтверждением того, что эти два процесса существенно отличаются друг от друга. Это различие также предполагает, что физические критические переходные феномены можно моделировать с помощью броуновских функций из прямой в прямую, но никак не с помощью броуновских функций из [окружности](#) в прямую.

7. Дробные броуновские следы изпрямой или окружности в пространство

В случае функции из окружности в пространство с $H < 1$ размерность следа равна $\min(E, 1/H)$.

8. Различные формы дробного интегро – дифференцирования

Для преобразования броуновской функции из прямой в прямую $B(t)$ в дробную функцию $B_H(t)$ проще всего записать

$$B_H(t) = \left[\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \right]^{-1} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-1/2} dB(s)$$

Этот [интеграл](#) расходится, однако приращения вида

$B_H(t) - B_H(0)$ являются сходящимися. Он представляет собой

подвижное среднее ядра $(t-s)^{H-1/2}$ - классическое преобразование, известное математикам под именем дробного

интеграла или дифференциала Римана – Лиувилля порядка $H + 1/2$.

Идея отсутствия необходимости в целочисленном порядке интегрирования и / или/ дифференцирования наиболее доходчиво объясняется в терминах спектрального анализа. В самом деле, обычное интегрирование некоторой периодической функции эквивалентно умножению коэффициентов Фурье этой функции на $1/n$, а обычное интегрирование Фурье (если оно определено) на $1/f$. Следовательно, операция, при которой преобразование Фурье умножается на дробную

степень $(1/f)^{H+1/2}$, может быть с полным правом названа дробным интегро - дифференцированием. Так как спектр белого шума имеет вид f^{-0} , спектр функции $B_H(t)$ можно записать в виде $(1/f)^{2(H+1/2)} = f^{-2H-1}$ (как и было заявлено).

Влияние на гладкость. Когда порядок $H - 1/2$ преобразования Римана – Лиувилля положителен, оно представляет собой дробную форму интегрирования, поскольку увеличивает гладкость функции. Гладкость равнозначна локальной персистентности, однако гладкость, полученная посредством интегрирования, распространяется и на глобальные свойства функции. При $H - 1/2 < 0$ преобразование Римана – Лиувилля представляет собой дробную форму дифференцирования, поскольку оно усиливает иррегулярность, которая зависит от локального поведения.

Дробное интегро – дифференцирование броуновских функций. В случае дробной броуновской функции из окружности в прямую параметр H сверху не ограничен. Дробное интегрирование порядка $H - 1/2 > 1/2$ броуновской функции из окружности в прямую дает дифференцируемую функцию. Напротив, в случае броуновских функций из прямой в прямую порядок $H - 1/2$ не может превышать $1/2$, поэтому функция $B_H(t)$ не является дифференцируемой.

И в тех, и в других броуновских функциях (из [окружности](#) в прямую и из прямой в прямую) локальная иррегулярность препятствует дифференцированию при значении параметра $H < 0$, следовательно, порядок дифференцирования не может быть меньше $-\frac{1}{2}$.

Двустороннее обобщение дробного интегро – дифференцирования. То обстоятельство, что классическое определение Римана – Лиувилля сильно асимметрично по отношению к переменной t , не вызывает никаких сложностей до тех пор, пока t обозначает время. Однако для тех случаев, когда координата t может «распространяться» в обоих направлениях, необходимо симметричное определение. Мандельброт предлагает следующее:

$$B_H(t) = \left[\Gamma(H + \frac{1}{2}) \right]^{-1} \int_{-\infty}^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) - \int_t^{\infty} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s)$$

9. Броуновские функции из пространства в прямую

Леви вводит понятие броуновских функций из пространства Ω в вещественную прямую, где Ω представляет собой либо обычное пространство \mathbf{R}^E (расстояние $|PP_0|$ определяется как отрезок прямой), либо сферу в пространстве \mathbf{R}^{E+1} (расстояние определяется вдоль геодезических линий), либо гильбертово пространство. Для каждой из соответствующих броуновских функций значений разности $B(P) - B(P_0)$ является гауссовой случайной величиной с нулевым средним и [дисперсией](#) $G(|PP_0|)$, где $G(x) = x$.

Представление броуновской функции в виде белого гауссова шума,

когда Ω - сфера. В этом случае функция $B(P)$ строится, как описано ранее: на поверхность сферы накладывается слой белого гауссова шума, а функция $B(P)$ определяется как [интеграл](#) этого

[белого шума](#) по поверхности полусферы, северный полюс которой совпадает с точкой P . Мандельброт предпочитает несколько иной вариант, в котором берется половина интеграла по одной полусфере, а затем вычитается половина интеграла по другой полусфере. Такая процедура позволяет обобщить второй процесс, описанный в подразделе 4.

Представление броуновской функции в виде белого гауссова шума,

когда $\Omega - \mathbf{R}^E$. Этот случай требует более сложного алгоритма (алгоритм был предложен Ченцовым). Наиболее наглядное представление об этом алгоритме можно получить, когда пространство

Ω есть \mathbf{R}^2 , и $B(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Построим вспомогательный цилиндр единичного радиуса с координатами u и θ и наложим на него слой [белого шума](#). Далее проинтегрируем этот шум по прямоугольнику от θ до $\theta + d\theta$ и от 0 до u . Получим броуновскую функцию из прямой в прямую, которая обращается в нуль при $u = \mathbf{0}$; обозначим ее

через $B(u, \theta, d\theta)$. Для каждой точки (x, y) плоскости броуновские составляющие $B(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta, d\theta)$

статистически независимы, а их [интеграл](#) по θ равен $B(x, y)$.

10. Дробные броуновские функции из пространства в прямую

В работе Ганголли функция $B(P)$ обобщается до случая

$$G(x) = x^{2H}$$

(см. предыдущий подраздел). Здесь, однако, не приводится явного алгоритма для построения результирующей функции. Для того чтобы заполнить этот пробел, Мандельброт обобщил построение Ченцова, заменив каждую функцию

$B(u, \theta, d\theta)$ двусторонне определенной дробной броуновской функцией из прямой в прямую.

11. Нелинейные преобразования дробных гауссовых шумов

Зададим дисперсию $G(x)$, отличную от $G(x) = x$, составим

сумму $\sum_{t=1}^T G\{B_H(t) - B_H(t-1)\}$ и интерполируем ее линейно для нецелочисленных T . Результат (который мы обозначим через $B_G(t) - B_G(0)$) асимптотически масштабно-инвариантен, если существует некоторая функция $A(T)$, такая, что предел $\lim_{T \rightarrow \infty} A(T)\{B_G(ht) - B_G(0)\}$ невырожден при любом $h \in (0, 1)$.

Масштабная инвариантность при усечении

Связь гиперболического распределения с масштабной инвариантностью основывается на следующем свойстве (присущем только гиперболическому распределению): распределение нормированной усеченной случайной величины « U/μ_0 , если $U/\mu_0 > 1$ » не зависит от μ_0 .

Доказательство. Пусть имеется некоторое основное распределение $P(u)$, причем нормированная усеченная с. в. $W = U/\mu_0$ имеет обычное условное распределение $P(wu)/P(u_0)$. Нам нужно, чтобы это условное распределение было одинаковым для $u_0 = h'$ и $u_0 = h''$. Запишем $v' = \ln h'$ и $v'' = \ln h''$ и рассмотрим функцию $R = \ln P(u)$ как функцию от $v = \ln h$. Для получения искомого

тождества $P(uk')/P(h') = P(uk'')/P(h'')$ необходимо, чтобы при любом выборе значений v, v' и v'' выполнялось равенство $R(v' + v) - R(v') = R(v'' + v) - R(v'')$. А для этого функция R должна быть линейной функцией от v .

Музыка и масштабная инвариантность

Музыка обладает, по меньшей мере, двумя достойными упоминания скейлинговыми свойствами.

Темперированные музыкальные гаммы и их связь с частотным спектром модифицированной функции Вейерштрасса. Из всех слов современного английского языка, восходящих к латинскому корню *scala* («лестница»), самым употребительным является, конечно же, не скейлинг, а слово *scale* в значении «музыкальная гамма», под чем подразумевается некий дискретный спектр, получаемый умножением частот. В темперированной гамме значения частот располагаются в логарифмической последовательности. Например, додекафоническая (двенадцатитоновая) гамма соответствует основанию $b = 2^{1/12}$; в результате бо́льшая часть основных тонов любого музыкального инструмента приходится на относительно низкие частоты его полного частотного диапазона, высокие же частоты достаются немногим избранным.

Экстраполируя такой спектр в обе стороны на частоты, не воспринимаемые человеческим ухом, получим спектр, неотличимый от спектра функции Вейерштрасса (соответствующим образом модифицированной) с тем же значением b . Следовательно, для того, чтобы добавить низких частот в музыкальное произведение, достаточно ввести в оркестр новые инструменты, способные производить низкие тоны желаемой частоты.

Согласно теореме Эйлера – Фурье, самая общая периодическая функция представляется в виде ряда линейно упорядоченных гармоник и, следовательно, последовательность

основных тонов некоего эталонного музыкального произведения может быть представлена только очень суженными функциями.

Музыка как масштабно-инвариантный $(1/f)$ шум (по Р.Ф. Фоссу). Второй скейлинговый аспект музыки связан с изменением во времени различных характеристик звукового сигнала: например, мощности (определяемой как квадрат интенсивности) или мгновенной частоты (определяемой как количество пересечений сигналом нулевого уровня за единицу времени). Фосс и Кларк отмечают, что в произведениях таких различных композиторов, как Бах, Бетховен и «Битлз», обе упомянутые характеристики звукового сигнала представляет собой масштабно-инвариантные шумы (или $1/f$ - шумы).

И наоборот, когда мы иницируем случайную музыку неким внешним физическим источником шума со спектральной плотностью вида $1/f^B$ и различными скейлинговыми показателями, получается звук, как обнаружили те же Фосс и Кларк, больше всего «похож» на музыку, если в качестве инициатора выступает $1/f$ - шум.

Такого результата никто не ожидал, однако – как это случилось с большинством описанных открытий - ему находится вполне «естественное» объяснение постфактум. Следует такое рассуждение: музыкальная композиция, как явствует из термина, составляется из компонентов. Самыми крупными компонентами являются части, различающиеся общим темпом и / или уровнем громкости. Части, в свою очередь, состоят из более мелких компонентов, разделяющихся по тому же принципу. Причем, согласно настояниям преподавателей композиции, «компонентная» структура должна прослеживаться, вплоть до мельчайших осмысленных составных частей музыкального произведения. Получаемая в результате такого сочинения композиция просто обязана быть масштабно-инвариантной.

Однако эта инвариантность не распространяется на временные промежутки, меньшие по времени звучания одной ноты. При более высоких частотах в действие вступают совершенно иные механизмы (определяемые, среди прочего, резонансными свойствами

человеческих легких и корпусов скрипок и флейт), в результате чего высокоэнергетический спектр сигнала становится больше похож на

$$f^{-2}, \text{ чем на } f^{-1}.$$

Нелакунарные фракталы

Согласно определениям лакунарности, приведенным ранее,

нелакунарное множество в пространстве \mathbf{R}^E должно пересекать каждый куб или сферу в указанном пространстве. Выражаясь математическим языком, оно должно быть всюду плотным и, как следствие, незамкнутым. (Единственное всюду плотное

замкнутое множество в пространстве \mathbf{R}^E – это само пространство

\mathbf{R}^E .) В этом разделе мы покажем, что такие фракталы действительно существуют, но весьма отличаются «на ощупь» от замкнутых фракталов, рассматриваемых в других частях работы. Ключевое различие заключается в том, что хотя к таким фракталам по-прежнему применимо понятие размерности Хаусдорфа – Безиковича, их размерность подобия и размерность Минковского – Булигана равны здесь E , а не D .

1. Относительная перемежаемость

Шум, служащий причиной появления фрактальных ошибок, в промежутках между ошибками ослабляется, но полностью не исчезает.

Мы часто пренебрегаем тем обстоятельством, что нам известно о существовании межзвездной материи. Вне всякого сомнения, ее распределение должно быть, по меньшей мере, таким же иррегулярным, как и распределение звезд. Более того, представление о невозможности определения плотности относится в большей степени именно к межзвездной, а не к звездной материи. В подтверждение приведем выдержку из статьи де Вокулера: «Принимая во внимание то, что видимая материя образует ярко выраженные сгустки и кластеры во всех масштабах, трудно поверить в то, что невидимый межгалактический газ однороден и равномерно распределен ... [его] распределение должно быть очень похоже ... на распределение

галактик». В работах других астрономов можно встретить такие термины, как межгалактические жгуты и межгалактическая паутина.

А рассмотренные ранее бахромчатые поверхности турбулентной диссипации со всей очевидностью представляет собой чрезмерно упрощенное описание реальности.

Ранее очень кратко упоминалось о фрактальном взгляде на распределение минералов. В этом случае факт применения замкнутых фракталов означает, что в областях, расположенных между медными месторождениями, медь полностью отсутствует. Разумеется, в большинстве областей меди действительно очень мало, однако было бы неверно предполагать, что в какой-либо области ее нет совсем.

Во всех перечисленных случаях определенные области, не представлявшие для нас в тот момент непосредственного интереса, были искусственным образом опустошены, чтобы получить возможность использовать при описании соответствующего феномена замкнутые фрактальные множества; однако, в конечном счете, эти области необходимо будет заполнить. Для решения такой задачи можно воспользоваться оригинальным гибридом, который называется нелакунарные фракталы.

Например, нелакунарное распределение масс в космическом пространстве – это такое распределение, при котором никакая область пространства не бывает пустой, но для каждого множества малых порогов θ и λ доля массы не менее $1-\lambda$ оказывается сосредоточена в области пространства, относительный объем которой не превышает θ .

2. Цитата из де Виса и комментариев

Де Висом описана простая и наглядная ситуация, требующая применения нелакунарных фракталов; там же приводится «рабочая гипотеза», о которой расскажем подробнее.

«Рассмотрим [месторождение руды] тоннажа W и средней степени чистоты M . Проведя воображаемый разрез, разделим месторождение

на две части с одинаковым тоннажем $\frac{1}{2}W$, но с различной средней степенью чистоты. Допустим, что чистота руды в более богатой половине равна $(1+d)M$, тогда чистота руды во второй половине должна быть равна $(1-d)M$, поскольку, согласно условию, средняя чистота руды в обеих половинах составляет M ... Проведем еще один воображаемый разрез, разделяющий месторождение уже на четыре части с одинаковым тоннажем $\frac{1}{4}W$ и средними степенями чистоты $(1+d)^2 M$, $(1+d)(1-d)M$, $(1+d)(1-d)M$ и $(1-d)^2 M$. После третьего разреза получаем $2^3 = 8$ частей, а именно: один блок со средней чистотой $(1+d)^3 M$, три блока с $(1+d)^2(1-d)M$, три блока с $(1+d)(1-d)^2 M$ и один с $(1-d)^3 M$. Несложно представить себе и дальнейшее разделение месторождения на все меньшие блоки.

Коэффициент d в качестве меры изменчивости вполне адекватно заменяет целое собрание различных трудноопределимых характеристик, а используя основанные на этой мере статистические выводы, мы вполне способны обойтись без имеющегося в нашем распоряжении запутанного лабиринта из эмпирических правил и интуитивных методов».

Комментарий. До исследования геометрических аспектов своей модели де Вис так и не дошел, и ни он, ни его в остальных отношениях выдающиеся последователи (включая и Г. Матерона) не имели ни малейшего представления о фракталах. Однако если предположить, что плотность руды не зависит от степени ее чистоты (т.е. вес руды эквивалентен ее объему), то мы увидим, что в точности такую же модель исследовал в свое время – правда, с совершенно иными целями – теоретик А. С. Безикович вместе со своими учениками.

Заметим, что если продолжить процесс де Виса (в его новой интерпретации) до бесконечности, то руда в пределе створаживается в нелакунарный [фрактал](#). Для того чтобы записать его размерность в

привычном для нас виде $D = \ln N^* / \ln 2$, необходимо прежде определить $\ln N^*$ следующим образом:

$$\ln N^* = -\sum \pi_i \ln \pi_i,$$

где

$$\pi_1 = (1+d)^3, \quad \pi_8 = (1-d)^3, \quad \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = (1+d)^2(1-d)$$

и

$$\pi_5 = \pi_6 = \pi_7 = (1+d)(1-d)^2.$$

Догадку де Виса можно расценивать как вдохновенное прозрение, однако коэффициент d явно непригоден в качестве меры, так как он применим только к одной модели. Подходящей мерой изменчивости руды является размерность D .

3. Взвешенное створаживание Безиковича

Для того чтобы оценить результаты Безиковича, следует представить их на интервале $[0, 1]_c$ $b = 3$.

Допущения. Вообразим себе некую массу, распределенную по интервалу $[0, 1]_c$ с единичной плотностью, и поделим ее между третями интервала с помощью неслучайного умножения на три веса W_0, W_1 и W_2 , удовлетворяющих следующим условиям:

А. $\frac{1}{3}W_0 + \frac{1}{3}W_1 + \frac{1}{3}W_2 = 1$. Это соотношение показывает, что масса сохраняется, и что каждый вес W_i ограничен значением $\frac{1}{3}$. Величину $\frac{1}{3}W_i$, которая представляет собой массу i -й трети, мы обозначим через π_i .

Б. Равномерное распределение $W_i \equiv \frac{1}{3}$ исключено.

В. $W_0 W_1 W_2 > 0$. Это соотношение, в частности, исключает из рассмотрения канторов случай $(W_0 = \frac{1}{2}, W_1 = 0 \text{ и } W_2 = \frac{1}{2})$.

Последующие этапы каскада строятся аналогичным образом; например, плотность вещества в субвихрях имеет следующие

значения: $W_0^2, W_0 W_1, W_0 W_2, W_1 W_0, W_1^2, W_1 W_2,$
 $W_2 W_0, W_2 W_1, W_2^2$.

Заключения. Итерируя до бесконечности, получаем следующие результаты:

А. **Сингулярность. Фрактал Безиковича.** Почти во всех точках плотность асимптотически приближается к нулю. Множество точек, в которых асимптотическая плотность не равна нулю (собственно, в этих точках она бесконечна), называется фракталом Безиковича В. Он представляет собой множество точек интервала $[0, 1]$, триичное разложение которых таково, что отношение

$$k^{-1} \quad (\text{количество } i \text{ в первых } k \text{ «цифрах»})$$

сходится π_i . Такие точки образуют открытое множество: предел последовательности этих точек не обязательно должен принадлежать множеству.

Б. **Нелакуарность.** Предельное распределение массы является всюду плотным: не существует такого открытого интервала (сколько угодно малого), который был бы (даже асимптотически) совершенно пуст. На интервале от 0 до t масса строго возрастает вместе с t . Хотя

относительное количество точек, в которых $\prod W$ не сходится к нулю, очень мало, абсолютного их количества вполне достаточно для того, чтобы масса, заключенная внутри любого интервала $[t', t'']$, имела ненулевой предел при $k \rightarrow \infty$.

В. **Размерность Хаусдорфа – Безиковича множества B .** Эта размерность равна

$$D = -(\pi_1 \ln \pi_1 + \pi_2 \ln \pi_2 + \pi_3 \ln \pi_3).$$

Формально величина D является «энтропией», как она определена в термодинамике, или «информации», как ее определяет Шеннон.

Г. **Размерность подобия множества B .** Эта размерность равна единице. В самом деле, множество B самоподобно с $N = 3$ и

$r = 1/3$, следовательно, $D_S = \ln 3 / \ln 3 = 1$; причина введения

индекса S вскоре разъяснится. Аналогичным образом, размерность

трехмерных вариантов B равна 3. В данном примере величина D_S

не может иметь большого физического смысла: во-первых, она не

зависит от весов W_i , если те отвечают вышеприведенным условиям;

во-вторых, если заменить множество B его канторовым пределом, то ее значение скачкообразно изменяется с 1 на $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Кроме того, фрактальное однородное распределение больше не может основываться на самоподобии. В самом деле, если соотнести с каждым участком длиной 3^{-k} один и тот же вес, в результате мы получим однородное распределение на интервале $[0, 1]$. Оно никак не связано со значениями весов W_i и отлично от меры, с помощью которой генерировалось само множество. К тому же, при переходе к канторову пределу это однородное распределение разрывно переходит в распределение весьма неоднородное.

Д. Размерность подобия «множества концентрации» множества B . Эта размерность равна D . Дело в том, что мера Безиковича довольно точно аппроксимируется фрактальной однородной мерой, размерность подобия которой равна размерности Хаусдорфа – Безиковича D . Точнее говоря, после некоторого большого количества k этапов каскада бóльшая часть первоначально однородной массы оказывается сосредоточенной в 3^{kD} трюичных интервалов с длиной 3^{-k} . Распределение этих интервалов в $[0, 1]$ неоднородно, однако длина самой большой пустоты стремится при $k \rightarrow \infty$ к нулю.

Следует различать «полное множество», которое должно включать в себя всю массу, и «частное множество», в котором сосредоточена бóльшая часть массы. Оба множества самоподобны, однако их размерности самоподобия D_S и D различны.

4. Случайное взвешенное створаживание

Мандельброт предложил естественное и достаточно глубокое обобщение метода Безиковича, которое получило дальнейшее развитие.

Воздействие каждого этапа каскада заключается в умножении плотностей в b^3 субвихрях каждого вихря на одинаково распределенные и статистически независимые случайные веса W_i .

После k этапов каскада взвешенного створаживания количество вихрей, в которых оказывается сосредоточена большая часть массы, составляет величину порядка $b^k D^*$ (при общем количестве вихрей b^{3k}), где

$$D^* = - \left\langle W \log_b (r^3 W) \right\rangle = 3 - \langle W \log_b W \rangle$$

В частности, если величина W дискретна и ее возможные значения w_i имеют относительные вероятности p_i , имеем

$$D^* = 3 - \sum p_i w_i \log_b w_i$$

Случай $D^* > 0$: $D = D^*$. Мера, порождаемая взвешенным створаживанием аппроксимируемого фрактально однородной мерой с размерностью $D = D^*$, получаемой так же, как описано ранее.

Случай $D^* < 0$: $D = 0$. Количество непустых ячеек асимптотически стремится к нулю, а это значит, что предел почти наверное оказывается пустым.

В общей сложности, носитель массы аппроксимируется

$$D = \max(0, D^*)$$

замкнутым множеством с размерностью

Сечения. Аналогичным образом масса, заключенная в плоских и линейных сечениях, сосредотачивается в относительно малом

количество вихрей: b^{D^*-1} для плоских сечений (при общем числе

вихрей b^2) и b^{D^*-2} для линейных сечений (при общем числе

вихрей b). То есть сечения невырождены при $D^* > 1$ (и,

соответственно, $D^* > 2$) и аппроксимируются фракталами с

размерностями $D^* - 1$ и $D^* - 2$. Таким образом, размерности сечений в этом случае подчиняются тем же правилам, что и в случае лакунарных фракталов.

Новые случайные величины, инвариантные при взвешенном

сложении. Пусть X - это случайная величина, которая асимптотически задает вес, заключенный внутри вихря любого

порядка k или внутри его сечения прямой или плоскостью

(размерность сечения обозначим через Δ). Мандельброт показал, что

величины X удовлетворяют функциональным уравнениям

$$(1/C) \sum_{\mathbf{g}=0}^{C-1} X_{\mathbf{g}} W_{\mathbf{g}} = X$$

где $C = b^\Delta$, величины $W_{\mathbf{g}}$ и $X_{\mathbf{g}}$ - независимые случайные величины, равенство же выражает идентичность распределения. Это

уравнение представляет собой обобщение уравнения (L) , рассматриваемого в разделе устойчивые по Леви случайные величины

и функции. Решения этого уравнения являются обобщением устойчивых случайных величин.

5. Предельное логарифмически нормальное случайное створаживание и функция

Мандельбротом описана вихревая решетка, сочетающая в себе абсолютное и взвешенное створаживание, позаимствованное у Кантора. Вихри не задаются заранее, но генерируются при построении с помощью того же статистического механизма, который используется для генерации заключенной в них массы. Кроме того, дискретные вихревые слои сливаются в такой решетке в непрерывный континуум.

Предельная логарифмически нормальная функция: обоснование.

Произведем кое-какие последовательные модификации взвешенного створаживания на примере некоторой функции $L(t)$ от одной переменной (выбранной из соображений простоты).

После n -го этапа плотность взвешенного створаживания задается

функцией $Y_n(t)$, такой, что приращение

$\Delta \ln Y_n(t) = \ln Y_{n+1}(t) - \ln Y_n(t)$ есть ступенчатая функция;

изменяется эта функция только тогда, когда t представляет собой

[интеграл](#), кратный $b^{-n} = r^n$, в остальные же моменты времени ее

значениями являются независимые случайные величины вида $\ln W$.

Положим теперь, что приращение $\Delta \ln W$ является логарифмически

нормальным со средним $-\frac{1}{2}(\ln b)$ и дисперсией $\mu \ln b$. При этом

ковариация между $\Delta \ln Y_n(t)$ и $\Delta \ln Y_n(t + \tau)$ принимает на

интервале $|\tau| < r^n$ значение $\mu(\ln b)(1 - |\tau|/r^n)$ и обращается в

ноль вне этого интервала. Функция $\Delta \ln Y_n(t)$ не может считаться гауссовой, поскольку совместное распределение ее значений при двух

(или более) t не является многомерной гауссовой случайной величиной.

Первая модификация. Заменяем все $\Delta \ln Y_n(t)$ соответствующими $\Delta \ln Y_n^*(t)$, определяемыми как гауссовы случайные функции с практически той же ковариацией $\mu(\ln b) \exp\left(1 - |t|/r^n\right)$. В результате такой замены сохраняется «область зависимости» оригинала, однако нарушаются дискретные границы между вихрями продолжительности r^n .

Вторая модификация. Заменяем дискретный параметр $n \ln b$ непрерывным параметром λ . Сумма конечных разностей $\Delta \ln Y_n^*(t)$ заменяется при этом интегралом бесконечно малых дифференциалов $d \ln L_\lambda(t)$ со средним $-\frac{1}{2} \mu d\lambda$ и дисперсией $\mu d\lambda$, а вихри становятся непрерывными.

Определение функции $L(t)$. Рассмотрим предел

$$L(t) = L_\infty(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} L_\lambda(t)$$

Случайная величина $\ln L_\lambda(t)$ является гауссовой со средним $\langle \ln L_\lambda(t) \rangle = -\frac{1}{2} \lambda \mu$ и дисперсией $\sigma^2 L_\lambda(t) = \lambda \mu$. Отсюда $\langle L_\lambda(t) \rangle = 1$ при всех λ . Однако предел функции $L_\lambda(t)$ может быть либо невырожденным, либо почти наверное равным нулю. Математического разрешения эта проблема пока не получила, однако можно, очевидно, придать строгий вид нижеследующим

эвристическим рассуждениям. Они проводятся на примере более интересных функций $L(x)$ от трехмерной переменной.

Множество концентрации предельной логарифмически нормальной меры. Удобным средством для получения представления

о множестве, в котором значение $L_\lambda(x)$ не только не малó, но чрезвычайно велико, являются опорные квадраты со стороной r^n . Это не искусственно навязанные субвихри, а всего лишь способ измерения. При $n \gg 1$ и фиксированном x вероятность того, что значение логарифмически нормальной функции $L_n \ln b(x)$ окажется очень близко к нулю, чрезвычайно высока, т.е. на бóльшей части области определения значения этой функции чрезвычайно малы.

Поскольку функция $L_n \ln b(x)$ непрерывна, изменение ее значения внутри ячейки со стороной r^n очень невелико, а это значит, что к настоящей модели применим способ получения множества концентрации в случае взвешенного створаживания с логарифмически нормальной величиной W . Если пренебречь логарифмическими членами, то количество ячеек, составляющих бóльшую часть интеграла функции $L_n \ln b(x)$, имеет [математическое ожидание](#)

$$Q = (r^n)^{D^*}, \text{ где } D^* = 3 - \mu/2.$$

Если $\mu > 6$ (т.е. $D^* < 0$), то $Q \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, и функция $L(x)$ почти наверное вырождена.

Если $4 < \mu < 6$ (т.е. $0 < D^* < 1$), то функция $L(x)$ имеет размерность $D = D^*$ и невырождена, однако ее следы на плоскостях и прямых почти наверное вырождены.

Если $2 < \mu < 4$ (т.е. $1 < D^* < 2$), то функция $L(x)$ и ее следы на плоскостях невырождены (размерности D^* и $D^* - 1$, соответственно), однако ее следы на прямых почти наверное вырождены.

Если $0 < \mu < 2$ (т.е. $2 < D^* < 3$), то и функция $L(x)$, и ее следы на плоскостях и прямых невырождены (размерности D^* , $D^* - 1$ и $D^* - 2$, соответственно).

6. Размерность концентрата меры

Исследование относительной перемежаемости может привести нас и к другим определениям размерности. Вместо множества в

[метрическом пространстве](#) рассмотрим некую меру $\mu(S)$, которая определена в ограниченном подпространстве Ω (в соответствующем σ -поле, включающем в себя и шары) и обладает

нижеперечисленными свойствами. **(А)** Когда S - шар, $\mu(S) > 0$, а $\mu(\Omega) = 1$, т.е. «множество, в котором $\mu > 0$ » совпадает с

пространством Ω . **(Б)** Руководствуясь интуитивными соображениями, можно однако предположить, что мера μ «концентрируется» внутри очень малой части пространства Ω .

Необходимы новые способы количественного выражения **(Б)**.

При заданных $\rho > 0$ и $0 < \lambda < 1$ рассмотрим множества $\sum \lambda$, для которых верно [неравенство](#) $\mu(\Omega - \sum \lambda) < \lambda$. Обозначим через $N(\rho, \sum \lambda)$ инфимум количества шаров радиуса ρ , необходимых для покрытия множества $\sum \lambda$. Определим

$$N(\rho, \lambda) = \inf N(\rho, \sum \lambda).$$

За некоторыми эвристическими оценками скрываются выражения «размерностного» вида

$$\liminf_{\alpha \downarrow 0} \ln N(\alpha, \alpha) / \ln(1/\alpha) ;$$

$$\liminf_{\rho \downarrow 0} \ln N(\rho, \lambda) / \ln(1/\rho) ;$$

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{\rho \downarrow 0} \ln N(\rho, \lambda) / \ln(1/\rho) ,$$

строгое исследование которых можно было бы только приветствовать.

Разумеется, эвристические оценки заменяют значение $\inf N(\sigma, \lambda)$

действительным $N(\sigma, \sum \lambda)$ относительно некоторого

приемлемого покрытия $\sum \lambda$.

Потенциалы и емкости. Размерность Фростмана

Размерность Хаусдорфа – Безиковича D играет центральную роль в современной теории классических и обобщенных потенциалов

(потенциалов Марсея Рисса) с ядрами вида $|u|^{-F}$, где $F \neq E - 2$.

1. Предположение

Мы вскоре сможем убедиться в том, что особое значение $D = 1$ тесно связано с ньютоновским потенциалом в \mathbf{R}^3 . Эта связь лежит в основе замечаний, высказанных ранее относительно различных космологических теорий, согласно которым $D = 1$, - таких, например, как теории Фурнье и Джинса – Хойла.

Мандельброт полагает, что должна существовать возможность переформулировать эти теории в виде следствий из ньютонова закона всемирного тяготения.

Следовательно, должна существовать и возможность вывести отклонение наблюдаемого значения $D \sim 1,23$ от единицы из неньютоновских (релятивистских) эффектов.

2. Размерность и потенциалы: эвристика

Как уже упоминалось ранее, Бентли и Ньютону было известно о том, что в теории гравитационного потенциала имеет место эффект, аналогичный кеплерову эффекту пылающего неба («парадоксу

Ольберса»). Предположим, что $E = 3$, что масса $M(R)$, заключенная внутри сферы радиуса R с центром в точке ω , пропорциональна R^D , где $D = 3$, и что ядро потенциала является ньютоновским и имеет вид R^{-F} , где $F = 1$. Масса, заключенная внутри оболочки толщины dR и радиуса R , пропорциональна R^{D-1} ; следовательно, полный потенциал в точке ω , определяемый

как $\int_0^\infty R^{-F} R^{D-1} dR = \int R dR$, расходится в бесконечности.

Расхождения в бесконечности не будет, если $D = 3$, а $F > 3$, т.е. если потенциал не является ньютоновским. Тот же результат мы получим и в модели Фурнье – Шарлье с $F = 1$ и $D < 1$.

Для общего интеграла $\int R^{D-1-F} dR$ условие сходимости в бесконечности очевидно: $D < F$. Таким образом, устанавливается однозначная связь между D и F ; значению $F = 1$, в частности, соответствует $D = 1$.

3. Потенциал и емкость

Эту связь исследовали Д. Пойа и Д. Серё, в окончательном же виде ее сформулировал О. Фростман. Главное усовершенствование заключается в том, что рассуждение теперь распространяется не только на точку начала координат ω , но на все точки, принадлежащие множеству S (компактному). Рассмотрим единичную массу, распределенную на множестве S так, что область du содержит массу $d\mu(u)$. В точке t ядро $|u-t|^{-F}$ дает потенциальную функцию

$$\Pi(t) = \int |u-t|^{-F} d\mu(u)$$

Для измерения «протяженности» множеств де Ла Вале Пуссен применил физическую концепцию электростатической емкости. Идея такова, что если емкость $C(S)$ множества S достаточно высока, то масса, которую мы можем «перетасовать» для достижения наименее возможного максимального потенциала, равна μ .

Определение. Найдем супремум потенциала по всем точкам t , затем – инфимум полученного результата относительно всех возможных распределений единичной массы на множестве S и, наконец, положим

$$C(S) = \left\{ \inf \left[\sup_t \Pi(t) \right] \right\}$$

Если используется ядро $1/r$, то такой минимальный потенциал и в самом деле создается [электрическими зарядами](#) на проводящем множестве.

Эквивалентное определение. Величина $[C(S)]^{-1}$ представляет собой инфимум (среди всех распределений массы, носителем которой является множество S) энергии, определяемой двойным интегралом

$$\iint |t - u|^{-F} d\mu(s) d\mu(t)$$

4. D как размерность Фростмана

Между величинами $C(S)$ и F имеет место простое соотношение.

Когда показатель F , используемый при определении емкости $C(S)$,

больше, чем размерность D Хаусдорфа – Безиковича, $C(S)$ обращается в нуль, - это означает, что даже при «наиболее

эффективном» распределении массы по множеству S потенциал в какой-то из точек бесконечен. Когда же F меньше D , емкость множества S положительна. То есть размерность Хаусдорфа – Безиковича выступает здесь, согласно Пойа и Серё, как емкостная

размерность. Тожественность этих понятий была в наиболее общем виде доказана Фростманом.

В этой связи стоит упомянуть и о сложном соотношении между емкостной мерой и мерой Хаусдорфа в размерности D , полученном Телором.

5. «Аномальная» размерность

Ядра $|u|^{-F}$, где $F \neq E - 2$, ассоциируются в сознании физика с пространством вложения с «аномальной евклидовой» размерностью $2 - F$. (Не следует думать, что под этими терминами

подразумеваются какие-то реальные обобщения размерности E на какие-либо положительные вещественные числа, кроме целых.)

Принимая во внимание ^{а)} наличие связи между размерностями D и

F (размерность Фростмана) и ^{б)} роль размерности D в описании скоплений галактик (установленную ранее), мы приходим в рамках «аномально – размерностной» терминологии к следующему

утверждению: фрактальная размерность скоплений галактик $D = 1$ не является аномальной, однако наблюдаемая фрактальная

размерность $D = 1,23$ требует, по всей видимости, пространства вложения с аномальной размерностью.

Размерность и покрытие множества (или его дополнения) шарами

В понимании Мандельброта фрактальная размерность и все ее допустимые варианты являются не топологическими, но метрическими понятиями. Они включают в себя некое метрическое пространство Ω , то есть пространство, в котором соответствующим образом определяется расстояние между любыми двумя точками. Замкнутый

(либо открытый) шар с центром ω и радиусом ρ в таком пространстве представляет собой множество всех точек, находящихся от точки ω на расстоянии $\leq \rho$ (либо $< \rho$). (Шары суть сплошные тела, а сферами мы называем их поверхности.)

Существует много способов покрытия некоторого заданного ограниченного множества S в пространстве Ω . Часто (как, например, в случаях, рассматриваемых в данном разделе) эти способы естественным образом включают в себя понятие размерности. В фундаментальных прецедентных исследованиях упомянутые размерности имеют одинаковые значения. Однако в других примерах их значения могут быть различными.

1. Кантор и Минковский

Самый приблизительный способ покрытия, восходящий еще к Кантору, заключается в том, что каждая точка множества S объявляется центром шара; объединение этих шаров рассматривается далее как сглаженный вариант множества S и обозначается через $S(\rho)$.

Добавим сюда допущение о том, что Ω является E -мерным евклидовым пространством. В этом случае понятие объема (vol) определено, и можно записать

$$\text{vol} \{d\text{-мерный шар радиуса } \rho\} = \gamma(d) \rho^D,$$

где

$$\gamma(d) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^d / \Gamma(1 + d/2).$$

Если S - куб, объем которого много больше ρ^3 , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim \text{vol}[S]$$

Если S - квадрат, площадь которого много больше ρ^2 , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim 2\rho \times \text{площадь}[S]$$

Если S - интервал, длина которого много больше ρ , то

$$\text{vol}[S(\rho)] \sim \pi\rho^2 \times \text{длина}[S]$$

Уточним наше выражение. Введем для обозначения объема, площади или длины общий термин «протяженность», а буквой d обозначим стандартную размерность. Положив

$$V = \text{vol}[S(\rho)] / \gamma(E-d)\rho^{E-d}$$

мы увидим, что и для кубов, и для квадратов, и для прямых верно следующее выражение:

$$\text{протяженность}[S] = \lim_{\rho \rightarrow 0} V$$

Эта формула представляет собой вовсе не пустячное соотношение, связывающее два в равной степени безобидных понятия, как это может показаться на первый взгляд. Как показывает пример, представленный Х. А. Шварцем (1882), по мере увеличения точности триангуляции кругового цилиндра сумма площадей треугольников вовсе не обязательно сходится к площади поверхности цилиндра. Для того, чтобы избежать такого парадоксального поведения, Минковский предпринял попытку свести понятия длины и площади к простой и здравой концепции объема с помощью вышеописанного метода покрытия множества S шарами.

Здесь, однако, с самого начала возникает небольшое затруднение: выражение для V при $\rho \rightarrow 0$ может и не иметь предела.

В этом случае предел \lim заменяется парой \limsup и \liminf .

Любому вещественному числу A из открытого интервала

$[\liminf, \limsup]$ соответствует, по меньшей мере, одна

последовательность значений $\rho_m \rightarrow 0$, таких, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{vol} \left\{ [S(\rho_m)] / \gamma(E-d) \rho_m^{E-d} \right\} = A$$

Такой последовательности, однако, не существует, если либо

$A < \liminf$, либо $A > \limsup$. В соответствии с этими

определениями, Минковский называет величины

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \text{vol} [S(\rho)] / \gamma(E-d) \rho^{E-d}$$

и
$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \text{vol} [S(\rho)] / \gamma(E-d) \rho^{E-d}$$

верхней и нижней d - протяженностью множества S . Если они

равны, их значение совпадает с d - протяженностью множества S .

Минковский также отмечает, что в случае стандартных евклидовых

фигур существует некая величина D , такая, что при $d > D$ верхняя

протяженность S обращается в нуль, а при $d < D$ нижняя

протяженность S бесконечна.

2. Булиган

Обобщение определения Минковского на случай нецелочисленных d было предпринято Булиганом. На роль размерности Минковского – Булигана D_{MB} из упомянутых выше пределов больше подходит **liminf**, способный принимать дробные значения.

Булиган понимал, что размерность D_{MB} подчас противоречит здравому смыслу и, в общем, менее удобна, чем размерность Хаусдорфа – Безиковича D . Однако она часто совпадает с D и легче поддается оценке, а значит, может оказаться полезной.

Рассматривается случай $E = 1$ и подтверждается, что размерность D_{MB} часто равна D , может быть больше D , но не может быть меньше.

3. Понтрягин и Шнирельман. Колмогоров и Тихомиров

Среди всевозможных наборов шаров радиуса ρ , покрывающих множество S в метрическом пространстве Ω , наиболее экономичным по определению является тот, который содержит наименьшее количество шаров. Если множество S ограничено, это наименьшее количество конечно и может быть обозначено как $N(\rho)$. Учитывая это обстоятельство, Понтрягин и Шнирельман выдвинули в качестве альтернативного определения размерности следующее выражение:

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \ln N(\rho) / \ln 1/\rho$$

Дальнейшее развитие этот подход получил в работе Колмогорова и Тихомирова, авторы которой, почерпнув вдохновение в шенноновской теории информации, окрестили величину $\ln N(\rho) / \rho$ – энтропией множества S . Хокс называет соответствующую размерность нижней

энтропийной размерностью, а ее вариант, получаемый заменой \liminf на \limsup - верхней энтропийной размерностью. Кроме того, Хокс показывает, что размерность Хаусдорфа – Безиковича не может превышать нижней энтропийной размерности; они часто совпадают, но не всегда.

Рассматривается также величина $M(\rho)$, определяемая как наибольшее количество точек в S , отстоящих друг от друга на расстояние, превышающее 2ρ . Для множеств, расположенных на прямой, $M(\rho) = N(\rho)$. Для других множеств величину

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \ln M(\rho) / \ln 1/\rho$$

можно считать еще одной размерностью.

У Колмогорова и Тихомирова величина $\ln M(\rho)$ называется емкостью, что в высшей степени неудачно ввиду того, что в теории потенциала уже существует такой термин с совершенно иным и, на взгляд Мандельброта, более оправданным значением. В особенности следует избегать искушения определить выведенную в предыдущем абзаце размерность, как емкостную размерность.

4. Безикович и Тейлор. Бойд

Известно, что в том случае, когда пространство Ω представляет собой интервал $[0,1]$ или вещественную прямую, пыль S полностью определяется своим дополнением, т.е. объединением максимальных открытых интервалов или пустот (в некоторых построениях все пустоты являются тремами).

Троичная канторова пыль C на интервале $[0,1]$. Длины пустот составляют в сумме единицу и следуют гиперболическому

распределению $\Pr(U > u) = Fu^{-D}$. Следовательно, порядок длины λ_n n -й пустоты (в порядке уменьшения размера) равен $n^{-1/D}$.

Обобщенные линейные множества нулевой меры Лебега.

Поведение длины λ_n при $n \rightarrow \infty$ рассмотрено в работе Безиковича и Телора. Существует некоторый вещественный показатель D_{BT} , такой, что ряд $\sum \lambda_n^d$ сходится при $d > D_{BT}$ (в частности, сходится к 1 при $d = 1$). Таким образом, D_{BT} представляет собой инфимум вещественных чисел d , при которых $\sum \lambda_n^d < \infty$. Можно показать, что $D_{BT} \geq D$. Хокс доказывает, что величина D_{BT} совпадает с верхней энтропийной размерностью, причем иногда легче поддается оценке.

Если S не является множеством нулевой меры, показатель D_{BT} не является размерностью.

Размерность подобия: некоторые особенности:

В некоторых открытых множествах (т.е. не содержащих свои предельные точки) можно наблюдать значительное несоответствие размерностей.

Множество концевых точек трем канторовой пыли самоподобно и характеризуется теми же значениями N и r , что и вся канторова пыль, т.е. его размерность подобия совпадает с размерностью подобия канторовой пыли. Однако оно является счетным, а это означает, что

его размерность Хаусдорфа – Безиковича равна нулю. Если добавить сюда предельные точки пыли, то мы получим саму канторову пыль, и несоответствие исчезнет «в пользу» размерности подобия, которая для этого множества является более важной характеристикой.

Еще один простой пример, который Мандельброт называет множеством Безиковича, рассматривается в разделе нелакунарные фракталы, 3.

Размерность Фурье и эвристика

Пусть $\mu(x)$ - некоторая неубывающая функция от $x \in [0, 1]$. Если максимальные открытые интервалы, в которых значение μ постоянно, составляют в сумме дополнение замкнутого множества S , то мы говорим, что множество S является опорным для $d\mu(x)$. Преобразование Фурье – Стильеса функции μ имеет вид

$$\hat{\mu}(f) = \int \exp(iffx) d\mu(x)$$

Самые гладкие функции μ дают наивысшую возможную скорость уменьшения $\hat{\mu}$. Обозначим через D_F наибольшее вещественное число, при котором, по меньшей мере, одна функция $\mu(x)$ с носителем S удовлетворяет равенству

$$\hat{\mu}(f) = o\left(|f|^{-D_F/2+\varepsilon}\right) \text{ при } f \rightarrow \infty \text{ для всех } \varepsilon > 0,$$

но ни одна $\mu(x)$ не удовлетворяет

$$\hat{\mu}(f) = o\left(|f|^{-D_F/2-\varepsilon}\right) \quad \text{при } f \rightarrow \infty \quad \text{для некоторых } \varepsilon > 0$$

Выражение « $a = o(b)$ при $f \rightarrow \infty$ » означает здесь, что $\lim_{f \rightarrow \infty} (a/b) = 0$. Когда множество S заполняет весь интервал $[0, 1]$, величина D_F бесконечна. И напротив, когда S - одна - единственная точка, $D_F = 0$. Когда S представляет собой множество нулевой меры Лебега, величина D_F конечна и не превышает размерности Хаусдорфа - Безиковича D этого множества.

Неравенство $D_F \leq D$ показывает, что фрактальные и гармонические свойства фрактального множества связаны между собой, но не обязательно совпадают.

Для доказательства того, что эти размерности могут различаться, предположим, что S - это множество на прямой, причем его размерность D равна D_F . Если рассматривать S как множество на плоскости, то размерность D не изменится, а D_F обратится в нуль.

Определение. В качестве удобного способа обобщения некоторых гармонических свойств S , Мандельброт предложил назвать величину D_F размерностью Фурье множества S .

Множества Сейлема. Равенство $D_F = D$ описывает целую категорию множеств, называемых множествами единственности, или множествами Сейлема.

Эмпирическое правило и эвристика. Интересующие нас в прецедентных исследованиях фракталы оказываются, как правило, множествами Сейлема. Поскольку величина D_F во многих случаях легко определяется из экспериментальных данных, можно использовать ее для оценки D .

Неслучайные множества Сейлема. Неслучайная канторова пыль является множеством Сейлема только тогда, когда коэффициент r удовлетворяет определенным теоретико-числовым свойствам.

Случайные множества Сейлема. Случайная канторова пыль является множеством Сейлема тогда, когда ее случайность достаточно велика для нарушения любой арифметической закономерности.

Пример, предложенный самим Р. Сейлемом, очень сложен. В качестве альтернативного примера можно привести пыль Леви: показано, что спектр $dL(x)$ (здесь $L(x)$ - лестница Леви в среднем почти совпадает со спектром дробной броуновской функции из прямой в прямую и представляет собой сглаженный вариант спектра функции Гаусса – Вейерштрасса.

Показано, что образ компактного множества S с размерностью δ относительно дробной броуновской функции из прямой в прямую с показателем H представляет собой множество Сейлема с размерностью $D = \min(1, \delta/H)$.

Канторова пыль не является множеством Сейлема. Тройная канторова пыль появилась в результате поисков Георгом Кантором множества единственности, - поисков, которые не увенчались успехом. (Кантор тогда забросил гармонический анализ и – за неимением лучшего – создал теорию множеств.) Обозначим канторову лестницу через $C(x)$. Спектр $dC(x)$ имеет ту же общую форму, что и спектр $dL(x)$, однако содержит, в отличие от последнего, некоторое

количество случайно расположенных острых пиков неубывающего размера, из чего можно заключить, что $D_F = 0$.

Для теории множеств единственности наличие этих пиков играет решающую роль, однако на практике они вовсе не столь значимы. В большинстве случаев при оценке [спектральной плотности](#) пики игнорируются, и в расчет принимается только общая форма спектра, определяемая размерностью D .

Статистический анализ с применением нормированного размаха R/S

До недавних пор в прикладной статистике принимались как само собой разумеющиеся два следующих допущения в отношении временных

рядов: предполагалось, что $\langle X^2 \rangle < \infty$ и что [случайная величина](#)

X обладает краткосрочной зависимостью. Мандельброт показал, что эмпирические последовательности данных с длинными хвостами часто

лучше интерпретируются в свете допущения $\langle X^2 \rangle = \infty$. С вопросом же о том, является та или иная последовательность данных слабо (краткосрочно) или сильно (долгосрочно) зависимой, впервые столкнулись еще тогда, когда Мандельброт ввел долгосрочную зависимость для интерпретации феномена Херста.

Такая смесь длинных хвостов и очень долгосрочной зависимости могла бы завести статистиков в тупик, поскольку стандартные методы второго порядка, рассчитанные на неизменную зависимость

([корреляцию](#), спектры), руководствуются допущением $\langle X^2 \rangle < \infty$.
Есть, однако, альтернатива.

Можно пренебречь распределением величины $X(t)$ и проанализировать ее долгосрочную зависимость с помощью

нормированного размаха; иначе такая процедура называется R/S - анализом. Этот статистический метод основан на различии между краткосрочной и очень долгосрочной зависимостями. В этом методе вводится постоянная J , которая называется коэффициентом Херста, или R/S - показателем, и может принимать любые значения в интервале от 0 до 1.

Значимость постоянной J можно описать еще до ее определения.

Особое значение $J = 1/2$ характерно для независимых, марковских и других случайных функций с краткосрочной зависимостью. Таким образом, для того, чтобы узнать, присутствует ли в эмпирических данных или в выборочных функциях очень долгосрочная непериодическая статистическая зависимость, достаточно проверить,

приемлемо ли статистически предположение $J = 1/2$. Если нет, то такая зависимость присутствует, а мера ее интенсивности определяется разностью $J - 1/2$, значение которой можно оценить на основании имеющихся данных.

Главное достоинство такого подхода заключается в том, что показатель J устойчив по отношению к маргинальному распределению. То есть он эффективен не только в тех случаях, когда последовательности данных или случайные функции являются почти гауссовыми, но и

тогда, когда распределение $X(t)$ настолько далеко от гауссова, что $\langle X^2(t) \rangle$ расходится, а в этом случае не работает ни один из методов второго порядка.

Определение статистического R/S - размаха. В непрерывном

времени t определим

$$X^*(t) = \int_0^t X(u) du$$

$$X^{2*}(t) = \int_0^t X^2(u) du$$
 и $X^{*2} = (X^*)^2$. В дискретном времени i определим $X^*(0) = 0$ и $X^*(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X(i)$; здесь $[t]$ - целая часть t . Для всякого $d > 0$ (величину d назовем запаздыванием) определим скорректированный размах суммы $X^*(t)$ на временном промежутке от 0 до d в виде

$$R(d) = \max_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d)X^*(d)\} - \min_{0 \leq u \leq d} \{X^*(u) - (u/d)X^*(d)\}$$

Оценим далее выборочное среднеквадратическое отклонение величины $X(t)$:

$$S^2(d) = X^{2*}(d)/d - X^{*2}/d^2$$

Величина $Q(d) = R(d)/S(d)$ называется статистическим R/S - размахом или самонормированным самокорректированным размахом суммы $X^*(t)$.

Определение R/S - показателя J . Предположим, что существует некоторое вещественное число J , такое, что при $d \rightarrow \infty$ величина $(1/d^J)[R(d)/S(d)]$ сходится по распределению к некоторой невырожденной предельной [случайной величине](#). Как доказано, из этого предположения следует, что $0 \leq J \leq 1$. В этом случае говорят,

что функция X имеет R/S - показатель J и постоянный R/S - префактор.

Сделаем более общее предположение: пусть к некоторой невырожденной предельной [случайной величине](#) сходится по

распределению отношение $\frac{[1/d^J L(d)] [R(d)/S(d)]}{L(d)}$, где

$L(d)$ - некоторая медленно изменяющаяся на бесконечности функция, т.е. функция, удовлетворяющая условию

$L(td)/L(d) \rightarrow 1$ при $d \rightarrow \infty$ для всех $t > 0$. Простейшим

примером такой функции является $L(d) = \ln d$. В этом случае

говорят, что функция X имеет R/S - показатель J и R/S - префактор $L(d)$.

Основные результаты. Когда $X(t)$ - белый гауссов шум, имеем

$J = 1/2$ и постоянный префактор. Если точнее, то отношение

$e^{-\delta J} R(e^\delta)/S(e^\delta)$ является стационарной [случайной функцией](#)

от $\delta = \ln d$.

В более общем виде, равенство $J = 1/2$ справедливо во всех случаях,

когда $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$, а нормированная сумма $a^{-1/2} X^*(at)$ при

$a \rightarrow \infty$ слабо сходится к $B(t)$.

Когда $X(t)$ - дискретный дробный гауссов шум (т.е. последовательность приращений функции $B_H(t)$), имеем $J = H$, где $H \in]0, 1[$.

В более общем виде, для получения $J = H \neq 1/2$ и постоянного префактора достаточно, чтобы $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$ и чтобы сумма $X^*(t)$ приближалась к функции $B_H(t)$ так, что $\langle X^*(t) \rangle \sim t^{2H}$.

В еще более общем виде, значение $J = H \neq 1/2$ и префактор $L(d)$ преобладают, если $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$, а $X^*(t)$ приближается к функции $B_H(t)$ и удовлетворяет соотношению $\langle X^{*2}(t) \rangle \sim t^{2H} L(t)$.

И наконец, $J \neq 1/2$, если $S(d) \rightarrow \langle X^2 \rangle$, а $X^*(t)$ приближается к некоторой негауссовой масштабно-инвариантной случайной функции с показателем $H = J$.

С другой стороны, если X - белый устойчивый по Леви шум (т.е. $\langle X^2 \rangle = \infty$), то $J = 1/2$.

Когда функция X в результате дифференцирования становится стационарной, то $J = 1$.

Стационарность. Степени стационарности

Используя в научных текстах «обыкновенные» слова, мы либо ^{а)} имеем в виду их общеупотребительные, «мирские» значения (выбор которых зависит от автора), либо ^{б)} придаем им статус формальных определений (для чего выделяем какое-либо особое значение и заносим его на – в данном случае – математические «скрижали»). Терминам стационарный и эргодический повезло в том смысле, что математики достигли согласия относительно их значения. Мандельброт, однако, имел возможность на собственном опыте убедиться в том, что многие инженеры, физики и статистики-практики, признавая математическое определение на словах, на деле придерживаются более узких взглядов. Мандельброт, напротив, расширил математическое определение. Ниже, следуя Мандельброту, перечисляются основные недоразумения, возникающие при употреблении упомянутых терминов, и делается попытка объяснить, почему математическое определение нуждается в расширении.

Математическое определение. Процесс $X(t)$ является стационарным, если распределение величины $X(t)$ не зависит от t , а совместное распределение $X(t_1 + \tau)$ и $X(t_2 + \tau)$ не зависит от τ ; причем то же верно и для совместных распределений $X(t_1 + \tau) \dots X(t_k + \tau)$ при всех k .

Первое недоразумение (философия). Согласно распространенному мнению, научной может считаться та деятельность, объектом которой являются феномены, подчиняющиеся неизменным правилам. Неверное понимание стационарности чаще всего является следствием именно такого взгляда на вещи: многие полагают, что под стационарностью подразумевается всего лишь инвариантность во времени управляющих процессом правил. Это далеко не так. Например, приращение

$B(t_1 + \tau) - B(t_2 + \tau)$ представляет собой броуновского движения гауссову случайную величину, среднее и дисперсия которой не зависят от τ . Не зависит от τ и правило построения множества нулей броуновского движения. К стационарности, однако, имеют отношение только те правила, которые управляют значениями самого процесса. В случае броуновского движения эти правила не являются инвариантными во времени.

Второе недоразумение (прикладная статистика). Статистики предлагают множество методов (иногда даже в виде программного обеспечения для компьютеров) «анализа временных рядов»; на деле же диапазон возможностей этих методов оказывается гораздо уже, чем можно было бы ожидать, судя по ярлыку. Это неизбежно, так как математическая стационарность – понятие слишком общее для того, чтобы какой-нибудь отдельный метод оказался бы применим ко всем возможным случаям. Однако тем самым статистики невольно воспитывают убежденность в том, что понятие «стационарного временного ряда» тождественно другим, более узким понятиям, охватываемым тем или иным методом. Даже в тех случаях, когда авторы методов берут на себя труд проверить свои творения на «устойчивость», они учитывают лишь минимальные отклонения от простейшего состояния, не принимая в расчет весьма радикальных отклонений, ничуть не противоречащих стационарности.

Третье недоразумение (инженеры и физики). Многие исследователи (отчасти благодаря более ранним недоразумениям) полагают, что если выборочный процесс стационарен, то это означает, что он «может сдвигаться вверх и вниз, но остается в некотором роде статистически тем же». Такая интерпретация вполне годилась на раннем, «неформальном», этапе, однако в настоящий момент она неприемлема. Математическое определение описывает лишь правила порождения, но никак не затрагивает порождаемые объекты. Когда математики впервые столкнулись со стационарными процессами с чрезвычайно беспорядочными выборками, они были поражены тем, что понятие стационарности может включать в себя такое изобилие самых различных и неожиданных форм поведения. К сожалению, именно такие формы поведения многие практики наотрез отказываются признавать стационарными.

Серая зона. Нет никаких сомнений в том, что граница между стационарными и нестационарными процессами проходит где-то между белым гауссовым шумом и [броуновским движением](#); споры вызывает лишь точное ее местонахождение.

Уточнение границы с помощью масштабно-инвариантных шумов. Гауссовы масштабно-инвариантные шумы могут послужить удобным средством для уточнения спорной границы, поскольку их

[спектральная плотность](#) имеет вид f^{-B} , где $B \geq 0$. Для [белого шума](#) $B = 0$, для [броуновского движения](#) $B = 2$, граница же между стационарными и нестационарными процессами попадает на различные значения B в зависимости от того, какими соображениями руководствуются «землемеры».

Математики, желая избежать «инфракрасной катастрофы», помещают

границу при значении $B = 1$, так как условие $\int_0^1 f^{-B} df < \infty$ эквивалентно $B < 1$.

Однако поведение выборки масштабно-инвариантного шума при $B = 1$ изменяется весьма плавно. В сущности, гораздо более заметные изменения происходят при переходе от $B = 0$ к $B > 0$ - настолько заметные, что исследователи-практики склонны считать нестационарной любую выборку с $B > 0$. Стремясь быть последовательными, они также заявляют, что для представления данных, которые выглядят, как выборка с $B > 0$, необходима исключительно нестационарная модель.

Мандельброт обнаружил, что вследствие исключения из рассмотрения значений $B > 1$ определение стационарности оказывается недостаточно общим для многих прецедентных исследований.

Условно стационарные спорадические процессы. Например, теория фрактальных шумов позволяет предположить, что процесс, состоящий из броуновских нулей стационарен в ослабленной форме. В самом деле, предположим, что где-то в промежутке между $t = 0$ и $t = T$ имеется хотя бы один нуль. Результатом такого предположения будет [случайный процесс](#), зависящий от T как от дополнительного внешнего параметра. Мандельброт отмечал, что совместное

распределение значений $X(\tau + t_m)$ не зависит от t при условии, что все моменты времени $\tau + t_m$ находятся между 0 и T . Таким образом, нестационарный процесс броуновских нулей неявно включает в себя целый класс случайных процессов, каждый из которых условно стационарен, чего часто бывает вполне достаточно.

Процессы этого класса так тесно взаимосвязаны, что Мандельброт даже предложил рассматривать их как один обобщенный [стохастический процесс](#), называемый спорадическим процессом.

Отличие такого процесса от стандартного [случайного процесса](#)

заключается в том, что мера $\mu(\Omega)$ всего выборочного пространства Ω бесконечна. То есть эту меру никак нельзя нормализовать к виду

$\mu(\Omega) = 1$. О бесконечной мере $\mu(\Omega)$ для случайных переменных

писал еще Реньи. Для того чтобы мера $\mu(\Omega) = \infty$ не привела к катастрофе, в теории обобщенных [случайных величин](#) делается допущение о том, что эти величины наблюдаются только будучи

обусловленными некоторым событием C , таким, что

$$0 < \mu(C) < \infty$$

Хотя применимость случайных переменных Реньи очень ограничена, спорадические функции оказываются иногда весьма полезными: в частности, с их помощью Мандельброту удалось избежать в нескольких случаях инфракрасной катастрофы, объяснив тем самым существование некоторых масштабно-инвариантных шумов с

$$B \in [1, 2]$$

Эргодичность. Перемешивание. Различным интерпретациям подвергается также и понятие эргодичности. В математической литературе понятие эргодичности включает в себя различные формы перемешивания. Существуют процессы с сильным перемешиванием и процессы со слабым перемешиванием. Различие между этими формами (если судить о нем по математическим трудам) может показаться весьма незначительным и далеким от реальных природных феноменов. Мандельброт утверждает, что это не так. Например, масштабно-инвариантные шумы с $0 < B < 1$ представляют собой процессы со слабым перемешиванием и ни в коем случае не с сильным.

Четвертое недоразумение (относительно возможности предельной сходимости к $B(t)$). Широко распространено мнение, согласно

которому высказывание «процесс $X(t)$ стационарен» равносильно

$$X^*(t) = \sum_{s=0}^t X(s)$$

утверждению о том, что его текущую сумму

можно нормализовать таким образом, чтобы она сходилась к [броуновскому движению](#). Математикам давно известно, что это мнение лишено каких бы то ни было оснований, а во многих из

прецедентных исследований участвуют функции $X(t)$, которые ему
 прямо противоречат благодаря либо эффекту Ноя $\left(\langle X^2(t) \rangle = \infty \right)$,

либо эффекту Иосифа (бесконечная зависимость, как в f^{-B} - шумах с $B > 0$).

Вокруг границы между математически стационарными и нестационарными процессами не прекращаются бурные семантические диспуты. На практике же граница оккупирована процессами, которые хотя и не отвечают нашим интуитивным представлениям о стационарных процессах, все же способны выступать в роли объектов научного исследования.

Лексические проблемы. И снова возникает необходимость в новых терминах. Мандельброт предложил термин установившийся в качестве

а) синонима того, что математики называют «стационарный и такой,

что сумма $X^*(t)$ сходится к $B(t)$ », и б) термина для обозначения того интуитивного понятия, которое исследователи-практики склонны именовать «стационарностью». Обратное понятие можно обозначить терминами неустановившийся или блуждающий.

В одной из своих работ Мандельброт предложил называть **установившиеся процессы лапласовыми и мягкими**. Последнее слово употреблено в значении «безопасный, легко контролируемый»; это значение вполне подходяще, поскольку, имея дело с таким случайным процессом, можно не опасаться каких-либо сюрпризов с его стороны – не стоит ждать от него тех резких отклонений и разнообразных конфигураций, благодаря которым анализ блуждающих [случайных процессов](#) представляет собой более сложное, но и гораздо более интересное занятие.

Устойчивые по Леви случайные величины и функции

Среди достоинств гиперболического распределения отметим формальную простоту и инвариантность при усечении (см. раздел масштабная инвариантность при усечении). Другие преобразования, оставляющие его инвариантным, нас сейчас не интересуют. Гораздо большее значение для нас имеют сейчас распределения, инвариантные при сложении. Гиперболическими они являются лишь асимптотически, а Поль Леви выбрал для них в свое время в качестве названия перегруженный термин: «устойчивые распределения». Он же ввел и понятие устойчивого процесса, в котором участвуют как гиперболическое, так и устойчивое распределения.

До публикации работ Мандельброта устойчивые [случайные величины](#) считались явлениями «патологическими» и даже «чудовищными»; единственное исключение составлял случайный [вектор](#) Хольтсмарка, о котором мы поговорим в подразделе 9. Мандельброт предложил некоторые области приложения устойчивых случайных величин,

важнейшие из которых описаны ранее; кроме того, ниже (подраздел 4) упоминается о возможности применения таких величин в генетике.

1. Гауссовы С.В. масштабно-инвариантны при сложении

Известно, что гауссово распределение обладает следующим свойством:

возьмем две независимые гауссовы случайные величины G_1 и G_2 и запишем

$$\langle G_1 \rangle = \langle G_2 \rangle = 0; \quad \langle G_1^2 \rangle = \sigma_1^2; \quad \langle G_2^2 \rangle = \sigma_2^2;$$

тогда их сумма удовлетворяет равенству

$$\langle G_1 + G_2 \rangle = 0; \quad \langle (G_1 + G_2)^2 \rangle = \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

Что более важно, величина $G_1 + G_2$ сама является гауссовой случайной величиной. Таким образом, гауссово свойство инвариантно при сложении независимых случайных величин. Иными словами, гауссову случайную величину можно рассматривать как возможное решение системы уравнений, состоящей из функционального уравнения.

$$(L) \quad (s_1 X_1 + s_2 X_2) = sX$$

и вспомогательные соотношения

$$(A:2) \quad s_1^2 + s_2^2 = s^2.$$

В действительности же, только гауссово распределение удовлетворяет как уравнению (L) , так и соотношению $(A:2)$ (без учета масштаба).

Более того, если в качестве вспомогательного соотношения выступает $\langle X^2 \rangle < \infty$, то гауссова [случайная величина](#) опять оказывается единственным решением.

2. [Случайная величина Коши](#)

Поскольку практически настроенные ученые не склонны подвергать

сомнению соотношение $\langle X^2 \rangle < \infty$, широко распространено мнение о том, что гауссово распределение является единственным устойчивым распределением. Это определенно не соответствует истине, о чем первым поведал Коши еще в 1853 г. Коши приводит в пример некую [случайную величину](#) (впервые рассмотренную Пуассоном и называемую теперь «приведенной переменной Коши»), которая удовлетворяет следующему равенству

$$\Pr(X > -x) = \Pr(X < x) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \operatorname{tg}^{-1} x;$$

отсюда

$$\text{плотность Коши} = 1 / \left[\pi (1 + x^2) \right].$$

Коши показал, что эта случайная величина является решением [системы уравнений](#), составленной из (L) и альтернативного вспомогательного соотношения

$$(A:1) \quad s_1 + s_2 = s.$$

Для случайной величины Коши $\langle X^2 \rangle = \infty$ или, точнее, $\langle X \rangle = \infty$.
 То есть для выражения такой очевидной вещи, как равенство масштаба произведения случайной величины X на некоторое неслучайное число S произведению S на масштаб X , нам потребуется для измерения масштаба величина, отличная от среднеквадратического значения. Одним из кандидатов на эту роль является расстояние между квантилями Q и Q' , где $\Pr(X < Q') = \Pr(X > Q) = 1/4$.

Чаще всего случайная величина Коши используется в качестве контрпримера.

Геометрическая порождающая модель. Вышеприведенную формулу

$\Pr(X < x) = 1/2 + \pi^{-1} \operatorname{tg}^{-1} x$ можно реализовать

геометрически, разместив точку W с равномерным распределением вероятностей на окружности $u^2 + v^2 = 1$ и

определив X как абсциссу точки, в которой прямая, проходящая через начало координат O и точку W , пересекает прямую $v = 1$.

Случайная величина Y , определяемая в этом же построении как ордината точки, в которой прямая, проходящая через O и W , пересекает прямую $u = 1$, имеет то же распределение, что и X .

Поскольку $Y = 1/X$, получается, что величина, обратная случайной величине Коши, также является случайной величиной Коши.

Более того: всякий раз, когда вектор $OW = (X, Y)$ является изотропно распределенным случайным вектором в плоскости, величина Y/X является случайной величиной Коши. В частности, отношение двух независимых гауссовых случайных величин есть случайная величина Коши.

3. Возвращение броуновского движения

Составим систему из уравнения (L) и вспомогательного соотношения

$$(A:0,5) \quad s_1^{0,5} + s_2^{0,5} = s^{0,5}$$

Решением этой системы будет [случайная величина](#), плотность которой при $x < 0$ равна нулю, а в остальных случаях имеет вид

$$p(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-1/2x) x^{-3/2}$$

Величина $p(x)dx$ представляет собой [вероятность](#) того, что броуновская функция, удовлетворяющая равенству $B(0) = 0$, удовлетворяет также равенству $B(t) = 0$ при некотором значении t из интервала $[x, x+dx]$.

4. Обобщенные устойчивые по Леви случайные величины

Коши рассмотрел обобщенное вспомогательное соотношение

$$(A:D) \quad s_1^D + s_2^D = s^D$$

Симметричные решения. Основываясь на формальных расчетах,

Коши утверждает, что [система уравнений](#) (L) и $(A:D)$ имеет при любом значении D единственное решение: [случайную величину](#), плотность которой имеет вид

$$\pi^{-2} \int_0^{\infty} \exp(u^{-D}) \cos ux \, du$$

Поля и Леви показывают, что при $0 < D \leq 2$ предположение Коши в самом деле подтверждается, а гауссово распределение и распределение Коши являются частными случаями этого правила. Однако при

$D > 2$ это предположение оказывается несостоятельным, поскольку в этом случае вышеприведенная формальная плотность принимает отрицательные значения, что есть абсурд.

Крайние несимметричные решения. Леви, кроме того, показывает, что [система уравнений](#) (L) и $(A:D)$ допускает и несимметричные решения. В случае наиболее экстремально асимметричных решений порождающая функция ([преобразование Лапласа](#)) определена и равна $\exp(g^D)$.

Другие несимметричные решения. Общим решением [системы уравнений](#) (L) и $(A:D)$ является взвешенная разность двух независимых одинаково распределенных решений с крайней асимметрией. Веса принято обозначать через $\frac{1}{2}(1 + \beta)$ и $\frac{1}{2}(1 - \beta)$.

Окончательное обобщение уравнения (L) . При неизменном $(A:D)$ заменим условие (L) условием

$$(L^*) \quad s_1 X_1 + s_2 X_2 = sX + \text{const}$$

При $D \neq 1$ такая замена ничего не меняет, однако при $D = 1$ система допускает дополнительные решения, которые называются асимметричными случайными величинами Коши.

Бактерии – мутанты. Мандельброт показал, что общее количество мутировавших бактерий в старой культуре (задача Луриа – Дельбрюка) представляет собой устойчивую по Леви [случайную величину](#) с крайней асимметрией.

5. Форма устойчивых по Леви плотностей

Если не считать трех исключений ($D = 2$ с $\beta = 0$, $D = 1$ с $\beta = 0$ и $D = 1/2$ с $\beta = 1$), не известны устойчивые по Леви распределения в замкнутой аналитической форме, однако свойства этих простых исключений можно обобщить и на другие случаи.

Во всех крайних асимметричных случаях с $0 < D < 1$ плотность при $x < 0$ обращается в нуль.

В результате обобщения того факта, что гауссова плотность равна $\exp(-1/2x^2)$, мы имеем небольшой хвост крайних асимметричных случаев с $1 < D < 2$. Плотность здесь $\propto \exp(-c|x|^{D/(D-1)})$.

При $x \rightarrow \infty$ плотность Коши $\propto (\pi)^{-1} x^{-D-1}$, а плотность возвращений броуновской функции $\propto (2\pi)^{-1/2} x^{-D-1}$. В общем виде, при любом $D \neq 2$ плотность в длинном хвосте (или хвостах) $\propto x^{-D-1}$.

В иных случаях поведение плотности $\rho(u)$ приходится находить численно.

6. Неравенство слагаемых и проистекающая из него кластеризация

Пусть X_1 и X_2 независимые случайные величины с одинаковой плотностью вероятности $p(u)$. Плотность вероятности величины $X = X_1 + X_2$ имеет вид

$$p_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)p(u-y) dy$$

Если известно значение суммы u , то плотность условного распределения каждого из слагаемых y равна

$p(y)p(u-y)/p_2(u)$. Рассмотрим подробно форму этой плотности

Примеры. Когда плотность $p(u)$ является гауссовой плотностью с единичной дисперсией, т.е. унимодальной функцией (или функцией с одним максимумом), условное распределение также является

гауссовым с центром в точке $1/2u$, а его дисперсия равна $1/2$, т.е. не зависит от u (см. раздел броуновские фрактальные множества, 3). При $u \rightarrow \infty$ относительные значения слагаемых почти равны.

Когда плотность $p(u)$ представляет собой приведенную плотность Коши, т.е. снова унимодальную функцию, следует различать два очень непохожих случая. При $|u| \leq 2$, что составляет половину всех

значений u , условное распределение также унимодально, а наиболее вероятным значением снова является $\frac{1}{2}u$. В противоположном случае (при $|u| > 2$) значение $\frac{1}{2}u$ становится наименее вероятным (локально). При $|u| = 2$ условное распределение разветвляется на две отдельные «огивы», центры которых расположены в окрестности точек $y = 0$ и $y = u$. По мере того, как $u \rightarrow \pm \infty$, становится все труднее отличить эти огивы от огив Коши с центрами в точках 0 и u .

Когда плотность $p(u)$ представляет собой плотность возвращений броуновской функции, ситуация напоминает случай Коши, только еще более крайний, причем плотность условного распределения является бимодальной с вероятностью $> \frac{1}{2}$.

Вывод: рассмотрим три последовательных возвращения в нуль

некоторого случайного блуждания: T_{k-1} , T_k и T_{k+1} . Если

значение разности $T_{k-1} - T_{k+1}$ велико, то точка среднего возвращения с наибольшей вероятностью располагается чрезвычайно

близко либо к точке T_{k-1} , либо к T_{k+1} , вероятность же того, что она окажется где-нибудь посередине между крайними возвращениями, можно полагать наименьшей. Этот результат сродни одному «противоестественному» правилу из теории вероятности: закону арксинуса Леви.

Рассмотрим теперь условное распределение величины U , если

известно, что сумма M величин U_g принимает очень большое значение u . В случае гауссова распределения результат, скорее всего, окажется таким: каждое слагаемое U_g будет приблизительно равно

u/M . В случае же Коши (как и в случае броуновских возвращений) следует ожидать прямо противоположного результата: все слагаемые, кроме одного, будут очень малы.

Несоответствие, заключенное в идее «одинаковых» вкладов в сумму. Из того, что слагаемые a priori одинаковы (т.е. имеют одинаковое распределение), следует, что их значения могут a posteriori оказаться либо почти равными (как в случае гауссова распределения), либо в различной степени неравными (как в случае устойчивого по Леви распределения при очень большом значении суммы).

7. Нестандартные центральные пределы. Роль гиперболических случайных величин

Дана бесконечная последовательность X_n , составленная из независимых и одинаково распределенных случайных величин. Центральная предельная задача формулируется следующим образом:

возможно ли выбрать такие веса a_n и b_n , чтобы сумма

$$a_N \sum_1^N X_n - b_N$$

имела нетривиальный предел при $N \rightarrow \infty$?

В стандартном случае $\langle X_n^2 \rangle < \infty$ ответ на этот вопрос будет стандартен и утвердителен: $a_N = 1/\sqrt{N}$, $b_N \sim \langle X_n \rangle \sqrt{N}$, а предел является гауссовым.

Нестандартный случай $\langle X_n^2 \rangle = \infty$ намного сложнее: а) выбор a_N и b_N не всегда возможен; б) когда выбор возможен, предел оказывается устойчивым негауссовым; в) для того, чтобы показатель предела был равен D , достаточно, чтобы последовательность X_n имела асимптотически гиперболическое распределение с показателем

$D; \Gamma$) необходимое и достаточное условие приводится в источниках, перечисленных в начале этого раздела.

8. Устойчивые по Леви функции из прямой в прямую

Эти функции представляет собой случайные функции со стационарными независимыми приращениями, причем величина

приращений $X(t) - X(0)$ является устойчивой по Леви

случайной величиной. Масштабный коэффициент $a(t)$, благодаря которому величина $[X(t) - X(0)]a(t)$ остается независимой от

t , должен иметь вид $a(t) = t^{-1/D}$.

Этот процесс является обобщением обыкновенного

броуновского движения на случай $D \neq 2$.

Наиболее важное свойство функции $X(t)$ заключается в том, что она разрывна и содержит скачки.

Случай $D < 1$. В этом случае $X(t)$ не содержит ничего, кроме скачков, причем количество скачков, происходящих за интервал от t до $t + \Delta t$ и имеющих абсолютное значение, превышающее u , представляет собой распределенную по закону Пуассона

случайную величину с математическим ожиданием $|\Delta t| u^{-D}$.

Относительные количества положительных и отрицательных скачков

равны, соответственно, $\frac{1}{2}(1 + \beta)$ и $\frac{1}{2}(1 - \beta)$. Крайний

асимметричный случай $\beta = 1$ допускает только положительные скачки; такая функция называется устойчивым субординатором и служит для определения лестниц Леви.

Парадокс. Поскольку $u^{-D} \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow 0$, общее ожидаемое количество скачков бесконечно, какой бы малой ни была величина Δt . То обстоятельство, что связанная с этим ожиданием вероятность также окажется бесконечной, представляется парадоксальным. Однако парадоксальность исчезает, как только мы обращаем внимание на то, что общее количество скачков, для которых $u < 1$, составляет конечную величину. Этот вывод выглядит вполне естественным, если отметить, что ожидаемая длина малого скачка конечна и пропорциональна

$$\int_0^1 D u^{-D-1} u du = D \int_0^1 u^{-D} du < \infty$$

Случай $1 < D < 2$. В этом случае вышеприведенный интеграл расходится, т.е. общий вклад малых скачков составляет бесконечную величину. Вследствие этого функция $X(t)$ содержит два члена, непрерывный и скачковый; каждый из членов бесконечен, однако сумма их конечна.

9. Устойчивые по Леви векторы и функции

Заменим случайную величину X в функциональном уравнении (L) , участвующем в определении устойчивости, случайным вектором X . Если задан некоторый единичный вектор V , то очевидно, что система уравнений (L) и $(A:D)$ имеет элементарное решение – произведение вектора V на скалярную устойчивую случайную величину.

Леви показал, что общее решение есть просто сумма всех элементарных решений, каждое из которых соответствует своему направлению в пространстве и взвешено в соответствии с некоторым распределением по поверхности единичной сферы. Вклады этих

решений могут быть дискретными (конечными или счетно бесконечными), либо бесконечно малыми. Для того, чтобы вектор X был изотропным, элементарные вклады должны быть распределены равномерно по всем направлениям.

Устойчивые по Леви векторные функции от времени. Подобно устойчивым скалярным функциям, векторные функции допускают разложение в сумму скачков, следующих гиперболическому распределению. Размеры и направления скачков определяются распределением по поверхности сферы.

Распределение Хольтсмарка. Спектроскопические исследования Хольтсмарка пережили свое время благодаря тому, что их результаты оказалось возможным переформулировать в терминах ньютоновского притяжения; до появления работ Мандельброта только в этих исследованиях фигурировал конкретный пример устойчивого по Леви распределения. Предположим, что в точке O имеется некая звезда, а в пространстве распределено (независимо друг от друга и с ожидаемой плотностью δ) еще некоторое количество звезд единичной массы.

Какова общая сила притяжения, испытываемая звездой O со стороны этих звезд? Вскоре после того, как Ньютон открыл свой знаменитый обратный - квадратичный закон притяжения, преподобный Бенгли написал ему письмо, в котором указал на то, что притяжение звезд, заключенных внутри узкого конуса $d\Omega'$ с вершиной в точке O , имеет бесконечное математическое ожидание; то же можно сказать и о притяжении звезд, заключенных внутри узкого конуса $d\Omega''$, симметричного конусу $d\Omega'$ относительно точки O . Бенгли заключил, что разница между этими бесконечностями не определена.

При решении задачи Хольтсмарка (в том виде, в каком ее обычно формулируют) подобная трудность нам не грозит, так как здесь мы имеем дело не с самими математическими ожиданиями, а с разностями между действительными и ожидаемыми величинами притяжения. Для начала рассмотрим звезды, заключенные внутри области,

ограниченной вышеописанным конусом угловой величины $d\Omega$ и сферами радиусов r и $r+dr$. Каждая звезда притягивает с силой

$u = r^{-2}$, а их количество представляет собой пуассонову случайную величину с ожиданием

$\delta |d \Omega| d(r^3) = \delta |d \Omega| d\left(u^{-3/2}\right)$. Следовательно, для разности между действительным притяжением и его математическим ожиданием имеем характеристическую функцию

$$\exp \left\{ \delta |d \Omega| \int_0^{\infty} [\exp(i \zeta u) - 1 - i \zeta u] \left| d\left(u^{-3/2}\right) \right| \right\}$$

Как выясняется, эта разность соответствует устойчивой по Леви случайной величине с показателем $D = 3/2$ и $\beta = 1$. Из подраздела 6 (см. выше) нам известно, что большое положительное значение u обусловлено, скорее всего, присутствием одной – единственной звезды вблизи точки O и не зависит от плотности звезд в других местах; распределение случайной величины U при очень больших u ведет себя как распределение величины притяжения ближайшей звезды.

Таким образом, общее избыточное притяжение представляет собой изотропный устойчивый по Леви вектор с $D = 3/2$.

Смысл устойчивости можно объяснить так: допустим, звезда O испытывает притяжение со стороны двух равномерно распределенных звездных облаков, состоящих, скажем, из красных и голубых звезд; тогда величины силы притяжения только красных звезд, только голубых звезд и всех звезд вместе различаются лишь масштабным коэффициентом, а не аналитической формой их распределения.

10. Устойчивые случайные функции из пространства в прямую

Построение броуновской функции из пространства в прямую, предложенное Ченцовым, обобщено Мандельбротом для устойчивого случая.

11. Масштабная инвариантность при взвешенном сложении

В разделе нелакунарные фракталы (подраздел 4) описывается семейство обобщений устойчивых по Леви [случайных величин](#). Эти обобщения основываются на обобщении условия устойчивости по

Леви (L) , заключающемся в замене весов $S_i \mu$ случайными величинами.

Функция Вейерштрасса и родственные ей функции. Ультрафиолетовая и инфракрасная катастрофы

Комплексная функция Вейерштрасса имеет вид

$$W(0) = (1 - \mathbf{w}^2)^{-1/2} \sum_0^{\infty} \mathbf{w}^n \exp(2\pi i b^n t)$$

где $b > 1$ - некоторое вещественное число, а \mathbf{w} записывается либо как $\mathbf{w} = b^{-H}$ ($0 < H < 1$), либо как $\mathbf{w} = b^{D-2}$ ($1 < D < 2$).

Вещественная и мнимая части функции $W_0(t)$ называются, соответственно, косинусоидой и синусоидой Вейерштрасса.

Функция $W_0(t)$ непрерывна, но нигде не дифференцируема. Однако ее формальное обобщение на случай $D < 1$ и непрерывно, и дифференцируемо.

Кроме самой функции $W_0(t)$ в настоящем разделе рассматриваются некоторые ее варианты; необходимость в их представлении обусловлена тем новым смыслом, который придала функции Вейерштрасса теория фракталов.

Частотный спектр функции $W_0(t)$. Термин «спектр», на взгляд Мандельброта, перегружен значениями. Под частотным спектром понимается множество допустимых значений частоты f безотносительно к амplitудам соответствующих составляющих.

Частотный спектр периодической функции представляет собой последовательность положительных [целых чисел](#). Частотный спектр броуновской функции – это \mathbb{R}^+ . Частотный же спектр функции Вейерштрасса есть дискретная последовательность b^n от $n=1$ до $n = \infty$.

Энергетический спектр функции $W_0(t)$. Под энергетическим спектром понимается множество допустимых значений частоты f вместе со значениями энергии (квадратами амплитуд) соответствующих составляющих. На каждое значение частоты вида

$f = b^n$ в функции $W_0(t)$ имеется спектральная линия энергии вида

$(1 - w^2)^{-1} w^{2n}$. Следовательно, суммарное значение энергии на

частотах $f \geq b^n$ сходится и пропорционально

$$w^{2n} = b^{-2nH} = f^{-2H}$$

Сравнение с дробным броуновским движением. Суммарная энергия

пропорциональна f^{-2H} еще в нескольких рассмотренных нами ранее случаях: а) дробные периодические случайные функции Фурье – Броуна – Винера, допустимые частоты для которых имеют вид

$f = n$, а соответствующие коэффициенты Фурье равны $n^{H-1/2}$;

б) случайные процессы с непрерывной спектральной плотностью

совокупности, пропорциональной $2H f^{-2H-1}$. Последние процессы суть не что иное, как дробные броуновские функции

$B_H(t)$, описанные ранее. Например, при $H = 1/2$ можно

обнаружить кумулятивный спектр функции Вейерштрасса (f^{-1}) в обыкновенном броуновском движении, спектральная плотность

которого пропорциональна f^{-2} . Существенное различие: броуновский спектр абсолютно непрерывен, тогда как спектры функций Фурье – Броуна - Винера и Вейерштрасса дискретны.

Недифференцируемость. Для доказательства отсутствия у функции

$W_0(t)$ конечной производной при любом значении t Вейерштрассу

пришлось объединить два следующих условия: а) b - нечетное

целое число, вследствие чего функция $W_0(t)$ представляет собой

ряд Фурье, и б) $\log_b(1 + 3\pi/2) < D < 2$. Необходимые и

достаточные условия ($b > 1$ и $1 < D < 2$) взяты из статьи Харди.

Расходимость энергии. Привычному к спектрам физику условия Харди представляются очевидными. Применяя эмпирическое правило,

гласящее, что производная функции вычисляется умножением ее k -го коэффициента Фурье на k , физик находит для формальной

производной функции $W_0(t)$, что квадрат амплитуды коэффициента Фурье с $k = b^n$ равен $(1 - w^2)^{-1} w^{2n} b^{2n}$. Так как совокупная энергия на частотах, больших b^n , бесконечна, физику становится ясно, что производную $W_0'(t)$ определить невозможно.

Интересно отметить, что Риман в поисках примера недифференцируемости пришел к функции

$$R(t) = \sum_1^{\infty} n^{-2} \sin(2\pi n^2 t)$$

, энергия спектра которой на частотах, больших $f = n^2$, пропорциональна $n^{-3} = f^{-2H}$, где $H = 3/4$. Таким образом, применяя то же эвристическое рассуждение, можно

предположить, что производная $R'(t)$ недифференцируема. Заключение это верно лишь отчасти, поскольку при определенных значениях t производная $R'(t)$ все-таки существует.

Ультрафиолетовая расходимость / катастрофа. Термин «катастрофа» появился в физике в первом десятилетии XX века, когда Рэлей и Джинс независимо друг от друга разработали теорию излучения абсолютно черного тела, согласно которой энергия частотного диапазона ширины df в окрестности частоты f пропорциональна f^{-4} . Это означает, что совокупная энергия спектра на высоких частотах бесконечна – что оказывается весьма катастрофичным для теории. Поскольку источником неприятностей являются частоты, лежащие за ультрафиолетовой частью спектра, явление получило название ультрафиолетовой (УФ) катастрофы.

Всем известно, что Планк построил свою квантовую теорию на руинах, в которые обратила теорию излучения именно УФ – катастрофа.

Историческое отступление. Отметим, что причиной смерти как старой физики (**†1900**), так и старой математики (**†1875**) является одна и та же расходимость, подорвавшая их веру в то, что непрерывные функции просто обязаны быть дифференцируемыми. Физики отреагировали простым изменением правил игры, математикам же пришлось научиться жить с недифференцируемыми функциями и их формальными производными. (Последние представляет собой единственный часто применяемый в физике пример обобщенной функции Шварца.)

В поисках масштабно-инвариантного дискретного спектра.

Инфракрасная расходимость. Хотя частотный спектр броуновской функции непрерывен, масштабно-инвариантен и существует при $f = 0$, частотный спектр функции Вейерштрасса, соответствующий тому же значению H , дискретен и ограничен снизу значением $f = 1$. Наличие нижней границы обусловлено исключительно тем обстоятельством, что число b у Вейерштрасса изначально было целым, а функция – периодической. Для устранения этого обстоятельства следует, очевидно, позволить n принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. А для того, чтобы [энергетический спектр](#) стал масштабно-инвариантным, достаточно сопоставить каждой частотной компоненте b^n амплитуду w^n .

К сожалению, получаемый в результате ряд расходится, и повинны в этом низкочастотные компоненты. Такой дефект называется инфракрасной (ИК) расходимостью (или «катастрофой»). Как бы то ни было, с этой расходимостью приходится мириться, поскольку иначе нижняя граница $f = 1$ вступает в противоречие с самоподобием, присущим [энергетическому спектру](#) f^{-2H} .

Модифицированная функция Вейерштрасса, самоаффинная относительно фокального времени $t = 0$. Самая простая процедура, позволяющая продолжить частотный спектр f^{-2H}

функции Вейерштрасса до значения $f = 0$ и избежать при этом катастрофических последствий, состоит из двух этапов: сначала получаем выражение $W_0(0) - W_0(t)$, и лишь затем позволяем n принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$. Добавочные члены, соответствующие значениям $n < 0$, при $0 < H < 1$ сходятся, а их сумма непрерывна и дифференцируема. Модифицированная таким образом функция

$$W_1(t) - W_0(0) = (1 - w^2)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} w^n \left[\exp(2\pi i b^n t) - 1 \right]$$

по-прежнему является непрерывной, но нигде не дифференцируемой.

Вдобавок, она масштабно - инвариантна в том смысле, что

$$\begin{aligned} W_1(tb^m) - W_0(0) &= (1 - w^2)^{-1/2} \sum_{-\infty}^{\infty} w^{-m} w^{n+m} \left[\exp(2\pi i b^{n+m} t) - 1 \right] = \\ &= w^{-m} \left[W_1(t) - W_0(0) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w^{-m} \left[W_1(b^m t) - W_0(0) \right]$ не зависит от

m . Можно сказать иначе: при $r = b^m$ функция

$r^{-H} \left[W_1(rt) - W_0(0) \right]$ не зависит от h . То есть функция

$W_1(r) - W_0(0)$, ее вещественная и мнимая части самоаффинны

относительно значений r вида b^{-m} и фокального времени $t = 0$.

Гауссовы случайные функции с обобщенным спектром Вейерштрасса. Следующим шагом на пути к реализму и широкой применимости является рандомизация обобщенной функции Вейерштрасса. Простейший и наиболее естественный метод заключается в умножении ее коэффициентов Фурье на независимые комплексные гауссовы случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Вещественная и мнимая части получаемой в результате функции могут с полным правом называться функциями Вейерштрасса – Гаусса (модифицированными). В некоторых смыслах эти функции можно считать приближенными дробными броуновскими функциями. Когда значения H совпадают, их спектры настолько похожи, насколько позволяет то обстоятельство, что один из этих спектров непрерывен, а другой дискретен. Более того, к функциям Вейерштрасса – Гаусса применимы результаты Орея и Маркуса, а фрактальные размерности их множеств уровня совпадают с фрактальными размерностями множеств уровня дробных броуновских функций.

Фрактальные свойства. Согласно доказанной теореме, (см. раздел эвристика липшица – Гельдера), фрактальная размерность графика функции с некоторым показателем H , удовлетворяющей при всех x условию Липшица, находится в интервале от 1 до $2 - H$. Известно, что в случае броуновской функции с тем же кумулятивным спектром f^{-2H} размерность принимает наибольшее возможное значений $2 - H = D$. Мандельброт предполагает, что то же верно и для кривой Вейерштрасса. А размерность ее нуля – множества равна $1 - H$.

Ноль - множества родственных функций. Функции Радемахера представляет собой «ступенчатые» варианты синусоид вида

$\sin(2\pi b^{Nt})$, где $b = 2$. Когда синус положителен (отрицателен, обращается в нуль), значение функции Радемахера равно 1 (соответственно, -1 и 0). Естественным обобщением функции Вейерштрасса является ряд, N - й член которого представляет собой

произведение \mathbf{w}^n на n -ю функцию Радемахера. Эта обобщенная функция разрывна, однако ее спектральный показатель по-прежнему равен $2H$. Учитывая прецедент в лице дробного [броуновского движения](#), можно предположить, что размерность нуль – множеств функции Вейерштрасса – Радемахера окажется равной $1 - H$. Это предположение находит подтверждение, однако только для целочисленных $1/H$.

Сингх упоминает о многих других вариантах функции Вейерштрасса. Размерность D нуль – множеств некоторых из них легко поддается оценке. Вообще, эта тема явно заслуживает более подробного исследования с учетом достижений современной теоретической мысли.

Характеристическая и кохарактеристическая функции

Классическое определение характеристической функции $J(t)$ при заданном множестве S имеет следующий вид: $J(x) = 1$, если $x \in S$, и $J(x) = 0$, если $x \notin S$. Когда множество S представляет собой канторово множество (салфетку или ковер) Серпинского, фрактальную сеть или любое множество из нескольких других классов фракталов, функция $J(x)$ не совсем удобна. На взгляд Мандельброта, часто бывает удобнее заменить функцию $J(x)$ другой функцией $C(x)$, которую ввел Мандельброт и которую предложил назвать кохарактеристической.

Функция $C(x)$ представляет собой случайно взвешенное среднее [характеристических функций](#) пустот множества S . Иными словами, в

каждом отдельном пустом промежутке $C(x)$ постоянна, а ее значения в других пустотах являются [независимыми случайными величинами](#) с одинаковым распределением.

Хаусдорфова мера и размерность Хаусдорфа – Безиковича

1. Мера Каратеодори

Кантору приходила в голову мысль о том, что «при исследовании размерностей непрерывных множеств невозможно обойтись без общего понятия объема или величины», однако он, по всей видимости, не уделил ей должного внимания. Лебег полагает, что, имея Кантор полное представление о сложности стоящей перед ним задачи, ему вряд ли удалось бы достичь сколько-нибудь значительных результатов. Эта мысль получила дальнейшее развитие в работе Каратеодори и была впоследствии воплощена Хаусдорфом.

Классическая процедура оценки площади плоской фигуры начинается с аппроксимации множества S с помощью набора очень маленьких квадратов; далее сторона каждого квадрата возводится в степень $D = 2$ и полученные результаты складываются. Каратеодори расширяет рамки этого традиционного подхода. Заменяя квадраты дисками, он избегает зависимости от координатных осей; кроме того, с самого начала предполагается, что мы не знаем, является ли множество S стандартной евклидовой фигурой известной размерности, вложенной в известное пространство \mathbf{R}^E .

Заметим теперь, что если плоскую фигуру, вложенную в трехмерное пространство, можно покрыть дисками, то ее a fortiori можно покрыть шарами, экваторами которых являются эти диски. Следовательно, если мы не хотим заранее считать множество S плоским, нам достаточно

покрыть его вместо дисков шарами. Если же S и в самом деле является поверхностью, ее приближенную меру можно получить простым сопоставлением каждому шару выражения вида $\pi\rho^2$ и последующим сложением этих выражений. В более общем виде, для получения меры какой-либо d -мерной фигуры следует складывать выражения вида $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$; входящая сюда функция $\gamma(d) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^d / \Gamma(1 + d/2)$ была определена ранее как протяженность шара единичного радиуса. На этом основании Каратеодори распространяет понятия «длины» и «площади» и на нестандартные фигуры.

2. Хаусдорфова мера

Хаусдорф расширяет определение Каратеодори, допуская возможность дробного значения d (функция $\gamma(d)$ записывается таким образом, что она при этом продолжает иметь смысл). Таким образом, мы больше не ограничены степенями ρ , а вольны использовать любую положительную пробную функцию $h(\rho)$, которая стремится к нулю вместе с ρ .

Более того, поскольку шар представляет собой всего лишь множество точек, расстояние до которых от центра W не превышает заданного радиуса ρ , шар продолжает оставаться определенным даже в случае неевклидова пространства Ω - при условии, что в этом пространстве определено расстояние. Как мы уже отмечали, такие пространства называются метрическими, следовательно, и хаусдорфова мера представляет собой метрическое понятие.

Если задана некоторая пробная (или «калибровочная») функция $h(\rho)$, то можно сказать, что мера конечного покрытия множества S шарами

радиуса ρ_m равна $\sum h(\rho_m)$. Для получения наиболее экономичного покрытия мы рассматриваем все покрытия шарами, радиус которых меньше ρ , и образуем инфимум

$$\inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m)$$

При $\rho \rightarrow 0$ ограничение $\rho_m < \rho$ становится чрезвычайно жестким.

$$\inf \sum h(\rho_m)$$

То есть выражение может только возрастать; у него есть предел, который имеет вид

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \inf_{\rho_m < \rho} \sum h(\rho_m)$$

Этот предел может быть конечным положительным, отрицательным или нулевым. Он определяет h -меру множества S .

Если $h(\rho) = \gamma(d) \rho^d$, то h -мера называется d -мерной. Точнее говоря, из-за префактора $\gamma(d)$ h -мера является нормированной d -мерной мерой.

Если $h(\rho) = 1/\ln |\rho|$, то h -мера называется логарифмической.

3. Внутренняя пробная функция множества

Функцию $h(\rho)$ можно назвать внутренней для множества S и обозначить как $h_S(\rho)$, если h_S -мера S положительна и конечна. Эту меру можно назвать фрактальной мерой множества S .

Для стандартных фигур евклидовой геометрии внутренняя пробная функция всегда имеет вид $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$, где D - некоторое [целое число](#). Хаусдорф показал, что внутренней для канторовых пылей и кривых Коха является функция $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ с нецелочисленным значением D .

Типичные случайные фракталы, пусть даже и статистически самоподобные, также обладают внутренней функцией $h_S(\rho)$, однако она имеет более сложный вид – например, $h_S(\rho) = \rho^D \ln|\rho|$. В этом случае h - мера множества S относительно функции $h(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ обращается в нуль, т.е. фигура содержит меньше «вещества», чем если бы она была D - мерной, но больше, чем если бы она была $D - \epsilon$ -мерной. В качестве примера можно привести траекторию [броуновского движения](#) на плоскости, внутренняя функция

для которого, согласно Леви, имеет вид $h(\rho) = \rho^2 \ln \ln(1/\rho)$.

Поскольку двумерная мера любого ограниченного множества на плоскости конечна, пробные функции вида $\rho^2 / \ln(1/\rho)$ не могут быть внутренними ни для какого плоского множества.

Автором (либо соавтором) многих работ, посвященных определению внутренних функций $h_S(\rho)$ случайных множеств, является С. Дж. Тейлор.

4. Размерность Хаусдорфа – Безиковича: определение

Если известно, что множество S двумерно, достаточно оценить хаусдорфову h - меру для $h(\rho) = \pi\rho^2$. Однако определение хаусдорфовой меры сформулировано таким образом, что

предварительного знания размерности D не требуется. Имея дело со стандартной фигурой неизвестной размерности, будем оценивать ее

меру для всех пробных функций $h(\rho) = \gamma(d)\rho^d$, где d - [целое число](#). Если длина фигуры бесконечна, а объем равен нулю, то она может быть только двумерной.

Безикович распространил суть последнего заключения на случаи, в которых показатель d не является [целым числом](#), а множество S - стандартной фигурой. Он показал, что для каждого множества S существует такое вещественное значение D , что d - мера этого множества при $d < D$ бесконечна, а при $d > D$ обращается в нуль.

Эта величина D и называется размерностью Хаусдорфа – Безиковича множества S .

Для физика это означает, что величина D представляет собой критическую размерность.

D - мерная хаусдорфова мера D - мерного множества S может быть либо равна нулю, либо бесконечна, либо положительна и конечна. Хаусдорф ограничился только последним, самым простым, случаем и показал, что в эту категорию входят канторовы множества и кривые Коха. Если множество S ко всему прочему еще и самоподобно, легко заметить, что его размерность подобия должна быть равна D . С другой стороны, мы знаем, что типичные случайные множества имеют в качестве естественной размерности нулевую меру.

Долгое время Безикович являлся автором или соавтором почти всех публикуемых по данной теме работ. Если Хаусдорфа можно назвать отцом нестандартной размерности, то Безикович заслужил себе звание ее матери.

Коразмерность. Когда в роли пространства Ω выступает \mathbf{R}^E , $D \leq E$, а разность называется коразмерностью.

5. Прямые произведения множеств (сложение размерностей)

Рассмотрим множества S_1 и S_2 , принадлежащие, соответственно, E_1 - пространству и E_2 - пространству, и обозначим через S множество в E - пространстве $(E = E_1 + E_2)$, представляющее собой произведение множеств S_1 и S_2 . (Если $E_1 = E_2 = 1$, то S - это множество расположенных на плоскости точек (x, y) , причем $x \in E_1$ и $y \in E_2$.)

Эмпирическое правило гласит, что если множества S_1 и S_2 «независимы», то размерность множества S равна сумме размерностей множеств S_1 и S_2 .

Понятие «независимости», входящее в это правило, сложно сформулировать и представить в общем виде.

6. Пересечения множеств (сложение коразмерностей)

Эмпирическое правило выглядит следующим образом: если S_1 и S_2 суть независимые множества в E - пространстве, и

$$\text{коразмерность } \{S_1\} + \text{коразмерность } \{S_2\} < E,$$

то левая часть этого [неравенства](#) почти наверное равна коразмерности $S_1 \cap S_2$. Если сумма коразмерностей больше E , то размерность пересечения почти наверное равна нулю.

В частности, два множества одинаковой размерности не пересекаются, если $D \leq E/2$. Размерность $E = 2D$ можно, таким образом, назвать критической.

Примечательно, что два броуновских следа (при том, что размерность броуновского следа $D = 2$) пересекаются при $E < 4$ и совершенно не соприкасаются при $E \geq 4$.

Правило распространяется и на пересечения более чем двух множеств.

Самопересечения. Множество k -кратных точек S можно рассматривать, как пересечение k реплик S . Напрашивается предположение, что, с точки зрения размерности пересечения, упомянутые k реплик можно считать независимыми. По крайней мере, в одном случае эта догадка оказывается верной. С. Дж. Тейлор исследовал следы [броуновского движения](#) и движения Леви в \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^2 (обобщая результаты, полученные Дворжецким, Эрдешем и Какутани). Размерность следа равна D , а размерность множества, состоящего из его k -кратных точек, составляет $\max[0, E - k(E - D)]$. Тейлор предположил, что этот результат верен в \mathbb{R}^E для всех k вплоть до $k = \infty$.

7. Проекция множеств

Эмпирическое правило таково: когда [фрактал](#) S размерности D проецируется вдоль независимого от S направления на евклидово

подпространство размерности E_0 , для проекции S^* верно равенство:

$$\text{размерность } S = \min(E_0, D)$$

Приложение. Пусть $x_1 \in S_1$ и $x_2 \in S_2$, где S_1 и S_2 - фракталы в \mathbf{R}^E с размерностями D_1 и D_2 . Через a_1 и a_2 обозначим некие неотрицательные вещественные числа и определим множество S как множество, составленное из точек вида $x = a_1x_1 + a_2x_2$.

Размерность D этого множества удовлетворяет неравенству:

$$\max(D_1, D_2) \leq D \leq \min(E, D_1 + D_2)$$

Для доказательства находим прямое произведение \mathbf{R}^E на \mathbf{R}^E и проецируем.

В случае независимости множеств скорее всего подойдет и верхний предел размерности. При $D = E = \mathbf{1}$ множество S является либо фракталом, либо множеством с интервалами.

8. Субразмерностная последовательность

Если внутренняя функция множества S имеет вид

$h_S(\rho) = \Upsilon(D)\rho^D$, свойства фрактала полностью описываются его размерностью D . Если же

$$h_S(\rho) = \rho^D [\ln(1/\rho)]^{\Delta_1} [\ln \ln(1/\rho)]^{\Delta_2}$$

то описание фрактальных свойств множества S оказывается более громоздким. Одной размерностью в этом случае не обойтись, требуется последовательность D, Δ_1, Δ_2 . Величины Δ_m можно назвать субординатными размерностями или субразмерностями.

Субразмерности в состоянии пролить свет на вопрос, следует ли считать фракталами пограничные множества, описанные в разделе фракталы, 3. Возможно имеет смысл называть фракталами любое множество S , размерность D которого равна D_T , но хотя бы одна субразмерность Δ отлична от нуля.

Эвристика Липшица – Гёльдера

Фрактальная размерность является по своему происхождению локальным свойством, несмотря на то, что локальные свойства оказывают влияние на свойства глобальные. Таким образом, имея дело с графиком во всех иных отношениях произвольной непрерывной функции $X(t)$, следует соотносить размерность D с другими локальными свойствами. Одним из наиболее полезных локальных свойств является показатель Липшица – Гёльдера (ЛГ) α . Суть условия ЛГ при t^+ состоит в том, что

$$X(t) - X(t_0) \sim |t - t_0|^\alpha \quad \text{при} \quad 0 < t - t_0 < \varepsilon;$$

аналогично оно выглядит и для случая t^- . Глобальный ЛГ –

показатель в интервале $[t', t'']$ имеет вид

$$\lambda[t', t''] = \inf_{t' \leq t \leq t''} \alpha. \quad \text{Если функция } X(t) \text{ не является}$$

постоянной, $\lambda \leq 1$.

ЛГ – **эвристика** и **размерность** D . Если известен показатель α , то количество квадратов со стороной r , необходимых для покрытия графика функции X между моментами времени t и $t+r$, приблизительно равно $r^{\alpha-1}$. Таким образом, можно покрыть график функции $X(t)$ на участке $t \in [0,1]$ с помощью N квадратов и приблизительно оценить размерность функции как $D = \ln N / \ln(1/r)$. Этот способ оценки D будем называть эвристикой Липшица – Гельдера. Он устойчив и весьма эффективен.

Примеры. Если функция X дифференцируема для всех t между 0 и 1, а точки, в которых $X'(t) = 0$, в расчет не принимаются, то на всем интересующем нас интервале $\alpha = 1$, и количество квадратов, необходимых для покрытия графика функции, равно $N \sim r^{\alpha-1}(1/r) = r^{-1}$. Отсюда $D = 1$, что, конечно же, верно.

Если $X(t)$ – броуновская функция (обыкновенная или дробная), то можно показать, что $\alpha \equiv \lambda = H$. Эвристическое значение N приблизительно равно r^{H-1-1} , т.е. $D = 2 - H$, что опять же согласуется с известной размерностью D .

Харди показывает, что для функций, описанных в разделе функция Вейерштрасса ... $\alpha \equiv H$. Следовательно, можно предположить, что их размерность Хаусдорфа – Безиковича равна $2 - H$.

Совершенно иначе обстоит дело с канторовой лестницей. Областью определения функции X являются здесь только те значения t , которые принадлежат фрактальной пыли с фрактальной размерностью $\delta < 1$, а показатель α зависит от t . Разделим интервал $[0,1]$ на

$1/r$ временных промежутков длины r . В $r^{-\delta}$ этих промежутков $\alpha = \delta$, в других промежутках показатель α не определен, однако если повернуть координатные оси на небольшой угол, то $\alpha = 1$. Отсюда эвристически получаем для количества покрывающих квадратов значение $r^{-1} + r^{\delta-1}r^{-\delta} = 2r^{-1}$, а для размерности $D=1$. Это в самом деле так.

Кроме того, для суммы броуновской функции и канторовой лестницы с $\delta < H$ получаем $D = 2 - H$ и $\lambda = \delta$, следовательно, $1 < D < 2 - \lambda$.

Об определении «фрактала». В разделе фракталы упоминается о желательности расширения рамок определения термина [фрактал](#) с тем, чтобы они включали и канторову лестницу. Может быть, следует сказать так: кривая фрактальна, если показатель $\lambda < 1$, а показатель α близок к λ при «достаточно многих» значениях t ?

Функции из прямой в плоскость. Возьмем две непрерывные функции $X(t)$ и $Y(t)$ с ЛГ – показателями λ_1 и λ_2 . Эвристически рассуждая, можно предположить, что для покрытия графика векторной функции от координат $X(t)$ и $Y(t)$ на участке $t \in [0, 1]$ потребуется не больше $r^{\lambda_1 + \lambda_2 - 3}$ кубов со стороной r ; следовательно, $1 \leq D \leq 3 - (\lambda_1 + \lambda_2)$. Размерность обыкновенного броуновского следа из прямой в плоскость $D = 2$ вполне согласуется с этим неравенством.

Проекции. Построим непрерывный след, проецируя функцию $\{X(t), Y(t)\}$ на плоскость (x, y) . При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ эвристика подсказывает, что для покрытия графика нам понадобится не более

$1/r$ квадратов со стороной r^{λ} ; следовательно,

$1 \leq D \leq \min(2, 1/\lambda)$. Рассмотрим аналогичным образом

непрерывный след функции $\{X(t), Y(t), Z(t)\}$, координаты которой имеют одинаковые ЛГ – показатели λ . Эвристическое

рассуждение дает $1 \leq D \leq \min(3, 1/\lambda)$. При $\lambda_1 \neq \lambda_2$

непрерывный след функции $\{X(t), Y(t)\}$ следует покрывать квадратами со стороной $r^{\max \lambda}$, значит:

$$1 \leq D \leq 2 - \max\left\{0, (\lambda_1 + \lambda_2 - 1) / \max(\lambda_1, \lambda_2)\right\}.$$

Приложение В

Фракталы в Интернете

1. <http://fractals.nsu.ru/>
2. <http://fractals.chat.ru/>
3. <http://fractals.narod.ru/>
4. <http://www.ghcube.com/fractals/general.html>
5. <http://narod.yandex.ru/userforum/?owner=fractals>
6. <http://www.uni-dubna.ru/kafedr/mazny/>
7. <http://fractan.boom.ru/>
8. http://composite.msu.ru/win/s_work/1/fr.htm
9. <http://home.ural.ru/~shabun/fractals/index.htm>
10. <http://chat.ru/~fractals/index.htm>
11. <http://www.bsu.ru/library/berson/>
12. <http://nauka.relis.ru/cgi/nauka.pl?07+0105+07105044+HTML>
13. <http://untitled.agava.ru/thinks/fractal/>
14. <http://elvisti.kiev.ua/skl/articles/fractals/sunduchkov.html>
15. <http://www.math.msu.su/~pobedria>
16. <http://sakva.narod.ru/fractals.htm>
17. http://www.visty.net/cplusp/all_96/6n96y/6n96yla.htm
18. <http://www.iph.ras.ru/~mifs/rus/danilov.net>
19. <http://www.geocities.com/CapeCanaveral/2854/>
20. <http://archives.math.utk.edu/topics/fractals.html>
21. <http://www.cosy.sbg.ac.at/rec/ifs/f-faq.html>
22. <http://www.cosy.sbg.ac.at/rec/ifs/index.html>
23. <http://www2.vo.lu/homepages/phahn/fractals/barnsley.htm>

24. <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/randomifs/>
25. <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/leafifs/>
26. <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/fern/>
27. <http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/gasket/>
28. http://www.swin.edu.au/astronomy/pbourke/fractals/roger_bagula/
29. <http://www.ealnet.com/ealsoft/fracted.htm>
30. <http://climate.gsfc.nasa.gov/~cahalan/FractalClouds/FractalClouds.html>
31. <http://polymer.bu.edu/>
32. <http://polymer.bu.edu:80/doc/HS.html>
33. <http://polymer.bu.edu:80/doc/Ter.html>
34. <http://polymer.bu.edu:80/doc/Ero.html>
35. <http://polymer.bu.edu:80/doc/ECD.html>
36. <http://polymer.bu.edu:80/doc/Lic.html>
37. <http://math.bu.edu/DYSYS/dysys.html>
38. <http://math.bu.edu/DYSYS/arcadia/index.html>
39. <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/chaos-game.html>
40. <http://math.bu.edu/DYSYS/FRACGEOM/index.html>
41. <http://math.bu.edu/INDIVIDUAL/bob/books.html>
42. <http://www2.unican.es/~gutiejm/linksfractals.html>
43. <ftp://spanky.triumf.ca/fractals>
44. <http://spanky.triumf.ca/www/spanky.html>
45. <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/fractint.html>

46. <http://spanky.triumf.ca/www/fractint/lsys/tutor.html>
47. http://www-chaos.umd.edu/nonlinear_sites.html
48. <http://sprott.physics.wisc.edu/>
49. <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos.htm>
50. <http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/Henongp.htm>
51. <http://sprott.physics.wisc.edu/fractals.htm>
52. <http://sprott.physics.wisc.edu/phys505/>
53. <http://sprott.physics.wisc.edu/pubs/paper210.htm>
54. <http://www-sintim.inria.fr/fractales/>
55. http://acacia.ens.fr:8080/home/massimin/quat/f_gal.ang.html
56. <http://www.cnam.fr/fractals.html>
57. <http://www.anu.edu.au/ITA/ACAT/contours/catalogue.html>
58. <http://www.cstp.umkc.edu/personal/bhung/home.html>
59. <http://rtfm.mit.edu/pub/usenet/news.answers/fractal-faq/>
60. <http://www.cis.ohio-state.edu/hypertext/faq/usenet/fractal-faq/faq.html>
61. <http://homepage.seas.upenn.edu/~lau/fractal.html>
62. <http://homepage.seas.upenn.edu/rajiyer/math480.html>
63. <http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/lectones/node1.html>
64. <http://www.math.okstate.edu/mathdept/dynamics/lectones/node41.html>
65. <http://www.mathcs.sjsu.edu/faculty/rucker/chaos.htm>
66. <http://www.625-net.com/archive/0497/worldbuilder.htm>
67. <http://www.fractalus.com/gumbycat/lesson3.html>
68. <http://nis-www.lanl.gov/~mgh/mand.shtml>
69. <http://life.csu.edu.au/complex/tutorials/tutorial3.html>
70. <http://www.mostang.com/mw/iss06/fract1.html>
71. <http://cogsci.ucsd.edu/~arobert/ifs.html>

72. <http://cogsci.ucsd.edu/~arobert/ifstech.html>

73.

<http://library.advanced.org/12740/netscape/discover/page9.html>

74.

<http://www.home.aone.net.au/byzantium/ferns/fractal.html>

Приложение С

Программы

	НАЗВАНИЕ	ОПЕРАЦИОННАЯ СИСТЕМА	КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ
1.	<u>Aros Fractals</u>	Win-95,98, 2000, Me, NT, MAC OS	Freeware. Вы можете исследовать некоторые классические фрактальные изображения с максимально высоким разрешением экрана и глубиной цвета.
2.	<u>Аттрактор & C°</u>	Windows	Shareware. Генерации изображений аттракторов.
3.	<u>Bryce</u>	Windows, MAC OS	Программа которая позволяет создавать настоящие 3х мерные миры и абстрактные трехмерные скульптуры с беспрецедентной мощностью и легкостью!
4.	<u>ChaosPro</u>	Amiga	Freeware. Генератор фракталов

			соединяет в себе мощь Fractint с большими возможностями от Mand2000.
5.	<u>ChaosPro 2.0</u>	Win-95, NT	Freeware 24 bit, 3D фрактальная программа (портирована с платформы Амига) с некоторыми добавочными возможностями, есть анимация, трехмерная трансформация, и многое другое.
6.	<u>Fast FPU Fractal Fun (FFFF) 2.0</u>	Windows	Генератор множества Мальденброта.
7.	<u>Flarium 24</u>	Win-95, NT	Freeware. 32-bit программа, написанная в Visual C++. Генерирует фракталы в 24-bit цветовом режиме.
8.	<u>FracPPC</u>	MAC OS	Freeware. Программа генерирует цветные изображения многих популярных фракталов, включая множество

			Мальденброта, также изображения множества Julia.
9.	<u>FracPPC</u>	MAC OS	
10	<u>Fractal Experience</u>	DOS, Win-95, NT	Freeware. Обучающая программа, дает студентам ответы на вопросы связанные с фракталами. Помогает разобраться в феномене Фракталов.
11	<u>Fractal Agent</u> <u>Fractal Commander</u> <u>Fractal Elite</u> <u>Fractal Vision</u> <u>Fractal Zplot</u> <u>Dofo-Zon 1.18</u>	Windows	Freeware. Оригинальные программы написанные для изображения escape-типе фракталов, используют концепцию комплексной арифметики. Расширяют основную комплексную арифметику до "hypercomplex" и "quaternion" математике. Формально известны

			как ZPlot, но переименованы так как торговая марка оспаривается. Fractal Agent - это intro версия, Fractal Commander 256-цветная версия, и Fractal Elite true-color версия.
12	<u>Fractal eXtreme</u>	Win-95, NT	Shareware. 32-bit программа исследования фракталов изображает каритны множества Мандельброта и других фракталов на вашем ПК дает вам возможность увеличивать интересующую оюласть фракталоа с помощью мышки или клавиатуры.
13	<u>Fractal Generator</u>	Win-95, NT	DCOM и Multi-CPU фрактальный генератор. Подготавливает отдельные модули для вычисления особенных фракталов.
14	<u>Fractal Orbits</u>	DOS, OS/2, Win-	Freeware, модуль

.		OS/2	для потключения как "ScreenSaver".
15	<u>Fractal Orbits 2</u>	DOS, OS/2, Win-OS/2	Freeware, модуль для потключения как "ScreenSaver".
16	<u>Fractal Orbits 32</u>	Win-95, NT	Freeware. 32-bit фрактальный генератор множеств Julia и Мальденброта.
17	<u>FractalPro</u>	Amiga	Профессиональная программа для художников и аниматоров.
18	<u>Fractal Texture Composer 2.0</u>	Win-95, NT	Shareware. 32-bit программа для имитирования трехмерных поверхностей. Идеальная утилита для начинающих или проффессиональных создателей текстур и background картин..
19	<u>Fractal Stuff</u>	DOS, MAC OS, UNIX, Windows	Маковская программа с отличным интерфейсом и "хранителем экрана" . Содержит Windows plasma-

			fractal-like generator, и многое другое.
20 .	<u>Fractint</u>	DOS, UNIX	Freeware. Фрактальный генератор созданный для IBMPC совместимых компьютеров. Одна из лучших программ для этих платформ.
21 .	<u>Fractopia</u> <u>Screen Saver</u>	Win-95	Программа написанная Gil Murreau дает вам возможность создавать очень неплохие "хранители экранов" всего за 5 шагов.
22 .	<u>Fractz</u>	Win-95, NT	Фрактальный генератор написанный Томом Стокесом (Tom Stokes).
23 .	<u>GrafZViZion</u>	Win-95, NT	Freeware. Программа использует Anti aliasing; Multiple view windows (MDI); full screen mode; Sharpen Filter;

			сохраняет изображения в several file formats.
24	<u>HOP-Fractals in Motion</u>	DOS, Windows, OS/2	Shareware. "хранитель экрана" рисует великолепные анимированные абстрактные изображения.
25	<u>IFS4</u>	Windows	Iterated Function System (IFS) "хранитель экрана" написанный в Borland's Pascal for Windows.
26	<u>INF1</u>	Win-95, NT	Freeware. Программа генерирует изображения множества Мальденброта. Очень простой пользовательский интерфейс.
27	<u>InkBlot Kaos</u>	Win-95, NT	Freeware. 32-bit программа написанная в Visual C++. Фракталы генерируется в 24 bit true color.
28	<u>Iterations</u>	Win-95, NT	Freeware. 32-bit программа

			написанная в Visual C++ генерирует фрактальные изображения с возможностью использования фонов и текстур из других изображений, карти или фотографий.
29 ·	<u>Java Applet</u>	Java	Fractal Worlds I - демонстрационный апплет написанный на Java. Автор Philip J. Baker.
30 ·	<u>Java Fractals</u>	Java	Различные Java апплеты включающие в себя IFS фракталы, комплексные фракталы, Orbit фракталы, и др..
31 ·	<u>Java Strange Attractor Search</u>	Java	Если ваш браузер поддерживает Java (Это делают большинство современных браузеров), вы можете смотреть законченные фрактальные изображения в нём.

32 .	<u>Javaquat</u>	Java	Freeware. Java программа для генерации и исследования фракталов. Используйте ее в online или скачайте, доступны исходные тексты программы и документация.
33 .	<u>Julia Saver</u>	Win-95	Изумительный, новый "хранитель экрана" с генерацией полноэкранных фрактальных изображений, когда ваш компьютер работает в холостую.
34 .	<u>Kai's PowerTools</u>	Windows, MAC OS	Плагин к Adobe Photoshop. Очень мощная штука.
35 .	<u>M24TOOLS</u>	Windows	Три программы для создания true-color картинок (базируются на спецификации HSL color). Естественно рисует множества Мальденброта и Julia.

36 .	<u>MakeMap</u>	Windows	Freeware. Утилита для создания 256 цветных карт которые используются с Fractint.
37 .	<u>Makin' Magic Fractals (MMFrac V2.3)</u>	DOS	Freeware. 32-bit генератор умеющий вращать в 4-х измерениях!!! А так же - сохранение параметров на диске, realtime 3-D, landscape/plasma режим, текстурные карты, и тд.
38 .	<u>MandleAcid 2.0</u>	MAC OS	Проигрыватель фракталов с прикольным интерфейсом.
39 .	<u>Persistence of Vision Raytracer</u>	DOS, Windows, MAC, UNIX	Высококачественная утилита для создания потрясающих трехмерных фракталов.
40 .	<u>Plankton Explorer</u>	DOS	Freeware. Маленькая программка которая может использоваться для исследования

			<p>странных аттракторов найденых физиками CERN. Gumowski и Mira.</p>
41	<u>Quat</u>	DOS, Windows, Linux	<p>Freeware. 32-bit программа генерации 24-bit true color PNG изображений и вычисления терхменрных фракталов.</p>
42	<u>Quaternion-Generator</u>	Windows	<p>Генератор множества Julia в 256 цветах, используются только как фоновый процесс. Сохраняет в clipboard (вы можете перенести изображение прямо в вашу любимую графическую программу), есть возможность загружать/сохранять параметры, загружать Fractint или PaintShop palettes.</p>
43	<u>Quaternion Julia Set VRML Server</u>	Website Browser	<p>Программа основана на движке CGI, используется</p>

			для генерации множества Julia в мирах VRML.
44 .	<u>SBART</u>	UNIX	Freeware. Дизайнерская утилита для генерации интересных двумерных изображений основанных на искусственном выборе, оригинальная идея Mr. Karl Sims.
45 .	<u>Seractal</u>	Windows	Shareware. "Хранитель экрана", рисует полноэкранные фракталы, с бесконечными вариантами цвета и изображений.
46 .	<u>Set Surfer</u>	Win-95	Freeware. Программа создает картины множества Мальденброта и Julia.
47 .	<u>Sterling-ware</u>	Win-95, NT	Freeware. Программа имеет функции: быстрое увеличение, Julia Mode, Inverse Mode,

			saves images in several file formats (executable and source code available).
48 .	<u>Symmetry</u>	Windows	Shareware. Программа генерирует фракталы и симметричные фигуры. Она основана на BASIC процедурах написанных Michael Field & Martin Golubitsky "SYMMETRY IN CHAOS", OUP 1992.
49 .	<u>TieraZon</u> <u>Tiera-Zon2</u>	Win-95, NT	Freeware. 32-bit программа. Один из многих популярных генераторов фракталов в режиме. Написана на Visual C++.
50 .	<u>TrueMand</u>	Windows	Freeware. Программа может использоваться для генерации изображения множества Мальденброта в режиме TrueColor.

	<u>TRUMAND</u>	DOS, Windows	Freeware. 24-bit генератор множества Мальденброта с интерактивным редактором цвета. Плюс другие утилиты и программы для скачивания.
51 .	<u>Ultra Fractal</u>	Win-95, NT	Shareware. Велеколепная 32-bit программа. Компилятор формул совместим с Fractint. Очень много возможностей.
52 .	<u>VistaPro</u>	Win-95, NT	Полностью 32-bit программа для рендеринга трехмерных изображений.
53 .	<u>WinFract</u>	Windows	Freeware. Простой интерфейс, богатые возможности.
54 .	<u>XaoS</u>	DOS, OS/2, MAC OS, UNIX, Plan 9	Freeware. Программа с очень быстрым увеличением (zoom). Изображает множество Мальденброта и др.

55 .	<u>XFE</u>	UNIX	
56 .	<u>Zplot</u>	Windows 95, 98	Freeware. Оригинальная программа написанная для изображения escape-type фракталов использующая функции комплексной математики.
57 .	<u>Jay R. Hill's various software</u>	Win-95, NT	Есть режимы такие как: "Deerzoom", "Find Period of Component", "Real roots", и другие.
58 .	<u>Philip J. Baker's various software</u>	Win-95, NT	Freeware. "Eight Screen Savers for Windows" пакет включает в себя Fractal Worlds I & II, и Mandelbrot. Очень красивые "хранители экрана".
59 .	<u>Spanky Fractal Database</u>	Amiga, DOS, Windows, OS/2, MAC, UNIX, etc.	Сайт включает много различных программ. Есть старые версии программ.
60 .	<u>Chaos Hypertextboo</u>	MAC OS	Здесь тысячи линков на ресурсы о

	<u>k (various software)</u>		хаосе, фракталах, и аттракторах. Здесь есть более 70 примеров программ для компьютеров с Mac OS.
61	<u>Paul Bourke (various software)</u>	MAC OS, UNIX	"FracHill" генератор фрактальных ландшафтов, рендерит их, и экспортирует в несколько 3D форматы; многое другое.
62	<u>Hoppy's website (various items)</u>	Win-95, NT	Информация о фракталах, включающая примеры программ на C и BASIC. Информация о 3D программировании с примерами программ.
63	<u>Sprott's Software (various items)</u>	DOS, Windows	Сайт имеет много линков на Freeware и коммерческое ПО. Все программы для PC и могут выполняться в режиме DOS.
64	<u>PicSaver v 3.0</u>	Win-95, NT	ScreenSaver

Литература

1. Балханов В.К. Введение в теорию фрактального исчисления. – Улан-Удэ: БГУ, 2001.
2. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – М., Ижевск: РХД, 2001.
3. Бондаренко В.А., Дольников В.Л. Фрактальное сжатие изображений по Барнсли-Слоану. // Автоматика и телемеханика, № 5, 1994.
4. Бородич Ф.М. Энергия разрушения фрактальной трещины, распространяющейся в бетоне или горной породе. // Доклады РАН, Т.325, № 3, 1992.
5. Бородич Ф.М., Онищенко Д.А. Фрактальная шероховатость в задачах контакта и трения (простейшие модели). // Трение и износ, Т. 14, № 3, 1993.
6. Витолин Д. Применение фракталов в машинной графике. // Computerworld-Россия, № 15, 1995.
7. Вишик М.И. Фрактальная размерность множеств. // Соросовский образовательный журнал, № 1, 1998.

8. Галиулин Р. От мавританских орнаментов к фракталам. // Наука и жизнь, № 8, 1995.
9. Данилов Ю.А. Красота фракталов. // Труды Московского Международного Синергетического Форума. 1997.
10. Дмитриев А. Хаос, фракталы и информация. // Наука и жизнь, № 5, 2001.
11. Долбилин Н. Игра "Хаос" и фракталы. // Квант, № 2, 1997.
12. Долбилин Н. Самоподобные мозаики. // Квант, № 2, 1998.
13. Жиков В.В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал, № 1, 1998.
14. Забарянский С.Ф. Фрактальное сжатие изображений. // Компьютеры + программы, № 6(39), 1993.
15. Зельдович Я.Б., Соколов Д.Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика. // УФН, Т.14, Вып. 3, 1985.
16. Иванов С.С. Оценка фрактальной размерности самоаффинных множеств: метод встречного масштабирования дисперсий. // ДАН, 1993, N 1, Т.332.
17. Иванова В.С., Баланкин А.С., Бунин И.Ж., Оксогоев А.А. Синергетика и фракталы в материаловедении. – М.: Наука, 1994.
18. Иванова В.С. Синергетика. Прочность и разрушение металлических материалов. – М.: Наука, 1992.
19. Иванюк Г.Ю. Фрактальные геологические среды: размерность, основные типы, генетические следствия. // Физика Земли, № 3, 1997
20. Козинцев С. Ландшафты фрактальных миров. // Наука и жизнь, № 12, 1995.
21. Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. – М.: Постмаркет, 2000.

22. Кулак М.И. Структурные аспекты фрактальной механики древесно-полимерных композитов. // Известия АН БССР. Серия физико-технических наук. № 2, 1991.
23. Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение. Статья в книге [16].
24. Лухнева О.Ф., Зуев Ф.Л. Фрактальная геометрия сетки активных разломов и рельефа Прибайкалья: применение метода встречного масштабирования дисперсий. // Геофизика на пороге третьего тысячелетия. Труды первой Байкальской молодежной школы-семинара. Под ред. Г.С. Вахромеева. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1999 г.
25. Мандельброт Б. Самоаффинные фрактальные множества. – М.: Мир 1988.
26. Мандельброт Б.Б. Фрактальная геометрия природы. – М., Ижевск: РХД, 2002.
27. Математическое моделирование в синергетических системах. // Материалы международной конференции. – Томск, Улан-Удэ, 1999.
28. Меньшиков М.В., Молчанов С.А., Сидоренко А.Ф. Теория перколяции и некоторые приложения. // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. М.: ВИНТИ, Т.24, 1986.
29. Милнор Дж. Голоморфная динамика. – М., Ижевск: РХД, 2000.
30. Мичи Д., Джонсон Р. Компьютер - творец. – М.: Мир, 1987.
31. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов. – Нижний Новгород: НижГУ, 1999.
32. Найденов В.И., Кожевникова И.А. Эффект Херста в геофизике // Природа, № 1, 2000.
33. Наймарк О.Б., Давыдова М.М. Топологический фрактальный анализ кинетики накопления дефектов при оценке прочности углеродных композитов. // Механика композитных материалов. Т.30, № 1, 1994.

34. Нигматуллин Р.Р., Овчинников М.Н., Рябов Я.Е. Фракталы: от узоров к движению. // Природа, № 2, 1998.
35. Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. – М.: Мир, 1993.
36. Потапов А. Фракталы в дистанционном зондировании. // Успехи современной радиоэлектроники. № 6, 2000.
37. Пригожин И.Р. Конец определенности. Время, Хаос и Новые Законы Природы. – М., Ижевск: РХД, 2001.
38. Пригожин И.Р., Стенгерс И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1985.
39. Ринчинов З.Ц. Фрактальный анализ речной сети и разломной тектоники Прибайкалья. // Геология и Геодинамика Евразии. XVIII Всероссийская молодежная конференция (19-23 апреля 1999 г.). – Иркутск, 1999.
40. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики. – М.: Мир, 1990.
41. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
42. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. – М.: Наука, 1991.
43. Странные аттракторы. // Под редакцией Синая Я.Г. и Шильникова Л.И. – М.: Мир, 1981.
44. Гранковский С. Красота хаоса // Наука и жизнь, № 4, 1994.
45. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991.
46. Фоменко А.Т. Наглядная геометрия и топология. – М.: МГУ-ЧеРо, 1998.
47. Фракталы в физике. // Труды 6 Международного симпозиума. – М.: Мир, 1988.
48. Фракталы. // Компьютерная газета, N 36 (226), 1999.
49. Шалагинов А.А. Об отображениях самоподобных кривых. // Сибирский математический журнал, Т.34, №.6, 1993.
50. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. – М., Ижевск: РХД 2001.

51. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. – М.: Наука, 1982.

—