

А.Е. Кононюк

**ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ
МАТЕМАТИКА**

Книга 6

Поверхности

Часть 1

**Киев
«Освіта України»
2013**



Кононюк Анатолий Ефимович



УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К65

Рецензенты:

В.В.Довгай - к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный технический университет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р физ.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, проф. (Киевский университет экономики, туризма и права);

Н.К.Печурин - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К213 Дискретная математика. (Поверхности). — В 12-и кн. Кн.б. ч.1.— К.:Освіта України. 2013.—564с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)

ISBN 978-966-373-694-5 (книга б. ч.1)

Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, используемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единую методологически взаимосвязанную математическую систему «Дискретная математика».

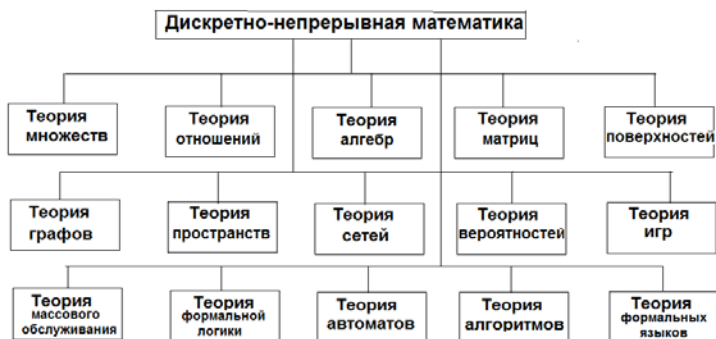
Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов всех специальностей.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-5 (книга б. ч.1)

© Кононюк А. Е., 2013
© Освіта України, 2013

Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

1. Двумерные преобразования.....	5
1.1. Изображение точек.....	5
1.2. Преобразования и матрицы.....	6
1.3. Преобразование точек.....	6
1.4. Преобразование прямых линий.....	10
1.5. Преобразование средней точки.....	12
1.6. Преобразование параллельных линий.....	16
1.7. Преобразование пересекающихся прямых.....	17
1.8. Поворот.....	23
1.9. Отражение.....	29
1.10. Масштабирование.....	33
1.11. Комбинированные преобразования.....	37
1.12. Преобразование единичного квадрата.....	41
1.13. Преобразования жестких конструкций.....	45
1.14. Перемещения и однородные координаты.....	48
1.15. Поворот вокруг произвольной точки.....	50
1.16. Отражение относительно произвольной прямой.....	51
1.17. Проецирование - геометрическая интерпретация однородных координат.....	55
1.18. Пропорциональное масштабирование.....	58
1.19. Точки бесконечности.....	60
1.20. Правила выполнения преобразований.....	65

2. Элементы теории кривых	69
2.1. Кривая линия и ее уравнение.....	69
2.2. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость.....	71
2.3. Натуральный параметр и сопровождающий трехгранник кривой.....	74
2.4. Лемма об ортонормальной тройке и формулы Серре — Френе ...	76
2.5. Винтовая линия и окружность.....	78
3. Плоские кривые	81
3.1. Представление кривых.....	81
3.2. Непараметрические кривые.....	83
3.3. Параметрические кривые.....	86
3.4. Параметрическое представление окружности.....	93
3.5. Параметрическое представление эллипса.....	99
3.6. Параметрическое представление параболы.....	106
3.7. Параметрическое представление гиперболы.....	112
3.8. Процедура использования конических сечений.....	119
3.9. Общие уравнения конических сечений.....	127
4. Пространственные кривые	145
4.1. Представление пространственных кривых.....	147
4.2. Кубические сплайны.....	152
4.3. Нормализованные кубические сплайны.....	177
4.4. Другие граничные условия.....	183
4.5. Параболическая интерполяция.....	197
4.6. Обобщенная параболическая интерполяция.....	206
4.7. Кривые Безье.....	214
4.8. В-сплайны.....	239
4.9. Конечные условия для периодических В-сплайнов.....	299
4.10. Подгонка В-сплайнов.....	313
4.11. Разбиение В-сплайнов.....	321
4.12. Рациональные В-сплайны.....	331
5. Элементы тензорной алгебры	362
5.1. Аффинная система координат на плоскости.....	362
5.2. Скалярное произведение и ковариантные координаты.....	365
5.3. Косое произведение и дополнительный вектор.....	366
5.4. Понятие тензора.....	369
5.5. Основные действия тензорной алгебры.....	372
5.6. Симметричный тензор второй валентности.....	380
5.7. Свертывание тензоров.....	385
6. Поверхности	388
6.1. Введение.....	388
6.2. Поверхности вращения.....	389
6.3. Заметающие поверхности.....	412

6.4. Квадратичные поверхности.....	423
6.5. Кусочное представление поверхностей.....	436
6.6. Отображение параметрических поверхностей.....	441
6.7. Билинейная поверхность.....	448
6.8. Линейчатые и развертывающиеся поверхности.....	452
6.9. Линейная поверхность Кунса.....	462
6.10. Бикубическая поверхность Кунса.....	474
6.11. Поверхности Безье.....	489
6.12. В-сплайн поверхности.....	507
6.13. В-сплайн интерполяция.....	525
6.14. Разбиение В-сплайн поверхностей.....	529
6.15. Гауссова кривизна и качество поверхности.....	536
6.16. Рациональные В-сплайн поверхности.....	542
Литература.....	562

1. Двумерные преобразования

Изучение математического аппарата, лежащего в основе теории поверхностей, мы начнем с рассмотрения способов вывода и преобразования точек и линий. Эти способы наряду с соответствующими алгоритмами рисования используются для изображения объектов или визуализации графической информации. Возможность проводить преобразования точек и линий является фундаментом теории поверхностей. Нарисованный объект может быть представлен в нужном масштабе, повернут, перемещен, преобразован или модифицирован в соответствии с требованиями решаемой задачи. Все эти манипуляции с изображением можно выполнить, используя математический аппарат, изложенный в данной и последующих главах.

1.1. ИЗОБРАЖЕНИЕ ТОЧЕК

Точка представляется на плоскости двумя своими координатами, которые определяются как элементы матрицы размером $1 \times 2 [x \ y]$. В трехмерном пространстве используется матрица размером $1 \times 3 [x \ y \ z]$. Иначе говоря, точка может задаваться в виде вектор-

столбца $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ в двумерном пространстве или в виде $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ в

трехмерном. Строку $[x \ y]$ или столбец $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ часто называют координатным вектором. В этой книге для формирования такого вектора используется матрица-строка, т. е. множество точек, каждая из которых определяет координатный вектор в некоторой системе измерения. Данное множество хранится в компьютере в виде матрицы или массива чисел. Положением точек можно управлять путем манипулирования соответствующей матрицей. Линии, соединяющие точки, формируют отрезки, кривые и картинки.

1.2 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ

В качестве элементов матрицы могут фигурировать различные величины: числа, сетки или коэффициенты системы уравнений. Правила в матричной алгебре определяют допустимые операции над элементами (приложение В). Многие физические задачи удобно выражаются в матричном представлении. Для моделей физических систем задача обычно ставится следующим образом: даны матрицы $[A]$ и $[B]$, найти результирующую матрицу $[T]$, такую, что $[A][T]=[B]$. В этом случае решением является матрица $[T]=[A]^{-1}[B]$, где $[A]^{-1}$ - матрица, обратная к квадратной матрице $[A]$.

В то же время матрицу $[T]$ можно интерпретировать как геометрический оператор. В этом случае для выполнения геометрического преобразования точек, представленных векторами положений в матрице $[A]$, используется умножение матриц. Предположим, что матрицы $[A]$ и $[T]$ известны. Требуется определить элементы матрицы $[B]$. Представление $[T]$ как геометрического оператора является основой математических преобразований.

1.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧЕК

Рассмотрим результаты умножения матрицы $[x \ y]$, содержащей координаты точки P , на матрицу общего преобразования размером 2×2 :

$$[X][T]=[x \ y] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [(ax+cy)(bx+dy)] = [x^* \ y^*]. \quad (1)$$

Данная запись означает, что исходные координаты точки x и y преобразуются в x^* и y^* , где $x^* = ax + cy$, $y^* = bx + dy$.

Представляют интерес значения x^* , y^* - координаты результирующей, преобразованной точки P . Рассмотрим некоторые специальные случаи.

При $a = d = 1$ и $c = b = 0$ преобразование сведется к единичной матрице

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ y] = [x^* \ y^*], \quad (2)$$

и координаты точки P останутся неизменными. Как и следовало ожидать, в линейной алгебре умножение на единичную матрицу эквивалентно умножению на 1 в обычной алгебре.

В случае $d = 1$, $b = c = 0$

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [ax \ y] = [x^* \ y^*], \quad (3)$$

где $x^* = ax$ - результат масштабирования координаты X . Эффект такого преобразования показан на рис. 1а.

Рассмотрим теперь еще случай $b = c = 0$, т.е.

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = [ax \ dy] = [x^* \ y^*]. \quad (4)$$

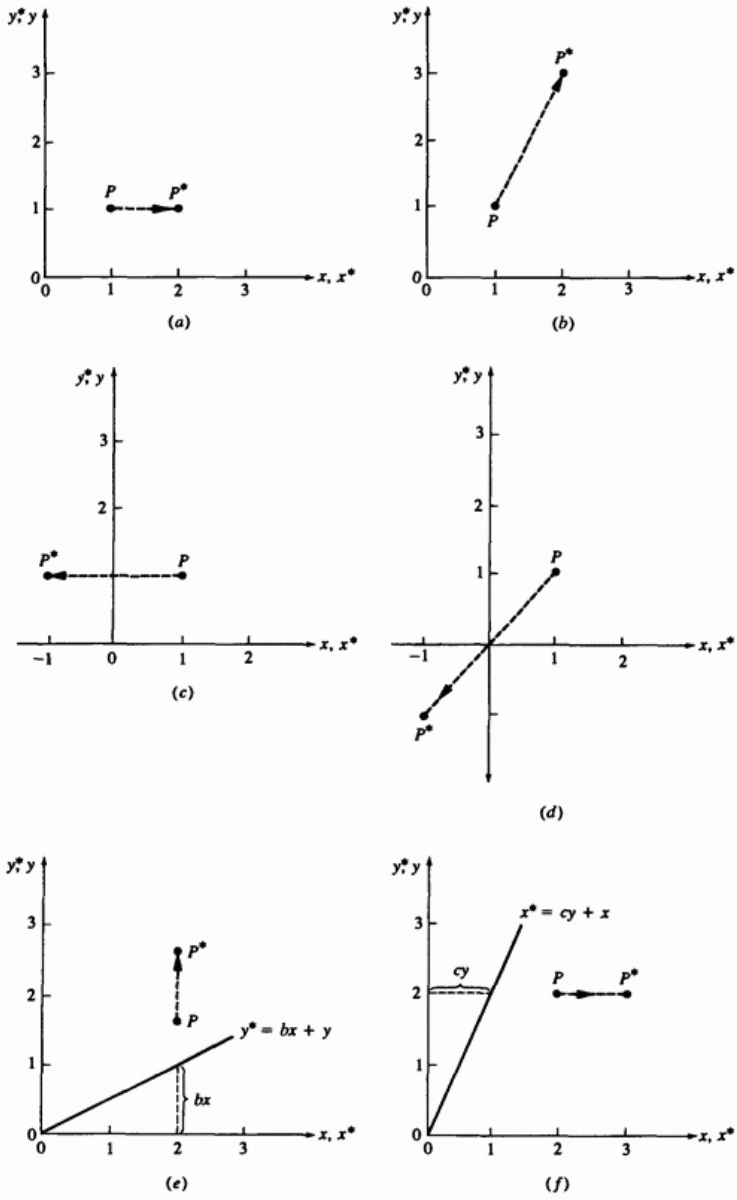


Рис. 1. Преобразование точек.

Данное преобразование вызывает изменение обеих координат x и y вектора P (рис. 1b). Если $a \neq d$, то координаты масштабируются различным образом. При $a = d > 1$ происходит растяжение вектора P или масштабирование координат. Если $0 < a = d < 1$, то имеет место сжатие.

Если значение a или d отрицательное, то вектор отражается относительно координатных осей или относительно плоскости. Чтобы убедиться в этом, возьмем $b = c = 0$, $d = 1$ и $a = -1$, тогда

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-x \ y] = [x^* \ y^*], \quad (5)$$

и в результате получаем симметричное отражение относительно оси y (рис. 1c). Если $b = c = 0$, $a = 1$, $d = -1$, то выполняется симметричное отражение относительно оси x . Если $b = c = 0$, $a = d < 0$, то происходит отражение относительно начала координат, это показано на рис. 1d, где $a = -1$, $d = 1$. Заметим, что обе операции отражения и масштабирование зависят только от диагональных членов матрицы преобразования.

Рассмотрим теперь случай с недиагональными членами. Возьмем сначала значения $a = d = 1$, $c = 0$, тогда

$$[X][T] = [x \ y] \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [x \ (bx + y)] = [x^* \ y^*]. \quad (6)$$

Заметим, что координата x точки P осталась неизменной, тогда как координата y^* линейно зависит от исходных координат. Данное преобразование называется сдвигом (рис. 1e). Аналогично, в случае, когда $a = d = 1$, $b = 0$, преобразование приведет к сдвигу

пропорционально координате y (рис. 1f). Таким образом, видно, что недиагональные члены матрицы преобразования создают эффект сдвига координат вектора точки P .

Прежде чем закончить с преобразованием точек, разберем действие общего преобразования, заданного выражением (1), когда начальный вектор лежит в точке начала координат, т.е.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax+cy) & (bx+dy) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

или, в случае начала координат,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

Видно, что начало координат инвариантно относительно преобразования общего вида. Это ограничение устраняется при использовании однородных координат.

1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Прямую линию можно определить с помощью двух векторов, задающих координаты ее конечных точек. Расположение и направление линии, соединяющей две эти точки, может изменяться в зависимости от положений векторов. Реальный вид изображения линии зависит от типа используемого дисплея. В этом разделе мы рассмотрим только математические операции над конечными точками линии.

На рис. 2 изображена прямая линия, проходящая между двумя точками A и B . Положение векторов точек A и B задается следующим образом: $[A] = [0 \ 1]$ и $[B] = [2 \ 3]$.

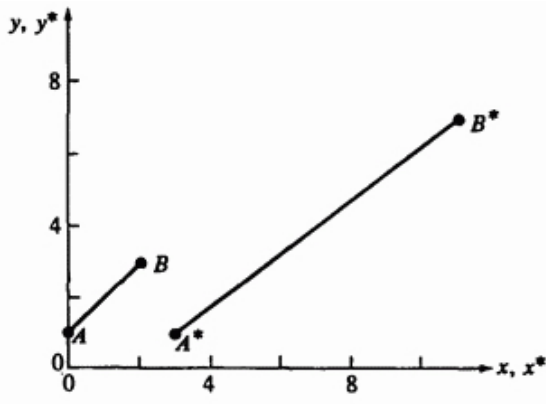


Рис. 2. Преобразование отрезков.

Рассмотрим матрицу преобразования

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

которая, как следует из предыдущего обсуждения, приводит к сдвигу изображения. Преобразование векторов A и B с помощью матрицы $[T]$ дает новое положение векторов A^* и B^*

$$[A][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = [A^*] \quad (8)$$

и

$$[B][T] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \end{bmatrix} = [B^*] \quad (9)$$

Таким образом, результирующие координаты для точки A^* - это $x^* = 3$ и $y^* = 1$. Аналогично, B^* - новая точка с координатами $x^* = 11$, $y^* = 7$. В более компактном виде отрезок AB может быть представлен матрицей размером (2×2) :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Умножим эту матрицу на $[T]$:

$$[L][T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = [L^*], \quad (10)$$

где компоненты $\begin{bmatrix} L^* \end{bmatrix}$ представляют собой преобразование координаты векторов $\begin{bmatrix} A^* \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} B^* \end{bmatrix}$. Результат преобразования A в A^* и B в B^* показан на рис. 2, где x и y - это исходные оси координат, а x^* и y^* - преобразованные оси. Из рисунка видно, что преобразование сдвига $[T]$ увеличивает длину отрезка и изменяет его направление.

1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СРЕДНЕЙ ТОЧКИ

На рис. 2 видно, что (2×2) -матрица преобразует прямую линию $y = x + 1$, проходящую между точками A и B в другую прямую $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, которая проходит между точками A^* и B^* . Фактически

с помощью (2×2) -матрицы осуществляется преобразование любой прямой в другую прямую. Все точки преобразованной линии непосредственно соответствуют всем точкам исходной линии. Это достаточно очевидно для конечных точек линии. Рассмотрим теперь преобразование средней точки прямой линии AB . Допустим, что

$$[A] = [x_1 \quad y_1], [B] = [x_2 \quad y_2]$$

и

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Преобразуем одновременно две крайние точки:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

Итак, конечные точки преобразованной линии A^*B^* имеют следующие координаты

$$\begin{aligned} [A^*] &= [ax_1 + cy_1 \quad bx_1 + dy_1] = [x_1^* \quad y_1^*], \\ [B^*] &= [ax_2 + cy_2 \quad bx_2 + dy_2] = [x_2^* \quad y_2^*]. \end{aligned} \quad (12)$$

Средняя точка отрезка A^*B^* выражается через преобразованные конечные точки

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{x_1^* + x_2^*}{2} & \frac{y_1^* + y_2^*}{2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{(ax_1 + cy_1) + (ax_2 + cy_2)}{2} & \frac{(bx_1 + dy_1) + (bx_2 + dy_2)}{2} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a \frac{(x_1 + x_2)}{2} + c \frac{(y_1 + y_2)}{2} & b \frac{(x_1 + x_2)}{2} + d \frac{(y_1 + y_2)}{2} \end{bmatrix}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходной линии AB , можно определить среднюю точку следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_1 + x_2) / 2 & (y_1 + y_2) / 2 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Применив матрицу преобразования $[T]$ к средней точке линии AB , получаем:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} [T] &= \begin{bmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} & \frac{y_1 + y_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} a \frac{(x_1 + x_2)}{2} + c \frac{(y_1 + y_2)}{2} & b \frac{(x_1 + x_2)}{2} + d \frac{(y_1 + y_2)}{2} \end{bmatrix}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Из сравнения выражений (13) и (15) видно, что они одинаковы, и поэтому средняя точка линии AB преобразуется в среднюю точку линии A^*B^* . Такой метод можно применить и к любым другим отрезкам разделенной линии. Таким образом, при преобразовании путем умножения на матрицу гарантируется соответствие всех точек линии AB и A^*B^* .

Пример 1. Средняя точка прямой

Рассмотрим отрезок AB из рис. 2. Положение векторов конечных

точек такое: $[A] = [0 \ 1]$, $[B] = [2 \ 3]$. Преобразование

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ осуществляет перемещение вектора на линию A^*B^* :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}.$$

Средняя точка A^*B^* будет иметь координаты

$$\begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3+11}{2} & \frac{1+7}{2} \end{bmatrix} = [7 \ 4].$$

Координаты средней точки линии AB равны

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0+2}{2} & \frac{1+3}{2} \end{bmatrix} = [1 \ 2].$$

Преобразуем среднюю точку и получим

$$\begin{bmatrix} x_m & y_m \end{bmatrix} [T] = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = [7 \ 4] = \begin{bmatrix} x_m^* & y_m^* \end{bmatrix},$$

что полностью эквивалентно предыдущему результату.

Применением этих результатов в теории поверхностей любая прямая может быть преобразована в любую другую прямую путем простого преобразования ее конечных точек и восстановления линии между ними.

1.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Результатом преобразования двух параллельных линий с помощью (2×2) -матрицы снова будут две параллельные линии. Это можно увидеть, рассмотрев линию между точками $[A] = [x_1 \ y_1]$, $[B] = [x_2 \ y_2]$ и параллельную ей линию, проходящую между точками E и F . Покажем, что для этих линий любое преобразование сохраняет параллельность. Так как AB , EF и A^*B^* и E^*F^* параллельны, то угол наклона линий AB и EF определяется следующим образом:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (16)$$

Преобразуем конечные точки AB , воспользовавшись матрицей (2×2) общего преобразования размером

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] &= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ax_1 + cy_1 & bx_1 + dy_1 \\ ax_2 + cy_2 & bx_2 + dy_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x_1^* & y_1^* \\ x_2^* & y_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

Наклон прямой A^*B^* определяется следующим образом:

$$m^* = \frac{(bx_2 + dy_2) - (bx_1 + dy_1)}{(ax_2 + cy_2) - (ax_1 + cy_1)} = \frac{b(x_2 - x_1) + d(y_2 - y_1)}{a(x_2 - x_1) + c(y_2 - y_1)}$$

или

$$m^* = \frac{b + d \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}}{a + c \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}} = \frac{b + dm}{a + cm} \quad (18)$$

Так как наклон m^* не зависит от x_1, x_2, y_1, y_2 , а m, a, b, c и d одинаковы для EF и AB , то m^* одинаково для E^*F^* и A^*B^* . Таким образом, параллельные линии сохраняют параллельность и после преобразования. Это означает, что при преобразовании (2×2) параллелограмм преобразуется в другой параллелограмм. Эти тривиальные выводы демонстрируют большие возможности использования матрицы преобразования для создания графических эффектов.

1.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Результатом преобразования с помощью (2×2) -матрицы пары пересекающихся прямых также будет пара пересекающихся линий. Проиллюстрируем этот факт на примере двух прямых, изображенных на рис. 3 штриховой линией и заданных уравнениями

$$y = m_1x + b_1,$$

$$y = m_2x + b_2.$$

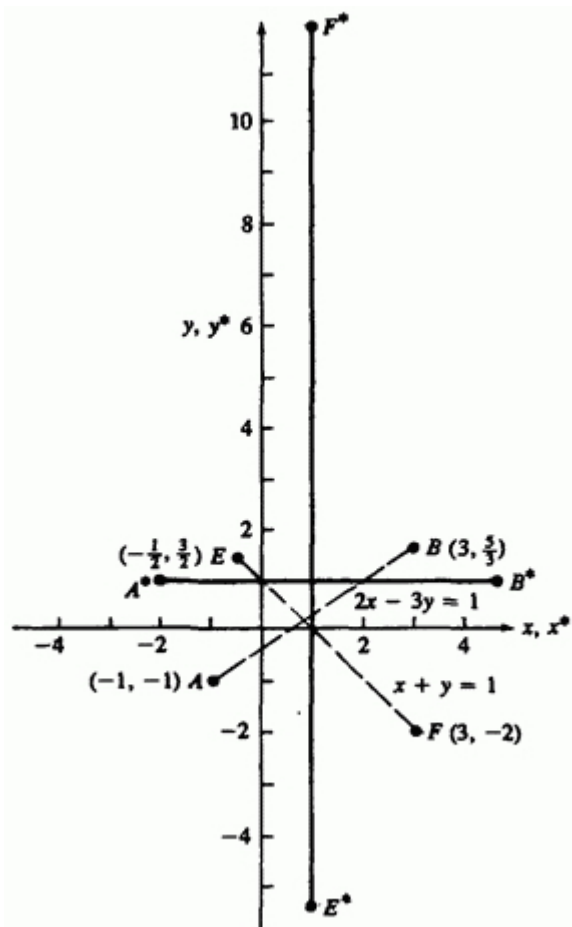


Рис. 3. Преобразование пересекающихся прямых.

В матричном представлении эти уравнения будут иметь вид:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -m_1 & -m_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

или

$$[X][M] = [B] \quad (19)$$

Если существует решение этой системы уравнений, то линии пересекаются, в противном случае они параллельны. Решение можно найти путем инверсии матрицы. В частности,

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = [B][M]^{-1} \quad (20)$$

Матрица, обратная $[M]$, имеет следующий вид:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ -1 & -m_1 \\ \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

так как $[M][M]^{-1} = [I]$, где $[I]$ - единичная матрица. Поэтому координаты точки пересечения двух линий можно найти следующим образом:

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = [b_1 \quad b_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \\ -1 & -m_1 \\ \frac{1}{m_2 - m_1} & \frac{m_2}{m_2 - m_1} \end{bmatrix},$$

$$[X_i] = [x_i \quad y_i] = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} & \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

Если обе линии преобразовать с помощью (2×2) -матрицы общего преобразования вида

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

то их уравнения будут иметь вид

$$y^* = m_1^* x^* + b_1^*,$$

$$y^* = m_2^* x^* + b_2^*.$$

Соответственно можно показать, что

$$m_i^* = \frac{b + dm_i}{a + cm_i} \quad (23)$$

и

$$b_i^* = b_i (d - cm_i^*) = b_i \frac{ad - bc}{a + cm_i}, \text{ где } i = 1, 2. \quad (24)$$

Точка пересечения линий после преобразования отыскивается таким же образом, как и в случае исходных линий:

$$\begin{aligned} [X_i^*] &= \begin{bmatrix} x_i^* & y_i^* \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{b_1^* - b_2^*}{m_2^* - m_1^*} & \frac{b_1^* m_2^* - b_2^* m_1^*}{m_2^* - m_1^*} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись выражениями (23) и (24), получим

$$\begin{aligned} [X_i^*] &= [x_i^* \quad y_i^*] = \\ &= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_2 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Возвращаясь теперь к точке пересечения $[x_i \quad y_i]$ исходных линий и применяя уже полученную матрицу преобразования, имеем

$$\begin{aligned} [x_i^* \quad y_i^*] &= [x_i \quad y_i][T] = \\ &= \left[\frac{b_1 - b_2}{m_2 - m_1} \quad \frac{b_1 m_2 - b_2 m_1}{m_2 - m_1} \right] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \\ &= \left[\frac{a(b_1 - b_2) + c(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \quad \frac{b(b_1 - b_2) + d(b_1 m_2 - b_2 m_1)}{m_2 - m_1} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Сравнение уравнений (25) и (26) показывает, что они одинаковы. Итак, точка пересечения преобразуется точно в другую точку пересечения.

Пример 2. Пересекающиеся прямые

Рассмотрим две штриховые линии AB и EF на рис. 3, конечные точки которых имеют координаты

$$[A] = [-1 \quad -1], [B] = [3 \quad 5/3]$$

и

$$[E] = [-1/2 \quad 3/2], [F] = [3 \quad -2].$$

Уравнение прямой AB имеет вид $-(2/3)x + y = -1/3$, а прямая EF задается уравнением $x + y = 1$. В матричном виде пучок прямых представляется в виде

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2/3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Используя матрицу обратного преобразования (21), получим точку пересечения этих прямых

$$\begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/5 & -3/5 \\ 3/5 & 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Теперь преобразуем эти линии с помощью матрицы

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Результирующие прямые A^*B^* и E^*F^* показаны на рис. 3. В матричном виде уравнения преобразованных линий имеют вид

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

с точкой пересечения $\begin{bmatrix} x_i^* & y_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Преобразуя точку пересечения исходных линий, получим

$$\begin{bmatrix} x_i^* & y_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i & y_i \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$$

что тождественно точке пересечения преобразованных линий.

Из рис. 3 и примера 2 видно, что исходные штриховые прямые AB и EF не перпендикулярны друг другу. Однако преобразованные прямые A^*B^* и E^*F^* , показанные сплошной линией, являются

перпендикулярными. Таким образом, преобразование $[T]$ переводит две пересекающиеся неперпендикулярные прямые в две пересекающиеся перпендикулярные. Смысл обратного преобразования

$[T]^{-1}$ состоит в переводе двух пересекающихся перпендикулярных прямых в две пересекающиеся, но не перпендикулярные, что может привести к неприятным геометрическим последствиям. Значительный интерес представляет вопрос, при каком условии перпендикулярные прямые преобразуются в перпендикулярные. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 1.13, где разберем его подробнее.

Дополнительное изучение рис. 3 и примера 2 показывает, что преобразование $[T]$ включает в себя поворот, отражение и масштабирование. Рассмотрим каждое из этих преобразований отдельно.

1.8. ПОВОРОТ

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 4) и с помощью следующего преобразования повернем его на 90° против часовой стрелки относительно начала координат

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Если использовать матрицу размером (3×2) , состоящую из координат x и y вершин треугольника, то можно записать

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

что является координатами результирующего треугольника $A^*B^*C^*$.

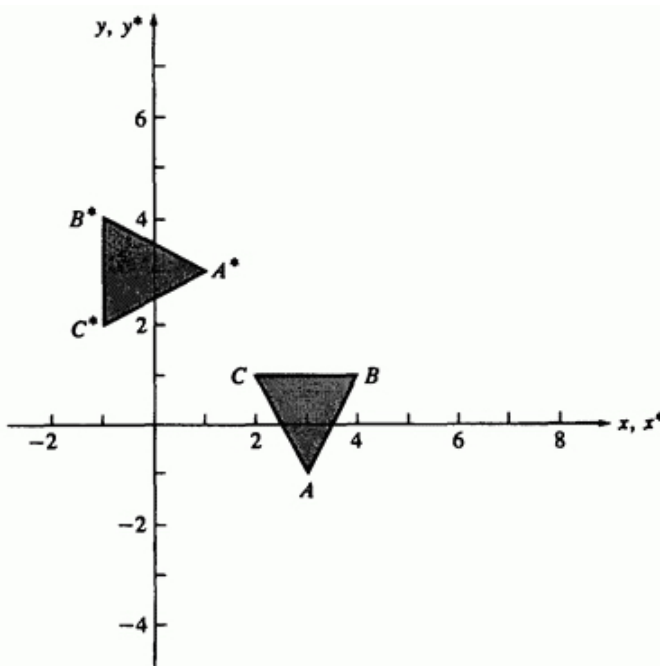


Рис. 4. Поворот.

Поворот на 180° относительно начала координат достигается путем следующего преобразования

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

а на 270° относительно начала координат - преобразованием

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разумеется, что матрица тождественного преобразования

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

соответствует повороту вокруг начала координат на 0° или 360° . Обратим внимание, что в этих примерах не встречаются ни масштабирование, ни отражение.

В этих примерах осуществляется преобразование в специальных случаях поворота вокруг начала координат на углы $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ и 270° . Как осуществить поворот вокруг точки начала координат на произвольный угол θ ? Для ответа на этот вопрос рассмотрим вектор положения от начала координат до точки P (рис. 5).

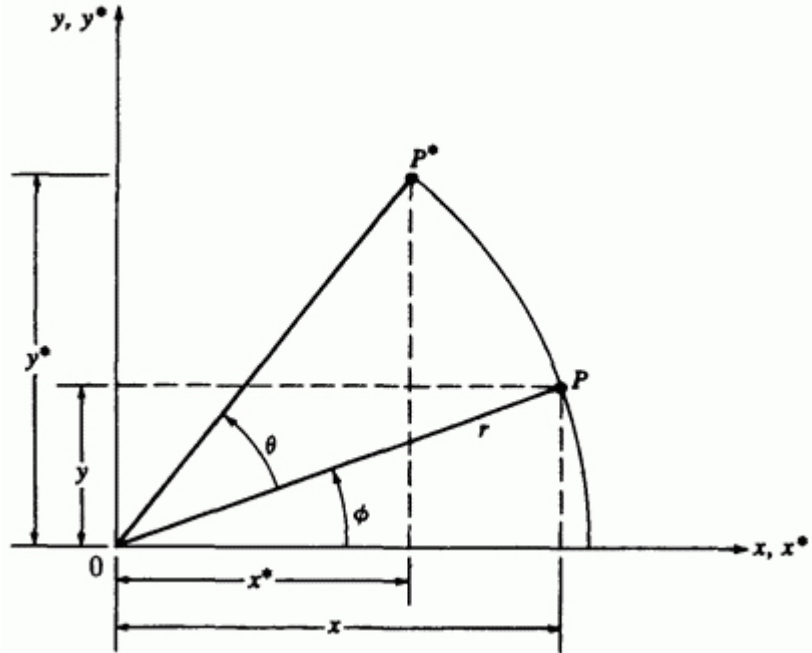


Рис. 5. Поворот координатного вектора.

Обозначим r - длину вектора, а ϕ - угол между вектором и осью x . Вектор положения поворачивается вокруг начала координат на угол θ и попадает в точку P^* . Записав векторы положений для P и P^* , получаем:

$$P = [x \ y] = [r \cos \phi \ r \sin \phi]$$

и

$$P^* = [x^* \ y^*] = [r \cos(\phi + \theta) \ r \sin(\phi + \theta)]$$

Используя формулу для \cos суммы углов, перепишем выражение для P^* следующим образом

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta) & r(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) \end{bmatrix}$$

Используя определения x и y , можно переписать P^* как

$$P^* = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta & x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}$$

Таким образом, преобразованная точка имеет координаты

$$x^* = x \cos \theta - y \sin \theta, \quad (27a)$$

$$y^* = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (27b)$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned} [X^*] &= [X][T] = \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Итак, преобразование поворота вокруг точки начала координат на произвольный угол θ задается матрицей

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Повороты являются положительными, если они осуществляются против часовой стрелки относительно точки вращения (рис. 5). Определитель общей матрицы поворота имеет следующий вид:

$$\det[T] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1. \quad (30)$$

В общем случае преобразования по матрице с детерминантом, равным 1, приводят к полному повороту. Предположим теперь, что требуется вернуть точку P^* обратно в P , т. е. выполнить обратное преобразование. Очевидно, что требуемый угол поворота равен $-\theta$. Из формулы (29) возьмем матрицу для выполнения необходимого преобразования

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ -\sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (31)$$

так как $\cos(-\theta) = \cos \theta$ и $\sin(-\theta) = -\sin \theta$. Выражение $[T]^{-1}$ является формальной записью обратной матрицы $[T]$. Можно показать, что матрица $[T]^{-1}$ является обратной к $[T]$, если вспомнить, что результат умножения матрицы на обратную дает единичную матрицу. В нашем случае:

$$\begin{aligned} [T][T]^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [I], \end{aligned}$$

где $[I]$ - единичная матрица.

Анализ выражений (29) и (31) приводит к другому интересному и полезному результату. Вспомним, что транспонирование матрицы определяется заменой ее строк столбцами. Обозначим транспонированную матрицу $[T]$ как $[T]^T$. Сравнивая ее с $[T]^{-1}$, видим, что

$$[T]^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = [T]^{-1} . \quad (32)$$

Обратная матрица вращения является транспонированной. Поскольку формально определитель обратной матрицы вычисляется гораздо сложнее, чем определитель транспонированной, то выражение (32) является достаточно важным и полезным результатом. В общем случае обратной для любой матрицы преобразования полного поворота, т.е. матрицы с определителем, равным +1, является ее транспонированная матрица (такие матрицы называют ортогональными).

1.9. ОТРАЖЕНИЕ

В то время как полный поворот на плоскости $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ обычно осуществляется в двумерном пространстве относительно нормали к плоскости, отражение представляет собой тот же поворот на угол 180° в трехмерном пространстве и обратно на плоскость относительно оси, лежащей в плоскости $\mathcal{X}\mathcal{Y}$. На рис. 6 приведены примеры двух отражений на плоскости треугольника DEF .

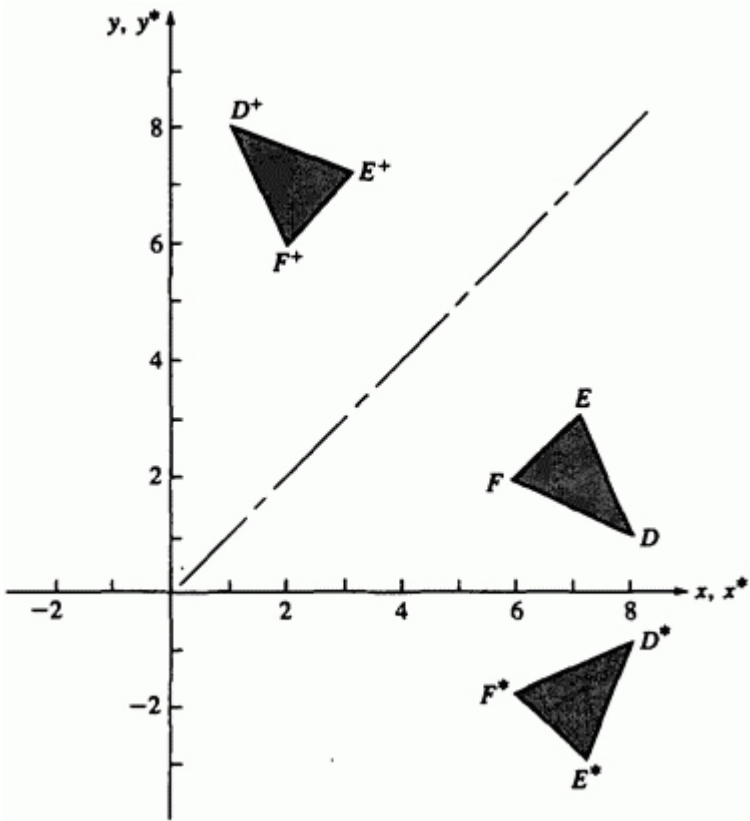


Рис. 6. Отражение.

Отражение относительно прямой $y=0$ (ось x) получено с использованием матрицы

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

В этом случае новые вершины треугольника $D^*E^*F^*$ будут определяться преобразованием

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 7 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Подобным образом отражение относительно оси \mathcal{Y} при $x = 0$ будет иметь вид

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Отражение относительно прямой $\mathcal{Y} = x$ осуществляется с помощью матрицы

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Выполнив преобразования, получим координаты вершин треугольника $D^* E^* F^*$

$$\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Аналогичным образом отражение относительно оси \mathcal{X} будет иметь вид

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

У каждой из этих матриц определитель равен -1. В общем случае, если определитель матрицы преобразования равен -1, то преобразование дает полное отражение.

Если оба полных отражения осуществляются последовательно относительно прямых, проходящих через начало координат, то результатом будет полный поворот относительно начала координат. Это можно увидеть, обратившись к следующему примеру.

Пример 3. Отражение и вращение

Рассмотрим треугольник ABC , показанный на рис. 7.

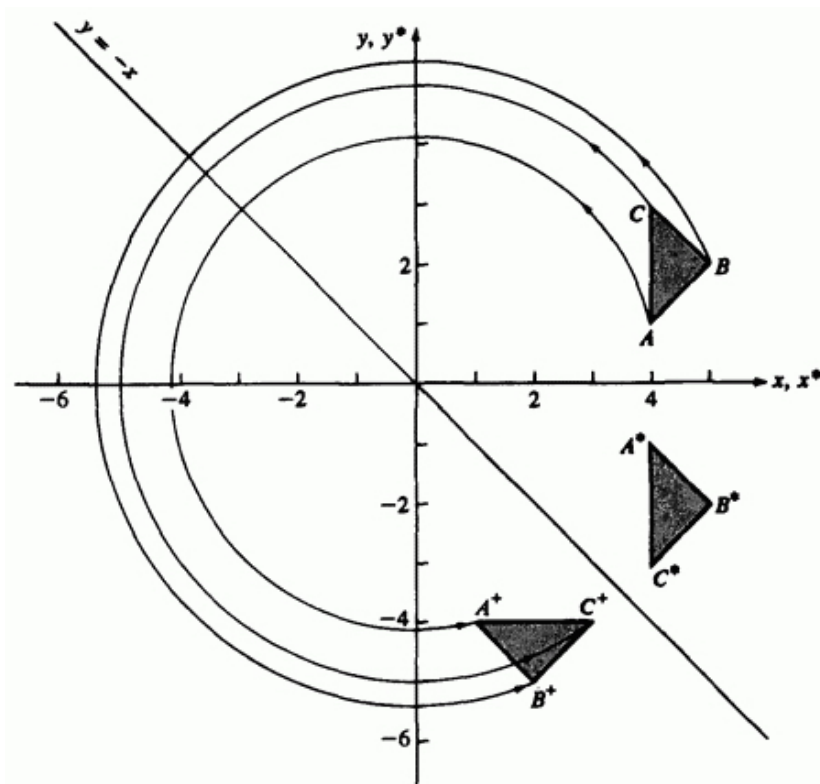


Рис. 7. Выполнение отражения путем поворота.

Первоначально отобразим его относительно оси X (уравнение 33), а затем относительно прямой $Y = -X$ (см. выражение (36)). Результатом первого отображения будет

$$[X^*] = [X][T_1] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Результатом второго будет

$$[X^+] = [X^*][T_2] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Повернем треугольник относительно начала координат на угол $\theta = 270^\circ$ (см. (29)) и получим аналогичный результат

$$[X^+] = [X][T_3] = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрицы отражения из (33) и (36) ортогональны, т.е. транспонированная матрица одновременно является обратной. Например,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

1.10. МАСШТАБИРОВАНИЕ

Из наших рассуждений относительно преобразования точек следует, что величина масштабирования определяется значением элементов исходной диагональной матрицы. Если матрица

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

используется в качестве оператора воздействия на вершины треугольника, то имеет место «двукратное» расширение или равномерное масштабирование относительно точки начала координат. Если значения элементов не равны, то треугольник искажается, что проиллюстрировано на рис. 8.

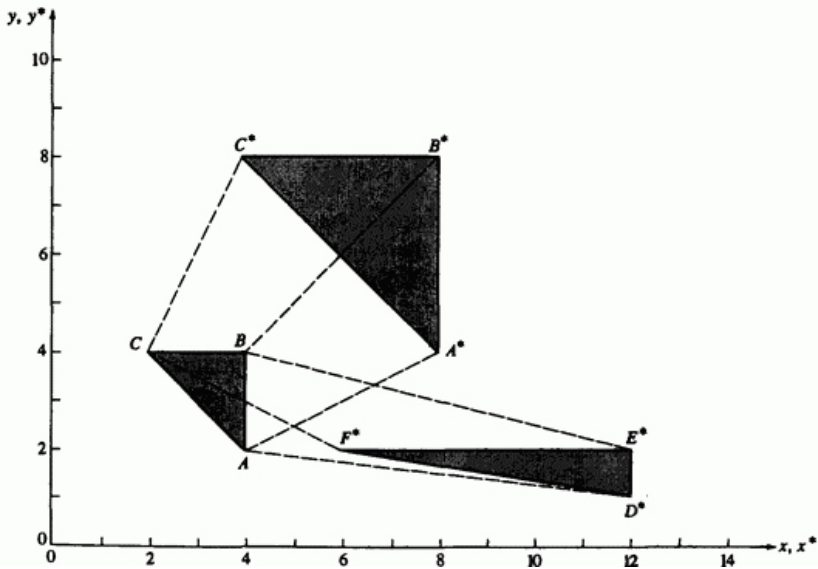


Рис. 8. Пропорциональное и непропорциональное масштабирование (искажение).

Треугольник ABC , преобразованный с помощью матрицы

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

переходит в пропорционально увеличенный треугольник $A^*B^*C^*$.

Тот же треугольник, но преобразованный с помощью матрицы

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

переходит в треугольник $D^*E^*F^*$, имеющий искажение, вызванное разными коэффициентами масштабирования. В общем случае при матрице

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad (37)$$

в которой $a = d, b = c = 0$, выполняется пропорциональное масштабирование; если $a \neq d, b = c = 0$, то масштабирование будет проведено непропорционально. В первом случае для $a = d > 1$ происходит расширение, т.е. увеличение изображения. Если $a = d < 1$, то происходит равномерное сжатие, т.е. фигура уменьшается. Непропорциональное расширение и сжатие возникают в зависимости от значений a и d , которые могут быть меньше либо больше, чем 1, независимо друг от друга. Из рис. 8 видно также, что на первый взгляд преобразование треугольника является перемещением. Это объясняется тем, что относительно начала координат масштабируются координатные векторы, а не точки. Для того чтобы лучше понять этот факт, рассмотрим преобразования ABC в $D^*E^*F^*$ более внимательно. В частности,

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 12 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Заметим, что каждая из компонент x координатных векторов треугольника DEF умножалась на масштабный коэффициент 3, а компоненты y - на 2. Для того чтобы получить чистое масштабирование без эффекта перемещения, центр фигуры надо поместить в начало координат. Это видно из рис. 9, на котором треугольник ABC увеличивается в два раза при масштабировании относительно его центра с координатами, равными $1/3$ основания и $1/3$ высоты.

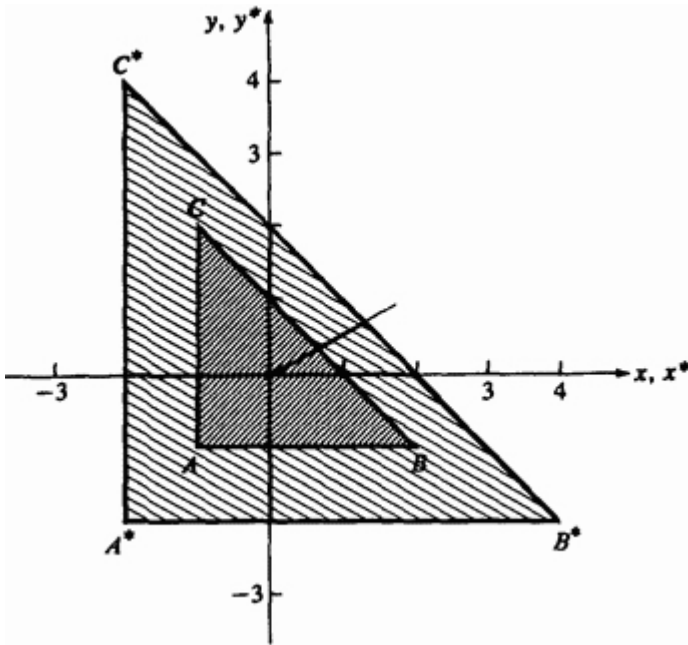


Рис. 9. Пропорциональное масштабирование без явного перемещения.

Конкретная матрица преобразования имеет вид

$$[X^*] = [X][T] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1.11. КОМБИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Возможности матричного метода достаточно ясно описаны в предыдущих разделах книги. С помощью матричных операций над координатными векторами, определяющими вершины фигур, можно управлять формой и положением поверхности. Однако для получения желаемой ориентации может потребоваться более одного преобразования. Так как операция умножения матриц не коммутативна, то важен порядок выполнения преобразования.

Для иллюстрации эффекта некоммутативности операции умножения матриц рассмотрим преобразования поворота и отражения координатного вектора $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$. Если вслед за поворотом на 90° (посредством $\begin{bmatrix} T_1 \end{bmatrix}$) производится отражение относительно прямой $y = -x$ (посредством $\begin{bmatrix} T_2 \end{bmatrix}$), то эти два последовательных преобразования дают

$$[X'] = [X][T_1] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix}$$

и затем

$$[X^*] = [X'][T_2] = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & y \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, если отражение следует за поворотом, то получатся следующие результаты:

$$[X'] = [X][T_2] = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix}$$

и

$$[X^*] = [X'][T_1] = \begin{bmatrix} -y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \end{bmatrix}$$

Оба результата различны, что подтверждает важность порядка применения матричных преобразований.

Другое принципиальное обстоятельство иллюстрируется этими результатами и приведенным ниже примером. Ранее отдельные матричные преобразования применялись последовательно к результатам предыдущих преобразований, например

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [T_1] \rightarrow \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} [T_2] \rightarrow \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

В приведенном ниже примере отдельные преобразования предварительно комбинируются или конкатенируются, а затем полученная матрица применяется к исходному вектору, т.е.

$$[T_1][T_2] \rightarrow [T_3] \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} [T_3] \rightarrow \begin{bmatrix} x^* & y^* \end{bmatrix}$$

Пример 4. Комбинированные преобразования на плоскости

Рассмотрим треугольник ABC на рис. 10.

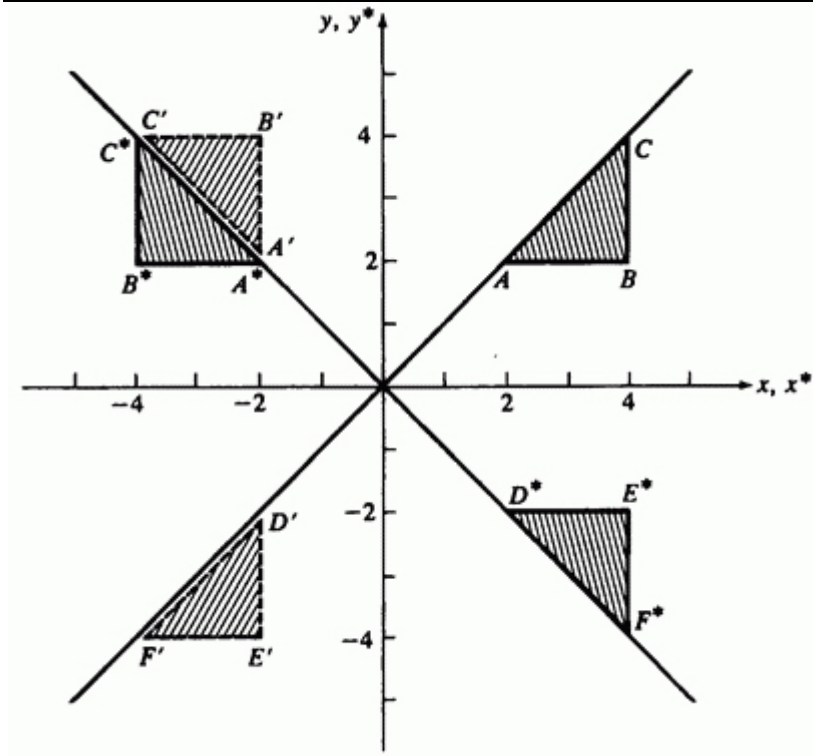


Рис. 10. Комбинированное преобразование на плоскости.

Выполним над ним два преобразования: поворот на $+90^\circ$ вокруг точки начала координат

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

и отражение относительно линии $y = -x$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Результатом воздействия комбинированного преобразования $[T_3] = [T_1][T_2]$ на треугольник ABC является

$$[X^*] = [X][T_1][T_2] = [X][T_3]$$

или

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Получившийся треугольник $A^*B^*C^*$ является конечным результатом данного преобразования, а треугольник $A'B'C'$ - промежуточным результатом (рис. 10). Проведем преобразование в обратном порядке

$$[X^*] = [X][T_2][T_1] = [X][T_4]$$

или

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Конечным результатом будет треугольник $D^*E^*F^*$, а промежуточным $D'E'F'$ (рис. 10). Оба результата различны, тем самым снова подтверждается важность порядка применения преобразований. Отметим также, что для определителей справедливы

равенства $\det[T_3] = -1$ и $\det[T_4] = -1$ и поэтому оба результата могут быть получены с помощью единственного отражения. Треугольник $A^*B^*C^*$ можно получить из ABC путем отражения относительно оси Y (матрица $[T_3]$ и уравнение (34), $D^*E^*F^*$ получается из ABC при отражении относительно оси X (матрица $[T_4]$ и уравнение (33).

1.12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЕДИНИЧНОГО КВАДРАТА

До сих пор мы рассматривали поведение точек и линий для определения результатов простых матричных преобразований. Однако можно корректно рассматривать применение матрицы к любой точке плоскости. Как было показано ранее, единственная точка, остающаяся инвариантной при воздействии матричных преобразований, - это точка начала координат. Все другие точки плоскости подвержены преобразованию, которое можно представить как растяжение исходной плоскости, системы координат и перевод в новую форму. Формально принято считать, что преобразование вызывает переход от одного координатного пространства к другому. Рассмотрим координатную сетку, состоящую из единичных квадратов на координатной плоскости X^iY^j (рис. 11).

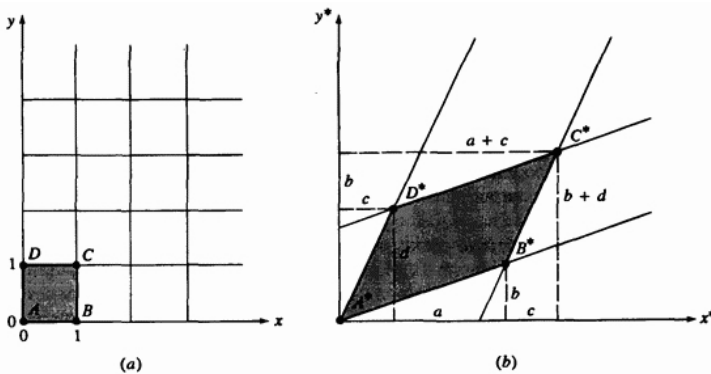


Рис. 11. Общее преобразование единичного квадрата: а) до преобразования; б) после преобразования.

Четыре координатных вектора вершин единичного квадрата, проходящие под одним углом к началу координат, имеют следующий вид:

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ начало координат } A \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ единичная точка } B \text{ на оси } x \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ внешний угол } C \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ единичная точка } D \text{ на оси } y \end{array}$$

Такой единичный квадрат изображен на рис. 11а. Применяя к нему (2×2) -матрицу общего преобразования, получаем

$$\begin{array}{l} A \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ D \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \\ a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} A^* \\ B^* \\ C^* \\ D^* \end{array} \quad (38)$$

Результаты этого преобразования показаны на рис. 11б. Из выражения (38) следует, что начало координат не подвергается преобразованию,

т.е. $[A] = [A^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Далее отметим, что координаты B^* равны

первой строке матрицы преобразования, а координаты D^* - второй. Таким образом, матрица преобразования является определенной, если

определены координаты B^* и D^* (преобразование единичных

векторов $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$). Поскольку стороны единичного квадрата первоначально параллельны и ранее было показано, что параллельные линии преобразуются снова в параллельные, то результирующая фигура является параллелограммом.

Влияние элементов a , b , c и d матрицы 2×2 может быть установлено отдельно. Элементы b и c , как видно из рис. 11b, вызывают сдвиг (см. разд. 1.3) исходного квадрата в направлениях y и x соответственно. Как отмечалось ранее, элементы a и d играют роль масштабных множителей. Таким образом, 2×2 -матрица задает комбинацию сдвига и масштабирования.

Несложно определить также площадь параллелограмма $A^*B^*C^*D^*$ из рис. 11b, которую можно вычислить следующим образом:

$$A_p = (a+c)(b+d) - \frac{1}{2}(ab) - \frac{1}{2}(cd) - \frac{c}{2}(b+b+d) - \frac{b}{2}(c+a+c)$$

В результате получаем

$$A_p = ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Можно показать, что площадь любого параллелограмма A_p , образованного путем преобразования квадрата, есть функция от определителя матрицы преобразования и связана с площадью исходного квадрата A_s простым отношением

$$A_p = A_s (ad - bc) = A_s \det [T]. \quad (40)$$

Фактически, так как площадь всей фигуры равна сумме площадей единичных квадратов, то площадь любой преобразованной фигуры A_4 зависит от площади исходной фигуры A_1

$$A_4 = A_1 (ad - bc). \quad (41)$$

Это полезный способ определения площадей произвольных фигур.

Пример 5. Масштабирование области

Треугольник ABC с координатными векторами $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ преобразуется матрицей

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

образуя новый треугольник $A^*B^*C^*$ (рис. 12).

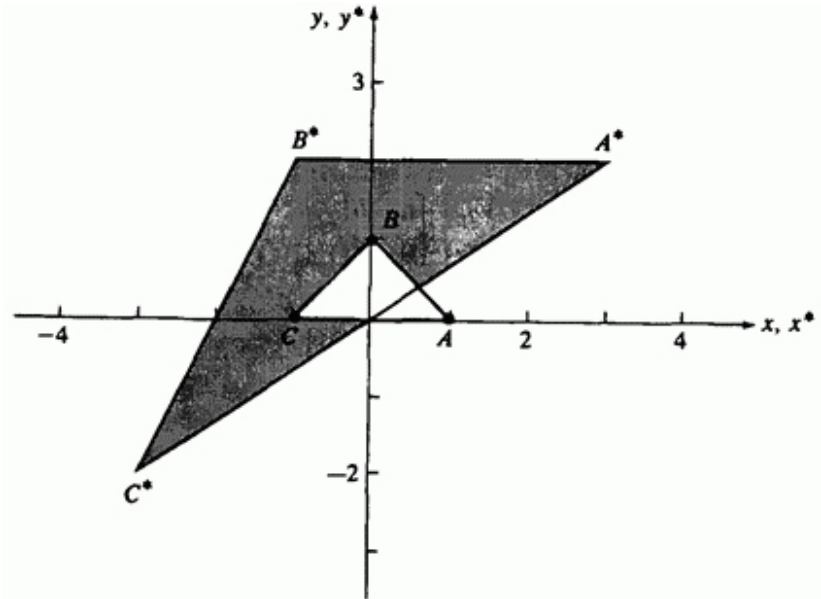


Рис. 12. Масштабирование области.

Площадь треугольника ABC равна

$$A_1 = \frac{1}{2}(\text{основание})(\text{высота}) = \frac{1}{2}(2)(1) = 1$$

Вспользуемся уравнением (41), тогда площадь преобразованного треугольника $A^*B^*C^*$ будет равна

$$A_2 = A_1(ad - bc) = 1(6 + 2) = 8$$

Векторы преобразованного треугольника $A^*B^*C^*$ теперь равны

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Вычислим площадь, образованную результирующими вершинами:

$$A_2 = \frac{1}{2}(\text{основание})(\text{высота}) = \frac{1}{2}(4)(4) = 8$$

Это совпадает с полученным ранее результатом.

1.13. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЖЕСТКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Пришло время вернуться к поставленному в разд. 1.7 вопросу: когда перпендикулярные прямые преобразуются в перпендикулярные прямые? Рассмотрим сначала более общий вопрос: в каких случаях угол между пересекающимися прямыми сохраняется? Напомним, что скалярное произведение двух векторов равно

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = V_{1x}V_{2x} + V_{1y}V_{2y} = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta, \quad (42)$$

а векторное произведение двух векторов, принадлежащих плоскости $\mathcal{X}\mathcal{Y}$, определяется как

$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = (V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})\bar{k} = |\bar{V}_1| |\bar{V}_2| \bar{k} \sin \theta, \quad (43)$$

где индексы x и y относятся к компонентам x и y вектора, θ - острый угол между векторами, а \bar{k} - единичный перпендикулярный к плоскости $\mathcal{X}\mathcal{Y}$.

Проведем преобразование \bar{V}_1 и \bar{V}_2 , используя (2×2) -матрицу общего преобразования

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \end{bmatrix} [T] &= \begin{bmatrix} V_{1x} & V_{1y} \\ V_{2x} & V_{2y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} aV_{1x} + cV_{1y} & bV_{1x} + dV_{1y} \\ aV_{2x} + cV_{2y} & bV_{2x} + dV_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{V}_1^* \\ \bar{V}_2^* \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Векторным произведением векторов \bar{V}_1^* и \bar{V}_2^* будет

$$\bar{V}_1^* \times \bar{V}_2^* = (ad - cb)(V_{1x}V_{2y} - V_{2x}V_{1y})\bar{k} = |\bar{V}_1^*| |\bar{V}_2^*| \bar{k} \sin \theta. \quad (45)$$

Аналогично, скалярное произведение будет равно

$$\begin{aligned} \bar{V}_1^* \cdot \bar{V}_2^* &= (a^2 + b^2)V_{1x}V_{2x} + (c^2 + d^2)V_{1y}V_{2y} + (ac + bd)(V_{1x}V_{2y} + V_{1y}V_{2x}) = \\ &= |\bar{V}_1^*| |\bar{V}_2^*| \cos \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

Требуется, чтобы значения векторов, как и угол между ними, оставались постоянными. Сравнивая уравнения (42), (46) и (43), (45), а также приравняв коэффициенты подобных членов, получим

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (47a)$$

$$c^2 + d^2 = 1, \quad (47b)$$

$$ac + bd = 0, \quad (47c)$$

$$ad - bc = +1. \quad (48)$$

Выражения (47a, b, c) соответствуют условиям ортогональности матрицы, т. е.

$$[T][T]^{-1} = [T][T]^T = [I]$$

или

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выражение (48) требует, чтобы определитель матрицы преобразования был равен +1.

Таким образом, при полном повороте углы между пересекающимися прямыми сохраняются. Данный результат распространяется также и на операцию отражения, ортогональная матрица которого имеет определитель, равный -1. В этом случае величины векторов сохраняются, но угол между преобразованными векторами в действительности равен $2\pi - \theta$. (Следовательно, в общем случае угол не сохраняется. Однако перпендикулярные прямые преобразуются в

перпендикулярные прямые. Поскольку $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta$,

$ad - bc = -1$, полные повороты и отражения называются преобразованиями жесткой конструкции. Кроме того, анализ или экспериментирование приводят к выводу, что равномерное масштабирование также сохраняет неизменным угол между пересекающимися прямыми, но не величину преобразуемых векторов. Поскольку ортогональная матрица сохраняет угол между векторами и их величины, матрица однородного масштабирования не является ортогональной.)

1.14. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

В предыдущих разделах был рассмотрен ряд преобразований, совершаемых с помощью (2×2) -матрицы общего преобразования. Среди них поворот, отражение, масштабирование, сдвиг и другие. Ранее отмечалось, что исходная система координат инвариантна по отношению ко всем перечисленным преобразованиям. Однако возникает необходимость изменять положение начала координат, т. е. преобразовывать каждую точку на плоскости. Этого можно достичь путем перемещения точки начала координат или любой другой точки на плоскости

$$x^* = ax + cy + m,$$

$$y^* = bx + dy + n.$$

К сожалению, нельзя ввести константы перемещения m и n в (2×2) -матрицу преобразования, так как это не пространство!

Данное затруднение можно преодолеть, используя однородные координаты. Однородные координаты неоднородного координатного вектора $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ представляют собой тройку $\begin{bmatrix} x' & y' & h \end{bmatrix}$, где $x = x'/h$, $y = y'/h$, а h - некоторое вещественное число. Заметим, что случай $h = 0$ является особым. Всегда существует один набор однородных координат вида $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$. Мы выбрали эту форму,

чтобы представить координатный вектор $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ на физической плоскости xy . Все остальные однородные координаты представляются в виде $\begin{bmatrix} hx & hy & h \end{bmatrix}$. Данные координаты не сохраняют однозначности, например, все следующие координаты $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 12 & 8 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ представляют физическую точку $(3, 2)$.

Матрица преобразования для однородных координат имеет размер (3×3) . В частности,

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

где действие элементов a , b , c и d верхней части (2×2) -матрицы точно соответствует действиям, рассмотренным ранее. Элементы m и n являются коэффициентами перемещения в направлениях x и y соответственно. Полная двумерная матрица преобразования имеет вид

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+m & y+n & 1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Отметим, что каждая точка плоскости и даже начало координат $x = y = 0$ теперь могут быть преобразованы.

1.15. ПОВОРОТ ВОКРУГ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ

Ранее мы рассматривали вращение, совершаемое вокруг начала координат. Однородные координаты предусматривают механизм выполнения поворотов вокруг точек, отличных от начала координат. В общем случае поворот вокруг произвольной точки может быть реализован посредством ее перемещения в начало координат, выполнения требуемого поворота и последующего перемещения результата обратно в исходный центр вращения. Таким образом, поворот вектора $\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$ вокруг точки m, n на произвольный угол можно осуществить следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Выполняя действия над двумя внутренними матрицами, можно записать

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -m(\cos \theta - 1) + n \sin \theta & -n(\cos \theta - 1) - m \sin \theta & 1 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий данный результат.

Пример 6. Поворот относительно произвольной точки

Предположим, что центр объекта лежит в точке $\begin{bmatrix} 4, 3 \end{bmatrix}$. Требуется повернуть объект на прямой угол против часовой стрелки вокруг

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

центра. Используя матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, проведем поворот вокруг начала координат, не совпадающего с центром объекта. Обязательной процедурой преобразования является прежде всего такое перемещение

объекта, чтобы желаемый центр вращения оказался в начале координат. Это достигается с помощью следующей матрицы перемещения:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее применяем матрицу поворота и наконец с помощью матрицы перемещения приведем результаты поворота обратно к первоначальному центру. Вся операция

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

может быть реализована одной матрицей путем простого перемножения отдельных матриц, т.е.

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.16. ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Ранее в разд. 1.9 обсуждалось отражение относительно прямых, проходящих через начало координат. Иногда требуется выполнить отражение объекта относительно прямой, не проходящей через точку начала координат. Это можно сделать, воспользовавшись процедурой, аналогичной вращению вокруг произвольной точки. Конкретно выполняются следующие действия:

- перемещение линии и объекта таким образом, чтобы линия прошла через начало координат;
- поворот линии и объекта вокруг точки начала координат до совпадения с одной из координатных осей;
- отражение относительно координатной оси;
- обратный поворот вокруг начала координат;
- перемещение в исходное положение.

В матричном виде данное преобразование имеет представление

$$[T] = [T'] [R] [R'] [R]^{-1} [T']^{-1}, \quad (53)$$

где T' - матрица перемещения, R - матрица поворота вокруг начала координат, R' - матрица отражения.

Перемещения, повороты и отражения также применяются для преобразования произвольных фигур. Рассмотрим следующий пример.

Пример 7. Отражение относительно произвольной прямой

Рассмотрим прямую L и треугольник ABC (рис. 13а). Уравнение прямой L имеет вид

$$y = \frac{1}{2}(x+4)$$

Координатные векторы $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ задают вершины треугольника ABC .

Прямая L пройдет через начало координат при перемещении ее на -2

единицы в направлении оси Y . В результате этого при повороте вокруг начала координат на $-\operatorname{tg}^{-1}(1/2) = -26.57^\circ$ прямая совпадает с осью X . Выражение (33) используется для отражения треугольника относительно оси X , затем преобразованные координатные векторы треугольника поворачиваются и перемещаются к исходной ориентации. Комбинация преобразований будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 [T] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\quad \times \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \\
 [T] &= \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

и конкретно для координатных векторов треугольника $A^*B^*C^*$ имеем

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ -8/5 & 16/5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 & 12/5 & 1 \\ 28/5 & 14/5 & 1 \\ 22/5 & 6/5 & 1 \end{bmatrix}$$

(рис. 13а). Рис. 13 б, с, d, е иллюстрируют различные этапы данного преобразования.

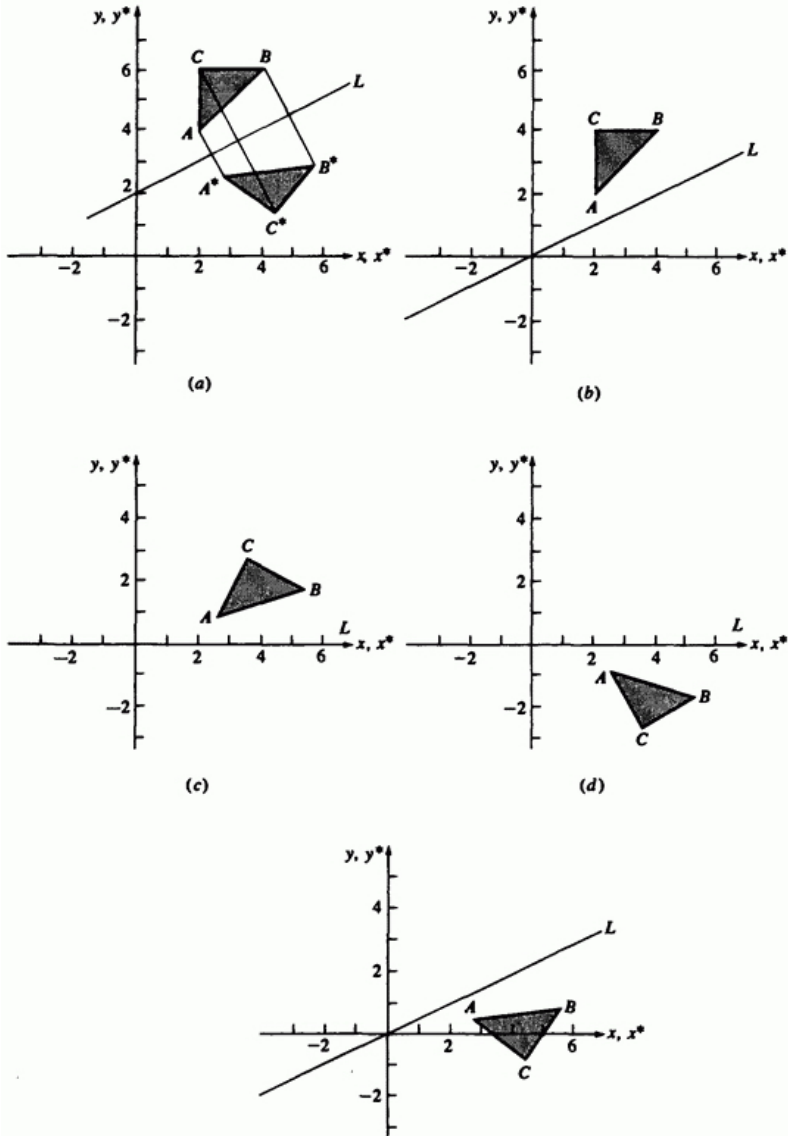


Рис. 13. Отражение относительно произвольной прямой: а) исходное и конечное положение; б) перенос прямой в начало координат; в) поворот до совпадения с осью X ; д) отражение относительно оси X ; е) обратный поворот; а) обратный перенос.

1.17. ПРОЕКЦИРОВАНИЕ - ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ КООРДИНАТ

Матрицу преобразования размером 3×3 для двумерных однородных координат можно разбить на четыре части

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & \vdots & p \\ c & d & \vdots & q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & n & \vdots & s \end{bmatrix}. \quad (54)$$

Напомним, что a , b , c и d - коэффициенты масштабирования, вращения, отражения и сдвига соответственно. Элементы m и n задают перемещение. В двух предыдущих разделах коэффициенты имели значения $p = q = 0$ и $s = 1$. Установим величины p и q не равными 0. Какой эффект мы получим? В данном случае полезно рассмотреть геометрическую интерпретацию.

При $p = q = 0$ и $s = 1$ однородные координаты преобразованных векторов всегда равны $h = 1$. Геометрически данный результат интерпретируется как ограничение преобразования физической плоскостью $h = 1$. Для иллюстрации эффекта преобразования при p и q , отличных от нуля, рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} [X \ Y \ h] &= [hx \ hy \ h] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= [x \ y \ (px + qy + 1)] \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь $X = hx$, $Y = hy$ и $h = px + qy + 1$. Преобразованный координатный вектор, выраженный в однородных координатах, лежит теперь в трехмерном пространстве, определенном как $h = px + qy + 1$. Это преобразование показано на рис. 14, где отрезок AB , принадлежащий физической плоскости $h = 1$, преобразуется в CD со значением $h \neq 1$, т. е. $pX + qY - h + 1 = 0$.

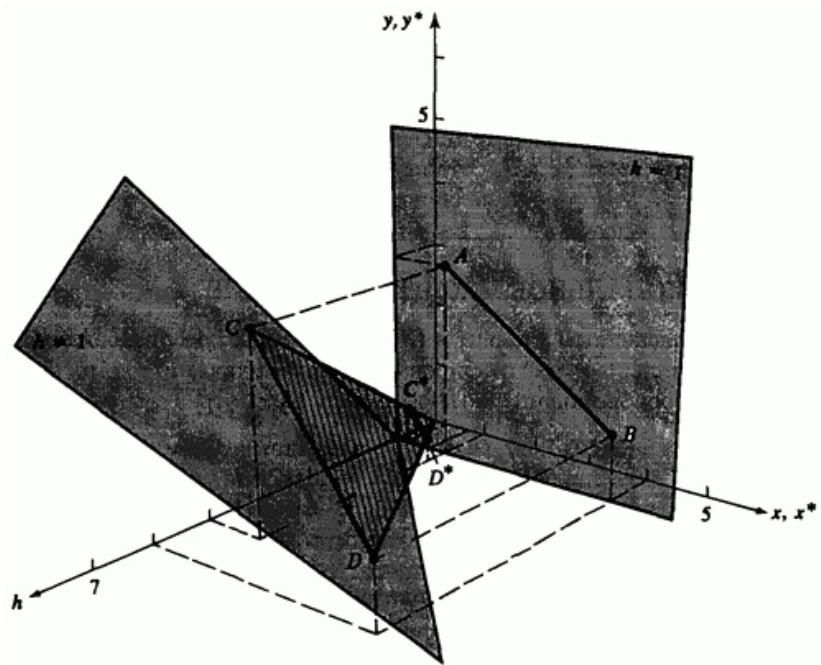


Рис. 14. Преобразование из физической плоскости ($h = 1$) на плоскость $h \neq 1$ и проецирование обратно на физическую плоскость.

Однако представляют интерес результаты, принадлежащие физической плоскости с $h = 1$, которые можно получить путем геометрического проецирования прямой CD с плоскости $h \neq 1$ обратно на плоскость $h = 1$ с использованием для этого проецирующих лучей, проходящих

через начало координат. Из рис. 14, используя правило подобия треугольников, получим

$$x^* = \frac{X}{h} \quad y^* = \frac{Y}{h}$$

или в однородных координатах

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix}.$$

После этого, нормализуя выражение (55) делением однородных координат на величину h , получаем

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X}{h} & \frac{Y}{h} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{px+qy+1} & \frac{y}{px+qy+1} & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

или

$$x^* = \frac{X}{h} = \frac{x}{px+qy+1}, \quad (57a)$$

$$y^* = \frac{Y}{h} = \frac{y}{px+qy+1}. \quad (57b)$$

Детально действие преобразования рассмотрим на следующем примере.

Пример 8. Проецирование в однородных координатах

Для отрезка AB из рис. 14 имеем $p = q = 1$, $[A] = [1 \ 3 \ 1]$ и

$$[B] = [4 \ 1 \ 1],$$

$$\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Таким образом, $[C] = [1 \ 3 \ 5]$ и $[D] = [4 \ 1 \ 6]$ на плоскости $h = x + y + 1$. Проецируя обратно на плоскость $h = 1$ путем деления на коэффициент однородных координат, проведем двумерное преобразование точек

$$[C^*] = [1 \ 3 \ 5] = [1/5 \ 3/5 \ 1],$$

$$[D^*] = [4 \ 1 \ 6] = [2/3 \ 1/6 \ 1].$$

Результат показан на рис. 14.

1.18. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ

Оставшийся необъясненным элемент s (3×3)-матрицы преобразования соответствует пропорциональному масштабированию, при котором все компоненты вектора изменяются пропорционально. Покажем это, рассмотрим следующее преобразование:

$$[X \ Y \ h] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} = [x \ y \ s], \quad (58)$$

где $X = x$, $Y = y$ и $h = s$. После нормализации получим $X^* = x/s$ и $Y^* = y/s$. Таким образом, преобразование $[x \ y \ 1][T] = [x/s \ y/s \ 1]$ является равномерным масштабированием координатного вектора. Если $s < 1$, то происходит растяжение, а если $s > 1$ - сжатие.

Заметим, что это преобразование осуществляется также в плоскости $h = 1$. Здесь $h = s = \text{const}$, и поэтому плоскость $h \neq 1$ параллельна плоскости $h = 1$. Геометрическая интерпретация данного эффекта показана на рис. 15.

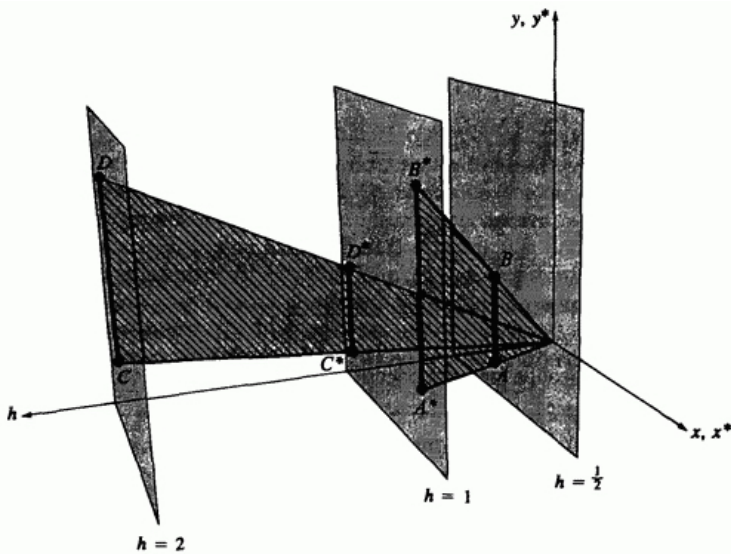


Рис. 15. Геометрическая интерпретация пропорционального масштабирования.

Если $s < 1$, то $h = \text{const}$ задает плоскость, лежащую между плоскостями $h = 1$ и $h = 0$. Следовательно, когда преобразуемая прямая AB проецируется обратно плоскость $h = 1$, то A^*B^* увеличивается. Аналогично, если $s > 1$, то $h = \text{const}$ определяет плоскость, расположенную за плоскостью $h = 1$ и проходящую вдоль оси h . В случае проецирования прямой CD на плоскость $h = 1$ происходит уменьшение прямой C^*D^* .

1.19. ТОЧКИ БЕСКОНЕЧНОСТИ

Однородные координаты предоставляют удобный и эффективный способ нанесения точек из одной системы координат в соответствующие точки альтернативной координатной системы. Бесконечная область в одной координатной системе часто преобразуется в конечную область в альтернативной системе. При некорректном выборе переноса параллельность прямых может не сохраняться. Однако точки пересечения после преобразования оказываются снова в точках пересечения. Данное свойство используется для определения однородных координат представления точек бесконечности.

Рассмотрим пару пересекающихся прямых, заданных уравнениями

$$x + y = 1,$$

$$2x - 3y = 0.$$

Прямые пересекаются в точке с координатами $x = 3/5$, $y = 2/5$.
Запишем уравнения в виде $x + y - 1 = 0$, $2x - 3y = 0$ и представим их в матричной форме

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0]$$

или

$$[X][M'] = [R].$$

Если матрица $[M']$ квадратная, то пересечение может быть получено путем обращения матрицы. Изменим систему исходных уравнений следующим образом:

$$x + y - 1 = 0,$$

$$2x - 3y = 0,$$

$$1 = 1,$$

или в матричной форме

$$[X][M] = [R],$$

т.е.

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1]$$

Квадратная матрица, обратная данной [2-1], имеет следующий вид:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/5 & -1/5 & 0 \\ 3/5 & 2/5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Умножая обе части уравнения на $[M]^{-1}$ и учитывая, что $[M][M]^{-1} = [I]$ является тождественной матрицей, получим

$$[x \ y \ 1] = \frac{1}{5} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = [3/5 \ 2/5 \ 1]$$

Таким образом, точка пересечения опять имеет координаты $x = 3/5$, $y = 2/5$. Рассмотрим теперь две параллельные прямые, заданные следующим образом:

$$x + y = 1,$$

$$x + y = 0.$$

По определению геометрии Евклида, точка пересечения двух параллельных прямых расположена в бесконечности. Продолжая предыдущие рассуждения, вычислим точку пересечения этих прямых, заданных в матричной форме,

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 1]$$

Однако несмотря на то что матрица квадратная, она не имеет обратной, так как две ее строки тождественны. Такая матрица называется сингулярной. Возможна иная формулировка с обратимой матрицей. Получим ее, переписывая систему уравнений следующим образом:

$$x + y - 1 = 0,$$

$$x + y = 0,$$

$$x = x,$$

или в матричной форме

$$[x \ y \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ x]$$

В данном случае матрица не является сингулярной и существует обратная ей

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая обе части выражения на обратную матрицу, получаем

$$[x \ y \ 1] = [0 \ 0 \ x] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = [x \ -x \ 0] = x[1 \ -1 \ 0]$$

Результирующие однородные координаты $[1 \ -1 \ 0]$ определяют точку пересечения двух параллельных прямых, т.е. точку

бесконечности. В частности, они представляют данную точку в направлении $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ двумерного пространства. В общем виде двумерный координатный вектор $\begin{bmatrix} a & b & 0 \end{bmatrix}$ представляет точку бесконечности на прямой $ay - bx = 0$. Приведем несколько примеров:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ точка на положительной оси x ,

$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ точка на отрицательной оси x ,

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ точка на положительной оси y ,

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ точка на отрицательной оси y ,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ вдоль прямой $y = x$ в направлении $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Вектор с однородной компонентой $h = 0$ действительно представляет точку бесконечности и может быть также интерпретирован как движение к пределу (табл. 1).

Таблица 1. Однородные координаты для точки $\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}$

h	x^*	y^*	X	Y
1	4	3	4	3
1/2	8	6	4	3
1/3	12	9	4	3
⋮				
1/10	40	30	4	3
⋮				
1/100	400	300	4	3
⋮				

Рассмотрим прямую $y^* = (3/4)x^*$ и точку $[X \ Y \ h] = [4 \ 3 \ 1]$. Напомним, что в однородных координатах не существует единственного представления координатного вектора (табл. 1). Точка $[4 \ 3 \ 1]$ представлена в однородных координатах по всем направлениям. Заметим, что в этой таблице при $h \rightarrow 0$ отношение y^*/x^* остается равным $3/4$, как и требуется для сохранения уравнения. Кроме этого, обратим внимание на то, что следующая пара (x^*, y^*) , все точки которой располагаются на линии $y^* = (3/4)x^*$, быстро приближается к бесконечности. Таким образом, предел при $h \rightarrow 0$ и есть точка бесконечности, заданная в однородных координатах как $[X \ Y \ h] = [4 \ 3 \ 0]$.

Обратившись снова к рис. 15, легко продемонстрировать геометрическую интерпретацию процесса движения к пределу при $h \rightarrow 0$. Рассмотрим отрезок единичной длины, проходящий от точки начала координат в направлении $[1 \ 0]$ на плоскости $h = s \ (s < 1)$. При $s \rightarrow 0$ проекция этой прямой обратно на физическую плоскость $h = 1$ в направлении лучей, проходящих через начало координат, становится бесконечной длины. Следовательно, конечная точка прямой должна представляться точкой бесконечности на оси X .

1.20. ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для представления данных и выполнения преобразований с помощью умножения матриц используются различные соглашения. Наибольшее внимание нужно уделять формулировке задач и интерпретации результатов. Например, перед выполнением поворота необходимо получить ответы на следующие вопросы.

В правосторонней или левосторонней системе координат определяются поворачиваемые координатные векторы?

Вращается объект или система координат?

Как определяются положительный и отрицательный повороты?

Координаты записываются в виде строки или столбца матрицы?

Вокруг какой линии или оси осуществляется поворот?

В данном изложении используется правосторонняя система координат, объект вращается в неподвижной координатной системе, положительный поворот определяется правилом правой руки, т. е. поворот по часовой стрелке осуществляется вокруг оси при наблюдении от начала вдоль положительной оси, и координатные векторы представляются в виде строки матрицы.

Выражение (29) задает преобразование для положительного поворота вокруг начала координат или оси Z . Так как вектор задается строкой матрицы, то матрицу преобразования следует разместить после данных или матрицы координатных векторов. Это преобразование задается путем умножения справа. В случае однородных координат для положительного поворота объекта на угол θ вокруг начала координат (оси Z) использование умножения справа приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} [X^*] &= [X][R], \\ [x^* \quad y^* \quad 1] &= [x \quad y \quad 1] \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{59}$$

Если мы подставим координатные векторы, заданные в однородных координатах в виде столбца матрицы, то поворот можно выполнить следующим образом:

$$[X^*] = [R]^{-1} [X],$$

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Выражение (60) называется преобразованием с умножением слева, так как матрица преобразования расположена перед столбцом координатного вектора или данных.

Заметим, что (3×3) -матрица в выражении (60) есть транспозиция (3×3) -матрицы из выражения (59). Это свидетельствует о независимости строк и столбцов матрицы.

Для того, чтобы повернуть систему координат и оставить неизменными координатные векторы, необходимо в выражении (59) заменить θ на $-\theta$. Вспомним, что $\sin \theta = -\sin(-\theta)$, а $\cos \theta = \cos(-\theta)$.

Теперь выражение (59) будет иметь вид

$$\begin{bmatrix} x^* & y^* & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Заметим, что (3×3) -матрица опять имеет обратную и также транспонируется в матрицу из (59).

Если вращается система координат и используется левосторонняя координатная система, то замену θ на $-\theta$ надо производить дважды, а уравнение (59) снова оказывается справедливым при допущении, что применяется последующее умножение на строку матрицы данных.

Заметим, что, как показано на рис. 16, вращение против часовой стрелки векторов, задающих объект, идентично повороту в том же направлении координатных осей при неподвижном объекте.

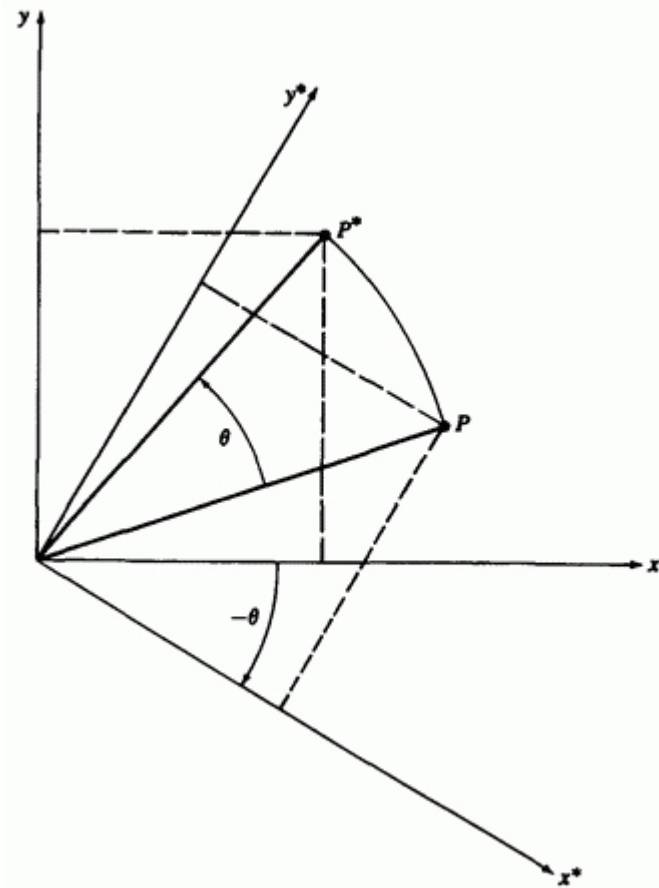


Рис. 16. Эквивалентность преобразования координатных векторов и систем координат.

Опять нет необходимости в изменении содержимого матрицы преобразования 3×3 , если нет других причин для ее редактирования. Эти несколько примеров показывают, насколько аккуратно необходимо выполнять матричные преобразования.

2. Элементы теории кривых

2.1. Кривая линия и ее уравнение

1. Методы элементарной и аналитической геометрии с успехом применяются к рассмотрению только небольшого числа типов различных линий и поверхностей: прямой, окружности и конических сечений плоскости, сферы и поверхностей 2-го порядка. Поэтому при изложении этих математических дисциплин обычно обходятся без общего определения понятия линии и поверхности. Такое определение становится, однако, необходимым при переходе к топологии и дифференциальной геометрии потому, что топология изучает свойства кривых линий и поверхности во всей их общности, а дифференциальная геометрия рассматривает весьма обширный и важный класс кривых и поверхностей, содержащий бесконечное множество различных конкретных случаев.

Мы начнем с топологического определения кривой линии, предполагая, что понятие прямой линии и ее отрезка уже дано в элементарной геометрии.

Топологическим или *непрерывным соответствием* двух точечных множеств называется такое взаимно однозначное соответствие между точками этих множеств, при котором всяким двум бесконечно сближающимся точкам одного множества соответствуют бесконечно сближающиеся точки другого множества. Если между двумя точечными множествами можно установить топологическое соответствие, то говорят также, что эти множества *топологически эквивалентны* между собой.

Простой дугой называют такое множество точек, которое топологически эквивалентно отрезку прямой. Точки, соответствующие конечным точкам отрезка, называют при этом *конечными точками дуги*, а две дуги называют *примыкающими*, если одна пара концов этих дуг или обе пары этих концов совпадают между собой.

Кривой линией называют такое множество точек, которое состоит из конечного или счетного множества простых дуг, примыкающих друг к другу.

2. Допустим, что простая дуга AB отображена топологически на прямолинейный отрезок A_0B_0 так, что всякой точке M дуги соответствует точка M_0 этого отрезка (рис. 1).

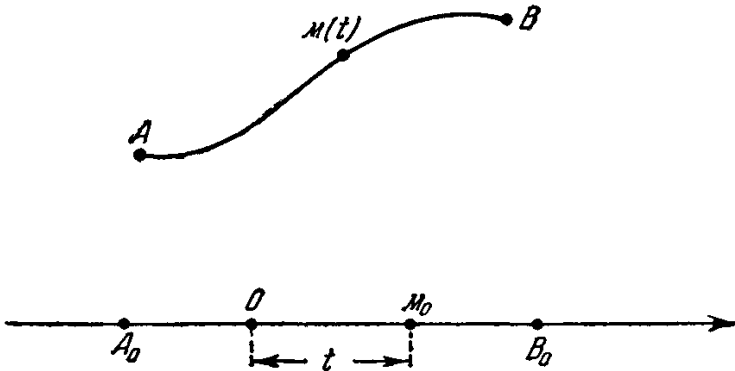


Рис. 1.

Введем на прямой A_0B_0 координату, т. е. выберем начальную точку O , некоторое положительное направление и будем измерять отрезки некоторым масштабным отрезком. Всякой точке прямой мы отнесем таким образом ее абсциссу, которую будем считать положительной для точек, расположенных по одну сторону от O , и отрицательной для точек, расположенных по другую сторону. Положение всякой точки M_0 отрезка A_0B_0 будет определяться значением ее абсциссы t , а если известен закон, по которому точки дуги отображаются в точки отрезка, то задание абсциссы t определит также и положение точки M дуги. Этим способом мы можем отнести всякой точке M дуги AB некоторое число. Соответствие между точками дуги и числами будет взаимно однозначным и непрерывным. Непрерывность следует из того, что бесконечно близким абсциссам t и t' соответствуют бесконечно близкие точки M_0 и M'_0 отрезка A_0B_0 , а им в свою очередь отвечают бесконечно близкие точки M и M' дуги AB .

Если указанное соответствие между числами и точками дуги осуществлено, то говорят, что дуга *параметризована*, а значение числа t называют *параметром* соответствующей точки.

Всякую дугу можно топологически отобразить на отрезок бесчисленным множеством различных способов, и каждому из этих способов будет соответствовать свой способ параметризации дуги. Рассмотрим два таких способа, и пусть при первом из них точке M относится значение параметра t , а при втором — значение τ . Эти значения будут связаны между собой функциональной зависимостью

$$t = f(\tau),$$

причем очевидно, что функция $f(\tau)$ должна быть однозначна и непрерывна вместе со своей обратной функцией

$$\tau = f^{-1}(t).$$

Если в пространстве задано начало O , то всякая точка M дуги определяется ее радиусом-вектором $r = \overrightarrow{OM}$. Если дуга параметризована, то положение этой же точки определяется заданием значения t параметра. При этом всякому значению параметра будет соответствовать определенное значение радиуса-вектора r . Иными словами: *радиус-вектор точки дуги является функцией параметра, определяющего эту точку:*

$$r = r(t).$$

Согласно предыдущим определениям эта функция должна быть непрерывной. Соотношение, которое определяет зависимость радиуса-вектора точки параметризованной дуги от ее параметра, называется *параметрическим уравнением этой дуги*. (Мы не будем затрагивать вопроса о параметризации кривой, произвольным образом составленной из множества простых дуг. Чтобы избежать затруднений, которые связаны с этим вопросом, будем, вообще говоря, понимать в дальнейшем под кривой линией простую дугу.)

3. Дифференциальная геометрия изучает некоторый класс кривых, определенных вышеуказанным топологическим образом.

Эти кривые характеризуются возможностью такой параметризации, при которой радиус-вектор их точки выражается дифференцируемой функцией параметра. В дальнейшем мы всегда будем предполагать эту дифференцируемость, допуская только такие преобразования параметра, при которых функция $t = f(\tau)$ тоже дифференцируема.

Более того: мы будем предполагать у всех рассматриваемых функций существование всех производных до тех порядков включительно, которые потребуются для нашего рассмотрения.

2.2. Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость

1. Прямая называется *касательной* к кривой в данной ее точке, если она является предельным положением секущей, проходящей через данную точку и другую точку кривой, неограниченно приближающуюся к данной.

Предположим, что кривая параметризована и ее уравнение имеет вид $r = r(t)$. Пусть точкам A и B (рис. 2) этой кривой соответствуют значения параметра t и $t + \Delta t$, а их радиусы-векторы равны r и $r + \Delta r$ соответственно.

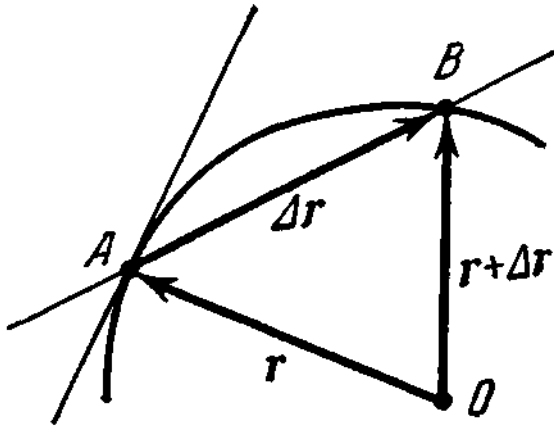


Рис. 2

В таком случае вектор Δr соответствует хорде \overrightarrow{AB} , а вектор $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ направлен по секущей AB в ту же сторону, как и эта хорда, если $\Delta t > 0$, и в противоположную сторону, если $\Delta t < 0$.

Если точка B неограниченно приближается по кривой к точке A , то секущая AB вращается вокруг точки A , стремясь занять положение касательной. Вместе с тем отношение $\frac{\Delta r}{\Delta t}$ стремится к про-

изводной \dot{r} , как к своему пределу.

Отсюда следует, что производная от радиуса-вектора точка параметризованной кривой по параметру есть вектор, направленный по касательной к этой кривой.

Если, кроме того, принять во внимание замечание, сделанное относительно направления вектора \overrightarrow{AB} , то станет очевидным, что вектор \dot{r} направлен по касательной в сторону возрастания параметра. Направление касательной не определяется с помощью задания вектора r в тех точках параметризованной кривой, в которых этот вектор обращается в нуль. Такие точки называются особыми точками параметризованной кривой и исключаются из рассмотрения. Про всякую плоскость, содержащую касательную, говорят, что она касается кривой в той же точке, что и данная касательная прямая.

2. Если вектор второй производной

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

направлен по касательной в каждой точке линии, то ее радиус-вектор удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{\mathbf{r}} = \lambda \dot{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

общее решение которого

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\varphi(t) + \mathbf{b} \quad (2)$$

показывает, что эта линия прямая. Исключим из рассмотрения этот случай, а также и те отдельные точки кривой, в которых имеет место (1).

При переходе к новому параметру мы будем иметь

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \left(\frac{d^2\tau}{dt^2} \right) + \frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2.$$

Эта линейная зависимость показывает, что вторая производная от радиуса-вектора точки кривой, взятая по любому параметру, находится в некоторой вполне определенной касательной плоскости кривой, которая называется ее *соприкасающейся плоскостью*.

Расстояние текущей точки кривой $\mathbf{r}(t)$ от ее касательной плоскости в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$ определяется подстановкой радиуса-вектора в левую часть нормального уравнения этой плоскости

$$l = \mathbf{n} \{ \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 \},$$

где \mathbf{n} есть единичный вектор, перпендикулярный к данной касательной плоскости. Разлагая в строку Тейлора $\mathbf{r}(t)$ по степеням

$\Delta t = t - t_0$, получим

$$l = \mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + \frac{1}{6} \mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + A \Delta t^4,$$

но $\mathbf{n}\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$, и если касательная плоскость — не соприкасающаяся, то $\mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 \neq 0$ и

$$l = \frac{1}{2} \mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^2 + B \Delta t^3,$$

а если касательная плоскость — соприкасающаяся, то $\mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 = 0$ и

$$l = \frac{1}{6} \mathbf{n}\ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta t^3 + A \Delta t^4.$$

При достаточно малом Δt знак левой части совпадает со знаком первого отличного от нуля члена правой части. В первом случае

он совпадает со знаком $n\ddot{r}_0$, т. е. со знаком проекции вектора второй производной на нормаль к касательной плоскости. Таким образом, вблизи точки прикосновения все точки кривой находятся по ту сторону касательной плоскости, куда направлен вектор второй производной, если эта плоскость не совпадает с соприкасающейся. Во втором случае знак l изменяется вместе с переменной знака Δt , если $n\dot{r} \neq 0$ и вблизи точки прикосновения к соприкасающейся плоскости кривая, вообще говоря, переходит с одной ее стороны на другую.

Что касается такой линии, во всех точках которой вектор \dot{r} лежит в соприкасающейся плоскости, то ее радиус-вектор удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\dot{r} \ddot{r} \dot{\dot{r}}) = 0, \quad (3)$$

или

$$\dot{\dot{r}} = \lambda \ddot{r} + \mu \dot{r}, \quad (4)$$

общее решение которого имеет вид

$$r = a\varphi(t) + b\psi(t) + c \quad (5)$$

и показывает, что кривая будет плоской.

2.3. **Натуральный параметр и сопровождающий трехгранник кривой**

1. Величина интеграла

$$s = \int_{t_0}^t |\dot{r}| dt \quad (1)$$

не зависит от выбора параметра t , и этот интеграл определяет так называемый *натуральный параметр* кривой. В общем курсе дифференциальной геометрии показывается, что разность двух значений этого параметра

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}| dt \quad (2)$$

равна длине дуги, заключенной между точками со значениями параметра t_1 и t_2 .

Дифференцируя (1), получим

$$ds = |\dot{\mathbf{r}}| dt$$

или

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2. \quad (3)$$

Обозначая штрихом дифференцирование по натуральному параметру, получим

$$(\mathbf{r}')^2 = \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)^2 = 1. \quad (4)$$

Таким образом, производная от радиуса-вектора точки кривой по натуральному параметру есть *единичный* касательный вектор кривой. Очевидно, что (4) равносильно соотношению

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1, \quad (5)$$

которое показывает, что *предел отношения хорды кривой к стягиваемой ею бесконечно малой дуге равен единице*.

В дальнейшем мы воспользуемся одним следствием этого результата. Если два значения переменного единичного вектора \mathbf{m} изображены отрезками OA и OB , то длина $\overset{\curvearrowright}{AB}$ окружности единичного радиуса с центром в точке O равна углу φ , на который поворачивается вектор \mathbf{m} , получивший приращение $\Delta \mathbf{m} = \overset{\rightarrow}{AB}$. Так как в силу (5)

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{m}}{\varphi} \right| = 1, \quad (6)$$

то *предел отношения модуля приращения единичного вектора к бесконечно малому углу его поворота равен единице*.

2. Вектор второй производной \mathbf{r}'' по натуральному параметру удовлетворяет условию

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{r}'^2) = 2\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0, \quad (7)$$

т. е. перпендикулярен к касательной.

Но всякая прямая, пересекающая касательную ортогонально в точке ее прикосновения, называется *нормалью кривой*, а нормаль, расположенная в соприкасающейся плоскости, — ее *главной нормалью*. Так как вектор второй производной по любому параметру расположен в соприкасающейся плоскости, то вектор \mathbf{r}'' направлен по главной нормали.

Нормаль, перпендикулярная к главной нормали, называется *бинормалью*, а плоскость, содержащая главную нормаль и бинормаль, а следовательно, и все нормали кривой, называется *нормальной*.

Наконец, плоскость, содержащая бинормаль и касательную, называется *спрямляющей*.

Прямоугольный трехгранник, образованный касательной, главной нормалью и бинормалью, называется *сопровождающим трехгранником* кривой. Единичные векторы τ , ν , β , направленные по осям этого трехгранника (рис. 3), называются также *главными векторами* кривой и определяются условиями

$$\begin{aligned} \tau &= r', \quad \nu = pr'' \quad (p > 0), \\ \beta &= [\tau\nu]. \end{aligned} \quad (8)$$

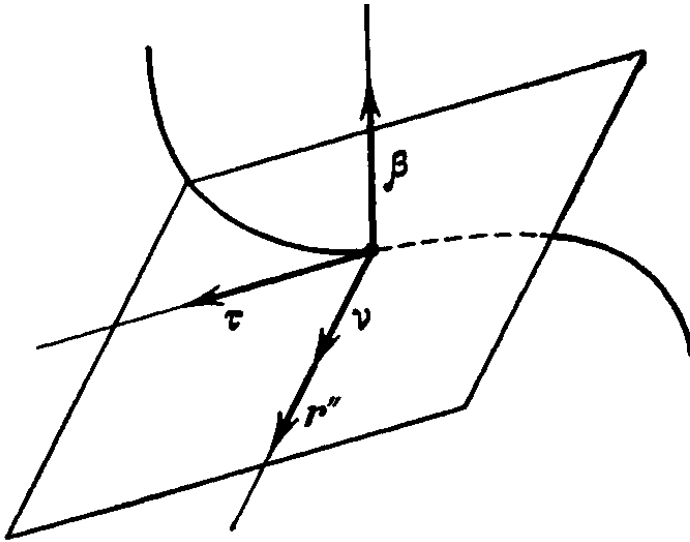


Рис. 3.

Произведя круговую перестановку в последнем из них, получим также

$$\tau = [\nu\beta], \quad \nu = [\beta\tau]. \quad (9)$$

2.4. Лемма об ортонормальной тройке и формулы Серре — Френе

1. Три вектора m_1 , m_2 , m_3 образуют *ортонормальную тройку*, если они единичны и взаимно перпендикулярны. Условие ортонормальности имеет вид

$$m_i m_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \quad (1)$$

Если векторы ортонормальной тройки являются дифференцируемыми функциями аргумента t , то их производные можно разложить по ним самим и рассмотреть систему уравнений

$$\frac{dm_i}{dt} = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} m_k. \quad (2)$$

Дифференцируя левые и правые части (1) и пользуясь (2), мы получим

$$\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} m_k m_j + \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} m_i m_k = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} \delta_{kj} + \sum_{k=1}^3 \alpha_{kj} \delta_{ik} = 0$$

или

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0. \quad (3)$$

Таким образом, матрица коэффициентов разложения производных векторов ортонормальной тройки по этим же векторам косимметрична, т. е. имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Применяя этот общий результат к производным главных векторов кривой по ее натуральному параметру и пользуясь (8) п.2.3, мы получим так называемые *формулы Серре — Френе*

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= k\nu, \\ \nu' &= -k\tau + \chi\beta, \\ \beta' &= -\chi\nu. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Коэффициенты k и χ называются *кривизной* и *кручением кривой*, а величина $\rho = \frac{1}{k}$ — *радиусом кривизны*. Пользуясь (6) п.2.3, легко

показать, что кривизна кривой в любой ее точке равна пределу отношения угла поворота касательной на бесконечно малой дуге, содержащей эту точку, к длине этой дуги, а абсолютная величина кручения равна пределу отношения угла поворота бинормали на той же дуге к длине этой дуги.

3. Кривизна и кручение выражаются через производные радиуса-вектора по любому параметру следующим образом:

$$k = \frac{|[\dot{r}\ddot{r}]|}{(\dot{r}^2)^{3/2}}, \quad \chi = \frac{(\dot{r}\ddot{r}\ddot{r})}{[\dot{r}\ddot{r}]^2}. \quad (5)$$

Точки кривых, в которых $k = 0$, называются *точками спрямления*, и точки, в которых $\chi = 0$, — *точками уплощения*.

Соотношения

$$k = k(s), \quad \chi = \chi(s),$$

выражающие зависимости кривизны и кручения от натурального параметра, называются *натуральными уравнениями кривой*. Натуральные уравнения определяют кривую с точностью до ее положения в пространстве.

Из (1) — (5) п.2.2 следует, что прямая линия характеризуется условием

$$k = 0,$$

а плоские кривые — условием

$$\chi = 0.$$

2.5. Винтовая линия и окружность

1. В дальнейшем мы неоднократно будем встречаться с *круговыми векторными функциями*. Значения этих функций $e(t)$ и $g(t)$ определяются, как такие единичные векторы, которые расположены в плоскости xOy правой прямоугольной системы координат и образуют углы t и $t + \frac{\pi}{2}$ с осью Ox , причем положительное значение угла t

отсчитывается по направлению, обратному движению часовой стрелки, наблюдаемому со стороны положительного направлений оси Oz . Согласно этому определению

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= i \cos t + j \sin t, \\ g(t) &= -i \sin t + j \cos t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$e^2 = g^2 = 1, \quad eg = ek = gk = 0, \quad (2)$$

$$[eg] = k, \quad [gk] = e, \quad [ke] = g, \quad (3)$$

где i, j, k — масштабные орты прямоугольных осей.

Отметим, кроме того, правила дифференцирования векторных круговых функций.

Из (1) непосредственно следует, что

$$\frac{de}{dt} = g, \quad \frac{dg}{dt} = -e. \quad (4)$$

2. Применим введенные обозначения для записи параметрического уравнения *винтовой линии*, т. е. траектории точки, которая участвует одновременно в двух равномерных движениях: поступательном движении по прямой, параллельной неподвижной оси, и вращательном движении вокруг этой оси (рис. 4)

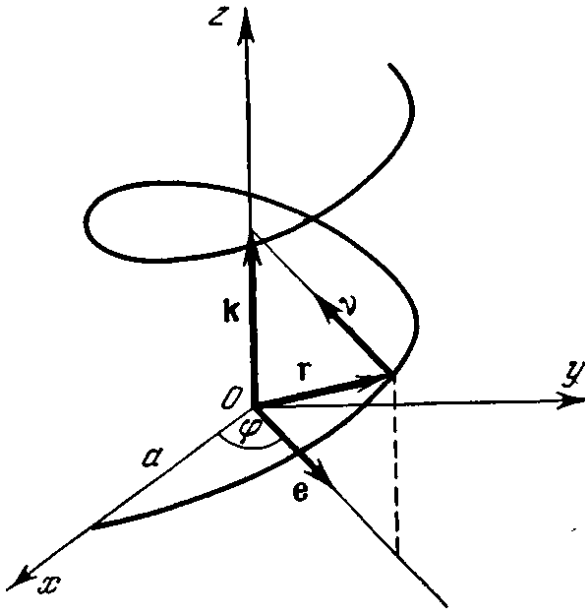


Рис. 4.

Если эта ось совпадает с осью Oz , скорости указанных равномерных движений равны v и ω , а в начальный момент времени 0 точка находилась на оси Ox на расстоянии a от начала координат, то уравнение движения будет

$$r = ae(\omega t) + vt k.$$

Полагая

$$\omega t = \varphi, \quad \frac{v}{\omega} = b,$$

приведем уравнение винтовой линии к следующему виду:

$$r = ae(\varphi) + b\varphi k. \quad (5)$$

При $b = 0$ это уравнение принимает вид

$$\mathbf{r} = a\mathbf{e}(\varphi) \quad (6)$$

и выражает окружность радиуса a , расположенную в плоскости xOy , центр которой совпадает с началом координат.

3. Из (4) следует, что касательный вектор винтовой линии

$$\dot{\mathbf{r}} = a\mathbf{g} + b\mathbf{k} \quad (7)$$

образует постоянный угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

с плоскостью xOy .

Длина дуги винтовой линии

$$s = \int_0^{\varphi} |\dot{\mathbf{r}}| d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2 + b^2} d\varphi,$$

или

$$s = \sqrt{a^2 + b^2} \varphi. \quad (8)$$

В силу (8) вектор главной нормали винтовой линии

$$\mathbf{v} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|} = -\mathbf{e}, \quad (9)$$

откуда следует, что главные нормали винтовой линии пересекают под прямым углом ее ось.

Пользуясь формулами (5) § 4, легко показать, что кривизна и кручение винтовой линии

$$k = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \kappa = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (10)$$

и, следовательно, постоянны.

Пользуясь указанным в п° 3 п.2.4 результатом, можно утверждать, что всякая кривая, у которой

$$k = \text{const}, \quad \kappa = \text{const} \neq 0,$$

есть винтовая линия; если же

$$k = \text{const}, \quad \kappa = 0,$$

то это — окружность радиуса $\frac{1}{k}$.

3. Плоские кривые

Существует множество способов построения кривых вручную с помощью карандаша, ручки, кисточки, ножа и разнообразных инструментов: линейки, лекала, циркуля, плаза, шаблона и т. д. Каждый инструмент служит определенной цели, причем нет ни одного абсолютного универсального. Точно так же в машинной графике кривые строятся с помощью разных методов и инструментов. В этой главе рассматриваются методы построения двумерных кривых, т.е. полностью лежащих в одной плоскости. Здесь мы ограничимся коническими сечениями.

3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРИВЫХ

В предыдущих разделах изучались преобразования точек. Кривая может быть представлена совокупностью точек. Если точки расположены близко друг от друга, то, соединяя их отрезками прямой, мы получим изображение кривой. На рис. 1 показаны два разных точечных представления одной кривой. Точки на кривой 1а расположены равномерно по ее длине. В результате получается довольно плохое представление кривой, особенно если мал радиус кривизны. Улучшить вид можно, увеличивая плотность точек в таких участках, рис. 1б.

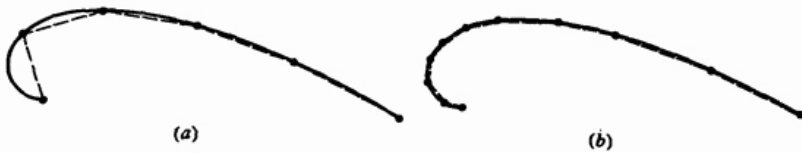


Рис. 1. Точечное представление кривых, (а) Равномерная плотность точек вдоль кривой; (б) плотность точек возрастает с уменьшением радиуса кривизны.

Хотя, как показано выше, кривые могут быть достаточно хорошо представлены совокупностью точек, аналитическое представление во многих отношениях предпочтительнее. Его преимущества - это точность, компактность записи и простота вычисления промежуточных

точек. Аналитическое представление позволяет без труда определить наклон и радиус кривизны, а при точечном представлении для этого требуется численное дифференцирование - чрезвычайно неточная процедура.

Сравните объем памяти для точечного представления окружности с 32 точками на ней и аналитическое представление - координаты центра и радиус. При аналитическом представлении кривой можно точно определить положение любой точки, а при точечном нужна интерполяция, причем в общем случае результат интерполяции не принадлежит кривой. Опыт показывает, что аналитически представленные кривые легче изобразить на рисунке. Аналитическое представление выгоднее, когда для удовлетворения заданному критерию необходимо непрерывно изменять форму кривой. Ниже рассматриваются различные методы аналитического представления двумерных кривых.

Часто требуется аналитическое представление кривой, первоначально заданной точками. С математической точки зрения это проблема интерполяции. **Для того чтобы провести кривую через все заданные точки, применяется метод кусочной полиномиальной аппроксимации.** Для этого требуется определить коэффициенты полинома некоторой степени. Вид кривой в промежуточных точках зависит от степени полинома и граничных условий. Метод рассматривается далее.

Если же точки - только приблизительные значения величин, например данные экспериментальных измерений или наблюдений, то нужна кривая, задающая верное направление изменения. В общем случае кривая может не проходить ни через одну точку данных. Здесь применяется метод наименьших квадратов. Метод наименьших

квадратов дает кривую в виде $y = f(x)$, которая минимизирует сумму квадратов отклонений по оси y между данными и полученной кривой. Вид $y = f(x)$ выбирают, исходя из характера изучаемого процесса.

Обычно для метода наименьших квадратов используются полиномы, степенные и экспоненциальные функции: $y = ax^b$, $y = ae^{bx}$ или $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_{n+1}x^n$, где a , b и c_i - константы. Независимо от выбора вида кривой метод требует решения системы линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант. Более подробное описание приведено в книгах по численному анализу.

3.2. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

Математически кривая может быть представлена в параметрической или непараметрической форме. Непараметрическая кривая задается в виде явной или неявной функции. Для плоской кривой явное непараметрическое представление имеет вид:

$$y = f(x).$$

Пример - уравнение прямой, $y = mx + b$. При этом одному значению x соответствует только одно значение y , поэтому замкнутые или многозначные кривые, например окружность, явно представить нельзя. Неявное представление

$$f(x, y) = 0$$

позволяет обойти это ограничение.

Общий вид неявного уравнения второй степени

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

порождает различные двумерные кривые, называемые коническими сечениями. На рис. 2 изображены три вида конических сечений - парабола, гипербола и эллипс.

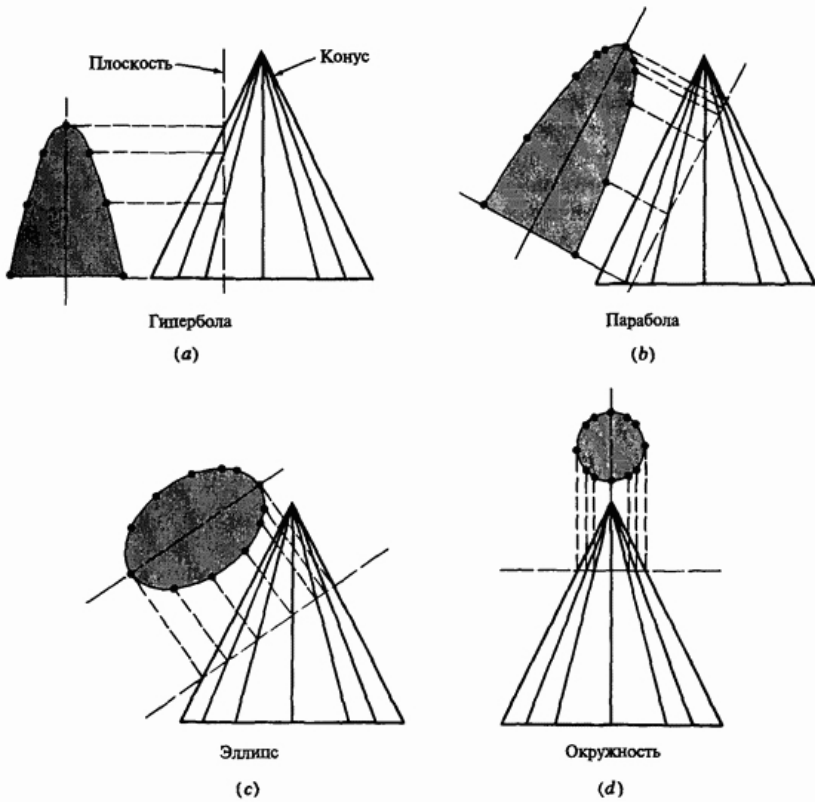


Рис. 2. Конические сечения.

Окружность - это частный случай эллипса. Определяя коэффициенты a , b , c , d , e и f , можно получить разные конические сечения. Если сечение задано относительно локальной системы координат и проходит через ее начало, то $f = 0$. Для того чтобы провести кривую через данные точки, используются граничные условия.

Пусть $c = 1.0$, тогда сегмент кривой между двумя точками определяется пятью независимыми условиями, из которых вычисляются оставшиеся коэффициенты a , b , d , e и f . Например,

можно указать положение крайних точек, наклон кривой в них и промежуточную точку на кривой.

Если $b = 0$ и $c = 1.0$, то аналитическое представление кривой получается с помощью только четырех дополнительных условий, например положения концевых точек и наклона кривой в них. Кривая при $a = 1.0$, $b = 0$ и $c = 1.0$ еще проще:

$$x^2 + y^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Тремя условиями для вычисления d , e и f могут быть две концевые точки и наклон кривой в одной из них или же две концевые точки и третья точка на кривой.

При $a = b = c = 0$ получается прямая линия. Ее уравнение

$$dx + ey = f = 0$$

или

$$y = -\left(\frac{d}{e}\right)x - \frac{f}{e} = mx + b'$$

где m - наклон линии, b' - пересечение с осью y .

Как явное, так и неявное непараметрическое представление осезависимо, т.е. сложность обработки зависит от выбора системы координат. Например, если в заданной системе координат граничным условием является вертикальный наклон, нужно либо изменить ее, либо аппроксимировать бесконечный коэффициент наклона наибольшей допустимой положительной или отрицательной величиной.

Кроме того, если точки на осезависимой непараметрической кривой вычисляются с равномерным приращением по x или y , они не будут

равномерно распределены вдоль кривой. Это может повлиять на качество и точность графического изображения. Тем не менее непараметрическое представление бывает полезным. Теперь рассмотрим параметрическое представление, позволяющее обойти эти ограничения.

3.3. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ

В параметрическом виде каждая координата точки кривой представлена как функция одного параметра. Значение параметра задает координатный вектор точки на кривой. Для двумерной кривой с параметром t координаты точки равны:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t).$$

Тогда векторное представление точки на кривой:

$$P(t) = [x(t) \quad y(t)].$$

Чтобы получить непараметрическую форму, нужно исключить t из двух уравнений и вывести одно в терминах x и y .

Параметрическая форма позволяет представить замкнутые и многозначные кривые. Производная, т. е. касательный вектор, есть

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t)],$$

где «'» обозначает дифференцирование по параметру. Наклон кривой, dy/dx , равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

Отметим, что при $x'(t) = 0$ наклон бесконечен. Параметрическое представление не вызывает в этом случае вычислительных трудностей, достаточно приравнять нулю одну компоненту касательного вектора.

Так как точка на параметрической кривой определяется только значением параметра, эта форма не зависит от выбора системы координат. **Конечные точки и длина кривой определяются диапазоном изменения параметра.** Часто бывает удобно нормализовать параметр на интересующем отрезке кривой к $0 \leq t \leq 1$. Осенезависимость параметрической кривой позволяет с легкостью проводить с ней аффинные преобразования, рассмотренные ранее.

Самое простое параметрическое представление у прямой. Для двух векторов положения R_1 и R_2 параметрический вид отрезка прямой между ними такой:

$$P(t) = R_1 + (R_2 - R_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Так как $P(t)$ это вектор, у каждой его составляющей есть параметрическое представление $x(t)$ и $y(t)$ между R_1 и R_2 :

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

Пример 1. Параметрическое представление прямой

Найти параметрическое представление отрезка между точками

$P_1[1 \ 2]$ и $P_2[4 \ 3]$, касательный вектор и наклон.
Параметрическое представление:

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = [1 \ 2] + ([4 \ 3] - [1 \ 2])t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$P(t) = [1 \ 2] + [3 \ 1]t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Параметрическое представление составляющих x и y :

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t = 1 + 3t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t = 2 + t.$$

Дифференцируя $P(t)$, получим касательный вектор:

$$P'(t) = [x'(t) \ y'(t)] = [3 \ 1]$$

или

$$\bar{V}_t = 3\bar{i} + \bar{j},$$

где \bar{V}_t - касательный вектор, а \bar{i} , \bar{j} - единичные векторы в направлениях x , y соответственно.

Наклон отрезка равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1}{3}.$$

На рис. 3 сравниваются непараметрическое и параметрическое представления окружности в первом квадранте. Непараметрический вид

$$y = +\sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

показан на рис. 3 а.

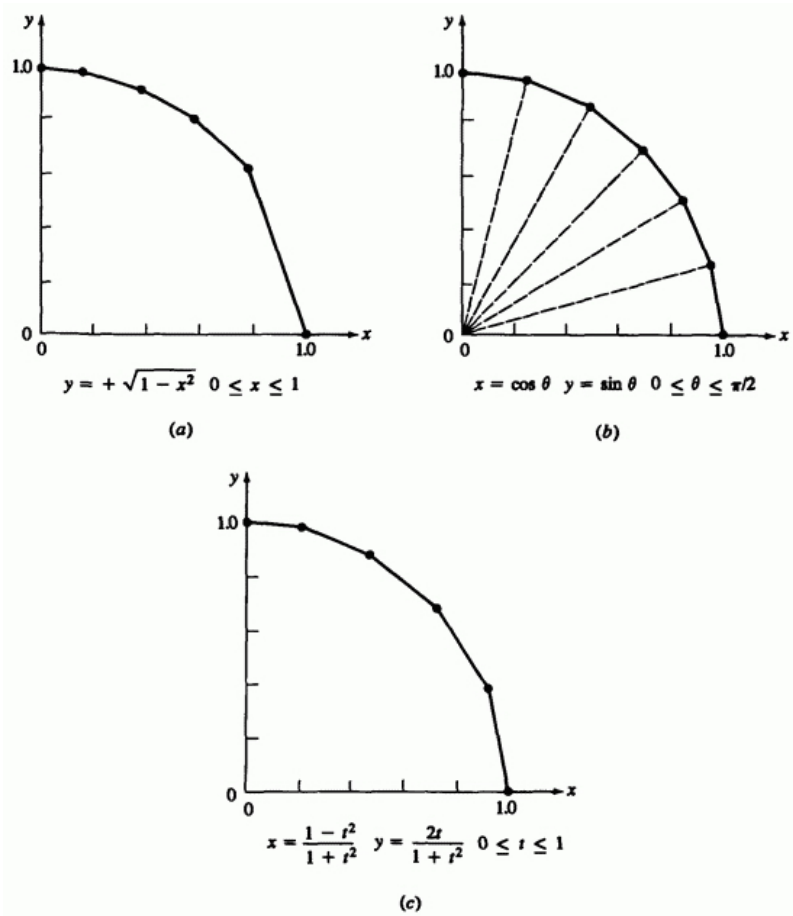


Рис. 3. Представление окружности для первого квадранта.

Точки на дуге соответствуют равным приращениям x . При этом дуга состоит из отрезков разной длины, и получается весьма приблизительное графическое представление окружности. Кроме того, расчет квадратного корня - вычислительно дорогостоящая операция.

Стандартная параметрическая форма единичной окружности:

$$x = \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$y = \sin \theta,$$

или

$$P(\theta) = [x \ y] = [\cos \theta \ \sin \theta], \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad (2)$$

где параметр θ - геометрический угол, отмеряемый против часовой стрелки от положительной полуоси x . На рис. 3б изображена дуга, построенная по равным приращениям параметра в пределах $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

При этом точки располагаются на одинаковом расстоянии вдоль окружности, и окружность выглядит гораздо лучше. Недостаток такого представления - сложность вычисления тригонометрических функций. (Более простой метод рассматривается ниже в разд. 3.4.)

Параметрическое представление кривой не единственно, например,

$$P(t) = \left[\begin{array}{c} \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)} \\ \frac{2t}{(1+t^2)} \end{array} \right], \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3)$$

также представляет дугу единичной окружности в первом квадранте (рис. 3с). Связь между параметрическим представлением (4) п.1.3. и стандартным параметрическим представлением (2) показана на рис. 4.

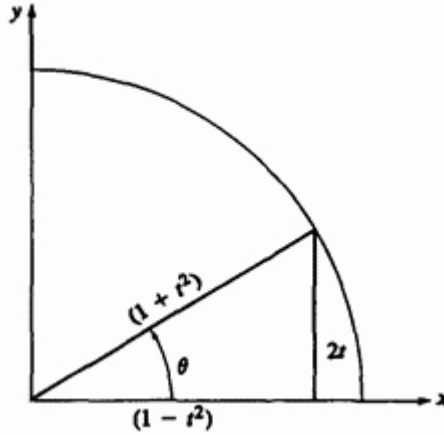


Рис. 4. Связь между параметрическими представлениями.

Из него видно, что для единичной окружности

$$x = \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$y = \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Факт, что уравнение 3 представляет дугу единичной окружности, подтверждается следующим:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = 1,$$

где r - единичный радиус.

На рис. 3с показан результат для равных приращений Δt . Он лучше, чем у явного (1), но хуже, чем у стандартного параметрического

представления (2). Однако уравнение (3) проще с **вычислительной точки зрения**, т.е. это компромиссное решение.

Пример 2. Определение точки на параметрической кривой

Пусть надо найти y для заданного значения x . Например, пусть $x = 0.5$, и требуется вычислить y для единичной окружности. Для явного представления (1) вычисляем непосредственно:

$$y = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (0.5)^2} = \sqrt{0.75} = 0.866$$

Для параметрического представления сначала нужно выразить параметр t через x , а затем с помощью полученного значения найти y . Параметрическое представление уравнения (2)

$$x = \cos \theta,$$

$$y = \sin \theta.$$

Поэтому

$$\theta = \arccos(x) = \arccos(0.5) = 60^\circ,$$

$$y = \sin(60^\circ) = 0.866$$

С другой стороны, из уравнения 4-3

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

Решаем первое из этих уравнений относительно

$$t = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.57735$$

и получаем

$$y = \frac{2/\sqrt{3}}{4/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

В случае более сложного параметрического представления бывает удобнее искать значение явной переменной итеративными методами.

Параметрическое представление конических сечений осенезависимо и дает более качественное изображение, чем непараметрическое; однако оба имеют свои достоинства и недостатки и часто применяются в машинной графике.

3.4. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Параметрическое представление окружности радиуса r с центром в начале координат:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ y &= r \sin \theta, \end{aligned} \tag{4}$$

где θ - параметр. Ранее мы отмечали, что равномерное приращение дает отличное изображение, но алгоритм неэффективен из-за частого

вызова тригонометрических функций. В ряде работ приводится более быстрый алгоритм.

Полной окружности соответствует диапазон изменения параметра θ от 0 до 2π . Если рассматривать некоторое фиксированное число равномерно распределенных точек по окружности, то приращение параметра между точками можно считать константой. Координаты любой точки на окружности с центром в начале координат

$$x_{i+1} = r \cos(\theta_i + \delta\theta),$$

$$y_{i+1} = r \sin(\theta_i + \delta\theta),$$

где θ_i - значение параметра для точки x_i, y_i .

По формуле суммы углов

$$x_{i+1} = r (\cos \theta_i \cos \delta\theta - \sin \theta_i \sin \delta\theta),$$

$$y_{i+1} = r (\cos \theta_i \sin \delta\theta + \sin \theta_i \cos \delta\theta).$$

Вспомним уравнение (4) для $\theta = \theta_i$

$$x_i = r \cos \theta_i,$$

$$y_i = r \sin \theta_i$$

и получим рекурсивные уравнения

$$x_{i+1} = x_i \cos \delta\theta - y_i \sin \delta\theta,$$

$$y_{i+1} = x_i \sin \delta\theta + y_i \cos \delta\theta, \quad (5)$$

что соответствует повороту точки x_i, y_i на $\delta\theta$.

Так как $\delta\theta$ постоянно и равно $2\pi/(n-1)$, где n - количество равномерно распределенных по окружности точек, значения \sin и \cos нужно вычислить только один раз. Во внутреннем цикле используются только четыре умножения, вычитание и сложение, поэтому алгоритм работает очень быстро. Результат на рис. 5 соответствует расчетам по формуле (4).

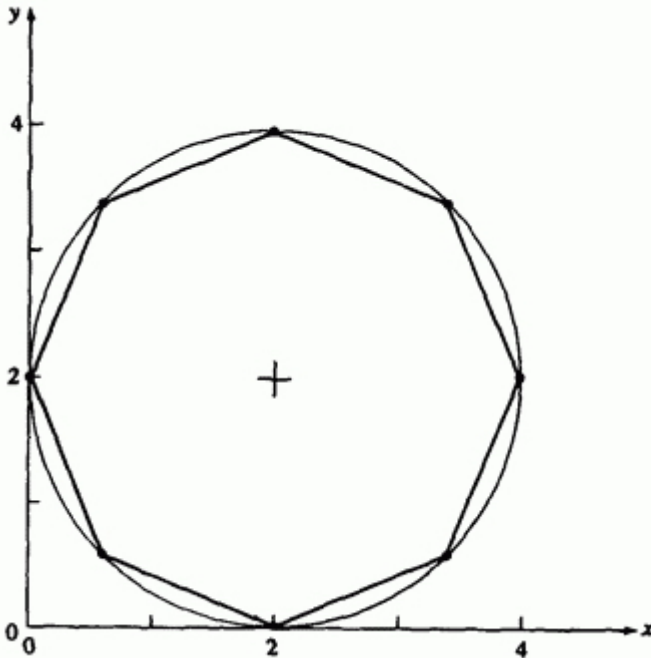


Рис. 5. Единичная параметрическая окружность с $n = 8$.

Окружность с центром в произвольной точке получается переносом окружности соответствующего радиуса с центром в начале координат.

В некоторых случаях можно упростить задачу: сначала строить единичную окружность с центром в начале координат, а затем, комбинируя перенос и масштабирование, получить окружности с любым радиусом и центром.

Пример 3. Генерация параметрической окружности

Построить окружность радиуса 2 с центром в точке $(2, 2)$. Рассмотрим два метода. Первый: построить окружность радиуса 2 с центром в начале координат и перенести на 2 единицы по x и y . Второй: построить единичную окружность с центром в начале координат, увеличить в два раза и, наконец, перенести. Воспользуемся вторым методом. Пусть для простоты на окружности лежат восемь точек, хотя обычно требуется гораздо большее количество. На самом деле количество точек зависит от радиуса.

Окружность - это замкнутая кривая, поэтому первая $(\theta = 0)$ и последняя $(\theta = 2\pi)$ точки совпадают. Следовательно, чтобы получить n различных точек на окружности, нужно вычислить $n + 1$ точку. Для незамкнутых кривых это необязательно.

Найдем $\delta\theta$:

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{(n+1-1)} = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Исходные значения x и y из уравнения (4) при $\theta = 0$ таковы:

$$x_1 = r \cos \theta = (1) \cos(0) = 1,$$

$$y_1 = r \sin \theta = (1) \sin(0) = 0.$$

Теперь по формуле (5) получим остальные семь точек. Для первой

$$\sin \delta\theta = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos \delta\theta = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

и

$$x_2 = x_1 \cos \delta\theta - y_1 \sin \delta\theta = (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$y_2 = x_1 \sin \delta\theta + y_1 \cos \delta\theta = (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Результаты для остальных точек собраны в таблице 1.

Таблица 1. Результаты для единичной окружности

i	x_i	y_i
1	1	0
2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
3	0	1
4	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
5	-1	0
6	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
7	0	-1
8	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$
9	1	0

преобразование, которое масштабирует полученные результаты с коэффициентом 2 и переносит центр окружности в точку $(2, 2)$:

$$[T] = [S][Tr_{xy}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Применяя это преобразование к точке (x, y) , получаем

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

как и ожидалось. Полный результат приведен в таблице 2 и на рис. 5.

Таблица 2. Результаты для окружности радиуса 2 с центром в $(2, 2)$

i	x_i	y_i
1	4	2
2	3,414	3,414
3	2	4
4	0,586	3,414
5	0	2
6	0,586	0,586
7	2	0
8	3,414	0,586
9	4	2

Ограничивая диапазон параметра θ , можно получить дуги окружности. Например, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ соответствует четверти круга в

первом квадранте, а $\pi \leq \theta \leq 3\pi/2$ - четверти круга в третьем квадранте.

3.5. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПСА

Достаточно хорошее представление окружности получается, если соединить отрезками некоторое количество равномерно распределенных на ней точек. Однако, если рассчитывать точки эллипса через равные приращения угла, изображение будет неверным, как показано штриховой линией на рис. 6.

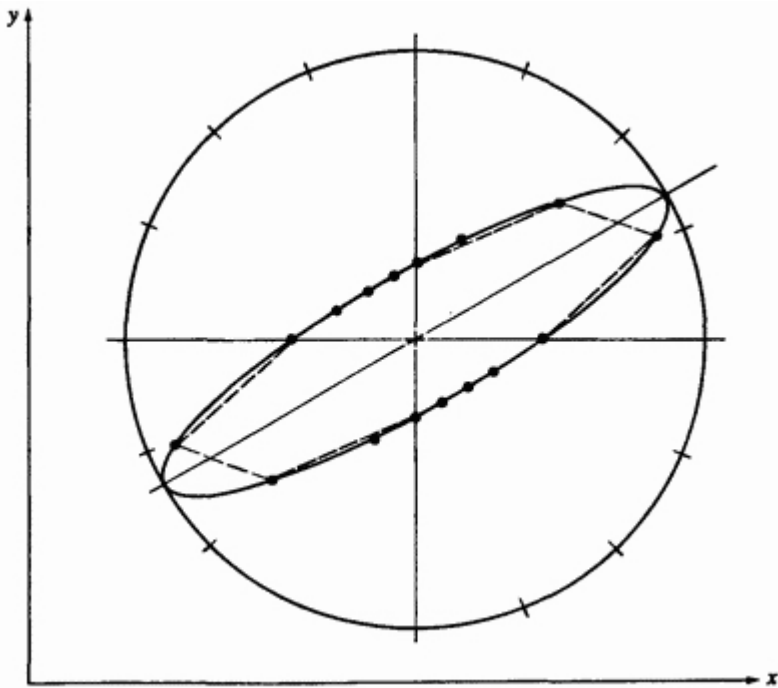


Рис. 6. Равноугольное представление сильно вытянутого эллипса.

Особенно сильно неточности проявляются на концах, где кривизна слишком велика и требуется большее количество точек.

Другой метод основан на равных приращениях по периметру и дает хороший результат для достаточно большого количества точек. Недостатки его в том, что указывается слишком много точек на сторонах с малой кривизной, и вычисление равных частей периметра требует $dy = b \cos \theta d\theta$ сложного расчета эллиптического интеграла. **Что нам необходимо, это малые приращения параметра у концов, где кривизна велика, и большие приращения параметра вдоль сторон с малой кривизной.**

Такое распределение точек получается из параметрического представления эллипса с центром в начале координат, большой полуосью a и малой полуосью b :

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta, \\y &= b \sin \theta,\end{aligned}\tag{6}$$

где θ - параметр.

Диапазон от 0 до 2π задает полный эллипс. Требуемое распределение точек порождается равномерными приращениями параметра θ .

Рассматривая производные x и y :

$$dx = -a \sin \theta d\theta,\tag{7}$$

получаем, что при θ , близком к 0 или π , т.е. у концов, $|dx| \approx 0$ и $|dy| \approx bd\theta$. Если θ близко к $\pi/2$ или $3\pi/2$, т.е. вдоль сторон, то $|dx| \approx ad\theta$ и $|dy| \approx 0$. Таким образом, около концов, где кривизна более высокая, точки располагаются чаще, а вдоль сторон, где

кривизна меньше, - реже. Отношение приращений периметра концов к приращениям вдоль сторон приблизительно равно b/a . Отметим, что для окружности ($b = a$) достигается оптимальное представление - равные приращения параметра или угла.

Если задано фиксированное количество точек на эллипсе, можно, пользуясь формулами суммы углов, получить эффективный алгоритм. Координаты любой точки на эллипсе:

$$x_{i+1} = a \cos(\theta_i + \delta\theta),$$

$$y_{i+1} = b \sin(\theta_i + \delta\theta),$$

где $\delta\theta = 2\pi/(n-1)$ - фиксированное приращение θ , n - количество точек на периметре, θ_i - значение параметра для точки x_i, y_i .

По формуле суммы углов

$$x_{i+1} = a (\cos \theta_i \cos \delta\theta - \sin \theta_i \sin \delta\theta),$$

$$y_{i+1} = b (\cos \theta_i \sin \delta\theta + \sin \theta_i \cos \delta\theta).$$

Применяя уравнение (4) с $\theta = \theta_i$, перепишем эти уравнения:

$$x_{i+1} = x_i \cos \delta\theta - \left(\frac{a}{b}\right) y_i \sin \delta\theta,$$

$$y_{i+1} = \left(\frac{b}{a}\right) x_i \sin \delta\theta + y_i \cos \delta\theta.$$

(8)

Так как $\delta\theta$, a и b - константы, полученный алгоритм содержит во внутреннем цикле только четыре умножения, одно сложение и вычитание и достаточно эффективен. В ряде работ показано, что алгоритм дает многоугольник максимальной площади, вписанный в эллипс. Результат представлен на рис. 7.

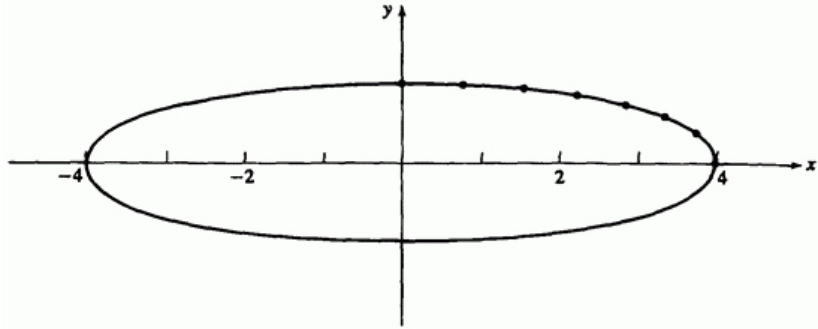


Рис. 7. Параметрическое представление эллипса.

Чтобы получить эллипс с центром не в начале координат и с главной осью, расположенной под углом к горизонтали, его поворачивают вокруг начала координат, а затем переносят.

Пример 4. Параметрическое построение эллипса

Построить эллипс с большой полуосью $a = 4$ и малой полуосью

$b = 1$, под углом 30° к горизонтали, с центром в точке $(2, 2)$.

Сначала построим эллипс с центром в начале координат с помощью 32 точек ($n = 33$, так как первая и последняя точки совпадают). Мы рассмотрим только точки первого квадранта, т.е. диапазон параметра от 0 до $\pi/2$.

Приращение параметра

$$\delta\theta = \frac{2\pi}{(n-1)} = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$$

Пользуясь уравнением (6) с начальным значением $\theta = 0$, найдем x и y :

$$x_1 = a \cos \theta_1 = (4) \cos(0) = 4,$$

$$y_1 = b \sin \theta_1 = (1) \sin(0) = 0.$$

Вычислим величины $a/b = 4$, $b/a = 1/4$ и

$$\sin \delta\theta = \sin \frac{\pi}{16} = 0.195,$$

$$\cos \delta\theta = \cos \frac{\pi}{16} = 0.981$$

Теперь по формуле (8) найдем вторую точку

$$x_2 = x_1 \cos \delta\theta - \left(\frac{a}{b}\right) y_1 \sin \delta\theta = (4)(0.981) - (4)(0)(0.195) = 3.92,$$

$$y_2 = \left(\frac{b}{a}\right) x_1 \sin \delta\theta + y_1 \cos \delta\theta = (1/4)(4)(0.195) + (0)(0.981) = 0.195$$

Результаты для оставшихся точек первого квадранта представлены в таблице 3 и на рис. 7.

Таблица 3. Точки эллипса с центром в начале координат для первого квадранта

i	x_i	y_i
1	4.0	0
2	3.923	0.195
3	3.696	0.383
4	3.326	0.556
5	2.828	0.707
6	2.222	0.831
7	1.531	0.924
8	0.780	0.981
9	0	1.0

Нам требуется комбинированное двумерное преобразование поворота на 30° вокруг центра координат и переноса центра в точку $(2, 2)$.

Характерно, что

$$\begin{aligned} [T] &= [R][T_{xy}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Применим это преобразование для точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) :

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} [T] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3.923 & 0.195 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.866 & 0.5 & 0 \\ -0.5 & 0.866 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 5.464 & 4 & 1 \\ 5.3 & 4.131 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результаты приведены в табл. 4 и на рис. 8.

Таблица 4. Повернутый и перенесенный эллипс

i	x_i	y_i
1	5.464	4.0
2	5.3	4.131
3	5.009	4.179
4	4.603	4.144
5	4.096	4.027
6	3.509	3.831
7	3.864	3.565
8	2.185	3.240
9	1.5	2.866

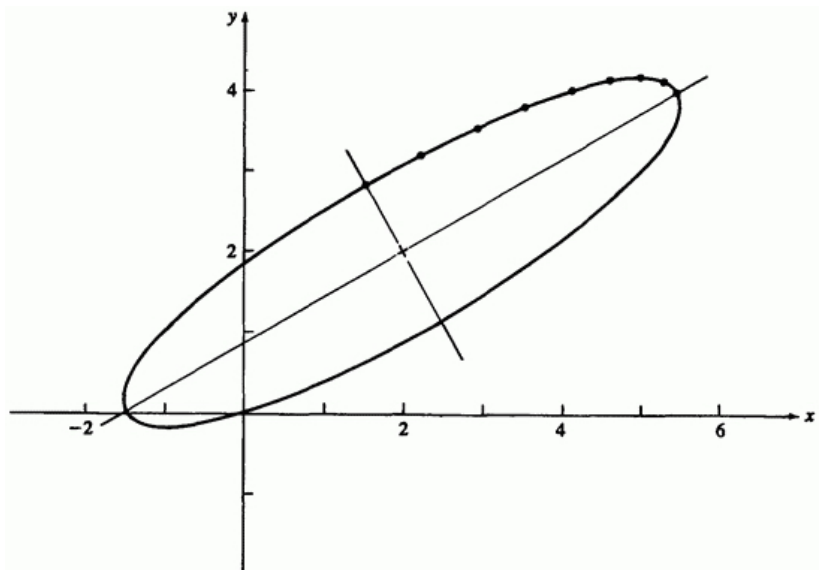


Рис. 8. Эллипс после поворота и переноса.

3.6. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ

Рассмотрим параболу с вершиной в центре координат, раскрыв вправо, т. е. с осью симметрии - положительной полуосью x . На рис. 9 изображена верхняя ветвь такой параболы.

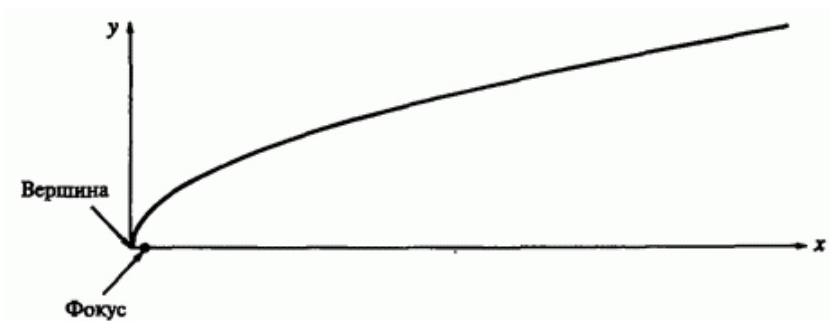


Рис. 9. Парабола.

В прямоугольных координатах непараметрическое представление параболы:

$$y^2 = 4ax .$$

Параметрическое представление имеет вид

$$x = \operatorname{tg}^2 \phi ,$$
$$y = \pm 2\sqrt{a \operatorname{tg} \phi} ,$$

где $0 \leq \phi \leq \pi/2$.

Хотя оно обеспечивает достаточно хорошее изображение, Смит указал, что получаемая фигура не является фигурой с максимальной вписанной площадью и поэтому это не оптимальный вариант. Другое параметрическое представление действительно дает фигуру с наибольшей вписанной площадью:

$$x = a\theta^2 ,$$
$$y = 2a\theta , \tag{9}$$

где $0 \leq \theta \leq \infty$ соответствует всей верхней ветви параболы. В отличие от эллипса парабола не замкнутая кривая, поэтому изображаемая часть должна быть ограничена минимальным и максимальным значением параметра.

Это можно сделать несколькими способами. Если диапазон изменения координаты x ограничен, то

$$\theta_{\min} = \sqrt{\frac{x_{\min}}{a}} , \quad \theta_{\max} = \sqrt{\frac{x_{\max}}{a}} . \tag{10}$$

Если ограничен диапазон изменения \mathcal{Y} , то

$$\theta_{\min} = \frac{y_{\min}}{2a}, \quad \theta_{\max} = \frac{y_{\max}}{2a}. \quad (11)$$

Установив θ_{\min} и/или θ_{\max} , можно построить параболу в первом квадранте. Параболы в других квадрантах, со смещенным центром и в других ориентациях строятся с помощью отражения, поворота и переноса.

Параболу можно построить также, пользуясь приращениями параметра. Пусть на параболе задано фиксированное количество точек, т.е. приращение параметра θ постоянно. Для $\theta_{i+1} = \theta_i + \delta\theta$ уравнение (9) принимает вид

$$x_{i+1} = a\theta_i^2 + 2a\theta_i\delta\theta + a(\delta\theta)^2,$$
$$y_{i+1} = 2a\theta_i + 2a\delta\theta.$$

Используя уравнение (9) с $\theta = \theta_i$, перепишем формулы

$$x_{i+1} = x_i + y_i\delta\theta + a(\delta\theta)^2,$$
$$y_{i+1} = y_i + 2a\delta\theta. \quad (12)$$

Расчет очередной точки требует трех сложений и одного умножения во внутреннем цикле алгоритма. На рис. 10 приведен пример параболы, сгенерированной по рекурсивным формулам (12).

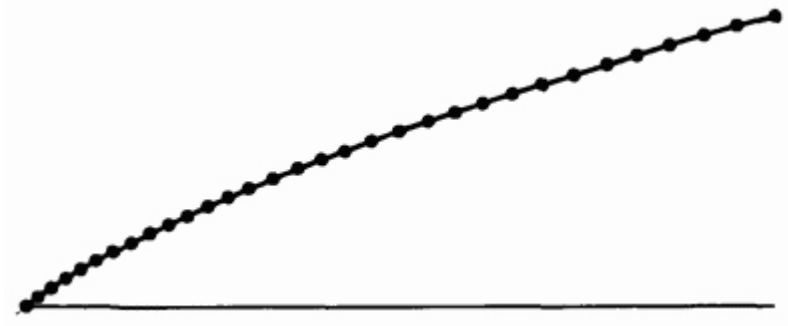


Рис. 10. Параметрическая сгенерированная парабола.

Пример 5. Параметрическое представление параболы

Построить параболический сегмент в первом квадранте при $1 \leq x \leq 4$ для параболы

$$x = a\theta^2 = \theta^2, y = 2a\theta = 2\theta$$

при $a = 1$.

Сначала найдем границы θ . В соответствии с уравнением (10) θ_{\min} и θ_{\max} определяются так:

$$\theta_{\min} = \sqrt{\frac{x_{\min}}{a}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1,$$

$$\theta_{\max} = \sqrt{\frac{x_{\max}}{a}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2.$$

Пусть на сегменте расположено 10 точек, тогда

$$\delta\theta = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{n-1} = \frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}.$$

Начиная с $\theta_1 = \theta_{\min}$, $x_1 = 1$, из уравнения (9) получаем

$$y_1 = 2a\theta = (2)(1) = 2.$$

Из уравнения (12)

$$x_2 = x_1 + y_1\delta\theta + (\delta\theta)^2 = 1 + (2)\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 1.235,$$

$$y_2 = y_1 + 2\delta\theta = 2 + (2)\left(\frac{1}{9}\right) = 2.222.$$

Окончательный результат приведен в табл. 5 и на рис. 11.

Таблица 5. Результаты для сегмента параболы

i	x_i	y_i
1	1.0	2.0
2	1.235	2.222
3	1.494	2.444
4	1.778	2.667
5	2.086	2.889
6	2.420	3.111
7	2.778	3.333
8	3.160	3.556
9	3.568	3.778
10	4.0	4.0

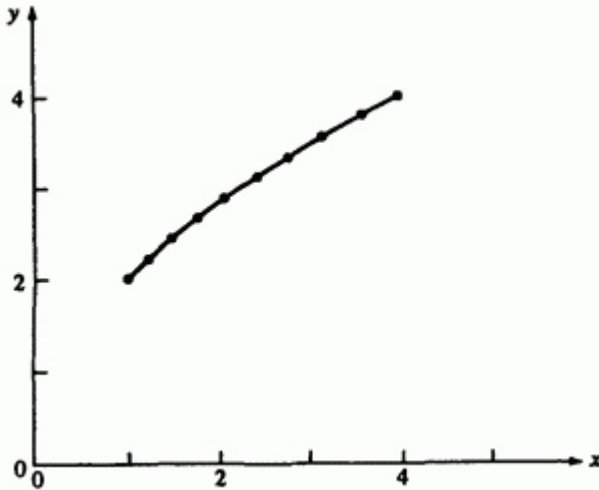


Рис. 11. Сегмент параболы.

В некоторых случаях более удобны другие параметрические представления, вид которых зависит от прикладной задачи и имеющихся данных. Например, если надо нарисовать дугу параболы между двумя точками и учитывать наклон, то предлагается следующее представление:

$$x(t) = (Q_x - 2R_x + P_x)t^2 + 2(R_x - P_x)t + P_x,$$

$$y(t) = (Q_y - 2R_y + P_y)t^2 + 2(R_y - P_y)t + P_y, \quad 0 \leq t \leq 1.0, \quad (13)$$

где t - параметр, а две конечные точки $P = \begin{bmatrix} P_x & P_y \end{bmatrix}$ и $Q = \begin{bmatrix} Q_x & Q_y \end{bmatrix}$. Точка $R = \begin{bmatrix} R_x & R_y \end{bmatrix}$ это точка пересечения

касательных в конечных точках. Три вершины P , Q , R определяют параболу, как показано на рис. 12. Более общий метод построения кривых с помощью вершин незамкнутого многоугольника был разработан Безье и рассматривается далее.

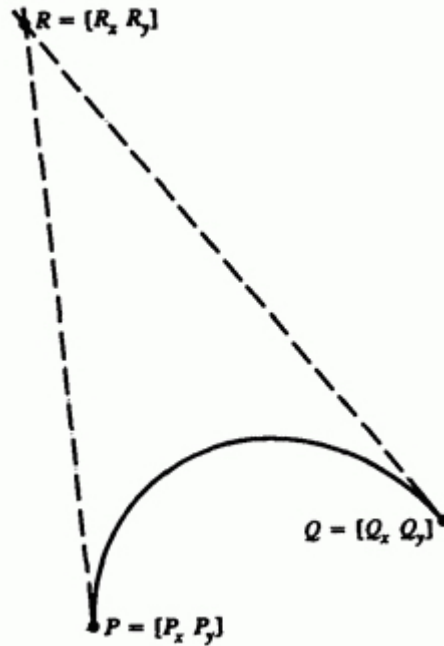


Рис. 12. Задание параметрической параболы вершинами.

3.7. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ

Построим гиперболу с центром в начале координат и осью симметрии, совпадающей с осью X . Ее непараметрическое представление в прямоугольных координатах:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

При этом вершина находится в точке $(a, 0)$, оси асимптот $\pm b/a$. Вид параметрического представления:

$$x = \pm a \sec \theta,$$

$$y = \pm b \operatorname{tg} \theta, \quad (14)$$

где $0 \leq \theta \leq \pi/2$, дает искомую гиперболу. Смит указывает, что для такого представления площадь вписанного многоугольника не максимальна. Однако она близка к максимальной, и с помощью формулы суммы углов можно получить эффективный алгоритм. Вспомним, что

$$\sec(\theta + \delta\theta) = \frac{1}{\cos(\theta + \delta\theta)} = \frac{1}{\cos \theta \cos \delta\theta - \sin \theta \sin \delta\theta}$$

и

$$\operatorname{tg}(\theta + \delta\theta) = \frac{(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \delta\theta)}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \delta\theta}$$

Подставим в уравнения (14)

$$x_{i+1} = \pm a \sec(\theta + \delta\theta) = \pm \frac{ab/\cos \theta}{b \cos \delta\theta - b \operatorname{tg} \theta \sin \delta\theta},$$

$$y_{i+1} = \pm b \operatorname{tg}(\theta + \delta\theta) = \pm \frac{b \operatorname{tg} \theta + b \operatorname{tg} \delta\theta}{1 - \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \delta\theta}$$

Используя уравнения (14) с $\theta = \theta_i$, перепишем эти уравнения как

$$x_{i+1} = \pm \frac{bx_i}{b \cos \delta\theta - y_i \sin \delta\theta},$$

$$y_{i+1} = \pm \frac{b(y_i + b \operatorname{tg} \delta\theta)}{b - y_i \operatorname{tg} \delta\theta} \quad (15)$$

Другое параметрическое представление гиперболы, дающее максимальную вписанную площадь:

$$\begin{aligned}x &= a \operatorname{ch} \theta, \\y &= b \operatorname{sh} \theta.\end{aligned}\tag{16}$$

Гиперболические функции определяются как $\operatorname{ch} \theta = \left(e^{\theta} + e^{-\theta} \right) / 2$ и $\operatorname{sh} \theta = \left(e^{\theta} - e^{-\theta} \right) / 2$. При изменении от 0 до бесконечности проходит вся гипербола. Формула для суммы углов для и

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(\theta + \delta\theta) &= \operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \delta\theta + \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \delta\theta, \\ \operatorname{sh}(\theta + \delta\theta) &= \operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \delta\theta + \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \delta\theta.\end{aligned}$$

Это позволяет записать уравнения (16) как

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= a \left(\operatorname{ch} \theta \operatorname{ch} \delta\theta + \operatorname{sh} \theta \operatorname{sh} \delta\theta \right), \\ y_{i+1} &= b \left(\operatorname{sh} \theta \operatorname{ch} \delta\theta + \operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \delta\theta \right)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i \operatorname{ch} \delta\theta + \left(\frac{a}{b} \right) y_i \operatorname{sh} \delta\theta, \\ y_{i+1} &= \left(\frac{a}{b} \right) x_i \operatorname{sh} \delta\theta + y_i \operatorname{ch} \delta\theta.\end{aligned}\tag{17}$$

Чтобы ограничить область гиперболы, необходимо установить минимальное и максимальное значения. Пусть ветвь гиперболы лежит в первом и четвертом квадранте и рассматривается часть при $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$. Тогда

$$\begin{aligned}\vartheta_{\min} &= \text{Arch} \left(\frac{x_{\min}}{a} \right), \\ \vartheta_{\max} &= \text{Arch} \left(\frac{x_{\max}}{a} \right),\end{aligned}\tag{18}$$

где обратный гиперболический косинус получен как

$$\text{Arch } x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right).\tag{19}$$

Остальные границы определяются аналогично. Пример части гиперболы в первом квадранте, полученной этим методом, показан на рис. 13.

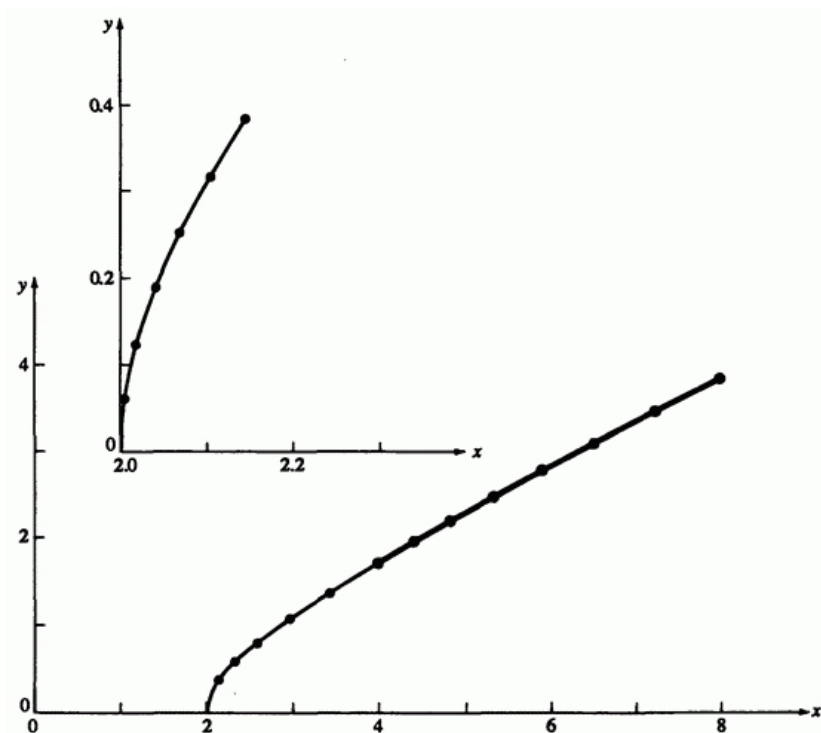


Рис. 13. Параметрическая гипербола.

Пример 6. Параметрическая гипербола

С помощью параметрического представления (16) найти восемь точек на сегменте гиперболы в первом квадранте при $a = 2$, $b = 1$, для $4 \leq x \leq 8$. Сначала определим границы параметра из уравнений (18) и (19)

$$\begin{aligned}\theta_{\max} &= \text{Arch} \left(\frac{x_{\max}}{a} \right) = \ln \left(\frac{x_{\max}}{a} + \sqrt{\left(\frac{x_{\max}}{a} \right)^2 - 1} \right) = \\ &= \ln \left(4 + \sqrt{16 - 1} \right) \\ &= 2.063.\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\theta_{\min} = 1.317.$$

Итак,

$$\delta\theta = \frac{\theta_{\max} - \theta_{\min}}{n-1} = \frac{2.063 - 1.317}{7} = 0.107$$

и

$$\begin{aligned}\text{sh}(\delta\theta) &= \text{sh}(0.107) = \\ &= \frac{e^{0.107} - e^{-0.107}}{2} = \\ &= 0.107,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ch}(\delta\theta) &= \text{ch}(0.107) = \\ &= \frac{e^{0.107} + e^{-0.107}}{2} =\end{aligned}$$

$$= 1.006.$$

Уравнения (16) с $\theta_1 = \theta_{\min}$ дают

$$x_1 = a \operatorname{ch}(\theta_{\min}) =$$

$$= (2) \operatorname{ch}(1.317) =$$

$$= 4.000,$$

$$y_1 = b \operatorname{sh}(\theta_{\min}) =$$

$$= (1) \operatorname{sh}(1.317) =$$

$$= 1.732.$$

Затем из уравнений (17)

$$x_2 = x_1 \operatorname{ch}(\delta\theta) + (a/b)y_1 \operatorname{sh}(\delta\theta) =$$

$$= (4)(1.006) + (2)(1.732)(0.107) =$$

$$= 4.393.$$

$$y_2 = (b/a)x_1 \operatorname{sh}(\delta\theta) + y_1 \operatorname{ch}(\delta\theta) =$$

$$= (1/2)(4)(0.107) + (1.732)(1.006) = 1.956.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 6 и выделены жирной

линией на рис. 13.

Таблица 6. Результаты для сегмента гиперболы

i	x_i	y_i
1	4	1.732
2	4.393	1.956
3	4.836	2.201
4	5.334	2.472
5	5.892	2.771
6	6.518	3.102
7	7.218	3.468
8	8	3.873

3.8. ПРОЦЕДУРА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Плоские геометрические фигуры часто используются в прикладной машинной графике, например для разработки деталей или в чертежных системах. Особенно важны здесь проблемы определения положения конического сечения и его пересечения и/или точек касания с другим коническим сечением или прямой. На первый взгляд задача несложная, но для произвольно расположенных на плоскости элементов могут существовать различные решения. Выбор правильного решения не всегда очевиден, что приводит к нелинейным расчетам. Ниже **приводятся методы, исключающие нелинейную математику и упрощающие линейные результаты**. Кроме того, объясняется, как выбрать необходимое решение, если оно неоднозначно.

Основная идея заключается в том, чтобы методами машинной графики, в частности плоским поворотом и переносом, перевести расчеты в первый квадрант в стандартной конфигурации. Если фигура включает коническое сечение, его центр (для параболы и гиперболы - вершина) располагается в начале координат. **В общем случае неизвестные центры, вершины, точки касания и пересечения вычисляются с помощью непараметрических уравнений, а параметрическое представление используется для изображения фигур**. Разделение

расчета и построения позволяет максимально использовать преимущества обоих представлений.

Рассмотрим подробный пример, чтобы лучше представить себе суть и возможности этого метода. Одна из простейших и часто используемых задач - построить окружность по трем точкам. Чертеж приведен на рис. 14, где $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ заданные точки.

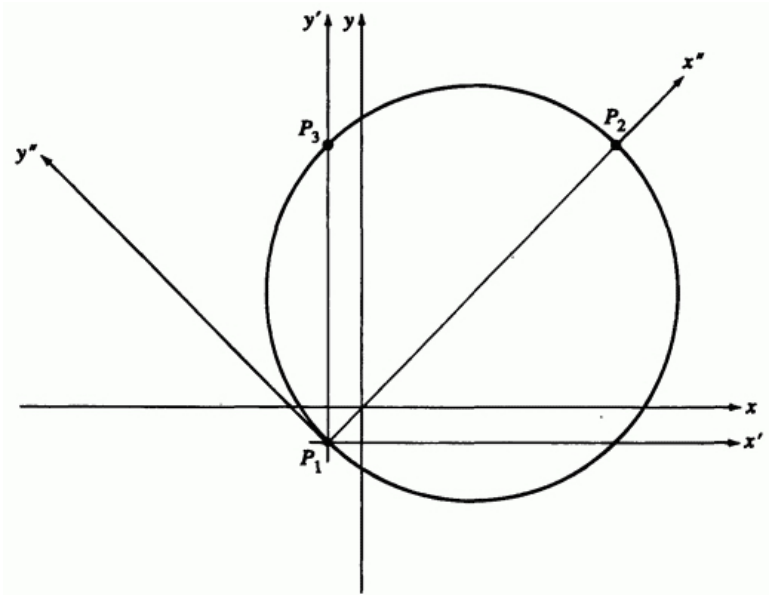


Рис. 14. Окружность, проходящая через три заданные точки.

Необходимо определить центр и радиус окружности. Для этого нужно решить систему из трех нелинейных уравнений с переменными h , k , координатами центра (x, y) и радиусом R :

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 = R^2, \quad (20a)$$

$$(x_2 - k)^2 + (y_2 - k)^2 = R^2, \quad (20b)$$

$$(x_3 - k)^2 + (y_3 - k)^2 = R^2. \quad (20c)$$

Вычитание уравнения (20b) из уравнений (20a) и (20c) устраняет нелинейность. Собственно алгоритм решения - это

$$[(a) - (b)](x_3 - x_2) - [(c) - (b)](x_1 - x_2),$$

где буквы в скобках взяты из уравнений (20). Уравнение, выраженное через неизвестную, таково:

$$k = \frac{\left[\left(x_1^2 - x_2^2 \right) + \left(y_1^2 - y_2^2 \right) \right] (x_3 - x_2)}{2 \left[(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_2) \right]} - \frac{\left[\left(x_3^2 - x_2^2 \right) + \left(y_3^2 - y_2^2 \right) \right] (x_1 - x_2)}{2 \left[(y_1 - y_2)(x_3 - x_2) - (y_3 - y_2)(x_1 - x_2) \right]}. \quad (21)$$

Аналогично из $[(a) - (b)]$ и уравнения (21) вычисляется

$$k = \frac{\left(x_1^2 - x_2^2 \right) + \left(y_1^2 - y_2^2 \right) - 2k(y_1 - y_2)}{2(x_1 - x_2)}, \quad (22)$$

R находится из любого из уравнений (20).

Уравнения (21) и (22) содержат ряд трудностей. В частности, если знаменатель дроби равен нулю, требуются другие методы решения.

Также необходимы условия проверки на бесконечный радиус и коллинеарные точки.

Уравнения для h и k можно упростить переносом начала координат в точку (см. рис. 14). Тогда

$$h'^2 + k'^2 = R^2, \quad (23a)$$

$$(x'_2 - h')^2 + (y'_2 - k')^2 = R^2, \quad (23b)$$

$$(x'_3 - h')^2 + (y'_3 - k')^2 = R^2. \quad (23c)$$

Вычитая (а) из (b) и (c), получаем систему из двух линейных уравнений. Алгоритм решения: $[(b)-(a)]x'_3 - [(c)-(a)]x'_2$, что дает

$$k' = \frac{[x'_3 x'_2 (x'_2 - x'_3) + y'^2_2 x'_3 - y'^2_3 x'_2]}{2(y'_2 x'_3 - y'_3 x'_2)}, \quad (24)$$

$$h' = \frac{x'^2_2 + y'^2_2 - 2y'_2 k'}{2x'_2}, \quad (25)$$

$$R = (h'^2 + k'^2)^{1/2}. \quad (26)$$

Преобразование h' , k' обратно к первоначальной системе координат дает h , k . При этом знаменатель уравнений (24) или (25) опять может обратиться в нуль, и требуются условия проверки на бесконечный радиус и коллинеарные точки. Эти трудности преодолеваются с помощью следующей процедуры:

Перенести начало координат в одну из точек.

Повернуть оси координат, чтобы одна из оставшихся точек лежала на положительной полуоси x .

Проверить коллинеарность точек.

Найти центр и радиус окружности в перенесенной и повернутой системе координат.

Повернуть обратно к ориентации промежуточной системы координат.

Перенести начало координат в первоначальное положение и найти центр окружности в исходной системе координат.

На рис. 14 начало координат перенесено в точку P_1 , а положительная полуось x'' проходит через точку P_2 . Уравнения в координатах (x'', y'') ,

$$h''^2 + k''^2 = R^2, \quad (27a)$$

$$(x_2'' - h'')^2 + k''^2 = R^2, \quad (27b)$$

$$(x_3'' - h'')^2 + (y_3'' - k'')^2 = R^2. \quad (27c)$$

Вычтем уравнение (27a) из (27b)

$$x_2''^2 - 2x_2''h'' = 0,$$

или

$$h'' = x_2''/2. \quad (28)$$

Вычтем уравнение (27а) из (27с) и подставим уравнение (28):

$$k'' = \frac{x_3''}{2y_3''} (x_3'' - x_2'') + \frac{y_3''}{2}, \quad (29)$$

а из уравнения (27а) получим

$$R = (k''^2 + k'''^2)^{1/2}. \quad (30)$$

Уравнение (29) показывает, что при $y_3'' = 0$ значение k бесконечно, однако это случается только тогда, когда все три точки лежат на одной прямой. Проверка этого условия очень проста.

Провести окружность через три точки достаточно легко. Здесь не требуется выбора из множества решений, как в большинстве геометрических конструкций, включающих конические сечения. Метод выбора предложен в работе Роджерса.

Роджерс рассматривает левое, правое, ближнее, дальнее, внутреннее и внешнее решение. Левое и правое существуют относительно направления от одной известной точки к другой; ближнее и дальнее - относительно линии пересечения; внутреннее и внешнее - относительно окружности.

Эти понятия справедливы как в ориентации пользователя, т. е. в любом месте пространства, так и в стандартной конфигурации в первом квадранте. Простой пример для иллюстрации понятий левое-правое и ближнее-дальнее это определение центра и точек касания окружности известного радиуса R , касающейся двух пересекающихся прямых F и L . На практике задача возникает, например, при изготовлении закругленных углов. Для любого радиуса всегда существует четыре решения. Стратегия выбора такова:

Найти точку пересечения прямых. Если решения нет, прямые параллельны.

Перенести начало координат в точку пересечения.

Повернуть вокруг нового центра координат, чтобы одна из линий совпала с осью X .

Найти угол между другой линией и осью X .

Повернуть вокруг нового начала координат, чтобы положительная полуось X совпала с биссектрисой пересекающихся прямых.

Найти центр и точки касания.

Перевести в первоначальную систему координат.

На рис. 15 изображен этот случай в стандартной конфигурации.

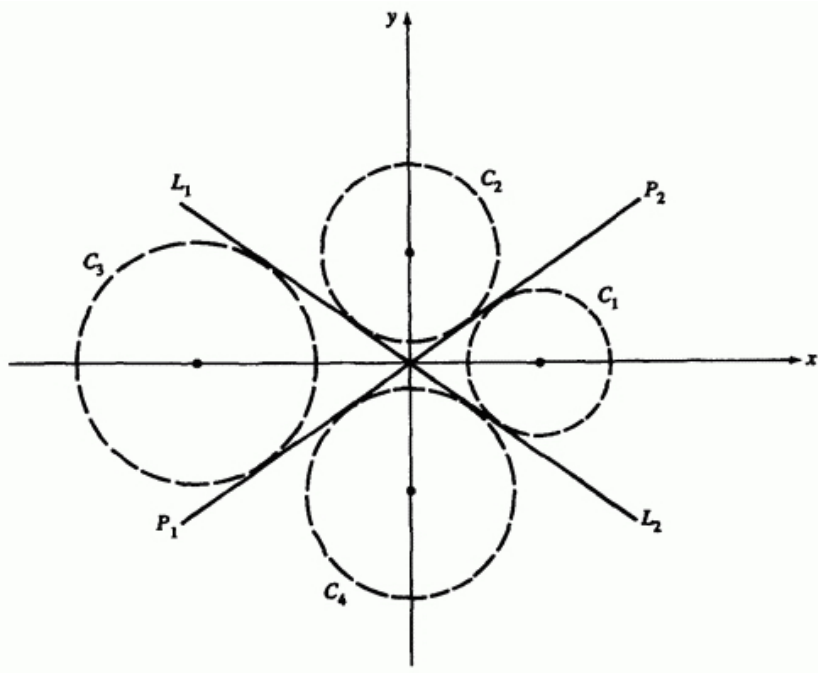


Рис. 15. Окружности, касающиеся двух пересекающихся прямых.

Две пересекающиеся линии P и L заданы точками F_1, F_2, L_1, L_2 соответственно. Для каждого возможного решения одна из координат центра (h, k) лежит на оси координат. Чтобы выбрать нужное решение, требуется указать, находится ли оно слева или справа от линии P , если смотреть от F_1 и F_2 , и ближе оно или дальше относительно линии L с той же точки зрения. На рис. 15 C_1 - правое и дальнее, а C_3 - левое и ближнее. Центр

$$h = R/\sin \theta,$$

$$k = 0,$$

где θ - острый угол между положительной осью x и P . Точки касания с линиями P и L

$$x_f = h - R \sin \theta,$$

$$y_f = \pm R \cos \theta.$$

Полный перечень приведен в табл. 7.

Таблица 7. Окружность, касающаяся двух пересекающихся линий

Ориентация относительно линии P	Ориентация относительно линии L	Центр	Точки касания
Левая	Дальняя	$h = 0$	$x_f = \pm R \cos(90 - \theta) =$

			$= \pm R \sin(\theta)$
		$k = R/\sin(90 - \theta) =$ $= R/\cos(\theta)$	$y_f = k - R \cos(\theta)$
Левая	Ближняя	$h = -R/\sin(\theta)$	$x_f = h + R \sin(\theta)$
		$k = 0$	$y_f = \pm R \cos(\theta)$
Правая	Дальняя	$h = -R/\sin(\theta)$	$x_f = h - R \sin(\theta)$
		$k = 0$	$y_f = \pm R \cos(\theta)$
Правая	Ближняя	$h = 0$	$x_f = \pm R \cos(90 - \theta) =$ $= \pm R \sin(\theta)$
		$k = -R/\sin(90 - \theta) =$ $= -R/\cos(\theta)$	$y_f = k + R \cos(\theta)$

Более сложные примеры с использованием понятий внутреннее-внешнее содержатся в ряде работ. Возможно расширение для других конических сечений. В ряде работ рассматривается векторный подход к решению подобных проблем.

3.9. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ

Все конические сечения из предыдущих разделов являются частными случаями кривых, задаваемых общим уравнением второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (31)$$

где A, B, C, D, E, F - константы. Коническое сечение - это любая плоская кривая, удовлетворяющая уравнению (31). Уравнение интересно не только само по себе, но и для последующего обсуждения

рациональных конических сечений и квадратичных поверхностей. Для простоты и полноты будем пользоваться методами линейной алгебры.

Конические сечения являются центральными - эллипс и гипербола (окружность это частный случай эллипса) или нецентральными - парабола. Кроме того, существует ряд вырожденных форм, которые все центральны. Необходимо определить для заданных значений констант, какое сечение задает уравнение (31) - центральное или нецентральное. Также нужно выделить все вырожденные случаи.

Заметим, что уравнение (31) можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

или

$$[X][S][X]^T = 0. \tag{32}$$

Отметим также, что $[S]$ симметрична относительно главной диагонали.

Сначала приведем сечение к стандартному виду. Для центрального сечения (эллипс или гипербола) это значит, что центр находится в начале координат, а оси располагаются вдоль осей координат. Для нецентрального сечения (парабола) ось симметрии параболы совпадает с положительной осью X , вершина находится в начале координат, и парабола раскрывается направо. Сечение приводится к стандартному виду переносом и вращением.

Для центральных сечений линейные члены уравнений (31) или (32) уничтожаются переносом центра сечения в начало координат. После этого уравнение (32) принимает вид

$$[X][Tr][S][Tr]^T [X]^T = 0, \quad (33)$$

где матрица переноса $[Tr]$ такова:

$$[Tr] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

После конкатенации матриц переноса и коэффициентов уравнение принимает вид

$$[X][S'][X]^T = 0, \quad (34)$$

где

$$[S'] = [Tr][S][Tr]^T = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2A' & B' & D' \\ D' & 2C' & E' \\ D' & E' & 2F' \end{bmatrix} \quad (35)$$

и

$$A' = A$$

$$B' = B$$

$$C' = C$$

$$D' = 2Am + Bn + D$$

$$E' = Bm + 2Cn + E$$

$$2F' = mD' + nE' + (Dm + En + 2F)$$

Заметим, что $[S']$ также симметрична.

Следовательно, уравнение (31) преобразуется к

$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

Коэффициенты переноса m и n для уничтожения линейных членов вычисляются из условия $D' = E' = 0$. Отсюда

$$2Am + Bn + D = 0,$$

$$Bm + 2Cn + E = 0$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} m & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ -E \end{bmatrix}, \quad (36)$$

что можно записать как $[M][L] = [Q]$.

Если $[L]$ инвертируема, существует решение для $[M]$, и сечение центрально, т.е. это эллипс или гипербола. Если $[L]$ не инвертируема, т.е. сингулярна, то решения для $[M]$ не существует, и сечение не центрально (парабола). Детерминант сингулярной матрицы равен нулю:

$$\det[L] = |L| = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

или

$$B^2 - 4AC = 0.$$

Итак, уравнение (31) представляет параболу при $B^2 - 4AC = 0$ и центральное сечение при $B^2 - 4AC \neq 0$. Если сечение центрально и $B^2 - 4AC < 0$, уравнение представляет эллипс, а если $B^2 - 4AC > 0$ - гиперболу.

Независимо от инвертируемости $[L]$ оси сечения можно поворотом сделать параллельными осям координат. Вернемся к уравнению (32).

Используем матрицу плоского поворота $[R]$

$$[X][R][S][R]^T[X]^T = 0, \quad (38)$$

где для угла поворота θ она такая:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Конкатенация матриц дает

$$[X][S''][X]^T = 0, \quad (39)$$

где

$$[S''] = [R][S][R]^T = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2A'' & B'' & D'' \\ B'' & 2C'' & E'' \\ D'' & E'' & 2F'' \end{bmatrix}$$

и

$$A'' = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta,$$

$$B'' = 2(C - A) \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$C'' = A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta,$$

$$D'' = D \cos \theta + C \sin \theta,$$

$$E'' = E \cos \theta - D \sin \theta,$$

$$F'' = F.$$

Опять заметим, что $[S'']$ симметрична. Если оси сечения параллельны осям координат, член B_{xy} в уравнении (31) отсутствует. Поэтому нулевой коэффициент дает угол поворота:

$$2(C - A) \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0$$

или

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0.$$

Решим это уравнение относительно угла поворота θ :

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A-C} \right). \quad (40)$$

Для этого угла $[S'']$ принимает вид

$$[S''] = \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} 2A'' & 0 & D'' \\ 0 & 2C'' & E'' \\ D'' & E'' & 2F'' \end{bmatrix}_{\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A-C} \right)}.$$

Уравнение (37) позволяет узнать, центрально ли сечение. Центральное сечение можно привести к стандартному виду комбинацией переноса и поворота:

$$[X][Tr][R][S][R]^t [Tr]^T [X]^T = 0. \quad (41)$$

Конкатенация внутренних матриц дает

$$\begin{aligned} [S'''] &= [Tr][R][S][R]^T [Tr]^T = \\ &= \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} 2A''' & B''' & D''' \\ B''' & 2C''' & E''' \\ D''' & E''' & 2F''' \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A''' & 0 & \\ 0 & C''' & 0 \\ 0 & 0 & F''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$A''' = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta, \quad (43a)$$

$$B''' = 2(C - A) \cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \quad (43b)$$

$$C''' = A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta, \quad (43c)$$

$$D''' = \xi \cos \theta + \eta \sin \theta, \quad (43d)$$

$$E''' = \eta \cos \theta - \xi \sin \theta, \quad (43e)$$

$$F''' = (m\xi + \eta n + \zeta) / 2 \quad (43f)$$

и

$$\xi = 2Am + Bn + D, \quad (43g)$$

$$\eta = Bm + 2Cn + E, \quad (43h)$$

$$\zeta = Dm + En + 2F. \quad (43i)$$

Заметим, что это диагональная матрица, т.е. все недиагональные элементы равны нулю. Поворот устраняет член $(B''' = 0)$, а перенос - линейные члены $(D''' = E''' = 0)$.

Угол вращения задается уравнением (40). Как и раньше, коэффициенты переноса можно получить, приравняв D''' и E''' к нулю, т.е. $\xi = \eta = 0$. Имеем

$$2Am + Bn + D = 0,$$

$$Bm + 2Cn + E = 0.$$

Отсюда получаем решение

$$m = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \quad (44a)$$

$$n = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \quad (44b)$$

Вспомним, что для центрального конического сечения $B^2 - 4AC \neq 0$.
Запишем уравнение (41), используя (42):

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa, \quad (45)$$

что является стандартным видом конического сечения. Остается систематически исследовать результат для различных значений α и β .

Если κ больше нуля, то α и β положительны, и сечение - эллипс. Если они имеют разные знаки и ни один из них не равен нулю, то сечение - гипербола.

Если α и β отрицательны, решения не существует.

Оба α и β одновременно не могут быть равны нулю, так как в этом случае уравнение (45) не содержит членов второго порядка. Однако один из коэффициентов α или β может быть нулевым. Пусть $\beta = 0$ (если $\alpha = 0$, замена x на y дает $\beta = 0$), тогда уравнение (45) принимает вид

$$\alpha x^2 = -\kappa.$$

Решением являются две параллельные линии $x = \pm\sqrt{-\kappa/\alpha}$ при $-\kappa/\alpha > 0$. Если $-\kappa/\alpha < 0$, то решения нет.

Если $\kappa = 0$, есть две возможности: α и β имеют одинаковые или разные знаки. В обоих случаях решение вырожденное. Если знаки α и β одинаковы, уравнению (45) удовлетворяет только начало координат $x = y = 0$. Можно считать, что это предельный случай эллипса.

Если знаки α и β различны, уравнение (45) принимает вид

$$y^2 = -\frac{\alpha}{\beta}x^2$$

или

$$y = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}x,$$

т.е. это пара прямых, пересекающихся в начале координат, - предельный случай гиперболы.

Наконец, если $\beta = 0$ (если $\alpha = 0$, замена x на y дает $\beta = 0$), то решение - ось y для всех значений.

Для нецентрального сечения, параболы, оба линейных члена устранить нельзя, однако можно убрать один линейный и один квадратичный член для x или y . Применим оператор переноса к уравнению (39) - квадратному уравнению после поворота:

$$[S^+] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2A^+ & 0 & D^+ \\ 0 & 2C^+ & E^+ \\ D^+ & E^+ & 2F^+ \end{bmatrix}, \quad (46)$$

где

$$A^+ = A'', \quad (47a)$$

$$C^+ = C'', \quad (47b)$$

$$D^+ = 2A''m + D'', \quad (47c)$$

$$E^+ = 2C''n + E'', \quad (47d)$$

$$F^+ = (m/2)D^+ + (n/2)E^+ + (mD'' + nE'' + 2F''). \quad (47e)$$

Угол поворота задан уравнением (40). Здесь либо $A^+ = A''$, либо $C^+ = C''$ обратится в нуль. Один из линейных членов для x или y устраняется, если D^+ или E^+ приравнять к нулю. Пусть $D^+ = 0$, тогда

$$m = \frac{-D''}{2A''}. \quad (48a)$$

Если $E^+ = 0$, то

$$n = \frac{-E''}{2C''}. \quad (48b)$$

Заметим, что при $A'' = 0$ значение m не определено, следовательно, устраняются только линейные члены относительно y . Если $C'' = 0$, не определено n и устраняются только члены с x .

Предположим, что уничтожены линейный y -член ($E^+ = 0$) и квадратичный x -член ($A^+ = 0$) (если $\beta = 0$, замена x и y дает $y = 0$). Тогда $[S^+]$ принимает вид

$$[S^+] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ \gamma & 0 & -\kappa \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнение конического сечения


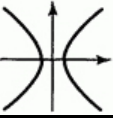
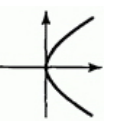
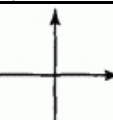

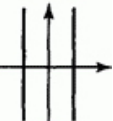

$$\beta y^2 + 2\gamma x = \kappa. \quad (49)$$

Чтобы привести параболу к стандартной ориентации с вершиной K в центре координат, перенесем ее по оси x на

$$y^2 = -\frac{2\gamma}{\beta} x' = \alpha x'$$

Все вырожденные формы сечений центральны, т.е. парабола - это единственное нецентральное сечение. Результаты собраны в табл. 8.

Таблица 8. Конические сечения

Название	Уравнение	Условия	Тип	Чертеж
Эллипс	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$	$\kappa, \alpha, \beta > 0$	Центральны й	
Гипербола	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$	$\beta < 0 < \kappa$	Центральны й	
Парабола	$\alpha y^2 + \beta x = 0$ $\beta x^2 + \alpha y = 0$		Нецентральный	
Пустое множество	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$	$\alpha, \beta < 0 < \kappa$	(Центральный)	(Чертеж отсутствует)
Точка	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$	$\alpha, \beta > 0$	Центральны й	
Пара прямых	$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$	$\beta < 0 < \alpha$	Центральны й	
Параллельные прямые	$\alpha x^2 = \kappa$	$\alpha, \kappa > 0$	Центральны й	
Пустое множество	$\alpha x^2 = \kappa$	$\alpha < 0 < \kappa$	(Центральный)	(Чертеж отсутствует)
«Повторяющаяся» прямая	$\alpha x^2 = 0$		Центральны й	

Пример 7. Сегмент гиперболы

Найти тип конического сечения, заданного формулой

$$2x^2 - 72xy + 23y^2 + 140x - 20y + 50 = 0,$$

изображенного непрерывной линией на рис. 16.

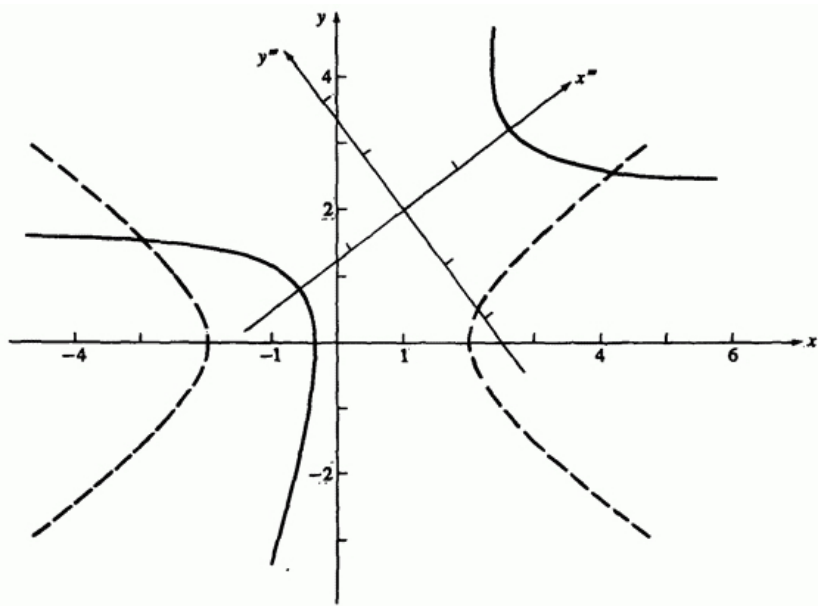


Рис. 16. Гипербола $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 140x - 20y + 50 = 0$.
Сплошная линия - заданная ориентация. Пунктир - стандартная ориентация.

Нарисовать его сегмент для $2 < x < 5$ для y_{\min} . Сегмент должен быть нарисован с помощью параметрического представления из предыдущих разделов. Для того чтобы определить значения параметрического представления, используются методы,

рассмотренные в данном разделе.

Сначала узнаем тип сечения

$$B^2 - 4AC = (-72)^2 - (4)(2)(23) = 5000 > 0,$$

т.е. это гипербола.

Приведем гиперболу к стандартному виду с помощью уравнений (40)-(44). Угол поворота

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A-C} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{-72}{2-23} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{24}{7} \right) = 36.87^\circ$$

Подставим значения $\cos \theta = 4/5$, $\sin \theta = 3/5$ и получим

$$\begin{aligned} A''' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta = \\ &= (2)(4/5)^2 + (-72)(4/5)(3/5) + (23)(3/5)^2 = \\ &= -625/25 = -25, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C''' &= A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta = \\ &= (2)(3/5)^2 - (-72)(4/5)(3/5) + (23)(4/5)^2 = \\ &= 1250/25 = 50. \end{aligned}$$

Коэффициенты переноса $'''$ и $''$ таковы.

$$m = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC} = \frac{(2)(23)(140) - (-72)(-20)}{5000} = \frac{5000}{5000} = 1,$$

$$n = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC} = \frac{(2)(2)(-20) - (-72)(140)}{5000} = \frac{10000}{5000} = 2$$

Так как $\xi = \eta = 0$, константа равна

$$\begin{aligned} F''' &= \frac{\zeta}{2} = \frac{(Dm + En + 2F)}{2} = \\ &= \frac{(140)(1) + (-20)(2) + (2)(50)}{2} = \frac{200}{2} = 100 \end{aligned}$$

Уравнение гиперболы

$$-25x^2 + 50y^2 + 100 = 0$$

В стандартной форме $\alpha x^2 + \beta y^2 + \kappa = 0$ имеем

$$-x^2 + 2y^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2y^2 = 4$$

В форме

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

имеем

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1,$$

что дает $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.

Параметрическое представление параболы (16):

$$x = a \operatorname{ch}(t), \quad y = b \operatorname{sh}(t),$$

где t - параметр. Для параметрического изображения гиперболы необходимо найти величину t для $x = 3.5$. Заметим, что **преобразования к стандартному виду переносят оси координат, а не само сечение**. Поэтому соответствующие преобразованные значения x получаются обратными преобразованиями. В результате

$$\begin{aligned} [TR] &= [T][R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -m & -n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin(-\theta) & 0 \\ -\sin(-\theta) & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -(m \cos \theta + n \sin \theta) & m \sin \theta - n \cos \theta & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Преобразованные координаты x

$$\begin{bmatrix} 3 & 2.871 & 1 \\ 5 & 2.476 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 & 0 \\ 3/5 & 4/5 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.123 & -0.503 & 1 \\ 3.486 & -2.019 & 1 \end{bmatrix},$$

где также включена y координата. Тогда параметрические значения

$$t_{\min} = t|_{x=3} = \text{Arch}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{Arch}\left(\frac{2.123}{2}\right) = 0.3486,$$

$$t_{\max} = t|_{x=5} = \text{Arch}\left(\frac{x}{2}\right) = \text{Arch}\left(\frac{3.486}{2}\right) = 1.1539.$$

Пользуясь этими значениями для t_{\min} и t_{\max} , получаем результат на рис. 16 и в табл. 9.

Таблица 9. Сегмент гиперболы в стандартной ориентации

t	x	y
0.349	2.123	-0.503
0.438	2.195	-0.640
0.528	2.285	-0.781
0.617	2.393	-0.929
0.706	2.520	-1.084
0.796	2.668	-1.248
0.885	2.837	-1.422
0.975	3.028	-1.608
1.064	3.244	-1.806
1.153	3.486	-2.019

Затем эти результаты обратным преобразованием переводятся в исходное положение:

$$[TR]^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результат приведен в табл. 10 и на рис. 16.

Таблица 10. Сегмент гиперболы в исходной ориентации

t	x	y
0.349	3.000	2.871
0.438	3.140	2.805
0.528	3.297	2.746
0.617	3.472	2.693
0.706	3.667	2.645
0.796	3.883	2.602
0.885	4.123	2.564
0.975	4.387	2.531
1.064	4.679	2.502
1.153	5.000	2.476

4. Пространственные кривые

Трехмерные, или пространственные, кривые широко используются в проектировании и разработке самой различной продукции: автомобилей, кораблей, самолетов, обуви, бутылок, зданий и т.д. Также они имеют большое значение для описания и интерпретации физических явлений в геологии, физике, медицине и др.

До начала применения математических и компьютерных моделей в процессе производства, дизайна и изготовления использовалась начертательная геометрия. Многие ее методы были перенесены в машинную графику.

Поверхности часто изображаются как сеть кривых, лежащих в ортогональных секущих плоскостях, с трехмерными контурами деталей. Пример приведен на рис. 1. Здесь сечения были получены

оцифровкой физической модели или чертежа и математическим подбором кривой, проходящей через все заданные точки.

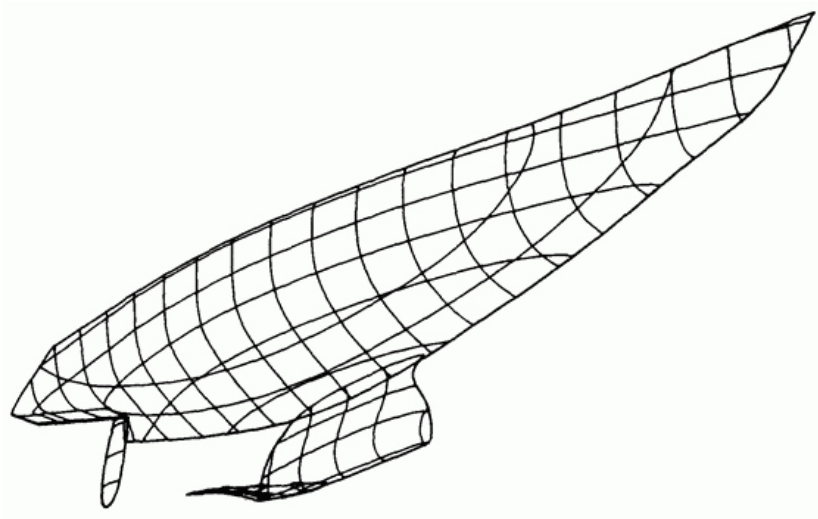


Рис. 1. Поверхность в виде сети ортогональных плоских кривых (Дж. Хейзен)

В данной главе рассматриваются два таких метода: кубические сплайны и параболическая интерполяция. Существуют и другие реализации этого подхода, рассмотренные.

Другой подход состоит в том, что математическое описание кривых генерируется без изначального знания формы кривой. Его примеры - это кривые Безье и их обобщение до B-сплайнов. Эти методы отличаются тем, что кривая может не проходить ни через одну заданную точку. Контрольные точки определяют только направление изгиба.

Как будет показано далее, оба подхода можно применить при любом способе задания кривой.

4.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ

Трехмерные кривые можно представить параметрически или непараметрически. Явное непараметрическое представление имеет вид

$$x = x,$$

$$y = f(x),$$

$$z = g(x).$$

Неявное непараметрическое представление кривой как пересечения двух поверхностей задается уравнениями:

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$g(x, y, z) = 0.$$

Пример 1. Пространственная кривая

Найти линию пересечения двух поверхностей второго порядка

$$f(x, y, z) = y - z^2 = 0,$$

$$g(x, y, z) = zx - y^2 = 0.$$

При условиях что

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$z \neq 0$, x и y можно выразить относительно z и получить явный вид линии пересечения

$$y = z^2,$$

$$x = \frac{y^2}{z} = z^3.$$

Заметим, что при пересечении двух поверхностей второго порядка получается кривая третьего порядка. Поверхности и кривая пересечения показаны на рис. 2.

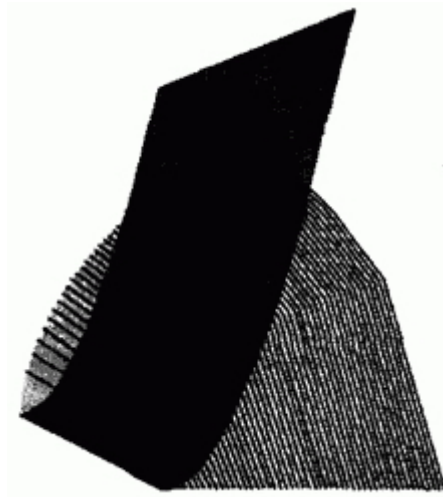


Рис. 2. Пересечение кривых второго порядка.

Общий параметрический вид пространственной кривой можно записать в виде:

$$x = x(t),$$

$$y = y(t),$$

$$z = z(t),$$

где параметр t изменяется в определенных пределах $t_1 \leq t \leq t_2$. В приведенном выше явном непараметрическом представлении X можно рассматривать как параметр, $X = t$. Тогда эта же кривая имеет параметрическую форму

$$x = t,$$

$$y = f(t),$$

$$z = g(t).$$

Далее, пусть $z = t$ в неявном непараметрическом представлении из примера 1, тогда

$$x = t^3,$$

$$y = t^2,$$

$$z = t.$$

Некоторые полезные параметрические трехмерные кривые имеют известное аналитическое решение. Например, кривая шва на теннисном или бейсбольном мяче имеет вид:

$$x = \lambda \left[a \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - b \cos 3 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$y = \mu \left[a \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - b \sin 3 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$z = c \sin(2\theta),$$

где

$$\lambda = 1 + d \sin(2\theta) = 1 + d \left(\frac{z}{c} \right),$$

$$\mu = 1 - d \sin(2\theta) = 1 - d \left(\frac{z}{c} \right),$$

параметр $\theta = 2\pi t$ и $0 \leq t \leq 1.0$.

Если $d = 0$ и $c^2 = 4ab$, то кривая лежит на сфере радиуса $a + b$. На рис. 3а приведен пример для $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 0$, где кривая лежит на сфере радиуса 2.

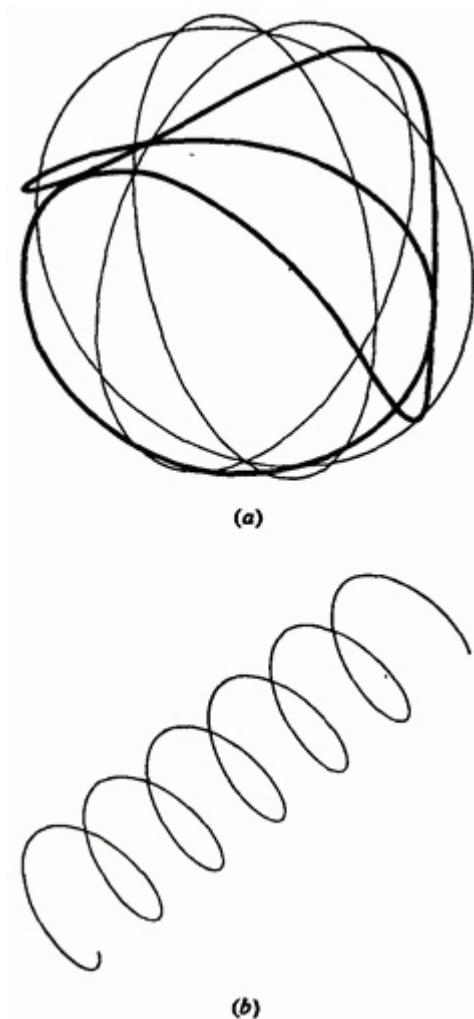


Рис. 3. Примеры параметрических пространственных кривых. (a) Шов бейсбольного мяча; (b) круговая спираль.

Другой пример параметрической пространственной кривой - круговая спираль:

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = bt$$

для $r, b \neq 0, -\infty < t < \infty$.

Эта кривая лежит на поверхности цилиндра радиуса $|r|$. Уравнение $z = bt$ отвечает за распространение спирали по оси z . После каждого изменения параметра t на 2π переменные x и y возвращаются к своим первоначальным значениям, а z увеличивается или уменьшается на $2\pi|b|$ в зависимости от знака b . Эта величина называется шагом спирали. Пример изображен на рис. 3б.

4.2. КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

В промышленном производстве, например, судо-, автомобиле- и авиационной, окончательная форма в реальном или близком к нему масштабе определяется в процессе доводки.

Автоматизация этого процесса представляла значительный интерес для машинной графики. Форма математического сплайна повторяет контур физического сплайна (рис. 4), т.е. гибкой деревянной или пластмассовой линейки, проходящей через определенные точки.



Рис. 4. Физические отвесы и сплайн.

Для изменения формы сплайна используются свинцовые грузики. Меняя их количество и расположение, получившуюся кривую стараются сделать более гладкой, красивой и «приятной для глаза».

Если рассматривать физический сплайн как тонкую гибкую рейку, его форма (отклонение y) определяется уравнением Эйлера (2) для момента изгиба $M(x)$ вдоль рейки:

$$M(x) = \frac{EI}{R(x)},$$

где E - модуль Юнга, зависящий от свойств материала рейки, I - момент инерции, определяемый формой кривой, $R(x)$ - радиус кривизны.

Для малых отклонений ($y' \ll 1$) радиус приближенно равен

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx y''$$

где штрих обозначает производную по x - расстоянию вдоль рейки, а y - отклонение рейки. Уравнение Эйлера принимает вид

$$y'' = \frac{M(x)}{EI}$$

Пусть грузики действуют как простые подпорки, тогда момент изгиба между ними изменяется линейно. Подставляя $M(x) = Ax + B$ в уравнение Эйлера, получаем

$$y'' = \frac{Ax + B}{EI}$$

и после двойного интегрирования

$$y = A_1 x^3 + B_1 x^2 + C_1 x + D_1$$

Таким образом, **форма сплайна задается кубическим полиномом**.

В общем случае **математический сплайн** это кусочный полином степени K с непрерывной производной степени $K-1$ в точках соединения сегментов. Так, например, кубический сплайн имеет в точках соединения непрерывность второго порядка. Кусочные сплайны из многочленов невысокого порядка очень удобны для интерполяции кривых, так как они не требуют больших вычислительных затрат и не вызывают численных отклонений, свойственных многочленам высокого порядка. По аналогии с физическими сплайнами обычно используется серия кубических сегментов, причем каждый сегмент проходит через две точки. **Кубический сплайн удобен еще и тем, что это кривая наименьшего порядка, допускающая точки перегиба и изгиб в пространстве.**

Уравнение одного параметрического сегмента сплайна таково:

$$P(t) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1}, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (1)$$

где t_1 и t_2 - значения параметров в начале и конце сегмента. $P(t)$ -

вектор к любой точке сегмента. $P(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]$ - это

векторно-значная функция, где три составляющие $P(t)$ - декартовы координаты вектора.

Каждая составляющая имеет вид, похожий на $P(t)$, т.е.

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_x} t^{i-1}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_y} t^{i-1}, \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^4 B_{i_z} t^{i-1}, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

Постоянные коэффициенты B_i вычисляются исходя из четырех граничных условий для сегмента сплайна. Запишем уравнение (1) в виде

$$P(t) = B_1 + B_2 t + B_3 t^2 + B_4 t^3, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (2)$$

Пусть P_1 и P_2 - векторы концов сегмента (см. рис. 5).



Рис. 5. Один сегмент кубического сплайна.

Пусть также P_1' и P_2' , производные по t , будут касательными векторами в концах сегмента. Дифференцируя уравнение (1), получим

$$P'(t) = [x'(t) \quad y'(t) \quad z'(t)] = \sum_{i=1}^4 B_i (i-1)t^{i-2}, \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (3)$$

Запишем результат

$$P'(t) = B_2 + 2B_3t + 3B_4t^2, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (4)$$

Предположим, без потери общности, что $t_1 = 0$, и применим граничные условия

$$P(0) = P_1, \quad (5a)$$

$$P(t_2) = P_2, \quad (5b)$$

$$P'(0) = P_1', \quad (5c)$$

$$P'(t_2) = P_2'. \quad (5d)$$

Получим четыре уравнения для неизвестных B_i :

$$P(0) = B_1 = P_1, \quad (6a)$$

$$P'(0) = \sum_{i=1}^4 (i-1)t^{i-2} B_i \Big|_{t=0} = B_2 = P_1', \quad (6b)$$

$$P(t_2) = \sum_{i=1}^4 B_i t^{i-1} \Big|_{t=t_2} = B_1 + B_2 t_2 + B_3 t_2^2 + B_4 t_2^3, \quad (6c)$$

$$P'(t_2) = \sum_{i=1}^4 (i-1) t^{i-2} B_i \Big|_{t=t_2} = B_2 + 2B_3 t_2 + 3B_4 t_2^2. \quad (6d)$$

Решения для B_3 и B_4 имеют вид:

$$B_3 = \frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \quad (7a)$$

и

$$B_4 = \frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2}. \quad (7b)$$

Величины B_1 , B_2 , B_3 и B_4 задают сегмент кубического сплайна. Очевидно, что форма сегмента зависит от положения и касательных векторов в концах сегмента. Далее, заметим, что в результатах присутствует значение параметра $t = t_2$ в конце сегмента. Так как каждая конечная точка и вектор касания имеют три компоненты, параметрическое уравнение кубической пространственной кривой зависит от двенадцати векторных компонент и значения параметра t_2 в конце сегмента.

Подставив уравнения (6) и (7) в (1), получим уравнение для одного сегмента кубического сплайна:

$$P(t) = P_1 + P_1' t + \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] t^2 + \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] t^3 . \quad (8)$$

Это уравнение для одного сегмента. Чтобы получить кривую целиком, нужно соединить множество сегментов. На рис. 6 показаны два соседних сегмента.

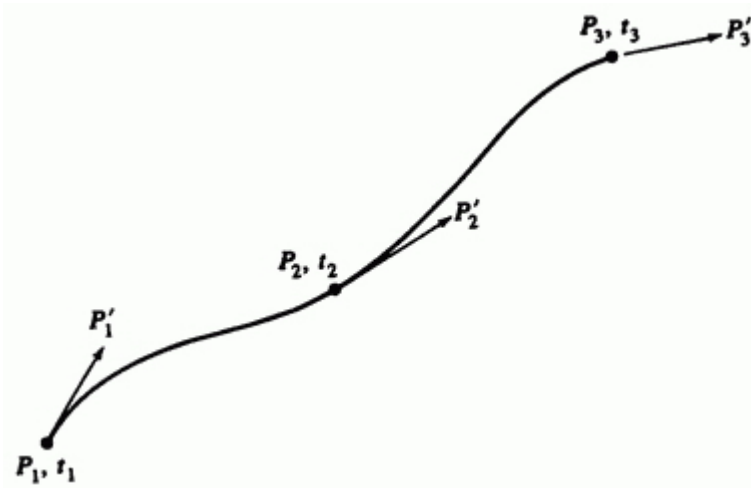


Рис. 6. Два кусочно-кубических сегмента сплайна.

Если известны векторы P_1, P_2, P_3 , касательные векторы P_1', P_2', P_3' и значения параметров t_2, t_3 , то форма каждого сегмента определяется из уравнения (8). Однако маловероятно, что известен касательный вектор P_2' в точке соединения. К счастью, его можно вывести из условия непрерывности.

Вспомним, что кусочный сплайн степени K имеет непрерывность степени $K-1$ в точках соединения; непрерывность кубического сплайна равна двум. Для этого должна быть непрерывна вторая

производная $F_2''(t)$ или кривизна линии. Дважды продифференцировав уравнение (1), получим

$$F''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2) B_i t^{i-3}, \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (9)$$

Для первого куска сплайна параметр изменяется в пределах $0 \leq t \leq t_2$.

Подставим $t = t_2$ в уравнение (9):

$$F'' = 6B_4 t_2 + 2B_3.$$

Для второго участка сплайна параметр изменяется в диапазоне $0 \leq t \leq t_3$. Подставим в уравнение (9) значение $t = 0$ в начале второго участка

$$F'' = 2B_3.$$

Приравнявая полученные результаты и пользуясь уравнениями (6а,б) и (7а), получим

$$\begin{aligned} 6t_2 \left[\frac{2(P_1 - P_2)}{t_2^3} + \frac{P_1'}{t_2^2} + \frac{P_2'}{t_2^2} \right] + 2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = \\ = 2 \left[\frac{3(P_3 - P_2)}{t_3^2} - \frac{2P_2'}{t_3} - \frac{P_3'}{t_3} \right]. \end{aligned}$$

Левая часть этого уравнения представляет кривизну в конце первого сегмента, а правая - в начале второго. Домножим на $t_2 t_3$ и сгруппируем члены:

$$t_3 P'_1 + 2(t_3 + t_2) P'_2 + t_2 P'_3 = \frac{3}{t_2 t_3} \left[t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \right] \quad (10)$$

Отсюда определяется P'_2 , неизвестный касательный вектор в точке соединения. Отметим, что в окончательном уравнении опять присутствуют значения параметра t в концах сегментов t_2 и t_3 .

Полученную формулу можно обобщить для n точек, и для $n-1$ сегментов кубического сплайна получить непрерывность второго порядка в точках соединения.

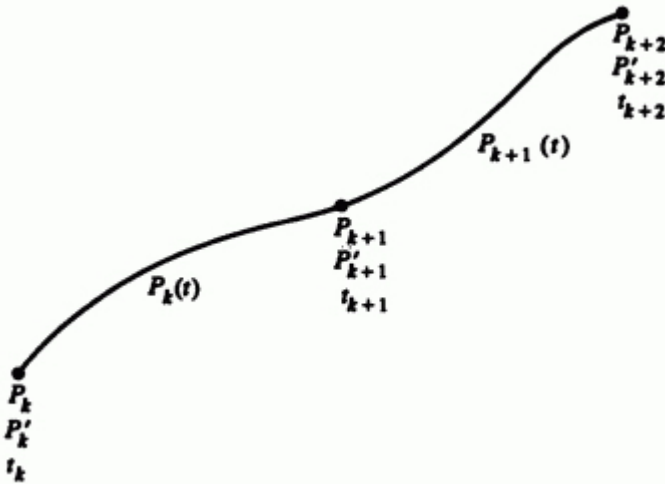


Рис. 7. Обозначения множества кусочно-кубических сегментов сплайна.

Обобщенное уравнение для двух любых соседних сегментов сплайна $P_k(t)$ и $P_{k+1}(t)$ в обозначениях рис. 7 имеет вид:

$$\begin{aligned}
 P_k(t) = & P_k + P'_k t + \left[\frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}} \right] t^2 + \\
 & + \left[\frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2} \right] t^3
 \end{aligned} \tag{11}$$

для первого сегмента и

$$\begin{aligned}
 P_{k+1}(t) = & P_{k+1} + P'_{k+1} t + \left[\frac{3(P_{k+2} - P_{k+1})}{t_{k+2}^2} - \frac{2P'_{k+1}}{t_{k+2}} - \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}} \right] t^2 + \\
 & + \left[\frac{2(P_{k+1} - P_{k+2})}{t_{k+2}^3} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+2}^2} + \frac{P'_{k+2}}{t_{k+2}^2} \right] t^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

для второго, так как для каждого сегмента параметр начинает изменяться с нуля, для первого $0 \leq t \leq t_{k+1}$ и для второго $0 \leq t \leq t_{k+2}$. Приравнивание вторых производных в точках стыковки для любых соседних сегментов, $P''_k(t_k) = P''_{k+1}(0)$, дает общий результат, эквивалентный уравнению (10),

$$\begin{aligned}
 & t_{k+2} P'_k + 2(t_{k+1} + t_{k+2}) P'_{k+1} + t_{k+1} P'_{k+2} = \\
 & = \frac{3}{t_{k+1} t_{k+2}} \left[t_{k+1}^2 (P_{k+2} - P_{k+1}) + t_{k+2}^2 (P_{k+1} - P_k) \right], \quad 1 \leq k \leq n-2, \tag{13}
 \end{aligned}$$

откуда определяется касательный вектор в точках соединения любых двух сегментов R_k и R_{k+1} .

Рекурсивное использование уравнения (13) для всех сегментов сплайна порождает $n - 2$ уравнений касательных векторов R'_k , $2 \leq k \leq n - 1$. В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1}) & t_{n-1} & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R'_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{ t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \end{bmatrix} \tag{14}$$

или

$$[M^*][P'] = [R]$$

Матрица $\begin{bmatrix} M^* \end{bmatrix}$ неквадратная, так как имеется только $n-2$ уравнений для n векторов, и ее нельзя обратить и получить решение для $\begin{bmatrix} P^r \end{bmatrix}$. Если предположить, что известны касательные векторы на концах кривой P_1^r и P_n^r , проблема разрешается. Теперь матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_3 & 2(t_2+t_3) & t_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & t_4 & 2(t_3+t_4) & t_3 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & t_5 & 2(t_4+t_5) & t_4 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_n & 2(t_n+t_{n-1}) & t_{n-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^r \\ P_2^r \\ P_3^r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n^r \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P_1^r \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{ t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2) \} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \\ P_n^r \end{bmatrix} \tag{15}$$

или

$$[M][P'] = [R],$$

где матрица $[M]$ квадратная и обратимая. Заметим также, что $[M]$ трехдиагональная, что снижает вычислительные затраты на ее обращение. Далее, матрица $[M]$ диагонально доминантная. Отсюда следует, что у нее существует единственное решение:

$$[P'] = [M]^{-1} [R]. \quad (16)$$

Если нам известны P'_k , то легко определить коэффициенты B_i для каждого сегмента сплайна. Обобщая уравнения (6)-(11), получим

$$B_{1k} = P_k,$$

$$B_{2k} = P'_k,$$

$$B_{3k} = \frac{3(P_{k+1} - P_k)}{t_{k+1}^2} - \frac{2P'_k}{t_{k+1}} - \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}},$$

$$B_{4k} = \frac{2(P_k - P_{k+1})}{t_{k+1}^3} + \frac{P'_k}{t_{k+1}^2} + \frac{P'_{k+1}}{t_{k+1}^2}.$$

Так как P_k и P'_k - это векторные величины, то и B_i тоже векторные; если P_k и P'_k имеют x , y , z составляющие, значит, и B_i также имеет эти составляющие.

В матричной форме уравнение любого сегмента сплайна k таково:

$$\begin{aligned}
 [B] &= \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}} & \frac{3}{t_{k+1}^2} & -\frac{1}{t_{k+1}} \\ \frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} & -\frac{2}{t_{k+1}^3} & \frac{1}{t_{k+1}^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P'_k \\ P_{k+1} \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Пусть требуется задать кубический сплайн, проходящий через n точек P_k , $1 \leq k \leq n$ с касательными векторами на концах P'_1 и P'_n . Из уравнения (16) находим внутренние касательные векторы P'_k , $2 \leq k \leq n-1$. Затем из уравнения (17) с известными координатами концов каждого сегмента и касательными векторами определяются B_{ik} , $1 \leq i \leq 4$, для каждого сегмента. Окончательное обобщение уравнения (1)

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^4 B_{ik} t^{i-1}, \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (18)$$

используется для расчета сегмента сплайна.

В матричном виде уравнение (18) выглядит следующим образом:

$$F_k(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1k} \\ B_{2k} \\ B_{3k} \\ B_{4k} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}. \quad (19)$$

Подставляя уравнение (17) и перегруппируя члены, получим

$$F_k(\tau) = \begin{bmatrix} F_1(\tau) & F_2(\tau) & F_3(\tau) & F_4(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_k \\ P_{k+1} \\ F'_k \\ P'_{k+1} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \tau \leq 1, \\ 1 \leq k \leq n-1, \quad (20)$$

где

$$\tau = (t/t_{k+1})$$

$$F_{1k}(\tau) = 2\tau^3 - 3\tau^2 + 1, \quad (21a)$$

$$F_{2k}(\tau) = -2\tau^3 + 3\tau^2, \quad (21b)$$

$$F_{3k}(\tau) = \tau(\tau^2 - 2\tau + 1)t_{k+1}, \quad (21c)$$

$$F_{4k}(\tau) = \tau(\tau^2 - \tau)t_{k+1}, \quad (21d)$$

называются весовыми функциями.

Пользуясь этими определениями, запишем уравнение (20) в матричном виде

$$R_k(\tau) = [F][G], \quad (22)$$

где $[F]$ - матрица весовой функции

$$[F] = [F_1(\tau) \quad F_2(\tau) \quad F_3(\tau) \quad F_4(\tau)] \quad (23)$$

и

$$[G]^T = [R_k \quad R_{k+1} \quad R'_k \quad R'_{k+1}] \quad (24)$$

содержит геометрическую информацию. Как будет видно из дальнейшего, уравнения типа (22), т.е. матрица весовой функции, умноженная на матрицу геометрических условий, часто применяются для описания кривых и поверхностей.

Из уравнения (21) видно, что каждая весовая функция имеет третий порядок. Любая точка на сегменте кубического сплайна это взвешенная сумма конечных точек и касательных векторов.

Коэффициенты F_{ik} выступают в роли весовых функций. На рис. 8 изображены F_i для $t_{k+1} = 1.0$.

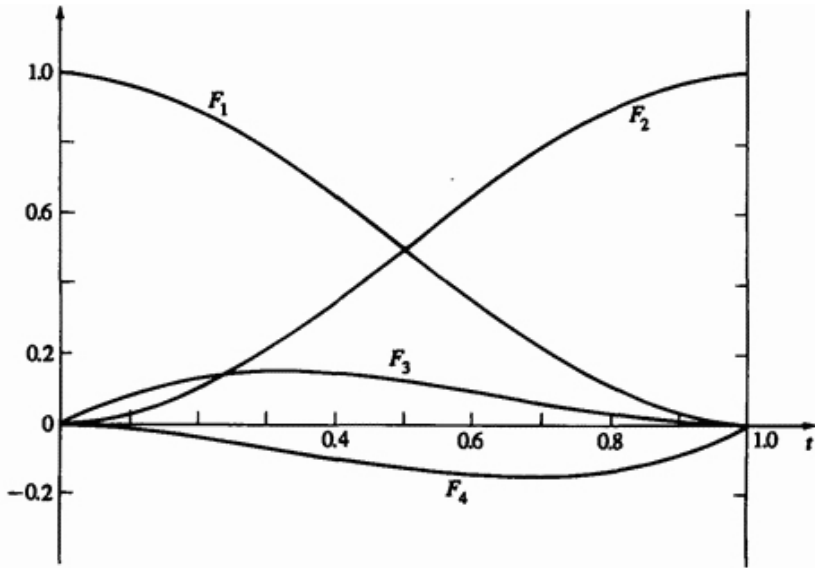


Рис. 8. Весовые функции кубического сплайна для $t_{k+1} = 1.0$

Из рисунка видно, что $F_1(0) = 1$ и $F_2(0) = F_3(0) = F_4(0) = 0$, т.е. кривая проходит через вектор-точку F_1 . Аналогично $F_2(1) = 1$ и $F_1(1) = F_3(1) = F_4(1) = 0$, т.е. кривая также проходит через вектор-точку F_2 . Далее отметим симметрию F_1 и F_2 , и F_3 и F_4 . Фактически $F_2(\tau) = 1 - F_1(\tau)$. Наконец, обратим внимание на относительный порядок F_1 , F_2 , F_3 и F_4 . Значительная разница величин говорит о том, что в общем случае положение конечных точек имеет большее влияние, чем касательные векторы.

Вспомним, что **кусочный кубический сплайн определяется точками, векторами касательных и величинами параметра, т. е. ξ_k в концах всех сегментов.** Выбор ξ_k влияет на гладкость кривой.

Непрерывность второй производной в точках внутреннего соединения сама по себе не обеспечивает гладкости кривой в смысле минимальности кривизны вдоль нее. Подбирая соответствующие значения, можно минимизировать коэффициенты B_3 и B_4 для каждого сегмента и достичь большей гладкости кривой. Обычно эти дополнительные вычисления не требуются. Для практических целей применяются более простые методы, наподобие рассмотренных здесь.

Один метод вычисления ξ_k - установить величины параметров равными длинам хорд между соседними точками. При этом качество кривой удовлетворяет требованиям большинства прикладных задач.

Другой метод состоит в том, что для нормализации вариации ξ_k полагается равным единице у каждого сегмента сплайна. Такой выбор упрощает вычисления. Как видно из приведенных выше уравнений, любой выбор ξ_k приводит к другим коэффициентам, и, следовательно, получаются различные кривые, проходящие через заданные точки.

Рассмотрим пример.

Пример 2. Кубический сплайн

Пусть даны четыре вектор-точки на плоскости: $P_1[0 \ 0]$, $P_2[1 \ 1]$, $P_3[2 \ -1]$, $P_4[3 \ 0]$ (см. рис. 9).

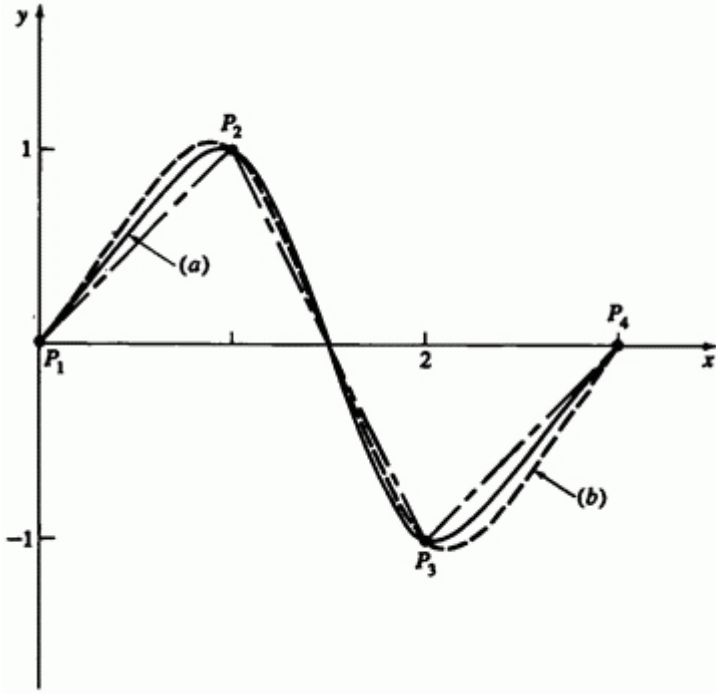


Рис. 9. Кусочный кубический сплайн. (a) \hat{t}_{ik} вычислены с помощью хордовой аппроксимации; (b) \hat{t}_{ik} нормализованы к 1.

Найти кусочный кубический сплайн, проходящий через них, используя хордовую аппроксимацию \hat{t}_{ik} . Касательные векторы в концах: $P_1' [1 \ 1]$ и $P_4' [1 \ 1]$. Найти промежуточные точки при $\tau = 1/3, 2/3$ для каждого сегмента.

Сначала найдем

$$t_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2},$$

$$t_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5},$$

$$t_4 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}.$$

Внутренние касательные векторы P'_2 и P'_3 вычисляются из уравнения (15):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & 0 \\ 0 & t_4 & 2(t_3 + t_4) & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} P'_1 \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{ t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2) \} \\ P'_4 \end{bmatrix}.$$

Сделаем подстановку, получим

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 2(\sqrt{2}+\sqrt{5}) & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2(\sqrt{5}+\sqrt{2}) & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} & & & [1 \ 1] \\ \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \{2([2 \ -1]-[1 \ 1])+5([1 \ 1]-[0 \ 0])\} & & & \\ \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \{5([3 \ 0]-[2 \ -1])+2([2 \ -1]-[1 \ 1])\} & & & \\ & & & [1 \ 1] \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} & & & [1 \ 1] \\ \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \{[2 \ -4]+[5 \ 5]\} & & & \\ \frac{3}{\sqrt{5}\sqrt{2}} \{[5 \ 5]+[2 \ -4]\} & & & \\ & & & [1 \ 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & [1 \ 1] \\ 0.949 & & & [7 \ 1] \\ 0.949 & & & [7 \ 1] \\ & & & [1 \ 1] \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.236 & 7.300 & 1.414 & 0 \\ 0 & 1.414 & 7.300 & 2.236 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ P'_3 \\ P'_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6.641 & 0.949 \\ 6.641 & 0.949 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

С помощью инверсии и умножения вычисляются касательные векторы

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.318 & 0.142 & -0.028 & 0.062 \\ 0.062 & -0.028 & 0.142 & -0.318 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6.641 & 0.949 \\ 6.641 & 0.949 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \\ 0.505 & -0.148 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из уравнения (21) находим весовые функции первого сегмента:

$$F_1(1/3) = 2(1/3)^3 - 3(1/3)^2 + 1 = \frac{20}{27} = 0.741,$$

$$F_2(1/3) = -2(1/3)^2 + 3(1/3)^2 = \frac{7}{27} = 0.259,$$

$$F_3(1/3) = (1/3) \left[(1/3)^2 - 2(1/3) + 1 \right] \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{27} = 0.210,$$

$$F_4(1/3) = (1/3) \left[(1/3)^2 - 1/3 \right] \sqrt{2} = -\frac{2\sqrt{2}}{27} = -0.105$$

и второго:

$$F_1(2/3) = 2(2/3)^3 - 3(2/3)^2 + 1 = \frac{7}{27} = 0.259$$

$$F_2(2/3) = -2(2/3)^3 + 3(2/3)^2 = \frac{20}{27} = 0.741$$

$$F_3(2/3) = (2/3) \left[(2/3)^2 - 2(2/3) + 1 \right] \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{27} = 0.105$$

$$F_4(2/3) = (2/3) \left[(2/3)^2 - 2/3 \right] \sqrt{2} = \frac{-4\sqrt{2}}{27} = -0.210$$

Точка на первом сегменте сплайна при $\tau = 1/3$ получается из уравнения (22), $P(\tau) = [F][G]$, т.е.

$$P(1/3) = [0.741 \quad 0.259 \quad 0.210 \quad -0.105] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.416 \quad 0.484]$$

и при $\tau = 2/3$.

$$P(2/3) = [0.259 \quad 0.741 \quad 0.105 \quad -0.210] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0.505 & -0.148 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.740 \quad 0.876]$$

Полный результат приведен в табл. 1. Кубический сплайн показан на рис. 9.

Таблица 1. Результаты для кубического сплайна

Сегмент	τ	$P_x(\tau)$	$P_y(\tau)$
1	1/3	0.416	0.484
	2/3	0.740	0.876
2	1/3	1.343	0.457
	2/3	1.657	-0.457
3	1/3	2.260	-0.876
	2/3	2.584	-0.484

Хотя из весовых функций (см. (21)) видно, что касательные векторы в концах меньше влияют на форму сплайна, чем положение конечных точек, их эффект может оказаться значительным. На рис. 10 изображен один симметричный сегмент сплайна с одинаковым направлением касательных векторов, но разной величины.

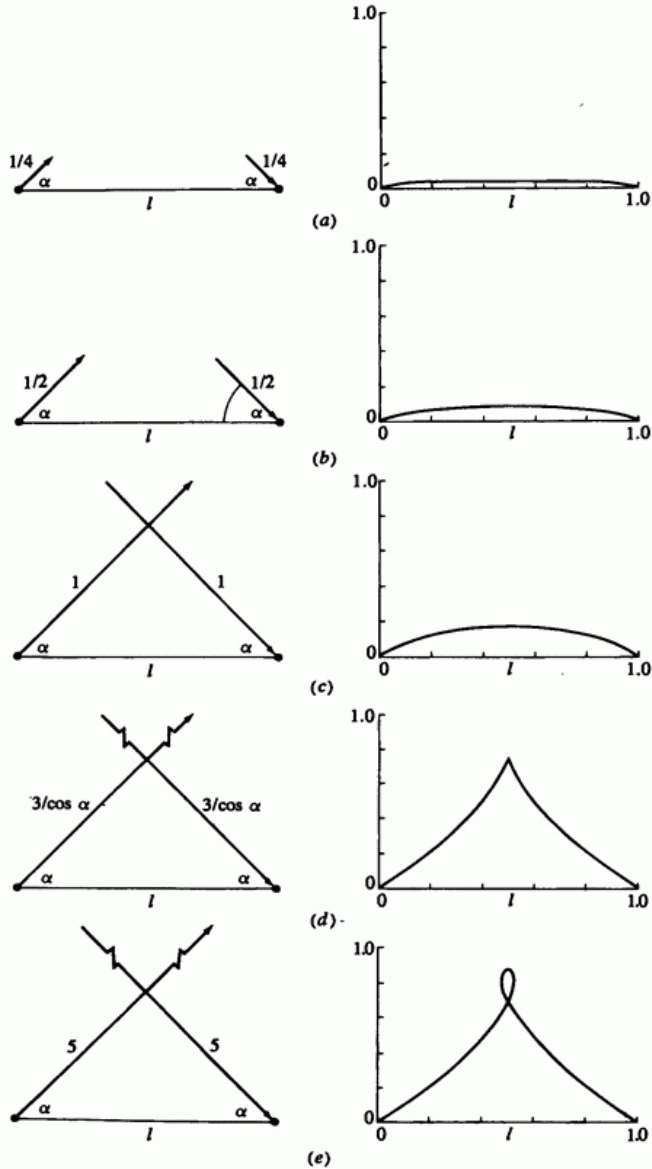


Рис. 10. Влияние величины касательного вектора на форму сегмента кубического сплайна, $\alpha = \pi/4$. (a) $1/4$; (b) $1/2$; (c) 1 ; (d) $3/\cos \alpha$; (e) 5 .

Направления касательных векторов обозначены углом α , а их относительная величина - длиной этих векторов. Если величина значительно меньше длины хорды l , то кривая выпукла на концах и лежит внутри треугольника из хорды и касательных. При возрастании величины кривая постепенно становится вогнутой и выходит за треугольник. В этом случае при величине вектора $3/\cos \alpha$ у кривой появляется вершина (см. рис. 10d). При еще больших величинах появляется петля, как видно из рис. 10e. Иногда для улучшения формы кривой величина вектора ограничивается длиной хорды.

4.3. НОРМАЛИЗОВАННЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Рассмотрим другой подход к аппроксимации величин t_k - нормализацию, т. е. $0 \leq t \leq 1$ для всех сегментов.

В этом случае весовые функции (см. уравнение 21) имеют вид:

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad (25a)$$

$$F_2(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad (25b)$$

$$F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad (25c)$$

$$F_4(t) = t^3 - t^2. \quad (25d)$$

Матрица весовых функций для нормализованного кубического сплайна выглядит следующим образом:

$$[F] = [T][N] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

Матричное уравнение сегмента (уравнение (22) записывается как

$$P(t) = [F][G] = [T][N][G]. \quad (27)$$

Заметим, что $[T]$ и $[N]$ - константы для всех сегментов сплайна. От сегмента к сегменту меняется только матрица геометрии $[G]$.

Уравнение (15) для определения внутренних касательных векторов, необходимых в $[G]$, приобретает вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_1 \\ P'_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ P'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\{(P_3 - P_2) + (P_2 - P_1)\} \\ 3\{(P_4 - P_3) + (P_3 - P_2)\} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 3\{(P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2})\} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Решение опять дается уравнениями (16), но так как $[M]$ - константа, ее нужно обратить только один раз. При большом количестве точек это значительно сокращает вычисления. Рассмотрим пример.

Пример 3. Нормализованный кубический сплайн

Опять рассмотрим четыре вектор-точки на плоскости из примера 2, т. е. $P_1[0 \ 0]$, $P_2[1 \ 1]$, $P_3[2 \ -1]$ и $P_4[3 \ 0]$ с касательными

векторами $P_1'[1 \ 1]$ и $P_4'[1 \ 1]$. Найти нормализованный кусочный кубический сплайн, проходящий через эти вектор-точки.

Величины параметров $t_2 = t_3 = t_4 = 1.0$.

Касательные векторы в точках соединения рассчитываются из уравнения (28), т.е.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1 \ 1] \\ 3\{[2 \ -1] - [1 \ 1] + [1 \ 1] - [0 \ 0]\} \\ 3\{[3 \ 0] - [2 \ -1] + [2 \ -1] - [1 \ 1]\} \\ [1 \ 1] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Обращаем и умножаем:

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \\ P_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.267 & 0.267 & -0.067 & 0.067 \\ 0.067 & -0.067 & 0.267 & -0.267 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 6 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -0.8 \\ 1 & -0.8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что здесь внутренние касательные F_2' , F_3' существенно отличаются от результатов хордовой аппроксимации в примере 2.

Из уравнения (26) матрица весовых коэффициентов для первого сегмента при $t = 1/3$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
 [F] &= [T][N] = \begin{bmatrix} 1/27 & 1/9 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 20/27 & 7/27 & 4/27 & -2/27 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

и при $t = 2/3$:

$$[F] = \begin{bmatrix} 7/27 & 20/27 & 2/27 & -4/27 \end{bmatrix}.$$

Точка на первом сегменте сплайна при $t = 1/3$:

$$\begin{aligned}
 P(t) &= [F][G] = \begin{bmatrix} 20/27 & 7/27 & 4/27 & -2/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1/3 & 63/135 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.333 & 0.467 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

и при $t = 2/3$:

$$P(t) = [F][G] = \begin{bmatrix} 7/27 & 20/27 & 2/27 & -4/27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -0.8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & 126/135 \end{bmatrix}$$

Результаты собраны в табл. 2.

Таблица 2. Результаты для нормализованного кубического сплайна

Сегмент	t	$P_x(t)$	$P_y(t)$
1	1/3	0.333	0.467
	2/3	0.667	0.933
2	1/3	1.33	0.422
	2/3	1.667	-0.422
3	1/3	2/333	-0.933
	2/3	2/667	-0.467

На рис. 9 изображены два сплайна - из примера 1 и 3. Кривые получились разными, т. е. параметризация влияет на результат.

Если точки из набора данных распределены неравномерно, то опыт показывает, что хордовая аппроксимация \hat{t}_k дает более гладкую кривую, чем нормализация. Это видно из рис. 11.

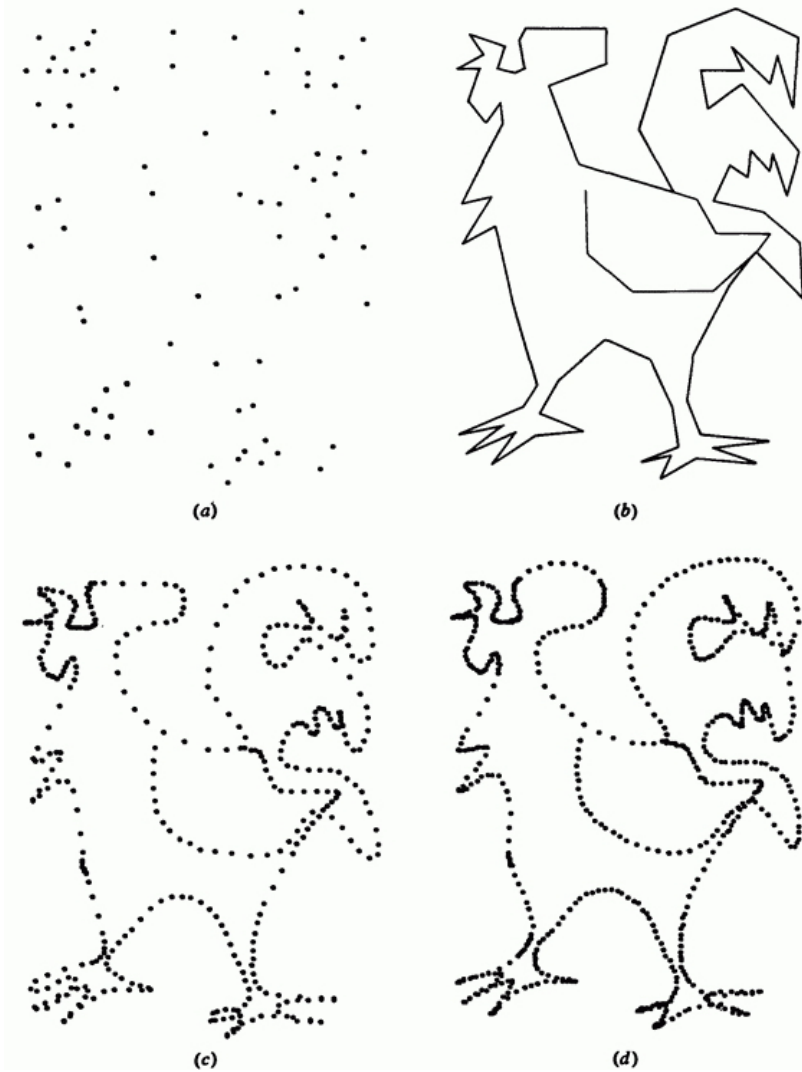


Рис. 11. Сравнение кубических сплайновых аппроксимаций. (а) Данные; (b) соединение прямыми; (с) нормализованная аппроксимация $\tilde{\xi}_{\mathcal{K}}$; (d) хордовая аппроксимация $\xi_{\mathcal{K}}$.

На рис. 11а показано упорядоченное множество точек, представляющее контур петушка. На рис. 11б точки соединены отрезками прямых. Рисунки 11с и d представляют нормализованную и хордовую аппроксимацию сплайна, соответственно. Обратите внимание на разницу в изображении лапок и гребешка.

Хордовая аппроксимация устраняет петли, заметные на рис. 11с на лапках, и дает более гладкое изображение гребешка. Несмотря на эти недостатки, нормализованное представление применяется для создания кубических ограничивающих кривых для кусков трехмерной поверхности.

Еще одно замечание: если для нормализованного сплайна известна матрица $[B]^T = [B_1 \ B_2 \ B_3 \ B_4]$, то геометрическая матрица сегмента сплайна $[G]$ равна

$$[G] = [N]^{-1} [B]^T,$$

где $[N]^{-1}$ - обратная матрица $[N]$:

$$[N]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Точки на сегменте рассчитываются из уравнения (27).

4.4. ДРУГИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что известны касательные векторы F_1' и F_n' в конечных точках кусочного кубического сплайна. Такое граничное условие называется

закрепленным. Неизвестные касательные векторы в промежуточных точках вычисляются инверсией трехдиагональной матрицы $[M]$ из уравнения (15).

Если задано мало точек или физические ограничения требуют определенной формы кривой у концов, возможны другие граничные условия. Например, можно задать кривизну в конечных точках. **Нулевая кривизна называется слабым граничным условием**. Аппроксимируя кривизну второй производной и вспоминая уравнение (9), получаем

$$F''(t) = \sum_{i=1}^4 (i-1)(i-2) B_i t^{i-3}, \quad 0 \leq t \leq t_{k+1}.$$

В начале первого сегмента сплайна $t = 0$. Отметим, что на результат влияет только член $i = 3$. Из уравнения (17)

$$F''(0) = 2B_3 = 2 \left(\frac{3(B_2 - R_1)}{t_2^2} - \frac{2R_1'}{t_2} - \frac{R_2'}{t_2} \right) = 0$$

После перегруппировки получаем

$$R_1' + \frac{R_2'}{2} = \frac{3}{2t_2} (B_2 - R_1) \tag{30}$$

Теперь первая строка в матрицах $[M]$ и $[R]$ (см. (15)) такова:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2t_2} (B_2 - R_1) \end{bmatrix}$$

В конце последнего сегмента $t = t_n$, $k = n - 1$. Здесь результат зависит от двух членов $i = 3$ и $i = 4$ в (9), а именно

$$P''(t_n) = 2B_3 + 6B_4 t_n = 0$$

или, используя уравнение (17),

$$\frac{6}{t_n^2}(P_{n-1} - P_n) + \frac{2P'_{n-1}}{t_n} + \frac{4P'_n}{t_n} = 0$$

После перегруппировки

$$2P'_{n-1} + 4P'_n = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \tag{31}$$

Последняя строка матриц $[M]$ и $[R]$ (см. (15)) выглядит теперь так:

$$\left[\dots \quad 0 \quad 2 \quad 4 \right] [P'_n] = \left[\frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1}) \right]$$

Заметим, что для сплайна слабые и закрепленные граничные условия могут меняться местами.

Пример 4. Кубический сплайн со слабым граничным условием

Пусть заданы три точки $P_1[0 \ 0]$, $P_2[1 \ 2]$ и $P_3[3 \ 2]$. Найти кубический сплайн, проходящий через них, со слабыми граничными условиями. Для t_k использовать хордовую аппроксимацию.

Коэффициенты t_k таковы:

$$t_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5},$$

$$t_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (0)^2} = 2.$$

Модифицируя матрицы $[M]$ и $[R]$ с помощью уравнений (30) и (31), получим уравнение внутреннего касательного вектора в P_2' :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 2 & 8.472 & 2.236 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\sqrt{5}}([1 \ 2] - [0 \ 0]) \\ \frac{3}{2\sqrt{5}}\{5([3 \ 2] - [1 \ 2]) + 4([1 \ 2] - [0 \ 0]0)\} \\ 3([3 \ 2] - [1 \ 2]) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 0.671 & 1.342 \\ 0.391 & 5.367 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Инвертируя (3×3) -матрицу и умножая, найдем производные

$$\begin{bmatrix} P_1' \\ P_2' \\ P_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.157 & -0.079 & 0.044 \\ -0.315 & 0.157 & -0.088 \\ 0.157 & -0.079 & 0.294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.671 & 1.342 \\ 9.391 & 5.367 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0.301 & 1.131 \\ 0.739 & 0.422 \\ 1.131 & -0.211 \end{bmatrix}.$$

Из уравнения (21) весовые функции при $\tau = 1/3$ и $2/3$ для первого сегмента имеют вид:

$$[F]_{\tau=1/3} = [0.741 \quad 0.259 \quad 0.331 \quad -0.166],$$

$$[F]_{\tau=2/3} = [0.259 \quad 0.741 \quad 0.166 \quad -0.331].$$

Затем уравнение (22) дает точки на первом сегменте, т. е.

$$P(1/3) = [0.741 \quad 0.259 \quad 0.331 \quad -0.166] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0.301 & 1.131 \\ 0.739 & 0.422 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.237 \quad 0.823].$$

Аналогично

$$P(2/3) = [0.546 \quad 1.529].$$

Весовые функции при $\tau = 1/3, 2/3$ для второго сегмента таковы:

$$[F]_{\tau=1/3} = [0.741 \quad 0.259 \quad 0.296 \quad -0.148]$$

$$[F]_{\tau=2/3} = [0.259 \quad 0.741 \quad 0.148 \quad -0.296]$$

и уравнение (22) дает

$$P(1/3) = [1.570 \quad 2.156]$$

$$P(2/3) = [2.256 \quad 2.125]$$

Результаты показаны на рис. 12.

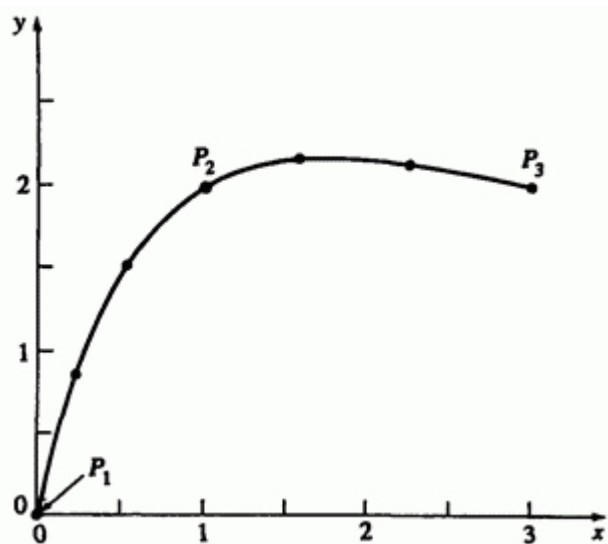


Рис. 12. Кубический сплайн для примера 4.

Интерес представляют еще два типа граничных условий: циклическое и ациклическое. Циклическое условие порождает замкнутую кривую или часть периодически повторяющейся кривой. Для этого необходимо, чтобы касательная вектора и кривизна на обоих концах были нулевыми:

$$P_1'(0) = P_n'(t_n), \quad (32)$$

$$P_1''(0) = P_n''(t_n). \quad (33)$$

Из уравнений (3) и (9), пользуясь уравнениями (17) и (32), получаем

$$\begin{aligned} P_1' - P_{n-1}' &= 2t_n \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P_{n-1}'}{t_n} - \frac{P_n'}{t_n} \right] + \\ &+ 3t_n \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично, уравнение (33) приводится к виду

$$\begin{aligned} 2 \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] &= 2 \left[\frac{3(P_n - P_{n-1})}{t_n^2} - \frac{2P_{n-1}'}{t_n} - \frac{P_n'}{t_n} \right] + \\ &+ 6t_n \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Умножив (35) на t_n и вычитая его из (34), получим

$$\begin{aligned}
 & P_1' - P_{n-1}' - 2t_n \left[\frac{3(P_2 - P_1)}{t_2^2} - \frac{2P_1'}{t_2} - \frac{P_2'}{t_2} \right] = \\
 & = 3t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right] - \\
 & - 6t_n^2 \left[\frac{2(P_{n-1} - P_n)}{t_n^3} + \frac{P_{n-1}'}{t_n^2} + \frac{P_n'}{t_n^2} \right].
 \end{aligned}$$

Вспомним, что $P_1' = P_n'$, и перегруппируем члены:

$$2 \left(1 + \frac{t_n}{t_2} \right) P_1' + \frac{t_n}{t_2} P_2' + P_{n-1}' = 3 \frac{t_n}{t_2^2} (P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n} (P_{n-1} - P_n) \quad (36)$$

Касательные векторы в точках внутреннего соединения опять получаются с помощью уравнения (15). Однако из-за того, что касательные векторы линейно зависимы ($P_1' = P_n'$), матрица $[M]$ теперь имеет размер $(n-1) \times (n-1)$, где первая строка состоит из коэффициентов уравнения (36):

$$\begin{bmatrix}
 2 \left(1 + \frac{t_n}{t_2} \right) & \frac{t_n}{t_2} & 0 & 0 & \dots & 1 \\
 t_3 & 2(t_2 + t_3) & t_2 & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & 0 & t_n & 2(t_n + t_{n-1}) & t_{n-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 P_1' \\
 P_2' \\
 P_3' \\
 \dots \\
 P_{n-1}'
 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \frac{t_n}{t_2^2} (P_2 - P_1) - \frac{3}{t_n} (P_{n-1} - P_n) \\ \frac{3}{t_2 t_3} \{ t_2^2 (P_3 - P_2) + t_3^2 (P_2 - P_1) \} \\ \frac{3}{t_3 t_4} \{ t_3^2 (P_4 - P_3) + t_4^2 (P_3 - P_2) \} \\ \vdots \\ \frac{3}{t_{n-1} t_n} \{ t_{n-1}^2 (P_n - P_{n-1}) + t_n^2 (P_{n-1} - P_{n-2}) \} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Эта матрица уже не трехдиагональная. Ациклический сплайн похож на циклический за исключением того, что

$$P_1'(0) = -P_n'(t_n), \quad (38)$$

$$P_1''(0) = -P_n''(t_n). \quad (39)$$

Та же процедура, что и для циклических граничных условий, дает

$$2 \left(1 + \frac{t_n}{t_2} \right) P_1' + \frac{t_n}{t_2} P_2' - P_{n-1}' = 3 \frac{t_n}{t_2^2} (P_2 - P_1) + \frac{3}{t_n} (P_{n-1} - P_n) \quad (40)$$

Из уравнения (40) видно, что единственные отличия - это разные знаки у 1 в $M(1, n-1)$ в матрице $[M]$ и у второго члена $R(1, 1)$ в уравнении (37). Ациклические сплайны полезны при изображении кривых, у которых касательные векторы в концах имеют одинаковую величину и противоположные направления, например как у многослойной деревянной теннисной ракетки. В табл. 3 собраны граничные условия для кубических сплайнов.

Таблица 3. Граничные условия для кубических сплайнов

Граничное условие	Ненулевые элементы в первой и последней строках $[M]$	Первая и последняя строки $[R]$
Закрепленное	$M(1,1) = 1$ $M(n,n) = 1$	$R(1,1) = P_1'$ $R(n,1) = P_n'$
Слабое	$M(1,1) = 1$ $M(1,2) = 1/2$ $M(n,n-1) = 2$ $M(n,n) = 4$	$R(1,1) = \frac{3}{2t_2}(P_2 - P_1)$ $R(n,1) = \frac{6}{t_n}(P_n - P_{n-1})$
Циклическое	$M(1,1) = 2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1,n-1) = 1$	$R(1,1) = 3\left(\frac{t_n}{t_2^2}\right)(P_2 - P_1)$ $-\frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$ $R(n,1)$ не определено
Ациклическое	$M(1,1) = 2\left(1 + \frac{t_n}{t_2}\right)$ $M(1,2) = \frac{t_n}{t_2}$ $M(1,n-1) = -1$	$R(1,1) = 3\left(\frac{t_n}{t_2^2}\right)(P_2 - P_1)$ $+\frac{3}{t_n}(P_{n-1} - P_n)$ $R(n,1)$ не определено

У кубических сплайнов первые и вторые производные непрерывны для любых граничных условий, но с увеличением количества заданных точек время обращения матрицы касательных векторов может стать слишком большим.

На рис. 13 изображены два кубических сплайна, проходящих через пять точек: с закрепленными и слабыми граничными условиями.

Касательные векторы в закрепленных концах - $[-1 \ 1]$ и $[1 \ 1]$, соответственно. В этом случае различие кривых несущественно.

Другие касательные векторы, например $[1 \ 1]$ и $[1 \ 1]$, могут существенно изменить форму сплайна с закрепленными концами.

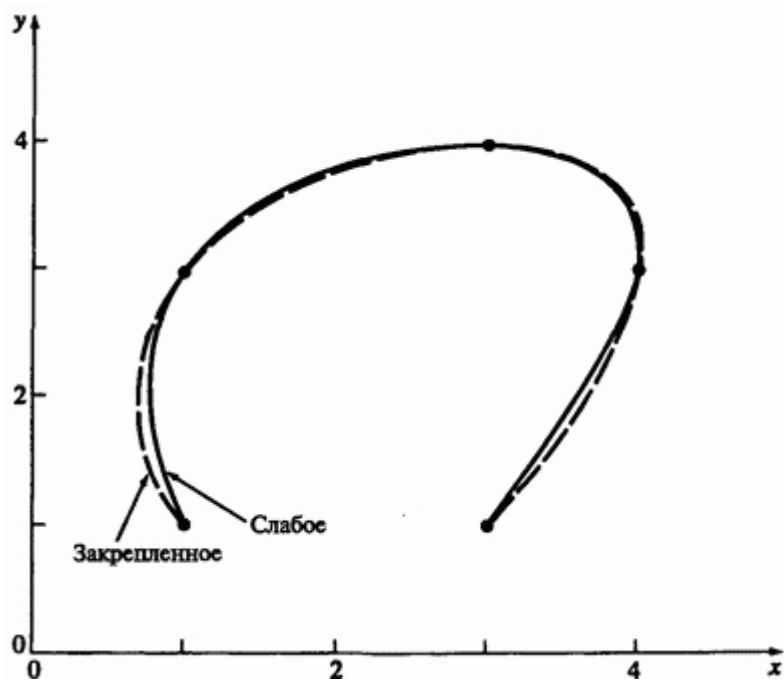


Рис. 13. Сравнение закрепленного и слабого граничных условий для нормализованного кусочно кубического сплайна.

На рис. 14 показано влияние изменения величины, а не направления касательных векторов в концах замкнутого кубического сплайна. Эти кривые симметричны, так как квадратная матрица в уравнении (15) трехдиагональна.

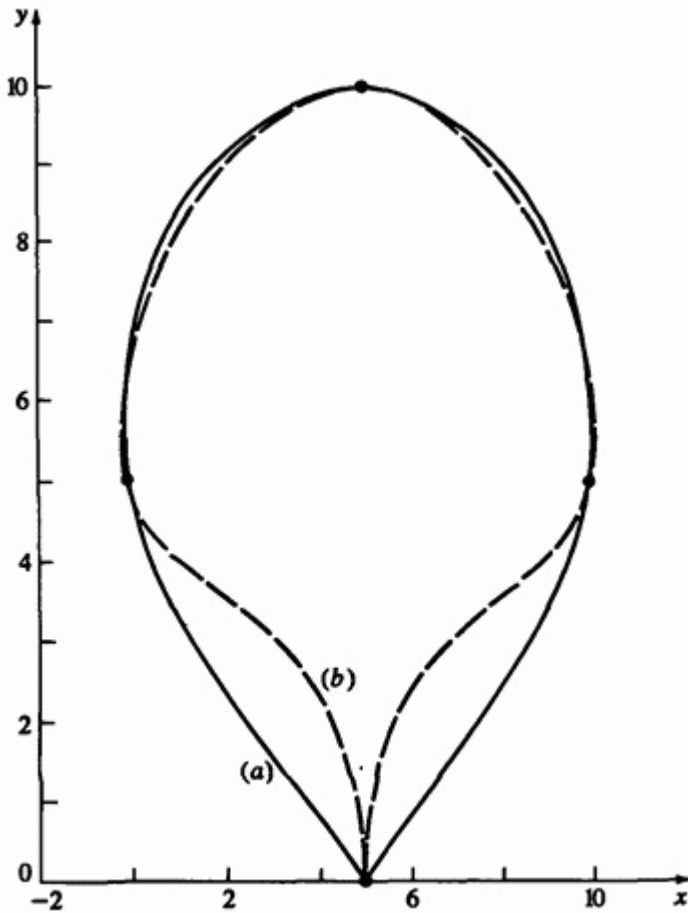


Рис. 14. Влияние величины касательного вектора на форму нормализованного кусочно кубического сплайна. (a) $R_1^t[0 \ 1]$, $R_2^t[0 \ -1]$; (b) $R_1^t[0 \ 10]$, $R_2^t[0 \ -10]$.

На рис. 15 через те же пять точек проходит сплайн со слабыми и циклическими граничными условиями.

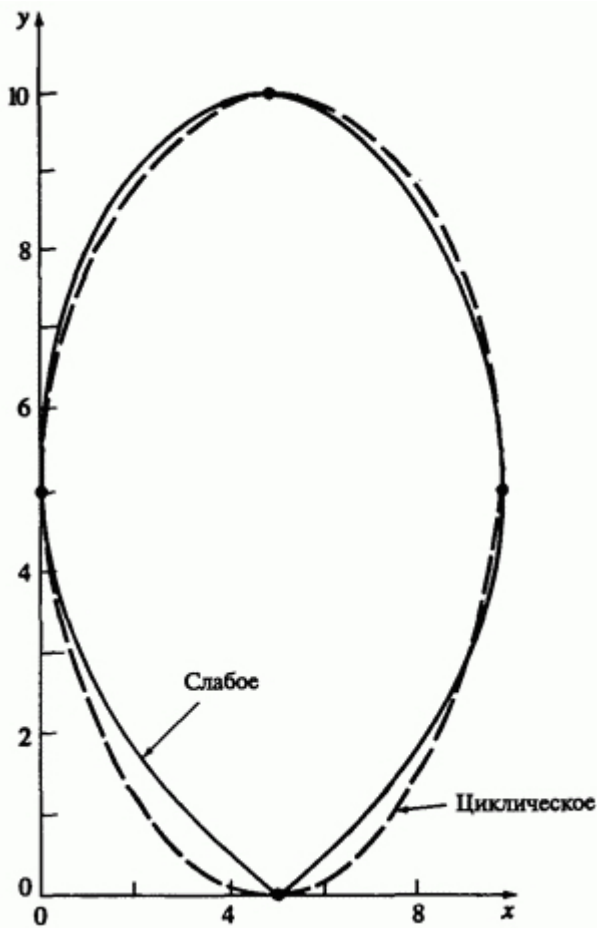


Рис. 15. Сравнение слабого и циклического граничных условий для нормализованного кусочно кубического сплайна.

Обратите внимание на то, что сплайн со слабыми условиями симметричен, а циклический - нет.

На рис. 16 сравниваются слабое и циклическое граничные условия.

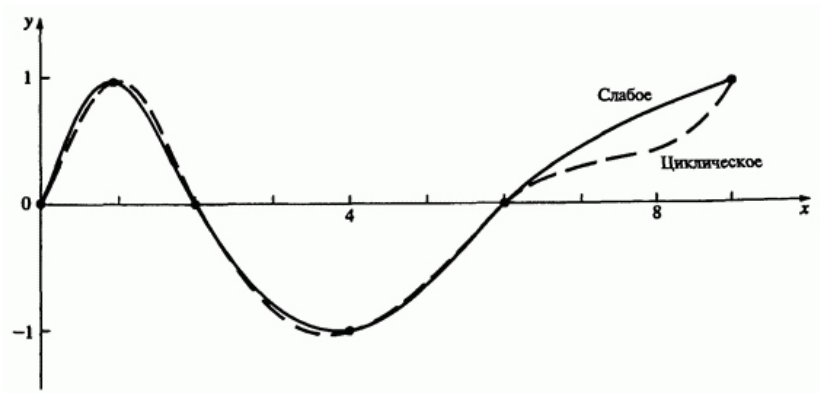


Рис. 16. Сравнение слабого и циклического граничных условий для открытых кривых.

Циклическое условие можно использовать и для незамкнутых кривых: направление начального касательного вектора должно совпадать с направлением касательного вектора в конце.

Несмотря на то, что параметрические кусочные сплайны удобны и применяются в ряде отраслей (производстве автомобилей, судостроении и авиационной промышленности), у них есть некоторые недостатки. Так, они неточно представляют конические сечения и асимптотические кривые и часто приводят к видимой осцилляции. Осцилляция возникает из-за того, что сплайн испытывает локальное влияние каждой точки, а третья производная только кусочно постоянна. Разрывы третьей производной порождают отклонения, и полученная кривая не является гладкой, несмотря на то, что ее вторая производная непрерывна.

Один из методов борьбы с осцилляциями - математический аналог приложения силы к концам сплайна. Пусть имеется физический сплайн - тонкая, гибкая рейка, нагруженная в некоторых точках. Чтобы устранить малые колебания, нужно приложить силу к концам рейки. Изучение нагруженных сплайнов выходит за рамки этой книги, однако мы сделаем несколько замечаний. В первых разработках рассматривается экспоненциальный сплайн, требующий больших

вычислений. В ряде работ рассматривается другой полиномиальный вид сплайна, ν -сплайн. Эффект напряжения кубического сплайна показан на рис. 17.

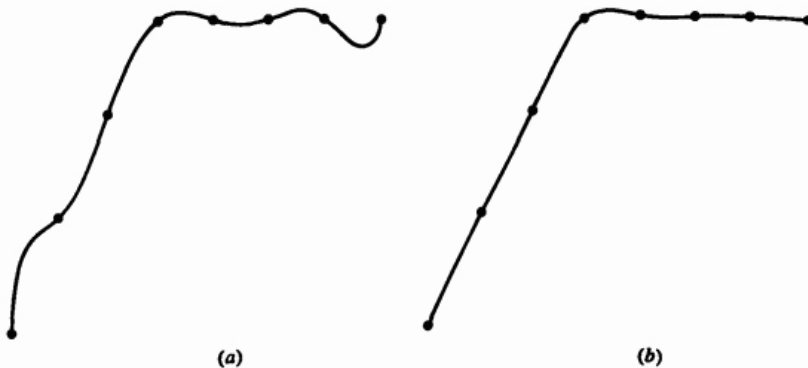


Рис. 17. Эффект напряжения кусочно кубического сплайна. (а) Без напряжения; (б) с напряжением.

4.5. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Кубические сплайны - это мощное и удобное средство, но и они небезупречны: необходимо учитывать влияние направления и величины касательных векторов, указывать все точки кривой до ее изображения, невозможна локальная коррекция кривой. Последнее особенно важно для интерактивной работы. Расчет кубического сплайна требует обращения большой матрицы, зависящей от всех элементов сплайна; т.е. изменение любого сегмента затрагивает все остальные сегменты. Воздействие уменьшается при удалении от точки возмущения, но полностью пренебречь им нельзя. Параболическая интерполяция разрешает большинство этих проблем за счет того, что она только непрерывна, т. е. в точках соединения сегментов сохраняется непрерывность лишь первой производной. Для многих прикладных задач этого достаточно, причем параболическая интерполяция не требует больших расчетов.

Параболическая интерполяция была разработана Оверхаузером. Оверхаузер строил кривую интерполяции, исходя из геометрических

соображений. Идея состоит в линейной интерполяции пересекающихся частей двух парабол. Параболы заданы четырьмя последовательными точками: первая - тремя первыми точками, вторая - тремя последними. Пересечение лежит между второй и третьей точками. Несмотря на то, что параболы - плоские кривые, их линейная интерполяция это кубическая пространственная кривая, как показано на рис. 18.

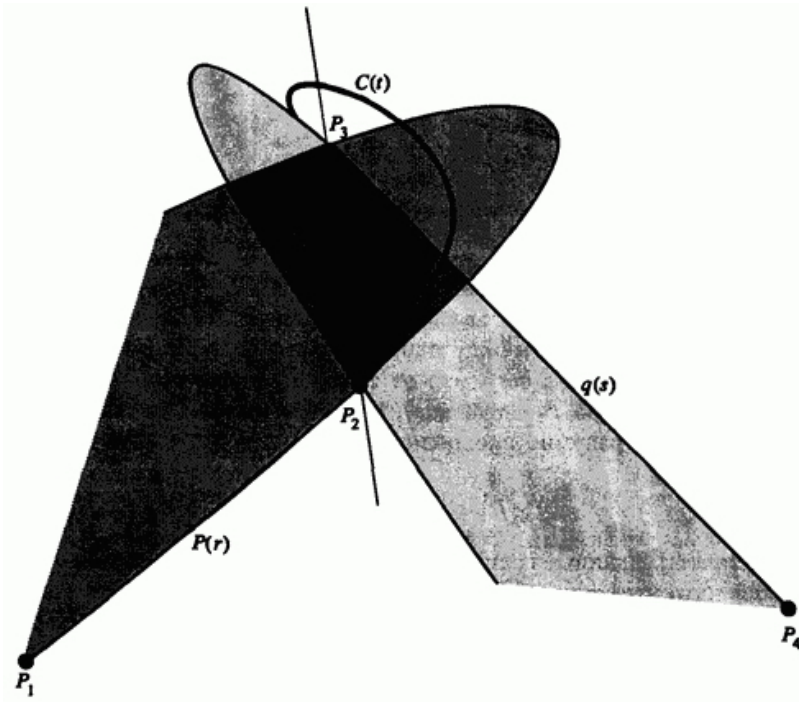


Рис. 18. Параболическая интерполяция.

В ряде работ рассматривается метод построения одного из семейств параболически интерполированных кривых с помощью матриц. Этот алгоритм требует меньше вычислений. Рассмотрим обобщенный вывод для всего семейства. Параболически интерполированная кривая имеет вид

$$C(t) = (1-t)p(r) + tq(s), \quad (41)$$

где r, s, t - параметры, $p(r), q(s)$ - параметрические параболы, проходящие через P_1, P_2, P_3 и P_2, P_3, P_4 , соответственно, как показано на рис. 19.

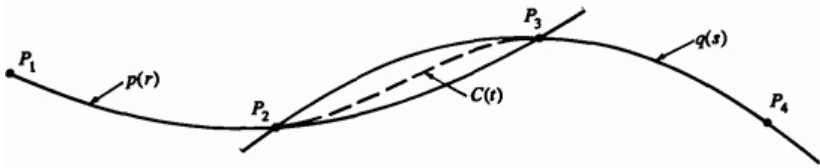


Рис. 19. Обозначение для параболической интерполяции.

Для простоты параболы на рис. 19 лежат в одной плоскости, но это не обязательно (рис. 18). Параметрическое представление $p(r)$ и $q(s)$ следующее:

$$p(r) = \begin{bmatrix} r^2 & r & 1 \end{bmatrix} [B], \quad (42)$$

$$q(s) = \begin{bmatrix} s^2 & s & 1 \end{bmatrix} [D], \quad (43)$$

где $[B]$ и $[D]$ - матрицы, представляющие положение вектор-точек P_1, P_2, P_3 и P_2, P_3, P_4 , соответственно. Результат интерполяции - кубическая кривая

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} [A][G] = [T][A][G], \quad (44)$$

Чтобы определить $[B]$ и $[D]$, а затем $[A]$ и $[G]$, необходимо установить связь между параметрами r, s, t . Из рис. 19, замечая, что r меняется от 0 до 1 на сегменте от P_1 до P_3 вдоль $p(r)$, s меняется от 0 до 1 на сегменте от P_2 до P_4 вдоль $q(s)$, и t меняется от 0 до 1 на сегменте от P_2 до P_3 вдоль $C(t)$, разумно предположить, что r и t , а также s и t связаны линейно. Отсюда

$$r = k_1 t + k_2, \quad s = k_3 t + t_4, \quad (45)$$

где k_i - константы, заданные граничными условиями в вектор-точках P_1, P_2, P_3 и P_4 . Предположим, что данные распределены равномерно или почти равномерно, и диапазон параметров нормализован, т.е. $0 \leq r, s, t \leq 1$. Тогда можно условиться, что

$$p(0) = P_1, \quad p(1/2) = P_2, \quad p(1) = P_3, \quad (46a)$$

$$q(0) = P_2, \quad q(1/2) = P_3, \quad q(1) = P_4, \quad (46b)$$

$$C(0) = P_2, \quad C(1) = P_3. \quad (46c)$$

Здесь основные предположения таковы: $p(r) = P_2$ для $r = 1/2$ и $q(s) = P_3$ для $s = 1/2$. В результате получаем единственный член семейства параболически интерполированных кривых, как будет показано ниже.

В предположениях уравнений (45)

$$@P_2 : r = 1/2, t = 0 \Rightarrow k_2 = 1/2$$

$$@P_3: r=1, t=1 \Rightarrow k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow k_1 = 1/2$$

$$@P_2: s=0, t=0 \Rightarrow k_4 = 0$$

$$@P_3: s=1/2, t=1 \Rightarrow k_3 = 1/2$$

Итак

$$r(t) = \frac{1}{2}(1+t), \quad s(t) = \frac{1}{2}t. \quad (47)$$

Вспомним уравнение (42) и используем уравнение (46а), чтобы выразить $[B]$ через P_1, P_2, P_3 ,

$$p(0) = P_1 = [0 \ 0 \ 1][B], \quad (48a)$$

$$p(1/2) = P_2 = [1/4 \ 1/2 \ 1][B], \quad (48b)$$

$$p(1) = P_3 = [1 \ 1 \ 1][B]. \quad (48c)$$

Запишем в виде одной матрицы

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [B] = [M][B]$$

Отсюда

$$[B] = [M]^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Аналогично через P_2, P_3, P_4 находится выражение $[D]$. Пользуясь уравнением (46b), получаем

$$q(0) = P_2 = [0 \ 0 \ 1][D], \quad (50a)$$

$$q(1/2) = P_3 = [1/4 \ 1/2 \ 1][D], \quad (50b)$$

$$q(1) = P_4 = [1 \ 1 \ 1][D]. \quad (50c)$$

Сравнение с уравнениями (48) сразу же дает

$$[D] = [M]^{-1} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Вспомним уравнение (41) и подставим уравнения (42) и (43):

$$C(t) = (1-t) \begin{bmatrix} r^2 & r & 1 \end{bmatrix} [B] + t \begin{bmatrix} s^2 & s & 1 \end{bmatrix} [D].$$

Используем уравнение (47), чтобы переписать это только в терминах параметра t ,

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(t^2 + t^2 - t - 1) & -\frac{1}{2}(t^2 - 1) & 1 - t \end{bmatrix} [B] + \begin{bmatrix} \frac{t^3}{4} & \frac{t^2}{2} & t \end{bmatrix} [D]$$

Подставив $[B]$ и $[D]$ из уравнений (49) и (51), получим

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2} + t^2 - \frac{t}{2} & t^3 - t^2 - t + 1 & -\frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}t^2 + t & -t^3 + 2t^2 & \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

Перепишем уравнение так, чтобы включить все четыре точки P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$C(t) = \begin{bmatrix} -\frac{t^3}{2} + t^2 - \frac{t}{2} & t^3 - t^2 - t + 1 & -\frac{t^3}{2} + \frac{t}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \\ + \begin{bmatrix} 0 & \frac{t^3}{2} - \frac{3}{2}t^2 + t & -t^3 + 2t^2 & \frac{t^3}{2} - \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

Наконец, перепишем результат в форме уравнения (44)

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} [A][G] = [T][A][G], \tag{44}$$

где

$$[A] = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

и

$$[G]^T = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4] \quad (53)$$

Заметим, что снова (уравнение (22)) результат имеет вид произведения матрицы интерполяционных функций и геометрической матрицы.

Интерполяционные функции $[F] = [T][A]$ показаны на рис. 20.

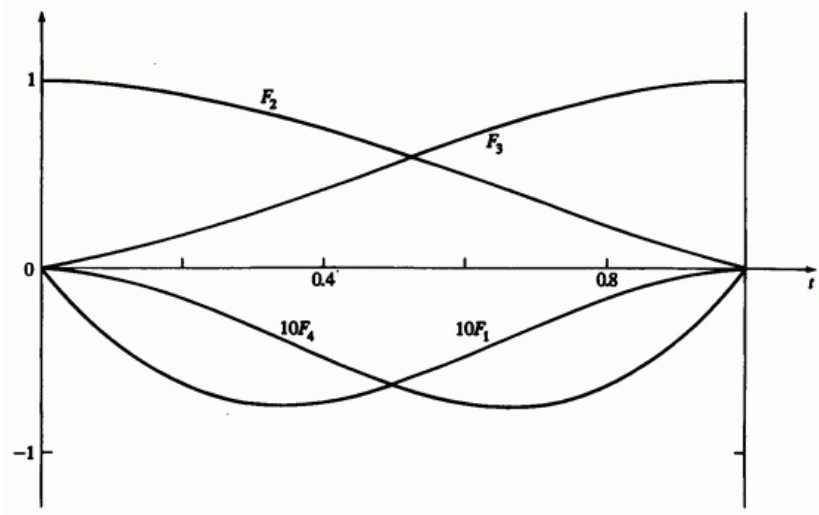


Рис. 20. Весовые функции для параболически интерполированных кривых в случае $\alpha = \beta = 0.5$.

Реализация алгоритма очень проста. Рассмотрим подробности на примере.

Пример 5. Параболическая интерполяция

Рассмотрим снова четыре вектор-точки $P_1[0 \ 0]$, $P_2[1 \ 1]$, $P_3[2 \ -1]$ и $P_4[3 \ 0]$ из предыдущих примеров 2 и 3 (см. рис. 21).

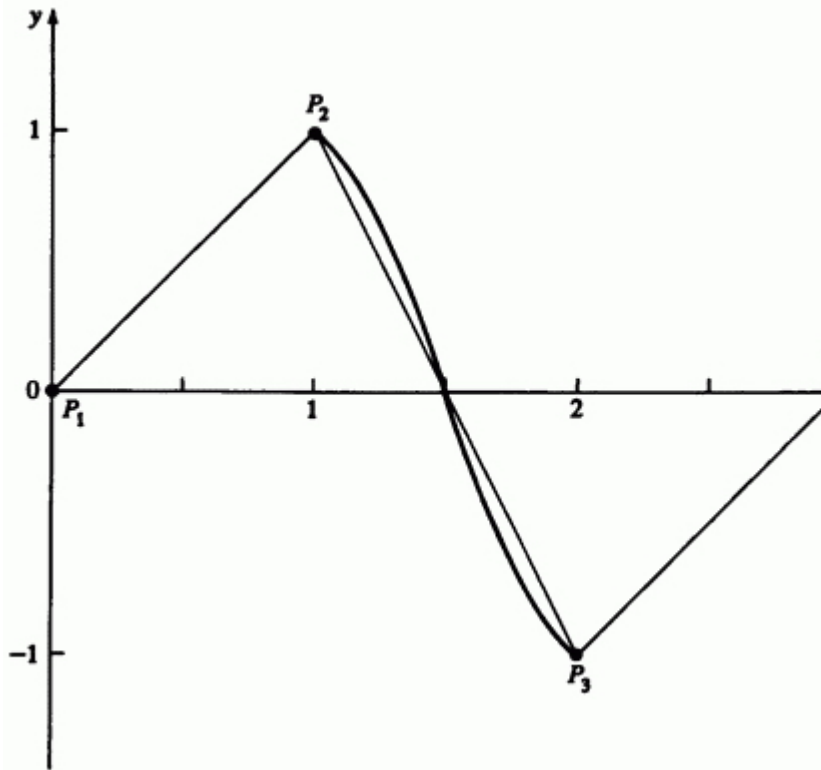


Рис. 21. Параболически интерполированная кривая для примера 5.

Найти параболическую интерполяцию между P_2 и P_3 . Вычислить промежуточные точки при $t = 1/3, 2/3$.

Из уравнений (44), (52) и (53) для $t = 1/3$ получаем

$$C\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Аналогично при $t = 2/3$ имеем $C(2/3) = [5/3 \quad -4/9]$. Полученная кривая изображена на рис. 21.

4.6. ОБОБЩЕННАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В примере параболической интерполяции в разд. 4.5 предполагается, что параметры r и s в точках P_2 и P_3 , соответственно, равны $1/2$. Если данные распределены неравномерно, кривая становится менее гладкой. Более общим предположением была бы нормализованная хордовая аппроксимация. Пусть

$$\alpha = \frac{\| [P_2] - [P_1] \|}{\| [P_3] - [P_2] \| + \| [P_2] - [P_1] \|}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (54)$$

и

$$\beta = \frac{[P_3] - [P_2]}{[P_4] - [P_3] + [P_3] - [P_2]}, \quad 0 < \beta < 1. \quad (55)$$

Тогда уравнения (46) принимает вид

$$p(0) = P_1, \quad p(\alpha) = P_2, \quad p(1) = P_3, \quad (56a)$$

$$q(0) = P_2, \quad q(\beta) = P_3, \quad q(1) = P_4, \quad (56b)$$

$$C(0) = P_2, \quad C(1) = P_3. \quad (56c)$$

В этих предположениях получаем линейные выражения $r(t)$ и $s(t)$ (см. (47))

$$r(t) = (1 - \alpha)t + \alpha, \quad s(t) = \beta t. \quad (57)$$

Из уравнений (42) и (56a)

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [B] = [M][B]$$

Отсюда

$$[B] = [M]^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{-1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{1}{1-\alpha} \\ \frac{-(1+\alpha)}{\alpha} & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{-\alpha}{1-\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Аналогично

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{-1}{\beta(1-\beta)} & \frac{1}{1-\beta} \\ \frac{-(1+\beta)}{\beta} & \frac{-1}{\beta(1-\beta)} & \frac{-\beta}{1-\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Вспомним уравнение (41) и подставим уравнения (58) и (59):

$$C(t) = (1-t) \left[\begin{matrix} \{(1-\alpha)t + \alpha\}^2 & (1-\alpha)t + \alpha & 1 \end{matrix} \right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{-1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{1}{1-\alpha} \\ \frac{-(1+\alpha)}{\alpha} & \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} & \frac{-\alpha}{1-\alpha} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ t \left[\begin{matrix} (\beta t)^2 & \beta t & 1 \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta} & \frac{-1}{\beta(1-\beta)} & \frac{1}{1-\beta} \\ \frac{-(1+\beta)}{\beta} & \frac{1}{\beta(1-\beta)} & \frac{-\beta}{1-\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}.$$

Так же, как в предыдущем разделе, это можно записать в матричном виде

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} [A][G] - [T][A][G], \quad (44)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{-(1-\alpha)^2}{\alpha} & \frac{(1-\alpha)+\alpha\beta}{\alpha} & \frac{-(1-\alpha)-\alpha\beta}{1-\beta} & \frac{\beta^2}{1-\beta} \\ \frac{2(1-\alpha)^2}{\alpha} & \frac{-2(1-\alpha)-\alpha\beta}{\alpha} & \frac{2(1-\alpha)-\beta(1-2\alpha)}{(1-\beta)} & \frac{-\beta^2}{1-\beta} \\ \frac{-(1-\alpha)^2}{\alpha} & \frac{(1-2\alpha)}{\alpha} & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

и опять

$$[G]^T = [F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4], \quad (53)$$

$$F_1(t) = \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} (-t^3 + 2t^2 - t), \quad (61a)$$

$$F_2(t) = \frac{[(1-\alpha)+\alpha\beta]}{\alpha} t^3 + \frac{[-2(1-\alpha)-\alpha\beta]}{\alpha} t^2 + \frac{(1-2\alpha)}{\alpha} t + 1, \quad (61b)$$

$$F_3(t) = \frac{[-(1-\alpha)-\alpha\beta]}{1-\beta} t^3 + \frac{[2(1-\alpha)-\beta(1-2\alpha)]}{\alpha} t^2 + \alpha t, \quad (61c)$$

$$F_4(t) = \frac{\beta^2}{1-\beta} (t^3 - t^2) \quad (61d)$$

На рис. 22 изображены интерполяционные функции $F_i(t)$ для частного случая $\beta = 1 - \alpha$, т. е. когда длина хорды от P_1 до P_2 равна длине от P_3 до P_4 : $\| [P_2 - P_1] \| = \| [P_4 - P_3] \|$.

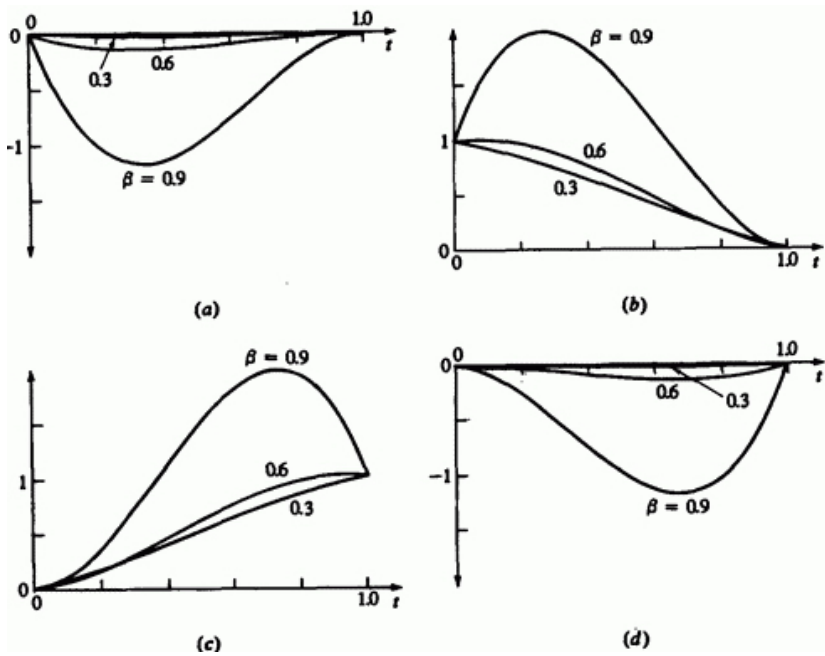


Рис. 22. Обобщенные параболические весовые функции, $\alpha = 1 - \beta$. (a) F_1 ; (b) F_2 ; (c) F_3 ; (d) F_4 .

Рассмотрим это на примере.

Пример 6. Обобщенная параболическая интерполяция

Снова рассмотрим данные из предыдущего примера (рис. 22). Найти параболическую интерполяцию между P_2 и P_3 в обобщенной формулировке. Вычислить промежуточные точки при $t = 1/3, 2/3$.

Найдем α и β из уравнений (54) и (55):

$$\begin{aligned}c_{21} &= \left| [P_2] - [P_1] \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{32} &= \left| [P_3] - [P_2] \right| = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_{43} &= \left| [P_4] - [P_3] \right| = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \\ &= \sqrt{(3-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Итак,

$$\alpha = \frac{c_{21}}{c_{32} + c_{21}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = 0.387,$$

$$\beta = \frac{c_{32}}{c_{43} + c_{32}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} = 0.613$$

Заметим, что $\beta = 1 - \alpha$.

Из уравнения (60)

$$[A] = \begin{bmatrix} -0.969 & 2.194 & -2.194 & 0.969 \\ 1.937 & -3.775 & 2.806 & -0.969 \\ -0.969 & 0.581 & 0.387 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и из уравнения (44)

$$C\left(\frac{1}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = [1.360 \quad 0.496]$$

Аналогично, при $t = 2/3$, $C(2/3) = [1.640 \quad -0.496]$. На рис. 23 изображена получившаяся кривая, а также кривые из примера 5.

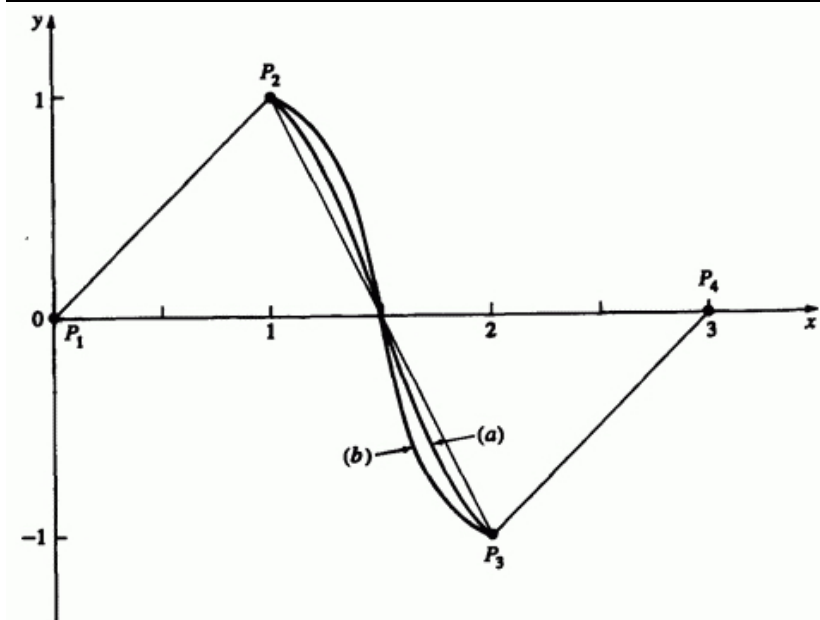


Рис. 23. Сравнение результатов параболической интерполяции. (а)

Заметен большой изгиб около заданных точек.

На рис. 24 показана локальная коррекция параболически интерполированных кривых.

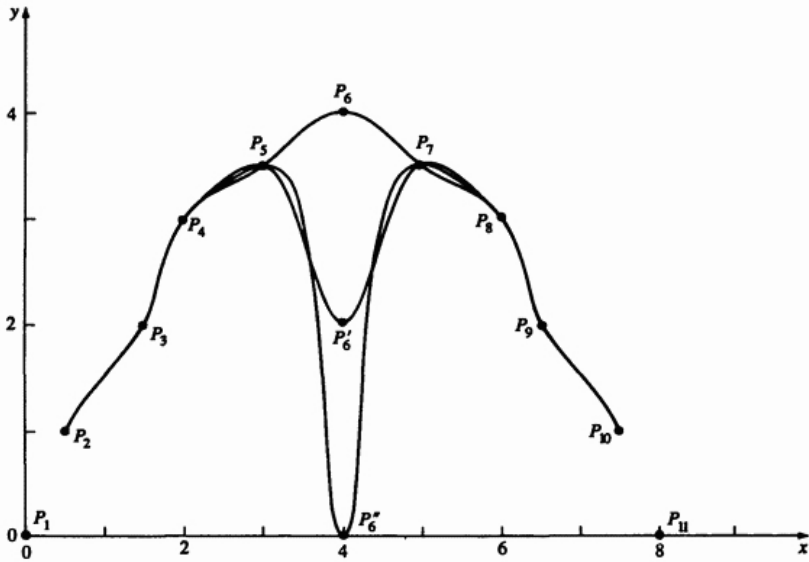


Рис. 24. Локальная коррекция параболически интерполированных кривых.

Здесь имеется 11 заданных точек, или радиус-векторов, и 9 параболических составных сегментов. Центральная точка располагается в трех положениях. Заметим, что влияние перемещения этой точки на форму кривой ограничивается ± 2 -я сегментами.

Пример 5, $\alpha = \beta = 1/2$; (b) Пример 6, $\alpha = 1 - \beta$.

4.7. КРИВЫЕ БЕЗЪЕ

До сих пор мы обсуждали, как провести кривую через заданное множество точек. Рассмотренные методы во многих случаях дают прекрасные результаты и особенно удобны при описании формы, основа которой получена с помощью экспериментов или математических расчетов. Это, например, крыло самолета, составные части мотора, механические и структурные детали. Существует, однако, и другой класс задач, когда решение зависит как от функциональных, так и от эстетических требований, например дизайн поверхности машины, фюзеляжа самолета, формы корабля, мебели или

посуды. Кроме количественных критериев здесь требуется учет практического опыта, и часто необходимо интерактивное вмешательство разработчика.

Рассмотренные выше методы, в частности **кубические сплайны, неудобны для интерактивной работы.** Направление и величина касательных не дают необходимого интуитивного представления о кривой, так как неочевидна связь между набором чисел и формой соответствующей кривой.

Пьер Безье предложил другой метод создания кривых и поверхностей любой формы. Безье вывел математическую основу своего метода из геометрических соображений, но в ряде работа показано, что его результат эквивалентен базису Бернштейна или функции полиномиальной аппроксимации. Кривая Безье задается многоугольником, как показано на рис. 25.

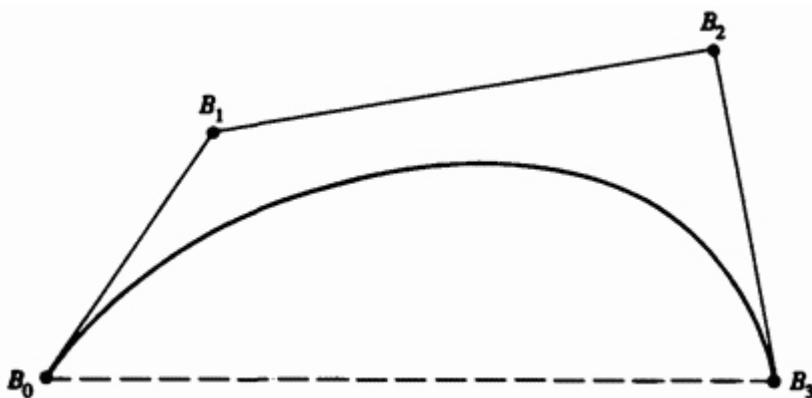


Рис. 25. Кривая Безье и определяющие ее точки.

Так как базис Безье является бернштейновским, сразу же известны некоторые свойства кривых Безье. Например:

Функции базиса вещественны.

Степень многочлена, определяющего участок кривой, на единицу меньше количества точек соответствующего многоугольника.

Основа формы кривой повторяет очертания многоугольника.

Первая и последняя точки кривой совпадают с соответствующими точками определяющего многоугольника.

Векторы касательных в концах кривой по направлению совпадают с первой и последней сторонами многоугольника.

Кривая лежит внутри выпуклой оболочки многоугольника, т. е. внутри самого большого многоугольника, построенного по заданным точкам. На рис. 25 выпуклая оболочка обозначена штриховой и тонкой линиями.

Кривая обладает свойством уменьшения вариации. Это означает, что кривая пересекает любую прямую не чаще, чем определяющий многоугольник. Кривая инвариантна относительно аффинных преобразований.

На рис. 26 показано несколько четырехточечных многоугольников Безье и соответствующих кривых.

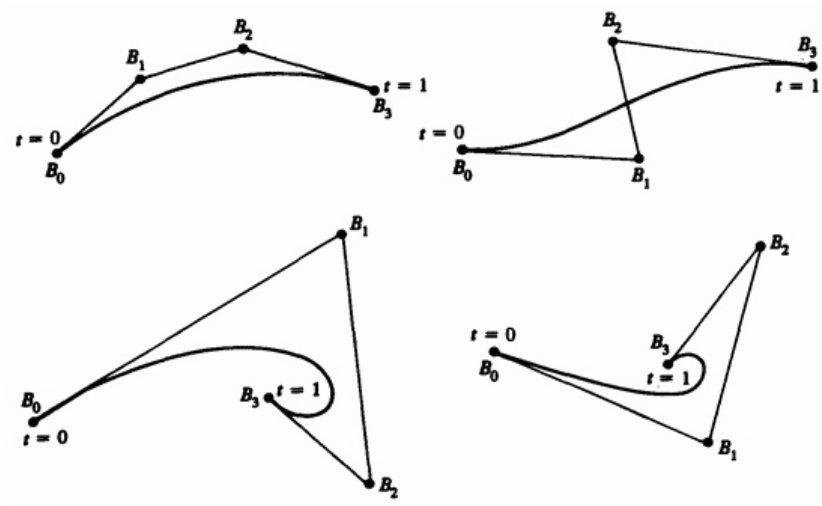


Рис. 26. Многоугольники Безье для кубических кривых.

На основе перечисленных выше свойств можно легко научиться предсказывать форму кривой по виду многоугольника.

Математическое параметрическое представление кривой Безье имеет вид

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (62)$$

где базис Безье или Бернштейна, или функция аппроксимации

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \quad (63)$$

с

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (64)$$

$J_{n,i}(t)$ - это i -я функция базиса Бернштейна порядка n .

Здесь n - порядок определяющей функции базиса Бернштейна - и, следовательно, сегмента полиномиальной кривой, на единицу меньше количества точек определяющего многоугольника. Как показано на рис. 25, вершины многоугольника Безье нумеруются от 0 до n .

Поэтому $\binom{0}{0} \equiv 1$ и $0! \equiv 1$.

На рис. 27 изображены аппроксимирующие функции для разных значений n .

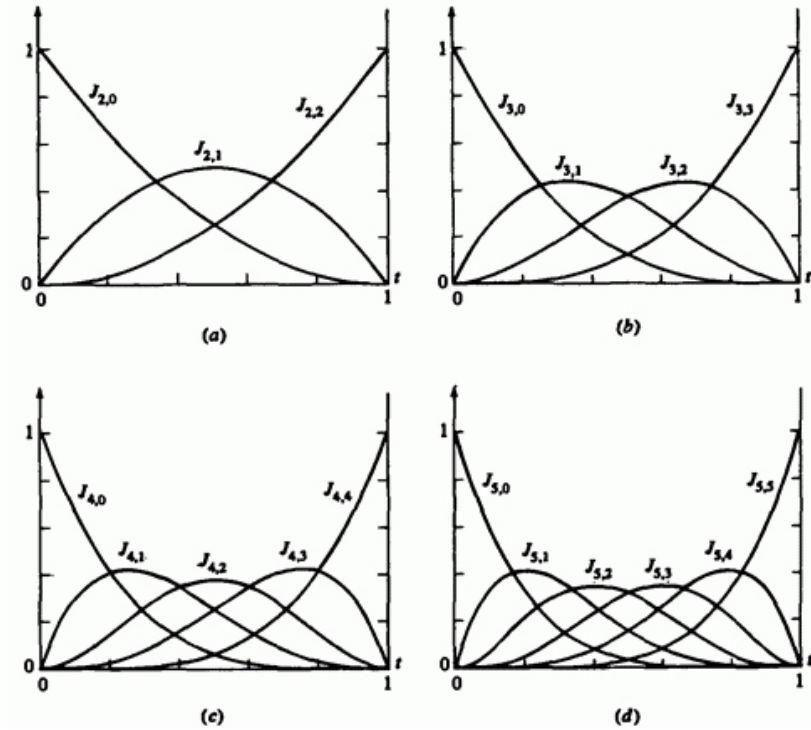


Рис. 27. Весовые функции Бэзе/Бернштейна. (а) Многоугольник из трех точек, $n = 2$; (б) из четырех точек, $n = 3$; (с) из пяти точек, $n = 4$; (д) из шести точек, $n = 5$.

Заметим, что функции симметричны. Каждая функция имеет порядок n , например все четыре функции на рис. 27б для $n = 3$ кубические.

Максимум каждой функции достигается при $t = i/n$ и равен (14)

$$J_{n,i}\left(\frac{i}{n}\right) = \binom{n}{i} \frac{i^i (n-i)^{n-i}}{n^n}. \quad (65)$$

Например, для кубической кривой $n = 3$. Максимум $J_{3,1}$ и $J_{3,2}$ достигается в $1/3$ и $2/3$, соответственно, и имеет значения

$$J_{3,1}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \quad \text{и} \quad J_{3,1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}.$$

Рисунок 27b иллюстрирует этот пример.

Рассмотрим уравнения (62) и (64) для первой точки на кривой, т.е. при $t = 0$

$$J_{n,0}(0) = \frac{n!(1)(1-0)^{n-0}}{n!} = 1, \quad i = 0,$$

и

$$J_{n,i}(0) = \frac{n!(0)^i(1-0)^{n-i}}{i!(n-i)!} = 0, \quad i \neq 0.$$

Итак,

$$P(0) = B_0 J_{n,0}(0) = B_0,$$

первая точка кривой совпадает с первой точкой многоугольника.

Аналогично, для последней точки кривой, т.е. при $t = 1$

$$J_{n,n}(1) = \frac{n!(1)^n(0)^{n-n}}{n!(1)} = 1, \quad i = n,$$

$$J_{n,1}(1) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} = 0, \quad i \neq n.$$

Итак,

$$P(1) = B_n J_{n,n}(1) = B_n$$

и последняя точка на кривой Безье совпадает с последней точкой определяющего многоугольника.

Далее, можно показать, что для любого значения параметра t сумма базисных функций равна 1, т.е.

$$\sum_{i=0}^n J_{n,i}(t) = 1 \tag{66}$$

Рассмотрим метод построения Безье на примере.

Пример 7. Кривая Безье

Пусть заданы вершины многоугольника Безье $B_0[1 \ 1]$, $B_1[2 \ 3]$, $B_2[4 \ 3]$ и $B_3[3 \ 1]$. Найти семь точек, лежащих на кривой Безье. Рассмотрим уравнения (62) - (64):

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t),$$

где

$$J_{n,i}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

и

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

В нашем случае $n = 3$, так как имеется четыре вершины. Отсюда

$$\binom{n}{i} = \binom{3}{i} = \frac{6}{i!(3-i)!}$$

и

$$J_{3,0}(t) = (1)t^0(1-t)^3 = (1-t)^3,$$

$$J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2,$$

$$J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t),$$

$$J_{3,3}(t) = t^3.$$

Итак,

$$\begin{aligned} P(t) &= B_0 J_{3,0} + B_1 J_{3,1} + B_2 J_{3,2} - B_3 J_{3,3} = \\ &= (1-t)^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^2 P_3. \end{aligned}$$

Значения $J_{n,i}$ для различных значений t приведены в табл. 4.

Таблица 4. Коэффициенты для кривой Безье

t	$J_{3,0}$	$J_{3,1}$	$J_{3,2}$	$J_{3,3}$
0	1	0	0	0
0.15	0.614	0.325	0.058	0.003
0.35	0.275	0.444	0.239	0.042
0.5	0.125	0.375	0.375	0.125
0.65	0.042	0.239	0.444	0.275
0.85	0.003	0.058	0.325	0.614
1	0	0	0	1

Точки на кривой:

$$P(0) = B_0 = [1 \quad 1],$$

$$P(0.15) = 0.614B_0 + 0.325B_1 + 0.058B_2 + 0.003B_3 = [1.5 \quad 1.765],$$

$$P(0.35) = 0.275B_0 + 0.444B_1 + 0.239B_2 + 0.042B_3 = [2.248 \quad 2.367],$$

$$P(0.5) = 0.125B_0 + 0.375B_1 + 0.375B_2 + 0.125B_3 = [2.75 \quad 2.5],$$

$$P(0.65) = 0.042B_0 + 0.239B_1 + 0.444B_2 + 0.275B_3 = [3.122 \quad 2.367],$$

$$P(0.85) = 0.003B_0 + 0.058B_1 + 0.325B_2 + 0.614B_3 = [3.248 \quad 1.765],$$

$$P(1) = B_3 = [3 \quad 1].$$

Эти точки показаны на определяющем многоугольнике на рис. 28.

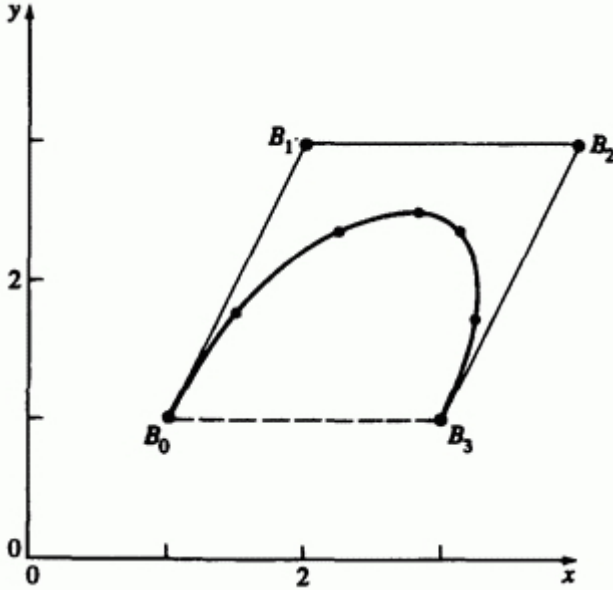


Рис. 28. Сегмент кривой Безье, пример 7.

Уравнение кривой Безье можно записать в матричном виде, так же как уравнения для кубических сплайнов и параболической интерполяции (см. уравнения 27 и 44):

$$P(t) = [T][N][G] = [F][G]. \quad (67)$$

Здесь $[F] = [J_{n,0} \quad J_{n,1} \quad \dots \quad J_{n,n}]$ и $[G]^T = [B_0 \quad B_1 \quad \dots \quad B_n]$

Особенный интерес представляют матричные формы для малых значений n . Для многоугольника из четырех точек ($n=3$) кривая Безье имеет вид

$$P(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 & 3t(1-t)^2 & 3t^2(1-t) & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}.$$

Группируя коэффициенты, получим

$$P(t) = [T][N][G] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Аналогично, кривая Безье четвертого порядка ($n=4$), заданная многоугольником из пяти точек:

$$P(t) = \begin{bmatrix} t_4 & t_3 & t_2 & t_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & 12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}. \quad (69)$$

В ряде работ приводятся обобщенное представление:

$$P(t) = [T][N][G],$$

где

$$[T] = \begin{bmatrix} t^n & t^{n-1} & \dots & t & 1 \end{bmatrix},$$

$$[N] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} \binom{n}{n} (-1)^n & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-1} (-1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n} \binom{n-n}{n-n} (-1)^0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} & \binom{n}{1} \binom{n-1}{n-2} (-1)^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{0} \binom{n}{1} (-1)^1 & \binom{n}{1} \binom{n-1}{0} (-1)^0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{0} \binom{n}{0} (-1)^0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Матрица $[G]^T$ - это опять $[B_0 \ B_1 \ \dots \ B_n]$. Отдельные члены матрицы $[N]$ таковы:

$$\left(N_{i+1, j+1} \right)_{i, j=0}^n = \begin{cases} \binom{n}{j} \binom{n-j}{n-i-j} (-1)^{n-i-j}, & 0 \leq i+j \leq n, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Уравнение (70) можно записать в более удобном виде

$$[N] = [C][D], \quad (71)$$

где

$$[C] = \begin{bmatrix} \binom{n}{n}(-1)^n & \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-1}(-1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{n}\binom{n-n}{n-n}(-1)^0 \\ \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} & \binom{n}{1}\binom{n-1}{n-2}(-1)^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{1}(-1)^1 & \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}(-1)^0 & \dots & 0 \\ \binom{n}{0}(-1)^0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \binom{n}{0} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \binom{n}{0} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \binom{n}{n} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (70) или (71) удобнее для расчета при больших значениях n . Заметим, что для всех n матрица $[N]$ симметрична относительно главной диагонали и правый нижний угол состоит из нулей.

Для каждой отдельной кривой Безье необязательно знать касательные векторы в ее концах, но если необходимо соблюдать непрерывность кривизны и наклона в точках соединения кривых, рассчитывать нормали к поверхности для освещения, вычислять локальную кривизну, то требуется знать как первую, так и вторую производную кривой Безье.

Из уравнения (62) первая производная кривой Безье имеет вид:

$$F'(t) = \sum_{i=0}^n B_i J'_{n,i}(t) \quad (72)$$

Вторая производная такова:

$$F''(t) = \sum_{i=0}^n B_i J''_{n,i}(t) \quad (73)$$

Формально дифференцируя уравнение (63), получаем производные базисных функций

$$\begin{aligned} J'_{n,i}(t) &= \binom{n}{i} \left\{ i t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) t^i (1-t)^{n-i-1} \right\} = \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \left\{ \frac{i}{t} - \frac{(n-i)}{(1-t)} \right\} = \\ &= \frac{(i-nt)}{t(1-t)} J_{n,i}(t) \end{aligned} \quad (74)$$

Аналогично, вторые производные имеют вид:

$$J''_{n,i}(t) = \left\{ \frac{(i-nt)^2 - nt^2 - i(1-2t)}{t^2(1-t)^2} \right\} J_{n,i}(t) \quad (75)$$

В начале и конце кривой Безье, т.е. при $t=0$ и $t=1$, численный расчет уравнений (74) и (75) представляет затруднения.

Другой способ вычисления r -й производной при $t=0$:

$$F^r(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} B_i \quad (76)$$

и при $t = 1$:

$$F^r(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} B_{n-i} \quad (77)$$

Отсюда первые производные в концах будут

$$F'(0) = n(B_1 - B_0) \quad (78)$$

и

$$F'(1) = n(B_n - B_{n-1}) \quad (79)$$

Это показывает, что касательные к кривой Безье в первой и последней точках параллельны соответствующим сторонам многоугольника. Аналогично, вторые производные в концах таковы:

$$F''(0) = n(n-1)(B_0 - 2B_1 + B_2) \quad (80a)$$

и

$$F''(1) = n(n-1)(B_n - 2B_{n-1} + B_{n-2}) \quad (80b)$$

Вторые производные в концах зависят от двух ближайших сторон, т. е. от трех ближайших вершин. В общем случае, r -я производная в начальной и конечной точках зависит от этих точек и r ближайших вершин многоугольника.

Подробнее рассмотрим это на примере.

Пример 8. Производные кривых Безье

Рассмотрим четырехточечный многоугольник Безье, например, как на рис. 26 и 28. Вспомним представление кривой

$$P(t) = B_0 J_{3,0}(t) + B_1 J_{3,1}(t) + B_2 J_{3,2}(t) + B_3 J_{3,3}(t).$$

Отсюда первая производная

$$P'(t) = B_0 J'_{3,0}(t) + B_1 J'_{3,1}(t) + B_2 J'_{3,2}(t) + B_3 J'_{3,3}(t).$$

Вспомним пример 7 и непосредственно продифференцируем базисные функции

$$J_{3,0}(t) = (1-t)^3 \Rightarrow J'_{3,0}(t) = -3(1-t)^2,$$

$$J_{3,1}(t) = 3t(1-t)^2 \Rightarrow J'_{3,1}(t) = 3(1-t)^2 - 6t(1-t),$$

$$J_{3,2}(t) = 3t^2(1-t) \Rightarrow J'_{3,2}(t) = 6t(1-t) - 3t^2,$$

$$J_{3,3}(t) = t^3 \Rightarrow J'_{3,3}(t) = 3t^2.$$

Подставим $t = 0$:

$$J'_{3,3}(0) = -3, \quad J'_{3,1}(0) = 3, \quad J'_{3,2}(0) = 0, \quad J'_{3,3}(0) = 0.$$

Подстановка дает

$$P'(0) = -3P_0 + 3P_1 = 3(P_1 - P_0).$$

Поэтому направление касательной в начале кривой совпадает с первой стороной многоугольника (см. рис. 28).

В конце кривой $t = 1$ и

$$\begin{aligned} J'_{3,0}(1) &= 0, & J'_{3,1}(1) &= 0, & J'_{3,2}(1) &= -3, \\ J'_{3,3}(1) &= 3. \end{aligned}$$

Аналогично, подстановка дает

$$P'(1) = -3P_2 + 3P_3 = 3(P_3 - P_2)$$

и направление касательного вектора в конце кривой совпадает с последней стороной многоугольника.

Чтобы вычислить производные вдоль кривой, воспользуемся функциями базиса и уравнениями (74) и (75):

$$J'_{3,0}(t) = \frac{(0-3t)}{t(1-t)}(1-t)^3 = -3(1-t)^2,$$

$$J'_{3,1}(t) = \frac{(1-3t)}{t(1-t)}(3t)(1-t)^2 = 3(1-3t)(1-t) = 3(1-4t+3t^2)$$

$$J'_{3,2}(t) = \frac{(2-3t)}{t(1-t)}(3t^2)(1-t) = 3t(2-3t)$$

$$J'_{3,3}(t) = \frac{3(1-t)}{t(1-t)}t^3 = 3t^2$$

Результаты легко вычисляются как для $t = 0$, так и для $t = 1$. Подставляя в уравнение (72), получаем первую производную в любой точке кривой. Например, при $t = 1/2$ имеем

$$P'\left(\frac{1}{2}\right) = -3\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 B_0 + 3\left(1 - \frac{3}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) B_1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(2 - \frac{3}{2}\right) B_2 +$$

$$= -\frac{3}{4} B_0 - \frac{3}{4} B_1 + \frac{3}{4} B_2 + \frac{3}{4} B_3 = -\frac{3}{4} (B_0 + B_1 - B_2 - B_3)$$

Результат для точек B_0, B_1, B_2, B_3 из примера 7 изображен на рис. 29.

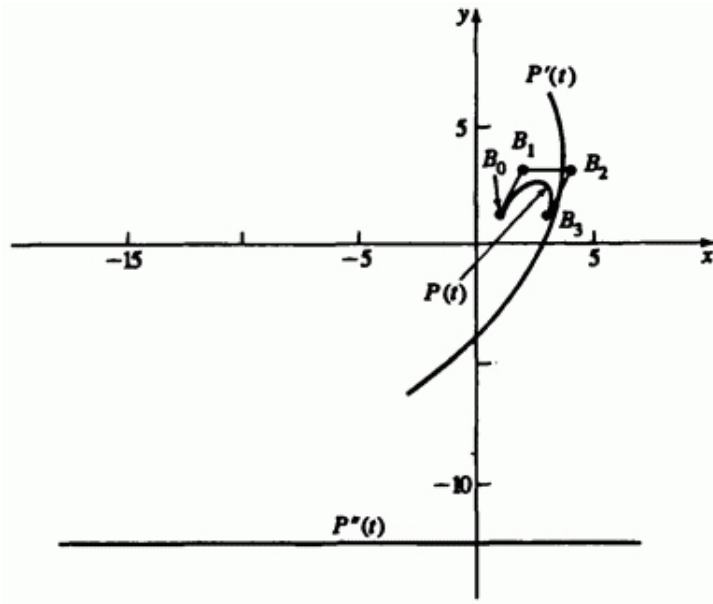


Рис. 29. Кривая Безье и ее производные: $P(t)$; $P'(t)$; $P''(t)$.

Аналогично, вторые производные имеют вид:

$$J''_{3,0}(t) = \frac{\{(-3t)^2 - 3t^2\}}{t^2(1-t)^2} (1-t)^3 = 6(1-t)$$

$$J''_{3,1}(t) = \frac{\{(1-3t)^2 - 3t^2 - (1-2t)\}}{t^2(1-t)^2} (3t)(1-t)^2 = -6(2-3t)$$

$$J''_{3,2}(t) = \frac{\{(2-3t)^2 - 3t^2 - 2(1-2t)\}}{t^2(1-t)^2} (3t^2)(1-t) = 6(1-3t)$$

$$J''_{3,3}(t) = \frac{\{(3-3t)^2 - 3t^2 - 3(1-2t)\}}{t^2(1-t)^2} t^3 = 6t$$

Уравнение (73) при $t = 1/2$ дает

$$\begin{aligned} P''\left(\frac{1}{2}\right) &= 6\left(1 - \frac{1}{2}\right)B_0 - 6\left(2 - \frac{3}{2}\right)B_1 + 6\left(1 - \frac{3}{2}\right)B_2 + 3B_3 = \\ &= 3B_0 - 3B_1 - 3B_2 + 3B_3 = 3(B_0 - B_1 - B_2 + B_3) \end{aligned}$$

Иллюстрация также приведена на рис. 29.

Заметим, что вектор из начала координат в любую точку на каждой из кривых представляет соответственно направление и величину радиуса-вектора и приближительную кривизну в этой точке на кривой.

Условие непрерывности соседних кривых Безье формулируется очень просто. Пусть кривая Безье $P(t)$ степени n задана вершинами B_i , а соседняя кривая Безье $Q(s)$ степени m - вершинами C_i . Тогда непрерывность первой производной в точке соединения выражается соотношением

$$P'(1) = gQ'(0),$$

где g - скаляр.

Пользуясь уравнениями (78) и (79), получим

$$C_1 - C_0 = \frac{n}{m}(B_n - B_{n-1})$$

Из непрерывности кривой следует, что $C_0 = B_n$ и

$$C_1 = \frac{n}{m}(B_n - B_{n-1}) + B_n$$

Отсюда направления касательных на стыке совпадают, если три вершины B_{n-1} , $B_n = C_0$, C_1 коллинеарны, т.е. B_n должна лежать на линии между B_{n-1} и C_1 .

Если совпадают еще и величины касательных векторов, то $B_n = C_0$ является серединой отрезка от B_{n-1} до C_1 :

$$C_1 - C_0 = B_n - B_{n-1} = C_0 - B_{n-1}$$

или

$$C_1 + B_{n-1} = 2C_0 = 2B_n.$$

На рис. 30 приведена иллюстрация для $n = m = 3$, т. е. для двух кубических кривых Безье.

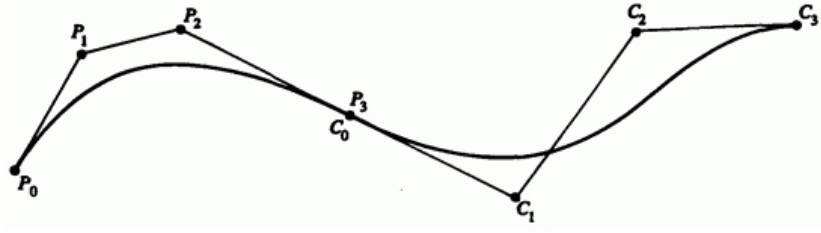


Рис. 30. Непрерывность первой производной для кубических кривых Безье.

Условие непрерывности вторых производных между соседними кривыми:

$$m(m-1)(C_0 - 2C_1 + C_2) = n(n-1)(B_{n-2} - 2B_{n-1} + B_n).$$

Из условий C^0 и C^1 непрерывности в точке соединения получаем положение третьей определяющей вершины второго многоугольника, выраженное через три последние вершины первого многоугольника, а именно

$$C_2 = \frac{n(n-1)}{m(m-1)} B_{n-2} - 2 \left\{ \frac{n(n-1)}{m(m-1)} + \frac{n}{m} \right\} B_{n-1} + \left\{ 1 + 2 \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m(m-1)} \right\} B_n$$

Это означает, что вершины B_{n-2} , B_{n-1} , $B_n = C_0$, C_1 , C_2 должны либо составлять выпуклый многоугольник, либо лежать на одной прямой, чтобы сохранить C^2 непрерывность на стыке.

Для кубических кривых Безье ($n = m = 3$) это условие имеет вид

$$C_2 = B_{n-1} - 4(B_{n-1} - B_n).$$

Несколько карандашных набросков на бумаге покажут, что данное требование существенно ограничивает множество кривых; поэтому на практике для соблюдения непрерывности вторых производных используются полиномиальные кривые более высокого порядка. На рис. 31 приведен пример непрерывности вторых производных для двух пятиточечных кривых Безье.

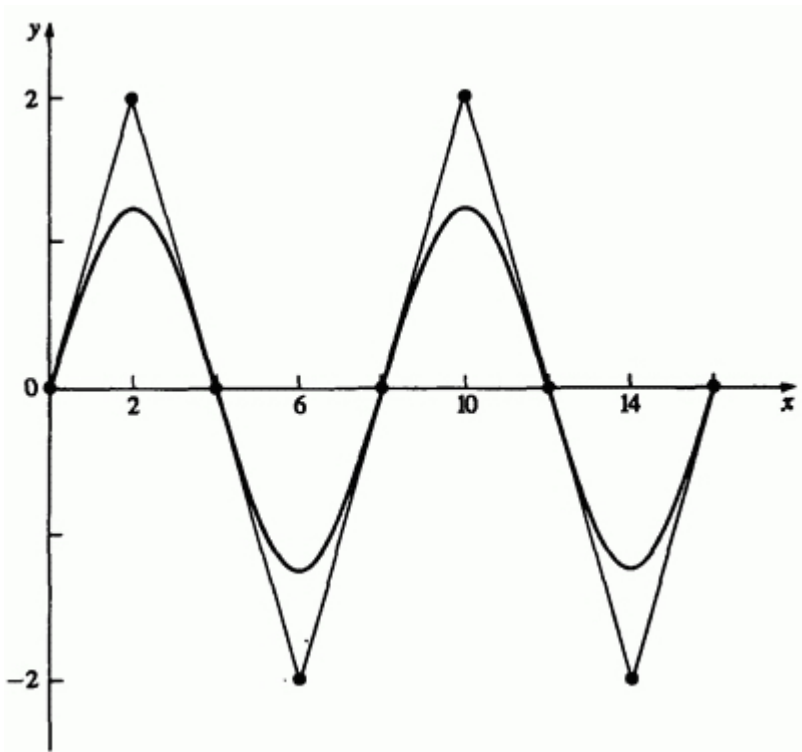


Рис. 31. Непрерывность второй производной для кривых Безье четвертой степени.

Если необходима более гибкая кривая Безье, увеличивается количество определяющих точек и степень полинома. Для каждой точки на кривой Безье с n определяющими вершинами многоугольника B_0, \dots, B_n та же самая точка на новой кривой Безье с $n+1$ определяющими вершинами B_0^*, \dots, B_{n+1}^* задается в виде

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^* J_{n+1,i}(t), \quad (81)$$

где

$$B_0^* = B_0,$$

$$B_i^0 = \alpha_i B_{i-1} + (1 - \alpha_i) B_i, \quad \alpha_i = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$B_{n+1}^* = B_n.$$

Здесь можно с успехом применить методику из ряда работ. В предельном случае многоугольник сходится к кривой. Дополнительную гибкость кривой можно также получить разбиением кривой Безье на две новых таким образом, чтобы они вместе совпадали с исходной кривой. В работах Барского было показано, что любая кривая Безье может быть разбита с использованием произвольного параметра в диапазоне $0 \leq t \leq 1$. Простейший случай - это средняя точка, т.е. $t = 1/2$ (см. [18]). При разбиении средней точкой получаются два специальных вида кубических кривых Безье.

Кубическая кривая Безье задается в виде

$$P(t) = (1-t)^3 B_0 + 3t(1-t)^2 B_1 + 3t^2(1-t) B_2 + t^3 B_3, \\ 0 \leq t \leq 1,$$

с определяющими вершинами B_0, B_1, B_2, B_3 . Тогда многоугольник C_0, C_1, C_2, C_3 определяет кривую Безье $Q(u), 0 \leq u \leq 1$, соответствующую первой половине исходной кривой, а именно $P(t), 0 \leq t \leq 1/2$, как и требовалось. Подобным образом, многоугольник D_0, D_1, D_2, D_3 определяет кривую Безье $R(v), 0 \leq v \leq 1$, соответствующую второй половине исходной кривой, т.е. $P(t), 1/2 \leq t \leq 1$, как и требовалось. Новые определяющие вершины многоугольника C_i и D_i получаются путем приравнивания радиус-векторов и касательных векторов при $u = 0, t = 0; u = 1, t = 1/2$ и $v = 0, t = 1/2; v = 1, t = 1$. Из соотношений (62) и (72) получаем

$$C_0 = B_0,$$

$$3(C_1 - C_0) = \frac{3}{2}(B_1 - B_0),$$

$$3(C_3 - C_2) = \frac{3}{8}(B_3 + B_2 - B_1 - B_0),$$

$$C_3 = \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0).$$

Решение этих уравнений дает

$$C_0 = B_0,$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_0),$$

$$C_2 = \frac{1}{4}(B_2 + 2B_1 + B_0),$$

$$C_3 = \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0).$$

Аналогично,

$$D_0 = \frac{1}{8}(B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0),$$

$$D_1 = \frac{1}{4}(B_3 + 2B_2 + B_1),$$

$$D_2 = \frac{1}{2}(B_3 + B_2),$$

$$D_3 = B_3.$$

Эти результаты обобщаются до

$$C_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \frac{B_j}{2^j}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (82a)$$

$$D_i = \sum_{j=1}^n \binom{n-i}{n-j} \frac{B_j}{2^{n-i}}, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (82b)$$

Дальнейшее применение определяющих многоугольников с помощью кривой Безье оставляем для самостоятельной работы.

4.8. В-СПЛАЙНЫ

С математической точки зрения кривая, заданная вершинами многоугольника, зависит от интерполяции или аппроксимации, устанавливающей связь кривой и многоугольника. Здесь основой является выбор базисных функций. Как было отмечено ранее, базис Бернштейна порождает кривые Безье вида (62), но он обладает двумя свойствами, которые ограничивают гибкость кривых. Во-первых, количество вершин многоугольника жестко задает порядок многочлена. Например, кубическая кривая должна быть задана четырьмя вершинами и тремя отрезками. Многоугольник из шести точек всегда порождает кривую пятого порядка. Единственный способ понизить степень кривой - это сократить количество вершин, а повысить степень кривой - увеличить их число.

Второе ограничение следует из глобальной природы базиса Бернштейна. Это означает, что величина аппроксимирующих функций $J_{n,i}(t)$ из уравнения (63) ненулевая для всех значений параметра на кривой. Любая точка на кривой Безье зависит от всех определяющих вершин, поэтому изменение какой-либо одной вершины оказывает влияние на всю кривую. Локальные воздействия на кривую невозможны.

Например, так как наклон концов кривой Безье задан соответствующими сторонами многоугольника, можно передвинуть среднюю вершину пятиточечного многоугольника, не меняя направления на концах. Однако из-за глобальности базиса Бернштейна меняется форма всей кривой. Отсутствие локальной коррекции может оказаться решающим в некоторых прикладных задачах.

Существует неглобальный базис, называемый базисом В-сплайна, включающий базис Бернштейна как частный случай. В-сплайны неглобальны, так как с каждой вершиной B_i связана своя базисная функция. Поэтому влияние каждой вершины на кривую проявляется только при тех значениях параметра, где соответствующая базисная функция не равна нулю. Базис В-сплайна также позволяет менять порядок базисных функций и, следовательно, всей кривой без изменения количества вершин. Теория В-сплайнов была предложена в ряде работ. Рекурсивное определение для численного решения было выведено независимо Коксом и де Буром. Гордон и Ризенфельд определяли кривые через базис В-сплайна.

Пусть $P(t)$ определяет кривую как функцию от параметра t , тогда В-сплайн имеет вид

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t), \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 2 \leq k \leq n+1, \quad (83)$$

где B_i есть $n+1$ вершина многоугольника, а $N_{i,k}$ - нормализованные функции базиса В-сплайна.

Для i -й нормализованной функции базиса порядка k (степени $k-1$) функции базиса $N_{i,k}(t)$ определяются рекурсивными формулами Кокса-де Бура:

$$N_{i,k}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } x_i \leq t < x_{i+1} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (84a)$$

и

$$N_{i,k}(t) = \frac{(t - x_i) N_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}. \quad (84b)$$

Величины x_i - это элементы узлового вектора, удовлетворяющие отношению $x_i \leq x_{i+1}$. Параметр t изменяется от t_{\min} до t_{\max} вдоль кривой $P(t)$. Считается, что $0/0 = 0$.

Формально В-сплайн определяется как полиномиальный сплайн порядка k (степени $k-1$), так как он удовлетворяет следующим условиям:

Функция $P(t)$ является полиномом степени $k-1$ на каждом интервале $x_i \leq t < x_{i+1}$.

$P(t)$ и ее производные порядка $1, 2, \dots, k-2$ непрерывны вдоль всей кривой.

Так, например, В-сплайн четвертого порядка - это кусочная кубическая кривая.

Из того что В-сплайн задается базисом В-сплайна, сразу следует еще несколько его свойств:

Сумма базисных функций В-сплайна для любого значения параметра t

$$\sum_{i=1}^{n+1} N_{i,k}(t) \equiv 1 \tag{85}$$

Каждая базисная функция положительна или равна нулю для всех значений параметра, т. е. $N_{i,k} \geq 0$.

Кроме $k=1$, все базисные функции имеют ровно один максимум.

Максимальный порядок кривой равен количеству вершин определяющего многоугольника.

Кривая обладает свойством уменьшения вариации. Кривая пересекает любую прямую не чаще, чем ее определяющий многоугольник.

Общая форма кривой повторяет форму определяющего многоугольника.

Чтобы применить к кривой любое аффинное преобразование, необходимо применить его к вершинам определяющего многоугольника.

Кривая лежит внутри выпуклой оболочки определяющего многоугольника.

Последнее свойство В-сплайна сильнее, чем у кривых Безье. У В-сплайна порядка k (степени $k-1$) точки кривой лежат внутри выпуклой оболочки k соседних точек. Таким образом, все точки на В-сплайне должны лежать внутри объединения всех выпуклых оболочек k последовательных вершин. На рис. 32 приводится иллюстрация для различных значений k , причем выпуклые оболочки выделены серым цветом.

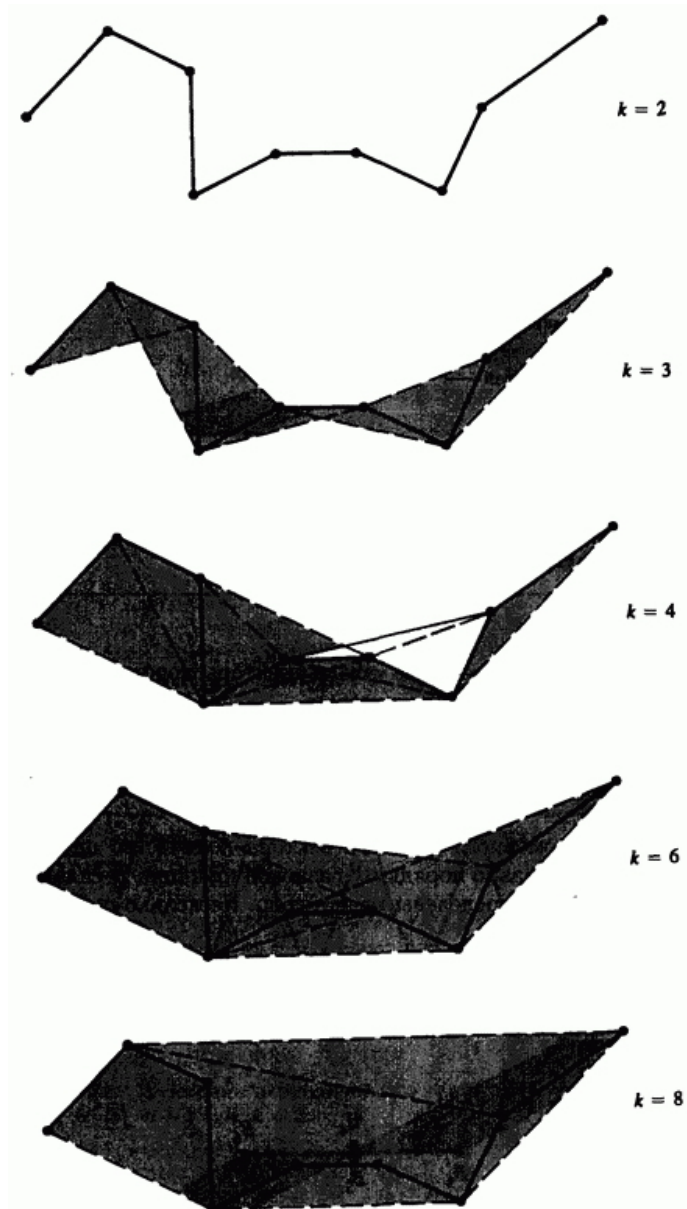


Рис. 32. Свойства выпуклой оболочки В-сплайнов.

В частности, при $k = 2$ выпуклая оболочка совпадает с многоугольником, т. е. В-сплайн - это сам многоугольник.

С помощью свойства выпуклой оболочки легко показать, что если все точки многоугольника коллинеарны, то соответствующий В-сплайн - прямая линия для всех k . Далее, если в неколлинеарном определяющем многоугольнике встречаются l коллинеарных вершин, то прямые участки кривой (если они есть) начинаются и кончаются по крайней мере за $k - 2$ отрезка от начала и конца серии коллинеарных вершин. Если последовательность коллинеарных вершин полностью лежит внутри неколлинеарного многоугольника, число коллинеарных участков кривой не меньше, чем $l - 2k + 3$. Если же эта последовательность находится на конце неколлинеарного многоугольника, то число коллинеарных участков кривой не меньше $l - k + 1$. Иллюстрация приведена на рис. 33.

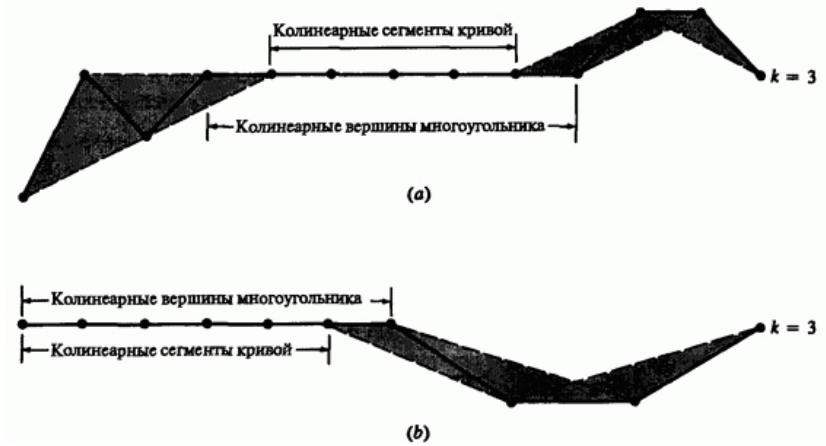


Рис. 33. Свойства выпуклой оболочки В-сплайнов для коллинеарных сегментов кривой. (а) Внутренние вершины определяющего многоугольника; (б) вершины в конце определяющего многоугольника.

Если имеется $k-1$ совпадающих вершин, т.е. $B_i = B_{i+1} = \dots = B_{i+k-2}$, то выпуклая оболочка вершин от B_i до B_{i+k-2} - это сама вершина. Отсюда следует, что В-сплайн должен проходить через вершину B_i . На рис. 34 изображен пример такой точки для $k=3$.

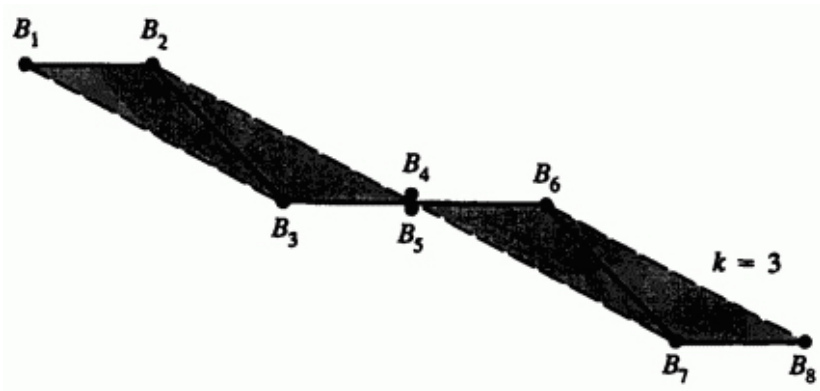


Рис. 34. Выпуклая оболочка для кратных вершин, $k=3$.

Далее, так как В-сплайн везде C^{k-2} непрерывен, он также C^{k-2} непрерывен в B_i .

Наконец, заметим, что свойство непрерывности плавно переводит В-сплайн во вложенные отрезки прямой, как показано на рис. 35.

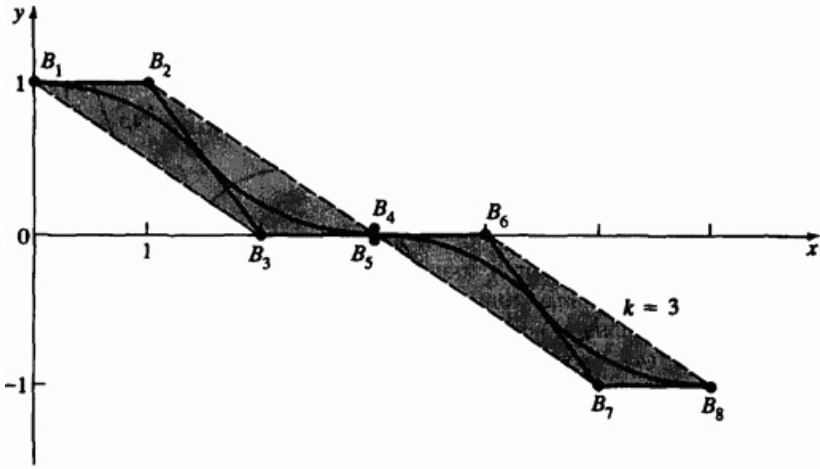


Рис. 35. Плавное $\left(C^{k-2}\right)$ превращение в отрезки прямой.

Уравнения (84) указывают, что выбор узлового вектора оказывает существенное влияние на базисные функции В-сплайна $N_{i,k}(t)$ и, следовательно, на сам В-сплайн. Единственное требование к узловому вектору: $x_i \leq x_{i+1}$, т. е. это монотонно возрастающая последовательность вещественных чисел. Обычно используются три типа узловых векторов: равномерные, открытые равномерные (или открытые) и неравномерные.

Отдельные узловые значения равномерного узлового вектора распределены на одинаковом расстоянии, например

$$[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$[-0.2 \ -0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0.2]$$

В частности, равномерные узловые векторы обычно начинаются в нуле и увеличиваются на 1 к некоторому максимальному значению или нормируются в диапазоне между 0 и 1 равными десятичными значениями, например,

$$[0 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 0.75 \quad 1.0]$$

Для данного порядка k равномерные узловые векторы порождают периодические равномерные функции базиса, для которых

$$N_{i,k}(t) = N_{i-1,k}(t-1) = N_{i+1,k}(t+1)$$

То есть каждая функция базиса - это параллельный перенос другой функции, см. рис. 36.

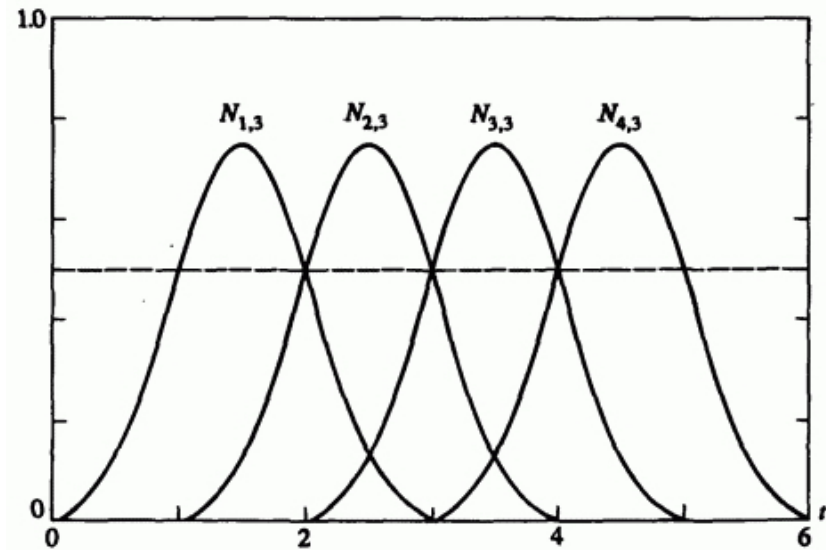


Рис. 36. Базисные функции периодического равномерного В-сплайна, $[X] = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$, $n+1=4$, $k=3$.

У открытого равномерного узлового вектора количество одинаковых узловых значений в концах равно порядку k базисной функции В-сплайна. Внутренние узловые значения распределены равномерно.

Несколько примеров с целыми приращениями:

$$k = 2 \quad [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4],$$

$$k = 3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3],$$

$$k = 4 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$$

или для нормализованных приращений

$$k = 2 \quad [0 \ 0 \ 1/4 \ 1/2 \ 3/4 \ 1 \ 1],$$

$$k = 3 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 1/3 \ 2/3 \ 1 \ 1 \ 1],$$

$$k = 4 \quad [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1/2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1].$$

Формально открытый равномерный узловой вектор определяется как

$$x_i = 0 \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$x_i = i - k \quad k+1 \leq i \leq n+1,$$

$$x_i = n - k + 2 \quad n+2 \leq i \leq n+k+1.$$

Получающиеся базисные функции ведут себя примерно так же, как и кривые Безье. Фактически, если количество вершин многоугольника равно порядку базиса В-сплайна и используется открытый

равномерный узловой вектор, базис В-сплайна сводится к базису Бернштейна. Отсюда В-сплайн является кривой Безье. В этом случае узловой вектор - это просто k нулей, за которыми следует k единиц. Например, для четырех вершин открытый равномерный узловой вектор:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

В результате мы имеем кубическую кривую Безье - В-сплайн. Соответствующие базисные функции изображены на рис. 27b. На рис. 37 приведен еще один пример открытых базисных функций.

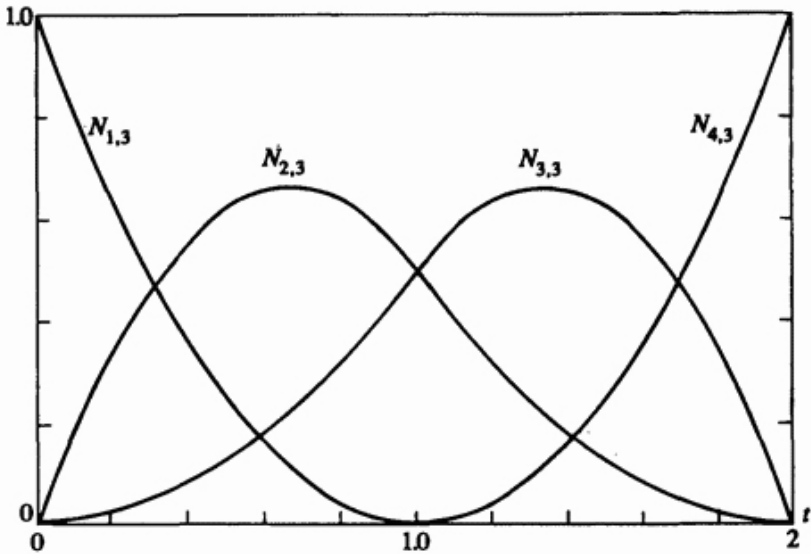


Рис. 37. Базисные функции открытого равномерного В-сплайна,

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2], \quad k=3, \quad n+1=4.$$

Неравномерные узловые векторы отличаются тем, что их внутренние узловые величины располагаются на разном расстоянии друг от друга и/или совмещаются.

Векторы могут быть периодическими или открытыми, например

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2],$$

$$[0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 4],$$

$$[0 \ 0.28 \ 0.5 \ 0.72 \ 1].$$

На рис. 38b-е показаны примеры неравномерных базисных функций В-сплайна порядка $k = 3$.

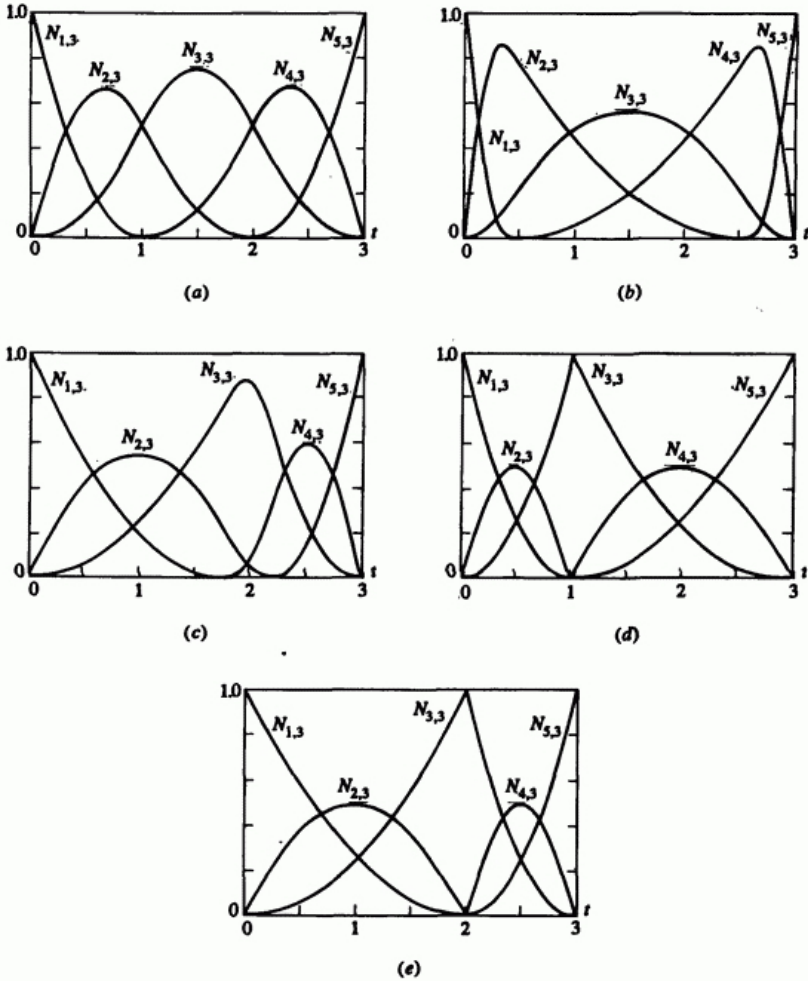


Рис. 38. Функции неравномерного базиса для $n+1=5$, $k=3$.

(a) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$;

(b) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0.4 \ 2.6 \ 3 \ 3 \ 3]$;

(c) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1.8 \ 2.2 \ 3 \ 3 \ 3];$

(d) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3];$

(e) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3].$

У соответствующих узловых векторов на концах находится по k совмещенных одинаковых значений. Для сравнения на рис. 38а приведены базисные функции для открытого равномерного вектора. Отметим, что на рис. 38а и б функции симметричны, а также что у неравномерных базисов симметрия нарушается: 38с-е. Кроме того, при совмещенных узловых значениях у одной из функций появляется излом. На рис. 38d и е видно, что положение излома зависит от расположения совмещенного значения в узловом векторе.

Формула Кокса-де Бура (84) для расчета базисных функций В-сплайна рекурсивна, поэтому функция порядка k зависит от базисных функций более низкого порядка вплоть до 1. Пусть дана базисная функция $N_{i,k}$. Тогда эту зависимость можно выразить в виде треугольника

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{i,k} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 N_{i,k-1} & N_{i+1,k-1} & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 N_{i,k-2} & N_{i+1,k-2} & N_{i+2,k-2} & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 N_{i,1} & N_{i+1,1} & N_{i+2,1} & N_{i+3,1} & \dots & N_{i+k-1,1}
 \end{array}$$

Тогда обратная зависимость, т.е. влияние одной базисной функции первого порядка $N_{i,1}$ на функции более высоких порядков, такова:

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{i-k+1,k} & \dots & N_{i+k-1,k} & N_{i,k} & N_{i+1,k} & \dots & N_{i+k-1,k} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & N_{i-1,2} & N_{i,2} & N_{i+1,2} & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & N_{i,1} & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Рассмотрим пример расчета базисных функций.

Пример 9. Расчет периодических базисных функций

Найти четыре базисные функции $N_{i,3}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, третьего порядка ($k = 3$). Число $n + 1$ в данном случае равно 4. Зависимость базисных функций для $N_{i,3}$ изображается следующей диаграммой:

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{1,3} & N_{2,3} & N_{3,3} & N_{4,3} & \dots & \dots \\
 N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & N_{4,2} & N_{5,2} & \dots \\
 N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & N_{4,1} & N_{5,1} & N_{6,1}
 \end{array}$$

Обратные зависимости для $i \geq 1$:

$$\begin{array}{cccccc}
 N_{1,3} & N_{2,3} & N_{3,3} & N_{4,3} & N_{5,3} & N_{6,3} \\
 N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & N_{4,2} & N_{5,2} & \dots \\
 N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & N_{4,1} & \dots & \dots
 \end{array}$$

Каков диапазон узлового вектора, необходимый для этого расчета? Из уравнения (84) следует, что для вычисления $N_{6,1}$ необходимы узловые величины x_6 и x_7 , а для $N_{1,1}$ - x_1 и x_2 , т. е. необходимы значения от 0 до $n + k$. Отсюда количество узловых значений равно

$n+k+1$. Узловой вектор для заданных периодических функций:

$$[X] = [0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6],$$

где $x_1 = 0, \dots, x_7 = 6$. Диапазон параметра $0 \leq t \leq 6$. Используя уравнение (84) и приведенные выше диаграммы, получим базисные функции для различных значений параметра:

$$0 \leq t < 1$$

$$M_{1,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 1$$

$$M_{1,2}(t) = t, \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1$$

$$M_{1,3}(t) = \frac{t^2}{2}, \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 1$$

$$1 \leq t < 2,$$

$$N_{2,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 2,$$

$$M_{1,2}(t) = (2-t), \quad N_{2,2}(t) = (t-1), \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2,$$

$$M_{1,3}(t) = \frac{t}{2}(2-t) + \left(\frac{3-t}{2}\right)(t-1);$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2}, \quad N_{i,3} = 0, \quad i \neq 1, 2, 3$$

$$2 \leq t < 3,$$

$$N_{3,1}(t) = 1, N_{i,1}(t) = 0, i \neq 3,$$

$$N_{2,2}(t) = (3-t), N_{3,2}(t) = (t-2), N_{i,2}(t) = 0, i \neq 2,3,$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{2};$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{2} + \frac{(4-t)(t-2)}{2};$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)^2}{2}, N_{i,3}(t) = 0, i \neq 1,2,3$$

$$3 \leq t < 4$$

$$N_{4,1}(t) = 1, N_{i,1}(t) = 0, i \neq 4$$

$$N_{3,2}(t) = (4-t), N_{4,2}(t) = (t-3), N_{i,2}(t) = 0, i \neq 3,4$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(4-t)^2}{2}, N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)^2}{2}, N_{i,3}(t) = 0, i \neq 2,3,4$$

$$4 \leq t < 5$$

$$N_{5,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 5,$$

$$N_{4,2}(t) = (5-t); N_{5,2}(t) = (t-4); N_{i,2}(t) = 0, i \neq 4, 5,$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(5-t)^2}{2};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)(5-t)}{2} + \frac{(6-t)(t-4)}{2};$$

$$N_{i,3}(t) = 0, i \neq 3, 4,$$

$$5 \leq t < 6$$

$$N_{6,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 6$$

$$N_{5,2}(t) = (6-t); N_{i,2}(t) = 0, i \neq 5,$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(6-t)^2}{2}; N_{i,3}(t) = 0, i \neq 4.$$

Знак $<$ в определении $N_{i,1}$ приводит к тому, что при $t = 6$ все функции равны 0.

Результаты показаны на рис. 36 и 39с.

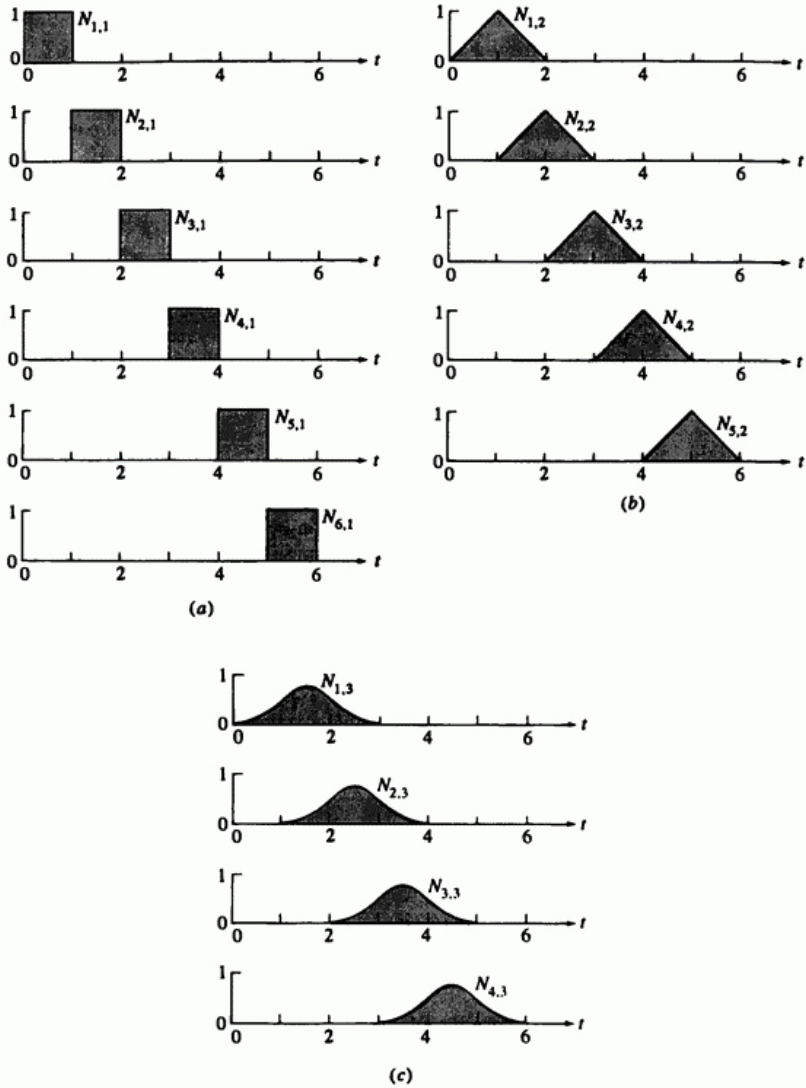


Рис. 39. Построение периодических базисных функций $n+1=4$. (a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) $k=3$.

Отметим, что каждая из базисных функций является кусочной параболической (квадратичной) кривой. Параболические сегменты на интервалах $x_i \rightarrow x_{i+1}$, $x_{i+1} \rightarrow x_{i+2}$, $x_{i+2} \rightarrow x_{i+3}$ объединяются и составляют базисные функции $N_{i,3}$. Каждая функция представляет собой параллельный перенос другой.

Пример 9 показывает, как построить базис N по функциям базиса более низкого порядка. На рис. 39а изображены функции первого порядка из примера 9, на рис. 39б - второго порядка, и на рис. 39с - третьего порядка. Обратим внимание на то, как растягивается диапазон ненулевых значений функций с увеличением их порядка. Говорят, что функция базиса обеспечивает поддержку на интервале от x_i до x_{i+k} .

Внимательно рассматривая рис. 36, можно заметить важное свойство функций равномерного базиса. Из уравнения (85) известно, что $\sum N_{i,k}(t) = 1$ для любого значения параметра t . Отсюда следует, что все множество периодических базисных функций для $k=3$ определено только в диапазоне $2 \leq t \leq 4$. За его границами $\sum N_{i,k}(t) \neq 1$. Для равномерного начинающегося с 0 узлового вектора с целыми приращениями пригодный диапазон параметра: $k-1 \leq t \leq (n+k) - (k-1) = n+1$. Для более общих или нормализованных векторов сокращение диапазона параметра соответствует потере $k-1$ интервала узловых значений на каждом конце вектора.

Пример 10. Расчет открытого равномерного базиса

Найти четыре $\binom{n=3}{k=3}$ базисные функции $N_{i,3}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, третьего порядка.

Напомним, что формально открытый узловой вектор с целыми интервалами между внутренними узловыми значениями определяется как

$$x_i = 0, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$x_i = i - k, \quad k+1 \leq i \leq n+1,$$

$$x_i = n - k + 2, \quad n+2 \leq i \leq n+k+1.$$

Диапазон изменения параметра $0 \leq t \leq n - k + 2$, т. е. от 0 до максимального узлового значения. Как и в примере 9, количество узловых значений равно $n + k + 1$. Если брать узловые значения, то вектор для данного примера примет вид

$$[X] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2],$$

где $x_1 = 0, \dots, x_7 = 2$. Параметр t изменяется от 0 до 2.

Пользуясь уравнениями (84) и диаграммами зависимости, получаем функции базиса для различных диапазонов параметра:

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{3,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 3,$$

$$N_{2,2}(t) = 1 - t; \quad N_{3,2}(t) = t; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3$$

$$N_{1,3}(t) = (1 - t)^2; \quad N_{2,3}(t) = t(1 - t) + \frac{(2 - t)}{2}t;$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t^2}{2}; N_{i,3}(t) = 0, i \neq 1, 2, 3$$

$$1 \leq t < 2$$

$$N_{4,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 4,$$

$$N_{3,2}(t) = (2-t); N_{4,2}(t) = (t-1); N_{i,2}(t) = 0, i \neq 3, 4,$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(2-t)^2}{2}; N_{3,3}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + (2-t)(t-1);$$

$$N_{4,3}(t) = (t-1)^2; N_{i,3}(t) = 0, i \neq 2, 3, 4.$$

Эти результаты приведены на рис. 40.

Сравнивая результаты примера 5-10 (рис. 5-40) и 5-9 (рис. 5-39), мы видим, что они существенно различаются для периодического и открытого равномерного узловых векторов. В частности, отметим, что у открытых равномерных узловых векторов на всем диапазоне изменения параметра определен полный набор базисных функций; т.е.

$\sum N_{i,k}(t) = 1$ для всех $0 \leq t \leq n-k+2$. У периодического вектора диапазон параметра уменьшается.

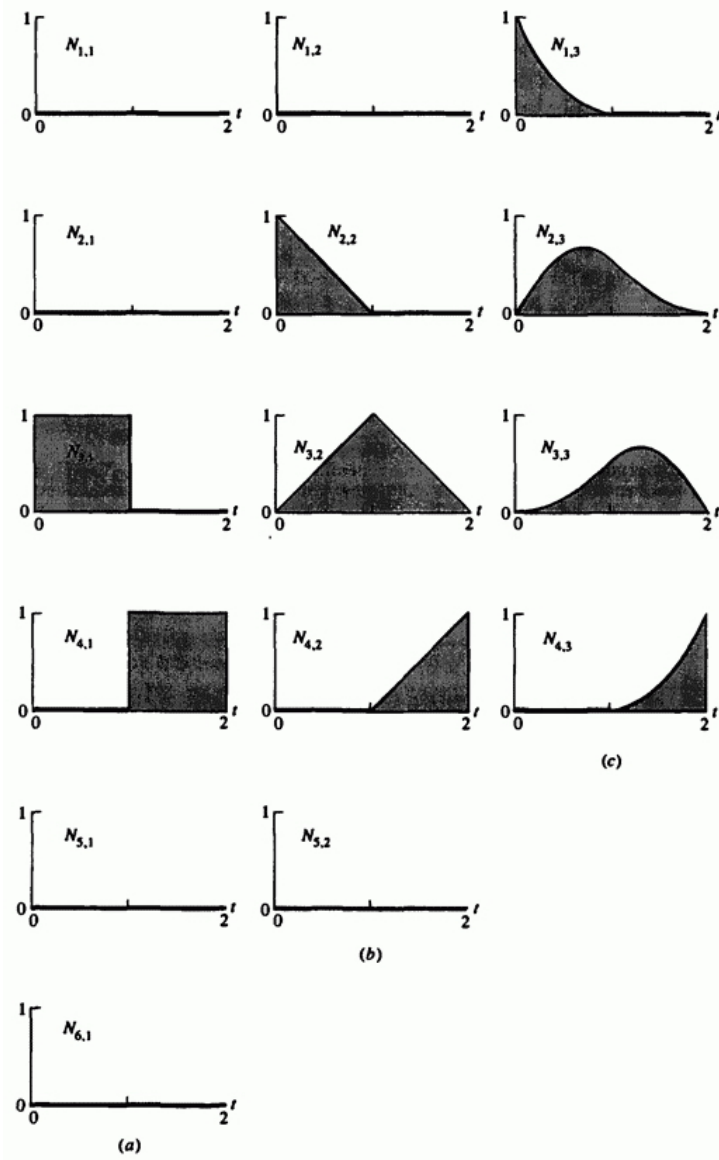


Рис. 40. Построение открытых базисных функций $n+1=4$. (a) $k=1$; (b) $k=2$; (c) $k=3$.

Пример 11. Расчет неравномерных базисных функций

Найти пять $(n+1=5)$ базисных функций $N_{i,3}(t)$, $i=1,2,3,4,5$, третьего порядка $(k=3)$ с узловым вектором $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$, содержащим повторяющееся внутреннее узловое значение. Из уравнений (84) и диаграмм зависимости

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{3,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 2,$$

$$N_{2,2}(t) = 1-t; \quad N_{3,2}(t) = t; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3,$$

$$N_{1,3}(t) = (1-t)^2; \quad N_{2,3}(t) = t(1-t) + (1-t)t = 2t(1-t),$$

$$N_{3,3}(t) = t^2; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2, 3,$$

$$1 \leq t < 1,$$

$$N_{i,1}(t) = 0, \quad \text{все } i,$$

$$N_{i,2}(t) = 0, \quad \text{все } i,$$

$$N_{i,3}(t) = 0, \quad \text{все } i.$$

В частности, как следствие повторения узлового значения,

$$N_{4,1}(t) = 0 \quad \text{для всех } t.$$

$$1 \leq t < 3$$

$$N_{5,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 5,$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{(3-t)}{2}; \quad N_{5,2}(t) = \frac{(t-1)}{2}; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 4, 5,$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{4};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1)(3-t)}{4} + \frac{(3-t)(t-1)}{4} = \frac{(3-t)(t-1)}{2};$$

$$N_{5,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{4}; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4, 5.$$

Результат приведен на рис. 38d.

Заметим, что для всех значений t имеем $\sum N_{i,k}(t) = 1.0$. Например, для $0 \leq t < 1$,

$$\sum_{i=1}^5 N_{i,3}(t) = (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1 - 2t + t^2 + 2t - 2t^2 + t^2 = 1$$

Аналогично для $1 \leq t < 3$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^5 N_{i,3}(t) &= \frac{1}{4} \left[(3-t)^2 + 2(3-t)(t-1) + (t-1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[9 - 6t + t^2 - 6 + 8t - 2t^2 + 1 - 2t + t^2 \right] = \\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Из вышесказанного видно, какое влияние оказывает выбор узлового вектора на вид базисных функций В-сплайна и, следовательно, на форму В-сплайна.

Гибкость базиса В-сплайна позволяет воздействовать на форму кривой разными способами:

Изменяя тип узлового вектора и базиса: периодический равномерный, открытый равномерный и неравномерный.

Меняя порядок k базисных функций.

Меняя количество и расположение вершин определяющего многоугольника.

Используя повторяющиеся вершины.

Используя повторяющиеся узловые значения в узловых векторах.

Рассмотрим эти способы сначала для открытых В-сплайнов, затем для равномерных периодических и неравномерных В-сплайнов.

Открытый В-сплайн по своим свойствам во многом аналогичен кривым Безье. Как уже отмечалось, если порядок В-сплайна равен количеству вершин определяющего многоугольника, то базис В-сплайна сводится к базису Бернштейна, а сам В-сплайн становится

кривой Безье. У открытого В-сплайна любого порядка ($k \geq 2$) первая и последняя точки кривой совпадают с соответственными вершинами многоугольника. Далее, наклон кривой в первой и последней вершинах многоугольника равен наклону соответственных сторон многоугольника.

На рис. 41 изображены три открытых В-сплайна различного порядка, заданные одним набором из четырех вершин.

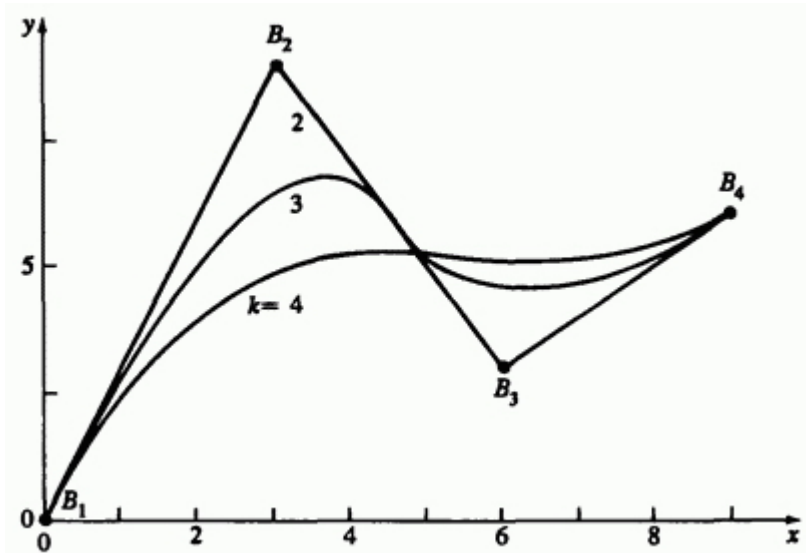


Рис. 41. Зависимость формы В-сплайна от его порядка.

Кривая четвертого порядка - это кривая Безье - один кубический полиномиальный сегмент. Кривая третьего порядка состоит из двух параболических сегментов, соединяющихся в центре второго отрезка с непрерывностью C^1 . Кривая второго порядка совпадает с определяющим многоугольником. Она состоит из трех линейных сегментов, соединяющихся во второй и третьей вершинах с непрерывностью C^0 . Угол наклона на концах, заданный наклоном сторон многоугольника, одинаков для всех трех кривых.

Отметим также, что по мере возрастания порядка кривой, она все меньше напоминает исходный многоугольник и становится более гладкой.

На рис. 42 изображается влияние повторяющихся или совпадающих вершин.

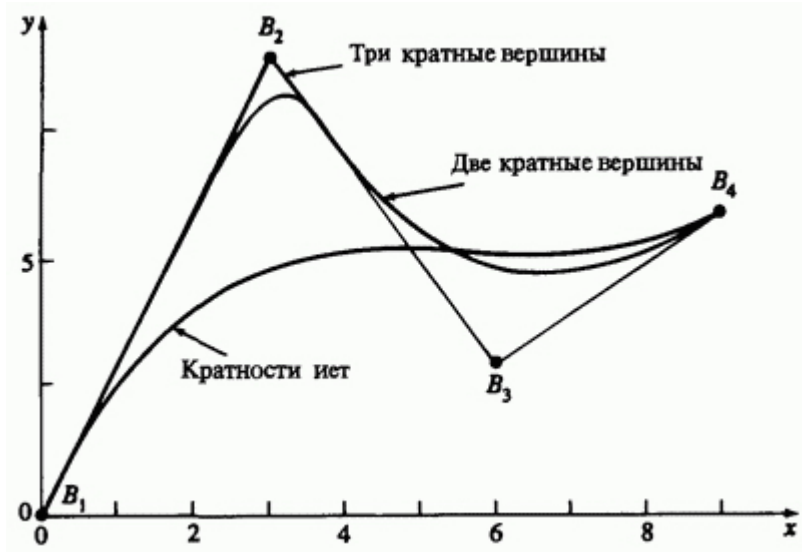


Рис. 42. Влияние кратности вершины на форму В-сплайна, $k = 4$.

Все В-сплайны имеют порядок $k = 4$. Нижняя кривая определена четырьмя вершинами с узловым вектором $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. У средней кривой пять определяющих вершин, причем две из них повторяются во второй вершине многоугольника $[3 \ 9]$. Узловой вектор - $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$. Верхняя кривая определена шестью вершинами с тремя повторяющимися в точке $[3 \ 9]$. Узловой

вектор - $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3]$. Соответствующие многоугольники для трех кривых соответственно таковы: B_1, B_2, B_3, B_4 ; B_1, B_2, B_2, B_3, B_4 и $B_1, B_2, B_2, B_2, B_3, B_4$.

Нижняя кривая состоит из единственного кубического сегмента. Средняя кривая состоит из двух сегментов, соединенных между B_2 и B_3 . Верхняя кривая состоит из трех сегментов: первый от B_1 до B_2 , второй от B_2 до середины между B_2 и B_3 , третий от этой точки до B_4 . Обратим внимание на то, что с увеличением кратности вершины B_2 кривая все ближе подходит к B_2 . Когда кратность достигается $k-1$, возникает острый угол в соответствии со свойством выпуклой оболочки В-сплайнов. При внимательном изучении рис. 42 можно заметить, что на обеих сторонах кратной вершины имеется линейный участок.

Несмотря на наличие углов, сохраняется C^{k-2} дифференцируемость кривой. На первый взгляд это может показаться противоречием, однако излом определяется нулевым касательным вектором, что не исключает непрерывности его изменения. Возможность включения острых углов и изломов в непрерывно C^{k-2} дифференцируемые кривые это важное свойство В-сплайнов.

Наконец, заметим, что у всех кривых наклон в концах одинаков.

На рис. 43 показаны три В-сплайна четвертого порядка.

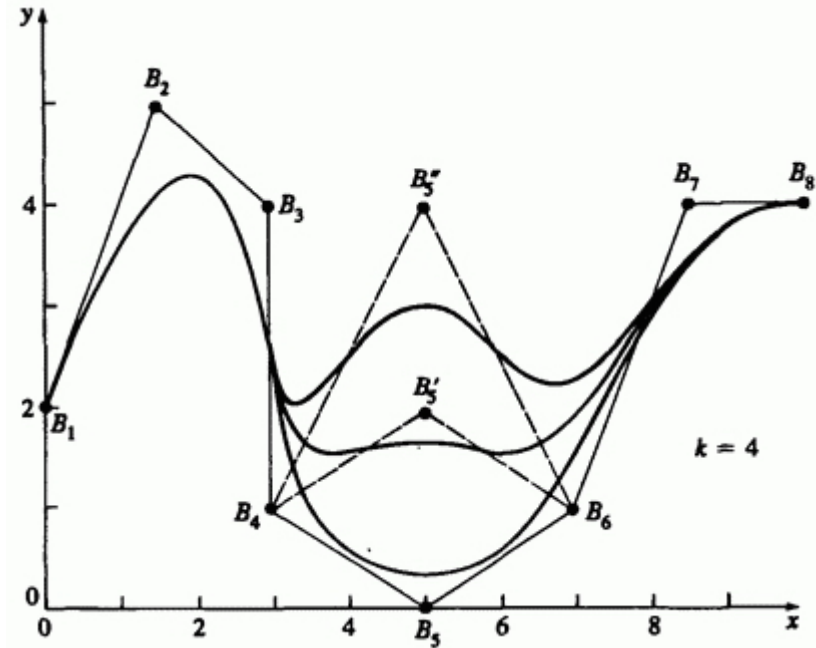


Рис. 43. Локальная коррекция В-сплайна.

Каждый определяющий многоугольник состоит из восьми вершин. Кривые отличаются тем, что точка B_5 передвигается в B_5' и B_5'' . Передвижение точки воздействует на кривую только локально: изменяются лишь сегменты, отвечающие отрезкам B_3B_4 , B_4B_5 и B_5B_6 , B_6B_7 .

В общем случае затрагиваются только $\pm k/2$ отрезков вокруг сдвинутой точки.

Для иллюстрации рассмотрим пример.

Пример 12. Расчет открытого В-сплайна

Рассмотрим многоугольник из примера 7: $B_1[1 \ 1]$, $B_2[2 \ 3]$,
 $B_3[4 \ 3]$, $B_4[3 \ 1]$. Найти В-сплайн второго и четвертого порядка.
Для $k = 2$ открытый узловой вектор

$$[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3],$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_6 = 3$. Параметр t изменяется от 0 до 3.
Кривая состоит из трех линейных $(k-1=1)$ сегментов. Для $0 \leq t < 3$
функции базиса имеют вид:

$$0 \leq t < 1,$$

$$N_{2,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 2,$$

$$N_{1,2}(t) = 1-t, \quad N_{2,2}(t) = t, \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2,$$

$$1 \leq t < 2,$$

$$N_{3,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 3,$$

$$N_{2,2}(t) = 2-t, \quad N_{3,2}(t) = (t-1), \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3,$$

$$2 \leq t < 3,$$

$$N_{4,1}(t) = 1, \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4,$$

$$N_{3,2}(t) = (3-t); \quad N_{4,2}(t) = (t-2); \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4.$$

Из уравнения (83) получаем параметрический В-сплайн

$$P(t) = B_1 N_{1,2}(t) + B_2 N_{2,2}(t) + B_3 N_{3,2}(t) + B_4 N_{4,2}(t).$$

Для каждого из этих интервалов

$$P(t) = (1-t)B_1 + tB_2 = B_1 + (B_2 - B_1)t \quad 0 \leq t < 1,$$

$$P(t) = (2-t)B_2 + (t-1)B_3 = B_2 + (B_3 - B_2)t \quad 1 \leq t < 2,$$

$$P(t) = (3-t)B_3 + (t-2)B_4 = B_3 + (B_4 - B_3)t \quad 2 \leq t < 3.$$

В каждом случае в результате получается уравнение прямой для ребра многоугольника, т.е. кривая совпадает с многоугольником.

Последняя точка кривой ($t = t_{\max} = 3$) требует особого внимания. Из-за того что интервал в уравнении (84а) открыт справа, все базисные функции N_{ik} при $t = 3$ равны нулю. Следовательно, последняя точка многоугольника формально не лежит на кривой. Фактически же это не так. Рассмотрим $t = 3 - \varepsilon$, где ε - бесконечно малая величина. Если ε стремится к нулю, то в пределе последние точки кривой и многоугольника совпадают. На практике либо явно добавляют последнюю точку в описание кривой, либо определяют $N(t = t_{\max}) = 1.0$.

Для $k = 4$ порядок кривой совпадает с количеством вершин определяющего многоугольника, поэтому В-сплайн сводится к кривой Безье. Узловой вектор с

$$t_{\max} = n - k + 2 = 3 - 4 + 2 = 1 - [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

Функции базиса таковы:

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{4,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4,$$

$$N_{3,2}(t) = (1-t)^2; \quad N_{4,2}(t) = t; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4,$$

$$N_{2,3}(t) = (1-t)^2; \quad N_{3,3}(t) = 2t(1-t);$$

$$N_{4,3}(t) = t^2; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3, 4,$$

$$N_{1,4}(t) = (1-t)^3; \quad N_{2,4}(t) = t(1-t)^2 + 2t(1-t)^2 = 3t(1-t)^2;$$

$$N_{3,4}(t) = 2t^2(1-t) + (1-t)t^2 = 3t^2(1-t); \quad N_{4,4}(t) = t^3.$$

Из уравнения (83) получаем параметрический В-сплайн

$$P(t) = B_1 N_{1,4}(t) + B_2 N_{2,4}(t) + B_3 N_{3,4}(t) + B_4 N_{4,4}(t),$$

$$P(t) = (1-t^3) B_1 + 3t(1-t) B_2 + 3t^2(1-t) B_3 + t^3 B_4.$$

Итак, при $t = 0$

$$P(0) = B_1$$

и при $t = 1/2$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}B_1 + \frac{3}{8}B_2 + \frac{3}{8}B_3 + \frac{1}{8}B_4$$

и

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}[1 \ 1] + \frac{3}{8}[2 \ 3] + \frac{3}{8}[4 \ 3] + \frac{3}{8}[3 \ 1] = \\ &= [11/4 \ 5/2] \end{aligned}$$

Сравнивая с примером 7, видим, что результаты одинаковы. Получившаяся кривая изображена на рис. 28. Теперь займемся периодическими В-сплайнами. На рис. 44 показаны три периодических В-сплайна разного порядка.

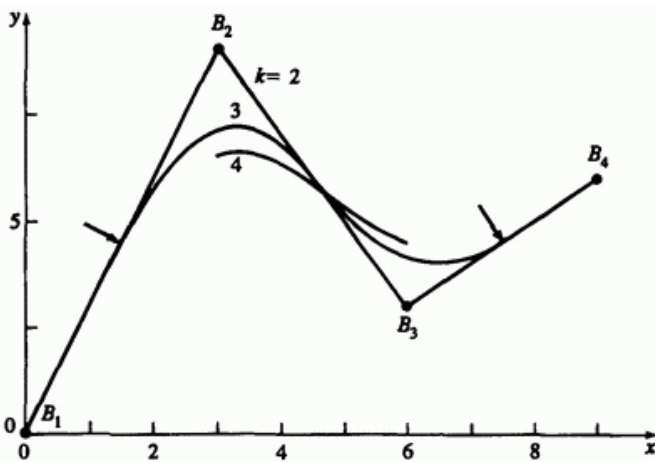


Рис. 44. Зависимость формы периодического В-сплайна от его порядка.

Все кривые определены теми же вершинами, что и для открытых В-сплайнов на рис. 41. Для $k = 2$ В-сплайн опять совпадает с определяющим многоугольником. Отметим, однако, что у периодического сплайна при $k > 2$ первая и последняя точки на кривой не совпадают с первой и последней точками многоугольника. Наклон в первой и последней точках также может отличаться от наклона соответствующих сторон многоугольника. Для $k = 3$ В-сплайн начинается в середине первого ребра и оканчивается в середине последнего, как отмечено стрелками. Это происходит из-за сокращения диапазона параметра для базисных функций периодического В-сплайна. Для $k = 2$ периодический узловой вектор $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5]$ с диапазоном параметра $1 \leq t \leq 4$. Для $k = 3$ периодический узловой вектор $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ с диапазоном параметра $2 \leq t \leq 4$. Для $k = 4$ периодический узловой вектор $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ с диапазоном параметра $3 \leq t \leq 4$.

Сравнение полученных результатов и результатов для открытых узловых векторов на рис. 41 показывает, что кривую можно определить на полном диапазоне параметра, задавая кратные узловые значения на концах векторов. При этом кривая растягивается к концам многоугольника.

В данном случае кривая четвертого порядка опять состоит из единственного кубического сегмента; кривая третьего порядка - из двух параболических сегментов, соединенных в середине второго ребра с непрерывностью C^1 ; кривая второго порядка - из трех линейных сегментов, соединенных во второй и третьей вершинах с C^0 непрерывностью. Увеличение порядка опять сглаживает кривую, но в то же время и укорачивает ее.

Рис. 45 показывает, что воздействие кратных вершин одинаково для периодических и открытых В-сплайнов. Область вокруг точки изображена более подробно.

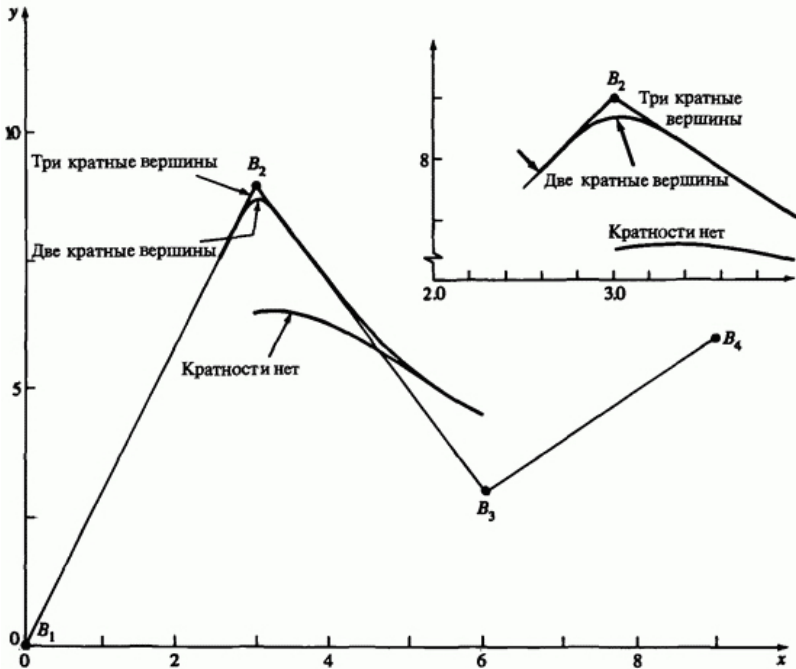


Рис. 45. Влияние кратности вершины на форму периодического В-сплайна, $k = 4$.

Пример 13. Расчет периодического В-сплайна

Снова рассмотрим многоугольник на рис. 44. Вершины многоугольника - $B_1[0 \ 0]$, $B_2[3 \ 9]$, $B_3[6 \ 3]$, $B_4[9 \ 6]$.

Найти периодический В-сплайн четвертого порядка ($k = 4$), заданный этим многоугольником.

Для $k = 4$ на диапазоне $3 \leq t < 4$ узловый вектор для периодических базисных функций - $[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$. Для этого диапазона базисные функции первого порядка (см. уравнение (84а),

$$(3 \leq t < 4);$$

$$N_{4,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 4.$$

Из уравнения (84b) получаем базисные функции высших порядков:

$$N_{3,2}(t) = (4-t); N_{4,2}(t) = (t-3); N_{i,2}(t) = 0, i \neq 3, 4,$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(4-t)^2}{2}; N_{3,3}(t) = \frac{(t-2)(4-t)}{2} + \frac{(5-t)(t-3)}{2};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-3)^2}{2}; N_{i,3}(t) = 0, i \neq 2, 3, 4,$$

$$N_{1,4}(t) = \frac{(4-t)^3}{6};$$

$$N_{2,4}(t) = \frac{(t-1)(4-t)^2}{6} + \frac{(5-t)(4-t)(t-2)}{6} + \frac{(5-t)^2(t-3)}{6};$$

$$N_{3,4}(t) = \frac{(t-2)^2(4-t)}{6} + \frac{(t-2)(t-3)(5-t)}{6} + \frac{(6-t)(t-3)^2}{6};$$

$$N_{4,4}(t) = \frac{(t-3)^3}{6}.$$

При $t = 3$

$$M_{1,4}(3) = \frac{(4-3)^2}{6} = \frac{1}{6},$$

$$N_{2,4}(3) = \frac{(3-1)(4-3)^2}{6} + \frac{(5-3)(4-3)(3-2)}{6} + \frac{(5-3)^2(3-3)}{6} = \frac{2}{3},$$

$$N_{3,4}(3) = \frac{(3-2)^2(4-3)}{6} + \frac{(3-2)(3-3)(5-3)}{6} + \frac{(6-3)(3-3)^2}{6} = \frac{1}{6},$$

$$N_{4,4}(3) = \frac{(3-3)^3}{6} = 0.$$

Точка на В-сплайне при $t = 3$ имеет вид

$$\begin{aligned} P(3) &= \frac{1}{6}B_1 + \frac{2}{3}B_2 + \frac{1}{6}B_3 + 0B_4 = \\ &= \frac{1}{6}[0 \ 0] + \frac{2}{3}[3 \ 9] + \frac{1}{6}[6 \ 3] + 0[9 \ 6] = \\ &= [3 \ 6.5]. \end{aligned}$$

Полная кривая приведена на рис. 44.

Периодические В-сплайны очень удобны для построения замкнутых кривых. На рис. 46а изображен периодический В-сплайн четвертого порядка ($k = 4$), построенный для замкнутого многоугольника $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7B_8B_1$.

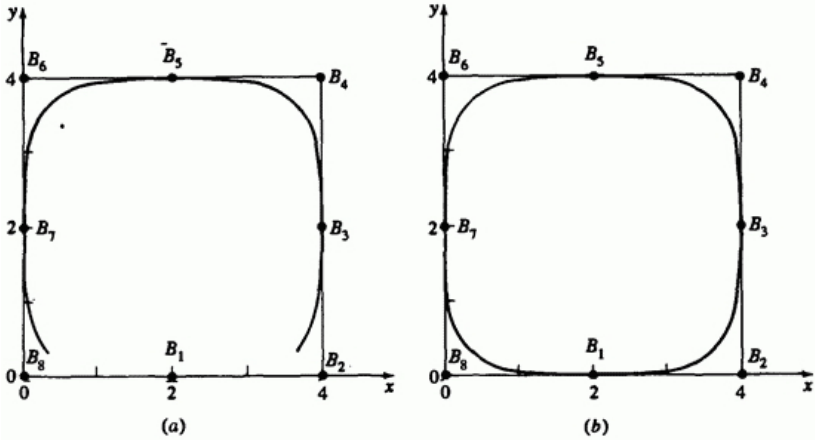


Рис. 46. Замкнутый периодический В-сплайн.
 (а) $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_1$ - определяющий многоугольник;
 (б) $B_8 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_1 B_2$ - определяющий многоугольник.

Первая вершина совпадает с последней. В-сплайн получается незамкнутым из-за ограниченного диапазона параметра. Здесь периодический равномерный узловой вектор: $[0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 10 \ 11 \ 12]$ с диапазоном параметра $3 \leq t \leq 9$.

Повторяя всего $k-2$ вершин в начале и/или конце замкнутого многоугольника, получаем замкнутый периодический В-сплайн. (Далее в этом разделе обсуждается другой метод в матричной формулировке.) Результат показан на рис. 46б, где определяющий многоугольник - $B_8 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_1 B_2$ с периодическим равномерным узловым вектором $[0 \ 1 \ 2 \ \dots \ 12 \ 13 \ 14]$ и диапазоном параметра $3 \leq t \leq 11$. Альтернативные многоугольники $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_1 B_2 B_3$ или $B_7 B_8 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_1$ приводят к тому же самому результату.

На рис. 47 одна вершина многоугольника B_4 передвинута на другое место.

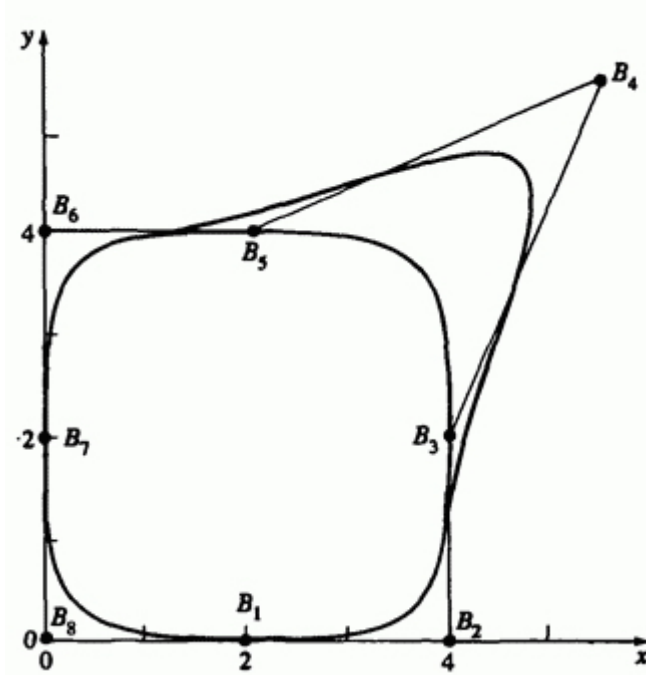


Рис. 47 Изменение формы В-сплайна после перемещения одной вершины многоугольника.

Ее воздействие распространяется на сегменты кривой, соответствующие $\pm k/2$ ребрам многоугольника по обе стороны от сдвинутой точки. На рис. 48 показан эффект кратной вершины B_4 .

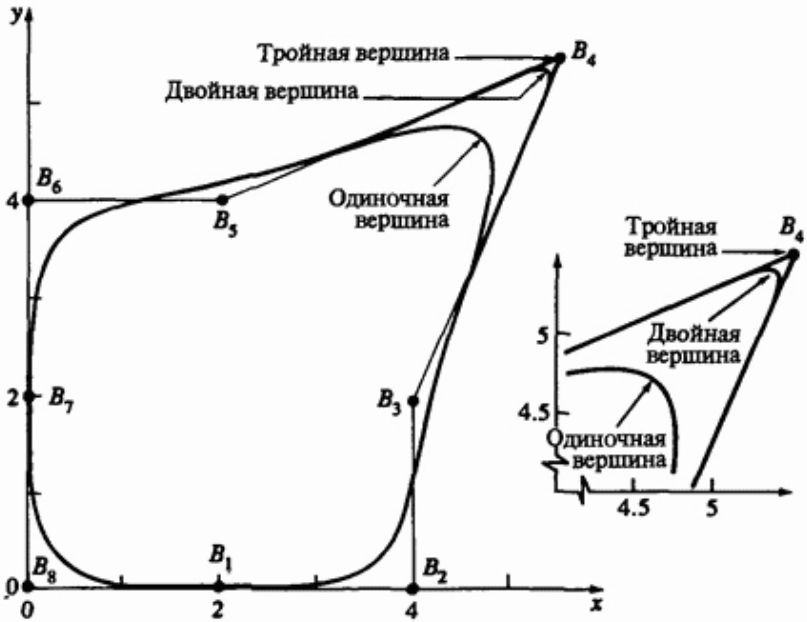


Рис. 48. Влияние кратных вершин на форму замкнутого периодического В-сплайна.

Область вокруг B_4 изображена более подробно. Опять отметим, что ее влияние распространяется также только на $\pm k/2$ сегмента кривой по обе стороны кратной вершины.

Теперь рассмотрим неравномерные В-сплайны. На рис. 49 кривая изменяется под воздействием кратных внутренних узловых значений.

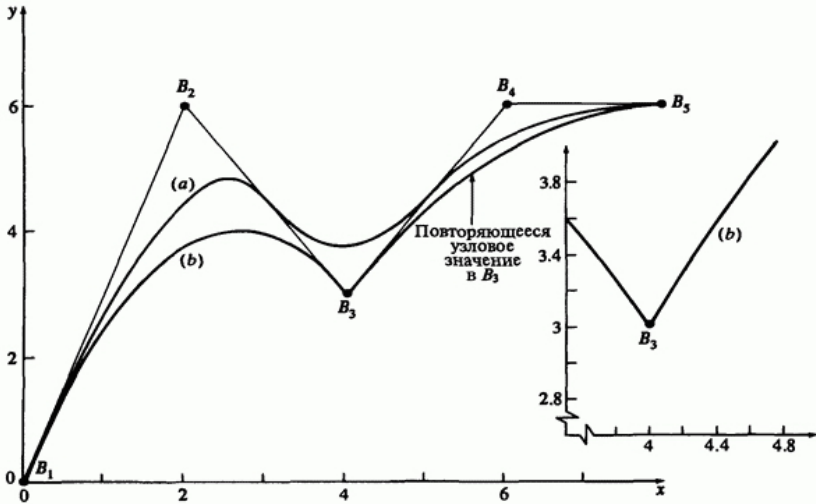


Рис. 49. Неравномерные В-сплайны, $k = 3$.

(a) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$;

(b) $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$.

Верхняя кривая третьего порядка ($k = 3$) рассчитана для открытого узлового вектора $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$. Базисные функции для этой кривой изображены на рис. 38а. Нижняя кривая третьего порядка построена с неравномерным узловым вектором $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3]$. Ее базисные функции - на рис. 38d.

Такая же кривая получается с неравномерным узловым вектором $[0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ и базисными функциями на рис. 38е.

Из рис. 49 видно, что кратные внутренние узловые значения порождают излом в вершине B_3 . Кратное значение порождает ребро нулевой длины, поэтому уменьшается диапазон поддержки базисных функций. Далее, кратные внутренние узловые значения, в отличие от

кратных вершин многоугольника, снижают дифференцируемость базисной функции в x_i до C^{k-m-1} , где $m \leq k-1$ равно кратности внутреннего узлового значения. Локально неравномерная кривая на рис. 49 C^0 ($k-m-1 = 3-2-1 = 0$) непрерывная в окрестности B_3 , что и приводит к появлению угла.

Открытые неравномерные В-сплайны третьего порядка ($k=3$) на рис. 50 построены с помощью узлового вектора с внутренними значениями, пропорциональными длинам ребер между вершинами многоугольника.

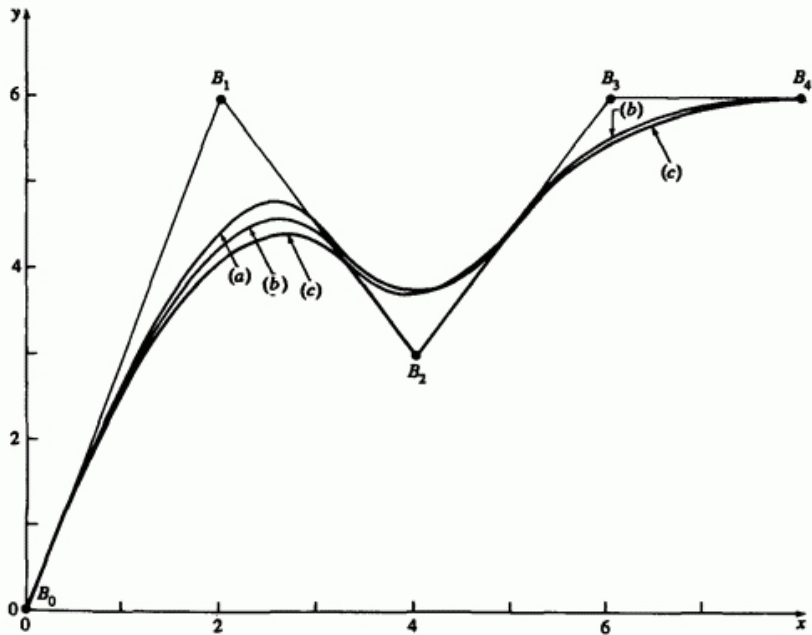


Рис. 50 Сравнение открытых неравномерных В-сплайнов: (а) равномерный узловой вектор; (б) неравномерный узловой вектор, пропорциональный длинам хорд; (с) неравномерный узловой вектор, пропорциональный длинам хорд, с двойной вершиной в B_2 .

Узловой вектор имеет вид

$$\begin{aligned}
 x_i &= 0 \quad 1 \leq i \leq k, \\
 x_{i+k} &= \left(\frac{\left(\frac{i}{n-k+2} \right) c_{i+1} + \sum_{j=1}^i c_j}{\sum_{i=1}^n c_i} \right) (n-k+2), \\
 &\quad 1 \leq i \leq n-k+1, \\
 x_i &= n-k+2, \quad n+1 \leq i \leq n+k,
 \end{aligned} \tag{86}$$

где $c_i = |B_{i+1} - B_i|$. Для вершин, находящихся на одинаковом расстоянии друг от друга, узловой вектор имеет целые равномерно распределенные значения, т.е. вектор является открытым и равномерным. В ряде работ предложен похожий метод, позволяющий получить отдельные внутренние узловые значения.

Для сравнения приведена кривая с открытым равномерным вектором, а также кривая с парой совпадающих вершин B_3 .

Отсюда следует, что неравномерные В-сплайны не сильно отличаются от равномерных при небольшом изменении относительного расстояния между вершинами. Рассмотрим пример.

Пример 14. Неравномерный В-сплайн

Найти открытый В-сплайн третьего порядка, заданный точками $B_1[0 \ 0]$, $B_2[2 \ 6]$, $B_3[4 \ 3]$, $B_4[6 \ 6]$, $B_5[8 \ 6]$ с помощью неравномерного вектора с узловыми значениями, пропорциональными длинам ребер многоугольника.

Сначала найдем длины хорд

$$c_1 = \sqrt{(2-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{40} = 6.325$$

$$c_2 = \sqrt{(4-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{13} = 3.606$$

$$c_3 = \sqrt{(6-4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{13} = 3.606$$

$$c_4 = \sqrt{(8-6)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{4} = 2.0$$

Их суммарная длина

$$\sum_{i=1}^4 c_i = 15.537$$

Из уравнения (5-86) получаем внутренние узловые значения

$$x_4 = \left[\frac{\frac{c_2}{3} + c_1}{15.537} \right] = 1.453$$

$$x_5 = \left[\frac{\frac{2c_3}{3} + c_1 + c_2}{15.537} \right] (3) = 2.382$$

Узловой вектор имеет вид

$$[x] = [0 \ 0 \ 0 \ 1.45 \ 2.382 \ 3 \ 3 \ 3],$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_8 = 3$. Диапазон параметра $0 \leq t \leq 3$.
Кривая состоит из трех параболических ($k-1=2$) сегментов.

Функции базиса для $0 \leq t < 1.453$ таковы

$$N_{3,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 3,$$

$$N_{2,2}(t) = \frac{(1.453-t)}{1.453}; \quad N_{3,2}(t) = \frac{t}{1.453}; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3,$$

$$N_{1,3}(t) = \frac{(1.453-t)^2}{(1.453)^2};$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{t}{(1.453)^2} (1.453-t) + \frac{(2.382-t)t}{(2.382)(1.453)};$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t^2}{(2.382)(1.453)}; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2, 3.$$

Функции базиса для $1.453 \leq t < 2.382$:

$$N_{4,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4,$$

$$N_{3,2}(t) = \frac{(2.382-t)}{(2.382-1.453)};$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{(t-1.453)}{(2.382)(1.453)}; N_{i,2}(t) = 0, i \neq 3,4,$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(2.382-t)^2}{2.382(2.382-1.453)};$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{t}{2.382} \frac{(2.382-t)}{(2.382-1.453)} + \frac{(3-t)}{(3-1.453)} \frac{(t-1.453)}{(2.382-1.453)};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1.453)^2}{(3-1.453)(2.382-1.453)}; N_{i,3}(t) = 0, i \neq 2,3,4.$$

Функции базиса для $2.382 \leq t < 3$:

$$N_{5,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 5,$$

$$N_{4,2}(t) = \frac{(3-t)}{(3-2.382)};$$

$$N_{5,2}(t) = \frac{(t-2.382)}{(3-2.382)}; N_{i,2}(t) = 0, i \neq 4,5,$$

$$N_{3,3}(t) = \frac{(3-t)^2}{(3-1.453)(3-2.382)};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1.453)(3-t)}{(3-1.453)(3-2.382)} + \frac{(3-t)(t-2.382)}{(3-2.382)^2};$$

$$N_{5,3}(t) = \frac{(t-2.382)^2}{(3-2.382)^2}; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4, 5.$$

Вспомним, что любая точка кривой задается уравнением:

$$P(t) = N_{1,3}(t)B_1 + N_{2,3}(t)B_2 + N_{3,3}(t)B_3 + N_{4,3}(t)B_4 + N_{5,3}(t)B_5,$$

т.е. при $t = 1/2$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2}\right) &= 0.430B_1 + 0.498B_2 + 0.072B_3 + (0)B_4 + (0)B_5 = \\ &= 0.430[0 \ 0] + 0.498[2 \ 6] + 0.072[4 \ 3] = \\ &= [1.284 \ 3.202] \end{aligned}$$

и при $t = 2$

$$\begin{aligned} P(2) &= (0)B_1 + 0.066B_2 + 0.726B_3 + 0.208B_4 + (0)B_5 = \\ &= 0.066[2 \ 6] + 0.726[4 \ 3] + 0.208[6 \ 6] = \end{aligned}$$

$$= [4.284 \quad 3.822]$$

Результаты приведены на рис. 50.

Уравнения В-сплайна можно записать в матричной форме, подобно кубическим сплайнам, параболической интерполяции и кривым Безье (см. уравнения (27б), (44) и (67)). У периодических В-сплайнов матричная форма особенно проста.

Вспомним, что базисные функции периодического В-сплайна являются параллельным переносом друг друга (см. рис. 36) и что влияние каждой функции распространяется только на k интервале. Поэтому для целых узловых значений все базисные функции на единичном интервале $0 \leq t^* < 1$ имеют один и тот же вид $N_{i,k}^*(t^*)$, т.е. иногда удобно нормализовать параметризацию. Точка на параметрическом В-сплайне на единичном интервале имеет вид

$$P_j(t^*) = \sum_{i=0}^{k-1} N_{i+1,k}^*(t^*) B_{j+i}, \quad 1 \leq j \leq n-k+1, \quad 0 \leq t^* < 1, \quad (87)$$

где j - счетчик сегментов кривой, а n на единицу меньше количества вершин. Заметим, что уравнение (87) содержит только k членов:

$$P_j(t^*) = N_{1,k}^* B_j + N_{2,k}^* B_{j+1} + \dots + N_{k,k}^* B_{j+k-1}$$

Для $k=3$ базисные функции на интервале параметра $0 \leq t^* < 1$

$$N_{1,3}^*(t^*) = \frac{(1-t^*)^2}{2},$$

$$N_{2,3}^*(t^*) = \frac{-2t^{*2} + 2t^* + 1}{2},$$

$$N_{3,3}^*(t^*) = \frac{t^{*2}}{2}.$$

Тогда уравнение (87) принимает вид

$$\begin{aligned} 2P_j(t^*) &= (1 - 2t^* + t^{*2})B_j + (-2t^{*2} + 2t^* + 1)B_{j+1} + t^{*2}B_{j+2} = \\ &= t^{*2}(B_j - 2B_{j+1} + B_{j+2}) + \\ &+ t^*(-2B_j + 2B_{j+1} + 0 \cdot B_{j+2}) + \\ &+ (B_j + B_{j+1} + 0 \cdot B_{j+2}). \end{aligned}$$

Перепишем в матричной форме:

$$\begin{aligned} P_j^*(t^*) &= [T^*][N^*][G] = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} t^{*2} & t^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_j \\ B_{j+1} \\ B_{j+2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{88}$$

Аналогично, для $k = 4$ базисные функции на интервале параметра $0 \leq t^* < 1$ таковы:

$$N_{1,4}^*(t^*) = \frac{-t^{*3} + 3t^{*2} - 3t^* + 1}{6},$$

$$N_{2,4}^*(t^*) = \frac{3t^{*3} + 6t^{*2} + 4}{6},$$

$$N_{3,4}^*(t^*) = \frac{-t^{*3} + 3t^{*2} + 3t^* + 1}{6},$$

$$N_{4,4}^*(t^*) = \frac{t^{*3}}{6}.$$

Матричная форма для $k = 4$ имеет вид

$$P_j(t^*) = [T^*][N^*][G] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} t^{*3} & t^{*2} & t^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_j \\ B_{j+1} \\ B_{j+2} \\ B_{j+3} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

Уравнения (87) и (89) содержат произведение весовой функции и геометрической матрицы (см. уравнения (27), (44), (67); т.е.

$$P_j(t^*) = [T^*][N^*][G] = [F][G] \quad 1 \leq j \leq n - k + 1, \\ 0 \leq t^* < 1, \quad (90)$$

где

$$[T^*] = \begin{bmatrix} t^{*k-1} & t^{*k-2} & \dots & t^* & 1 \end{bmatrix} \quad 0 \leq t^* < 1$$

$[G]^T = [B_j \quad \dots \quad B_{j+k-1}]$ содержит геометрию - вершины многоугольника, а $[F]$ состоит из соответствующих базисных функций.

В ряде работ показано, что для периодических В-сплайнов общий вид $[N]$.

$$[N^*] = [N_{i+1, j+1}^*], \tag{91}$$

где

$$N_{i+1, j+1}^* = \frac{1}{(k-1)!} N_{i+1, j+1}^* = \frac{1}{(k-1)!} \binom{k-1}{i} \sum_{l=j}^{k-1} (k-(l+1))^i (-1)^{l-j} \binom{k}{l-j}, \quad 0 \leq i, j \leq k-1.$$

Вспомним, что у периодических замкнутых В-сплайнов необходимо повторить некоторые вершины, чтобы ликвидировать разрыв. В матричном виде это очень просто. Замкнутый периодический сплайн имеет вид

$$P_{j+1}(t^*) = \sum_{i=0}^{k-1} N_{i+1, k}^*(t^*) B_{((j+i) \bmod (n+1)) + 1}, \quad 0 \leq j \leq n. \tag{92}$$

Или в матричном виде

$$P_{j+1}(t^*) = [T^*][N^*] \begin{bmatrix} B_{(j \bmod (n+1))+1} \\ B_{((j+1) \bmod (n+1))+1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ B_{((j+1+n-k) \bmod (n+1))+1} \end{bmatrix}, \quad (93)$$

где $[T^*]$ и $[N^*]$ взяты из уравнения (90), а \bmod - остаток; например, $3 \bmod 2 = 1$.

Открытые В-сплайны также можно записать в матричном виде, однако из-за кратных узловых значений на концах это не так удобно, как для периодических. В общем случае матричный вид открытого В-сплайна с целыми узловыми значениями таков:

$$P(t) = [F][G] = [T][N][G], \quad (94)$$

где

$$[G]^T = [B_1 \quad \dots \quad B_{n+1}],$$

а элементы $[F]$ и $[N]$ получены по алгоритму Кокса-де Бура (уравнение (84)) для каждого ненулевого интервала вектора $[X]$. У В-сплайнов низкого порядка, заданных большим количеством точек, большинство членов $[F]$ равны нулю. Используя это свойство, можно значительно сэкономить вычисления.

В ряде работ приведена обобщенная формулировка для $[N^*]$ на нормализованном интервале $0 \leq t^* < 1$; однако из-за кратности конечных узловых значений первые и последние $k-1$ $[N^*]$ матриц являются частными случаями. Рассмотрим пример матричного метода.

Пример 15. Расчет замкнутого В-сплайна

Найти замкнутый В-сплайн четвертого порядка ($k=4$), заданный многоугольником, изображенным на рис. 46. Записать результат в матричном виде. Вершины многоугольника: $B_1[2 \ 0]$, $B_2[4 \ 0]$, $B_3[4 \ 2]$, $B_4[4 \ 4]$, $B_5[2 \ 4]$, $B_6[0 \ 4]$, $B_7[0 \ 2]$, $B_8[0 \ 0]$, $B_9[2 \ 0]$, $n=8$.

Для каждого единичного интервала $0 \leq t^* < 1$ из уравнений (89) и (93) получим

$$P_{j+1}(t^*) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} t^{*3} & t^{*2} & t^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{(j \bmod 8)+1} \\ B_{((j+1) \bmod 8)+1} \\ B_{((j+2) \bmod 8)+1} \\ B_{((j+3) \bmod 8)+1} \end{bmatrix}$$

При $t^* = 1/2$ на первом сегменте ($j=0$) кривой

$$R_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48} [190 \quad 50] = [3.958 \quad 1.042]$$

При $t^* = 1/2$ на восьмом сегменте ($j=7$) кривой

$$R_8\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ B_8 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48} \begin{bmatrix} 1 & 23 & 23 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48} [142 \quad 2] = [2.958 \quad 0.417]$$

Результат показан на рис. 46b.

Производная в любой точке В-сплайна вычисляется формальным дифференцированием. Из уравнения (83)

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{i,k}(t) \tag{83}$$

первая производная:

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N'_{i,k}(t) \tag{95}$$

и вторая производная:

$$P''(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N''_{i,k}(t) \tag{96}$$

Штрихи обозначают дифференцирование по параметру t .

Производные базисных функций также получают формальным дифференцированием. После однократного дифференцирования уравнения (84) имеем

$$N'_{i,k}(t) = \frac{N_{i,k-1}(t) + (t - x_i) N'_{i,k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N'_{i+1,k-1}(t) - N_{i+1,k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \tag{97}$$

Из уравнения (84a) следует, что $N'_{i,1}(t) = 0$ для всех t .

Следовательно, для $k = 2$ уравнение (97) принимает вид

$$N_{i,2}'(t) = \frac{N_{i,1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{N_{i+1,1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}. \quad (98)$$

Вторые производные базисных функций получаем, дифференцируя уравнение (97),

$$N_{i,k}''(t) = \frac{2N_{i,k-1}'(t) + (t - x_i) N_{i,k-1}''(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1,k-1}'(t) - 2N_{i+1,k-1}'(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}. \quad (99)$$

Здесь как $N_{i,1}''(t) = 0$, так и $N_{i,2}''(t) = 0$ равны нулю для всех t . Следовательно, для $k = 3$ уравнение (97) имеет вид

$$N_{i,3}''(t) = 2 \left(\frac{N_{i,2}'(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{N_{i+1,2}'(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}} \right). \quad (100)$$

На рис. 51 изображены несколько базисных функций В-сплайна и их производные для $k = 4$.

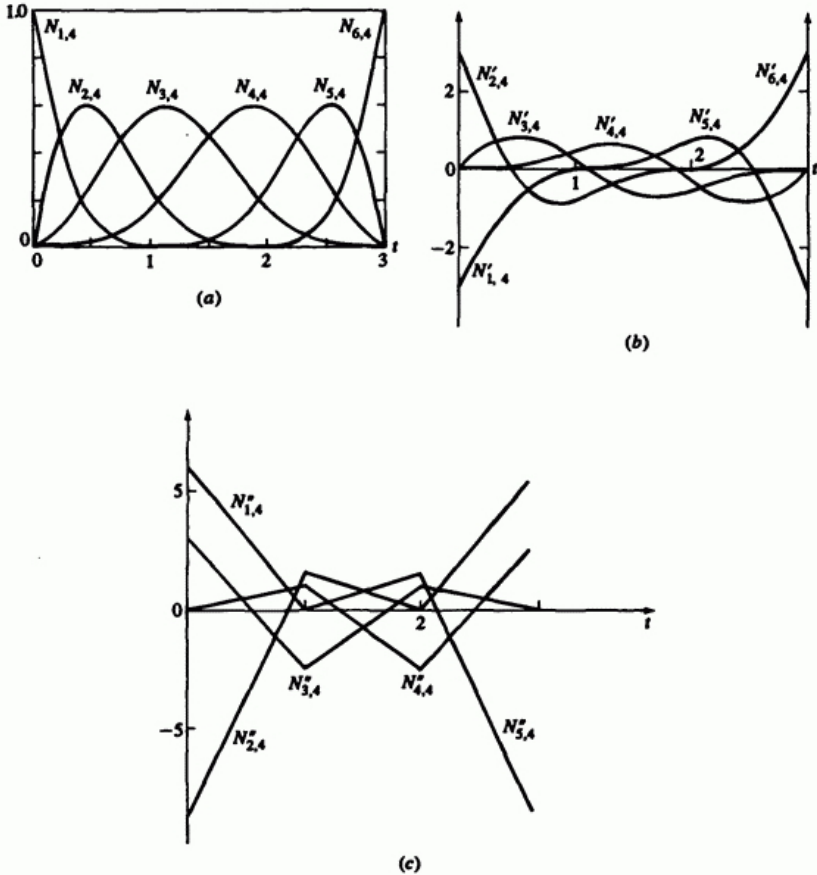


Рис. 51 Базисные функции В-сплайна и их первые и вторые производные, $\kappa = 4$. (a) Базисные функции; (b) первая производная; (c) вторая производная.

Отметим, что при $\kappa = 4$ каждая базисная функция - кусочно кубическая, первая производная - кусочно параболическая, вторая производная - кусочно линейная. Третья производная разрывна и состоит из различных констант.

Рассмотрим пример.

Пример 16. Расчет производных В-сплайна

Рассмотрим многоугольник из примера 12: $B_1[1 \ 1]$, $B_2[2 \ 3]$, $B_3[4 \ 3]$, $B_4[3 \ 1]$ и соответствующий сплайн. Найти первую производную кривой второго порядка ($k = 2$).

Для $k = 2$ открытый узловой вектор имеет вид:

$$[0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3],$$

где $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_6 = 3$. Диапазон параметра $0 \leq t \leq 3$. Из уравнения (95) получаем первую производную для $n = 3$, $k = 2$

$$P'(t) = B_1 N'_{1,2}(t) + B_2 N'_{2,2}(t) + B_3 N'_{3,2}(t) + B_4 N'_{4,2}(t).$$

Из уравнения (98) следует, что

$$N'_{i,2}(t) = \frac{N_{i,1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} - \frac{N_{i+1,1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}.$$

Пользуясь результатами уравнения (12), для $0 \leq t < 1$ получим

$$N_{2,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 2,$$

и

$$N'_{1,2}(t) = -1; \quad N'_{2,2}(t) = 1; \quad N'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2.$$

Итак

$$P'(t) = B_2 - B_1,$$

что является наклоном (касательным вектором) первого ребра многоугольника, как оно и должно быть. Для $1 \leq t < 2$

$$N_{3,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 3$$

и

$$N'_{2,2}(t) = -1; N'_{3,2}(t) = 1; N'_{i,2}(t) = 0, i \neq 2, 3,$$

т.е.

$$P'(t) = B_3 - B_2,$$

что равно наклону (касательному вектору) второго ребра.

Наконец, для $2 \leq t < 3$

$$N_{4,1}(t) = 1; N_{i,1}(t) = 0, i \neq 4$$

и

$$N'_{3,2}(t) = -1; N'_{4,2}(t) = 1; N'_{i,2}(t) = 0, i \neq 3, 4,$$

т.е.

$$P'(t) = B_4 - B_3$$

- наклон последнего ребра.

При $t = 3$, $N_{i,1}(3) = 0$ для всех i . Следовательно, формально $P'(3) = 0$, но предел $t = 3 - \varepsilon$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ показывает, что на самом деле $P'(3) = (B_4 - B_3)$.

4.9. КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В-СПЛАЙНОВ

Как было показано ранее, конец и начало периодического В-сплайна не совпадают с первой и последней вершинами определяющего многоугольника. Отсюда возникают два вопроса. Во-первых, где же именно начинается и заканчивается В-сплайн, и каковы его граничные условия, т.е. производные в этих точках? Во-вторых, что влияет на конечные точки и производные в них? В ряде работ изучается этот вопрос для частного случая кубических ($k = 4$) В-сплайнов. Мы рассмотрим более общий случай.

Произвольный периодический В-сплайн начинается в точке $P_s = P(t = x_k)$ и оканчивается в точке $P_e = P(t = x_{n+1})$. Для целых узловых значений, начинающихся с нуля, $P_s = P(t = k)$ и $P_e = P(t = n)$. Из уравнений (87) и (91), а также из того, что любая точка В-сплайна зависит от k ближайших вершин, следует, что для преобразованного параметра $0 \leq t^* < 1$ начальная точка соответствует $t^* = 0$. Итак

$$P_s = \frac{1}{(k-1)!} \left(N_{k,1}^* B_1 + N_{k,2}^* B_2 + \dots + N_{k,k}^* B_k \right)$$

Заметим, что $N_{k,k}^* = 0$ для всех k

$$P_s = \frac{1}{(k-1)!} \left(N_{k,1}^* B_1 + N_{k,2}^* B_2 + \dots + N_{k,k-1}^* B_{k-1} \right), \quad n \geq k. \quad (101)$$

В конце интервала $t^* = 1$. Известно, что $\sum_{i=1}^k N_{i,1}^* = 0$, поэтому конечная точка

$$P_e = \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^k N_{i,2}^* B_{n-k+3} + \sum_{i=1}^k N_{i,3}^* B_{n-k+4} + \dots + \sum_{i=1}^k N_{i,k}^* B_{n+1} \right), \quad n \geq k. \quad (102)$$

Для квадратичного ($k=3$) периодического сплайна уравнения (101) и (102) принимают вид

$$P_s = \frac{1}{2} (B_1 + B_2)$$

$$P_e = \frac{1}{2} (B_n + B_{n+1})$$

Следовательно, квадратичный периодический В-сплайн начинается и кончается, соответственно, в середине первого и последнего ребер многоугольника.

Конечные точки кубического $(k=4)$ периодического сплайна таковы:

$$F_s = \frac{1}{6}(B_1 + 4B_2 + B_3)$$

$$B_e = \frac{1}{6}(B_{n-1} + 4B_n + B_{n+1})$$

Из уравнения (90) первая производная в начальной точке

$$\begin{aligned} F'_s &= \left[T^{*t} \right]_{t^*=0} \left[N^* \right] [G] = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left(N_{k-1,1}^* B_1 + N_{k-1,2}^* B_2 + \dots + N_{k-1,k-1}^* B_{k-1} \right), \end{aligned} \quad (103)$$

так как $N_{k-1,k}^* = 0$ для всех k . Первая производная в конечной точке

$$\begin{aligned} F'_e &= \left[T^{*t} \right]_{t^*=1} \left[N^* \right] [G] = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^{k-1} (k-i) N_{i,2}^* B_{n-k+3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) N_{i,3}^* B_{n-k+4} + \dots + \sum_{i=1}^{k-1} (k-i) N_{i,k}^* B_{n+1} \right), \end{aligned} \quad (104)$$

$$\left[T^{*k} \right] = \left[\begin{array}{cccc} (k-1)t^{*(k-2)} & (k-2)t^{*(k-3)} & \dots & 1 & 0 \end{array} \right]$$

где

производная вектора параметра.

В случае квадратических $(k=3)$ периодических В-сплайнов эти результаты сводятся к

$$F'_s = \frac{1}{2}(-2B_1 + 2B_2) = B_2 - B_1,$$

$$F'_e = \frac{1}{2}(-2B_n + 2B_{n+1}) = B_{n+1} - B_n,$$

т. е. векторам касательных (наклону) первого и последнего ребер.

Для кубических $(k=4)$ кривых

$$F'_s = \frac{1}{6}(-3B_1 + 3B_3) = \frac{1}{2}(B_3 - B_1),$$

$$F'_e = \frac{1}{6}(-3B_{n-1} + 3B_{n+1}) = \frac{1}{2}(B_{n+1} - B_{n-1}).$$

Здесь касательные векторы (наклоны) зависят от касательных к трем первым и к трем последним сегментам кривой.

Вторые производные в конечных точках:

$$F''_s = \left[T^{*kr} \right]_{f^*=0} \left[N^* \right] [G] =$$

$$= \frac{2}{(k-1)!} \left(N_{k-2,1}^* B_1 + N_{k-2,2}^* B_2 + \dots + N_{k-2,k-1}^* B_{k-1} \right) \quad (105)$$

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon}'' &= \left[T^{*r} \right]_{t^*=1} \left[N^* \right] [G] = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^{k-2} (k-i)(k-i-1) N_{i,2}^* B_{n-k+3} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)(k-i-1) N_{i,3}^* B_{n-k+4} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i=1}^{k-2} (k-i)(k-i-1) N_{i,k}^* B_{n+1} \right), \quad (106) \end{aligned}$$

где $\left[T^{*r} \right] = \begin{bmatrix} (k-1)t^{*(k-2)} & (k-2)t^{*(k-3)} & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$ - вторая производная вектора параметра.

Для кубических ($k=4$) сплайнов уравнения (105) и (106) дают

$$P_s'' = \frac{1}{6} (6B_1 - 12B_2 + 6B_3) = B_1 - 2B_2 + B_3,$$

$$P_{\varepsilon}'' = \frac{1}{6} (6B_{n-1} - 12B_n + 6B_{n+1}) = B_{n-1} - 2B_n + B_{n+1}.$$

Существует два метода регулирования положения первой и последней точек, а также конечных условий: кратные вершины и псевдовершины.

Кратные вершины на концах периодического В-сплайна притягивают концы сплайна к соответствующим вершинам. Если определена $k-1$ совпадающая вершина, то конечные точки кривой совпадают с вершинами многоугольника и касательные (наклон) совпадают с направлением соседних ненулевых ребер.

Например, для $k=3$ с двойными вершинами на концах, т. е. $B_1 = B_2$ и $B_n = B_{n+1}$ из уравнений (101) и (102) следует

$$P_s = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) = \frac{1}{2}(2B_1) = B_1,$$

$$P_e = \frac{1}{2}(B_n + B_{n+1}) = \frac{1}{2}(2B_{n+1}) = B_{n+1}.$$

Для $k=4$ с двойными вершинами на концах эти же уравнения дают

$$P_s = \frac{1}{6}(5B_1 + B_3),$$

$$P_e = \frac{1}{6}(B_{n-1} + 5B_{n+1}).$$

Отсюда начальная точка находится на расстоянии от одной шестой ребра, соединяющего точки B_1 и B_3 , а конечная точка находится на расстоянии в пять шестых ребра от B_{n-1} до B_{n+1} .

Если в концах располагаются по три кратные вершины, т.е. $B_1 = B_2 = B_3$ и $B_{n-1} = B_n = B_{n+1}$ для $k=4$, то

$$P_s = \frac{1}{6}(B_1 + 4B_1 + B_1) = B_1,$$

$$P_e = \frac{1}{6}(B_{n+1} + 4B_{n+1} + B_{n+1}) = B_{n+1}.$$

Кривая начинается и кончается в первой и последней вершинах многоугольника. На рис. 52 изображено влияние кратных вершин.

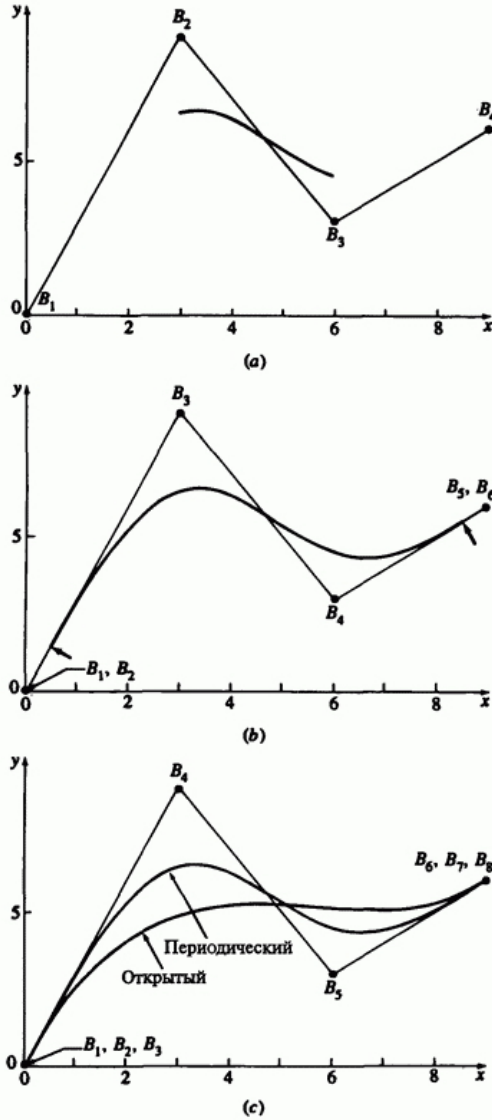


Рис. 52. Совпадающие кратные вершины на концах определяющего многоугольника ($k = 4$). (а) Кратных вершин нет; (б) две кратные вершины; (с) три кратные вершины и соответствующие открытые В-сплайны.

С тремя кратными вершинами на концах первый и последний сегменты В-сплайна для $k = 4$ (см. уравнение 89) имеют вид:

$$P_1(t^*) = B_1 + \frac{t^{*3}}{6}[B_4 - B_1] = B_3 + \frac{t^{*3}}{6}[B_4 - B_3], \quad 0 \leq t^* < 1$$

и

$$P_n(t^*) = B_{n+1} + \frac{(1-t^{*3})}{6}(B_n - B_{n+1})$$

При этом первый и последний сегменты линейны. Первый сегмент на одну шестую длины ребра от $B_1 = B_2 = B_3$ до B_4 совпадает с этим ребром. Последний сегмент на одну шестую ребра от B_{n-2} до $B_{n-1} = B_n = B_{n+1}$ совпадает с соответствующим ребром.

Несмотря на то, что участки можно сделать как угодно малыми, в некоторых прикладных областях это может быть неудобным. В таких случаях лучше пользоваться открытыми В-сплайнами.

Псевдовершины в концах периодического В-сплайна, в отличие от кратных вершин, позволяют управлять как положением конечных точек, так и граничными условиями. В общем случае псевдовершины не обозначаются, и пользователь не может контролировать их. Как показано на рис. 53, B_0 и B_{n+2} - псевдовершины в начале и конце В-сплайна.

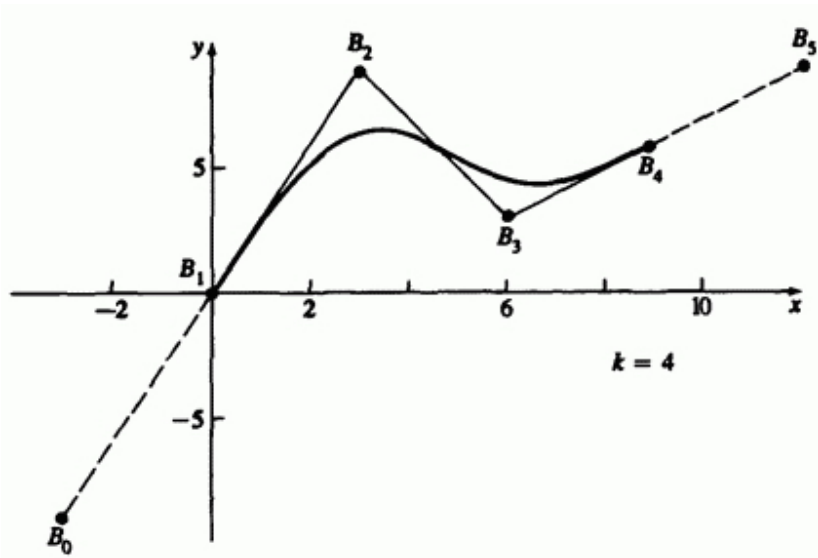


Рис. 53. Псевдовершины определяют начальную и конечную точки периодического В-сплайна.

В этих обозначениях уравнения (101) и (102) принимают вид

$$P_s = \frac{1}{(k-1)!} \left(N_{k,1}^* B_0 + N_{k,2}^* B_1 + \dots + N_{k,k-1}^* B_{k-2} \right), \quad n \geq k \quad (107)$$

и

$$P_e = \frac{1}{(k-1)!} \left(\sum_{i=1}^k N_{i,2}^* B_{n-k+4} + \sum_{i=1}^k N_{i,3}^* B_{n-k+5} + \dots + \sum_{i=1}^k N_{i,k}^* B_{n+2} \right), \quad n \geq k. \quad (108)$$

При $P_s = B_1$ и $P_e = B_{n+1}$ эти уравнения имеют вид

$$B_0 = \left((k-1)! N_{k,2}^* \right) B_1 = \left(N_{k,3}^* B_2 + \dots + N_{k,k-1}^* B_{k-2} \right), \quad n \geq k \quad (109)$$

и

$$B_{n+2} = \left((k-1)! - \sum_{i=1}^k N_{i,k-1}^* \right) B_{n+1} - \left(\sum_{i=1}^k N_{i,2}^* B_{n-k+4} + \dots + \sum_{i=1}^k N_{i,k-2}^* B_n \right), \quad n \geq k, \quad (110)$$

где $N_{k,1}^* = 1$ и $\sum_{i=1}^k N_{i,k}^* = 1$.

Для $k = 3$ из уравнений (109) и (110) следует, что $B_0 = B_1$ и $B_{n+2} = B_{n+1}$, т.е. двукратные вершины на концах!

Для $k = 4$ аналогично

$$B_0 = (6-4) B_1 - B_2 = 2B_1 - B_2$$

и

$$B_{n+2} = (6-4) B_{n+1} - B_n = 2B_{n+1} - B_n.$$

Пример изображен на рис. 53.

Первая и вторая производные в концах выражены уравнениями (103) и (104) с соответствующими изменениями для учета псевдовершин.

Например, используя приведенные результаты для B_0 , из уравнений (103) и (104) для $k = 4$ получаем

$$F'_s = \frac{1}{2}(B_2 - B_0) = \frac{1}{2}\{B_2 - (2B_1 - B_2)\} = B_2 - B_1$$

и

$$F'_e = \frac{1}{2}(B_{n+2} - B_n) = \frac{1}{2}\{2B_{n+1} - B_n - B_n\} = B_{n+1} - B_n$$

Итак, кривая касательна к первому и последнему ребрам многоугольника.

Аналогично, для $k = 4$ и точек B_0 и B_{n+2} из уравнений (105) и (106) следует

$$F''_s = B_0 - 2B_1 + B_2 = 2B_1 - B_2 - 2B_1 + B_2 = 0,$$

$$F''_e = B_n + 2B_{n+1} + B_{n+2} = B_n - 2B_{n+1} + 2B_{n+1} - B_n = 0,$$

т.е. «кривизна» в концах нулевая.

Переписав уравнения (103) и (104), можно определить псевдовершины, порождающие заданные граничные условия. В частности, из уравнения (103)

$$B_0 = \frac{1}{N_{k-1,1}^*} \left\{ (k-1)! F'_s - \left(N_{k-1,2}^* B_1 + \dots + N_{k-1,k-1}^* B_{k-2} \right) \right\}, \quad n \geq k, \quad (111)$$

а из уравнения (104)

$$B_{n+2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k-1} (k-1) N_{i,k}^*} \left\{ (k-1) F'_e - \dots \right\}$$

$$-\left(\sum_{i=1}^{k-1} (k-1) N_{i,2}^* B_{n-k+4} + \dots + \sum_{i=1}^{k-1} (k-1) N_{i,k-1}^* B_{n+1} \right) \Bigg\}, \quad n \geq k. \quad (112)$$

Для $k = 4$ уравнения (111) и (112) сводятся к

$$B_0 = B_2 - 2P'_5,$$

$$B_{n+2} = 2P'_e + B_n.$$

Типичный пример изображен на рис. 54.

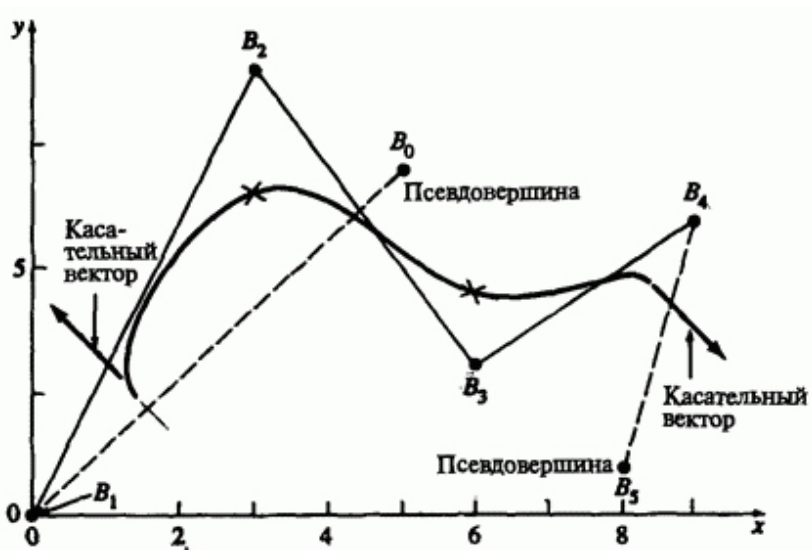


Рис. 54. Управление касательным вектором для периодического В-сплайна, $k = 4$.

Конечные точки кривой получены подстановкой этих значений в уравнения (107) и (108). Из рисунка видно, что первая и последняя точки кривой с заданными касательными на концах для

многоугольника $B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ не совпадают с соответствующими точками кривой для многоугольника $B_1 B_2 B_3 B_4$ (отмечено крестиками).

Для управления второй производной или приближительной кривизной в концах кривой перепишем уравнения (105) и (106) в виде

$$B_0 = \frac{1}{N_{k-2,1}^*} \left\{ \frac{(k-1)!}{2} P_s'' - \left(N_{k-2,2}^* B_1 + \dots + N_{k-2,k-1}^* B_{k-2} \right) \right\}, \quad n \geq k, \quad (113)$$

и

$$B_{n+2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k-1} (k-1)(k-i-1) N_{i,k}^*} \left\{ (k-1)! P_e'' - \right. \\ \left. - \left(\sum_{i=1}^{k-2} (k-1)(k-i-1) N_{i,2}^* B_{n-k+4} + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \sum_{i=1}^{k-2} (k-1)(k-i-1) N_{i,k-1}^* B_{n+1} \right) \right\}, \quad n \geq k. \quad (114)$$

Для $k = 4$ из уравнений (113) и (114) следует

$$B_0 = B_s'' + 2B_1 - B_2,$$

$$B_{n+2} = P_e'' + 2B_{n+1} - B_n.$$

Чтобы получить конечные точки, надо подставить эти значения в уравнения (107) и (108). Касательные векторы получаются аналогично,

с помощью уравнений (103) и (104), переписанных относительно B_0 и B_{n+2} .

4.10. ПОДГОНКА В-СПЛАЙНОВ

В предыдущем разделе рассматривалось построение В-сплайна по определяющему многоугольнику. Сейчас нам нужно найти многоугольник, порождающий В-сплайн, для заданного множества точек кривой, как показано на рис. 55.

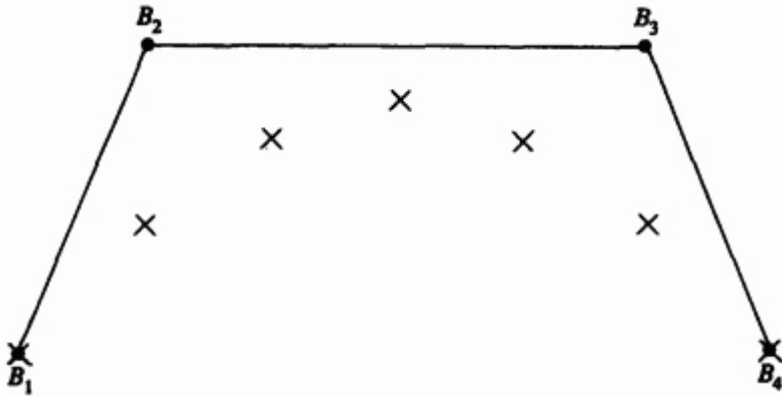


Рис. 55. Построение многоугольника В-сплайна для заданного множества точек.

Точка, лежащая в В-сплайне, должна удовлетворять уравнению (83). Запишем уравнение (83) для всех j заданных точек

$$D_1(t_1)N_{1,k}(t_1)B_1 + N_{2,k}(t_1)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_1)B_{n+1},$$

$$D_2(t_2)N_{1,k}(t_2)B_1 + N_{2,k}(t_2)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_2)B_{n+1},$$

⋮

$$D_j(t_j)N_{1,k}(t_j)B_1 + N_{2,k}(t_j)B_2 + \dots + N_{n+1,k}(t_j)B_{n+1}$$

где $2 \leq k \leq n+1 \leq j$, или в матричной форме

$$[D] = [N][B], \tag{115}$$

где

$$[D]^T = [D_1(t_1) \quad D_2(t_2) \quad \dots \quad D_j(t_j)],$$

$$[B]^T = [B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_{n+1}],$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_{1,k} & \dots & \dots & N_{n+1,k}(t_1) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ N_{1,k}(t_j) & \dots & \dots & N_{n+1,k}(t_j) \end{bmatrix}.$$

При $2 \leq k \leq n+1 = j$ матрица $[N]$ квадратная, и определяющий многоугольник вычисляется непосредственно обращением матрицы, т.е.

$$[B] = [N]^{-1}[D] \quad 2 \leq k \leq n+1 = j. \tag{116}$$

В этом случае В-сплайн проходит через все заданные точки, т. е. достигается точная подгонка. Кривая на всем протяжении C^{k-2} непрерывна, но при этом она может быть недостаточно гладкой на вид и иметь нежелательные изгибы.

Если указать меньшее число вершин многоугольника, чем количество заданных точек, т.е. $2 \leq k \leq n+1 < j$, кривая будет более гладкой.

При этом матрица $[N]$ становится неквадратной, и можно найти только общее решение. Воспользуемся тем, что произведение матрицы на транспонированную всегда дает квадратную матрицу.

Вершины определяющего многоугольника, сглаживающего кривую заданы условием

$$[D] = [N][B],$$

$$[N]^T [D] = [N]^T [N][B]$$

и

$$[B] = \left[[N]^T [N] \right]^{-1} [N]^T [D]. \tag{117}$$

Оба метода подразумевают, что матрица $[N]$ известна. Базисные функции $N_{i,k}(t_j)$ и, следовательно, матрицу $[N]$ можно получить, если задан порядок В-сплайна k , количество точек многоугольника $n+1$, а также величина параметра вдоль кривой. При соблюдении условия $2 \leq k \leq n+1 \leq j$ порядок и количество вершин произвольны.

Величина параметра t_j для каждой заданной точки - это мера расстояния до точки вдоль В-сплайна. Удобна аппроксимация параметра с помощью длин хорд между заданными точками; в частности, для j точек величина параметра в точке l

$$t_l = 0$$

$$\frac{t_l}{t_{\max}} = \frac{\sum_{s=2}^l |D_s - D_{s-1}|}{\sum_{s=2}^j |D_s - D_{s-1}|}, \quad l \geq 2.$$

Максимальное значение параметра t_{\max} обычно выбирается в качестве максимальной величина узлового вектора. Подобные методы рассматриваются в ряде работ.

Для открытого равномерного узлового вектора с k кратными вершинами на концах кривая Безье получается при $n = k$.

Рассмотрим пример.

Пример 17. Подгонка В-сплайна

Даны пять точек $D_1[0 \ 0]$, $D_2[1.5 \ 2]$, $D_3[3 \ 2.5]$, $D_4[4.5 \ 2]$, $D_5[6 \ 0]$. Найти определяющие многоугольники третьего порядка ($k=3$) с пятью и четырьмя вершинами для В-сплайна, проходящего через данные точки. Использовать хордовую аппроксимацию параметра.

Сначала найдем длины хорд.

$$D_{21} = |D_2 - D_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1.5)^2 + (2)^2} = \sqrt{6.25} = 2.5,$$

$$D_{32} = |D_3 - D_2| = \sqrt{(1.5)^2 + (0.5)^2} = 1.58,$$

$$D_{43} = |D_4 - D_3| = \sqrt{(1.5)^2 + (-0.5)^2} = 1.58$$

$$D_{54} = |D_5 - D_4| = \sqrt{(1.5)^2 + (-2)^2} = 2.5$$

и

$$\sum_{s=2}^5 (D_s - D_{s-1}) = D_{51} = 8.16$$

Итак

$$t_1 = 0$$

$$\frac{t_2}{t_{\max}} = \frac{D_{21}}{D_{51}} = \frac{2.5}{8.16} = 0.31$$

$$\frac{t_3}{t_{\max}} = \frac{D_{31}}{D_{51}} = \frac{(2.5+1.58)}{8.16} = 0.5$$

$$\frac{t_4}{t_{\max}} = \frac{D_{41}}{D_{51}} = \frac{(2.5+1.58+1.58)}{8.16} = 0.69$$

$$\frac{t_5}{t_{\max}} = \frac{D_{51}}{D_{51}} = 1$$

Для пятиугольника максимальное значение узлового вектора у В-сплайна третьего порядка $n - k + 2 = 4 - 3 + 2 = 3$. Здесь n на единицу меньше количества вершин многоугольника. Узловой вектор с кратностью k на концах имеет вид

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

Уравнение (115) с этими значениями выглядит следующим образом:

$$[D] = [N][B]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 2 \\ 3 & 2.5 \\ 4.5 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.007 & 0.571 & 0.422 & 0 & 0 \\ 0 & 0.125 & 0.75 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0.422 & 0.571 & 0.007 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [B]$$

Решим относительно $[B]$

$$[B] = [N]^{-1}[D] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.013 & 2.037 & -307 & 0.286 & -0.002 \\ 0.003 & -0.387 & 1.769 & -0.287 & 0.003 \\ -0.002 & 0.286 & -1.307 & 2.037 & -0.013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1.5 & 2 \\ 3 & 2.5 \\ 4.5 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.409 & 1.378 \\ 3 & 2.874 \\ 5.591 & 1.377 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. 56а изображены исходные точки, рассчитанные вершины многоугольника и кривая.

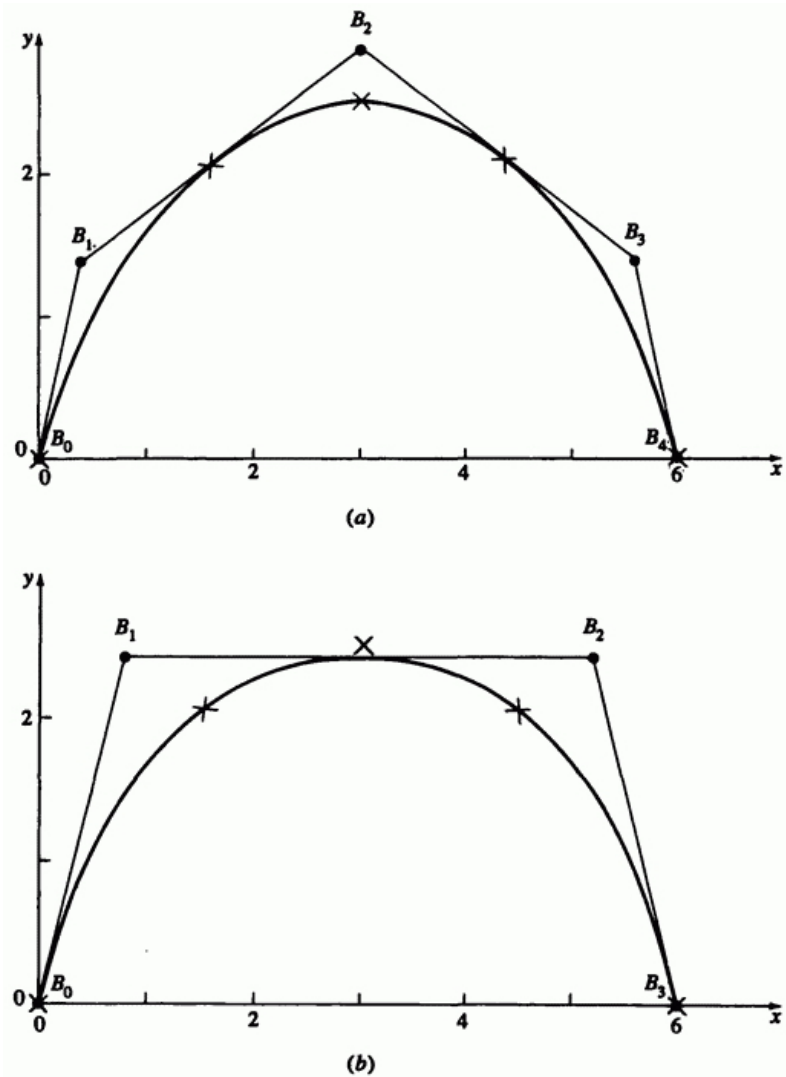


Рис. 56. Результаты для примера 17. (а) Пятиугольник; (б) четырехугольник.

Для четырехугольника узловой вектор с кратностью k на концах:

$$[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Матрица $[N]$:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.662 & 0.188 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.188 & 0.662 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножим на $[N]^T$ и обратим ее:

$$[[N]^T [N]]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.995 & -0.21 & 0.106 & -0.005 \\ -0.21 & 2.684 & -1.855 & 0.106 \\ 0.106 & -1.855 & 2.684 & -0.21 \\ -0.005 & 0.106 & -0.21 & 0.995 \end{bmatrix}$$

Тогда из уравнения (117) получим

$$[B] = [[N]^T [N]]^{-1} [N]^T [D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.788 & 2.414 \\ 5.212 & 2.414 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

На рис. 56b изображены исходные точки, рассчитанные вершины многоугольника и кривая.

Этот метод допускает произвольное расположение всех точек определяющего многоугольника в трехмерном пространстве, но иногда бывает удобно ограничиться плоскостью, например при подгонке В-сплайна под заданный контур корабля. В ряде работ приведен соответствующий метод как для кривых, так и для поверхностей. Его сущность состоит в том, что итеративно вычисляется параметр для фиксированной координаты до тех пор, пока значение на кривой при величине параметра, вычисленной по подогнутому многоугольнику, не попадает в некоторую окрестность фиксированного значения, т.е.

$|x_{\text{fixed}} - x_{\text{calc}}| \leq \text{error}$. Подгонка получается менее точной, но более удобной для модификаций.

4.11. РАЗБИЕНИЕ В-СПЛАЙНОВ

Для того чтобы увеличить гибкость кривой Безье, необходимо добавить вершину к определяющему многоугольнику, что повышает степень полиномиальной кривой. Гибкость В-сплайна также растет с увеличением порядка его базиса, т. е. полиномиальных сегментов. В ряде работ предлагаются теория и алгоритм увеличения порядка В-сплайна.

Повысить гибкость В-сплайна можно другим способом: вставить дополнительные узловые значения в определяющий узловой вектор. При этом полиномиальный сегмент для некоторого интервала узловых значений (параметрического интервала) локально разбивается на два. Есть два основных метода вставки узловых значений. Первый, так называемый алгоритм Осло, разработанный Коэном и др., вставляет сразу несколько узловых значений. Второй метод Бема последовательно вставляет по одному узловому значению. Мы рассмотрим только метод Осло.

Как повышение порядка, так и дополнительные узловые значения увеличивают гибкость базиса кривой (поверхности) и, следовательно, кривой без изменения ее формы. Это возможно потому, что один В-сплайн можно задать бесконечным множеством многоугольников с более чем минимальным количеством вершин. Форма кривой меняется путем передвижения вновь полученных вершин.

$$P(t) = \sum_{i=1}^{m+1} B_i N_{i,k}(t)$$

Рассмотрим исходную кривую с узловым вектором $[X] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{m+k-1}]$. Вставив узел, получаем новую кривую $R(s)$:

$$R(s) = \sum_{j=1}^{m+1} C_j M_{j,k}(s) \tag{118}$$

с новым узловым вектором

$$[Y] = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{m+k+1}],$$

где $m > n$. Надо найти новые вершины определяющего многоугольника C_j , такие, что $P(t) = R(s)$. По алгоритму Осло

$$C_j = \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_{i,j}^k B_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m, \tag{119}$$

где $\alpha_{i,j}^k$ заданы рекурсивным отношением

$$\alpha_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & x_i \leq y_j < x_{i+1}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}, \tag{120a}$$

$$\alpha_{i,j}^k = \frac{y_{j+k-1} - x_i}{x_{i+k-1} - x_i} \alpha_{i,j}^{k-1} + \frac{x_{i+k} - y_{j+k-1}}{x_{i+k} - x_{i+1}} \alpha_{i+1,j}^{k-1}. \tag{120b}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,j}^k = 1$$

Отметим, что

На первый взгляд может показаться, что равномерный исходный вектор, неважно периодический или открытый, после вставки одного или более узловых значений станет неравномерным. Равномерность вектора можно сохранить, добавляя кратные узловые значения в середину каждого ненулевого интервала. Рассмотрим разбиение подробнее на примере.

Пример 18. Глобальное разбиение В-сплайна

Пусть дан открытый В-сплайн третьего порядка ($k=3$), изначально заданный четырьмя ($n+1=4$) вершинами $B_1[0 \ 0]$, $B_2[1 \ 1]$, $B_3[2 \ 1]$, $B_4[3 \ 0]$. Требуется провести разбиение с сохранением открытого равномерного узлового вектора.

Исходный открытый равномерный вектор имеет вид:

$$[X'] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2],$$

где два ненулевых интервала $0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 2$ соответствуют двум кусочно параболическим сегментам, составляющим В-сплайн. Предположим, что после разбиения мы должны иметь целочисленный равномерный вектор. Проведем преобразование параметра, умножая каждое узловое значение в $[X']$ на 2, и получим

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 4 \ 4 \ 4]$$

с $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_7 = 4$. Кривая при этом не меняется.

Для разбиения кривой с учетом поставленных условий необходимо

вставить узловые значения 1 и 3 в интервалы $0 \rightarrow 2$ и $2 \rightarrow 4$, соответственно. Запишем новый узловой вектор:

$$[Y] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$$

$$c \ y_1 = 0, \ y_2 = 0, \ \dots, \ y_9 = 4.$$

Теперь В-сплайн состоит из четырех параболических сегментов.

Из уравнения (119) получим шесть новых вершин C_j . Значения $\alpha_{i,j}^3$ вычисляются с помощью рекурсивных соотношений (120). В частности, из уравнения (120а) видно, что единственное ненулевое $\alpha_{i,j}^1$ первого порядка ($k=1$) таково:

$$\alpha_{3,1}^1 = \alpha_{3,2}^1 = \alpha_{3,3}^1 = \alpha_{3,4}^1 = \alpha_{4,5}^1 = \alpha_{4,6}^1 = 1.$$

Из уравнения (120b) ненулевые $\alpha_{i,j}^2$ второго порядка ($k=2$) таковы:

$$j = 1$$

$$\alpha_{3,1}^2 = \frac{y_2 - x_3}{x_4 - x_3} \alpha_{3,1}^1 = \frac{0 - 0}{2 - 0} (1) = 0,$$

$$\alpha_{2,1}^2 = \frac{x_4 - y_2}{x_4 - x_3} \alpha_{3,1}^1 = \frac{2 - 0}{2 - 0} (1) = 1,$$

$$j = 2,$$

$$\alpha_{2,2}^2 = \frac{x_4 - y_3}{x_4 - x_3} \alpha_{3,1}^1 = \frac{2-0}{2-0} (1) = 1,$$

$$\alpha_{3,2}^2 = \frac{y_3 - x_3}{x_4 - x_3} \alpha_{3,2}^1 = \frac{0-0}{2-0} (1) = 0,$$

$$j = 3,$$

$$\alpha_{3,3}^2 = \frac{y_4 - x_3}{x_4 - x_3} \alpha_{3,3}^1 = \frac{1-0}{2-0} (1) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{2,3}^2 = \frac{x_4 - y_4}{x_4 - x_3} \alpha_{3,3}^1 = \frac{2-1}{2-0} (1) = \frac{1}{2},$$

$$j = 4,$$

$$\alpha_{3,4}^2 = \frac{y_5 - x_3}{x_4 - x_3} \alpha_{3,4}^1 = \frac{2-0}{2-0} (1) = 1,$$

$$\alpha_{2,4}^2 = \frac{x_4 - y_5}{x_4 - x_3} \alpha_{3,4}^1 = \frac{2-2}{2-0} (1) = 0,$$

$$j = 5,$$

$$\alpha_{4,5}^2 = \frac{y_6 - x_4}{x_5 - x_4} \alpha_{4,5}^1 = \frac{3-2}{4-2} (1) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{3,5}^2 = \frac{x_5 - y_6}{x_5 - x_4} \alpha_{4,5}^1 = \frac{4-3}{4-2} (1) = \frac{1}{2},$$

$$j = 6,$$

$$\alpha_{4,6}^2 = \frac{y_7 - x_4}{x_5 - x_4} \alpha_{4,6}^1 = \frac{4-2}{4-2} (1) = 1,$$

$$\alpha_{3,6}^2 = \frac{x_5 - y_7}{x_5 - x_4} \alpha_{4,6}^1 = \frac{4-4}{4-2} (1) = 0,$$

третьего порядка ($k = 3$)

$$j = 1,$$

$$\alpha_{2,1}^3 = \frac{y_3 - x_2}{x_4 - x_2} \alpha_{2,1}^2 = \frac{0-0}{2-0} (1) = 0,$$

$$\alpha_{1,1}^3 = \frac{x_4 - y_3}{x_4 - x_2} \alpha_{2,1}^2 = \frac{2-0}{2-0} (1) = 1,$$

$$j = 2,$$

$$\alpha_{4,2}^3 = \frac{x_4 - y_4}{x_4 - x_2} \alpha_{2,2}^2 = \frac{2-1}{2-0} (1) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{2,2}^3 = \frac{y_4 - x_2}{x_4 - x_2} \alpha_{2,2}^2 = \frac{1-0}{2-0} (1) = \frac{1}{2},$$

$j = 3$,

$$\alpha_{3,3}^3 = \frac{y_5 - x_3}{x_5 - x_3} \alpha_{3,3}^2 = \frac{2-0}{4-0} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4},$$

$$\alpha_{2,3}^3 = \frac{y_5 - x_2}{x_4 - x_2} \alpha_{2,3}^2 + \frac{x_5 - y_5}{x_5 - x_3} \alpha_{3,3}^2 = \frac{2-0}{2-0} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{4-2}{4-0} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\alpha_{1,3}^3 = \frac{x_4 - y_5}{x_4 - x_2} \alpha_{2,3}^2 = \frac{2-2}{2-0} \left(\frac{1}{2} \right) = 0,$$

$j = 4$,

$$\alpha_{3,4}^3 = \frac{y_6 - x_3}{x_5 - x_3} \alpha_{3,4}^2 = \frac{3-0}{4-0} (1) = \frac{3}{4},$$

$$\alpha_{2,4}^3 = \frac{x_5 - y_6}{x_5 - x_3} \alpha_{3,4}^2 = \frac{4-3}{4-0} (1) = \frac{1}{4},$$

$j = 5$,

$$\alpha_{2,5}^3 = \frac{x_5 - y_7}{x_5 - x_3} \alpha_{3,5}^2 = \frac{4-4}{4-0} \left(\frac{1}{2} \right) = 0,$$

$$\alpha_{3,5}^3 = \frac{y_7 - x_3}{x_5 - x_3} \alpha_{3,5}^2 + \frac{x_6 - y_7}{x_6 - x_4} \alpha_{4,5}^2 = \frac{4-0}{4-0} \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{4-4}{4-2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_{4,5}^3 = \frac{y_7 - x_4}{x_6 - x_4} \alpha_{4,5}^2 = \frac{4-2}{4-2} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2},$$

$$j = 6,$$

$$\alpha_{4,6}^3 = \frac{y_8 - x_4}{x_6 - x_4} \alpha_{4,6}^2 = \frac{4-2}{4-2} (1) = 1,$$

$$\alpha_{3,6}^3 = \frac{x_6 - y_8}{x_6 - x_4} \alpha_{4,6}^2 = \frac{4-4}{4-2} (1) = 0.$$

Новые вершины рассчитываются по уравнению (119):

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_{i,1}^3 B_i = \alpha_{1,1}^3 B_1 + \alpha_{2,1}^3 B_2 + \alpha_{3,1}^3 B_3 + \alpha_{4,1}^3 B_4 = \\ &= \alpha_{1,1}^3 B_1 = B_1 = [0 \quad 0]. \end{aligned}$$

Аналогично

$$C_2 = \frac{1}{2} (B_1 + B_2) = \frac{1}{2} ([0 \quad 0] + [1 \quad 1]) = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right],$$

$$C_3 = \frac{3}{4} B_2 + \frac{1}{4} B_3 = \frac{3}{4} [1 \quad 1] + \frac{1}{4} [2 \quad 1] = \left[\frac{5}{4} \quad 1 \right],$$

$$C_4 = \frac{1}{4} B_2 + \frac{3}{4} B_3 = \frac{1}{4} [1 \quad 1] + \frac{3}{4} [2 \quad 1] = \left[\frac{7}{4} \quad 1 \right],$$

$$C_5 = \frac{1}{2}(B_3 + B_4) = \frac{1}{2}([2 \ 1] + [3 \ 0]) = \left[\frac{5}{2} \ \frac{1}{2} \right],$$

$$C_6 = B_4 = [3 \ 0].$$

В результате увеличивается гибкость всей кривой.

В следующем примере в исходный открытый равномерный узловой вектор вносится один узел, после чего вектор становится неоднородным.

Пример 19. Локальное разбиение В-сплайна

Рассмотрим открытый В-сплайн третьего порядка ($k=3$) из примера 18. Провести разбиение, добавив узловое значение 1 на интервале $0 \rightarrow 1$ вектора: $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$, где $x_1 = 0, \dots, x_7 = 2$. Новый узловой вектор имеет вид: $[Y] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$, где $y_1 = 0, \dots, y_8 = 2$. Новый многоугольник имеет пять вершин $C_1 \dots C_5$.

Ненулевые $a_{i,j}^k$, необходимые для расчета C_j :

$$k = 1,$$

$$a_{3,1}^1 = a_{3,2}^1 = a_{3,3}^1 = a_{3,4}^1 = a_{4,5}^1 = 1,$$

$$k = 2,$$

$$\alpha_{2,1}^2 = \alpha_{2,2}^2 = \alpha_{3,3}^2 = \alpha_{3,4}^2 = \alpha_{4,5}^2 = 1,$$

$$k = 3,$$

$$\alpha_{4,1}^3 = \alpha_{2,2}^3 = \alpha_{3,4}^3 = \alpha_{4,5}^3 = 1, \quad \alpha_{3,3}^3 = \alpha_{2,3}^3 = \frac{1}{2}.$$

Новые вершины:

$$C_1 = \alpha_{3,1}^3 B_1 = B_1 = [0 \quad 0],$$

$$C_2 = \alpha_{3,2}^3 B_2 = B_2 = [1 \quad 1],$$

$$C_3 = \alpha_{2,3}^3 B_2 + \alpha_{3,3}^3 B_3 = \frac{1}{2}(B_2 + B_3) = \frac{1}{2}([1 \quad 1] + [2 \quad 1]) = \left[\frac{3}{2} \quad 1 \right],$$

$$C_4 = \alpha_{3,4}^3 B_3 = B_3 = [2 \quad 1],$$

$$C_5 = \alpha_{4,5}^3 B_4 = B_4 = [3 \quad 0].$$

Если C_3 сдвинуть до совпадения с C_2 , т. е. $C_2 = C_3 = [1 \quad 1]$, то получится как двойная вершина, так и двойной узел для $C_2 = C_3$. Для $k = 3$ В-сплайн имеет острый пик в $C_2 = C_3$ (см. задачу 30).

4.12. РАЦИОНАЛЬНЫЕ В-СПЛАЙНЫ

Впервые в машинной графике описание рациональных кривых и поверхностей было предложено в ряде работ. В литературе широко известны рациональные формы кубических сплайнов и кривых Безье, а также конических сечений. Здесь мы рассмотрим только рациональные В-сплайны, так как они составляют общепринятую основу, а также из-за пространственных ограничений. **Рациональные В-сплайны это единственное точное математическое представление, охватывающее все аналитические формы** - прямые, плоскости, конические сечения, включающие окружности, кривые произвольной формы, квадрики и трехмерные поверхности, используемые в машинной графике и проектировании.

Первым рациональные В-сплайны изучил Весприлл. Основа наших рассуждений приведена в ряде работ. Стоит отметить, что неравномерные рациональные В-сплайны (NURBS) с 1983 г. являются стандартом IGES (42). **IGES - это стандарт обмена проектной информацией между системами машинного проектирования, а также между ними и системами автоматизированного производства.** Рациональные В-сплайны применяются в ряде систем геометрического моделирования и **реализованы аппаратно** (СБИС или микрокод) в некоторых графических рабочих станциях.

Рациональный В-сплайн это проекция нерационального (полиномиального) В-сплайна, определенного в четырехмерном (4D) однородном координатном пространстве, на трехмерное (3D) физическое пространство. В частности

$$P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i^h N_{i,k}(t), \quad (121)$$

где B_i^h - вершины многоугольника для нерационального 4D В-сплайна в четырехмерном пространстве, $N_{i,k}(t)$ - функция базиса нерационального В-сплайна из уравнения (84).

Рациональный В-сплайн получается после проектирования, т.е. деления на однородную координату

$$P(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R_{i,k}(t) \quad (122)$$

где B_i - вершины трехмерного многоугольника для рационального В-сплайна, а

$$R_{i,k}(t) = \frac{h_i N_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t)} \quad (123)$$

- базисные функции рационального В-сплайна. Здесь $h_i \geq 0$ для всех i .

Как видно из уравнений (121)-(123), рациональные В-сплайны и их базисы это обобщение нерациональных В-сплайнов и базисов. Они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних. В частности:

Каждая функция рационального базиса положительна или равна нулю для всех значений параметра, т. е. $R_{i,k} \geq 0$.

Для любого значения параметра t сумма базисных функций рационального В-сплайна равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n+1} R_{i,k}(t) \equiv 1 \quad (124)$$

Кроме $k = 1$ каждая рациональная базисная функция имеет ровно один максимум.

Рациональный В-сплайн порядка k (степени $k - 1$) везде C^{k-2} непрерывен.

Максимальный порядок рационального В-сплайна равен количеству вершин определяющего многоугольника.

Рациональный В-сплайн обладает свойством уменьшения вариации.

Общая форма рационального В-сплайна повторяет очертания определяющего многоугольника.

Любое проективное преобразование рационального В-сплайна производится соответствующим преобразованием вершин определяющего многоугольника; т. е. кривая инварианта относительно проективного преобразования. Это более сильное условие, чем для нерационального В-сплайна, который инвариантен только относительно аффинного преобразования.

Из уравнений (85) и (123) видно, что при всех $k_i = 1$, $R_{i,k}(t) = N_{i,k}(t)$, т.е. нерациональные В-сплайны и их базисы являются частным случаем рациональных. Легко показать, что открытый рациональный В-сплайн с порядком, равным количеству вершин определяющего многоугольника, представляет собой рациональную кривую Безье. В случае $k_i = 1$ рациональная кривая Безье сводится к нерациональной. Таким образом, В-сплайны включают как рациональные, так и нерациональные кривые Безье.

Рациональные В-сплайны - это четырехмерное обобщение нерациональных В-сплайнов; поэтому алгоритмы повышения степени (пример 18), разбиения и подгонки для нерациональных В-сплайнов справедливы и для рациональных при распространении их на четырехмерное пространство.

Рациональные В-сплайны и их базисы можно получить с помощью открытых равномерных, периодических равномерных и неравномерных узловых векторов.

Однородные координаты k_i (также называемые весами) в уравнениях (122) и (123) предоставляют дополнительные возможности изгиба кривой; $k = 1$ называется аффинным пространством и соответствует физическому пространству. На рис. 57 показано влияние однородных координат k на базисные функции рационального В-сплайна, где $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$ ($n+1=5, k=3$) - открытый равномерный узловой вектор, $k_i = 1, i+3$ - вектор однородных координат. Значения k_3 лежат в диапазоне от 0 до 5.

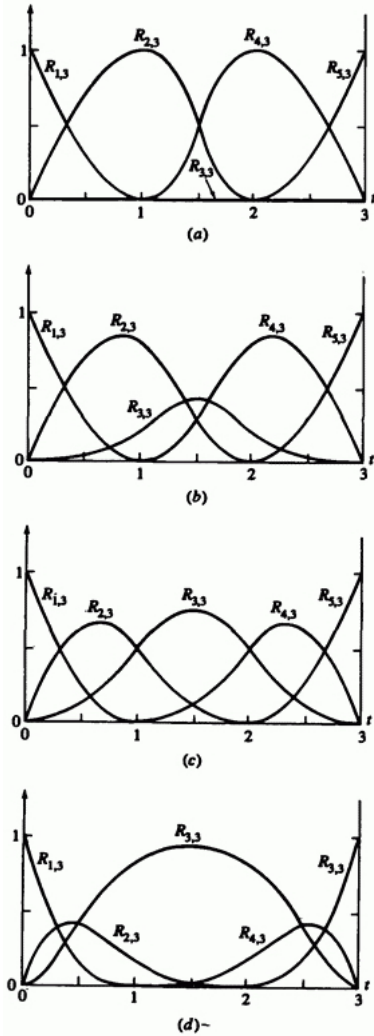


Рис. 57. Базисные функции рационального В-сплайна для $n+1=5$, $k=3$ с открытым узловым вектором $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$. (a) $h_3=0$; (b) $h_3=0.25$; (c) $h_3=1.0$; (d) $h_3=5.0$

Базисные функции рационального В-сплайна на рис. 57с при $h_3 = 1$ совпадают с соответствующими функциями нерационального В-сплайна. Рациональный В-сплайн для $h_3 = 1$ на рис. 58 также совпадает с соответствующим нерациональным.

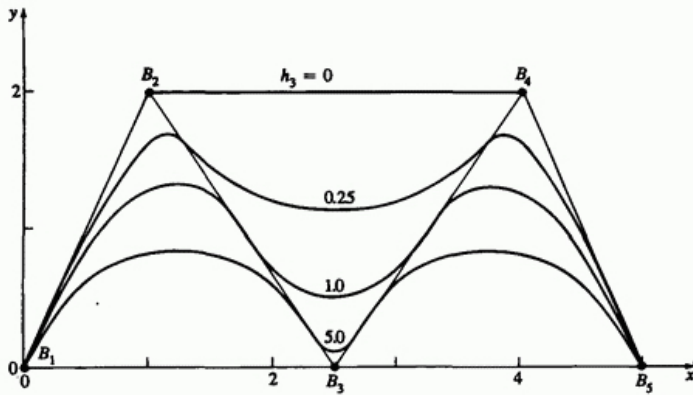


Рис. 58. Рациональные В-сплайны для $n+1=5$, $k=3$ с открытым узловым вектором $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$.

Отметим, что для $h_3 = 0$ (рис. 57а) $R_{3,3}$ везде равно нулю; т. е. соответственная вершина B_3 не оказывает никакого влияния на форму соответствующей кривой. Это показано на рис. 58, где вершины определяющего многоугольника B_2 и B_4 соединены прямой. Из рис. 57 также видно, что при увеличении h_3 также возрастает $R_{3,3}$ и, вследствие уравнения (124), $R_{2,3}$ и $R_{4,3}$ уменьшаются. На рис. 58 изображено воздействие на соответствующие рациональные В-сплайны. В частности отметим, что с увеличением h_3 кривая приближается к B_3 . Отсюда, как уже отмечалось, следует, что однородные координаты дают возможность увеличить гибкость кривой. Иллюстрация аналогичных свойств рациональных В-сплайнов и базисов четвертого порядка ($k=4$) дана на рис. 59 и 60.

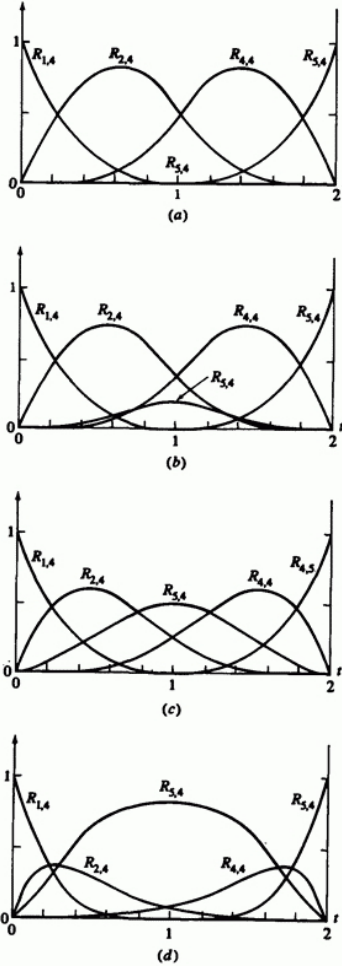


Рис. 59. Базисные функции рационального В-сплайна для $n+1=5$, $k=4$ с открытым узловым вектором $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$,

$[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$. (a) $h_3=0$; (b) $h_3=0.25$; (c) $h_3=1.0$; (d) $h_3=5.0$.

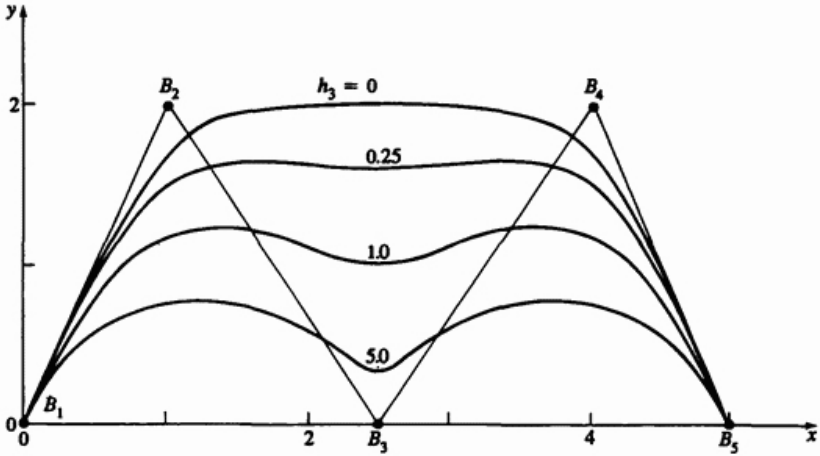


Рис. 60. Рациональные В-сплайны для $n+1=5$, $k=4$ с открытым узловым вектором $[X]=[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$.

Однако для кривых более высокого порядка на рис. 60 кривая при $h_3 = 0$ не вырождается в отрезок прямой между B_2 и B_4 .

На рис. 61 изображен периодический равномерный базис для $n+1=5$, $k=3$ и узлового вектора $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$ и вектора однородных координат $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]_c$, $0 \leq h_3 \leq 5$.

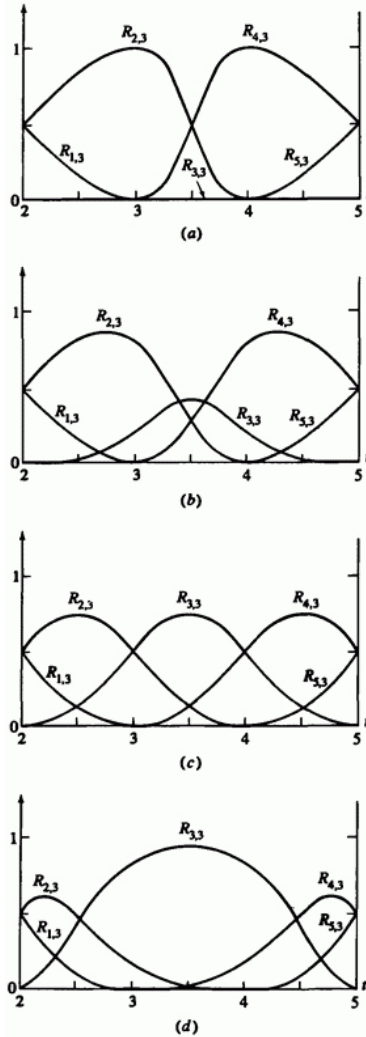


Рис. 5-61 Базисные функции рационального В-сплайна для $n+1=5$, $k=3$
 с периодическим узловым вектором
 $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$. (a)
 $h_3=0$; (b) $h_3=0.25$; (c) $h_3=1.0$; (d) $h_3=5.0$.

Здесь, как и в случае нерационального базиса, допустимый диапазон параметра $2 \leq t \leq 5$. На рис. 61 показан только этот диапазон. Для $h_3 = 1$ базисные функции рационального В-сплайна совпадают с соответствующими нерациональными, но для $h_3 \neq 1$ они становятся непериодическими и не являются параллельным переносом друг друга. На рис. 62 приведены соответствующие рациональные В-сплайны.

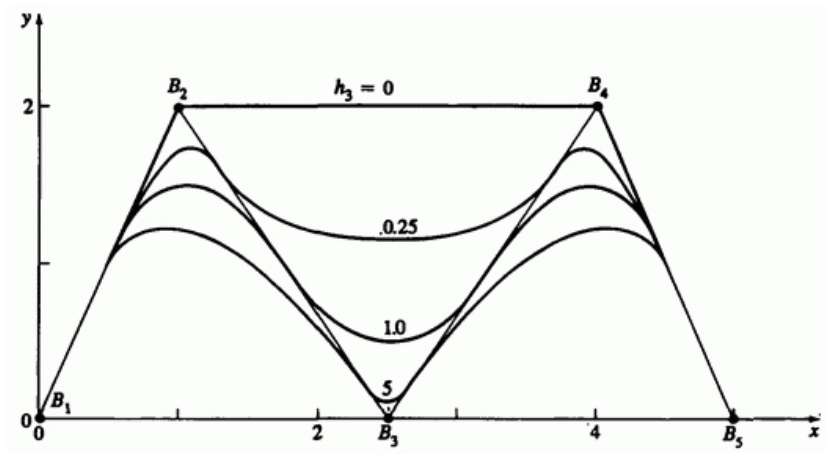


Рис. 62. Рациональные В-сплайны для $n+1=5$, $k=4$ с периодическим узловым вектором $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$.

Отметим, что конечные точки всех кривых совпадают.

На рис. 63 и 64 показаны соответствующие В-сплайны четвертого порядка ($k=4$) и их базисы.

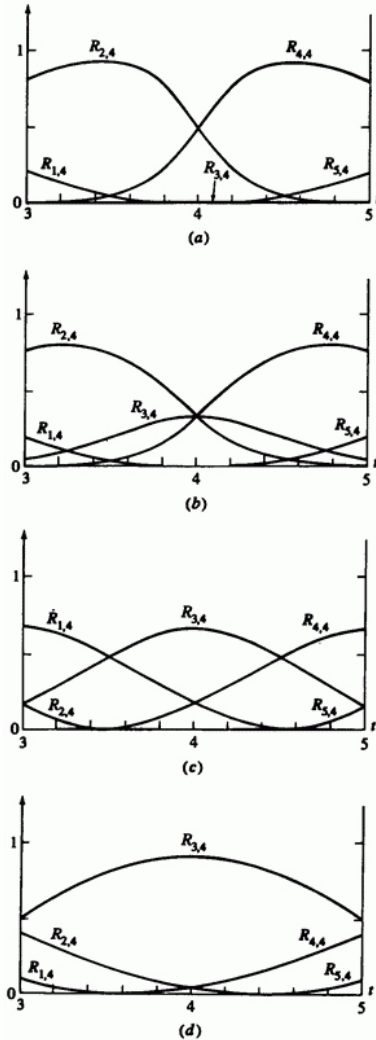


Рис. 63. Базисные функции рационального В-сплайна для $n+1=5$, $k=4$ с периодическим узловым вектором $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$. (a) $h_3=0$; (b) $h_3=0.25$; (c) $h_3=1.0$; (d) $h_3=5.0$.

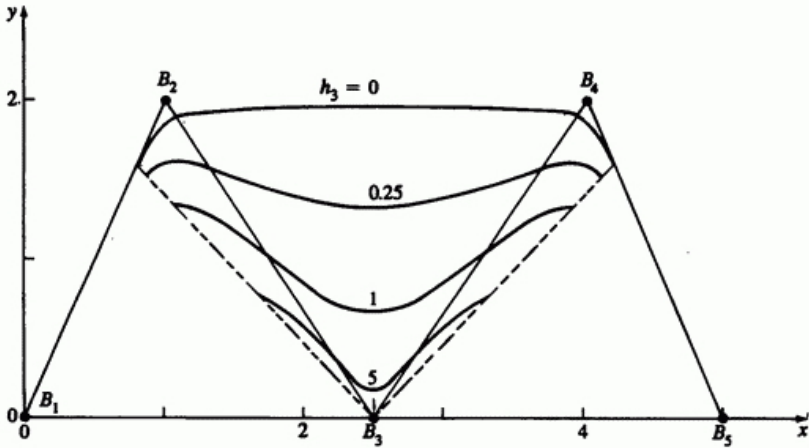


Рис. 64. Рациональные В-сплайны для $n+1=5$, $k=4$ с периодическим узловым вектором $[X]=[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8]$, $[H]=[1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$.

Отметим, что начальные и конечные точки кривых лежат на прямых.

Вычисляя уравнения (122) и (123) для конечных точек кривой с аргументом $(t_{\max} - \varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0}$ из примера 12, получаем, что первая и последняя точки открытого рационального В-сплайна совпадают с конечными точками определяющего многоугольника:

$$P(0) = B_1$$

и

$$P(t_{\max}) = P(n - k + 2) = B_{n+1}.$$

Из рис. 65 видно, что перемещение одной вершины многоугольника влияет на кривую так же, как и в случае рациональных В-сплайнов.

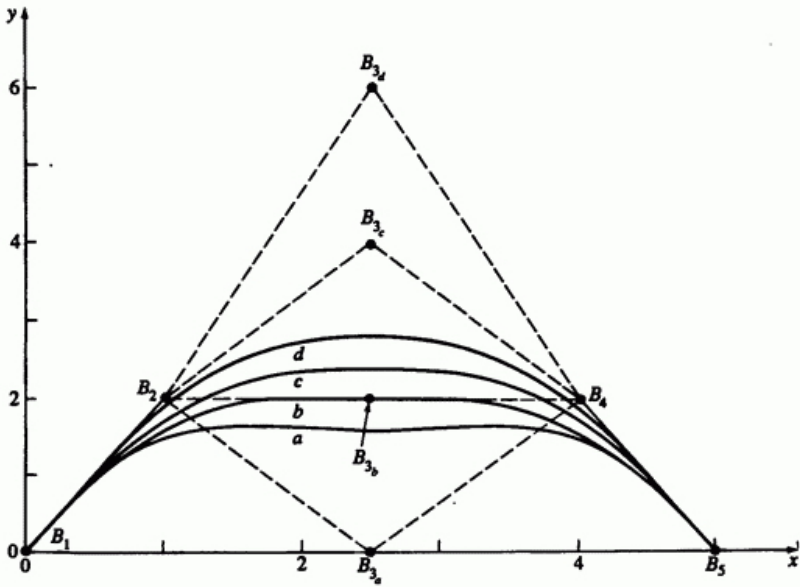


Рис. 65. Влияние перемещения одной вершины многоугольника на рациональный В-сплайн $n+1=5$, $k=4$, $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$.

В данном случае $[H]=[1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$. Если $h_3=0$, то передвижение B_3 не оказывает никакого воздействия. С увеличением h_3 растет влияние движения точки B_3 .

На рис. 66 показано воздействие кратных вершин в B_3 на рациональный В-сплайн четвертого порядка.

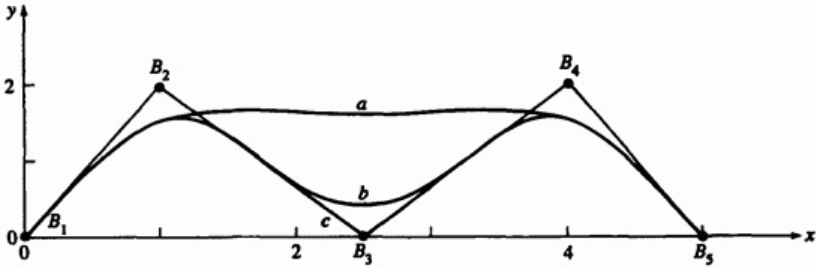


Рис. 66. Влияние кратной вершины многоугольника B_3 на рациональный В-сплайн $n+1=5$, $k=4$. (а) Одна вершина $[H] = [1 \ 1 \ 0.25 \ 1 \ 1]$; (б) двойная вершина $[H] = [1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$; (в) тройная вершина $[H] = [1 \ 1 \ 0.25 \ 0.25 \ 0.25 \ 1 \ 1]$.

Как и для нерациональных кривых, $k-1$ совпадающая вершина приводит к появлению острого угла или пика. Далее, кратная вершина порождает ребра нулевой длины, поэтому существование угла не зависит от значений $h_3 \geq 0$, соответствующих ей (см. задачу 33).

Рассмотрим пример расчета рационального В-сплайна.

Пример 20. Расчет открытых рациональных В-сплайнов

Пусть дан многоугольник с вершинами $B_1[0 \ 1]$, $B_2[1 \ 2]$, $B_3[2.5 \ 0]$, $B_4[4 \ 2]$, $B_5[5 \ 0]$. Найти точку при $t = 3/2$ на открытом рациональном В-сплайне третьего порядка ($k=3$) с однородными векторами, заданными $[H] = [1 \ 1 \ h_3 \ 1 \ 1]$, $h_3 = 0, 1/4, 1, 5$.

Узловой вектор - $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$. Диапазон параметра t : $0 \leq t \leq 3$. Кривые состоят из трех кусочно рациональных квадратичных кривых, по одной на каждом внутреннем интервале узлового вектора.

Из уравнения (84) на интервале $1 \leq t \leq 2$ получим базисные функции нерационального В-сплайна:

$$1 \leq t < 2,$$

$$N_{4,1}(t) = 1; \quad N_{i,1}(t) = 0, \quad i \neq 4,$$

$$N_{3,2}(t) = (2-t); \quad N_{4,2}(t) = (t-1); \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4,$$

$$N_{2,3}(t) = \frac{(2-t)^2}{2}; \quad N_{3,3}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + \frac{(3-t)(t-1)}{2};$$

$$N_{4,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2}; \quad N_{i,3}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3, 4.$$

Отсюда и из уравнения (123) после определения знаменателя

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}(t) = h_1 N_{1,3}(t) + h_2 N_{2,3}(t) + h_4 N_{4,3}(t) + h_5 N_{5,3}(t) = \\ &= h_2 N_{2,3}(t) + h_4 N_{4,3}(t) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(2-t)^2}{2} + \frac{(t-1)^2}{2} = \frac{2t^2 - 6t + 5}{2}$$

получим базис рационального В-сплайна:

$$1 \leq t < 2,$$

$$h_3 = 0,$$

$$R_{1,3}(t) = 0,$$

$$R_{2,3}(t) = \frac{h_2 N_{2,3}(t)}{S} = \frac{(2-t)^2}{2t^2 - 6t + 5},$$

$$R_{3,3}(t) = 0,$$

$$R_{4,3}(t) = \frac{h_4 N_{4,3}(t)}{S} = \frac{(t-1)^2}{2t^2 - 6t + 5},$$

$$R_{5,3}(t) = 0,$$

$$h_3 = 1/4,$$

$$S = h_2 N_{2,3}(t) + h_3 N_{3,3}(t) + h_4 N_{4,3}(t) =$$

$$= \frac{(2-t)^2}{2} + \frac{t(2-t)}{8} + \frac{(3-t)(t-1)}{8} + \frac{(t-1)^2}{2} =$$

$$= \frac{6t^2 - 18t + 17}{8},$$

$$R_{1,3}(t) = 0,$$

$$R_{2,3}(t) = \frac{4(2-t)^2}{6t^2 - 18t + 17},$$

$$R_{3,3}(t) = \frac{t(2-t) + (3-t)(t-1)}{6t^2 - 18t + 17} = \frac{-2t^2 + 6t - 3}{6t^2 - 18t + 17},$$

$$R_{4,3}(t) = \frac{4(t-1)^2}{6t^2 - 18t + 17},$$

$$R_{5,3}(t) = 0,$$

$$h_3 = 1,$$

$$S = 1,$$

$$R_{1,3}(t) = 0,$$

$$R_{2,3}(t) = N_{2,3}(t) = \frac{(2-t)^2}{2},$$

$$R_{3,3}(t) = N_{3,3}(t) = \frac{t(2-t)}{2} + \frac{(3-t)(t-1)}{2},$$

$$R_{4,3}(t) = N_{4,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2},$$

$$R_{5,4}(t) = 0,$$

$$h_3 = 5,$$

$$S = \frac{(2-t)^2}{2} + \frac{5t(2-t)}{2} + \frac{5(3-t)(t-1)}{2} + \frac{(t-1)^2}{2} = -4t^2 + 12t - 5,$$

$$R_{1,3}(t) = 0,$$

$$R_{2,3}(t) = \frac{(2-t)^2}{2(-4t^2 + 12t - 5)},$$

$$R_{3,3}(t) = \frac{5t(2-t) + 5(3-t)(t-1)}{2(-4t^2 + 12t - 5)} = \frac{5(-2t^2 + 6t - 3)}{2(-4t^2 + 12t - 5)},$$

$$R_{4,3}(t) = \frac{(t-1)^2}{2(-4t^2 + 12t - 5)},$$

$$R_{5,3}(t) = 0$$

Полностью результаты приведены на рис. 57.

При $t = 3/2$

$$h_3 = 0: \quad R_{1,3}(3/2) = 0; \quad R_{2,3}(3/2) = \frac{1}{2}; \quad R_{3,3}(3/2) = 0;$$

$$R_{4,3}(3/2) = \frac{1}{2}; \quad R_{5,3}(3/2) = 0$$

$$h_3 = \frac{1}{4}: \quad R_{1,3}(3/2) = 0; \quad R_{2,3}(3/2) = \frac{2}{7}; \quad R_{3,3}(3/2) = \frac{3}{7};$$

$$R_{4,3}(3/2) = \frac{2}{7}; \quad R_{5,3}(3/2) = 0$$

$$h_3 = 1: \quad R_{1,3}(3/2) = 0; \quad R_{2,3}(3/2) = \frac{1}{8}; \quad R_{3,3}(3/2) = \frac{3}{4};$$

$$R_{4,3}(3/2) = \frac{1}{8}; \quad R_{5,3}(3/2) = 0$$

$$h_3 = 5: \quad R_{1,3}(3/2) = 0; \quad R_{2,3}(3/2) = \frac{1}{32}; \quad R_{3,3}(3/2) = \frac{15}{16};$$

$$R_{4,3}(3/2) = \frac{1}{32}; \quad R_{5,3}(3/2) = 0$$

Соответственные точки на рациональных В-сплайнах:

$$h_3 = 0: \quad P(3/2) = \frac{1}{2}[1 \ 2] + \frac{1}{2}[4 \ 2] = \left[\frac{5}{2} \ 2 \right],$$

$$h_3 = \frac{1}{4}:$$

$$P(3/2) = \frac{2}{7}[1 \ 2] + \frac{3}{7}\left[\frac{5}{2} \ 0\right] + \frac{2}{7}[4 \ 2] = \left[\frac{5}{2} \ \frac{8}{7}\right],$$

$$h_3 = 1: \quad P(3/2) = \frac{1}{8}[1 \ 2] + \frac{3}{4}\left[\frac{5}{2} \ 0\right] + \frac{1}{8}[4 \ 2] = \left[\frac{5}{2} \ \frac{1}{2}\right],$$

$$h_3 = 5:$$

$$P(3/2) = \frac{1}{32}[1 \ 2] + \frac{15}{16}\left[\frac{5}{2} \ 0\right] + \frac{1}{32}[4 \ 2] = \left[\frac{5}{2} \ \frac{1}{8}\right].$$

Полностью результаты приведены на рис. 58.

Формально дифференцируя уравнения (122) и (123), получаем производные рациональных В-сплайнов, а именно

$$P'(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R'_{i,k}(t), \quad (125)$$

где

$$R'_{i,k}(t) = \frac{h_i N'_{i,k}(t)}{\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}} - \frac{h_i N_{i,k} \sum_{i=1}^{n+1} h_i N'_{i,k}}{\left(\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,k}\right)^2} \quad (126)$$

Подставим $t = 0$ и $t = n - k + 2$:

$$P'(0) = (k-1) \frac{h_2}{h_1} (B_2 - B_1) \quad (127)$$

$$P'(n-k+2) = (k-1) \frac{h_n}{h_{n+1}} (B_{n+1} - B_n) \quad (128)$$

т.е. наклон кривой в концах совпадает с наклоном первого и последнего ребер многоугольника, соответственно.

Аналогично рассчитываются производные более высокого порядка (см. задачи 35 и 36).

Рассмотрим простой пример.

Пример 21. Производные открытых рациональных сплайнов

Пусть дан определяющий многоугольник из примера 16 с вершинами $B_1[1 \ 1]$, $B_2[2 \ 3]$, $B_3[4 \ 3]$, $B_4[3 \ 1]$. Найти первую производную рационального В-сплайна второго порядка ($k = 2$) с $[H] = [1 \ 1/2 \ 1 \ 1]$.

Узловой вектор $[X] = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3]$. Параметр изменяется в

диапазоне $0 \leq t \leq 3$. Из уравнения (125) первая производная

$$P'(t) = B_1 R'_{1,2}(t) + B_2 R'_{2,2}(t) + B_3 R'_{3,2}(t) + B_4 R'_{4,3}(t).$$

Из уравнений (12) и (16) получаем нерациональные базисные функции и их производные:

$$0 \leq t < 1$$

$$N_{1,2}(t) = 1-t; \quad N_{2,2}(t) = t; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2,$$

$$N'_{1,2}(t) = -1; \quad N'_{2,2}(t) = 1; \quad N'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2.$$

Используя уравнение (126), найдем рациональный базис и его производные

$$\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,2} = \frac{2-t}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n+1} h_i N'_{i,2} = -\frac{1}{2};$$

$$R'_{1,2}(t) = \frac{2}{2-t} \left\{ (-1) - (1-t) \frac{(-1)}{(2-t)} \right\} = \frac{-2}{(2-t)^2},$$

$$R'_{2,2}(t) = \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{2}{2-t} \right) \left\{ 1-t \frac{(-1)}{(2-t)} \right\} = \frac{2}{(2-t)^2},$$

$$R'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 1, 2.$$

Итак

$$P'(t) = \frac{2}{(2-t)^2} (B_2 - B_1)$$

Отметим, что в отличие от нерационального В-сплайна из примера 16, при сохранении наклона равным наклону первого ребра значение производной теперь изменяется вдоль кривой. При $t = 0$, т. е. в начале кривой

$$P'(t) = \frac{1}{2} (B_2 - B_1)$$

величина производной в два раза меньше, чем у нерационального В-сплайна из примера 16. На интервале

$$1 \leq t < 2,$$

$$N_{2,2}(t) = 2-t; \quad N_{3,2}(t) = t-1; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3,$$

$$N'_{2,2}(t) = -1; \quad N'_{3,2}(t) = 1; \quad N'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3.$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,2} = \frac{t}{2}; \quad \sum_{i=1}^{n+1} h_i N'_{i,2} = \frac{1}{2};$$

$$R'_{2,2}(t) = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{t}\right) \left\{ (-1) - (2-t) \left(\frac{1}{t}\right) \right\} = -\frac{2}{t^2},$$

$$R'_{3,2}(t) = \frac{2}{t} \left\{ (1) - (t-1) \left(\frac{1}{t} \right) \right\} = \frac{2}{t^2},$$

$$R'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 2, 3.$$

Итак

$$P'(t) = \frac{2}{t^2} (B_3 - B_2).$$

На интервале

$$2 \leq t < 3,$$

$$N_{3,2}(t) = 3 - t; \quad N_{4,2}(t) = t - 2; \quad N_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4,$$

$$N'_{3,2}(t) = -1; \quad N'_{4,2}(t) = 1; \quad N'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4.$$

При этом

$$\sum_{i=1}^{n+1} h_i N_{i,2} = 1 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n+1} h_i N'_{i,2} = 0$$

$$R'_{3,2}(t) = N'_{3,2}(t) = -1; \quad R'_{4,2}(t) = N'_{4,2}(t) = 1;$$

$$R'_{i,2}(t) = 0, \quad i \neq 3, 4.$$

То есть

$$P'(t) = B_4 - B_3.$$

При $t = (3 - \varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем тот же результат, что и при $t = 3$.

Как уже отмечалось, с помощью рациональных В-сплайнов можно представить все конические сечения. Кроме того, это единственное математическое описание, способное задать произвольную кривую, состоящую из конических сечений. Коническим сечениям соответствуют квадратичные уравнения, поэтому удобно сначала

рассмотреть квадратичный рациональный В-сплайн ($k = 3$), заданный тремя вершинами ($n + 1 = 3$) с узловым вектором $[X] = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$.

$$P(t) = \frac{h_1 N_{1,3}(t) B_1 + h_2 N_{2,3}(t) B_2 + h_3 N_{3,3}(t) B_3}{h_1 N_{1,3}(t) + h_2 N_{2,3}(t) + h_3 N_{3,3}(t)}, \quad (129)$$

что фактически представляет собой рациональную кривую Безье третьего порядка (см. рис. 67).

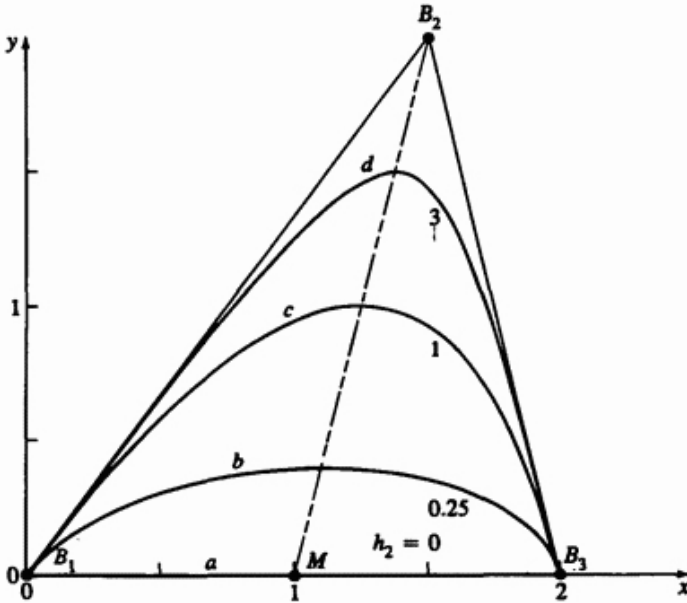


Рис. 67. Конические сечения, заданные рациональными В-сплайнами (кривыми Безье); (а) прямая линия, $h_2 = 0$; (б) эллипс, $h_2 = 0.25$; (с) парабола, $h_2 = 1$; (д) гипербола, $h_2 = 3$.

Предположим, что $h_1 = h_3 = 1$. Тогда уравнение (129) принимает вид

$$P(t) = \frac{N_{1,3}(t)B_1 + h_2 N_{2,3}(t)B_2 + N_{3,3}(t)B_3}{N_{1,3}(t) + h_2 N_{2,3}(t) + N_{3,3}(t)} \quad (130)$$

При $h_2 = 0$ точки B_1 и B_3 соединены прямой линией. При $h_2 \rightarrow \infty$ повторяется контур определяющего многоугольника. Если $h_2 = 0$ и $t = 1/2$, достигается серединная точка отрезка B_1B_2 , обозначенная на рис. 67 буквой M . Аналогично при $h_2 \rightarrow \infty$, $t = 1/2$, достигается

точка B_2 . Для $0 < h_2 < \infty$ точка S , соответствующая точке кривой $P(t)$ при $t = 1/2$, движется по прямой линии между M и B_2 . S называется плечевой точкой. Значение h_2 определяет тип конического сечения. В ряде работ показано, что результат при

$h_2 = 0$ - прямая линия,

$0 < h_2 < 1$ - эллиптический сегмент,

$h_2 = 1$ - параболический сегмент,

$h_2 > 1$ - гиперболический сегмент.

Воспользуемся уравнением (84) и подставим $t = 1/2$ в уравнение (130):

$$P(t) = \frac{(1-t)^2 B_1 + 2h_2 t(1-t) B_2 + t^2 B_3}{(1-t)^2 + 2h_2 t(1-t) + t^2}.$$

При $t = 1/2$, $P(t) = S$, что дает

$$S = \frac{1}{1+h_2} \frac{B_1+B_3}{2} + \frac{h_2}{1+h_2} B_2 = \frac{M}{1+h_2} + \frac{h_2}{1+h_2} B_2. \quad (131)$$

Запишем параметрическое уравнение прямой между M и B_2

$$S = (1-s) M + s B_2, \quad (132)$$

где S - параметр. Приравнявая коэффициенты уравнений (131) и (132), получаем

$$s = \frac{h_2}{1+h_2} \quad \text{и} \quad h_2 = \frac{s}{1-s} = \frac{M-S}{S-B_2}. \quad (133)$$

Параметр S определяет форму кривой и тип конического сечения, т.е. это удобное средство разработки.

Так как окружность является частным случаем эллипса, можно подобрать такое значение h_2 , что уравнение (130) будет уравнением дуги окружности. Из-за симметрии B_1 , B_2 и B_3 для дуги окружности формируют равнобедренный треугольник, как показано на рис. 68.

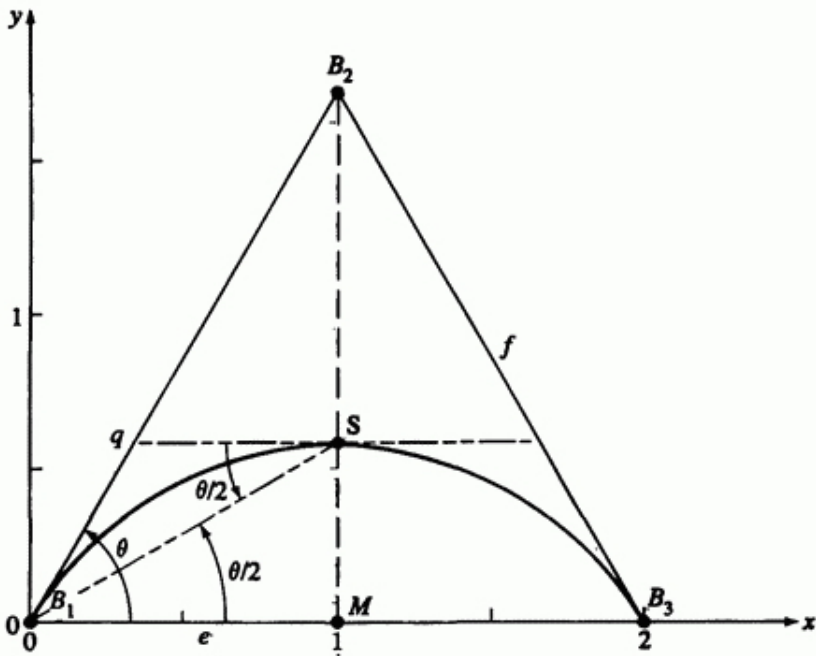


Рис. 68. Дуга окружности, построенная как рациональный В-сплайн

Требуемое значение h_2 , определяется из рис. 68.

Треугольник $B_1B_2B_3$ равнобедренный, поэтому S - максимум кривой и касательная в точке S параллельна линии B_1B_3 . Треугольник B_1qS также равнобедренный с равными углами $\angle SB_1q$ и $\angle B_1Sq$ у основания, обозначенными $\theta/2$ на рис. 68. Из параллельности касательной S линии B_1B_3 следует, что углы $\angle qSB_1$ и $\angle SB_1M$ равны. Поэтому угол $\angle SB_1M = e/2$ равен половине угла у основания треугольника B_1, B_2 и B_3 .

Отсюда и из уравнения (133) получаем

$$h_2 = \frac{M - S}{S - B_2} = \frac{e \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{f \sin \theta - e \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Подставляя тождество $(\theta/2) = \sin \theta / (1 + \cos \theta)$, получаем

$$h_2 = \frac{\frac{e \sin \theta}{1 + \cos \theta}}{f \sin \theta - \frac{e \sin \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{e}{f(1 + \cos \theta) - e} = \frac{e}{f} = \cos \theta \quad . \quad (134)$$

Дуга покрывает часть окружности для удвоенного угла θ . Для дуги 120° угол $\theta = 60^\circ$ и $h_2 = 1/2$. Для данного случая радиус окружности равен $2(S - M)$.

Полная окружность получается соединением нескольких сегментов. В частности, окружность можно составить из трех сегментов рационального квадратичного В-сплайна, каждый из которых покрывает 120° . Определяющие точки составляют равносторонний треугольник, как показано на рис. 69а.

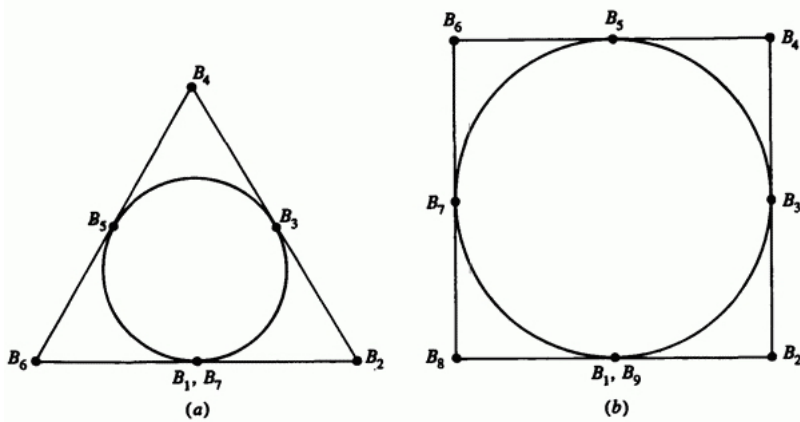


Рис. 69. Рациональные В-сплайны – окружности. (а) Три сегмента по 120° ; (б) четыре сегмента по 90° .

Неравномерный узловый вектор и вектор однородных координат:

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3],$$

$$[H] = [1 \ 1/2 \ 1 \ 1/2 \ 1 \ 1/2 \ 1].$$

Аналогично, полная окружность также задается четырьмя рациональными квадратичными сегментами В-сплайна, каждый по 90° , где определяющие вершины составляют квадрат, рис. 69б. Неравномерный узловый вектор и вектор однородных координат:

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4],$$

$$[H] = \left[1 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1 \quad \sqrt{2}/2 \quad 1 \right]$$

Рассмотрим пример построения конических сечений с помощью В-сплайна и объединения их в произвольные кривые.

Пример 22. Конические сечения, использующие рациональные В-сплайны

Построить единственный рациональный В-сплайн третьего порядка, сопрягающий 90° дугу окружности, заданную квадратичным рациональным В-сплайном с определяющими вершинами $B_1[0 \ 0]$, $B_2[0 \ 2]$, $B_3[2 \ 2]$ с квадратическим рациональным В-сплайном третьего порядка, заданным точками $B_3[2 \ 2]$, $B_4[4 \ 2]$, $B_5[6 \ 3]$, $B_6[7 \ 5]$, $k_i = 1$, $4 \leq i \leq 7$.

90° дуга окружности имеет узловой вектор $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$ и вектор однородных координат $[1 \ \sqrt{2}/2 \ 1]$. Соответственные векторы рационального В-сплайна, заданного точками $B_3 B_4 B_5 B_6$: $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$ и $[1 \ 1 \ 1 \ 1]$.

Неравномерный узловой вектор комбинированной прямой: $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$; вектор однородных координат: $[1 \ \sqrt{2}/2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Результат изображен на рис. 70.

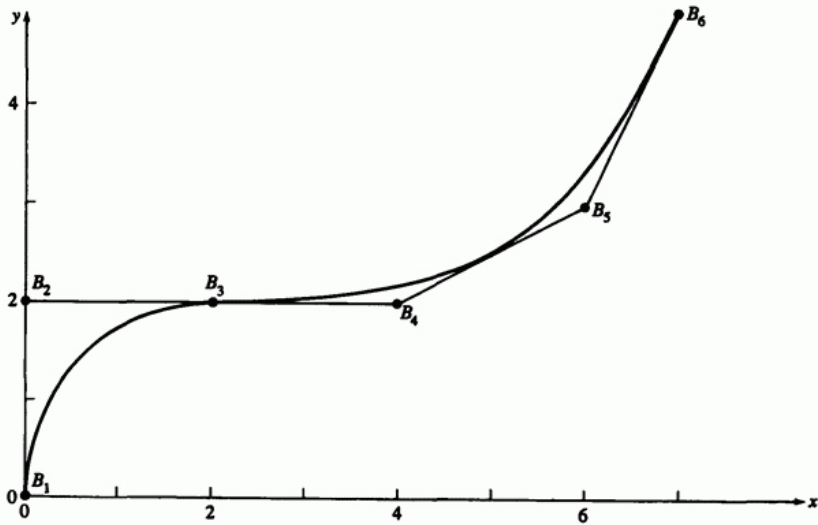


Рис. 70. Сопряжение рациональных В-сплайнов.

5. Элементы тензорной алгебры

5.1. Аффинная система координат на плоскости

1. *Общая декартова* или *аффинная* система координат на плоскости определяется заданием точки — начала координат и двух независимых между собой векторов \mathbf{m}_1 и \mathbf{m}_2 , которые называются *масштабными*.

Всякий вектор \mathbf{a} можно разложить по масштабным векторам системы, представив его в виде линейной комбинации

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{m}_1 + a^2 \mathbf{m}_2. \quad (1)$$

Коэффициенты разложения a^1, a^2 вектора \mathbf{a} по масштабным векторам системы называются *координатами* этого вектора. Разложение (1) можно записать также сокращенно

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^2 a^i \mathbf{m}_i$$

или еще короче

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{m}_i, \quad (2)$$

условившись подразумевать знак суммирования во всяком выражении, содержащем два одинаковых индекса, если один находится сверху, а другой внизу тех букв, при которых они поставлены. В дальнейшем мы без особых напоминаний будем пользоваться этим правилом для сокращенной записи сумм.

Одно из важнейших свойств координат вектора выражается следующей теоремой: *для того чтобы векторы находились в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты находились в той же линейной зависимости.*

Действительно, линейная зависимость векторов выражается равенством нулю некоторой их линейной комбинации

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \dots + \sigma \mathbf{s} = \mathbf{0},$$

причем не все коэффициенты этой комбинации равны нулю. Выразив каждый вектор через его координаты, перепишем то же соотношение в следующем виде:

$$\lambda a^i m_i + \mu b^i m_i + \dots + \sigma s^i m_i = 0,$$

или, перегруппировав члены,

$$(\lambda a^i + \mu b^i + \dots + \sigma s^i) m_i = 0.$$

Но масштабные векторы независимы, и последнее равенство может иметь место в том и только в том случае, если каждый из скалярных коэффициентов левой части равен нулю. Таким образом,

$$\lambda a^i + \mu b^i + \dots + \sigma s^i = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Проведя рассуждение в обратном порядке, мы докажем также и достаточность условия.

2. При преобразовании системы координат масштабные векторы новой системы \mathbf{m}'_i могут быть выражены линейно через векторы старой системы \mathbf{m}_i так, что

$$\mathbf{m}'_i = p_i^k \mathbf{m}_k. \quad (3)$$

Матрицу коэффициентов этого разложения

$$(P) \equiv \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} \quad (4)$$

мы будем называть *матрицей преобразования*. Ее определитель

$$p = \begin{vmatrix} p_1^1 & p_1^2 \\ p_2^1 & p_2^2 \end{vmatrix} \quad (5)$$

должен быть отличен от нуля, для того чтобы векторы \mathbf{m}_i были независимы между собой.

Разрешая уравнения (3) относительно векторов старой системы, мы получим соотношение вида

$$\mathbf{m}_i = q_i^{k'} \mathbf{m}_k.$$

Матрица

$$(Q) = \begin{vmatrix} q_1^1 & q_1^2 \\ q_2^1 & q_2^2 \end{vmatrix} \quad (6)$$

есть матрица обратного преобразования. Ее элементы выражаются через элементы матрицы (4) следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} q_1^1 &= \frac{p_2^2}{p}, & q_1^2 &= -\frac{p_2^1}{p}, \\ q_2^1 &= -\frac{p_1^2}{p}, & q_2^2 &= \frac{p_1^1}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, элементы матрицы обратного преобразования равны приведенным минорам матрицы прямого преобразования. Легко видеть также, что элементы обеих матриц связаны между собой соотношением

$$p_k^i q_j^k = q_k^i p_j^k = \delta_j^i, \quad (8)$$

где δ_i^j — символ Кронеккера, который равен нулю при $i \neq j$ и единице при $i = j$.

Сравнивая выражения вектора в старой и новой системе координат, т. е. полагая

$$a^i \mathbf{m}_i = 'a^i \mathbf{m}_i$$

и заменяя новые координатные векторы по формулам (3), мы получим

$$a^i \mathbf{m}_i = 'a^i p_i^k \mathbf{m}_k = 'a^k p_k^i \mathbf{m}_i$$

(Так как замена обозначений индекса суммирования не изменяет значения суммы.) Сравнивая коэффициенты при одинаковых векторах в правой и левой частях, мы получим формулы преобразования координат вектора

$$a^i = p_k^i 'a^k. \quad (9)$$

Аналогично этому получим формулы обратного преобразования

$$'a^i = q_k^i a^k. \quad (10)$$

5.2. Скалярное произведение и ковариантные координаты

1. Скалярное произведение двух векторов выражается через координаты векторов двойной суммой

$$\mathbf{ab} = (a^i m_i) (b^j m_j) = m_i m_j a^i b^j$$

или билинейной формой двух рядов переменных a^1, a^2 и b^1, b^2 .

Если ввести для коэффициентов этой формы обозначения

$$g_{ij} = m_i m_j, \quad (1)$$

то

$$\mathbf{ab} = g_{ij} a^i b^j, \quad (2)$$

или

$$\mathbf{ab} = g_{11} a^1 b^1 + g_{22} a^2 b^2 + g_{12} (a^1 b^2 + a^2 b^1).$$

В частности, скалярный квадрат вектора выражается квадратичной формой

$$a^2 = g_{ij} a^i a^j, \quad (3)$$

или

$$a^2 = g_{11} (a^1)^2 + g_{22} (a^2)^2 + 2g_{12} a^1 a^2,$$

которая называется *метрической формой* плоскости.

Матрица

$$(G) \equiv \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} \quad (4)$$

также называется *метрической*; эта матрица симметрична, так как

$$g_{ij} = g_{ji}. \quad (5)$$

Рассматривая векторное произведение масштабных векторов и применяя известное векторное тождество, мы получим соотношение

$$\omega^2 = [m_1 m_2]^2 = m_1^2 m_2^2 - (m_1 m_2)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2, \quad (6)$$

которое показывает, что *дискриминант* метрической формы ω^2 положителен.

2. Рассмотрим скалярные произведения

$$a_i = m_i a \quad (7)$$

вектора на масштабные векторы системы; эти произведения называются *ковариантными координатами* вектора. В отличие от ковариантных координат те, которые мы рассматривали ранее, называются *контравариантными*.

Координаты обоих типов просто выражаются друг через друга. Действительно, из (2) п.5.1 следует

$$a_i = m_i(m_j a^j) = (m_i m_j) a^j$$

или

$$a_i = g_{ik} a^k. \quad (8)$$

Разрешая эти уравнения относительно a^i и вводя следующие обозначения приведенных миноров метрической матрицы

$$g^{11} = \frac{g_{22}}{w^2}, \quad g^{12} = -\frac{g_{21}}{w^2}, \quad g^{22} = \frac{g_{11}}{w^2}, \quad (9)$$

мы получим выражение контравариантных координат через ковариантные

$$a^i = g^{ik} a_k. \quad (10)$$

Заметим, что элементы метрической матрицы и ее приведенные миноры тоже связаны соотношением

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i, \quad (11)$$

где δ_j^i — символ Кронеккера.

Соотношения (8) и (10) показывают, что линейная зависимость между ковариантными координатами равносильна линейной зависимости между контравариантными координатами. Отсюда следует, что и линейная зависимость векторов равносильна такой же линейной зависимости между ковариантными координатами. Понятие ковариантных координат позволяет получить простое выражение для скалярного произведения. Действительно, в силу

$$ab = a_i b^i = a^i b_i = a_1 b^1 + a_2 b^2 = a^1 b_1 + a^2 b_2. \quad (12)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений ковариантных координат одного из них на контравариантные координаты другого.

Скалярные произведения можно выразить также и через ковариантные координаты обоих сомножителей, подставляя в (12) выражение a^i из (10). После этого мы будем иметь

$$ab = g^{ij} a_i b_j. \quad (13)$$

5.3. Косое произведение и дополнительный вектор

1. Всякая плоскость делит пространство на два полупространства. Условимся считать одно из этих полупространств *внешним* по отношению к плоскости, другое же полупространство будем назы-

вать *внутренним*. В согласии с этим будем также называть *внешней* ту *сторону плоскости*, которая обращена во внешнее пространство, а *внутренней* — в другую сторону. Плоскость с определенной таким образом внешней и внутренней сторонами называют *ориентированной*.

Ориентацию плоскости удобнее всего указать, задав такой единичный вектор n , которому соответствует отрезок, перпендикулярный к плоскости и ориентированный так, что если его начало помещено на плоскости, то его конец находится во внешнем пространстве. Такой вектор мы будем называть *ориентирующим вектором данной плоскости*.

2. Будем называть *косым произведением* двух векторов ориентированной плоскости смешанное произведение этих векторов и ориентирующего вектора плоскости

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = (\mathbf{abn}). \quad (1)$$

Легко видеть также, что

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = ab \sin \alpha, \quad (2)$$

где a и b — модули перемножаемых векторов, а α — угол кратчайшего вращения, переводящего первый сомножитель во второй, причем этот угол считается положительным, если это вращение, рассматриваемое с внешней стороны плоскости, совершается против часовой стрелки, и отрицательным в противоположном случае.

Косое произведение равно нулю тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы коллинеарны. Если же эти векторы независимы, то модуль косого произведения равен площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах. Отметим, наконец, следующие очевидные свойства косого произведения:

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = -\langle \mathbf{ba} \rangle, \quad (3)$$

$$\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{ac} \rangle + \langle \mathbf{bc} \rangle, \quad (4)$$

$$\langle \lambda \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle. \quad \left. \vphantom{\langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle} \right\}$$

Выражая перемножаемые векторы через их координаты, получим

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = \langle a^i m_i, b^j m_j \rangle = \langle m_i m_j \rangle a^i b^j,$$

или

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = e_{ij} a^i b^j, \quad (5)$$

где

$$e_{ij} = \langle m_i m_j \rangle. \quad (6)$$

Коэффициенты билинейной формы (5), выражающей косое произведение через координаты перемножаемых векторов, образуют матрицу

$$(e) \equiv \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

которую мы будем называть *дискриминантной*. Эта матрица кососимметрична, так как

$$e_{ij} = -e_{ji} \quad (8)$$

или

$$e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = e,$$

так что

$$(e) \equiv \begin{vmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

где

$$e = e_{12}. \quad (10)$$

Чтобы найти e , рассмотрим соотношение

$$e_{ij}e_{kl} = (nm_i m_j)(nm_k m_l) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (m_i m_k) & (m_i m_l) \\ 0 & (m_j m_k) & (m_j m_l) \end{vmatrix},$$

откуда

$$e_{ij}e_{kl} = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}. \quad (11)$$

В частности,

$$e^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Таким образом,

$$e = \omega = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (12)$$

Если векторы m_1, m_2, n образуют правую тройку, то $e > 0$, что мы и будем, как правило, предполагать в дальнейшем.

3. Повернув вектор a , расположенный в ориентированной плоскости, в положительном направлении на прямой угол, мы получим новый вектор, который обозначим \tilde{a} и будем называть *дополнительным* к вектору a . Дополнительный вектор \tilde{a} вектора \tilde{a}

$$\tilde{\tilde{a}} = -a. \quad (13)$$

Легко видеть, что

$$\tilde{a} = [na], \quad (14)$$

вследствие чего ковариантные координаты дополнительного вектора

$$\tilde{a}_i = (nam_i) = (nm_k m_i) a^k$$

или

$$\tilde{a}_i = a^k e_{ki}, \quad (15)$$

где e_{ki} есть элемент дискриминантной матрицы (чтобы избежать ошибки в знаке, следует особо отметить, что в формуле (15) суммирование происходит по первому индексу элемента дискриминантной матрицы.).

Умножая обе части (15) на b^i и суммируя, мы получим

$$\tilde{a}_i b^i = e_{ki} a^k b^i = - e_{ik} b^i a^k$$

или

$$\tilde{a}b = -a\tilde{b} = \langle ab \rangle = ab \sin \alpha. \quad (16)$$

Кроме того,

$$\tilde{a}\tilde{b} = ab = ab \cos \alpha, \quad (17)$$

так как скалярное произведение не изменяется от поворота обоих перемножаемых векторов на прямой угол.

5.4. Понятие тензора

1. В геометрии и различных разделах физики часто приходится рассматривать скалярные функции векторных аргументов.

Особенно важную роль играет рассмотрение таких функций, которые обладают свойством линейности.

Будем говорить, что задана скалярная функция векторного аргумента x , если всякому значению x поставлено в соответствие число

$$\omega = \omega(x).$$

Эта функция называется *линейной*, если для всяких значений x_1 и x_2 ее аргумента выполняется условие

$$\omega(x_1 + x_2) = \omega(x_1) + \omega(x_2)$$

и для всякого значения аргумента x и числа λ — условие

$$\omega(\lambda x) = \lambda \omega(x). \quad (2)$$

Выражая вектор x через его координаты и пользуясь свойствами линейности, мы получим

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \omega(x^1 m_1 + x^2 m_2) = \omega(x^1 m_1) + \omega(x^2 m_2) = \\ &= x^1 \omega(m_1) + x^2 \omega(m_2) = x^i \omega(m_i). \end{aligned}$$

Рассмотрим вектор a , ковариантные координаты которого равны результатам подстановки масштабных векторов системы координат под знак рассматриваемой линейной функции

$$a_i = \omega(m_i).$$

В таком случае мы будем иметь

$$\omega = \omega(x) = a_i x^i. \quad (3)$$

Величина ω , а следовательно, и вектор a не будут зависеть от выбора масштабных векторов. Таким образом, *всякой линейной функции одного векторного аргумента можно сопоставить некоторый постоянный вектор так, что значение функции будет равно скалярному произведению этого вектора на значение векторного аргумента.*

2. Скалярная функция многих векторных аргументов

$$\omega = \omega(x, y, \dots)$$

называется *линейной*, если она удовлетворяет условиям линейности по отношению к каждому из своих аргументов так, что

$$\left. \begin{aligned} \omega(x_1 + x_2, y, \dots) &= \omega(x_1, y, \dots) + \omega(x_2, y, \dots), \\ \omega(x, y_1 + y_2, \dots) &= \omega(x, y_1, \dots) + \omega(x, y_2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и т. д.

$$\left. \begin{aligned} \omega(\lambda x, y, \dots) &= \lambda \omega(x, y, \dots), \\ \omega(x, \lambda y, \dots) &= \lambda \omega(x, y, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и т. д.

По аналогии с тем, как функции одного аргумента соответствует некоторый вектор, считается, что всякой линейной функции многих векторных аргументов соответствует величина особого рода, которая называется *тензором*.

Число независимых аргументов, входящих под знак линейной функции, называется *валентностью* тензора; с точки зрения этого определения *вектор есть одновалентный тензор*.

Подставляя в выражение линейной функции координатные векторы во всевозможных комбинациях, мы получим систему величин, которые будем обозначать одной буквой с индексами внизу так, чтобы эти индексы соответствовали индексам подставленных координатных векторов:

$$a_{11} \dots = \omega(m_1, m_1, \dots), \quad a_{12} \dots = \omega(m_1, m_2, \dots),$$

$$a_{21} \dots = \omega(m_2, m_1, \dots), \quad a_{22} \dots = \omega(m_2, m_2, \dots),$$

вообще

$$a_{ij} \dots = \omega(m_i, m_j, \dots). \quad (6)$$

Величины $a_{ij} \dots$, получающиеся в результате подстановки координатных векторов в выражение линейной векторной функции, называются *ковариантными координатами тензора*, соответствующего этой функции. Одновалентный тензор, как нам это уже известно, имеет две ковариантные координаты:

$$a_1 = am_1 \quad \text{и} \quad a_2 = am_2,$$

двухвалентный тензор имеет четыре координаты:

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{22},$$

трехвалентный тензор имеет восемь координат:

$$a_{111}, \quad a_{122}, \quad a_{112}, \quad a_{121}, \\ a_{211}, \quad a_{222}, \quad a_{231}, \quad a_{212}.$$

Вообще n -валентный тензор имеет 2^n координат.

Значение всякой линейной функции можно выразить через ковариантные координаты соответствующего тензора и контравариантные координаты векторных аргументов. Для этого выразим каждый аргумент через его координаты и подставим его значение в выражение функции.

Пользуясь свойствами линейности, мы можем представить (для определенности мы рассматриваем случаи трехвалентного тензора, однако все наши рассуждения сохраняют смысл и в общем случае)

$$\omega = \omega(x^i m_i, y^j m_j, z^k m_k)$$

в виде многократной (в данном случае трехкратной) суммы. Но

$$\omega = x^i y^j z^k \omega(m_i, m_j, m_k).$$

величины

$$a_{ijk} = \omega(m_i, m_j, m_k)$$

являются ковариантными координатами тензора, соответствующего линейной функции и

$$\omega = \omega(x, y, z) = a_{ijk} x^i y^j z^k$$

или в развернутом виде

$$\omega = a_{111} x^1 y^1 z^1 + a_{122} x^1 y^2 z^2 + a_{112} x^1 y^1 z^2 + a_{121} x^1 y^2 z^1 + \\ + a_{211} x^2 y^1 z^1 + a_{222} x^2 y^2 z^2 + a_{212} x^2 y^1 z^2 + a_{221} x^2 y^2 z^1.$$

Пользуясь терминологией, принятой в алгебре, мы можем сказать, что значение линейной функции n векторных аргументов выражается n -линейной формой, содержащей n рядов переменных, значения которых равны контравариантным координатам векторных аргументов

$$x^1x^2, y^1y^2, z^1z^2,$$

а коэффициенты этой формы равны значениям ковариантных координат тензора, соответствующего данной функции.

3. Перейдем к рассмотрению примеров.

Скалярное произведение двух векторов

$$\omega = \mathbf{x}\mathbf{y}$$

является линейной функцией этих векторов, и следовательно, ему соответствует некоторый тензор второй валентности. Этот тензор называется *метрическим тензором* плоскости. Ковариантные координаты метрического тензора по определению равны скалярным произведениям масштабных векторов, т. е. элементам метрической матрицы

$$g_{ij} = \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j;$$

они удовлетворяют условиям

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad (7)$$

т. е. не меняются при перестановке индексов. Тензор, удовлетворяющий этим условиям, называется *симметричным*. Таким образом, *метрический тензор есть симметричный тензор второй валентности*.

Косое произведение двух векторов

$$\omega = \langle \mathbf{x}\mathbf{y} \rangle$$

тоже является линейной функцией этих векторов, и следовательно, ему также соответствует некоторый тензор второй валентности. Этот тензор называется *дискриминантным*. Ковариантные координаты этого тензора равны косым произведениям координатных векторов, т. е. элементам дискриминантной матрицы

$$e_{ij} = \langle \mathbf{m}_i\mathbf{m}_j \rangle;$$

они удовлетворяют условиям

$$e_{ij} = -e_{ji}.$$

Тензор, удовлетворяющий таким условиям, называется *кососимметричным*. Таким образом, *дискриминантный тензор есть кососимметричный тензор второй валентности*.

5.5. Основные действия тензорной алгебры

1. Вводя понятие тензора, мы назвали его величиной. Но характерной особенностью различных величин действительных, комплексных и гиперкомплексных чисел, векторов и т. д. является то, что для

них устанавливаются действия, аналогичные, в той или иной мере, действиям арифметики действительных чисел. Аналогичные действия вводятся и для тензоров. Однако, прежде чем мы перейдем к описанию этих действий, установим понятие равенства двух тензоров.

Два тензора одинаковой валентности называются равными между собой, если значения линейных функций, соответствующих этим тензорам, равны для одинаковых значений их векторных аргументов.

Таким образом, для того чтобы тензоры a_{ijk} и b_{ijk} (для того чтобы обозначить тензор, выписывают общее выражение его координат) были равны, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующих им функций имело место равенство

$$f(x, y, z) \equiv g(x, y, z),$$

которое является тождественным по отношению к векторным переменным x, y, z , т. е. справедливо для всех значений этих переменных.

В координатах то же равенство имеет вид

$$a_{ijk}x^i y^j z^k \equiv b_{ijk}x^i y^j z^k.$$

Но такое тождественное равенство двух полилинейных форм может иметь место только при условии равенства коэффициентов при соответствующих комбинациях переменных.

Таким образом, *необходимым и достаточным условием равенства двух тензоров является равенство их соответствующих координат*

$$a_{ijk} = b_{ijk}.$$

(1)

В частности, тензор считается равным нулю, если соответствующая ему линейная функция тождественно равна нулю, а условие

$$f(x, y, z) \equiv 0,$$

очевидно, равносильно равенству нулю всех координат этого тензора.

2. Сложение тензоров. Рассмотрим два тензора, имеющих одинаковую валентность (например, валентность, равную трем), a_{ijk}

и b_{ijk} и соответствующие им линейные функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$.

Складывая значения этих функций при одинаковых значениях соответствующих переменных, мы получим третью функцию тех же переменных

$$h(x, y, z) = f(x, y, z) + g(x, y, z). \quad (2)$$

Так как оба слагаемых правой части удовлетворяют условиям линейности (4), (5) п.5.4, то и левая часть удовлетворяет этим условиям, т. е.

$$h(x_1 + x_2, y, z) = h(x_1, y, z) + h(x_2, y, z),$$

$$h(x, y_1 + y_2, z) = h(x, y_1, z) + h(x, y_2, z),$$

$$h(x, y, z_1 + z_2) = h(x, y, z_1) + h(x, y, z_2),$$

$$h(\lambda x, y, z) = h(x, \lambda y, z) = h(x, y, \lambda z) = \lambda h(x, y, z)$$

и, следовательно, $h(x, y, z)$ есть линейная функция своих аргумен-

тов. Но всякой такой функции по определению соответствует тензор и тензор, соответствующий функции $h(x, y, z)$, называется суммой тензоров, соответствующих функциям $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$. Очевидно, что валентность суммы тензоров равна валентности слагаемых тензоров.

Подставляя в левую и правую части (2) масштабные векторы, мы получим

$$h(m_i, m_j, m_k) = f(m_i, m_j, m_k) + g(m_i, m_j, m_k)$$

или

$$c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}, \quad (3)$$

где координаты тензора c_{ijk} , соответствующего функции

$h(x, y, z)$, равны сумме тензоров a_{ijk} и b_{ijk} .

Итак, координаты суммы тензоров равны сумме соответствующих координат слагаемых тензоров.

3. Умножение тензора на число. Линейность функции $f(x, y, z)$ влечет за собой линейность функции

$$g(x, y, z) = \lambda f(x, y, z),$$

где λ — некоторое число, не зависящее от x, y, z .

В силу этого функции $g(x, y, z)$ соответствует некоторый тензор, который называется произведением числа λ на тензор, соответствующий функции $f(x, y, z)$. Очевидно, что валентности обоих этих тензоров одинаковы.

Обозначая координаты этих тензоров через

$$b_{ijk} = g(m_i, m_j, m_k), \quad a_{ijk} = f(m_i, m_j, m_k),$$

мы будем иметь

$$b_{ijk} = \lambda a_{ijk}. \quad (4)$$

Таким образом, *координаты произведения тензора на число равны произведениям, соответствующих координат данного тензора на это число.*

4. Умножение тензора на тензор. Рассмотрим два тензора, вообще говоря, различных валентностей и линейные функции, соответствующие этим тензорам. Составим произведение значений этих функций при *независимых значениях их векторных аргументов.* Это произведение будет функцией всех переменных, от которых зависит значение каждой из данных функций. Так, например, если даны тензоры a_{ijk} и b_{pq} , то новая функция определяется произведением

$$h(x, y, z, u, v) = f(x, y, z) \cdot g(u, v),$$

где функция $f(x, y, z)$ соответствует первому, а $g(u, v)$ — второму тензору. Но функция $h(x, y, z, u, v)$ будет линейна относительно каждого из переменных x, y, z, u, v и, следовательно, ей соответствует некоторый тензор, который и называется *произведением двух данных тензоров.*

Валентность этого тензора равна сумме валентностей перемножаемых тензоров.

Для координат тензора, равного произведению двух данных, мы будем иметь

$$c_{ijkpq} = h(m_i, m_j, m_k, m_p, m_q) = f(m_i, m_j, m_k) \cdot g(m_p, m_q)$$

или

$$c_{ijkpq} = a_{ijk} \cdot b_{pq}. \tag{5}$$

Таким образом, *координаты произведения двух тензоров равны произведениям координат перемножаемых тензоров, взятых при всевозможных значениях своих индексов.*

Действие умножения позволяет получить из тензоров низших валентностей тензоры более высоких валентностей. Так, например, перемножая два вектора, мы получим тензор второй валентности

$$c_{ij} = a_i b_j,$$

и умножая этот тензор на третий вектор, получим тензор третьей валентности

$$d_{ijk} = c_{ij} c_k = a_i b_j c_k$$

и т. д.

5. Симметрирование тензора. Тензор второй валентности a_{ij} называется симметричным при условии

$$a_{ij} = a_{ji},$$

которое равносильно условию

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

для функции, соответствующей этому тензору. Если тензор не симметричен, то ему можно отнести другой уже симметричный тензор, пользуясь следующим приемом, называемым *симметрированием*.

Если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ есть линейная функция, соответствующая тензору a_{ij} , то функция

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \quad (6)$$

остаётся линейной, но удовлетворяет условию

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = h(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Тензор, соответствующий этой функции, называется *симметричной частью* тензора a_{ij} и его координаты обозначаются через $a_{(ij)}$.

Подставляя координатные векторы в левую и правую части (6), получим

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}).$$

Если тензор a_{ij} симметричен, то его симметричная часть совпадает с ним самим.

Процесс симметрирования обобщается и на случай тензоров любой валентности. Так, например, тензору третьей валентности a_{ijk} относится тензор

$$a_{(i; k)} = \frac{1}{3!} [a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{kji} + a_{jik} + a_{ikj}]. \quad (8)$$

В заключение докажем две теоремы, которые будут нам полезны впоследствии. Предположим, что для некоторого тензора a_{ijk} имеет место равенство

$$a_{ijk} x^i x^j x^k = 0, \quad (9)$$

выполняющееся тождественно для любого вектора x^l . В развернутом виде это равенство имеет вид

$$a_{111} (x^1)^3 + a_{222} (x^2)^3 + (a_{112} + a_{121} + a_{211}) (x^1)^2 x^2 + \\ + (a_{221} + a_{212} + a_{122}) x^1 (x^2)^2 = 0.$$

Но для того, чтобы многочлен обращался в нуль тождественно, необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты были равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} a_{111} &= 0, & a_{222} &= 0, \\ a_{112} + a_{121} + a_{211} &= 0, \\ a_{221} + a_{212} + a_{122} &= 0. \end{aligned}$$

Однако легко видеть, что эти равенства равносильны обращению в нуль всех координат тензора $a_{(ijk)}$. Итак, для того чтобы равенство (9) выполнялось тождественно, необходимо и достаточно, чтобы симметричная часть тензора a_{ijk} была равна нулю, т. е.

$$a_{(ijk)} = 0. \quad (10)$$

Еще проще убедиться в том, что и для тензора второй валентности условие

$$a_{ij}x^ix^j = 0 \quad (9')$$

равносильно условиям

$$a_{(ij)} = 0. \quad (10')$$

Предположим, что квадратичная форма

$$w = a_{ij}x^ix^j$$

с коэффициентами $a_{ij} = a_{ji}$ инвариантна, т. е. ее значение не меняется при преобразовании координат произвольного вектора x^i . В таком случае инвариантны и выражение

$$w = a_{ij}(\lambda y^i + \mu z^i)(\lambda y^j + \mu z^j) = \lambda^2 a_{ij}y^iy^j + \mu^2 a_{ij}z^iz^j + 2\lambda\mu a_{ij}y^iz^j,$$

(7) а следовательно, и билинейная форма

$$u = a_{ij}y^iz^j.$$

Но в таком случае u есть линейная функция векторов y^i , z^j и ей соответствует тензор с координатами a_{ij} . Итак, коэффициенты инвариантной квадратичной формы являются координатами симметричного тензора.

6. Альтернирование тензора. Если тензор a_{ij} — кососимметричен, т. е. $a_{ij} = -a_{ji}$, тогда для соответствующей ему функции имеет место тождество

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Если же тензор не является кососимметричным, то ему можно отнести другой кососимметричный тензор, рассматривая линейную функцию

$$h(x, y) = \frac{1}{2} [f(x, y) - f(y, x)].$$

Тензор, соответствующий этой функции, называется *кососимметричной частью тензора* a_{ij} его координаты обозначаются через $a_{[ij]}$, а процесс перехода от тензора a_{ij} к тензору $a_{[ij]}$ называется *альтернированием*. Легко видеть, что

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2} [a_{ij} - a_{ji}]. \quad (11)$$

Очевидно также, что кососимметричная часть кососимметричного тензора равна ему самому, а кососимметричная часть симметричного тензора равна нулю. Для всякого тензора второй валентности мы будем также иметь

$$a_{ij} = a_{(ij)} + a_{[ij]}. \quad (12)$$

7. Рассмотрим кососимметричную часть произведения двух векторов $a_{[i}b_{j]}$.

Равенство

$$a_{[i}b_{j]} = 0 \quad (13)$$

сводится к единственному равенству

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

которое показывает, что векторы коллинеарны.

Таким образом, *коллинеарность двух векторов характеризуется обращением в нуль кососимметрической части их произведения.*

8. **Перебрасывание индексов.** Формула

$$\omega = a_{ijk} x^i y^j z^k$$

дает выражение значения линейной функции, соответствующей тензору a_{ijk} через его ковариантные координаты и контравариантные координаты векторных аргументов. Выражая последние через их ковариантные координаты по формулам (10) п.5.2, будем иметь выражение

$$\omega = a_{ijk} g^i p g^j q g^l r x_p y_q z_r,$$

содержащее в правой части переменные x_p, y_q, z_r , которые являются ковариантными координатами векторных аргументов. Введем следующие обозначения для коэффициентов этого многочлена:

$$a^{pqr} = g^{pi} g^{qj} g^{rk} a_{ijk} \quad (14)$$

и будем называть их *контравариантными координатами* данного тензора.

Аналогичным образом вводятся *смешанные координаты* тензора, определяемые по формулам

$$a^i_{jk} = g^{is} a_{sjk}, \quad a^j_{i.k} = g^{js} a_{isk}, \quad a^{ij}_{.k} = g^{is} g^{jr} a_{srk} \quad (15)$$

и т. д.

Значение линейной функции может быть, таким образом, выражено через различные комбинации ковариантных и контравариантных координат векторов и тензоров

$$w = a_{ijk} x^i y^j z^k = a^i_{.jk} x_i y^j z^k = a^{ij}_{.k} x_i y_j z^k = \dots$$

Операция перехода от каждого такого выражения к другому носит название *перебрасывания индексов*.

9. Поднимая индексы i, j в (11) п.5.3, получим новое соотношение

$$e^{ije}_{ki} = \delta^i_k \delta^j_i - \delta^j_k \delta^i_i \quad (16)$$

и

$$e^{ipe}_{kp} = \delta^i_k. \quad (17)$$

10. При преобразовании координат точек и координаты тензора преобразуются. Чтобы найти закон этого преобразования, сравним выражения полилинейной функции через координаты векторов, относящиеся к различным системам:

$$w = a_{ijk} x^i y^j z^k = 'a_{pqr} 'x^p 'y^q 'z^r.$$

Выразив новые координаты векторов через старые по формулам (10) п.5.1, получим тождество

$$a_{ijk} x^i y^j z^k = 'a_{pqr} q^p q^q q^r x^i y^j z^k,$$

которое равносильно соотношениям

$$a_{ijk} = 'a_{pqr} q^p q^q q^r, \quad (18)$$

выражающим закон преобразования ковариантных координат тензора. Аналогичным образом выводятся формулы преобразования для контравариантных и смешанных координат тензора

$$\left. \begin{aligned} a^{ijk} &= 'a^{pqr} p_p^i p_q^j p_r^k, \\ a^i_{.jk} &= 'a^p_{.q'r} p_p^i q_j^q q_k^r \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и т. д.

5.6. Симметричный тензор второй валентности

1. Симметричный тензор второй валентности играет особенно важную роль в вопросах приложений тензорного анализа. Чтобы изучить эти свойства, рассмотрим значение функции

$$\omega(x, y) = a_{ij} x^i y^j = a_{ij} y^i x^j, \quad (1)$$

соответствующее совпавшим значениям ее аргументов

$$\omega(x, x) = a_{ij} x^i x^j. \quad (2)$$

Приведенным значением вектора x^i мы будем называть коллинеарный ему вектор

$$\xi^i = \frac{x^i}{\sqrt{|\omega(x, x)|}}. \quad (3)$$

Направление отрезка \overline{OM} , изображающего вектор ξ^i , совпадает с направлением вектора x^i (рис. 1), а его длина не зависит от длины этого вектора.

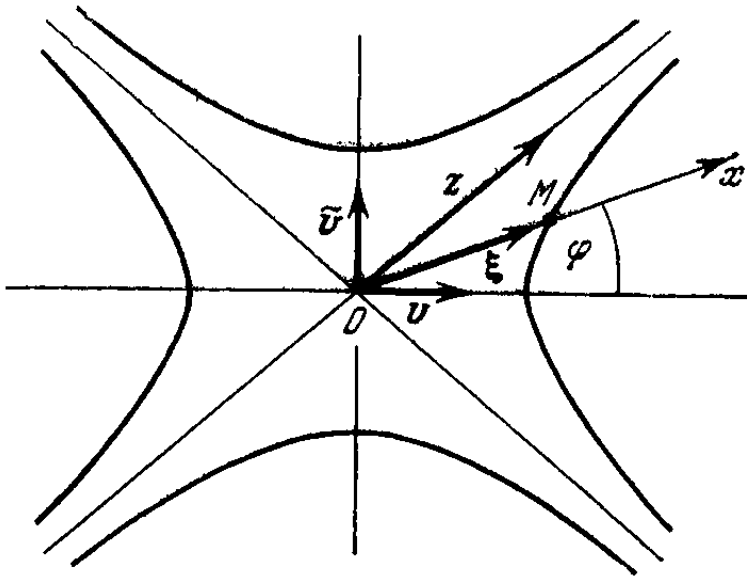


Рис. 1.

Таким образом, по каждому направлению, исходящему из точки O , будет отложен единственный отрезок, а геометрическое место концов этих отрезков будет плоской кривой, которую мы будем называть *индикатрисой* данного тензора.

Уравнение индикатрисы имеет вид

$$a_{11} (\xi^1)^2 + 2a_{12} \xi^1 \xi^2 + a_{22} (\xi^2)^2 = \pm 1, \quad (4)$$

причем знак плюс в правой части соответствует тем направлениям вектора \mathbf{x} , для которых значение функции $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ положительно, а минус тем, для которых оно отрицательно.

Вид этого уравнения показывает, что *индикатриса тензора является центральной кривой второго порядка или парой таких кривых с центром в точке O .*

Известные формулы аналитической геометрии показывают, что направления, удовлетворяющие условию

$$a_{ij} x^i y^j = 0, \quad (5)$$

сопряжены относительно индикатрисы, а направление, удовлетворяющее условию

$$a_{ij} z^i z^j = 0, \quad (6)$$

является ее *асимптотическим направлением*. Мы будем говорить, что *направления векторов x^i и y^j сопряжены относительно тензора a_{ij} , а направление z^i есть нулевое направление этого тензора*. Пользуясь фактом, известным из аналитической геометрии, отметим, что направления, сопряженные относительно тензора, разделяются гармонически его нулевыми направлениями.

2. *Главными направлениями* тензора называют такие направления, которые сопряжены и взаимно ортогональны между собой, а орты этих направлений v^i, \tilde{v}^i называют *главными ортами тензора* (см. рис. 1). Разложим два произвольных вектора x^i, y^j по главным ортам тензора и пусть

$$x^i = x(v^i \cos \varphi + \tilde{v}^i \sin \varphi),$$

$$y^j = y(\tilde{v}^j \cos \psi + \tilde{v}^j \sin \psi).$$

Подставляя в (1) и пользуясь (5), получим

$$\omega = xy(a_{ij}v^i v^j \cos \varphi \cos \psi + a_{ij}\tilde{v}^i \tilde{v}^j \sin \varphi \sin \psi). \quad (7)$$

Результаты подстановки главных ортов в выражение функции (1), т. е. величины

$$\rho = a_{ij}v^i v^j, \quad \sigma = a_{ij}\tilde{v}^i \tilde{v}^j, \quad (8)$$

называются *главными значениями* тензора или его *характерными числами*.

Представив (7) в виде

$$\omega = xy(\rho \cos \varphi \cos \psi + \sigma \sin \varphi \sin \psi) \quad (9)$$

и заметив, что

$$x \cos \varphi = x^i v_i, \quad y \cos \psi = y^j \tilde{v}_j,$$

$$x \sin \varphi = x^i \tilde{v}_i, \quad y \sin \psi = y^j v_j,$$

Получим

$$\omega = a_{ij}x^i y^j = (\rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j) x^i y^j,$$

а вследствие произвольности векторов x^i, y^j

$$a_{ij} = \rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (10)$$

Таким образом, симметричный тензор второй валентности определяется заданием главных ортов и главных значений и выражается через них по формуле (10).

Представление (10) называется каноническим представлением тензора. В частном случае метрического тензора g_{ij} условие сопряженности (5) совпадает с условием ортогональности, вследствие чего всякие два взаимно ортогональных направления являются главными направлениями метрического тензора. Кроме того, из (8) следует, что в этом случае

$$\sigma = \rho = 1,$$

так что главные значения метрического тензора равны единице, и он представляется канонически через любые два взаимно ортогональных орта по формуле

$$g_{ij} = v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (11)$$

С этим каноническим представлением метрического тензора полезно сопоставить более общее его представление через два произвольных единичных вектора v_i и $w_j = v_j \cos \omega + \tilde{v}_j \sin \omega$, образующих между собой угол ω . Из тождества

$$\begin{aligned} w_i \tilde{v}_j - v_i \tilde{w}_j &= (v_i \cos \omega + \tilde{v}_i \sin \omega) \tilde{v}_j - v_i (\tilde{v}_j \cos \omega - v_j \sin \omega) = \\ &= (v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j) \sin \omega \end{aligned}$$

следует, что

$$g_{ij} = \frac{w_i \tilde{v}_j - v_i \tilde{w}_j}{\sin \omega}. \quad (12)$$

Отсюда, применяя (15) п.5.3 и (17) п.5.5, в свою очередь получаем, что дискриминантный тензор

$$e_{ij} = g_{ik} e^k{}_j$$

может быть представлен в следующем виде:

$$e_{ij} = \frac{v_i w_j - w_i v_j}{\sin \omega}, \quad (13)$$

или, в частности,

$$e_{ij} = v_i \tilde{v}_j - \tilde{v}_i v_j. \quad (14)$$

3. Если масштабные векторы совпадают с главными ортами тензора, то последние имеют координаты $v_i(1, 0)$ и $\tilde{v}_i(0, 1)$, и из (10) следует, что

$$a_{11} = \rho, \quad a_{22} = \sigma, \quad a_{12} = 0,$$

а уравнение индикатрисы (4) имеет канонический вид

$$\rho x^2 + \sigma y^2 = \pm 1, \quad (15)$$

где ρ и σ — характерные числа тензора. Как известно из аналитической геометрии, эти коэффициенты являются корнями характеристического уравнения

$$z^3 - 2Sz + N = 0 \quad (16)$$

С коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} 2S = \rho + \sigma &= \frac{a_{11}g_{22} - 2a_{12}g_{12} + a_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\ N = \rho\sigma &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

являющимися инвариантами преобразования координат. Мы будем называть их *инвариантами тензора*, первый из них — *следом*, а второй — *нормой* тензора.

Свертывая с g^{ij} правую часть (10), получим

$$2S = g^{ij}a_{ij} = a_i^i, \quad (18)$$

а принимая во внимание, что (напомним, что v_p — единичный вектор)

$$e^{pq}v_p\tilde{v}_q = -e^{pq}\tilde{v}_p v_q = 1,$$

получим опять-таки из (10)

$$e^{pq}a_{pi}a_{qj} = \rho\sigma(v_i\tilde{v}_j - \tilde{v}_i v_j)$$

или в силу (14) и (17)

$$e^{pq}a_{pi}a_{qj} = Ne_{ij}, \quad (19)$$

откуда

$$2N = e^{pq}e^{rs}a_{pr}a_{qs}. \quad (20)$$

4. Свойства тензора существенно зависят от типа индикатрисы. Если она является эллипсом, т. е. если

$$N = \rho\sigma > 0,$$

то тензор не имеет нулевых направлений. Если индикатриса является гиперболой (вернее, парой сопряженных гипербол, каждая из которых

соответствует определенному знаку левой части ее уравнения), т. е. если $N < 0$, то тензор имеет два различных нулевых направления. Предположим, что вектор нулевого направления

$$z^i = \lambda v^i + \mu \tilde{v}^i, \quad (21)$$

где v^i и \tilde{v}^i — главные орты. В таком случае

$$a_{ij} z^i z^j = \rho \lambda^2 + \sigma \mu^2 = 0,$$

и если $\sigma > 0$ и $\rho < 0$, то нулевые направления определяются векторами

$$z_1^i = \sqrt{\sigma} v_i + \sqrt{-\rho} \tilde{v}_i, \quad z_2^i = \sqrt{\sigma} v_i - \sqrt{-\rho} \tilde{v}_i, \quad (22)$$

а тензор может быть представлен в следующем виде:

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{z}_i^1 \tilde{z}_j^2 + \tilde{z}_i^2 \tilde{z}_j^1). \quad (23)$$

Если индикатриса является линией параболического типа, т. е.

$$N = 0,$$

то она распадается на пару параллельных прямых, и если $\rho \neq 0$, $\sigma = 0$, то тензор представляется в следующем виде:

$$a_{ij} = \rho v_i v_j. \quad (24)$$

5. Два симметричных тензора с координатами a_{ij} и \check{a}^{ij} называются *взаимными*, если они удовлетворяют уравнениям

$$\check{a}^{ik} a_{kj} = \delta_j^i. \quad (25)$$

Координаты взаимного тензора определяются через координаты данного однозначно из этих уравнений, если норма данного тензора отлична от нуля.

Если данный тензор представлен каноническим разложением (10), то взаимный ему

$$\check{a}^{ij} = \frac{v^i v^j}{\rho} + \frac{\tilde{v}^i \tilde{v}^j}{\sigma}, \quad (26)$$

так как в таком случае (25) удовлетворяются. Отсюда легко вытекает следующее тождество:

$$\check{a}^{ij} = \frac{1}{N} e^i p e^j a_{pq}, \quad (27)$$

где N есть норма тензора a_{ij} .

5.7. Свертывание тензоров

1. Рассмотрим некоторую полилинейную функцию трех или большего числа переменных

$$w = a_{ijkl}x^i y^j u^k v^l.$$

Если мы придадим определенные значения некоторым переменным, например двум последним, то w станет полилинейной функцией двух первых, и мы будем иметь

$$w = b_{ij}x^i y^j,$$

где b_{ij} — координаты некоторого тензора второй валентности. Но в силу произвольности x^i, y^j мы будем иметь

$$a_{ijkl}u^k v^l = b_{ij}.$$

Таким образом, суммы произведений координат тензора на координаты векторов, соответствующие некоторым его индексам, являются координатами тензора более низкой валентности. Рассмотрим теперь суммы следующего вида:

$$c_{ij} = a_{ijk} \cdot^k = a_{ijkl}g^{kl}. \quad (1)$$

Пользуясь каноническим представлением метрического тензора через единичный вектор u^i , получим

$$c_{ij} = a_{ijkl}u^k u^l + a_{ijkl}\tilde{u}^k \tilde{u}^l,$$

откуда согласно предыдущему следует, что и величины c_{ij} являются координатами тензора второй валентности. Мы будем говорить, что тензор c_{ij} получен в результате свертывания тензора a_{ijkl} по двум его последним индексам.

2. Очевидно, что действие свертывания уменьшает валентность тензора на две единицы. Если исходный тензор имеет нечетную валентность $2n+1$, то, производя над ним повторное свертывание n раз, мы придем к тензору первой валентности, т. е. к вектору. Если же валентность тензора равна $2n + 2$, т. е. четная, то после n свертываний мы получим тензор второй валентности (например, c_{ij}). Дальнейшее свертывание приведет нас к скалярной величине

$$c = c_{k\cdot} \cdot^k,$$

которая является следом тензора c_{ii} , т. е. величиной, остающейся инвариантной при преобразовании координат. Таким образом, действии свертывания позволяет построить инвариант из координат всякого тензора четной валентности. Для того чтобы построить инварианты из координат тензоров нечетных валентностей, предварительно составляют произведения этих тензоров на себя или друг на друга, а потом подвергают эти произведения свертыванию. Так, например, скалярное произведение векторов

$$w = v_k w^k$$

есть свернутое произведение тензоров первой валентности.

3. В заключение выведем одно соотношение для симметричного тензора второй валентности. Произведение этого тензора на себя, свернутое по двум индексам

$$b_{ij} = a_i^{\cdot k} a_{jk}, \quad (2)$$

дает снова симметричный тензор второй валентности, который называется *квадратом данного тензора*. Представив тензор a_{ij} канонически, мы получим

$$b_{ij} = \rho^2 v_i v_j + \sigma^2 \tilde{v}_i \tilde{v}_j. \quad (3)$$

Таким образом, квадрат данного тензора имеет те же главные направления, что и данный тензор, а его главные значения равны квадратам главных значений данного тензора. Кроме того,

$$\begin{aligned} b_{ij} + Ng_{ij} &= \rho^2 v_i v_j + \sigma^2 \tilde{v}_i \tilde{v}_j + \rho\sigma(v_i v_j + \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = \\ &= (\rho + \sigma)(\rho v_i v_j + \sigma \tilde{v}_i \tilde{v}_j), \end{aligned}$$

следовательно,

$$a_i^{\cdot k} a_{jk} - 2Sa_{ij} + Ng_{ij} = 0. \quad (4)$$

Считая g_{ij} «единичным тензором» и сравнивая полученное соотношение с характеристическим уравнением (16) п.5.6, говорят, что *всякий симметричный тензор второй валентности удовлетворяет своему характеристическому уравнению*.

6. Поверхности

6.1. ВВЕДЕНИЕ

Поверхности и их описание играют важную роль в конструировании и производстве. Очевидными примерами этого являются разработка и производство автомобильных кузовов, корабельных корпусов, авиационных фюзеляжей и крыльев; пропеллеров, турбин, компрессоров и лопастей вентиляторов; посуды, мебели и обуви. В этом случае сущность конструирования либо по функциональным, либо по эстетическим причинам составляет форма или геометрия поверхности. Описание поверхности также играет важную роль в представлении данных, полученных в медицине, геологии, физике и других естественных науках.

Традиционным способом представления поверхности является использование нескольких ортогональных проекций. По существу, поверхность задается сеткой ортогональных плоских кривых, лежащих на секущих плоскостях, и несколькими ортогональными проекциями определенных «характерных» пространственных линий (см. рис. 1 п.4.1). Эти кривые первоначально могут быть созданы на бумаге либо же взяты (оцифрованы) из трехмерной модели, например в автомобильной промышленности дизайнерами традиционно используется глиняная модель.

В машинной графике и автоматизированном проектировании выгодно разрабатывать «настоящую» трехмерную математическую модель поверхности. Такая модель позволяет на ранних стадиях и относительно легко провести анализ характеристик поверхности, например кривизны, или физических количественных характеристик, зависящих от поверхности, например объема, площади поверхности, момента инерции и т.д. Упрощается визуализация поверхности, применяемая для разработки или контроля за ходом разработки. Далее, по сравнению с традиционным методом, использующим сетку линий, также существенно упрощается генерация необходимой для изготовления поверхности информации, например управляющих программ для станка с числовым программным управлением. В ранних работах Безье, Сабина, Петерса и других авторов продемонстрирована

осуществимость этого подхода. Разработанные методы описания поверхностей достигли такой стадии развития, что позволяют «почти» исключить традиционное описание поверхности с помощью сетки линий.

Существуют две основные идеи, лежащие в основе методов описания поверхностей. В первой, связанной в основном с именем Кунса, математическую поверхность стараются создать по заранее известным данным. Во второй, связанной в основном с именем Безье, математическую поверхность стараются создать *ab initio* (с самого начала). В первое время отрасли, связанные с числовыми параметрами, например, конструирование, тяготели к первому подходу, тогда как отрасли, учитывающие визуальные, осязательные или эстетические факторы, например дизайнеры и художники, тяготели ко второму. Работы Роджерса об интерактивных системах разработки корпусов кораблей и Коэна о разработке поверхностей показали, что эти два подхода совместимы.

В следующих разделах представлены основы математического описания параметрических поверхностей, используемых в машинной графике и автоматизированном проектировании.

6.2. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Возможно, самым простым способом создания трехмерной поверхности является вращение двумерного объекта, например прямой или плоской кривой вокруг оси в пространстве. Такие поверхности называются поверхностями вращения. Сначала для простоты предположим, что ось вращения совпадает с осью X и положительно направлена. Предположим также, что объекты вращения - отрезок, прямая или плоская кривая - лежат на плоскости XOY . Позднее мы рассмотрим метод, позволяющий избавиться от этих ограничений.

Самый простой объект, который можно вращать вокруг оси, - это точка. При условии, что точка не лежит на оси, вращение на угол 2π (360°) породит окружность. Поворот на меньший угол даст дугу окружности.

Следующим по сложности является отрезок, параллельный, но не совпадающий с осью вращения. Вращение на угол (360°) породит в этом случае круговой цилиндр. Радиусом этого цилиндра является длина перпендикуляра, опущенного с отрезка на ось вращения. Длина цилиндра равна длине отрезка. Пример изображен на рис. 1.

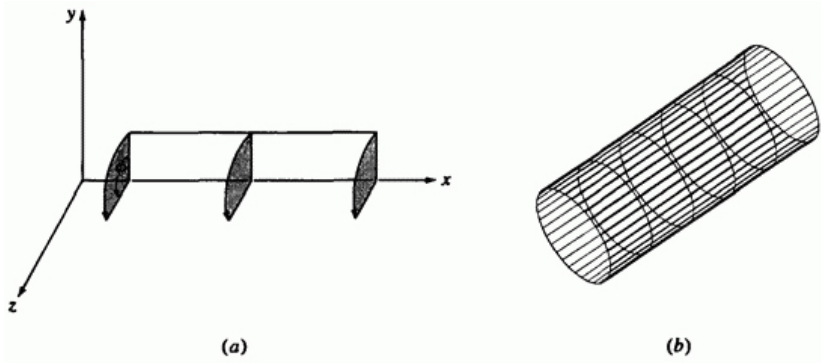


Рис. 1. Цилиндрическая поверхность вращения.
(а) Схема построения; (б) результат.

Если отрезок и ось вращения компланарны и отрезок не параллелен оси вращения, то в результате вращения вокруг оси на угол 2π (360°) мы получим усеченный круговой конус. Радиусы оснований усеченного конуса - длины перпендикуляров, опущенных с концов отрезка на ось вращения. Высота конуса - это длина спроецированного на ось вращения отрезка. Пример изображен на рис. 2.

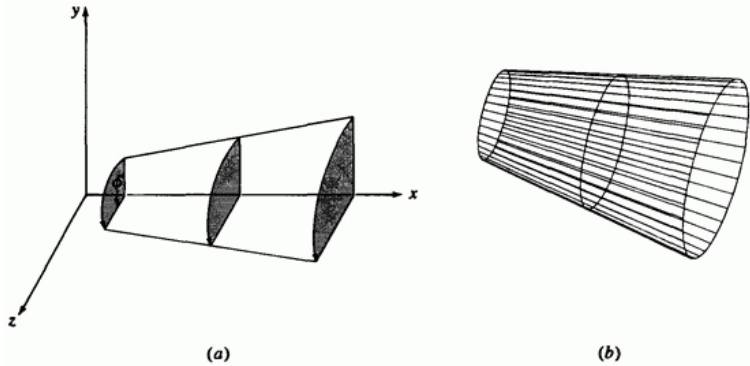


Рис. 2. Коническая поверхность вращения.
(a) Схема построения; (b) результат.

И снова, если отрезок и ось вращения компланарны и отрезок перпендикулярен оси вращения, то в результате вращения на угол 2π (360°) мы получим плоский диск. Если отрезок пересекает (или касается) ось вращения, то получится сплошной диск, в противном случае диск будет иметь круглое отверстие. Примеры изображены на рис. 3.

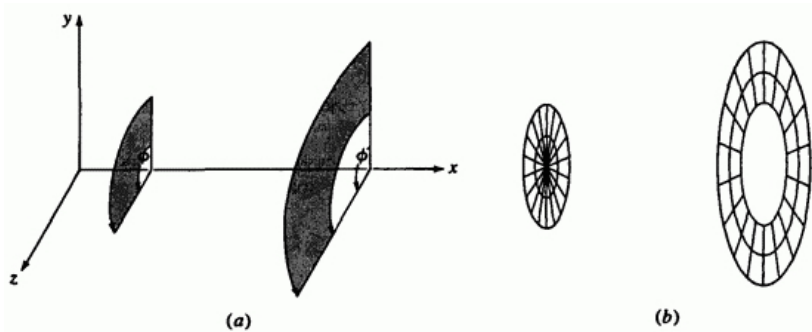


Рис. 3. Диск в качестве поверхности вращения.
(a) Схема построения; (b) результат.

И наконец, если отрезок наклонен к оси вращения, т.е. некопланарен, то вращение на угол 2π (360°) породит однополостный гиперboloид (см. разд. 6.4 и 6.7).

Для создания поверхностей вращения могут быть также использованы замкнутые и незамкнутые ломаные. На рис. 4 представлен конус с цилиндрическим отверстием.

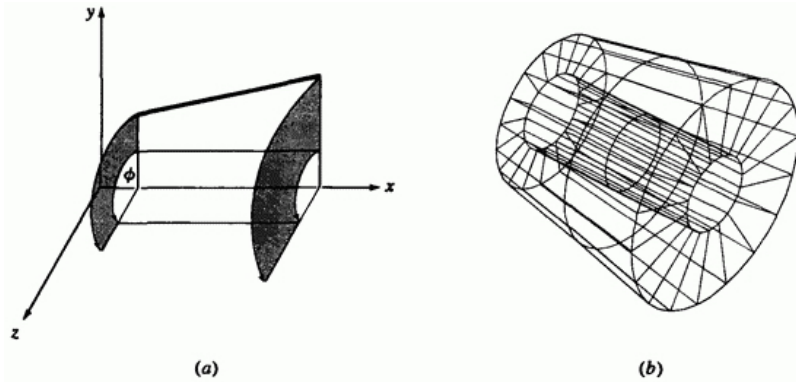


Рис. 4. Поверхность вращения из замкнутой ломаной.
(а) Схема построения; (б) результат.

Параметрическое уравнение точки на поверхности вращения можно получить, если вспомнить, что параметрическое уравнение вращаемого объекта, например

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)], \quad 0 \leq t \leq t_{\max},$$

есть функция одного параметра t . Вращение вокруг оси приводит к тому, что координаты зависят также от угла поворота. Таким образом,

точка на поверхности вращения определяется двумя параметрами t и ϕ . Как показано на рис. 5, это бипараметрическая функция.

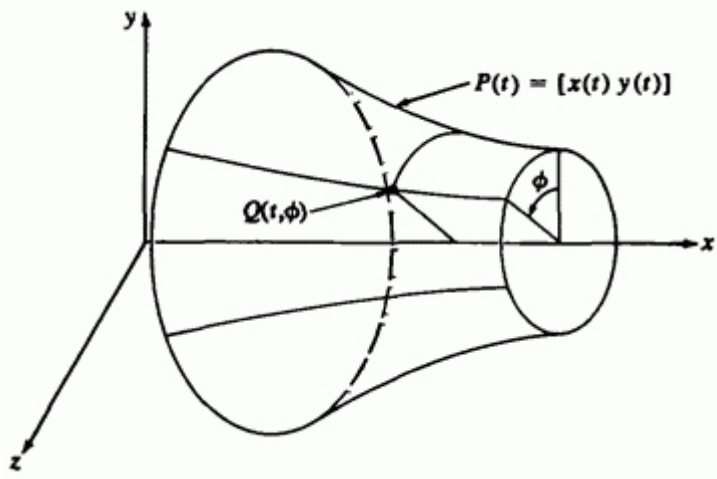


Рис. 5 Бипараметрическая поверхность вращения.

Для рассматриваемого частного случая, т. е. вращения вокруг оси x объекта, расположенного в плоскости xy , уравнение поверхности записывается

$$Q(t, \phi) = [x(t) \quad y(t) \cos \phi \quad y(t) \sin \phi] \quad (1)$$

Заметим, что здесь координата x не меняется. В качестве иллюстрации приведем пример.

Пример 1. Простая поверхность вращения

Рассмотрим отрезок с концами $P_1[1 \ 1 \ 0]$ и $P_2[6 \ 2 \ 0]$, лежащий в плоскости xy . Вращение отрезка вокруг оси x породит коническую поверхность. Определим на поверхности координаты

точки с параметрами $t = 0.5$, $\phi = \pi/3$ (60°).

Параметрическое уравнение отрезка, соединяющего P_1 и P_2 , имеет вид

$$P(t) = [x(t) \quad y(t) \quad z(t)] = P_1 + (P_2 - P_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

с декартовыми координатами

$$x(t) = x_1 + (x_2 - x_1)t = 1 + 5t,$$

$$y(t) = y_1 + (y_2 - y_1)t = 1 + t,$$

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t = 0.$$

Используя уравнение (1), получим точку $Q(1/2, \pi/3)$ на поверхности вращения

$$\begin{aligned} Q(1/2, \pi/3) &= [1+5t \quad (1+t) \cos \phi \quad (1+t) \sin \phi] = \\ &= \left[\frac{7}{2} \quad \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \left[\frac{7}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} \right] = [3.5 \quad 0.75 \quad 1.3] \end{aligned}$$

Вращение плоских кривых также порождает поверхности вращения. Как показано на рис. ба, сфера получается в результате вращения

вокруг оси X расположенной в плоскости XY полуокружности, центрированной относительно начала координат.

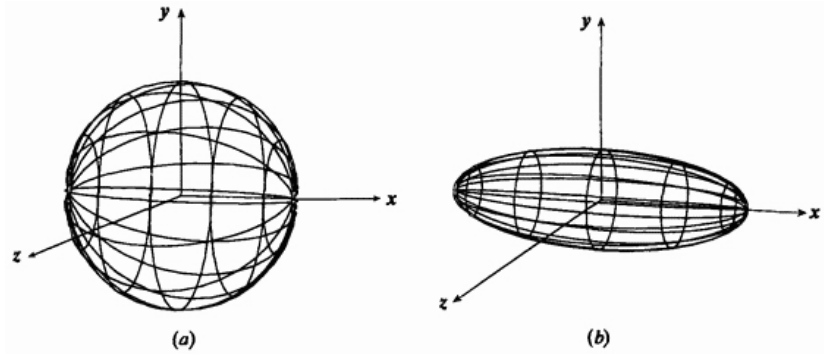


Рис. 6. Поверхности вращения. (а) Сфера; (б) эллипсоид.

Вспомнив параметрическое уравнение окружности

$$x = r \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$y = r \sin \theta$$

получим параметрическое уравнение сферы

$$Q(\theta, \phi) = [x(\theta) \quad y(\theta) \cos \phi \quad y(\theta) \sin \phi] =$$

$$= [r \cos \theta \quad r \sin \theta \cos \phi \quad r \sin \theta \sin \phi] \quad \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi. \end{array} \quad (2)$$

Если вместо окружности подставить параметрическое уравнение центрированного полуэллипса, расположенного в плоскости XY , получится эллипсоид вращения. Напомнив параметрическое уравнение полуэллипса

$$x = a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

$$y = b \sin \theta,$$

получим для любой точки эллипсоида следующее параметрическое уравнение:

$$Q(\theta, \phi) = [a \cos \theta \quad b \sin \theta \cos \phi \quad b \sin \theta \sin \phi],$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (3)$$

При $a = b = r$ уравнение (3) превращается в уравнение (2) для сферы. Эллипсоид вращения показан на рис. 6b.

Если ось вращения не проходит через центр окружности или эллипса, то в результате вращения получается тор с сечением в виде окружности или эллипса, соответственно. Параметрическое уравнение эллипса на плоскости xy с центром, не совпадающим с началом координат, выглядит так

$$x = h + a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$y = k + b \sin \theta,$$

где (h, k) - это x, y - координаты центра эллипса, тогда параметрическое уравнение для любой точки тора имеет вид:

$$Q(\theta, \phi) = [h + a \cos \theta \quad (k + b \sin \theta) \cos \phi \quad (k + b \sin \theta) \sin \phi], \quad (4)$$

где $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Если $a = b = r$, то уравнение (4) задает тор с сечением в виде окружности. Если $a \neq b$, то получится тор с сечением в виде эллипса. На рис. 7 представлены оба типа торов.

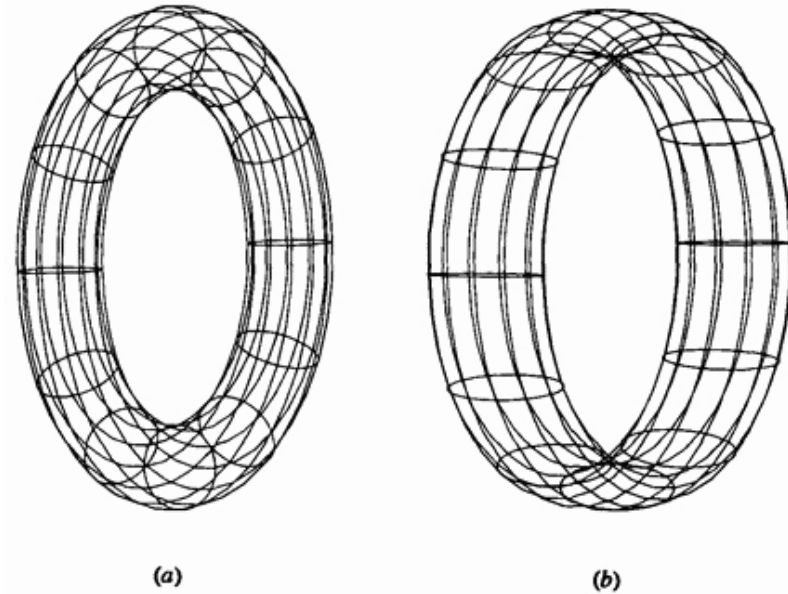


Рис. 7. Торы. (а) С сечением в виде окружности; (б) с сечением в виде эллипса.

Параболоид вращения получается при вращении параметрической параболы

$$x = a\theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max},$$

$$y = 2a\theta,$$

вокруг оси x . Параметрическая поверхность задается уравнением

$$Q(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} a\theta^2 & 2a\theta \cos \phi & 2a\theta \sin \phi \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max},$$

$$0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (5)$$

Гиперболоид вращения получается при вращении параметрической гиперболы

$$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max},$$
$$y = b \operatorname{tg} \theta$$

вокруг оси x . Параметрическая поверхность задается уравнением

$$Q(\theta, \phi) = [a \sec \theta \quad b \operatorname{tg} \theta \cos \phi \quad b \operatorname{tg} \theta \sin \phi], \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max},$$
$$0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (6)$$

Примеры показаны на рис. 8.

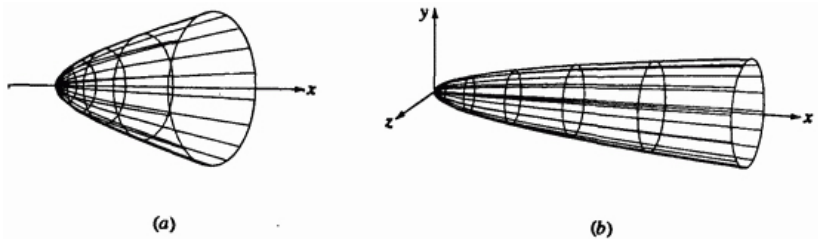


Рис. 8. Поверхности вращения. (a) Параболоид; (b) гиперболоид.

Для создания поверхности вращения можно использовать любую параметрическую кривую, например кубический сплайн, параболический сплайн, кривую Безье и В-сплайн. На рис. 9 изображена поверхность вращения, созданная из относительно простого параболического сплайна. На рис. 10 изображен бокал, созданный как поверхность вращения с помощью незамкнутого В-сплайна.

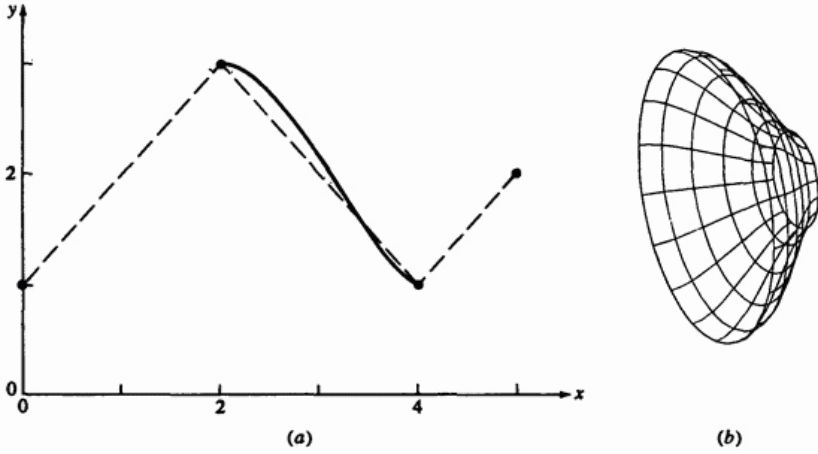


Рис. 9 Поверхность вращения из параболически интерполированной кривой. (а) Создание кривой; (b) поверхность.

Заметим, что бокал имеет как внутреннюю, так и внешнюю стороны. Вращение производится относительно оси y .

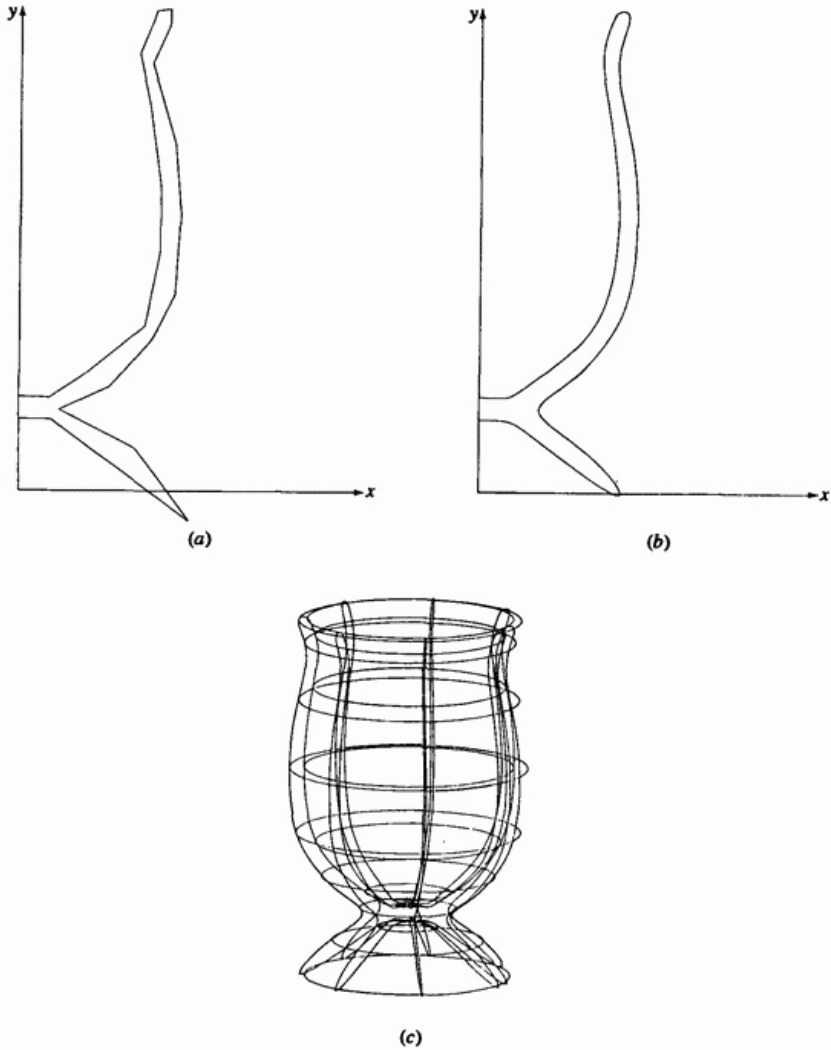


Рис. 10. В-сплайн поверхность вращения. (a) Вершины ломаной; (b) В-сплайн; (c) поверхность.

Напомним, что в матричной форме параметрическая пространственная кривая (см. уравнения (27), (44), (67) и (94) п.4) задается следующим образом:

$$P(t) = [T][N][G],$$

где $[T]$, $[N]$ и $[G]$ - соответственно матрица параметров, матрица функций смешивания и геометрическая матрица. Таким образом, в общей форме матричное уравнение поверхности вращения записывается в виде:

$$Q(t, \phi) = [T][N][G][S], \quad (7)$$

где $[S]$ представляет вклад вращения вокруг оси на угол ϕ . Для частного случая вращения вокруг оси X имеем:

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Эти методы иллюстрируются в следующем примере.

Пример 2. Поверхность вращения, созданная по параболической кривой

Рассмотрим параболическую кривую, заданную точками $P_1[0 \ 1 \ 0]$, $P_2[2 \ 3 \ 0]$, $P_3[4 \ 1 \ 0]$, $P_4[5 \ 2 \ 0]$. Будем вращать эту кривую вокруг оси X на угол 2π , чтобы получить поверхность вращения. Найдем на поверхности точку с параметрами $t = 0.5$, $\phi = \pi/3$ (60°).

Из уравнений (7) и (8) получим параметрическое уравнение

поверхности вращения

$$Q(t, \phi) = [T][A][G][S],$$

где $[S]$, $[T]$, $[A]$ и $[G]$ задаются уравнениями ((44), (52) и (53) п.4) соответственно.

Конкретнее,

$$Q(t, \phi) = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(t, \phi) = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -11 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $t = 0.5$ и $\phi = \pi/3$ (60°)

$$Q(0.5, \pi/3) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 7 & 0 & 1 \\ 1 & -11 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 49 & 33 & 33\sqrt{3} & 1 \\ 16 & 32 & 32 & 1 \end{bmatrix} = [3.0625 \quad 1.03125 \quad 1.786181 \quad 1]$$

Результаты изображены на рис. 9. Такая поверхность может быть результатом разработки кубка или даже газового канала двигателя или ракетного сопла.

Предыдущие результаты были получены путем вращения точки, отрезка, ломаной или кривой вокруг координатной оси, а именно вокруг оси X . К более общему случаю поворота вокруг произвольной оси в пространстве поверхность вращения, полученную в более удобной локальной системе координат, можно свести с помощью переносов и поворотов, приводящих поверхность в нужное положение.

На рис. 11 показана параметрическая кривая $P(t)$, повернутая вокруг произвольной оси в пространстве, проходящей через точки a_0 и a_1 и направленной от a_0 к a_1 .

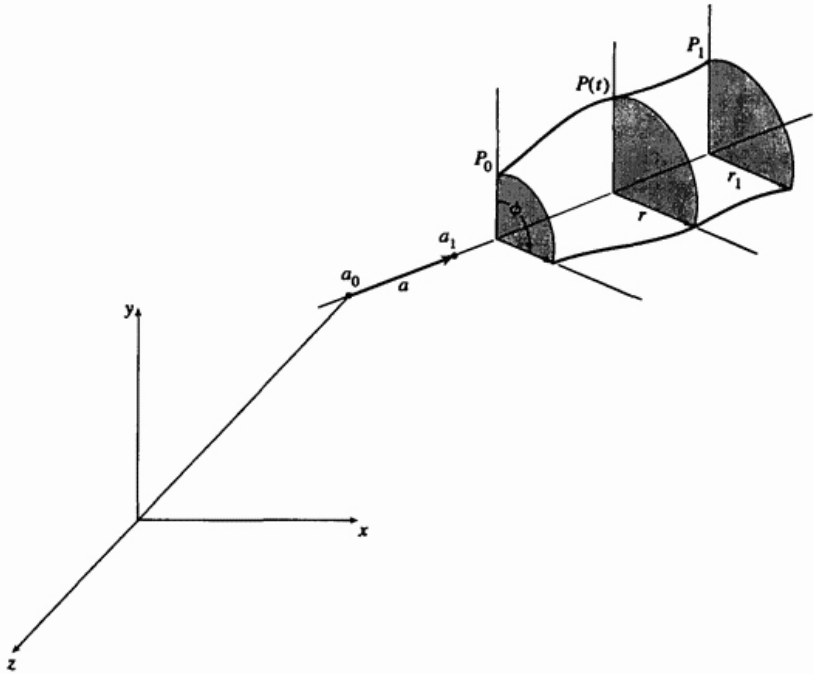


Рис. 11. Поверхность вращения вокруг произвольной оси.

После того как поверхность создана в удобной системе координат для приведения поверхности вращения в нужное положение, нужно выполнить следующие действия:

1. Перенести точку a_0 в начало координат.
2. Выполнить повороты, необходимые для совмещения осей α и $+z$.
3. Повернуть вокруг оси y на угол $+90^\circ$ для совмещения осей α и x .

Эти три шага необходимы только для того, чтобы найти обратное преобразование, размещающее поверхность вращения в нужном месте в трехмерном пространстве. Получив поверхность вращения вокруг оси x , приведем ее в нужное положение в пространстве:

1. Сдвинуть по оси X , чтобы переместить центр поверхности вращения в нужное положение на оси α .
2. Применить к поверхности вращения преобразование, обратное к суммарному преобразованию поворотов.
3. Применить к поверхности вращения обратный перенос точки α_0 .

Точка на поверхности вращения тогда задается уравнением:

$$Q(t, \phi) = [\bar{Q}][Tr][\bar{R}_y]^{-1}[R_y]^{-1}[R_x]^{-1}[Tr]^{-1}, \quad (9)$$

где $[Tr]$, $[R_x]$, $[R_y]$ задаются известными уравнениями. $[\bar{R}_y]^{-1}$ задается известным уравнением, и матрица $[\bar{Q}]$ задается в форме уравнения (7) с геометрической матрицей $[G]$, представленной в однородных координатах. $[S]$ теперь является матрицей 4×4 , заданной в виде

$$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Данный метод иллюстрируется на следующем примере.

Пример 3. Поверхность вращения вокруг произвольной оси

Найдем координаты точки с параметрами $t = \pi/2$, $\phi = \pi/6$ на поверхности вращения, образованной вращением эллипса с главной

осью, наклоненной относительно оси вращения. Ось вращения проходит через центр эллипса и лежит в плоскости эллипса. Угол наклона $i = \pi/4$. Полуоси эллипса $a = 5$, $b = 1$. Ось проходит через точки $a_0 [0 \ 10 \ 10]$ и $a_1 [10 \ 10 \ 0]$. Центр эллипса находится в точке a_1 .

Для начала найдем направляющие косинусы оси вращения

$$[c_x \ c_y \ c_z] = [1/\sqrt{2} \ 0 \ -1/\sqrt{2}]$$

и

$$d = \sqrt{c_y^2 + c_z^2} = 1/\sqrt{2}$$

Таким образом, используя известные уравнения

$$\begin{aligned} [M_1] &= [Tr][R_x][R_y] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

совместим ось вращения с осью Z . Поворот вокруг оси Y на угол 90° приводит к

$$\begin{aligned}
 [M_2] &= [Tr][R_x][R_y][\bar{R}_y] = \\
 &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0\sqrt{2} & -1 & 0\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0\sqrt{2} & -1 & 0\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Используя преобразование $[M_2]$ и однородные координаты, преобразуем центр эллипса, находящийся первоначально в a :

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0\sqrt{2} & -1 & 0\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -10/\sqrt{2} & 10 & 10/\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

т. е. в $h = 20/\sqrt{2}$ на оси x .

Вспомнив пример 4 из разд. 3.5, получим параметрические уравнения центрированного относительно начала координат эллипса, повернутого на угол i :

$$x = a \cos t \cos i - b \sin t \sin i, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

$$y = a \cos t \sin i + b \sin t \cos i,$$

которые могут быть записаны в форме уравнения (7)

$$\begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos i & \sin i & 0 & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда поверхность вращения имеет вид:

$$[Q] = [T][N][G][S] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos i & \sin i & 0 & 0 \\ -\sin i & \cos i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $a = 5$, $b = 1$, $i = \pi/4$

$$[\bar{Q}] = [\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Эта центрированная относительно начала координат поверхность вращения также показана на рис. 10.

Перенеся начало в (h, h) на оси x и заметив, что

$$[M_2]^{-1} = [\bar{R}_y]^{-1} [R_y]^{-1} [R_x]^{-1} [Tr]^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

получим

$$[Q] = [T][N][G][S][Tr_x][M_2]^{-1}.$$

Точка на поверхности $Q(t, \phi)$ имеет координаты

$$Q(t, \phi) = [\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 5\sqrt{2}/2 & 5\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 20/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

или

$$Q(t, \phi) = \left(\frac{1}{2}\right) [\cos t \quad \sin t \quad 0 \quad 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 5(1 - \sin \phi) & -5\sqrt{2} \cos \phi & -5(1 + \sin \phi) & 0 \\ -(1 + \sin \phi) & -\sqrt{2} \cos \phi & (1 - \sin \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для $t = \pi/2$, $\phi = \pi/6$

$$Q(\pi/2, \pi/6) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/2 & -5\sqrt{6}/2 & -15/2 & 0 \\ -3/2 & -\sqrt{6}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 20 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 37/4 & 10 - \sqrt{6}/4 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9.25 & 9.388 & 0.25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Получившаяся в результате поверхность изображена на рис. 12.

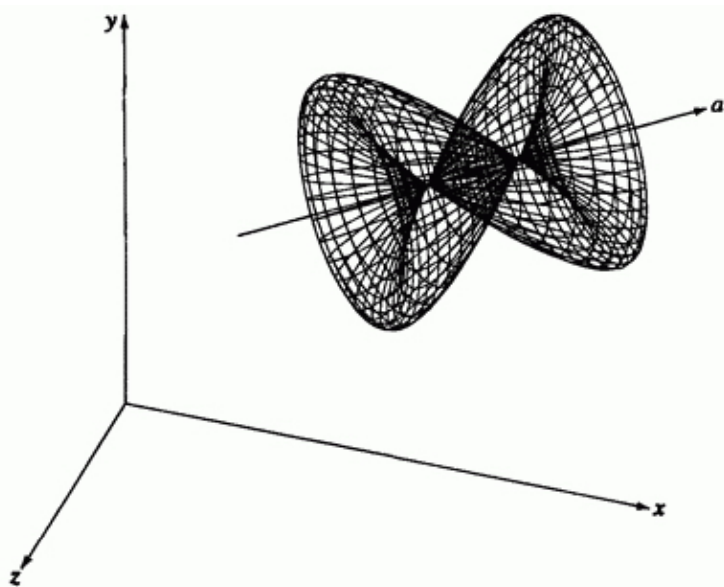


Рис. 12. Сложная эллиптическая поверхность вращения из примера 3.

Заметим, что эта поверхность самопересекается и имеет сложную форму.

Формальное дифференцирование уравнения (7) дает параметрические производные для поверхности вращения. А именно, производная в осевом направлении равна

$$Q_t(t, \phi) = [T'] [N] [G] [S], \quad (11)$$

а производная в радиальном направлении

$$Q_\phi(t, \phi) = [T] [N'] [G] [S'], \quad (12)$$

где штрих обозначает соответствующее дифференцирование.

Нормаль к поверхности задается векторным произведением параметрических производных, т.е.

$$n = Q_t \times Q_\phi. \quad (13)$$

6.3. ЗАМЕТАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Пространственную поверхность также можно получить путем перемещения объекта, например отрезка, ломаной или кривой вдоль некоторой кривой, в пространстве. Получающиеся в результате поверхности называются **заметаящими**. Генерация заметающих поверхностей часто используется в геометрическом моделировании. **Самый простой заметающий объект - точка**. Результатом заметания точки является, конечно, не поверхность, а пространственная кривая. Тем не менее, на этом примере хорошо иллюстрируется основная идея.

Рассмотрим координатный вектор $P[x \ y \ z \ 1]$, перемещаемый вдоль кривой, заданной заметающим преобразованием $[T(s)]$.

Координатный вектор $Q(s)$, представляющий получающуюся в результате кривую, задается выражением

$$Q(s) = P[T(s)], \quad s_1 \leq s \leq s_2. \quad (14)$$

Преобразование $[T(s)]$ определяет форму кривой. Например, если направляющая есть отрезок длины r , параллельный оси Z , то

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & rs & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Если направляющая есть окружность с центром в начале координат, лежащая в плоскости $Z = \text{const}$, то

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{x}\right) \cos\{2\pi(s+s_i)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{y}\right) \sin\{2\pi(s+s_i)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1,$$

где $s_i = (1/2\pi) \arctg(y_i/x_i)$ и для $P[x \ y \ z \ 1]$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Здесь подстрочный индекс i используется для обозначения начальной, или стартовой точки.

Сложные направляющие можно сконструировать с помощью объединения более простых. Например, после объединения двух предыдущих преобразований получим один оборот спирали вдоль оси Z , т. е.

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \left(\frac{r}{x}\right) \cos\{2\pi(s+s_i)\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{r}{y}\right) \sin\{2\pi(s+s_i)\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ns & 1 \end{bmatrix},$$

$$0 \leq s \leq 1.$$

Самая простая заметающая поверхность получается в результате перемещения отрезка вдоль направляющей. Напомним, что параметрическое уравнение отрезка

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (15)$$

Соответствующая заметающая поверхность задается уравнением

$$Q(t,s) = P(t)[T(s)], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad s_1 \leq s \leq s_2, \quad (16)$$

где $[T(s)]$ снова обозначает заметающее преобразование. Если оно состоит только из переносов и/или локальных или общих масштабирований, то в результате возникает плоская поверхность. Если заметающее преобразование включает повороты, то поверхность не будет плоской. На рис. 13 изображена спиральная заметающая поверхность, полученная из отрезка, в начальный момент параллельного оси Y , с помощью одновременного переноса вдоль оси X и вращения вокруг нее. Более подробно этот метод объясняется в следующем примере.

Пример 4. Линейчатая заметающая поверхность

Рассмотрим отрезок, лежащий в плоскости $X\mathcal{Y}$, параллельный оси \mathcal{Y} и заданный конечными точками $P_1[0 \ 0 \ 0]$ и $P_2[0 \ 3 \ 0]$. Найти точку с параметрами $t = 0.5$, $s = 0.5$ на заметающей поверхности, образованной одновременным переносом отрезка на 10 единиц вдоль оси X и его поворотом на 2π вокруг оси X .

В данном случае матрица заметающего преобразования - переноса и последующего поворота, задается матрицей

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi s) & \sin(2\pi s) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) & 0 \\ 1s & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Параметрическое уравнение отрезка

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t = [0 \ 0 \ 0 \ 1] + [0-0 \ 3-0 \ 0-0 \ 1-1]t = [0 \ 3t \ 0 \ 1].$$

Из уравнения (6-15) заметающая поверхность определяется следующим образом:

$$Q(t, s) = [P(t)][T(s)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3t & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi s) & \sin(2\pi s) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi s) & \cos(2\pi s) & 0 \\ l_s & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$Q(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -1.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результат изображен на рис. 13.

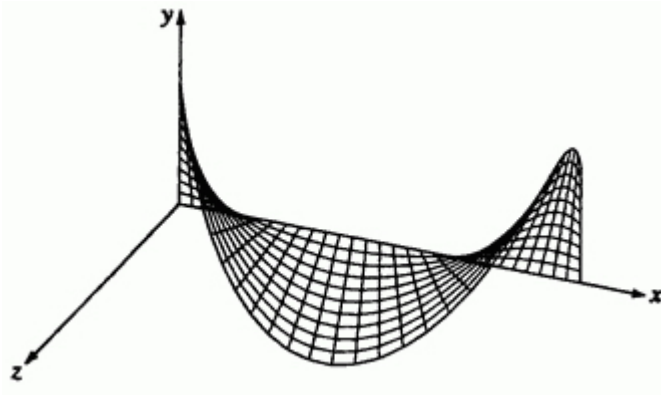


Рис. 13. Спиральная заметающая поверхность.

Для создания заметающих поверхностей также могут быть использованы параметрические кривые, например кубические сплайны, параболические сплайны, кривые Безье и В-сплайны.

В этом случае уравнение поверхности идентично уравнению (15), где $P(t)$ теперь представляет параметрическую кривую. На рис. 14 показана заматающая поверхность, созданная из одного сегмента кубического сплайна, перенесенного вдоль оси Z . Этот метод, иллюстрируется примером.

Пример 5. Заматающая поверхность с кубическим сплайном в качестве образующей

Рассмотрим поверхность, образованную в результате переноса на 10 единиц вдоль оси Z кубического сплайна, определяемого следующими данными: $R_1[0 \ 3 \ 0 \ 1]$, $R_2[3 \ 0 \ 0 \ 1]$, $R'_1[3 \ 0 \ 0 \ 0]$, $R'_2[3 \ 0 \ 0 \ 0]$.

Заматающая поверхность задается формулами:

$$Q(t,s) = [C(t)][T(s)], \quad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Нормализованный сегмент кубического сплайна задается (см. уравнение 27 п.4)

$$[C(t)] = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сегмент кривой изображен на рис. 14а.

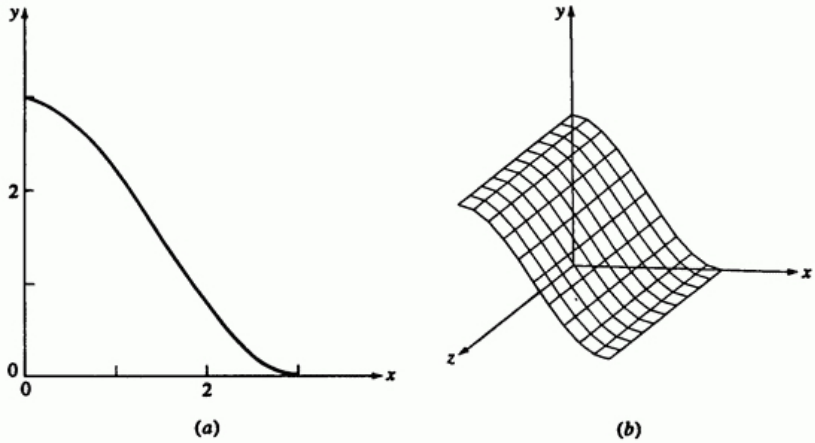


Рис. 14 Заметающая поверхность на основе кубического сплайна. (а) Кривая; (б) поверхность.

Заметающее преобразование имеет вид:

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ns & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$Q(t,s) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10s & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $t = 0.5$, $s = 0.5$

$$Q(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 0.125 & 0.25 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1.5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Результат изображен на рис. 14b.

Следует позаботиться о том, чтобы избежать вырождения поверхностей или их частей при генерации заметающих поверхностей из отрезков и кривых. Пример этого приведен на рис. 15.

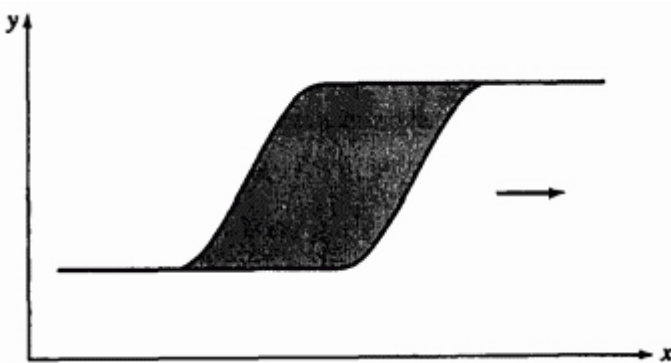


Рис. 15. Заметающая поверхность с вырожденными участками.

Здесь S -образную кривую, расположенную в плоскости $x'y'$, перемещают параллельно оси x' . Заметим, что «хвосты» с левой и правой сторон являются вырожденными частями поверхности (т. е. отрезками) с нулевой площадью. Такие вырожденные части поверхности могут породить проблемы в геометрических моделирующих системах.

Кроме незамкнутых кривых для создания заметающих поверхностей используются замкнутые ломаные и кривые. При добавлении конечных

поверхностей заметающая поверхность ограничивает конечный объем в пространстве. **Подобным способом объемные примитивы создаются во многих геометрических моделирующих системах.** Перемещаемый вдоль прямой направляющий квадрат или прямоугольник порождает прямоугольный параллелепипед. Окружность, перемещаемая вдоль прямой направляющей, порождает цилиндр. Окружность с уменьшающимся радиусом, перемещаемая вдоль прямой направляющей, порождает конус. Также возможно вращение вокруг направляющей оси. На рис. 16 показана заметающая поверхность, образованная из плоского квадрата, перпендикулярного оси X и перемещаемого вдоль оси X с одновременным вращением на 90° вокруг этой же оси.

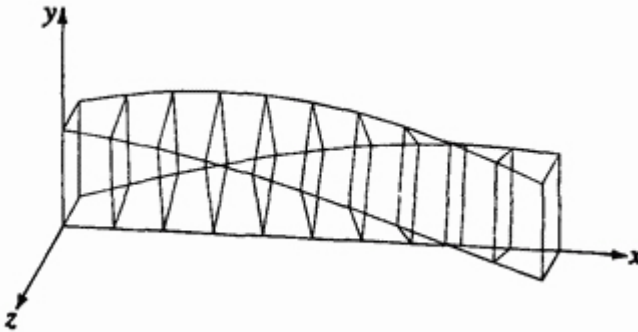


Рис. 16. Заметающая поверхность, образованная квадратом, перемещаемым вдоль оси X и одновременно вращаемым вокруг нее.

При перемещении плоского многоугольника или замкнутой кривой вдоль произвольной направляющей кривой следует отметить два важных момента. Во-первых, какая точка многоугольника постоянно лежит на направляющей? В общем случае это может быть любая точка многоугольника или замкнутой кривой. Для различных точек порожденные поверхности различаются.

Во-вторых, каково направление нормали многоугольника или замкнутой кривой во время перемещения вдоль направляющей? В этом случае обычно применяется два подхода. Нормаль может быть направлена как касательная к направляющей кривой. Либо может задаваться независимо от направляющей. Последняя альтернатива

очень гибка. Два примера изображены на рис. 17, где показаны заматающие поверхности, образованные квадратом, центрированным на оси x и передвигаемым вдоль направляющей $x = ls$, $y = \cos(\pi s) - 1$.

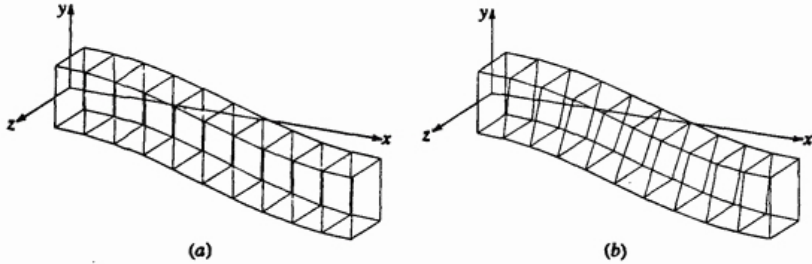


Рис. 17. Прямоугольник перемещается вдоль направляющей кривой. (а) Нормаль направлена как ось x ; (б) нормаль направлена так же, как касательная к направляющей кривой.

На рис. 17а нормаль направлена как ось x . На рис. 17б нормаль в каждой точке направлена так же, как и касательная к направляющей. Отметим разницу между этими двумя заматающими поверхностями. Детальный пример дополнительно иллюстрирует эту идею.

Пример 6. Сложная заматающая поверхность

Поверхность создается перемещением плоского квадрата, заданного вершинами $P_1[0 \ -1 \ 1]$, $P_2[0 \ -1 \ -1]$, $P_3[0 \ 1 \ -1]$, $P_4[0 \ 1 \ 1]$, вдоль направляющей кривой $x = 10s$, $y = \cos(\pi s) - 1$. При этом направление нормали к многоугольнику совпадает с касательной к образующей.

Направление касательной к образующей равно $[10 \ -\pi \sin(\pi s) \ 0]$. Таким образом, угол поворота вокруг оси z , необходимого для сонаправленности нормали многоугольника и

касательной, равен

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\pi \sin(\pi s)}{10} \right)$$

Замечающее преобразование равно, таким образом,

$$[T(s)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10s & \cos(\pi s) - 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

При $s = 0.5$ угол поворота равен

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{-\pi \sin(\pi/2)}{10} \right) = \operatorname{arctg}(-\pi/10) = -17.44^\circ$$

Тогда при $s = 0.5$ квадрат задается матрицей

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.954 & -0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.954 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 4.7 & -0.954 & 1 & 1 \\ 4.7 & -0.954 & -1 & 1 \\ 5.3 & -0.046 & -1 & 1 \\ 5.3 & -0.046 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Результат изображен на рис. 17b.

6.4. КВАДРАТИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Обычные квадратичные поверхности, такие как сфера, конус, цилиндр, эллипсоид, параболоид вращения и гиперboloид вращения являются также и поверхностями вращения. Эти квадратичные поверхности, особенно сфера, конус и цилиндр, играют важную роль при изготовлении деталей механизмов, а также в описании обрабатываемых поверхностей. Например, баскетбольные и футбольные мячи имеют сферическую форму, воронки - коническую, банки для пива - цилиндрическую, а спутниковые антенны - параболическую. Квадратичные поверхности также важны и при описании более сложных поверхностей. Например, фюзеляж истребителя North American P-51 времен второй мировой войны был описан с помощью сегментов конических поверхностей. Этот метод называется методом построения плазов с помощью конических сечений.

Существует два метода представления квадратичных поверхностей - алгебраический (включающий параметрические представления) и геометрический. Геометрические описания обычно применяются для естественных квадратичных поверхностей. Алгебраически квадратичная поверхность задается в общем виде уравнением

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0, \quad (17)$$

где $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K$ - константы. Уравнение (17) является обобщением уравнения конических сечений на три измерения. В матричной форме обобщенное квадратичное уравнение можно записать как

$$[X][S][X]^T = 0, \quad (18)$$

где $[X] = [x \ y \ z \ 1]$, а

$$[S] = \begin{bmatrix} A & D/2 & F/2 & G/2 \\ D/2 & B & E/2 & H/2 \\ F/2 & E/2 & C & J/2 \\ G/2 & H/2 & J/2 & K \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2A & D & F & G \\ D & 2B & E & H \\ F & E & 2C & J \\ G & H & J & 2K \end{bmatrix}.$$

Как и в случае конических сечений, квадратичные поверхности бывают либо центральными, либо нецентральными. Центральные квадрики - это эллипсоид и гиперболоид. Параболоиды - это нецентральные поверхности. Если квадрика центральна, то ее центр можно перенести в начало координат. Если это невозможно, то квадрика нецентральная, т. е. является параболоидом. Перенос центра в начало координат приводит к исчезновению линейных членов уравнения (17).

После переноса уравнение (18) превращается в

$$[X][Tr][S][Tr]^T [X]^T = [X][S'][X]^T = 0, \quad (19)$$

где матрица переноса имеет вид:

$$[Tr] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ l & m & n & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованная матрица $[S']$ равна

$$[S'] = \left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 2A' & D' & F' & G' \\ D' & 2B' & E' & H' \\ F' & E' & 2C' & J' \\ G' & H' & J' & 2K' \end{bmatrix}. \quad (20)$$

$$с \quad A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C, \quad D' = D, \quad E' = E, \quad F' = F$$

и

$$G' = 2Al + Dm + Fn + G,$$

$$H' = Dl + 2Bm + En + H,$$

$$J' = Fl + Em + 2Cn + J,$$

$$2K' = lG' + mH' + nJ' + (Gl + Hm + Jn + 2K).$$

Исключение линейных членов, т. е. случай $C' = H' = J' = 0$, приводит к

$$2Al + Dm + Fn + G = 0,$$

$$Dl + 2Bm + En + H = 0,$$

$$Fl + Em + 2Cn + J = 0$$

или

$$[l \quad m \quad n] \begin{bmatrix} 2A & D & F \\ D & 2B & E \\ F & E & 2C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G \\ -H \\ -J \end{bmatrix}, \quad (21)$$

что можно записать в следующем виде:

$$[M][L] = [G],$$

Если матрица $[L]$ обратима, то решение существует и квадрика центральна, т. е. является эллипсоидом или гиперboloидом. Если же $[L]$ особенная (вырожденная) матрица, то решения не существует и квадрика является параболоидом. Приравнивание детерминанта $[L]$ к нулю дает условие для параболоида. Таким образом,

$$\det[L] = \begin{vmatrix} 2F & D & F \\ D & 2B & E \\ F & E & 2C \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

$$A(E^2 - BC) + B(F^2 - AC) + C(D^2 - AB) - (ABC + DEF) = 0$$

является условием для параболоида. Далее, если $\det[L] > 0$, то мы получаем гиперboloид, и если $\det[L] < 0$ - эллипсоид.

Как и для конических сечений, независимо от того, обратима $[L]$ или нет, оси квадрики с помощью поворотов можно сделать параллельными координатным осям. Здесь требуется три поворота: два для того, чтобы сделать одну из осей квадрики параллельной координатной оси и последний поворот вокруг этой же оси для того, чтобы сделать две другие оси квадрики параллельными другим координатным осям. Для квадрики в обобщенном виде решение получающихся уравнений для необходимых углов поворотов является нетривиальной задачей и здесь не приводится.

Аналогичным образом, если квадрика нецентральна, т. е. является параболоидом, то, как было ранее упомянуто, нельзя исключить из уравнения все линейные члены. Тем не менее, два их трех линейных членов могут быть исключены. И снова, решение получающихся при этом уравнений является нетривиальной задачей и здесь не приводится.

Результатом вышеперечисленных операций должно было быть приведение квадратики к стандартному виду. Для центральной квадратики в стандартном виде центр находится в начале координат, а оси направлены в соответствии с координатными осями. Запишем получившееся стандартное уравнение в матричном виде

$$[X] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{bmatrix} [X]^T = 0 \quad (23)$$

или
$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \kappa \quad (24)$$

Если $\alpha \neq \beta \neq \gamma > 0$, $\kappa > 0$, то мы получим обобщенный эллипсоид (см. рис. 18а). Наибольшее из значений α, β, γ определяет главную ось. Если две из трех констант равны, например, $\alpha = \beta \neq \gamma > 0$, то мы получим эллипсоид вращения. Ось вращения связана с константой, отличной от двух остальных. Если $\alpha = \beta = \gamma > 0$, то мы получим сферу радиуса $\sqrt{\kappa/\alpha}$. Переписав уравнение (24) в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и устремив одну из констант к бесконечности, получим цилиндр как предельный случай эллипсоида. «Ось» этого эллипсоида, заданная отсутствующей координатой, «бесконечно» длинна. Если две оставшиеся константы равны, например $\alpha = \beta$, то мы получим круговой цилиндр. Если они не равны, например $\alpha \neq \beta$, то получим эллиптический цилиндр. В этом случае уравнение (24) превращается в

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \kappa$$

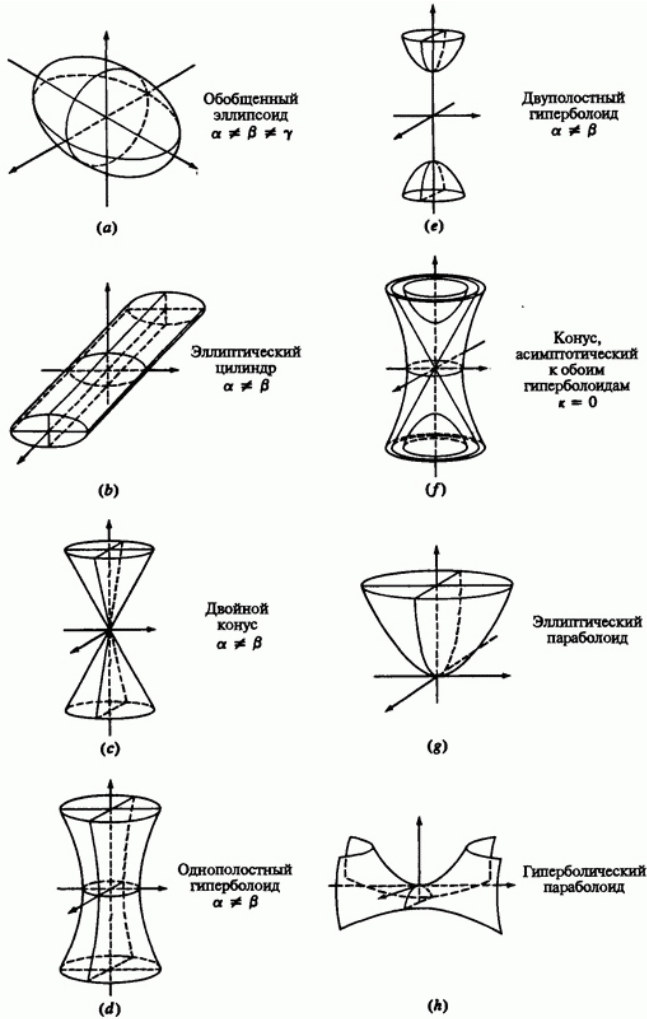


Рис. 18. Квадратичные поверхности. (a) Обобщенный эллипсоид $\alpha \neq \beta \neq \gamma$; (b) эллиптический цилиндр $\alpha \neq \beta$; (c) двойной конус $\alpha \neq \beta$; (d) однополостный гиперболюид $\alpha \neq \beta$; (e) двуполостный гиперболюид $\alpha \neq \beta$; (f) конус, асимптотический к обоим гиперболюидам $\kappa = 0$; (g) эллиптический параболоид; (h) гиперболический параболоид.

Посмотрим пример, приведенный на рис. 18b. Если $\kappa = 0$, то мы получим мнимый цилиндр, потому что сумма квадратов двух вещественных чисел не может быть равной нулю.

Если $\kappa = 0$, одна из констант отрицательна, а две другие положительны, например $\alpha, \beta > 0, \gamma < 0$, то мы получим двойной конус. Ось конуса связана с координатой отрицательной константы.

Если $\alpha = \beta$, то получится правильный круговой конус. Если $\alpha \neq \beta$, получится эллиптический конус. В этом случае уравнение (24) превращается в

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma z^2.$$

Пример изображен на рис. 18с.

Если $\kappa = 0, \alpha, \beta, \gamma \neq 0$, то конус мнимый, потому что сумма квадратов трех вещественных чисел не может быть равной нулю.

Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$, а $\kappa < 0$, получится мнимый эллипсоид, потому что опять сумма квадратов трех вещественных чисел не может быть отрицательной.

Если одна из констант в уравнении (24) отрицательна, например $\gamma < 0$, а другие положительны, в результате квадратичная поверхность будет однополостным гиперboloидом. Ось гиперboloида связана с отрицательной константой, например, если $\gamma < 0$, то осью гиперboloида будет координатная ось z . На рис. 18d приведен пример. Если две положительные константы равны между собой, например $\alpha = \beta$, то получается гиперboloид вращения. В противном случае - эллиптический гиперboloид. Гиперboloид называется однополостным, потому что можно соединить любые две точки поверхности, не выходя за ее границы. В пределе, при приближении отрицательной константы к нулю, получится либо круговой, либо эллиптический цилиндр. Однополостный гиперboloид является двулнейчатой поверхностью (см. разд. 6.8). Двуполостный

гиперболоид в некотором смысле противоположен однополостному. Здесь отрицательны две из трех констант α, β, γ , например $\alpha, \beta < 0$, а третья положительна. Ось гиперболоида связана с положительной константой. Пример приведен на рис. 18е. Соединить две любые точки двуполостного гиперболоида, не покидая поверхность, невозможно. Для $\alpha, \beta < 0, \gamma, \kappa > 0$ вершины двух полостей гиперболоида находятся в диапазоне

$$\pm \left(\frac{\alpha\beta\kappa}{\gamma^2} \right)^{1/6}$$

на оси z^2 . Если отрицательные константы равны, то получается гиперболоид вращения. В противном случае получается эллиптический гиперболоид. Заметим, что число отрицательных констант равно числу полостей гиперболоида.

Если $\kappa = 0$, то оба гиперболоида вырождаются в конус, асимптотический к обоим из них, как это показано на рис. 18f.

Теперь рассмотрим нецентральные квадратичные поверхности, а именно параболоиды. В стандартном виде, где z является осью параболоида, имеем уравнение

$$[X] \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{bmatrix} [X]^T = 0 \tag{25}$$

или

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z = 0 \tag{26}$$

Если $\alpha, \beta > 0$, то, как показано на рис. 18g, получается эллиптический параболоид. Если $\alpha = \beta > 0$, то получим параболоид вращения. Вершина параболоида находится в начале координат. При $\gamma < 0$ поверхность «открыта» в положительную сторону оси z . Аналогичным образом, при $\gamma > 0$ поверхность открыта в отрицательную сторону оси z . Если $\gamma = 0$, поверхность превращается в эллипс. Если либо α , либо $\beta < 0$, то, как показано на рис. 18h, получается гиперболический параболоид. Если $\alpha > 0, \beta < 0$, то фокальной осью является ось y . Аналогично, если $\alpha < 0, \beta > 0$, фокальная - ось x . Если $\gamma = 0$, то седло направлено вверх, как это показано на рис. 18h. Если $\gamma > 0$, то поверхность отражена относительно плоскости $z = 0$ и седло направлено вниз. Если $\gamma = 0$, то поверхность вырождается в гиперболу. Гиперболический параболоид иногда называют седловой поверхностью. Заметим, что даже при $\alpha = \beta$ гиперболический параболоид не является поверхностью вращения. Тем не менее, это двулинейчатая поверхность (см. разд. 6.8). И наконец, если либо α , либо $\beta = 0$, то получаем параболический цилиндр. Дальнейшую информацию о квадратичных поверхностях и их свойствах можно найти в литературе. Хотя для нахождения свойств квадратичных поверхностей часто бывает полезна явная форма их задания, но, аналогично случаю конических сечений, параметрическое задание поверхностей позволяет получить более привлекательные и доходчивые графические изображения. Для квадратичных поверхностей со стандартной ориентацией параметрические представления задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Эллипсоид: } x &= a \cos \theta \sin \phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ y &= b \sin \theta \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq 2\pi, \\ z &= c \cos \phi. \end{aligned} \tag{27}$$

Однополостный гиперboloид:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \operatorname{ch} \phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\y &= b \sin \theta \operatorname{sh} \phi, & -\pi \leq \phi \leq \pi, \\z &= c \operatorname{sh} \phi.\end{aligned}\tag{28}$$

Двуполостный гиперboloид:

$$\begin{aligned}x &= \pm a \operatorname{ch} \phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\y &= b \sin \theta \operatorname{sh} \phi, & -\pi \leq \phi \leq \pi, \\z &= c \cos \theta \operatorname{sh} \phi.\end{aligned}\tag{29}$$

Эллиптический параболоид:

$$\begin{aligned}x &= a\phi \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\y &= b\phi \sin \theta, & 0 \leq \phi \leq \phi_{\max}, \\z &= \phi^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Гиперболический параболоид:

$$\begin{aligned}z &= a\phi \operatorname{ch} \theta, & -\pi \leq \theta \leq \pi, \\y &= b\phi \operatorname{sh} \theta, & \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}, \\z &= \phi^2.\end{aligned}\tag{31}$$

Эллиптический конус:

$$\begin{aligned}x &= a\phi \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\y &= b\phi \sin \theta, \quad \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}, \\z &= c\phi.\end{aligned}\tag{32}$$

Эллиптический цилиндр:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\y &= b \sin \theta, \quad \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}, \\z &= \phi.\end{aligned}\tag{33}$$

Параболический цилиндр:

$$\begin{aligned}x &= a\theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{\max}, \\y &= 2a\theta, \quad \phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}, \\z &= \phi.\end{aligned}\tag{34}$$

Параметрически заданные эллипсоид и часть гиперболического параболоида показаны на рис. 19.

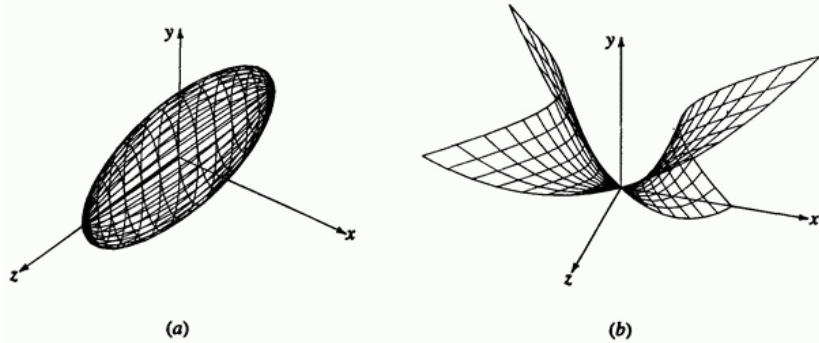


Рис. 19. Параметрические квадратичные поверхности. (а) Эллипсоид; (b) гиперболический параболоид.

Хотя представлять все квадратичные поверхности удобно с помощью обобщенного уравнения второй степени (см. уравнение (17)), а генерировать - с помощью параметрического задания, описанного выше, но при компьютерном моделировании квадратичные поверхности наиболее точно представляются геометрически. Геометрически любая квадратичная поверхность представляется точкой, двумя ортогональными (единичными) векторами и тремя скалярами. Точка - либо центр, либо вершина, фиксирует местоположение в пространстве. Вектора и их векторное произведение определяют оси поверхности или ориентацию. Скаляры определяют ее измерения или размер. Например, сфера определяется своим центром и радиусом, правильный цилиндр - вектором, задающим его ось, точкой на оси и радиусом, эллипсоид определяется центром, двумя векторами, представляющими две из его трех ортогональных осей и тремя скалярами, представляющими длины вдоль этих осей, и т.д. В табл. 1 перечислены геометрические описания квадратичных поверхностей.

Таблица 1. Геометрические описания квадратичных поверхностей

Поверхность	Скаляры	Точка	Векторы
Плоскость	Нет	Любая точка на плоскости	Единичная нормаль
Сфера	Радиус	Центр	Нет

Правильный круговой конус	Половинный угол	Центр (вершина)	Единичный вектор, параллельный оси
Правильный круговой цилиндр	Радиус	Любая точка на оси	Единичный вектор, параллельный оси
Правильный эллиптический цилиндр	Длины осей эллипса (2)	Любая точка на оси	-
Правильный параболический цилиндр	Фокусное расстояние	Вершина	Единичный вектор оси
Эллиптический конус	Длины осей эллипса (2)	Центр	Единичный вектор, параллельный оси
Эллипсоид	Длины осей (3)	Центр	Два единичных вектора, параллельных двум из трех осей
Эллиптический параболоид	Длины осей эллипса	Вершина	Единичный вектор, параллельный оси
Гиперболический параболоид	Гиперболический и параболический фокусы (3)	Вершина	Единичный вектор, параллельный оси
Однополостный гиперболоид	Длины осей эллипса (2) Гиперболический фокус вдоль главной оси	Центр	Единичный вектор, параллельный оси

Двуполостный гиперболоид	Длины осей (2)	Центр	Единичный вектор, параллельный оси
	Местоположение вершины на оси симметрии (1)		

При работе с геометрически заданными квадратичными поверхностями необходимо преобразовывать только определяющие точки и векторы. Скалярные величины остаются неизменными и, таким образом, не накапливают при вычислениях ошибок, возникающих из-за использования в компьютере арифметики с ограниченной разрядной сеткой.

Например, геометрически заданный радиус сферы всегда равен R . А радиус сферы, полученный путем преобразования алгебраического представления (см. уравнение (17)) равен $R \pm \epsilon$, где ϵ - небольшая числовая ошибка. Числовая стабильность определяющих скаляров очень важна, например при определении характера кривой пересечения двух квадратичных поверхностей или при определении идентичности двух поверхностей.

6.5. КУСОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В предыдущих разделах обсуждались создание и характеристики поверхностей, для которых существуют известные аналитические описания. Однако есть много поверхностей, для которых таких описаний сделать невозможно. Типичными примерами являются автомобильные кузова, фюзеляжи и крылья самолетов, корпуса кораблей, скульптуры, бутылки, башмаки и т.д. Эти поверхности представляются в кусочном виде, т. е. похожем на лоскутное одеяло. В рассуждениях используется векторное параметрическое представление, потому что оно не зависит от осей, устраняет бесконечные значения углов наклона относительно некоторой произвольной системы координат, устраняет неоднозначность представления многозначных поверхностей и пространственных функций, облегчает представление поверхностей в однородных координатах, и такое представление совместимо с использованием преобразований трехмерных однородных координат, обсуждающихся ранее.

Остаток этой главы будет посвящен обсуждению способов и методов математического описания кусков поверхностей.

Наша цель заключается в том, чтобы для создания полной поверхности объединить вместе отдельные куски вдоль их границ. Для кусочного представления кривых мы будем придерживаться принятого ранее изложения. Мы начнем наше обсуждение с элемента или куска аналитической поверхности, а именно сферы.

На примере сферической поверхности мы продемонстрируем некоторые свойства кривых, полезные при описании поверхности. Определенные кривые на поверхности задаются плоскостями, пересекающими сферу. В качестве примера рассмотрим пересечение единичной сферы и плоскости, определяемое уравнением поверхности $z = \cos \phi_1 = a_1 = \text{constant}$ и показанное на рис. 20а.

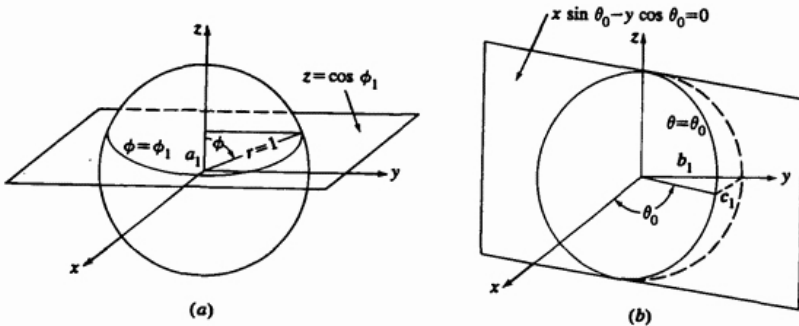


Рис. 20. Пересечение плоскости и сферы. (а) Параллель широты; (б) меридиан долготы.

Получившаяся кривая является параллелью широты. Уравнение этой кривой получается путем решения системы двух уравнений поверхностей. Непараметрическое уравнение единичной сферы записывается в виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.0$$

Таким образом,

$$x^2 + y^2 = 1 - a_1^2$$

определяет пересечение плоскости и сферы.

На рис. 20b плоскость $\theta = \theta_0 = \text{constant}$ задается уравнением

$$x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0 = 0$$

или

$$c_1 x - b_1 y = 0$$

В результате пересечения этой плоскости и сферы получается меридиан долготы. Решение системы уравнений дает уравнение кривой пересечения; т. е.

$$y^2 \left[\left(\frac{b_1}{c_1} \right)^2 + 1 \right] + z^2 = 1.0$$

Как показано на рис. 21, границы куска сферической поверхности на единичной сфере могут быть сформированы четырьмя плоскостями, двумя параллелями и двумя меридианами, пересекающими сферу.

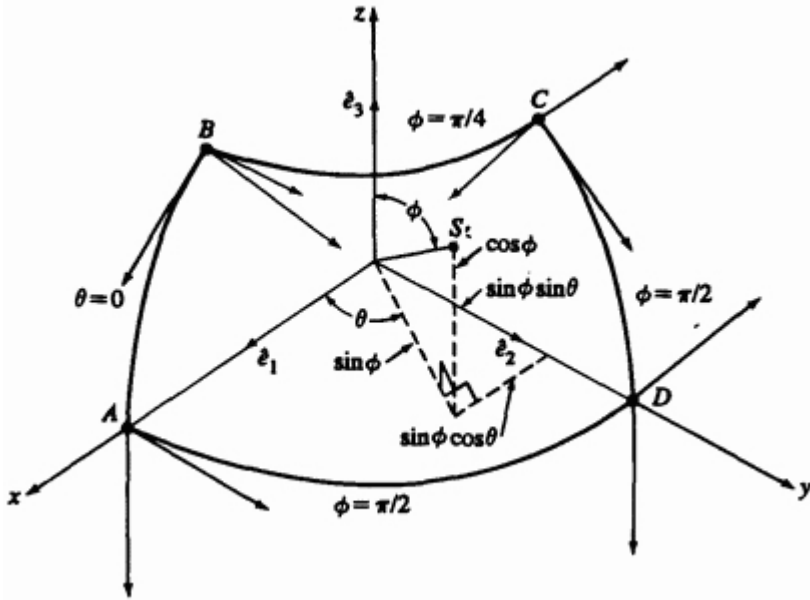


Рис. 21. Кусок сферической поверхности.

Векторное параметрическое уравнение для куска поверхности $Q(\theta, \phi)$

$$Q(\theta, \phi) = [\cos \theta \sin \phi \quad \sin \theta \sin \phi \quad \cos \phi], \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2. \quad (35)$$

Кусок поверхности - это все возможные положения точки в трехмерном пространстве, движущейся с двумя степенями свободы, управляемой двумя параметрическими переменными θ и ϕ , т.е. это бипараметрическая функция.

Параметрическое представление единичной сферической поверхности (см. уравнение (27) с $a = b = c = 1$) таково:

$$x = \cos \theta \sin \phi,$$

$$y = \sin \theta \sin \phi,$$

$$z = \cos \phi.$$

Показанный на рис. 21 кусок поверхности задан для диапазонов изменения параметров $0 \leq \theta \leq \pi/2$ и $\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$. Границы или ребра его задаются кривыми AB , BC , CD и DA . Для сферического куска на рис. 21 эти кривые являются дугами окружностей. Каждая кривая может быть задана двумя конечными точками и касательными векторами в концах. Следовательно, четыре граничных кривых куска задаются четырьмя координатными векторами в углах и восемью касательными векторами, по два в каждом углу. Для сферического куска на рис. 21 касательные вектора задаются параметрическими производными $Q(\theta, \phi)$, т.е.

$$Q_{\theta}(\theta, \phi) = \frac{\partial Q}{\partial \theta}(\theta, \phi) = [-\sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta \sin \phi \quad 0] \quad (36)$$

и

$$Q_{\phi}(\theta, \phi) = [\cos \theta \cos \phi \quad \sin \theta \cos \phi \quad -\sin \phi]. \quad (37)$$

Касательные векторы в каждом углу показаны на рис. 21.

Форма внутренней части поверхности около каждого угла управляется вектором кручения или смешанной производной в этом углу. Для куска сферической поверхности на рис. 21 смешанная производная или вектор кручения

$$Q_{\theta, \phi}(\theta, \phi) = \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta \partial \phi} = \frac{\partial^2 Q}{\partial \phi \partial \theta} = [-\sin \theta \cos \phi \quad \cos \theta \cos \phi \quad 0]. \quad (38)$$

Подстановка значений параметров в углах куска поверхности дает векторы кручения в них. Внутренняя форма куска задается уравнением (35). Это уравнение можно считать сферической смешивающей функцией. Следовательно, четырехугольный кусок поверхности может быть полностью описан 4 координатными векторами в углах, 8 касательными векторами (по два в каждом углу), 4 векторами кручения в углах и смешивающей функцией, заданной в уравнении (35).

Нормаль в любой точке куска поверхности определяется векторным произведением производных по параметрам. Например, для сферической поверхности

$$\begin{aligned} Q_\theta \times Q_\phi &= \begin{bmatrix} i & j & k \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin^2 \phi & \sin \theta \sin^2 \phi & -\sin \phi \cos \phi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (39)$$

На куске поверхности изопараметрические линии, т.е. линии с постоянным значением параметра, ортогональны. Следовательно, скалярное произведение производных по параметрам равно нулю. Например, для сферической поверхности

$$\begin{aligned} Q_\theta \cdot Q_\phi &= [-\sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta \sin \phi \quad 0] \cdot [\cos \theta \cos \phi \quad \sin \theta \cos \phi \quad -\sin \phi] = 0 \\ &= [-\sin \theta \sin \phi \quad \cos \theta \sin \phi \quad 0][\cos \theta \cos \phi \quad \sin \theta \cos \phi \quad -\sin \phi]^T = 0 \\ &= [-\cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \quad \cos \theta \sin \theta \cos \phi \sin \phi \quad 0] = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

6.6 ОТОБРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Методы параметрического описания поверхностей наиболее удобно представляются в терминах отображения двухпараметрической плоской

поверхности из параметрического пространства uv в трехмерное объектное пространство xyz . Ограничимся здесь обсуждением отображения прямоугольной плоской поверхности в параметрическом пространстве, показанной на рис. 22 и заданной уравнениями

$$u = C_1 \quad C_3 \leq v \leq C_4,$$

$$u = C_2 \quad C_3 \leq v \leq C_4,$$

$$v = C_3 \quad C_1 \leq u \leq C_2,$$

$$v = C_4 \quad C_1 \leq u \leq C_2.$$

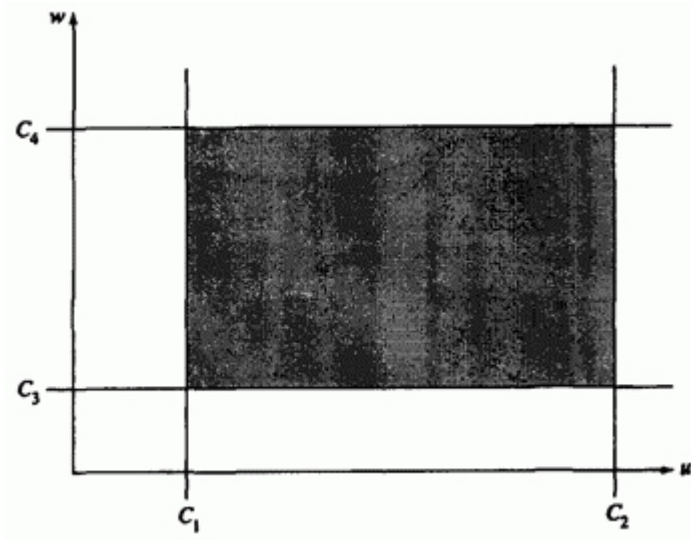


Рис. 22. Прямоугольная параметрическая плоская поверхность.

Поверхность в объектном пространстве представляется функциями, отображающими эту параметрическую поверхность в объектное пространство xyz , т. е.

$$x = x(u, \varphi),$$

$$y = y(u, \varphi),$$

$$z = z(u, \varphi).$$

Простой двумерный пример послужит в качестве иллюстрации этого метода.

Пример 7. Двумерное отображение поверхности

Отобразить поверхность, описываемую в параметрическом пространстве уравнениями

$$x = 3u + \varphi \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$y = 2u + 3\varphi + u\varphi \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$z = 0$$

в объектное пространство. Для начала заметим, что так как $z = \text{constant} = 0$, то поверхность в объектном пространстве также является двумерной и лежит на плоскости $z = 0$.

Границы поверхности в объектном пространстве определяются с помощью отображения в объектное пространство границ прямоугольника в параметрическом пространстве. Таким образом, для

$$u = 0, \quad x = \varphi, \quad y = 3\varphi \quad \text{и} \quad y = 3x,$$

$$u = 1, \quad x = \varphi + 3, \quad y = 2(2\varphi + 1) \quad \text{и} \quad y = 2(2x - 5),$$

$$\omega = 0; \quad x = 3u, \quad y = 2u \quad \text{и} \quad y = \left(\frac{2}{3}\right)x,$$

$$\omega = 1; \quad x = 3u + 1, \quad y = 3u + 3 \quad \text{и} \quad y = x + 2.$$

Во всех случаях для получения уравнения вида $y = y(x)$ из соответствующего выражения исключался параметр (u или ω). Результаты представлены на рис. 23.

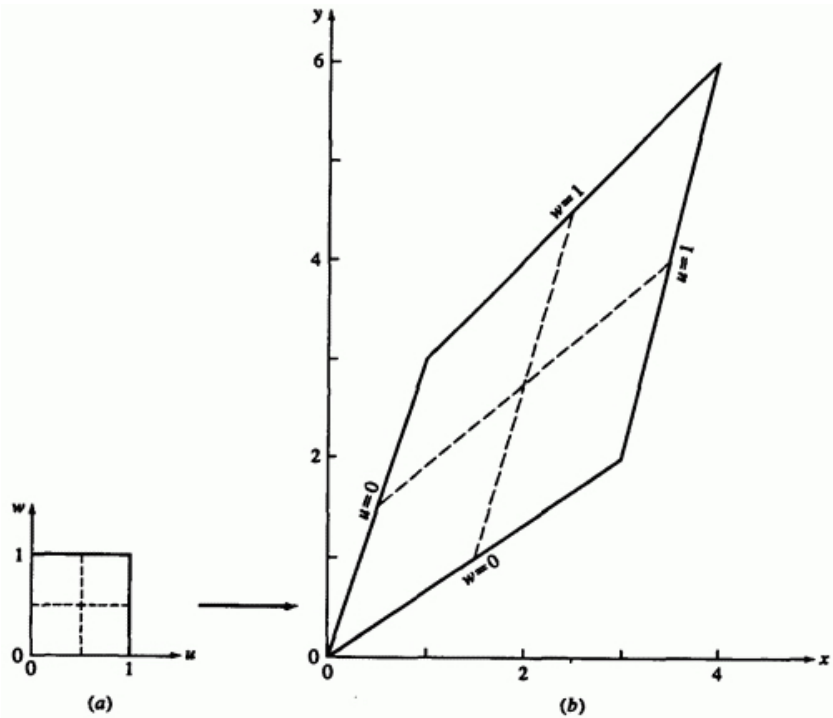


Рис. 23 Двумерное отображение поверхности. (а) Параметрическое пространство; (б) объектное пространство.

Как показано в примере, задание постоянного значения одному из параметров порождает кривую на поверхности в объектном пространстве. Такая кривая называется изопараметрической или параметрической линией. Если задать один из параметров как функцию другого в параметрическом пространстве, т. е. $u = u(\varphi)$, то в результате также получится кривая на поверхности в объектном пространстве.

Например, функции

$$u = \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 1,$$

$$u = 1 - \varphi,$$

представляют диагонали единичного квадрата в параметрическом пространстве.

Специфицирование значений обоих параметров задает точку на поверхности в объектном пространстве. Другим способом задания точки (или точек) может служить пересечение двух кривых в параметрическом пространстве, например, $f(u, \varphi) = 0$ и $g(u, \varphi) = 0$. Пересечение в параметрическом пространстве отображается или преобразуется в пересечение в объектном пространстве.

В более сложном трехмерном примере дополнительно иллюстрируется описываемая идея отображения.

Пример 8. Трехмерное отображение поверхности

Отобразить описанную в параметрическом пространстве поверхность

$$x(u, \varphi) = (u - \varphi)^2, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

$$y(u, \varpi) = u - \varpi^2, \quad 0 \leq \varpi \leq 1,$$

$$z(u, \varpi) = u\varpi$$

в объектное пространство. Вычислить координаты в объектном пространстве точки на поверхности с параметрами $u = \varpi = 0.5$.

Сначала найдем граничные кривые

$$u = 0; \quad x = \varpi^2, \quad y = -\varpi^2, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad x = -y, \quad z = 0,$$

$$u = 1; \quad x = (1 - \varpi)^2, \quad y = 1 - \varpi^2, \quad z = \varpi \quad \text{и} \quad x = (1 - z)^2, \quad y = 1 - z^2,$$

$$\varpi = 0; \quad x = u^2, \quad y = u, \quad z = 0 \quad \text{и} \quad x = y^2, \quad z = 0,$$

$$\varpi = 1; \quad x = (u - 1)^2, \quad y = u - 1, \quad z = u \quad \text{и} \quad x = y^2, \quad z = 1 + y.$$

Граничные кривые изображены на рис. 24d более толстыми линиями.

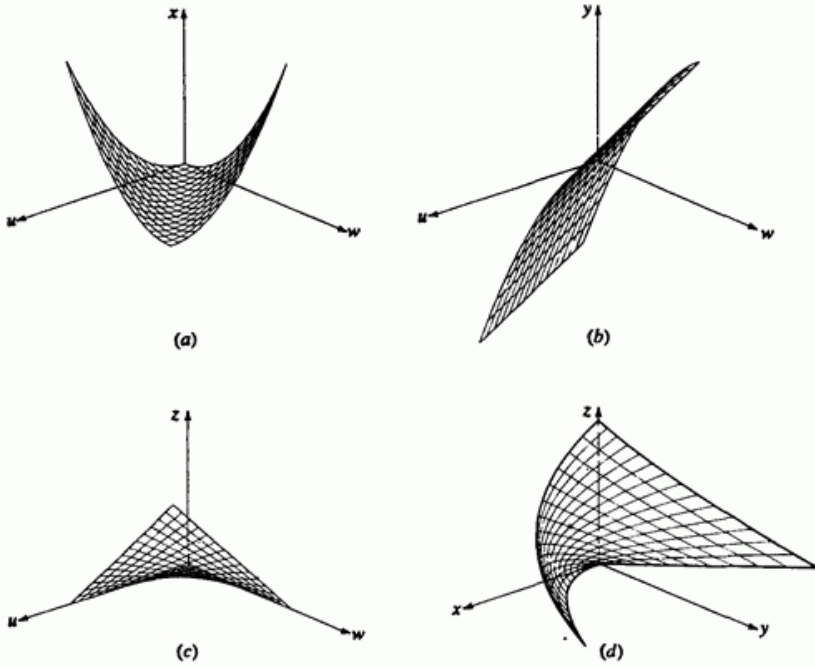


Рис. 24 Трехмерное отображение поверхности. (a) X компонента; (b) Y компонента; (c) Z компонента; (d) результат.

Записав параметрическую поверхность в виде векторной функции

$$Q(u, \varpi) = [x(u, \varpi) \quad y(u, \varpi) \quad z(u, \varpi)] = [(u - \varpi)^2 \quad u - \varpi^2 \quad u\varpi]$$

получим

$$Q(0.5, 0.5) = [0 \quad 0.25 \quad 0.25]$$

в качестве координат точки $u = \varpi = 0.5$, отмеченной на рис. 24d жирной точкой. Заметим, что каждая из компонент поверхности в объектном пространстве является также функцией параметров u, ϖ .

Каждая из этих отдельных компонент показана на рис. 24а, б, с. Поверхность, изображенная на рис. 24д, является композицией всех преобразованных компонент.

И наконец, представляют интерес отображения вырожденных кусков, соответствующих точке и прямой. Для точки отображение записывается

$$x = \text{constant}, y = \text{constant}, z = \text{constant}.$$

Для прямой отображение записывается в виде $x = u, y = \text{constant}, z = \text{constant}$.

6.7. БИЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Одной из самых простых является билинейная поверхность. Билинейная поверхность конструируется из четырех угловых точек единичного квадрата в параметрическом пространстве, т.е. из точек $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$ и $P(1,0)$. Любая точка на поверхности определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата, как это показано на рис. 25.

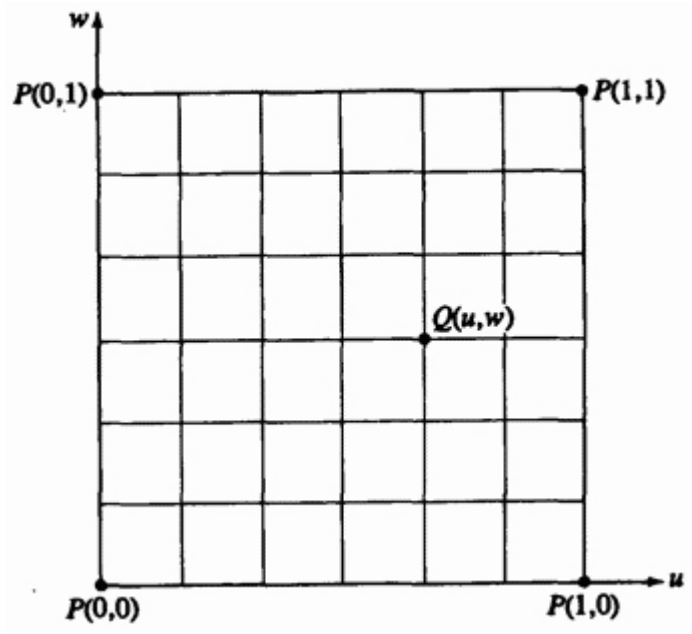


Рис. 25. Билинейная интерполяция в параметрическом пространстве.

Любая точка внутри параметрического квадрата задается уравнением

$$Q(u, \varpi) = P(0,0)(1-u)(1-\varpi) + P(0,1)(1-u)\varpi + P(1,0)u(1-\varpi) + P(1,1)u\varpi. \quad (41)$$

В матричном виде

$$Q(u, \varpi) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varpi \\ \varpi \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Необходимо, чтобы интерполируемая поверхность удовлетворяла исходным данным. В этом случае легко проверить, что угловые точки

принадлежат этой поверхности, т.е. $Q(0,0) = P(0,0)$ и т.д.

Уравнение (42) задано в обобщенном матричном представлении интерполированной поверхности, а именно - матрица функций смещения по одной из бипараметрических переменных, геометрическая матрица, представляющая исходные данные, и матрица функций смещения по другой параметрической переменной.

При изучении параметрических интерполированных поверхностей мы будем постоянно пользоваться этим представлением.

Если координатные векторы четырех точек, определяющих билинейную поверхность, заданы в трехмерном объектном пространстве, то будет трехмерна и билинейная поверхность, получаемая в результате отображения параметрического пространства в объектное. Если четыре определяющие точки не лежат в одной плоскости, то и билинейная поверхность также не лежит ни в какой плоскости. Действительно, в общем случае она сильно изогнута, пример этого показан на рис. 26.

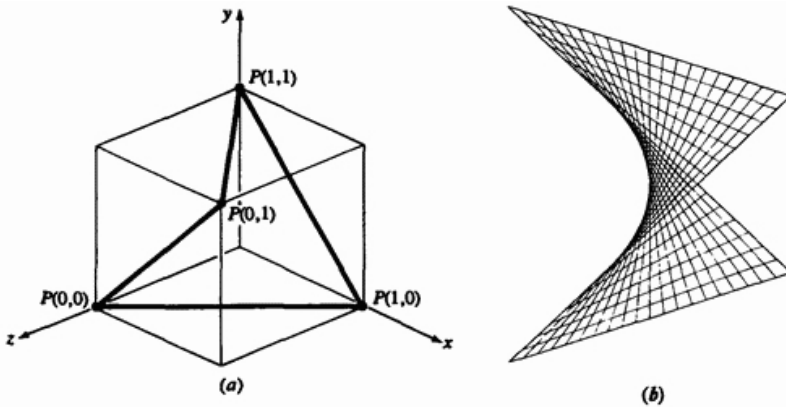


Рис. 26. Билинейная поверхность. (a) Определяющие угловые точки; (b) поверхность.

Определяющие точки являются концами противоположных диагоналей на противоположных гранях единичного куба. В результате получаем гиперболический параболоид. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 9. Билинейная поверхность

Найти точку на билинейной поверхности, заданной точками $P(0,0)=[0 \ 0 \ 1]$, $P(0,1)=[1 \ 1 \ 1]$, $P(1,0)=[1 \ 0 \ 0]$, $P(1,1)=[0 \ 1 \ 0]$, т.е. концами противоположных диагоналей, лежащих на противоположных гранях единичного куба в объектном пространстве. Искомая точка имеет координаты $u = \varpi = 0.5$ в параметрическом пространстве.

Напомним, что поверхность в объектном пространстве является векторной функцией:

$$Q(u, \varpi) = [x(u, \varpi) \ y(u, \varpi) \ z(u, \varpi)]$$

тогда из уравнения (41) имеем

$$\begin{aligned} Q(0.5, 0.5) &= [0 \ 0 \ 1](1-0.5)(1-0.5) + [1 \ 1 \ 1](1-0.5)(0.5) \\ &+ [1 \ 0 \ 0](0.5)(1-0.5) + [0 \ 1 \ 0](0.5)(0.5) = \\ &= 0.25[0 \ 0 \ 1] + 0.25[1 \ 1 \ 1] + \\ &+ 0.25[1 \ 0 \ 0] + 0.25[0 \ 1 \ 0] = \\ &= [0.5 \ 0.5 \ 0.5] \end{aligned}$$

Вся поверхность изображена на рис. 26б.

Заметим, что каждая изопараметрическая линия на билинейной поверхности является прямой линией. В самом деле, эта поверхность является двулинейчатой (см. разд. 6.8).

6.8. ЛИНЕЙЧАТЫЕ И РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ

Линейчатые поверхности часто используются в авиа- и кораблестроительной промышленности. Например, большинство авиационных крыльев являются цилиндрическими линейчатыми поверхностями. Линейчатая поверхность образуется при движении прямой линии вдоль направляющей с одной степенью свободы. Другой метод определения линейчатой поверхности состоит в следующем. Выберем произвольную точку на поверхности и будем вращать вокруг нормали плоскость, проходящую через нормаль к поверхности в этой точке (см. рис. 27).

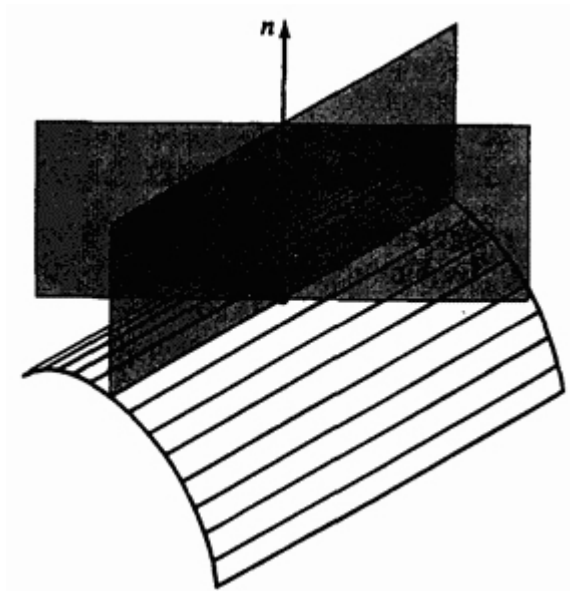


Рис. 27. Свойства линейчатой поверхности.

Если существует такая ориентация плоскости, при которой каждая точка на ребре плоскости контактирует с поверхностью, то поверхность линейчата в этом направлении. Если ребро вращающейся плоскости полностью соприкасается с поверхностью при более чем одной ориентации, то поверхность в этой точке многолинейчата.

Самой простой линейчатой поверхностью является плоскость. Для квадратичных поверхностей однолинейчатые конусы и цилиндры; однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид двулинейчатые.

В терминах отображения параметрического пространства u, ϖ в объектное пространство линейчатая поверхность получается с помощью линейного интерполирования между двумя известными граничными кривыми, ассоциированными с противоположными сторонами единичного квадрата в параметрическом пространстве, скажем, между кривыми $P(u, 0)$ и $P(u, 1)$. Поверхность задается уравнениями:

$$Q(u, \varpi) = P(u, 0)(1 - \varpi) + P(u, 1)\varpi \quad (43)$$

или

$$[Q] = [x(u, \varpi) \quad y(u, \varpi) \quad z(u, \varpi)] = [1 \quad -\varpi \quad \varpi] \begin{bmatrix} P(u, 0) \\ P(u, 1) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что снова $Q(0, 0) = P(0, 0)$ и т.д., то есть концы специфированных кривых и углы поверхности совпадают. Кроме того, два края интерполированной поверхности совпадают с заданными кривыми, т.е. $Q(u, 0) = P(u, 0)$ и $Q(u, 1) = P(u, 1)$.

Теперь предположим, что известны кривые, соответствующие $Q(0, \varpi)$ и $P(1, \varpi)$. Тогда линейчатая поверхность задается следующим образом:

$$Q(u, \varpi) = P(0, \varpi)(1 - u) + P(1, \varpi)u \quad (44)$$

или

$$[Q] = [x(x, \omega) \quad y(u, \omega) \quad z(u, \omega)] = [1 \quad -u \quad u] \begin{bmatrix} P(0, \omega) \\ P(1, \omega) \end{bmatrix}.$$

В этом случае опять углы поверхности совпадают с концами заданных кривых, а соответствующие края интерполированной поверхности совпадают с заданными граничными кривыми. На рис. 28 приводится пример линейчатой поверхности.

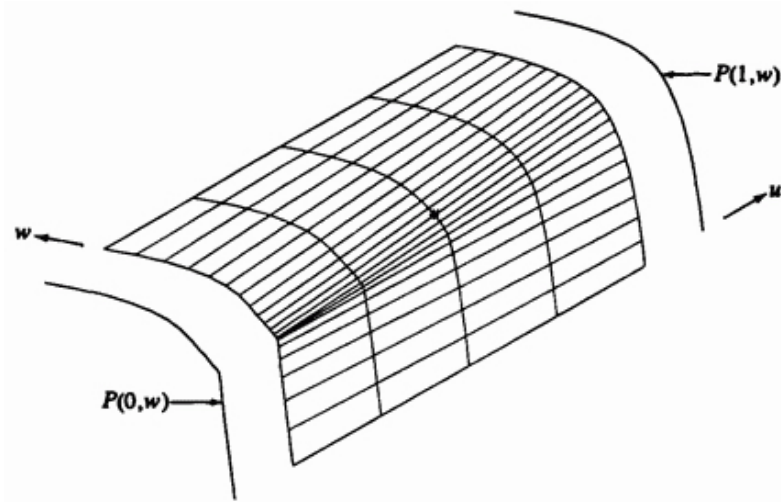


Рис. 28. Пример линейчатой поверхности.

Изображенные на этом рисунке отстоящими на некотором расстоянии от поверхности граничные кривые являются В-сплайнами третьего порядка. Описанная методика иллюстрируется на примере.

Пример 10. Линейчатая поверхность

Рассмотрим линейчатую поверхность, сформированную линейным

интерполированием кривых $P(0, \varpi)$ и $P(1, \varpi)$. Найдем координаты точки $Q(u, \varpi)$ на поверхности с параметрами $u = \varpi = 0.5$.

$P(0, \varpi)$ является незамкнутым В-сплайном третьего порядка ($k=3$) с определяющими вершинами ломаной, заданными точками $B_1[0 \ 0 \ 0]$, $B_2[1 \ 1 \ 0]$, $B_3[1 \ 1 \ 0]$, $B_4[2 \ 1 \ 0]$ и $B_5[3 \ 0 \ 0]$. Отметим, что вершины $B_2 = B_3$ совпадают, в результате чего на кривой получается излом. $P(1, \varpi)$ также является незамкнутым В-сплайном третьей степени. Его вершины определяющей ломаной равны $\bar{B}_1[0 \ 0 \ 6]$, $\bar{B}_2[1 \ 1 \ 6]$, $\bar{B}_3[2 \ 1 \ 6]$, $\bar{B}_4[3 \ 0 \ 6]$.

Вспоминая обсуждение В-сплайнов, получим незамкнутые однородные узловые векторы для $P(0, \varpi)$ и $P(1, \varpi)$, соответственно,

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3],$$

$$[Y] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Заметим, что ненормализованные диапазоны изменения параметров для этих двух кривых различны, $0 \leq t \leq 3$ для $P(0, \varpi)$ и $0 \leq s \leq 2$ для $P(1, \varpi)$. «Нормализованное» значение параметра линейчатой поверхности Q в точке $\varpi = 0.5$ соответствует $t = 1.5$ для $P(0, \varpi)$ и $s = 1.0$ для $P(1, \varpi)$.

Используя уравнения (83) и (84) п.4, получим

$$\begin{aligned} P(0, \varpi) &= P(t) \\ &= B_1 N_{1,3}(t) + B_2 N_{2,3}(t) + B_3 N_{3,3}(t) + B_4 N_{4,3}(t) + B_5 N_{5,3}(t). \end{aligned}$$

В точке $\varpi = 0.5$ или $t = 1.5$

$$\begin{aligned} P(0, 0.5) &= P(1.5) = (0) B_1 + 0.125 B_2 + 0.75 B_3 + 0.125 B_4 + (0) B_5 \\ &= 0.125 [1 \ 1 \ 0] + 0.75 [1 \ 1 \ 0] + 0.125 [2 \ 1 \ 0] = \\ &= [1.125 \ 1 \ 0]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned} P(1, \varpi) &= P(s) \\ &= \bar{B}_1 \bar{N}_{1,3}(s) + \bar{B}_2 \bar{N}_{2,3}(s) + \bar{B}_3 \bar{N}_{3,3}(s) + \bar{B}_4 \bar{N}_{4,3}(s). \end{aligned}$$

В точке $\varpi = 0.5$ или $s = 1.0$

$$\begin{aligned} P(1, 0.5) &= P(1.0) = (0) \bar{B}_1 + 0.5 \bar{B}_2 + 0.5 \bar{B}_3 + (0) \bar{B}_4 = \\ &= 0.5 [1 \ 1 \ 6] + 0.5 [2 \ 1 \ 6] = \\ &= [1.5 \ 1 \ 6]. \end{aligned}$$

Использование уравнения (44) для получения точки на линейчатой

поверхности даст

$$Q(u, \omega) = P(0, \omega)(1-u) + P(1, \omega)u$$

и

$$\begin{aligned} Q(0.5, 0.5) &= P(0, 0.5)(1-0.5) + P(1, 0.5)(0.5) = \\ &= 0.5[1.25 \ 1 \ 0] + 0.5[1.5 \ 1 \ 6] = \\ &= [1.3125 \ 1 \ 3]. \end{aligned}$$

Результаты показаны на рис. 28.

Жирной точкой отмечена точка поверхности, соответствующая $Q(0.5, 0.5)$. Обратите внимание на то, что кривая $P(0, \omega)$, содержащая излом, плавно переходит в гладкую кривую $P(1, \omega)$.

Особый практический интерес представляет вопрос, является ли линейчатая поверхность развертывающейся? Не все линейчатые поверхности развертывающиеся, однако, все развертывающиеся поверхности являются линейчатыми.

Если поверхность развертывающаяся, то с помощью последовательности небольших поворотов вокруг образующей линии она может быть без растяжений и разрывов развернута или раскрыта в плоскость. Развертывающиеся поверхности особенно важны для листопрокатной промышленности и, в меньшей степени, для текстильной промышленности.

Ясно, что среди линейчатых квадратичных поверхностей развертывающимися являются конусы и цилиндры. Однако после небольшого размышления становится ясно, что ни однополостный гиперboloид (см. рис. 18d), ни гиперболический параболоид (см. рис.

26) не являются развертывающимися поверхностями, хотя они линейчатые.

Чтобы определить, будет ли развертывающейся поверхность или ее часть, необходимо рассмотреть кривизну параметрической поверхности. В произвольной точке P на поверхности кривая пересечения поверхности и плоскости, содержащей нормаль к поверхности в точке P , имеет кривизну κ (см. рис. 29).

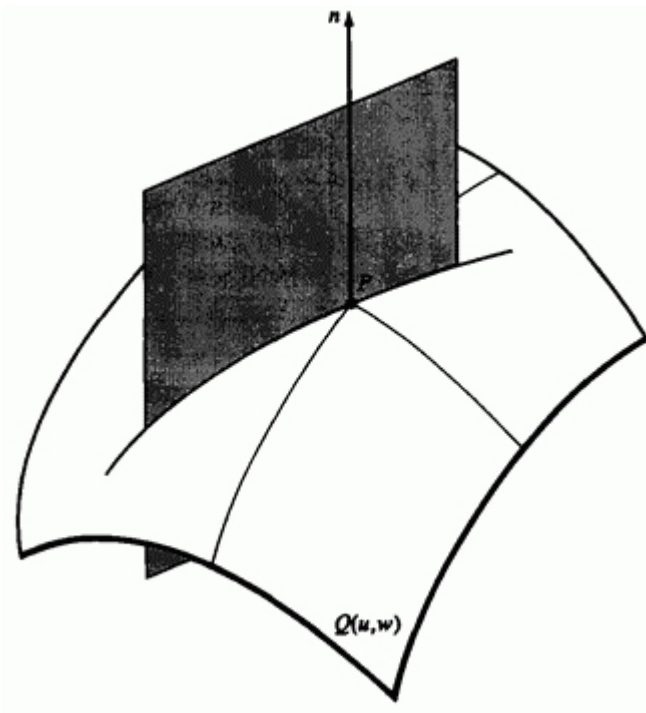


Рис. 29. Кривизна бипараметрической поверхности.

При вращении этой плоскости вокруг нормали кривизна меняется. Великий швейцарский математик Эйлер показал, что существуют только два направления, для которых кривизна принимает минимальное и максимальное значения. Кривизны в этих направлениях называются главными кривизнами, κ_{\min} и κ_{\max} .

Кроме того, направления главных кривизн ортогональны. Два сочетания главных кривизн представляют особый интерес - средняя и гауссова кривизны:

$$H = \frac{\kappa_{\min} + \kappa_{\max}}{2}, \quad (45)$$

$$K = \kappa_{\min} \kappa_{\max}. \quad (46)$$

Для развертывающейся поверхности гауссова кривизна K в любой точке равна нулю, т. е. $K = 0$. Дил показал, что для бипараметрических поверхностей средняя и гауссова кривизны задаются выражением

$$H = \frac{A|Q_w|^2 - 2BQ_u \cdot Q_w + C|Q_u|^2}{2|Q_u \times Q_w|^3}, \quad (47)$$

$$K = \frac{AC - B^2}{|Q_u \times Q_w|^4}, \quad (48)$$

где

$$(ABC) = [Q_u \times Q_w] \cdot [Q_{uu} \quad Q_{uw} \quad Q_{ww}].$$

Как показано в табл. 2, знак гауссовой кривизны характеризует локальную форму поверхности: эллиптическую, гиперболическую, цилиндрическую или коническую.

Таблица 2. Типы поверхностей

$\kappa_{\min}, \kappa_{\max}$	\mathcal{K}	Форма
Одинаковые знаки	<0	Эллиптическая (выпуклость или впадина)
Противоположные знаки	>0	Гиперболическая (седловая точка)
Одна или обе кривизны равны нулю	0	Цилиндрическая / коническая (гребень, впадина, плоскость)

Так как гауссова кривизна развертываемой поверхности должна быть нулевой, то поверхность должна быть скомпонована из цилиндрических, конических или плоских кусков. Приведенный ниже пример поможет проиллюстрировать эти рассуждения

Пример 11. Развертываемая поверхность

Показать, что эллиптический конус является развертываемой поверхностью.

Перепишем уравнение (32) для параметрического эллиптического конуса в терминах u и φ :

$$Q(u, \varphi) = [au \cos \varphi \quad bu \sin \varphi \quad cu]$$

Частные производные будут

$$Q_u = [a \cos \varphi \quad b \sin \varphi \quad c],$$

$$Q_{\omega} = [-au \sin \varpi \quad bu \cos \varpi \quad 0],$$

$$Q_{u\omega} = [-a \sin \varpi \quad b \cos \varpi \quad 0],$$

$$Q_{uu} = [0 \quad 0 \quad 0],$$

$$Q_{\omega\omega} = [-au \cos \varpi \quad -bu \sin \varpi \quad 0],$$

$$Q_u \times Q_{\omega} = [-bcu \cos \varpi \quad -acu \sin \varpi \quad abu],$$

$$|Q_u \times Q_{\omega}|^2 = (abu)^2 \left\{ \left(\frac{c}{a} \cos \varpi \right)^2 + \left(\frac{c}{b} \sin \varpi \right)^2 + 1 \right\} \neq 0 \quad u > 0$$

и

$$A = [-bcu \cos \varpi \quad -acu \sin \varpi \quad abu] \cdot [0 \quad 0 \quad 0] = 0,$$

$$\begin{aligned} B &= [-bcu \cos \varpi \quad -acu \sin \varpi \quad abu] \cdot [-a \sin \varpi \quad b \cos \varpi \quad 0] = \\ &= abc u \sin \varpi \cos \varpi - abc u \sin \varpi \cos \varpi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= [-bcu \cos \varpi \quad -acu \sin \varpi \quad abu] \cdot [-au \cos \varpi \quad -bu \sin \varpi \quad 0] \\ &= abc u^2 \cos^2 \varpi + abc u^2 \sin^2 \varpi = abc u^2. \end{aligned}$$

Таким образом, используя уравнение (48), получим, что в любой точке поверхности

$$K = \frac{AC - B_2}{|\mathcal{Q}_u \times \mathcal{Q}_\omega|^4} = \frac{(0)(abcu^2) - (0)}{|\mathcal{Q}_u \times \mathcal{Q}_\omega|^4} = 0$$

и, следовательно, поверхность является развевывающей. Заметим, что хотя $|\mathcal{Q}_u \times \mathcal{Q}_\omega|^2 = 0$ для $u = 0$, из правила Лопитала получаем, что $K = 0/0 = 0$ в $u = 0$.

6.9. ЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА

Если известны четыре граничные кривые $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, \omega)$ и $P(1, \omega)$ и для внутренней части куска поверхности используется билинейная смешивающая функция, то в результате получаем линейную поверхность Кунса. На первый взгляд можно предположить, что желаемый результат дает простая сумма отдельных линейчатых поверхностей (уравнения (43) и (44)) в двух направлениях u, ω :

$$\mathcal{Q}(u, \omega) = P(u, 0)(1 - \omega) + P(u, 1)\omega + P(0, \omega)(1 - u) + P(1, \omega)u$$

Однако, проверив этот результат в угловых точках куска поверхности, например

$$\mathcal{Q}(0, 0) = P(0, 0) + P(0, 0) = 2P(0, 0)$$

и на границах, например

$$\mathcal{Q}(0, \omega) = P(0, 0)(1 - \omega) + P(0, 1)\omega + P(0, \omega)$$

получим, что ни одно из этих значений не соответствует исходным данным. Это происходит из-за того, что угловые точки учитываются

дважды, так как $P(0,0)$ содержится в обеих граничных кривых $P(u,0)$ и $P(0,\omega)$.

Правильный результат можно получить с помощью вычитания дополнительных членов, возникающих из-за удвоения угловых точек:

$$\begin{aligned}
 Q(u, \omega) = & P(u,0)(1-\omega) + P(u,1)\omega + P(0,\omega)(1-u) + P(1,\omega)u - \\
 & - P(0,0)(1-u)(1-\omega) - P(0,1)(1-u)\omega - \\
 & - P(1,0)u(1-\omega) - P(1,1)u\omega.
 \end{aligned} \tag{49}$$

Теперь в угловых точках

$$Q(0,0) = P(0,0) \text{ и т.д.}$$

и вдоль границ

$$Q(0,\omega) = P(0,\omega),$$

$$Q(u,1) = P(u,1) \text{ и т.д.}$$

В матричной форме уравнение (49) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Q(u, \omega) = & [1-u \quad \omega] \begin{bmatrix} P(0,\omega) \\ P(1,\omega) \end{bmatrix} + [P(u,0) \quad P(u,1)] \begin{bmatrix} 1-\omega \\ \omega \end{bmatrix} - \\
 & - [1-u \quad \omega] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega \\ \omega \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

или более компактно

$$Q(u, \omega) = \begin{bmatrix} 1-u & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -P(0,0) & -P(0,1) & P(0,\omega) \\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,\omega) \\ P(u,0) & P(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega \\ \omega \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Функции $(1-u)$, u , $(1-\omega)$ и ω называются функциями смешения потому, что они смешивают граничные кривые для получения внутренней формы поверхности. Линейная поверхность показана на рис. 30.

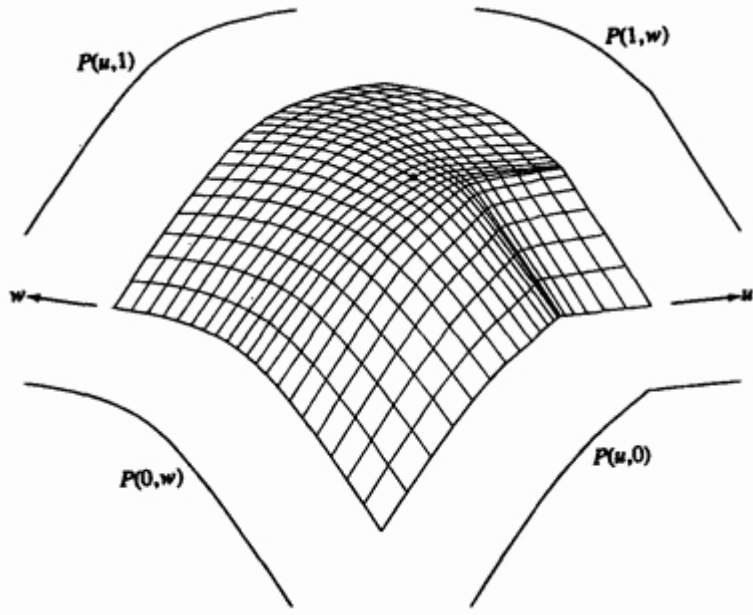


Рис. 30. Линейная поверхность Кунса.

Линейная поверхность Кунса является самой простой из поверхностей Кунса. В разд. 6.10 обсуждается более общая поверхность Кунса. Следующий пример иллюстрирует использованный выше метод.

Пример 12. Линейная поверхность Кунса

Найти точку с координатами $u = \varpi = 0.5$, расположенную на линейной поверхности Кунса, если четыре граничные кривые $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, \varpi)$, $P(1, \varpi)$ задаются незамкнутыми В-сплайнами третьего порядка ($k = 3$)

$$P(u, 0) : B_1[0 \ 0 \ 0], B_2[1 \ 1 \ 0], B_3[2 \ 1 \ 0], B_4[3 \ 0 \ 0], B_5[3 \ 0 \ 3]$$

$$P(u, 1) : \bar{B}_1[0 \ 0 \ 3], \bar{B}_2[1 \ 1 \ 3], \bar{B}_3[2 \ 1 \ 3], \bar{B}_4[2 \ 1 \ 3]$$

$$P(0, \varpi) : \bar{C}_1[0 \ 0 \ 3], \bar{C}_2[0 \ 1 \ 2], \bar{C}_3[0 \ 1 \ 1], \bar{C}_4[0 \ 0 \ 0]$$

$$P(1, \varpi) : C_1[3 \ 0 \ 3], C_2[3 \ 1 \ 2], C_3[3 \ 1 \ 2], C_4[3 \ 1 \ 1], C_5[3 \ 0 \ 0].$$

Вспоминая предыдущее обсуждение В-сплайнов,

получим узловой вектор для $P(u, 0)$ и $P(1, \varpi)$

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3].$$

Таким образом, ненормализованный диапазон параметра

есть $0 \leq t \leq 3$. Для $P(u, 1)$ и $P(0, \omega)$ узловой вектор

с ненормализованным диапазоном параметра $0 \leq s \leq 2$ имеет вид

$$[Y] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2].$$

Соответствующими значениями для параметров в нормализованном

диапазоне $0 \leq u, \omega \leq 1$ являются $t = 1.5$ и $s = 1.0$.

Воспользовавшись уравнениями (5-83) и (5-84), получим

$$P(u, 0) = P(t) = B_1 N_{1,3}(t) + B_2 N_{2,3}(t) + B_3 N_{3,3}(t) + B_4 N_{4,3}(t) + B_5 N_{5,3}(t)$$

$$P(0.5, 0) = P(1.5) = (0) B_1 + 0.125 B_2 + 0.75 B_3 + 0.125 B_4 + (0) B_5 =$$

$$= 0.125 [1 \ 1 \ 3] + 0.75 [2 \ 1 \ 3] + 0.125 [2 \ 1 \ 3] =$$

$$= [1.875 \ 1 \ 3].$$

$$P(u, 1) = P(s) = \bar{B}_1 \bar{N}_{1,3}(s) + \bar{B}_2 \bar{N}_{2,3}(s) + \bar{B}_3 \bar{N}_{3,3}(s) + \bar{B}_4 \bar{N}_{4,3}(s)$$

$$P(0.5, 1) = P(1.0) = (0) \bar{B}_1 + 0.5 \bar{B}_2 + 0.5 \bar{B}_3 + (0) \bar{B}_4 =$$

$$= 0.5 [1 \ 1 \ 0] + 0.5 [2 \ 1 \ 0] =$$

$$= [1.5 \ 1 \ 0]$$

$$P(0, \omega) = P(s) = \bar{C}_1 \bar{M}_{1,3}(s) + \bar{C}_2 \bar{N}_{2,3}(s) + \bar{C}_3 \bar{N}_{3,3}(s) + \bar{C}_4 \bar{N}_{4,3}(s)$$

$$P(0, 0.5) = P(1.0) = (0) \bar{C}_1 + 0.5 \bar{C}_2 + 0.5 \bar{C}_3 + (0) \bar{C}_4 =$$

$$= 0.5[0 \ 1 \ 2] + 0.5[0 \ 1 \ 1] =$$

$$= [0 \ 1 \ 1.5]$$

$$P(1, \omega) = P(t) = C_1 M_{1,3}(t) + C_2 N_{2,3}(t) + C_3 N_{3,3}(t) + C_4 N_{4,3}(t) + C_5 N_{5,3}(t)$$

$$P(1, 0.5) = P(1.5) = (0) C_1 + 0.125 C_2 + 0.75 C_3 + 0.125 C_4 + (0) C_5 =$$

$$= 0.125[3 \ 1 \ 2] + 0.75[3 \ 1 \ 2] + 0.125[3 \ 1 \ 1] =$$

$$= [3 \ 1 \ 1.875]$$

Теперь, используя уравнение (50), имеем

$$Q(u, \omega) = [1-u \ u \ 1] \begin{bmatrix} -P(0,0) & -P(0,1) & P(0,\omega) \\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,\omega) \\ P(u,0) & P(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega \\ \omega \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -[0 \ 0 \ 3] & -[0 \ 0 \ 0] & [0 \ 1 \ 1.5] \\ -[3 \ 0 \ 3] & -[3 \ 0 \ 0] & [3 \ 1 \ 1.875] \\ [1.875 \ 1 \ 3] & [1.5 \ 1 \ 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1.6375 \ 2.25 \ 1.6375]$$

Полученные результаты изображены на рис. 30. Отметим наличие плоского участка на поверхности, гауссова кривизна в этой области равна нулю. Следовательно, эта часть поверхности развертывающаяся. В остальной области гауссова кривизна положительна и поверхность не является развертывающейся.

Если известны четыре граничные кривые $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, \omega)$ и $P(1, \omega)$ и для внутренней части куска поверхности используется билинейная смешивающая функция, то в результате получаем линейную поверхность Кунса. На первый взгляд можно предположить, что желаемый результат дает простая сумма отдельных линейчатых поверхностей (уравнения (43) и (44)) в двух направлениях u, ω :

$$Q(u, \omega) = P(u, 0)(1 - \omega) + P(u, 1)\omega + P(0, \omega)(1 - u) + P(1, \omega)u$$

Однако, проверив этот результат в угловых точках куска поверхности, например

$$Q(0, 0) = P(0, 0) + P(0, 0) = 2P(0, 0)$$

и на границах, например

$$Q(0, \omega) = P(0, 0)(1 - \omega) + P(0, 1)\omega + P(0, \omega)$$

получим, что ни одно из этих значений не соответствует исходным данным. Это происходит из-за того, что угловые точки учитываются дважды, так как $P(0, 0)$ содержится в обеих граничных кривых $P(u, 0)$ и $P(0, \omega)$.

Правильный результат можно получить с помощью вычитания дополнительных членов, возникающих из-за удвоения угловых точек:

$$\begin{aligned}
 Q(u, \varpi) = & P(u, 0)(1 - \varpi) + P(u, 1)\varpi + P(0, \varpi)(1 - u) + P(1, \varpi)u - \\
 & - P(0, 0)(1 - u)(1 - \varpi) - P(0, 1)(1 - u)\varpi - \\
 & - P(1, 0)u(1 - \varpi) - P(1, 1)u\varpi
 \end{aligned} \tag{49}$$

Теперь в угловых точках

$$Q(0, 0) = P(0, 0) \text{ и т.д.}$$

и вдоль границ

$$Q(0, \varpi) = P(0, \varpi),$$

$$Q(u, 1) = P(u, 1)$$

и т.д.

В матричной форме уравнение (49) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 Q(u, \varpi) = & [1 - u \quad \varpi] \begin{bmatrix} P(0, \varpi) \\ P(1, \varpi) \end{bmatrix} + [P(u, 0) \quad P(u, 1)] \begin{bmatrix} 1 - \varpi \\ \varpi \end{bmatrix} - \\
 & - [1 - u \quad \varpi] \begin{bmatrix} P(0, 0) & P(0, 1) \\ P(1, 0) & P(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \varpi \\ \varpi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

или более компактно

$$Q(u, \varpi) = [1-u \quad u \quad 1] \begin{bmatrix} -P(0,0) & -P(0,1) & P(0,\varpi) \\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,\varpi) \\ P(u,0) & P(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\varpi \\ \varpi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6-50)$$

Функции $(1-u)$, u , $(1-\varpi)$ и ϖ называются функциями смешения потому, что они смешивают граничные кривые для получения внутренней формы поверхности. Линейная поверхность показана на рис. 30.

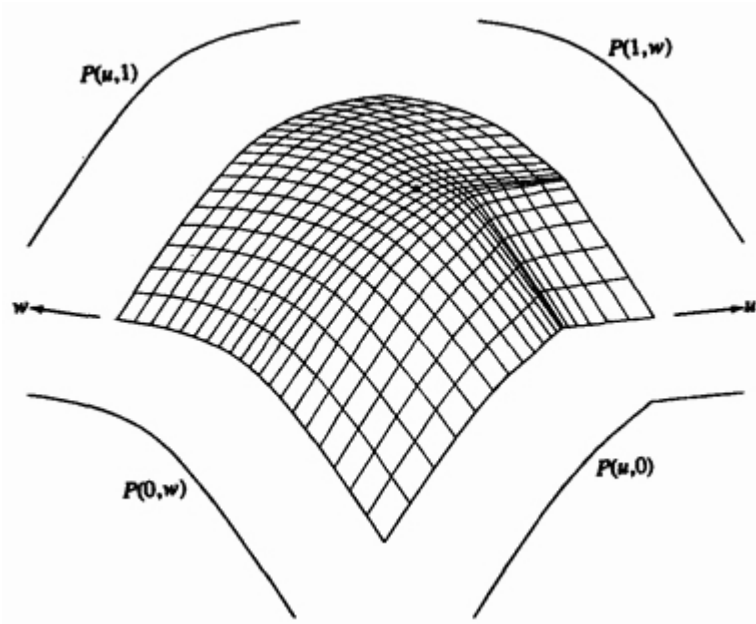


Рис. 30. Линейная поверхность Кунса.

Линейная поверхность Кунса является самой простой из поверхностей Кунса. В разд. 10 обсуждается более общая поверхность Кунса. Следующий пример иллюстрирует использованный выше метод.

Пример 12. Линейная поверхность Кунса

Найти точку с координатами $u = \varpi = 0.5$, расположенную на линейной поверхности Кунса, если четыре граничные кривые $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, \varpi)$, $P(1, \varpi)$ задаются незамкнутыми В-сплайнами третьего порядка ($k = 3$)

$$P(u, 0) : \quad B_1[0 \ 0 \ 0], \quad B_2[1 \ 1 \ 0], \quad B_3[2 \ 1 \ 0], \\ B_4[3 \ 0 \ 0], \quad B_5[3 \ 0 \ 3]$$

$$P(u, 1) : \quad \bar{B}_1[0 \ 0 \ 3], \quad \bar{B}_2[1 \ 1 \ 3], \quad \bar{B}_3[2 \ 1 \ 3], \\ \bar{B}_4[2 \ 1 \ 3]$$

$$P(0, \varpi) : \quad \bar{C}_1[0 \ 0 \ 3], \quad \bar{C}_2[0 \ 1 \ 2], \quad \bar{C}_3[0 \ 1 \ 1], \\ \bar{C}_4[0 \ 0 \ 0]$$

$$P(1, \varpi) : \quad C_1[3 \ 0 \ 3], \quad C_2[3 \ 1 \ 2], \quad C_3[3 \ 1 \ 2], \\ C_4[3 \ 1 \ 1], \quad C_5[3 \ 0 \ 0].$$

Вспоминая предыдущее обсуждение В-сплайнов, получим узловой вектор для $P(u, 0)$ и $P(1, \varpi)$

$$[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3]$$

Таким образом, ненормализованный диапазон параметра есть $0 \leq t \leq 3$. Для $P(u, 1)$ и $P(0, \varpi)$ узловой вектор с

ненормализованным диапазоном параметра $0 \leq s \leq 2$ имеет вид

$$[Y] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$$

Соответствующими значениями для параметров в нормализованном диапазоне $0 \leq u, \varpi \leq 1$ являются $t = 1.5$ и $s = 1.0$.

Воспользовавшись уравнениями (83) и (84) п.4, получим

$$P(u, 0) = P(t) = B_1 N_{1,3}(t) + B_2 N_{2,3}(t) + B_3 N_{3,3}(t) + B_4 N_{4,3}(t)$$

$$P(0.5, 0) = P(1.5) = (0) B_1 + 0.125 B_2 + 0.75 B_3 + 0.125 B_4 + (0) E$$

$$= 0.125[1 \quad 1 \quad 3] + 0.75[2 \quad 1 \quad 3] + 0.125[2 \quad 1 \quad 3] =$$

$$= [1.875 \quad 1 \quad 3]$$

$$P(u, 1) = P(s) = \bar{B}_1 \bar{N}_{1,3}(s) + \bar{B}_2 \bar{N}_{2,3}(s) + \bar{B}_3 \bar{N}_{3,3}(s) + \bar{B}_4 \bar{N}_{4,3}$$

$$P(0.5, 1) = P(1.0) = (0) \bar{B}_1 + 0.5 \bar{B}_2 + 0.5 \bar{B}_3 + (0) \bar{B}_4 =$$

$$= 0.5[1 \quad 1 \quad 0] + 0.5[2 \quad 1 \quad 0] =$$

$$= [1.5 \quad 1 \quad 0]$$

$$P(0, \varpi) = P(s) = \bar{C}_1 \bar{N}_{1,3}(s) + \bar{C}_2 \bar{N}_{2,3}(s) + \bar{C}_3 \bar{N}_{3,3}(s) + \bar{C}_4 \bar{N}_4,$$

$$P(0, 0.5) = P(1.0) = (0) \bar{C}_1 + 0.5 \bar{C}_2 + 0.5 \bar{C}_3 + (0) \bar{C}_4 =$$

$$= 0.5[0 \ 1 \ 2] + 0.5[0 \ 1 \ 1] =$$

$$= [0 \ 1 \ 1.5]$$

$$P(1, \omega) = P(t) = C_1 N_{1,3}(t) + C_2 N_{2,3}(t) + C_3 N_{3,3}(t) + C_4 N_{4,3}(t)$$

$$P(1, 0.5) = P(1.5) = (0) C_1 + 0.125 C_2 + 0.75 C_3 + 0.125 C_4 + (0) C$$

$$= 0.125[3 \ 1 \ 2] + 0.75[3 \ 1 \ 2] + 0.125[3 \ 1 \ 1] =$$

$$= [3 \ 1 \ 1.875]$$

Теперь, используя уравнение (50), имеем

$$Q(u, \omega) = [1-u \ u \ 1] \begin{bmatrix} -P(0,0) & -P(0,1) & P(0,\omega) \\ -P(1,0) & -P(1,1) & P(1,\omega) \\ P(u,0) & P(u,1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\omega \\ \omega \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$Q(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 1] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -[0 \ 0 \ 3] & -[0 \ 0 \ 0] & [0 \ 1 \ 1.5] \\ -[3 \ 0 \ 3] & -[3 \ 0 \ 0] & [3 \ 1 \ 1.875] \\ [1.875 \ 1 \ 3] & [1.5 \ 1 \ 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [1.6375 \ 2.25 \ 1.6375]$$

Полученные результаты изображены на рис. 30. Отметим наличие плоского участка на поверхности, гауссова кривизна в этой области равна нулю. Следовательно, эта часть поверхности развертывающаяся.

В остальной области гауссова кривизна положительна и поверхность не является развертываемой.

6.10. БИКУБИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА

Хотя аналитические поверхности, например квадратичные, линейчатые и простые куски линейно интерполированных поверхностей, обсуждавшиеся в предыдущих разделах, и важны для конструирования и производства, но для многих приложений они не обладают достаточной гибкостью. Описание поверхностей, обсуждаемое в этом и дальнейших разделах главы, предоставляют необходимую гибкость с помощью использования полиномов более высоких степеней как для граничных кривых куска поверхности, так и для внутренних смешивающих функций. Поверхности, сгенерированные с помощью объединения таких кусков, называются скульптурными поверхностями. Для описания скульптурных поверхностей фундаментальное значение имеет кусок бикубической поверхности Кунса.

Для всех четырех граничных кривых куска бикубической поверхности Кунса используются нормализованные кубические сплайны. Для задания внутренней части куска используются кубические смешивающие функции. Таким образом, каждую граничную кривую можно представить в общем виде

$$P(t) = B_1 + B_2t + B_3t^2 + B_4t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Для одного сегмента нормализованного кубического сплайна с известными касательными и координатными векторами на концах, каждая из четырех граничных кривых, $P(u, 0)$, $P(u, 1)$, $P(0, \varphi)$ и $P(1, \varphi)$ задается следующим образом:

$$P(t) = [T][N][G] =$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P'_1 \\ P'_2 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где t становится соответственно u или w , а P_1, P_2, P'_1, P'_2 - координатные и касательные векторы на концах соответствующей граничной кривой (см. рис. 31).

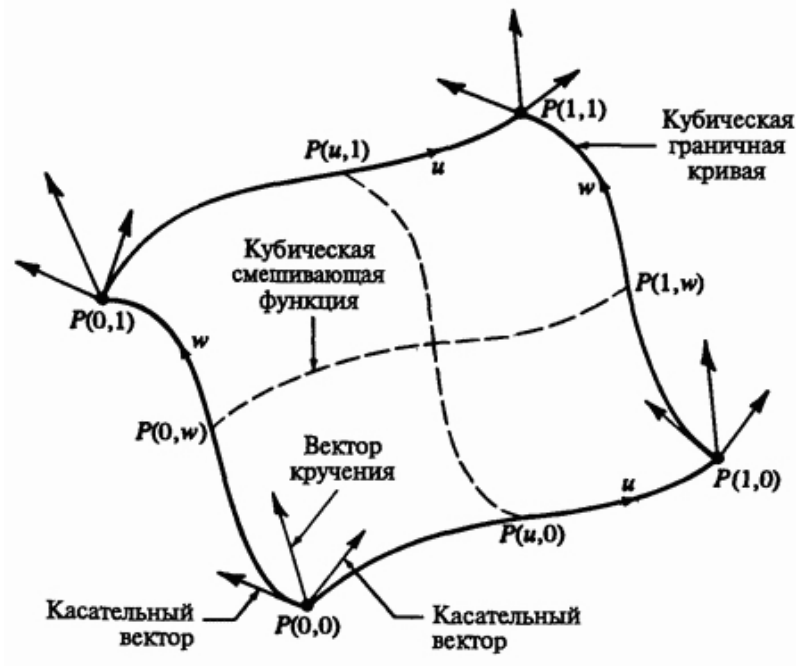


Рис. 31. Геометрия для куска бикубической поверхности Кунса.

Кубическая смешивающая функция, использованная для обоих параметрических направлений, идентична функции, использовавшейся для интерполирования внутренней части нормализованного кубического сплайна, т. е.

$$[F] = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad F_3(t) \quad F_4(t)] = [T][N] =$$

$$= \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Расписывая смешивающие функции, имеем

$$F_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1,$$

$$F_2(t) = -2t^3 + 3t^2,$$

$$F_3(t) = t^3 - 2t^2 + t,$$

$$F_4(t) = t^3 - t^2,$$

где t есть либо u либо ω , соответственно. Эти функции изображены на рис. 8 п.3. Тогда определение куска бикубической поверхности Кунса записывается в виде

$$Q(u, \omega) = [F_1(u) \quad F_2(u) \quad F_3(u) \quad F_4(u)] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_\omega(0,0) & P_\omega(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_\omega(1,0) & P_\omega(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{u\omega}(0,0) & P_{u\omega}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{u\omega}(1,0) & P_{u\omega}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\omega) \\ F_2(\omega) \\ F_3(\omega) \\ F_4(\omega) \end{bmatrix}$$

(51)

для $0 \leq u \leq 1$ и $0 \leq \omega \leq 1$. Это можно записать более компактно:

$$Q(u, \omega) = [U][N][P][N]^T [W], \quad (52)$$

где $[U] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$ и $[W]^T = \begin{bmatrix} \omega^3 & \omega^2 & \omega & 1 \end{bmatrix}$.

Матрица $[P]$ в уравнении (51) содержит всю геометрическую информацию, необходимую для генерации одного бикубического куска поверхности Кунса. Подматрицы размера 2×2 в каждом углу $[P]$ содержат

$$[P] = \begin{bmatrix} \text{угловые коор-} & \vdots & \omega\text{-каса-} \\ \text{динатные} & \vdots & \text{тельные} \\ \text{векторы} & \vdots & \text{векторы} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u\text{-каса-} & \vdots & \text{векторы} \\ \text{тельные} & \vdots & \text{кручения} \\ \text{векторы} & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Таким образом, кусок бикубической поверхности определяется четырьмя координатными векторами в угловых точках, восемью касательными векторами (по два в каждом углу), четырьмя векторами кручения в углах и четырьмя кубическими смешивающими функциями F_1, F_2, F_3 и F_4 .

Пример куска бикубической поверхности представлен на рис. 32.

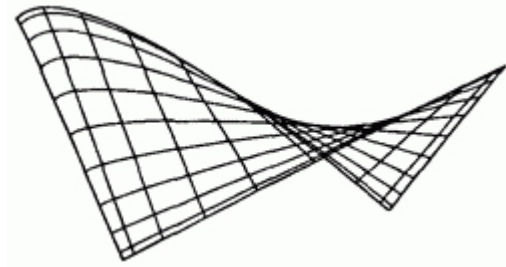


Рис. 32. Кусок бикубической поверхности Кунса.

Заметим, что каждая из изображенных на рис. 32 изопараметрических линий является нормализованным кубическим сплайном. Несколько кусков могут быть соединены вдоль C^1 -гладких границ для образования более сложных поверхностей, являющихся C^1 -гладкими везде. Детально условия объединения кусков бикубических поверхностей обсуждаются в литературе.

Параметрические производные в любой точке на бикубической поверхности получаются с помощью формального дифференцирования уравнения (52):

$$Q_u(u, \varphi) = [U][N][P][N]^T [W], \quad (53)$$

$$Q_\varphi(u, \varphi) = [U][N][P][N]^T [W'], \quad (54)$$

$$Q_{u\varphi}(u, \varphi) = [U'][N][P][N]^T [W'], \quad (55)$$

$$Q_{uu}(u, \varphi) = [U''][N][P][N]^T [W], \quad (56)$$

$$Q_{\varphi\varphi}(u, \varphi) = [U][N][P][N]^T [W''], \quad (57)$$

где штрихи обозначают дифференцирование по соответствующей переменной и

$$[U'] = \begin{bmatrix} 3u^2 & 2u & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[W']^T = \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 2\omega & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[U''] = \begin{bmatrix} 6u & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[W'']^T = \begin{bmatrix} 6\omega & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нормаль к поверхности, используемая для определения невидимых поверхностей, вычисления освещенности и создания управляющих программ для станков, задается выражением

$$n = Q_u \times Q_\omega.$$

Подробный пример иллюстрирует метод вычислений для бикубических кусков.

Пример 13. Кусок бикубической поверхности Кунса

Определить точку на куске бикубической поверхности Кунса, соответствующую параметрам $u = \omega = 0.5$. Вектор-точки для

четырёх углов равны $P(0,0) = [-100 \ 0 \ 100]$,

$P(1,0) = [-100 \ -100 \ -100]$, $P(1,0) = [100 \ -100 \ -100]$,

$P(1,1) = [100 \ 0 \ -100]$. Касательные векторы равны

$P_u(0,0) = [100 \ 100 \ 0]$, $P_u(0,1) = [1 \ 1 \ 0]$,

$P_u(1,0) = [1 \ -1 \ 0]$, $P_u(1,1) = [1 \ -1 \ 0]$.

$$\begin{aligned}
 P_{\omega}(0,0) &= [0 \ 10 \ -10], & P_{\omega}(0,1) &= [0 \ -1 \ -1], \\
 P_{\omega}(1,0) &= [0 \ 1 \ -1], & P_{\omega}(1,1) &= [0 \ -1 \ -1].
 \end{aligned}$$

Векторы кручения равны

$$\begin{aligned}
 P_{u\omega}(0,0) &= [0 \ 0 \ 0], & P_{u\omega}(0,1) &= [0.1 \ 0.1 \ 0.1], \\
 P_{u\omega}(1,0) &= [0.1 \ -0.1 \ -0.1], & P_{u\omega}(1,1) &= [0 \ 0 \ 0].
 \end{aligned}$$

Определить параметрические производные Q_u, Q_{ω} и вектор нормали для $u = \omega = 0.5$.

Используя матричную запись из уравнения (51), получим

$$\begin{aligned}
 Q(u,\omega) &= [U][N] \begin{bmatrix} [-100 \ 0 \ 100] & [-100 \ -100 \ -100] & [0 \ 10 \ -10] & [0 \ -1 \ -1] \\ [100 \ -100 \ 100] & [100 \ 0 \ -100] & [0 \ 10 \ -10] & [0 \ -1 \ -1] \\ [100 \ 100 \ 0] & [1 \ 1 \ 0] & [0 \ 1 \ -1] & [0.1 \ 0.1 \ 0.1] \\ [1 \ -1 \ 0] & [1 \ -1 \ 0] & [0.1 \ -0.1 \ -0.1] & [0 \ 0 \ 0] \end{bmatrix}^{\times} \\
 &\times [N]^T [W]^T.
 \end{aligned}$$

Для $u = 0.5$ смешивающие функции по u имеют вид:

$$[U][N] = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.125 \ 0.25 \ 0.5 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.5 \ 0.5 \ 0.125 \ -0.125].$$

Для $\omega = 0.5$ смешивающие функции по ω :

$$[N]^T [W] = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^3 \\ \varpi^2 \\ \varpi \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.5 \quad 0.5 \quad 0.125 \quad -0.125]^T$$

Таким образом, x компонента $Q(u, \varpi)$ при $u = \varpi = 0.5$ равна

$$Q_x(0.5, 0.5) = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.125 \quad -0.125] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= [12.375 \quad 0 \quad -0.0125 \quad 0.0125] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= 6.18$$

Аналогично \mathcal{Y} и \mathcal{Z} компоненты таковы:

$$Q_y(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 0.125 \ -0.125] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 & -100 & 10 & -1 \\ -100 & 0 & 1 & -1 \\ 100 & 1 & 0 & 0.1 \\ -1 & -1 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= -42.75,$$

$$Q_z(0.5, 0.5) = [0.5 \ 0.5 \ 0.125 \ -0.125] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 100 & -100 & -10 & -1 \\ 100 & -100 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= -0.56.$$

Следовательно, $Q(0.5, 0.5) = [6.18 \ -42.75 \ -0.56]$. Вся поверхность изображена на рис. 32.

Обратимся теперь к производным, вспомним уравнения (53)-(55) и заметим, что

$$[U'] [N] = \begin{bmatrix} 3u^2 & 2u & 1 & 0 \end{bmatrix} [N] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.75 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [-1.5 \quad 1.5 \quad -0.25 \quad -0.25]$$

$$[N]^T [W'] = [N]^T [3\omega^2 \quad 2\omega \quad 1 \quad 0]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [-1.5 \quad 1.5 \quad -0.25 \quad -0.25]^T$$

параметрические производные в $u = \omega = 0.5$ равны

$$Q_{u,x}(0.5, 0.5) = [-1.5 \quad 1.5 \quad -0.25 \quad -0.25] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= [274.75 \quad 299.5 \quad -0.025 \quad -0.025] \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.125 \\ -0.125 \end{bmatrix} =$$

$$= 287.13$$

Q_{u_y} и Q_{u_x} находятся аналогичным образом. В результате получим

$$Q_u(0.5, 0.5) = [287.13 \quad -14.06 \quad 1.69]$$

Теперь

$$Q_{a_x}(0.5, 0.5) = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.125 \quad -0.125] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -100 & -100 & 0 & 0 \\ 100 & 100 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 & 0.1 \\ 1 & 1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix} =$$

$$= [12.38 \quad 0 \quad -0.0125 \quad 0.0125] \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1.5 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix} =$$

$$= -18.56$$

Q_{a_y} и Q_{a_z} находятся аналогичным образом, откуда

$$Q_a(0.5, 0.5) = [-18.56 \quad -19.69 \quad -298.38]$$

И наконец, вектор нормали имеет вид:

$$\begin{aligned} n = Q_u \times Q_a &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ Q_{u_x} & Q_{u_y} & Q_{u_z} \\ Q_{a_x} & Q_{a_y} & Q_{a_z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 287.13 & -14.06 & 1.69 \\ -18.56 & -19.69 & -298.38 \end{vmatrix} = \\ &= 4227.5i + 85641.2j + -5915.5k \end{aligned}$$

Единичная нормаль равна

$$\hat{n} = [0.049 \quad 0.996 \quad -0.069]$$

Заметим, что векторы кручения в угловых точках слегка сместили нормаль от направления y .

Одна из проблем, возникающих при использовании бикубических кусков поверхности, заключается в несоответствии значений векторов положения, кручения и касательных векторов. Все они в общем случае имеют различные порядки величин. Например, для куска поверхности со стороной 10 единиц, касательные векторы могут иметь значения порядка 10 единиц, векторы кручения - 100 единиц и результаты изменения величины и направления касательных векторов и/или векторов кручения. На рис. 33 показан результат варьирования величин касательных векторов в угловых точках куска бикубической поверхности.

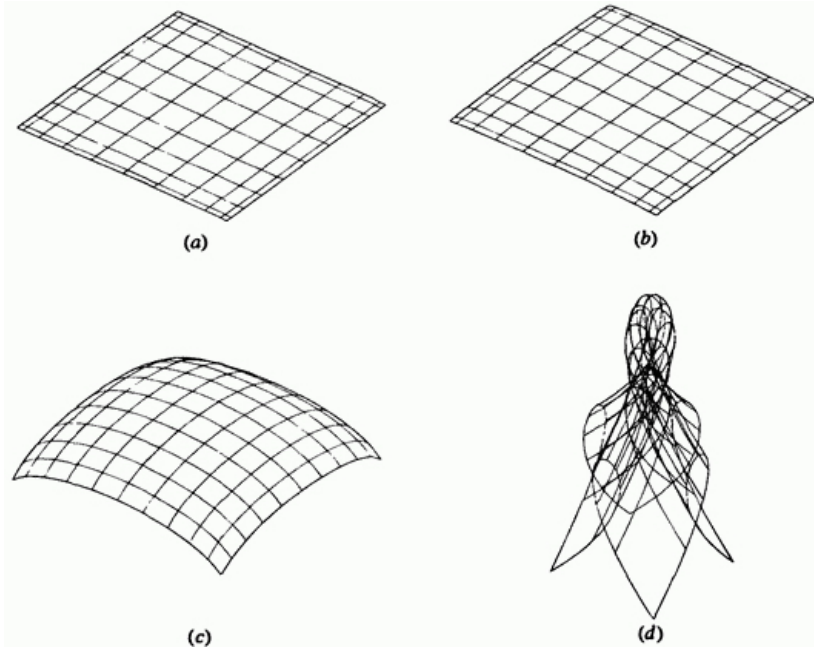


Рис. 33. Действие на кусок бикубической поверхности варьирования величины касательного вектора. Значения компонент касательного вектора равны (a) 1; (b) 10; (c) 100; (d) 1000.

Векторы положения углов куска лежат в плоскости $y = 0$, отцентрированные относительно начала координат в $\pm 100x, z$. Касательные векторы лежат в плоскостях, расположенных перпендикулярно плоскости угловых точек и содержащих смежные углы куска поверхности. Направление касательных векторов выбрано таким образом, чтобы сделать кубическую граничную кривую выпуклой вверх («горбом вверх»), например $P_u(0,0) = [1 \ 1 \ 0]$, $P_u(1,0) = [1 \ -1 \ 0]$, и т.д. Величина векторов кручения равна нулю. Если значение компоненты y каждого касательного вектора равно нулю, то кусок поверхности плоский; если не равно нулю, то кусок изогнут.

На рис. 33а изображен кусок бикубической поверхности с единичными значениями компонент касательного вектора. Хотя поверхность

выглядит плоской, на самом деле она слегка округлена. Компонента y в центре поверхности, т. е. в $x = z = 0$ равна 0.5. На рисунках 33b-d показаны бикубические поверхности, для которых значения компонент касательного вектора увеличены соответственно на 1, 2 или 3 порядка величины, т.е. равны 10, 100 и 1000. Значения компоненты у центральной точки теперь равны 5, 50 и 500. Заметим, что они также увеличиваются на порядок величины всякий раз, когда увеличивается значение касательного вектора.

Особый интерес представляет рис. 33d. Изображенная на нем поверхность является самопересекающейся. Чтобы лучше понять этот результат, можно вспомнить обсуждение кубических сплайнов кривых и в особенности рис. 10 п.3. Кроме того, заметим, что каждая изопараметрическая линия на поверхности является кубической сплайновой кривой. Каждая из изопараметрических линий образует петлю, показывая, что значение касательного вектора в угловой точке превысило критическое значение.

Результат изменения направления касательного вектора в угловой точке показан на рис. 34.

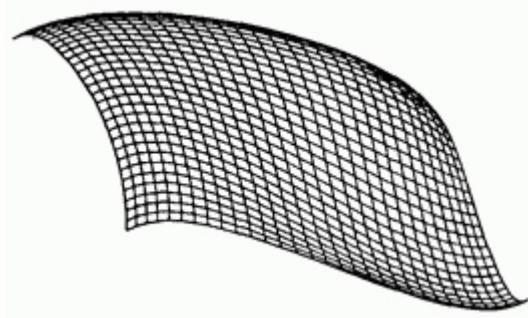


Рис. 34. Действие на кусок бикубической поверхности изменения направления касательного вектора.

Здесь изменены знаки компонент u касательных векторов $P(0,1)$; их значения стали равны 100. Заметим, что на рис. 34 правый передний угол поверхности теперь вогнутый, а не выпуклый, как на рис. 33с.

Кручение было ранее упомянуто в разд. 6.5 при обсуждении куска сферической поверхности. Там оно определялось как смешанная

производная поверхности в угловых точках. В действительности вектор кручения в угловой точке позволяет модифицировать внутреннюю форму поверхности без модификации касательных векторов в этой точке. На рис. 35 показан результат модифицирования вектора кручения в одной угловой точке $P(0,0)$ на поверхности.

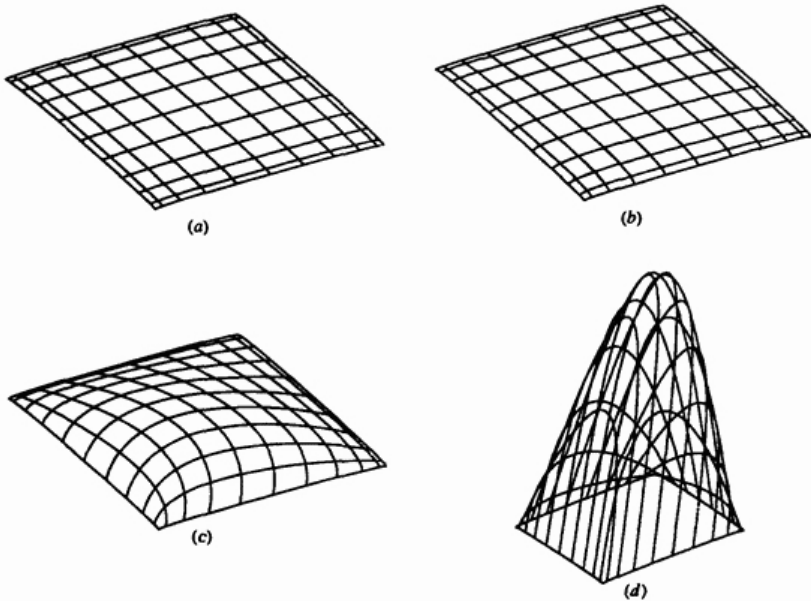


Рис. 35. Влияние вектора кручения на кусок бикубической поверхности. Значение компоненты вектора кручения в точке $P(0,0)$ равно (a) 10; (b) 100; (c) 1000; (d) 10000.

Для каждой из поверхностей на рис. 35 $P(0,0)$ является нижней угловой точкой. Поверхность аналогична представленной на рис. 33b, за исключением ненулевого вектора кручения в $P(0,0)$. На рисунках 35a и b со значениями компонент вектора кручения 10 и 100, соответственно, показан небольшой видимый эффект ненулевого вектора кручения. На рис. 35c поверхность имеет выраженную

выпуклую форму благодаря ненулевому вектору кручения. Рис. 35d иллюстрирует действие больших значений этого вектора. Заметим, однако, что в отличие от рис. 33d поверхность не самопересекается. Дополнительное тщательное исследование рис. 35d показывает, что поверхность слегка вогнута в трех угловых точках с нулевым кручением.

Поверхность с ненулевым кручением в угловой точке является в ней локально «плоской». Поверхность с нулевым кручением во всех четырех углах, как это показано на рис. 33, называется куском поверхности Фергюсона или F куском. При совместном объединении для формирования более сложных поверхностей местоположение угловых точек кусков вполне очевидно. По этой причине такие куски поверхностей редко используются на практике.

Хотя приведенное здесь обсуждение ограничивается четырехсторонними кусками поверхностей, и другие формы кусков, как это показано на рис. 36, тоже имеют значение.

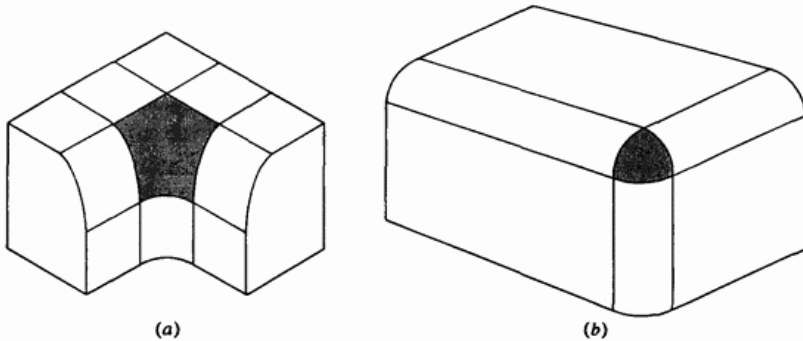


Рис. 36. Нечетырехугольные куски. (a) Пятиугольный; (b) треугольный.

Треугольные куски поверхностей рассмотрены в ряде работ. Обсуждаются в работах также пятиугольные куски поверхностей.

6.11. ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЪЕ

Бикубические поверхности Кунса предоставляют гибкое и мощное средство разработки поверхностей. Однако их практическое

использование, как и для кубических сплайновых кривых, затрудняется необходимостью задания точной, интуитивно неочевидной математической информации, например координат точек, касательных векторов и векторов кручения.

Возникающие проблемы иллюстрируются на рисунках 33-35. Большинство из этих проблем можно преодолеть, распространив понятия кривых Безье на поверхности.

Декартово или тензорное произведение поверхности Безье задается в виде

$$Q(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K_{m,j}(\omega)$$

где $J_{n,i}(u)$ и $K_{m,j}(\omega)$ — это базисные функции Бернштейна в параметрических направлениях u и ω . Для удобства повторим здесь определение, приведенное ранее.

$$J_{n,i}(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \tag{63}$$

$$K_{m,j}(\omega) = \binom{m}{j} \omega^j (1-\omega)^{m-j}$$

с

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!},$$

$$\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!} \tag{64}$$

Здесь элементы $B_{i,j}$ являются вершинами задающей полигональной сетки, как это показано на рис. 37.

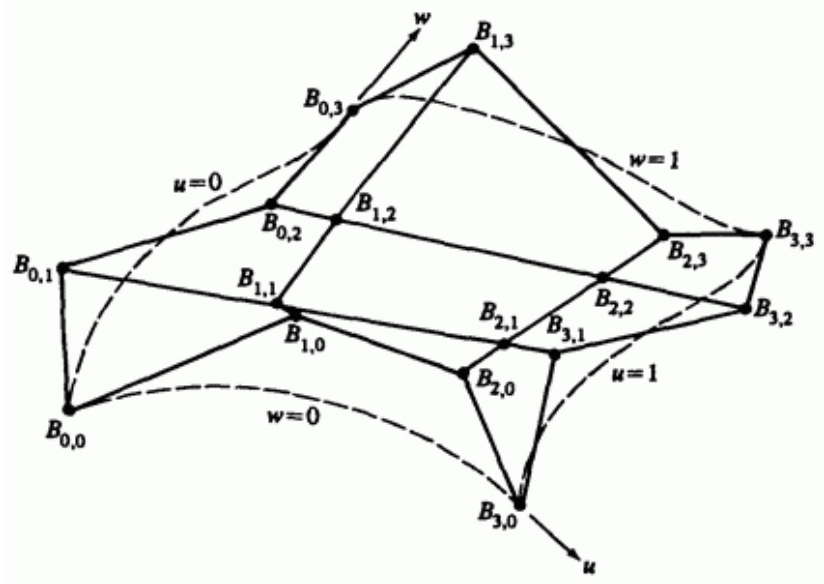


Рис. 37. Поверхность Безье и вершины характеристического многогранника.

Индексы i и j на единицу меньше числа вершин многогранника в направлениях u и w , соответственно. Для четырехсторонних кусков поверхностей задающая полигональная сетка должна быть топологически прямоугольной, т. е. должна иметь одинаковое количество вершин в каждом «ряду».

Снова, как и для кривых Безье, из-за того, что для смешивающих функций используется базис Бернштейна, многие свойства поверхности известны. Например: Степень поверхности в каждом параметрическом направлении на единицу меньше числа вершин задающего многогранника в этом направлении.

Гладкость поверхности в каждом параметрическом направлении на две единицы меньше числа вершин задающего многогранника в этом

направлении. Поверхность отображает в общем виде форму задающей полигональной сетки. Совпадают только угловые точки задающей полигональной сетки и поверхности.

Поверхность содержится внутри выпуклой оболочки задающей полигональной сетки.

Поверхность не проявляет свойства затухания изменений. Это свойство не определено и неизвестно для поверхностей двух переменных.

Поверхность инвариантна относительно аффинного преобразования.

Каждая из граничных кривых поверхности Безье является кривой Безье. Запомним этот факт и рассмотрим задающую полигональную сетку для бикубической поверхности Безье размера 4×4 , изображенную схематично на рис. 38.

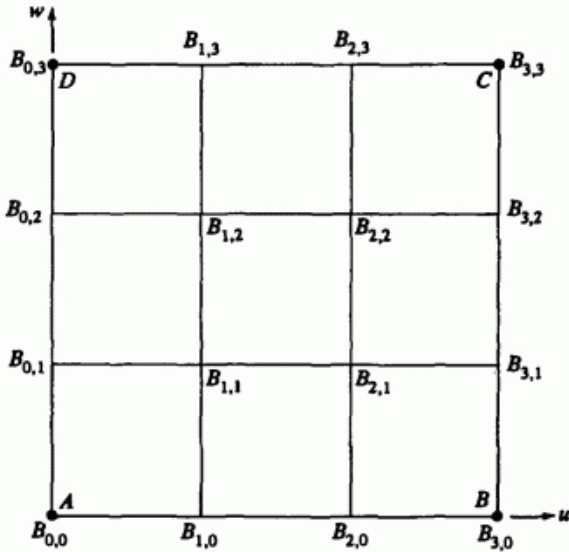


Рис. 38. Схема задающей полигональной сетки 4×4 для поверхности Безье.

Легко видеть, что направление и величина касательных векторов в угловых точках куска управляются положением соседних точек вдоль сторон сетки. А именно касательные векторы в направлениях u, φ в точке A управляются вершинами полигональной сетки $B_{0,1}$ и $B_{1,0}$, соответственно. Аналогичным образом, вершины полигональной сетки $B_{2,0}$, $B_{3,1}$, $B_{3,2}$, $B_{2,3}$ и $B_{1,3}$, $B_{0,2}$ управляют касательными векторами в угловых точках B, C, D , соответственно. Четыре внутренние вершины полигональной сетки, $B_{1,1}$, $B_{2,1}$, $B_{2,2}$ и $B_{1,2}$ влияют на направление и величину векторов кручения в угловых точках A, B, C, D куска поверхности. Следовательно, пользователь может управлять формой куска поверхности, не зная конкретных значений касательных векторов и векторов кручения. На рис. 39 показано несколько бикубических поверхностей Безье и их задающих полигональных сеток.

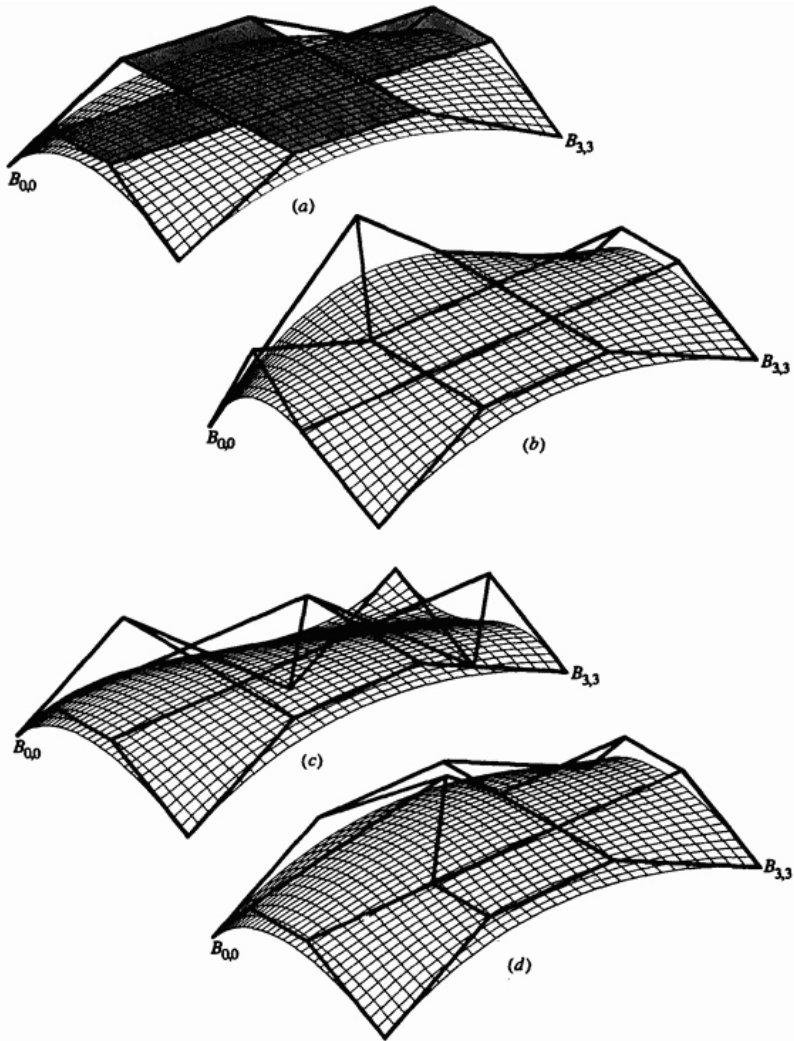


Рис. 39. Бикубические поверхности Безье. (а) Основная поверхность; (б) эффект изменения величины обоих касательных векторов в $B_{0,0}$; (с) эффект изменения направления касательного вектора в $B_{0,3}$; (д) эффект изменения величины вектора кручения в $B_{0,0}$.

Базовая полигональная сетка имеет размер 4×4 и отцентрирована относительно начала координат с угловыми точками, находящимися в ± 15 по x, z . Компонента y угловых вершин равна нулю. У всех других вершин эта компонента равна пяти. Базовая полигональная сетка и соответствующая ей поверхность Безье изображены на рис.

39а. На рис. 39 точка $B_{0,0}$ является левой угловой вершиной, а $B_{3,3}$ - правой угловой вершиной. Заметим, что центральные вершины базовой полигональной сетки образуют плоский крест (показанный затененным). Следовательно, центр получившейся поверхности минимально изогнут, хотя и не плоский.

На рис. 39b проиллюстрирован эффект увеличения в 2 раза величины касательного вектора в точке $B_{0,0}$ в обоих параметрических направлениях u и w с помощью перемещения точек $B_{1,0}$ и $B_{0,1}$. Вектор кручения не меняется. Отметим увеличение кривизны граничных кривых, отвечающих значениям параметров $u = 0$ и $w = 0$, и соответствующее изменение внутренности поверхности.

На рис. 39c показано действие изменения направления касательных векторов в точке $B_{0,3}$ в обоих параметрических направлениях u и w с помощью перемещения точек $B_{0,2}$ и $B_{1,3}$. Отметим изменение знака кривизны граничной кривой около точки $B_{0,3}$ и формы внутренней части поверхности по сравнению с базовой поверхностью.

На рис. 39d проиллюстрирован результат удвоения величины вектора кручения в точке $B_{0,0}$ без изменения его направления. В этом случае перемещается только точка $B_{1,1}$. Эффект этого изменения неуловим, но тем не менее важен для конструирования. Внимательное сравнение с базовой поверхностью на рис. 39а показывает, что параметрические линии вблизи точки $B_{0,0}$ имеют большую кривизну. Этот эффект распространяется приблизительно до центра поверхности.

В матричном виде декартово произведение поверхности Безье задается выражением

$$Q(u, \varpi) = [U][N][B][M]^T[W], \quad (59)$$

где

$$[U] = \begin{bmatrix} u^n & u^{n-1} & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

$$[W] = \begin{bmatrix} \varpi^m & \varpi^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$[B] = \begin{bmatrix} B_{0,0} & \dots & B_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,0} & \dots & B_{n,m} \end{bmatrix},$$

а матрицы $[N]$ и $[M]$ задаются уравнением (70) или (71) п.3.

Для специального случая бикубической поверхности Безье размера 4×4 уравнение (59) сокращается до

$$Q(u, \varpi) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^3 \\ \varpi^2 \\ \varpi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Поверхность Безье не обязательно должна быть квадратной. Для сетки размера 5×3 уравнение (59) превращается в

$$Q(u, \varpi) = \begin{bmatrix} u^4 & u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ -4 & -12 & -12 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} \\ B_{4,0} & B_{4,1} & B_{4,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varpi^2 \\ \varpi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Поверхность Безье размера 5×3 состоит из полиномиальных кривых четвертой степени в параметрическом направлении u и из квадратичных полиномиальных кривых в направлении ϖ . Пример такой поверхности Безье показан на рис. 40. В данном случае, как это показано на рис. 40b, изменение центральной вершины стороны задающей сетки с пятью вершинами не влияет на касательные векторы в угловых точках.

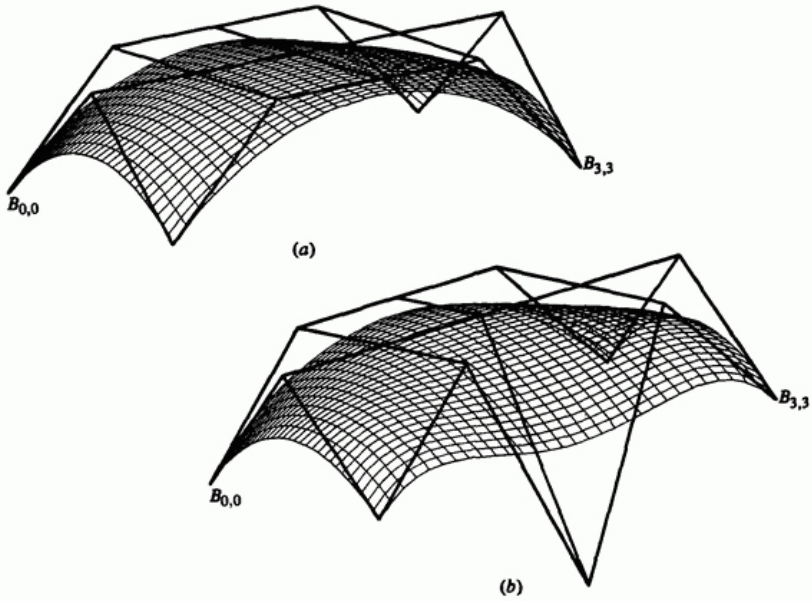


Рис. 40. Поверхность Безье размера 5×3 . (а) Основная поверхность; (б) эффект изменения центральной вершины граничной ломаной с пятью вершинами.

Производные поверхности Безье получают с помощью формального дифференцирования уравнения (58) или (59). Если воспользоваться уравнением (58), то первые и вторые параметрические производные будут

$$Q_u(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J'_{n,i}(u) K_{m,j}(\omega), \quad (62)$$

$$Q_\omega(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K'_{m,j}(\omega), \quad (63)$$

$$Q_{u,\omega}(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J'_{n,i}(u) K'_{m,j}(\omega), \quad (64)$$

$$Q_{u,u}(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J''_{n,i}(u) K_{m,j}(\omega), \quad (65)$$

$$Q_{\omega,\omega}(u, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{i,j} J_{n,i}(u) K''_{m,j}(\omega), \quad (66)$$

где штрих обозначает дифференцирование относительно параметрической переменной. Производные функций базиса Бернштейна $J'_{n,i}$, $J''_{n,i}$, $K'_{m,j}$ и $K''_{m,j}$ приведены в уравнениях (74) и (75) п.3.

Легко найти соотношение между бикубическими поверхностями Безье и Кунса. Приравнявая уравнения (52) и (59), получим

$$Q_{\text{Кунс}}(u, \omega) = Q_{\text{Безье}}(u, \omega),$$

$$[U][N_C][P][N_C]^T [W] = [U][N_B][B][N_B]^T [W],$$

где $[N_C]$ задан уравнением (76) п.3 и $[N_B]$ - уравнением (70) п.3.

Следовательно геометрическая матрица $[P]$ бикубической поверхности Кунса задается в терминах полигональной сетки поверхности Безье следующим образом

$$[P] = [N_C]^{-1} [N_B][B][N_B]^T \left[[N_C]^T \right]^{-1}$$

или

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_{\omega}(0,0) & P_{\omega}(0,0) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_{\omega}(1,0) & P_{\omega}(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{u\omega}(0,0) & P_{u\omega}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{u\omega}(1,0) & P_{u\omega}(1,1) \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} B_0 & B_{0,3} & 3(B_{0,1} - B_{0,0}) & 3(B_{0,3} - B_{0,2}) \\ B_{3,0} & B_{3,3} & 3(B_{3,1} - B_{3,0}) & 3(B_{3,3} - B_{3,2}) \\ 3(B_{1,0} - B_{0,0}) & 3(B_{1,3} - B_{0,3}) & 9(B_{0,0} - B_{1,0} - B_{0,1} + B_{1,1}) & 9(B_{0,2} - B_{1,2} - B_{0,3} + B_{1,3}) \\ 3(B_{3,0} - B_{2,0}) & 3(B_{3,3} - B_{2,3}) & 9(B_{2,0} - B_{3,0} - B_{2,1} + B_{3,1}) & 9(B_{2,2} - B_{3,2} - B_{2,3} + B_{3,3}) \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Исследование правой нижней подматрицы размера 2×2 в уравнении (67) подтверждает, что четыре центральные вершины задающей полигональной сетки влияют на кручение в угловых точках куска бикубической поверхности Безье. Тем не менее, кручение в угловых точках управляется не только центральными вершинами, но также и соседними касательными векторами. В самом деле, кручение в угловой точке управляется формой неплоского четырехугольника, сформированного угловой точкой, двумя соседними граничными точками и соседней центральной точкой.

Из уравнений (62)-(64) следует, что

$$\begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P_{\omega}(0,0) & P_{\omega}(0,0) \\ P(1,0) & P(1,1) & P_{\omega}(1,0) & P_{\omega}(1,1) \\ P_u(0,0) & P_u(0,1) & P_{u\omega}(0,0) & P_{u\omega}(0,1) \\ P_u(1,0) & P_u(1,1) & P_{u\omega}(1,0) & P_{u\omega}(1,1) \end{bmatrix} = \\
 = \begin{bmatrix} Q(0,0) & Q(0,1) & Q_{\omega}(0,0) & Q_{\omega}(0,0) \\ Q(1,0) & Q(1,1) & Q_{\omega}(1,0) & Q_{\omega}(1,1) \\ Q_u(0,0) & Q_u(0,1) & Q_{u\omega}(0,0) & Q_{u\omega}(0,1) \\ Q_u(1,0) & Q_u(1,1) & Q_{u\omega}(1,0) & Q_{u\omega}(1,1) \end{bmatrix}. \quad (68)$$

Аналогичным образом обратное соотношение между матрицами $[P]$ и $[B]$, выражающее вершины полигональной сетки Безье в терминах параметров бикубической поверхности Кунса, равно

$$\begin{bmatrix} B_{0,0} & B_{0,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\ B_{1,0} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ B_{2,0} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ B_{3,0} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 3P(0,0) & 3P(0,0)+P_{\omega}(0,0) \\ 3P(0,0)+P_u(0,0) & \frac{1}{3}\{P_{u\omega}(0,0)+9P(0,0)-3(P_{\omega}(0,0)+P_u(0,0))\} \\ 3P(1,0)-P_u(1,0) & \frac{1}{3}\{P_{u\omega}(1,0)+9P(1,0)+3(P_{\omega}(1,0)-P_u(1,0))\} \\ 3P(1,0) & 3P(1,0)+P_{\omega}(1,0) \\ \\ 3P(0,1)-P_{\omega}(0,1) & 3P(0,1) \\ \frac{1}{3}\{P_{u\omega}(0,1)+9P(0,1)+3(P_u(0,1)-P_{\omega}(0,1))\} & 3P(0,1)+P_u(0,1) \\ \frac{1}{3}\{P_{u\omega}(1,1)+9P(1,1)-3(P_u(1,1)+P_{\omega}(1,1))\} & 3P(1,1)-P_u(1,1) \\ 3P(1,1)-P_{\omega}(1,1) & 3P(1,1) \end{bmatrix}. \quad (69)$$

Более полно концепция поверхности Безье иллюстрируется на следующем примере.

Пример 14. Поверхность Безье

Для изображенной на рис. 39а поверхности Безье для значений параметров $u = \omega = 0.5$ определить координаты точки на поверхности и первые производные в u и ω направлениях. Найти также координаты точки и производные для модифицированной

поверхности, показанной на рис. 39d. Сравнить полученные результаты. Вершины многогранника 4×4 поверхности Безье таковы:

$$[B] = \begin{bmatrix} [-15 & 0 & 15] & [-15 & 5 & 5] & [-15 & 5 & -5] & [-15 & 0 & -15] \\ [-5 & 5 & 15] & [-5 & 5 & 5] & [-5 & 5 & -5] & [-5 & 5 & -15] \\ [5 & 5 & 15] & [5 & 5 & 5] & [5 & 5 & -5] & [5 & 5 & -15] \\ [15 & 0 & 15] & [15 & 5 & 5] & [15 & 5 & -5] & [15 & 0 & -15] \end{bmatrix}.$$

Для модифицированной поверхности на рис. 39d изменяется только вершина $B_{1,1} [0 \ 10 \ 0]$, т.е. изменение сказывается лишь на кручении в угловой точке $B_{0,0}$.

Напомним матричное представление поверхности, заданное в уравнениях (59) и (60), т.е.

$$Q(u, \varphi) = [U][N][B][N]^T [W].$$

Здесь

$$[N][B][N]^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [B] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [0 & 0 & 0] & [0 & 0 & 0] & [0 & 0 & 0] & [0 & 0 & 0] \\ [0 & 0 & 0] & [0 & -45 & 0] & [0 & 45 & 0] & [0 & -15 & 0] \\ [0 & 0 & 0] & [0 & 45 & 0] & [0 & -45 & 0] & [30 & 15 & 0] \\ [0 & 0 & 0] & [0 & -15 & 0] & [0 & 15 & -30] & [-15 & 0 & 15] \end{bmatrix}.$$

Точка на поверхности, таким образом, будет

$$\begin{aligned} Q(0.5, 0.5) &= [0.125 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 1][N][B][N]^T \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= [0 \quad 4.6875 \quad 0] \end{aligned}$$

Производные по направлениям:

$$Q_u(0.5, 0.5) = [3u^2 \quad 2u \quad 1 \quad 0][N][B][N]^T \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.75 \quad 1 \quad 1 \quad 0][N][B][N]^T \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= [30 \quad 0 \quad 0]$$

$$Q_w(0.5, 0.5) = [u^3 \quad u^2 \quad u \quad 1][N][B][N]^T \begin{bmatrix} 3w^2 \\ 2w \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.125 \quad 0.25 \quad 0.5 \quad 1][N][B][N]^T \begin{bmatrix} 0.75 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [0 \quad 0 \quad -30].$$

Заметим, что векторы Q_u и Q_ω ортогональны.

В модифицированной поверхности на рис. 39d изменено значение только точки $B_{1,1}$ стандартной поверхности. Новое значение координат равно $B_{1,1}[0 \ 10 \ 0]$. Новое значение произведения:

$$[N][B][N]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} [45 \ 45 \ -45] & [-90 \ -90 \ 90] & [45 \ 45 \ -45] & [0 \ 0 \ 0] \\ [-90 \ -90 \ 90] & [180 \ 135 \ -180] & [-90 \ -45 \ 90] & [0 \ -15 \ 0] \\ [45 \ 45 \ -45] & [-90 \ -45 \ 90] & [45 \ 0 \ -45] & [30 \ 15 \ 0] \\ [0 \ 0 \ 0] & [0 \ -15 \ 0] & [0 \ -15 \ -30] & [-15 \ 0 \ 15] \end{bmatrix}.$$

Новые координаты точки поверхности для $u = \omega = 0.5$:

$$Q(0.5, 0.5) = [0.703 \quad 5.391 \quad -0.703].$$

Новые параметрические производные для $u = \omega = 0.5$:

$$Q_u(0.5, 0.5) = [28.594 \quad -1.406 \quad 1.406],$$

$$Q_a(0.5, 0.5) = [-1.406 \quad -1.406 \quad -28.594]$$

Заметим в этом случае, что поскольку задающая полигональная сетка более не симметрична относительно оси \mathcal{Y} , то поверхность теперь не симметрична относительно этой оси. Далее, заметим, что хотя Q_u и Q_a все еще ортогональны, но как их величины, так и направления отличаются. Данные результаты показывают, что вектор кручения в одной угловой точке оказывает трудно уловимое, но существенное влияние на форму всей поверхности.

Приведенное выше обсуждение поверхностей Безье касалось определения и характеристик одного куска поверхности. Для того чтобы получить более сложные поверхности, надо объединить несколько кусков поверхности Безье. Подробное обсуждение этого вопроса лежит вне сферы данной книги. Интересующегося читателя мы отсылаем к литературе. Проблемы, возникающие при объединении кусков поверхности Безье с обеспечением гладкости вдоль соприкасающихся сторон, иллюстрируются рис. 41 на примере объединения двух кусков бикубической поверхности Безье вдоль одной стороны.

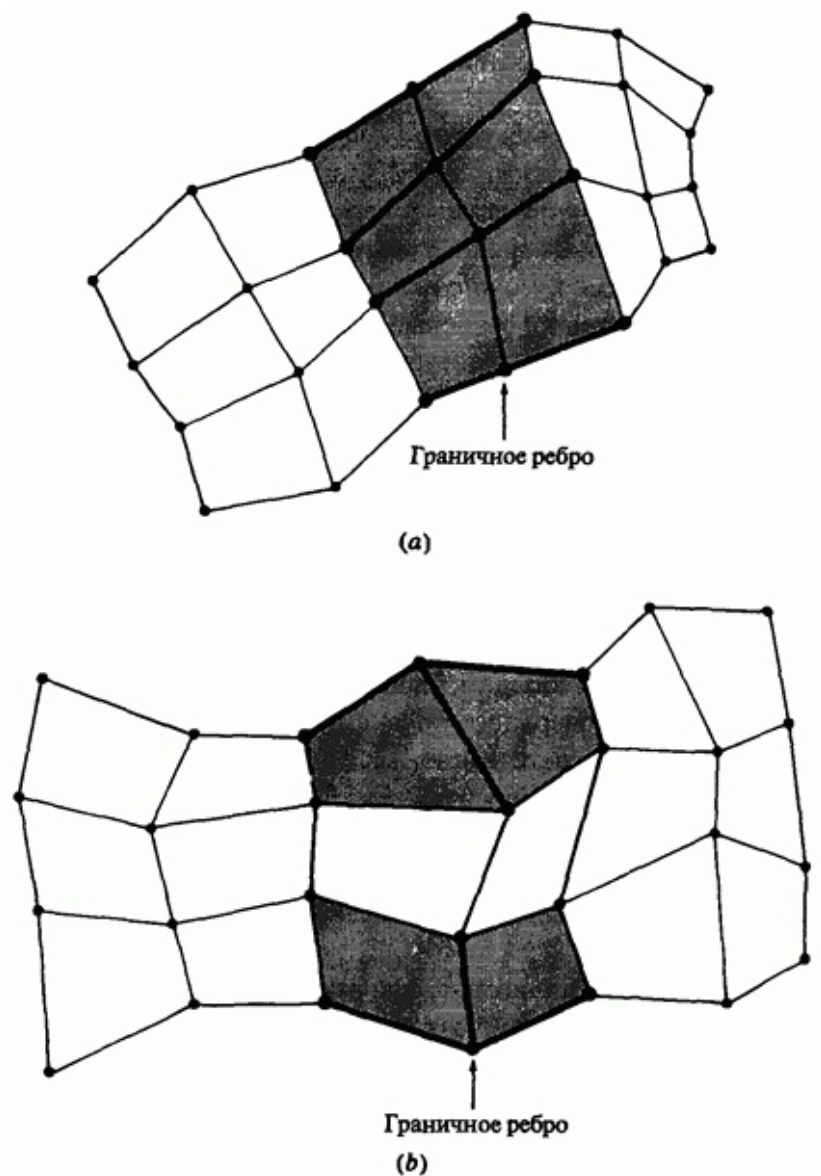


Рис. 41. Гладкость стыковки кусков поверхности Безье. (a) Линии сетки коллинеарны; (b) ребра ломаных компланарны.

Для обеспечения непрерывности или C^0 гладкости вдоль границы необходимо, чтобы совпадали две граничные кривые, а следовательно, и две граничные ломаные вдоль края поверхности. Для обеспечения непрерывности векторов наклона или касательных векторов или C^1 гладкости вдоль границы куска направление нормали к поверхности вдоль граничной кривой должно быть одинаковым для обоих кусков. Для этого можно использовать два условия. Первое требует, чтобы четыре отрезка полигональной сетки, встречающиеся у границы и пересекающие ее, были коллинеарными, как это показано выделенными линиями на рис. 41а. Второе, менее жесткое условие требует, чтобы только три ребра полигональной сетки, встречающиеся в конечных точках граничной кривой, были компланарными, как это показано выделенными линиями на рис. 41б.

6.12. В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТИ

Естественным расширением понятия поверхности Безье является декартово произведение В-сплайн поверхности, определяемой выражением

$$Q(u, \varphi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varphi), \quad (70)$$

где $N_{i,k}(u)$ и $M_{j,l}(\varphi)$ - базисные функции В-сплайна в бипараметрических направлениях u и φ соответственно (см. уравнение 84 п.3). Для удобства повторим здесь определение базисных функций, данное ранее в разд. 3,

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \leq u < x_{i+1}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - x_i) N_{i,k-1}(u)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - u) N_{i+1,k-1}(u)}{x_{i+k} - x_{i+1}},$$

и

$$M_{j,l}(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } y_j \leq \varphi < y_{j+1}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$M_{j,l}(\varphi) = \frac{(\varphi - y_j) M_{j,l}(\varphi)}{y_{j+1} - y_j} + \frac{(y_{j+1} - \varphi) M_{j+1,l-1}(\varphi)}{y_{j+1} - y_{j+1}},$$

где x_i и y_j являются элементами узловых векторов, как это обсуждалось в разд. 3.

Снова $B_{i,j}$ являются вершинами задающей полигональной сетки. Для четырехугольных «кусков» поверхности задающая полигональная сетка должна быть топологически прямоугольной. Индексы i и j на единицу меньше числа вершин задающего многогранника соответственно в u и φ параметрических направлениях.

Как и для В-сплайн кривых на форму и свойства В-сплайн поверхности существенно влияют узловые векторы $[X]$ и $[Y]$, причем используются незамкнутые, периодические и неоднородные узловые векторы. Хотя обычно для обоих параметрических направлений применяют узловые векторы одного и того же типа, но это не обязательно. Например, можно использовать незамкнутый узловой вектор и его соответствующие В-сплайн базисные функции для одного параметрического направления и периодический узловой вектор и его соответствующие В-сплайн базисные функции для другого. Практическим примером служит цилиндрическая поверхность с переменным сечением.

Так как для описания граничных кривых и для интерполирования внутренней части поверхности используется В-сплайн базис, то сразу же можно перечислить некоторые свойства В-сплайн поверхности:

- Максимальный порядок поверхности в каждом параметрическом направлении равен числу вершин задающего многогранника в этом направлении. Гладкость поверхности в каждом параметрическом направлении на две единицы меньше порядка поверхности в каждом направлении; т. е. C^{k-2} и C^{l-2} в u и w направлениях, соответственно.

- Поверхность инвариантна относительно аффинного преобразования; т. е. поверхность преобразуется с помощью преобразования задающей полигональной сетки.

- Свойство затухания изменений для В-сплайн поверхности в настоящее время неизвестно.

- Влияние одной вершины полигональной сетки ограничивается $\pm k/2, \pm l/2$ интервалами в каждом параметрическом направлении.

- Если число вершин задающей полигональной сетки равно порядку в каждом параметрическом направлении и внутренних узловых величин нет, то В-сплайн поверхность превращается в поверхность Безье (см. рис. 39). При триангуляции задающая полигональная сетка образует плоскую аппроксимацию поверхности.

- Поверхность лежит внутри выпуклой оболочки задающей полигональной сетки, образуемой объединением всех выпуклых оболочек k, l соседних вершин полигональной сетки.

Из предыдущего обсуждения свойств выпуклой оболочки В-сплайн кривых сразу же следует, что В-сплайн поверхность может содержать плоские области и линии резкого нарушения гладкости. Это свойство очень полезно во многих ситуациях, возникающих при конструировании. На рис. 42а-d изображена серия незамкнутых В-сплайн поверхностей и их характеристических многогранников третьего порядка в каждом характеристическом направлении.

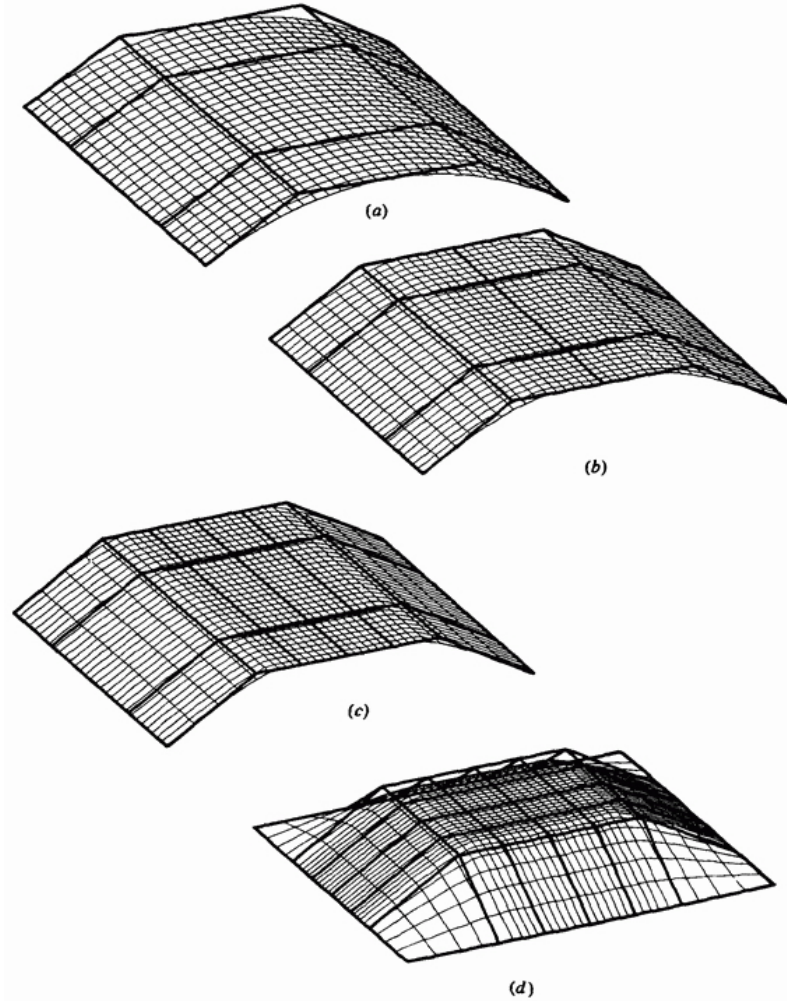


Рис. 42. В-сплайн поверхности третьего порядка. (а) Гладкая линейчатая поверхность; (b) небольшая внутренняя плоская область, вызванная коллинеарностью трех вершин сетки в \mathcal{L} направлении; (c) обширная внутренняя плоская область, вызванная коллинеарностью пяти вершин сетки в \mathcal{L} направлении; (d) плоская область внутри скульптурной поверхности.

Отметим, что каждая из линий задающей полигональной сетки в направлении \mathcal{C} является прямой линией с четырьмя вершинами. Получающаяся поверхность линейчата в направлении \mathcal{C} .

Изображенная на рис. 42a B-сплайн поверхность, заданная четырьмя вершинами полигональной сетки в направлении \mathcal{U} , плавно изогнута в этом направлении.

Изображенная на рис. 42b B-сплайн поверхность задана пятью вершинами полигональной сетки в направлении \mathcal{U} . Три центральные вершины коллинеарны. Заметим, что центр получившейся поверхности имеет плоскую форму. Аналогичным образом коллинеарны пять из семи вершин задающей полигональной сетки в направлении \mathcal{U} для поверхности, изображенной на рис. 42c. И снова в центральной области, которая имеет большие размеры, чем на рис. 42b, поверхность плоская. На рис. 42d показано, что эти очень сильные свойства выпуклой оболочки распространяются на оба параметрических направления. Таким образом, плоская область может быть встроена во внутреннюю часть скульптурной поверхности. При увеличении порядка поверхности плоская область становится меньше. На рис. 43 иллюстрируется эффект, возникающий при совпадении линий сетки.

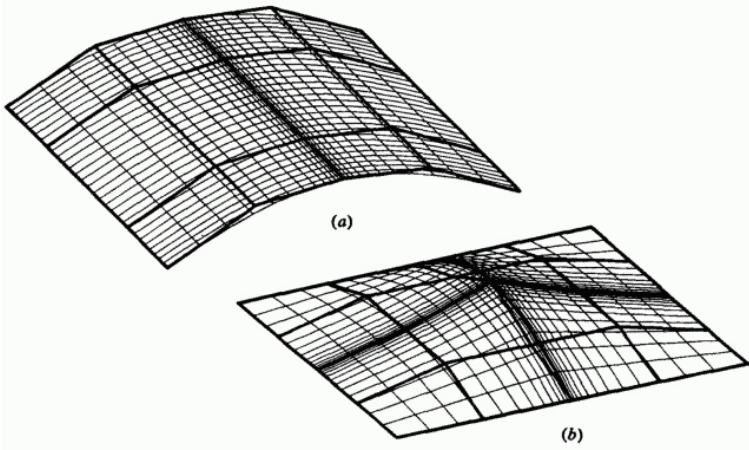


Рис. 43 B-сплайн поверхности четвертого порядка с несколькими совпадающими линиями сетки.

На рис. 43а три совпадающие линии сетки используются для образования линии складки в центре В-сплайн поверхности четвертого порядка. На рис. 43б показан результат совмещения трех линий сетки в обоих параметрических направлениях. В этом случае В-сплайн поверхность четвертого порядка содержит два гребня, поднимающихся к точке в центре поверхности. Так же как и для В-сплайн кривых, линия складки возникает в том случае, когда совпадают $k-1$ или $l-1$ линий сетки. Кроме того, так как В-сплайн поверхность везде C^{k-2}/C^{l-2} гладка, то она гладка и на этой линии. Вдобавок данное свойство также гарантирует C^{k-2}/C^{l-2} гладкость перехода изогнутой поверхности в плоскую. Превосходные свойства локального изменения В-сплайн кривых переносятся на В-сплайн поверхности. Пример этого приведен на рис. 44, где незамкнутая бикубическая ($k=l=4$) В-сплайн поверхность определена полигональной сеткой 9×9 ($m=n=8$).

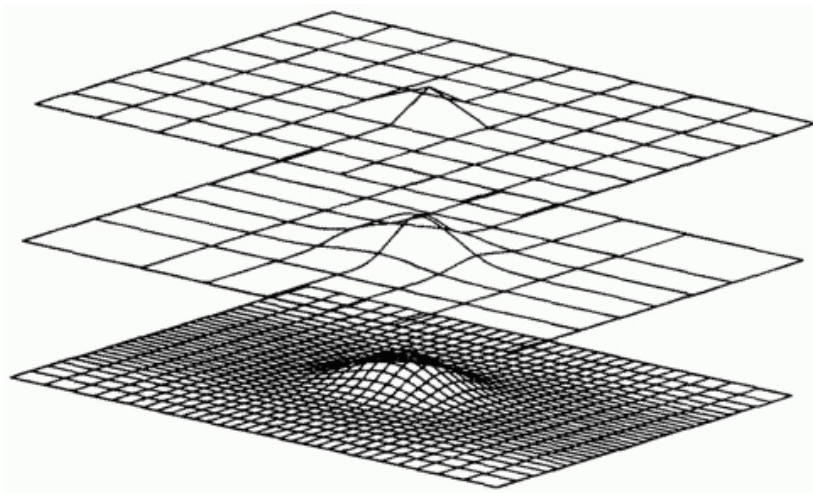


Рис. 44 Локальное изменение В-сплайн поверхностей.

Эта сетка, показанная как верхняя поверхность на рис. 44, плоская везде, за исключением центральной точки. Незамкнутый узловой

вектор в обоих параметрических направлениях равен $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 6 \ 6 \ 6]$. Таким образом, у нас есть шесть промежутков параметров в каждом направлении, т.е. $0-1, 1-2, \dots, 5-6$. Каждый параметрический четырехугольник, например $0 \leq u \leq 1, 0 \leq \varpi \leq 1$, образует подкусок В-сплайн поверхности. Средняя поверхность, изображенная на рис. 44, составлена из параметрических линий на концах каждого параметрического интервала, т.е. в $u = \varpi = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Каждый четырехугольник представляет подкусок поверхности. Отметим, что влияние смещенной точки ограничивается $\pm k/2, l/2$ интервалами или подкусками.

Параметрические производные В-сплайн поверхности получаются с помощью формального дифференцирования уравнения (70):

$$Q_u(u, \varpi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N'_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi), \quad (71)$$

$$Q_\varpi(u, \varpi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M'_{j,l}(\varpi), \quad (72)$$

$$Q_{u\varpi}(u, \varpi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N'_{i,k}(u) M'_{j,l}(\varpi), \quad (73)$$

$$Q_{uu}(u, \varpi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N''_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi), \quad (74)$$

$$Q_{\omega\omega}(u, \omega) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} N_{i,k}(u) M''_{j,l}(\omega), \quad (75)$$

где штрих обозначает дифференцирование относительно соответствующего параметра. Производные В-сплайн базисных функций задаются уравнениями (97)-(100) п.3.

Приведенный пример иллюстрирует метод вычисления В-сплайн поверхности.

Пример 15. Вычисление незамкнутой В-сплайн поверхности

Рассмотрим В-сплайн поверхность, заданную полигональной сеткой размера 4×4 :

$$B_{1,1}[-15 \ 0 \ 15] \qquad B_{2,1}[-5 \ 5 \ -15]$$

$$B_{3,1}[5 \ 5 \ 15] \qquad B_{4,1}[15 \ 0 \ 15]$$

$$B_{1,2}[-15 \ 5 \ 5] \qquad B_{2,2}[-5 \ 10 \ 5]$$

$$B_{3,2}[5 \ 10 \ 5] \qquad B_{4,2}[15 \ 5 \ 5]$$

$$B_{1,3}[-15 \ 5 \ -5] \qquad B_{2,3}[-5 \ 10 \ -5]$$

$$B_{3,3}[5 \ 10 \ -5] \qquad B_{4,3}[15 \ 5 \ -5]$$

$$B_{1,4}[-15 \ 0 \ -15] \qquad B_{2,4}[-5 \ 5 \ -15]$$

$$B_{3,4}[5 \ 5 \ -15] \qquad B_{4,4}[15 \ 0 \ -15]$$

Это поверхность четвертого порядка в направлении u ($k=4$) и

третьего порядка в направлении ϖ ($l=3$). Таким образом, поверхность составлена из двух подкусков: один для $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq \varpi \leq 1$ и другой для $0 \leq u \leq 1$, $1 \leq \varpi \leq 2$. Надо найти точку в центре поверхности, т.е. при $u = 1/2$, $\varpi = 1$.

Расписывая уравнение (70), получим

$$\begin{aligned}
 Q(u, \varpi) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 B_{i,j} N_{i,4}(u) M_{j,3}(\varpi) = \\
 &= N_{1,4} (B_{1,1} M_{1,3} + B_{1,2} M_{2,3} + B_{1,3} M_{3,3} + B_{1,4} M_{4,3}) + \\
 &+ N_{2,4} (B_{2,1} M_{1,3} + B_{2,2} M_{2,3} + B_{2,3} M_{3,3} + B_{2,4} M_{4,3}) + \\
 &+ N_{3,4} (B_{3,1} M_{1,3} + B_{3,2} M_{2,3} + B_{3,3} M_{3,3} + B_{3,4} M_{4,3}) + \\
 &+ N_{4,4} (B_{4,1} M_{1,3} + B_{4,2} M_{2,3} + B_{4,3} M_{3,3} + B_{4,4} M_{4,3}).
 \end{aligned}$$

Здесь узловой вектор в u направлении $[X] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$. Вспомнив пример (12) п.3, получим выражения для базисных функций, т.е.

$$\begin{aligned}
 N_{1,4} \left(\frac{1}{2} \right) &= (1-u)^3 = \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}, \\
 N_{2,4} \left(\frac{1}{2} \right) &= 3u(1-u)^2 = (3) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{8},
 \end{aligned}$$

$$N_{3,4}\left(\frac{1}{2}\right) = 3u^2(1-u) = (3)\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8},$$

$$N_{4,4}\left(\frac{1}{2}\right) = u^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Аналогичным образом узловой вектор в направлении ϖ имеет вид $[Y] = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2]$. Вспомнив пример (10) п.3, получим выражения для базисных функций, т.е.

$$M_{1,3}(1) = 0,$$

$$M_{2,3}(1) = \frac{(2-\varpi)^2}{2} = \frac{(2-1)^2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$M_{3,3}(1) = \frac{(2-\varpi)(3\varpi-2)}{2} = \frac{(2-1)(3-2)}{2} = \frac{1}{2},$$

$$M_{4,3}(1) = (\varpi-1)^2 = (1-1) = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} Q(1/2, 1) &= \frac{1}{8} \left\{ (0)B_{1,1} + \frac{1}{2}B_{1,2} + \frac{1}{2}B_{1,3} + (0)B_{1,4} \right\} + \\ &+ \frac{3}{8} \left\{ (0)B_{2,1} + \frac{1}{2}B_{2,2} + \frac{1}{2}B_{2,3} + (0)B_{2,4} \right\} + \end{aligned}$$

$$+\frac{3}{8}\left\{(0)B_{3,1}+\frac{1}{2}B_{3,2}+\frac{1}{2}B_{3,3}+(0)B_{3,4}\right\}+$$

$$+\frac{1}{8}\left\{(0)B_{4,1}+\frac{1}{2}B_{4,2}+\frac{1}{2}B_{4,3}+(0)B_{4,4}\right\},$$

$$Q(1/2,1)=\frac{1}{16}(B_{1,2}+B_{1,3})+\frac{3}{16}(B_{2,2}+B_{2,3})+$$

$$+\frac{3}{16}(B_{3,2}+B_{3,3})+\frac{1}{16}(B_{4,2}+B_{4,3})=$$

$$=\frac{1}{16}\{[-15 \ 5 \ 5]+[-15 \ 5 \ -5]\}+$$

$$+\frac{3}{16}\{[-5 \ 10 \ 5]+[-5 \ 10 \ -5]\}+$$

$$+\frac{3}{16}\{[5 \ 10 \ 5]+[5 \ 10 \ -5]\}+$$

$$+\frac{1}{16}\{[15 \ 5 \ 5]+[15 \ 5 \ -5]\}=$$

$$=[0 \ 35/4 \ 0].$$

Периодические В-сплайн поверхности легко генерируются с помощью периодических базисных функций в уравнении (70), для получения которых используются периодические узловые векторы. На рис. 45 показано несколько примеров периодических В-сплайн поверхностей, формируемых незамкнутыми задающими полигональными сетками.

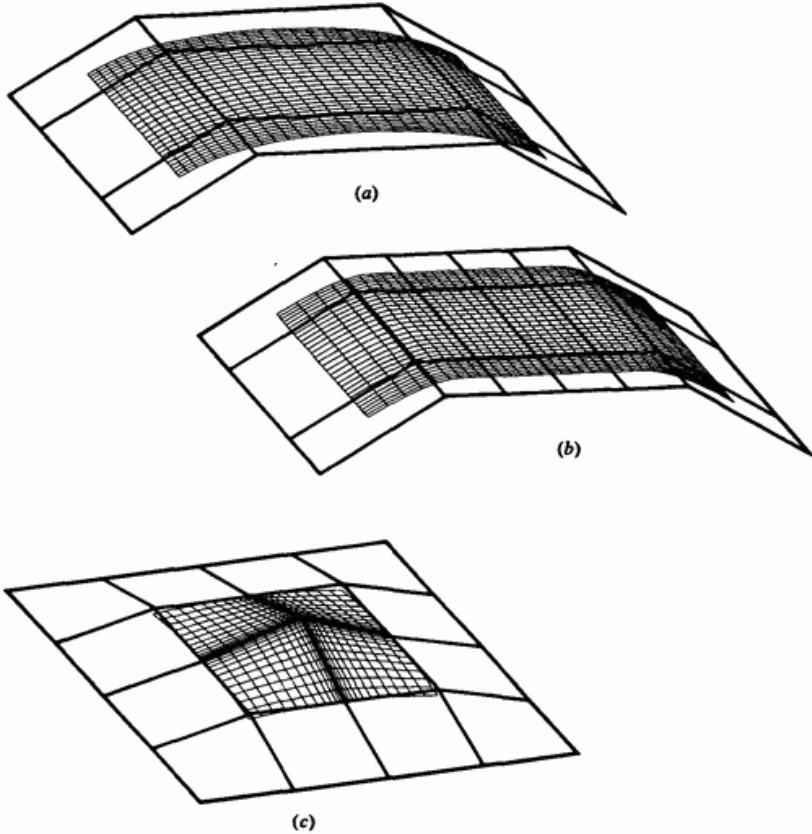


Рис. 45. Периодические В-сплайн поверхности для незамкнутых характеристических многогранников. (а) Гладкая линейчатая поверхность третьего порядка; (б) большая внутренняя плоская область третьего порядка, вызванная коллинеарностью пяти вершин сетки в \mathbb{Z}^d направлении; (с) острый выступ на поверхности четвертого порядка, вызванный пересечением нескольких совпадающих линий сетки.

На рисунках 45а и б задающие полигональные сетки соответствуют сеткам рисунков 42а и с, а сетка рис. 45с соответствует сетке рис. 43б. Заметим, что во всех случаях, так же как и для периодических В-сплайн кривых, границы поверхности и многогранника не совпадают из-за уменьшения диапазона параметра, используемого для периодических В-сплайн базисных функций.

Замкнутые периодические В-сплайн поверхности демонстрируют свойства, аналогичные свойствам замкнутых периодических В-сплайн кривых. На рис. 46 показаны примеры трех поверхностей третьего порядка. Задающая полигональная сетка на рис. 46а образуется с помощью повторения через одинаковые промежутки вдоль оси z от точки $z = -8$ до $z = 8$ задающего многоугольника для замкнутой В-сплайн кривой на рис. 46б.

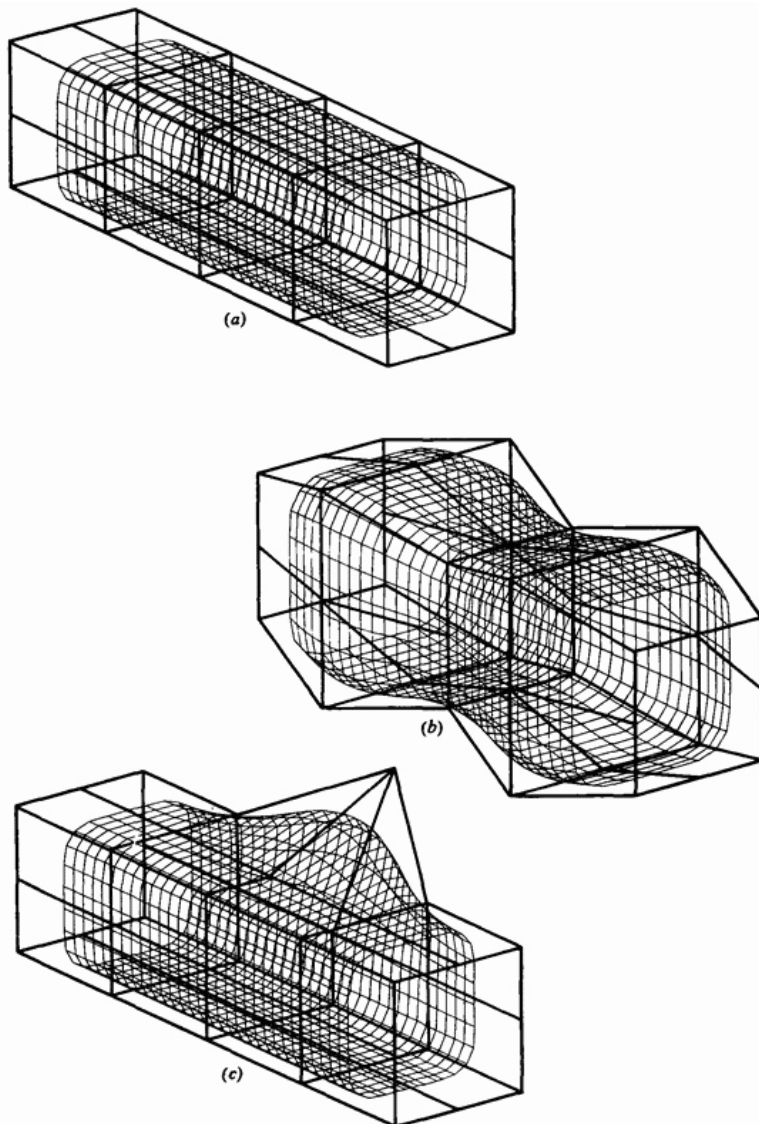


Рис. 46 Замкнутые периодические В-сплайн поверхности. (а) Прямая цилиндрическая поверхность; (б) возмущенная волнистая цилиндрическая поверхность; (с) эффект возмущения одной вершины сетки.

В результате получается цилиндрическая поверхность. Отметим, что поверхность не касается плоскостей первого и последнего задающих многоугольников. Характеристический многогранник для рис. 46b получен с помощью увеличения на единицу x - и y -размеров второго и четвертого задающих многоугольников на рис. 46a. В результате получается волнистый цилиндр. На рис. 46c показан локальный эффект возмущения одной вершины задающей сетки.

В уравнении (70) можно комбинировать незамкнутые и периодические В-сплайн базисные функции. Два примера этого представлены на рис. 47.

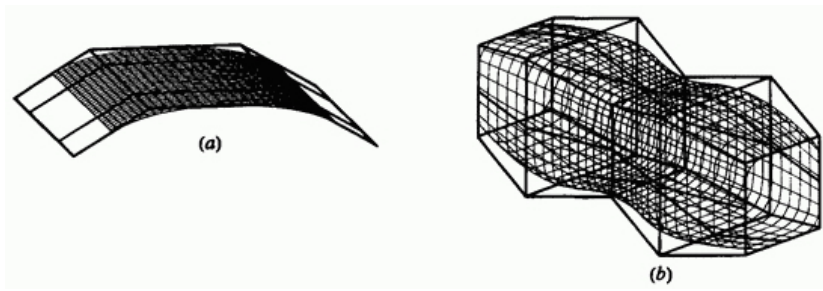


Рис. 47. Объединенные В-сплайн поверхности третьего порядка. (a) Незамкнутый характеристический многогранник; (b) замкнутый характеристический многогранник.

Здесь в одном параметрическом направлении используются незамкнутый узловой вектор и базисная функция, а в другом направлении используются периодический узловой вектор и базисная функция. На рис. 47a показана комбинированная В-сплайн поверхность, заданная незамкнутой полигональной сеткой с рис. 42a. На рис. 47b показана комбинированная В-сплайн поверхность, заданная замкнутой полигональной сеткой с рис. 46b. Отметим, что поверхность совпадает с крайними линиями полигональной сетки в направлении z . Это свойство бывает полезным в некоторых случаях.

Матричное выражение для периодических В-сплайн поверхностей имеет вид

$$Q(s,t) - [U^*][N^*][B_{s,t}^*][M^*]^T [W^*]^T, \quad (76)$$

где $[U^*]$ и $[W^*]$ являются репараметризованными параметрическими переменными в интервалах $0 \leq u^* \leq 1$ и $0 \leq \varphi^* \leq 1$, заданными в уравнении (90) п.3. $[N^*]$ и $[M^*]$ задаются уравнением (91) п.3. Матрица $[B_{s,t}^*]$ представляет скользящую сетку $k \times l$ вершин характеристического многогранника, задающего подкусок на поверхности. Для периодических В-сплайн поверхностей, заданных незамкнутыми полигональными сетками

$$[B_{s,t}^*] = [B_{i,j}], \quad (77)$$

где

$$\begin{aligned} 1 \leq s \leq n-k+2, & \quad s \leq i \leq s+k-1, \\ 1 \leq t \leq m-l+2, & \quad t \leq j \leq t+l-1 \end{aligned} \quad (78)$$

и $B_{i,j}$ представляет индивидуальные элементы задающей полигональной сетки.

Для полигональных сеток, замкнутых вдоль $u = 0$, т. е. с совпадающими первой и последней сеточными линиями в направлении u , скользящая сетка задается так

$$1 \leq s \leq n-k+2,$$

$$1 \leq t \leq m+l,$$

$$s \leq i \leq s+k-1,$$

$$j \in \left[\left[\{(t-1) \bmod (m+1)\} + 1 : (t+l-2) \bmod (m+1) + 1 \right] \right]. \quad (79)$$

Аналогичным образом, для полигональных сеток, замкнутых вдоль $\omega = 0$, скользящая сетка задается в виде

$$1 \leq s \leq n+1,$$

$$1 \leq t \leq m-l+2,$$

$$i \in \left[\left[\{(s-1) \bmod (n+1)\} + 1 : (s+k-2) \bmod (n+1) + 1 \right] \right],$$

$$t \leq j \leq t+l-1. \quad (80)$$

И наконец, для полигональных сеток, замкнутых вдоль как $u = 0$, так и $\omega = 0$, скользящая сетка задается так:

$$1 \leq s \leq n-k+2,$$

$$1 \leq t \leq m-l+2,$$

$$i \in \left[\left[\{(s-1) \bmod (n+1)\} + 1 : (s+k-2) \bmod (n+1) + 1 \right] \right],$$

$$j \in \left[\left[\{(t-1) \bmod (m+1)\} + 1 : (t+l-2) \bmod (m+1) + 1 \right] \right]. \quad (81)$$

В этом случае образуется полностью замкнутая поверхность. Пример изображен на рис. 48.

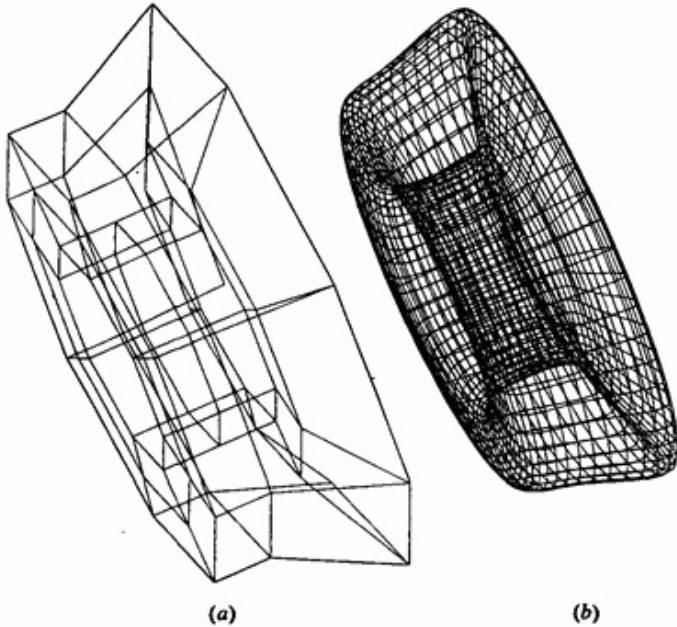


Рис. 48. Замкнутая тороидальная бикубическая $(k = l = 4)$ В-сплайн поверхность. (a) Характеристический многогранник; (b) поверхность.

Задающая полигональная сетка, изображенная на рис. 48а, формируется с помощью переноса вершин задающего многоугольника для периодической В-сплайн кривой на рис. 47 на -2 единицы по x и $+4$ единицы по y и затем вращения на 360° вокруг оси x с шагом 45° . Замкнутая периодическая бикубическая $(k = l = 4)$ В-сплайн поверхность, изображенная на рис. 48b, имеет форму тора. Матричное выражение для незамкнутых В-сплайн поверхностей имеет ту же форму, что и уравнение (76). Однако, так же как и для матричного выражения незамкнутых В-сплайн кривых, существование нескольких узловых значений на концах узлового вектора делает этот результат менее компактным и менее полезным, чем для периодических В-сплайн поверхностей. По этим причинам данный вопрос не рассматривается здесь более подробно.

6.13. В-СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В предыдущих разделах обсуждались свойства и создание В-сплайн поверхностей по известной задающей полигональной сетке. Также представляет интерес и **обратная задача**: т.е. задано известное множество данных на поверхности, надо найти задающую полигональную сетку для В-сплайн поверхности, наилучшим образом интерполирующей эти данные. Так как границы поверхности, представляемой этими данными, обычно известны, то здесь будут рассматриваться только незамкнутые В-сплайн поверхности. Разработка аналогичного метода для замкнутых поверхностей с помощью периодических В-сплайн поверхностей не представляет труда. Обсуждение ограничивается топологически прямоугольными сетками, т. е. данные умозрительно могут быть представлены как находящиеся в точках пересечения прямоугольной решетки. Эта задача схематично изображена на рис. 49, где показана задающая полигональная сетка размера 4×4 для матрицы данных 8×8 .

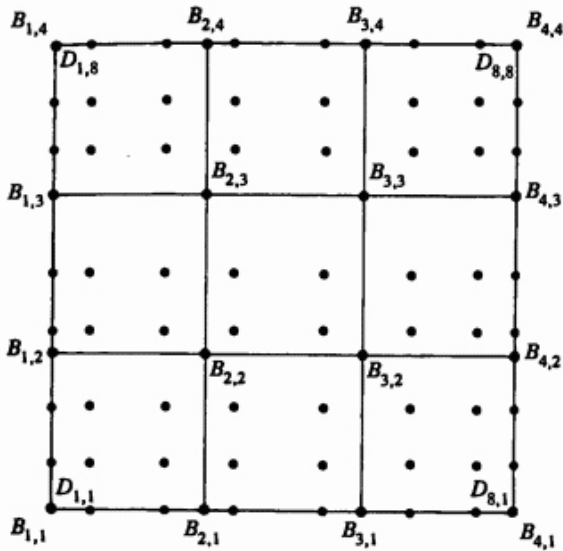


Рис. 49. Определение В-сплайн поверхности по известному набору данных.

Для того чтобы повысить эффективность вычислений, в ряде работ были использованы известные свойства бикубических В-сплайн поверхностей. Применяемый нами метод более прямолинеен, но имеет меньшую вычислительную эффективность. Вспомним уравнение (70) и

заметим, что $Q(u, \omega)$ в этом уравнении являются известными точками на поверхности. Базисные функции $N_{i,k}(u)$ и $M_{j,l}(\omega)$ могут быть определены для известного порядка и известного числа вершин задающей полигональной сетки в каждом параметрическом направлении при условии, что известны значения параметров u, ω в исходных точках. Следовательно, для каждой известной точки поверхности уравнение (70) дает линейное уравнение от неизвестных вершин B_{ij} задающей полигональной сетки. В результате расписывания уравнения (70) для исходной точки поверхности получим

$$D_{1,1}(u_1, \omega_1) =$$

$$N_{1,k}(u_1) [M_{1,l}(\omega_1) B_{1,1} + M_{2,l}(\omega_1) B_{1,2} + \dots + M_{m+1,l}(\omega_1) B_{1,m+1}] +$$

$$\vdots$$

$$N_{n+1,k}(u_1) [M_{1,l}(\omega_1) B_{n+1,1} + M_{2,l}(\omega_1) B_{n+1,2} + \dots + M_{m+1,l}(\omega_1) B_{n+1,m+1}],$$

где для топологически прямоугольного множества $r \times s$ данных выполняются неравенства $2 \leq k \leq n+1 \leq r$ и $2 \leq l \leq m+1 \leq s$. Записав уравнения такого вида для всех исходных точек, мы получим систему уравнений. В матричном виде данный результат записывается так:

$$[D] = [C][B], \tag{82}$$

где $C_{i,j} = N_{i,k} M_{j,l}$. Для топологически прямоугольных исходных данных размера $r \times s$ матрица $[D]$ является матрицей $r * s \times 3$,

содержащей трехмерные координаты исходных точек, $[C]$ является матрицей $r * s \times n * m$ трехмерных координат искомым точек полигональной сетки.

Если матрица $[C]$ квадратная, то задающая полигональная сетка находится с помощью обращения матрицы, т.е.

$$[B] = [C]^{-1} [D]. \quad (83)$$

В этом случае получившаяся поверхность проходит через все исходные точки. Хотя эта поверхность будет везде C^{k-2} , C^{l-2} гладка, но она может быть неприемлема с точки зрения пользователя.

Опыт показывает, что в общем случае, чем меньше точек задающей полигональной сетки, тем лучше выглядит поверхность.

Если $[C]$ не квадратная, то мы имеем избыточное количество исходных данных и решение может быть получено в некотором усредненном смысле. В частности, решение может быть получено в виде

$$[B] = \left[[C]^T [C] \right]^{-1} [C]^T [D]. \quad (84)$$

Параметрические значения u и w для каждой исходной точки поверхности получаются с помощью аппроксимации длины хорды. Конкретнее, для r исходных точек значение параметра в l -й точке в параметрическом направлении u равно

$$u_1 = 0 \quad \frac{u_1}{u_{\max}} = \frac{\sum_{g=2}^l |D_{g,s} - D_{g-1,s}|}{\sum_{g=2}^r |D_{g,s} - D_{g-1,s}|}$$

Аналогично для s исходных точек в параметрическом направлении ω

$$\omega_1 = 0 \quad \frac{\omega_1}{\omega_{\max}} = \frac{\sum_{g=2}^l |D_{r,g} - D_{r,g-1}|}{\sum_{g=2}^s |D_{r,g} - D_{r,g-1}|}$$

где u_{\max} и ω_{\max} являются максимальными значениями соответствующих узловых векторов. На рис. 50а показаны исходные данные и задающая полигональная сетка, сгенерированная с помощью данного метода. На рис. 50b изображена В-сплайн поверхность, созданная по этой сетке.

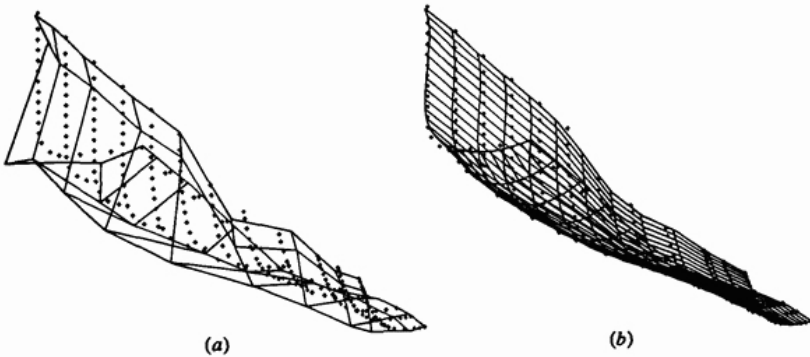


Рис. 50 Интерполяция В-сплайн поверхностью. (а) Исходные точки и интерполирующий характеристический многогранник; (б) исходные точки и сгенерированная поверхность.

Как было ранее отмечено для интерполяции с помощью В-сплайн кривой, ни данный, ни указанный в литературе методы не могут привести к появлению точек или линий складок (разрывов первой или второй производной) в получаемой поверхности.

Отметим из рис. 50, что вершины задающей полигональной сетки, полученные из уравнения (84), расположены произвольным образом в пространстве. Это неудобно, если в дальнейшем поверхность предполагается модифицировать. В ряде работ разработан итерационный метод, основанный на параметрических значениях u , v , в результате которого вершины сетки располагаются на плоскостях или вдоль кривых в трехмерном пространстве.

6.14. РАЗБИЕНИЕ В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТЕЙ

В-сплайн поверхность разбивается с помощью отдельного разбиения каждой линии задающей полигональной сетки в одном или обоих параметрических направлениях. Может использоваться любой из методов разбиения В-сплайн кривой. Лучше всего продемонстрировать это на примере.

Пример 16. Разбиение незамкнутой В-сплайн поверхности

Рассмотрим незамкнутую В-сплайн поверхность, заданную полигональной сеткой размера 4×4 :

$$B_{1,1}[-15 \ 0 \ 15] \qquad B_{2,1}[-5 \ 5 \ 15]$$

$$B_{3,1}[5 \ 5 \ 15] \qquad B_{4,1}[15 \ 0 \ 15],$$

$$B_{1,2}[-15 \ 5 \ 5] \qquad B_{2,2}[-5 \ 10 \ 5]$$

$$B_{3,2}[5 \ 10 \ 5] \qquad B_{4,2}[15 \ 5 \ 5],$$

$$B_{1,3}[-15 \ 5 \ -5] \qquad B_{2,3}[-5 \ 10 \ -5]$$

$$B_{3,3}[5 \ 10 \ -5] \qquad B_{4,3}[15 \ 5 \ -5],$$

$$B_{1,4}[-15 \ 0 \ -15] \qquad B_{2,4}[-5 \ 5 \ -15]$$

$$B_{3,4}[5 \ 5 \ -15] \qquad B_{4,4}[15 \ 0 \ -15].$$

Это поверхность четвертого порядка в обоих параметрических направлениях ($k=l=4$), состоящая из одного куска с диапазонами параметров $0 \leq u \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 1$. Требуется разбить поверхность на 4 подкуски. Следует сохранять однородный незамкнутый узловый вектор.

Вспомним узловый вектор $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$; для обоих параметрических направлений, найденных в разд. 3 и примере 18 п.3,

репараметризуем этот вектор в $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$, тогда поверхность разбивается с помощью вставки узлового значения 1 в интервале $0 \rightarrow 2$. Таким образом, новый узловый вектор задается

координатами $[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2]$. Применив уравнения (119) и (120) п.3 к каждой линии сетки в обоих направлениях, получим сетку для разбитой на 4 куска поверхности. Например, рассмотрим разбиение линии сетки в направлении φ , заданной $B_{1,j}, 1 \leq j \leq 4$. Здесь только

$$\alpha'_{4,1} = \alpha'_{4,2} = \alpha'_{4,3} = \alpha'_{4,4} = \alpha'_{4,5} = 1$$

не равны нулю.

Воспользовавшись уравнениями (120) п.3, получим

$$\alpha_{3,1}^2 = \alpha_{3,2}^2 = \alpha_{3,3}^2 = \alpha_{3,5}^2 = 1, \quad \alpha_{3,4}^2 = \alpha_{4,4}^2 = 1/2,$$

$$\alpha_{2,1}^3 = \alpha_{2,2}^3 = \alpha_{3,5}^3 = 1, \quad \alpha_{2,3}^3 = \alpha_{3,3}^3 = \alpha_{3,4}^3 = \alpha_{4,4}^3 = 1/2,$$

$$\alpha_{1,1}^4 = \alpha_{3,5}^4 = 1, \quad \alpha_{1,2}^4 = \alpha_{2,2}^4 = \alpha_{2,3}^4 = \alpha_{3,3}^4 = \alpha_{3,4}^4 = \alpha_{4,4}^4 = 1/2.$$

Тогда из уравнения (119) п.3 получим вершины нового характеристического многогранника. В частности,

$$\begin{aligned} C_{1,1} &= \alpha_{1,1}^4 B_{1,1} + \alpha_{2,1}^4 B_{1,2} + \alpha_{3,1}^4 B_{1,3} + \alpha_{4,1}^4 B_{1,4} = \\ &= B_{1,1} = [-15 \quad 0 \quad 15], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,2} &= \alpha_{1,2}^4 B_{1,1} + \alpha_{2,2}^4 B_{1,2} + \alpha_{3,2}^4 B_{1,3} + \alpha_{4,2}^4 B_{1,4} = \\ &= \frac{1}{2}(B_{1,1} + B_{1,2}) = [-15 \quad 2.5 \quad 10], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,3} &= \alpha_{1,3}^4 B_{1,1} + \alpha_{2,3}^4 B_{1,2} + \alpha_{3,3}^4 B_{1,3} + \alpha_{4,3}^4 B_{1,4} = \\ &= \frac{1}{2}(B_{1,2} + B_{1,3}) = [-15 \quad 5 \quad 0], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1,4} &= \alpha_{1,4}^4 B_{1,1} + \alpha_{2,4}^4 B_{1,2} + \alpha_{3,4}^4 B_{1,3} + \alpha_{4,4}^4 B_{1,4} = \\ &= \frac{1}{2}(B_{1,3} + B_{1,4}) = [-15 \quad 2.5 \quad -10], \end{aligned}$$

$$C_{1,5} = \alpha_{1,5}^4 B_{1,1} + \alpha_{2,5}^4 B_{1,2} + \alpha_{3,5}^4 B_{1,3} + \alpha_{4,5}^4 B_{1,4} =$$

$$= B_{1,4} = [-15 \quad 0 \quad -15]$$

Выполнив ту же операцию для каждой линии сетки в направлении ω , мы получим задающую полигональную сетку размера 4×5 для поверхности, состоящей из двух подкусков в направлении ω и одного в направлении \mathcal{U}

$$\begin{array}{ll} C_{1,1}[-15 \quad 0 \quad 15] & C_{2,1}[-5 \quad 5 \quad 15] \\ C_{3,1}[5 \quad 5 \quad 15] & C_{4,1}[15 \quad 0 \quad 15] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_{1,2}[-15 \quad 2.5 \quad 10] & C_{2,2}[-5 \quad 7.5 \quad 10] \\ C_{3,2}[5 \quad 7.5 \quad 10] & C_{4,2}[15 \quad 2.5 \quad 10] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_{1,3}[-15 \quad 5 \quad 0] & C_{2,3}[-5 \quad 10 \quad 0] \\ C_{3,3}[5 \quad 10 \quad 0] & C_{4,3}[15 \quad 5 \quad 0] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_{1,4}[-15 \quad 2.5 \quad -10] & C_{2,4}[-5 \quad 7.5 \quad -10] \\ C_{3,4}[5 \quad 7.5 \quad -10] & C_{4,4}[15 \quad 2.5 \quad -10] \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} C_{1,5}[-15 \quad 0 \quad -15] & C_{2,5}[-5 \quad 5 \quad -15] \\ C_{3,5}[5 \quad 5 \quad -15] & C_{4,5}[15 \quad 0 \quad -15] \end{array}$$

Элементы $\alpha_{i,j}^k$, приведенные выше, применяются также при разбиении поверхности в направлении \mathcal{U} . В этом случае задающая полигональная сетка размера 5×4 такова:

$$C_{1,1}[-15 \ 0 \ 15]$$

$$C_{2,1}[-10 \ 2.5 \ 15]$$

$$C_{1,2}[-15 \ 5 \ 5]$$

$$C_{2,2}[-10 \ 7.5 \ 5]$$

$$C_{1,3}[-15 \ 5 \ -5]$$

$$C_{2,3}[-10 \ 7.5 \ -5]$$

$$C_{1,4}[-15 \ 0 \ -15]$$

$$C_{2,4}[-10 \ 2.5 \ -15]$$

$$C_{3,1}[0 \ 5 \ 15]$$

$$C_{4,1}[10 \ 2.5 \ 15]$$

$$C_{5,1}[15 \ 0 \ 15]$$

$$C_{3,2}[0 \ 10 \ 5]$$

$$C_{4,2}[10 \ 7.5 \ 5]$$

$$C_{5,2}[15 \ 5 \ 5]$$

$$C_{3,3}[0 \ 10 \ 5]$$

$$C_{4,3}[10 \ 7.5 \ -5]$$

$$C_{5,3}[15 \ 5 \ -5]$$

$$C_{3,4}[0 \ 5 \ -15]$$

$$C_{4,4}[10 \ 2.5 \ -15]$$

$$C_{5,4}[15 \ 0 \ -15]$$

Здесь поверхность состоит из двух подкусков в направлении \mathcal{U} и одного в направлении \mathcal{W} .

Разбиение поверхности как в \mathcal{U} , так и в \mathcal{W} направлениях приведет в результате к задающей полигональной сетке размера 5×5 , заданной в виде

$C_{1,1}[-15 \ 0 \ 15]$	$C_{2,1}[-10 \ 2.5 \ 15]$
$C_{1,2}[-15 \ 2.5 \ 10]$	$C_{2,2}[-10 \ 5 \ 10]$
$C_{1,3}[-15 \ 5 \ 0]$	$C_{2,3}[-10 \ 7.5 \ 0]$
$C_{1,4}[-15 \ 2.5 \ -10]$	$C_{2,4}[-10 \ 5 \ -10]$
$C_{1,5}[-15 \ 0 \ -15]$	$C_{2,5}[-10 \ 2.5 \ -15]$
$C_{3,1}[0 \ 5 \ 15]$	$C_{4,1}[10 \ 2.5 \ 15]$
$C_{5,1}[15 \ 0 \ 15]$	
$C_{3,2}[0 \ 7.5 \ 10]$	$C_{4,2}[10 \ 5 \ 10]$
$C_{5,2}[15 \ 2.5 \ 10]$	
$C_{3,3}[0 \ 10 \ 0]$	$C_{4,3}[10 \ 7.5 \ 0]$
$C_{5,3}[15 \ 5 \ 0]$	
$C_{3,4}[0 \ 7.5 \ -10]$	$C_{4,4}[10 \ 5 \ -10]$
$C_{5,4}[15 \ 2.5 \ -10]$	
$C_{3,5}[0 \ 5 \ -15]$	$C_{4,5}[10 \ 2.5 \ -15]$
$C_{5,5}[15 \ 0 \ -15]$	

Заметим, что последняя сетка получается из первой или второй с

помощью уравнений (119) и (120) п.3. Исходная поверхность и все три полученные при ее разбиении сетки изображены на рис. 51.

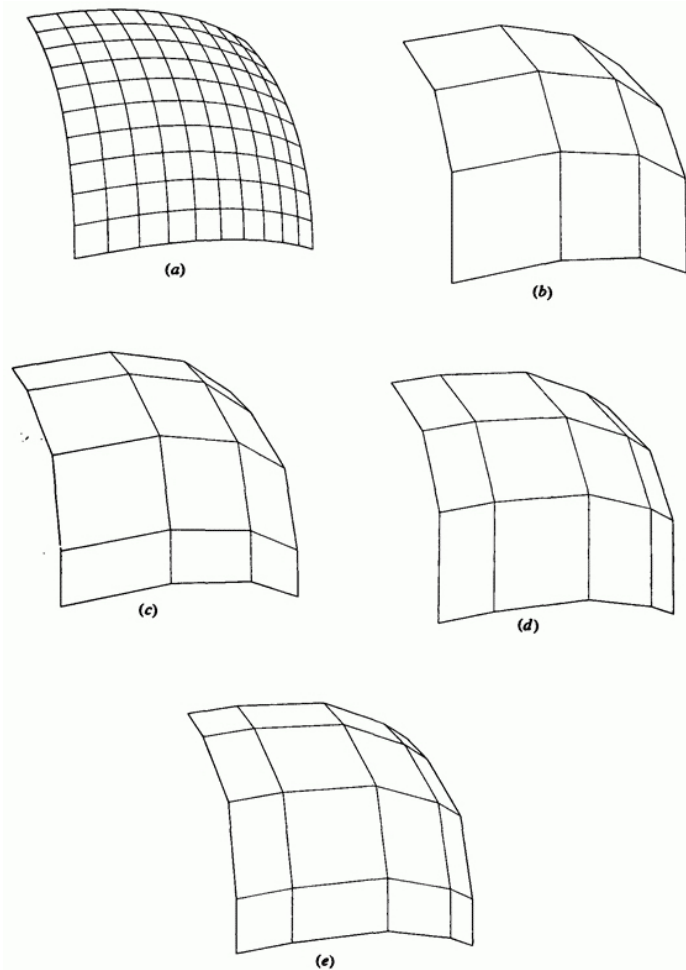


Рис. 51. Разбиение В-сплайн поверхности. (а) Поверхность; (б) исходная задающая полигональная сетка; (с) сетка, разбитая в \mathbb{R}^1 направлении; (d) сетка, разбитая в \mathbb{R}^2 направлении; (e) сетка, разбитая в обоих направлениях.

Каждая из поверхностей идентична исходной.

Ясно, что при дальнейшем разбиении поверхности задающая полигональная сетка приближается к поверхности.

6.15. ГАУССОВА КРИВИЗНА И КАЧЕСТВО ПОВЕРХНОСТИ

В автоматизированном проектировании большой интерес представляет разработка соответствующих методов для определения и/или визуализации качества или гладкости поверхностей. Хорошо известно, что используемые обычно бикубические поверхности (Кунса, Безье или В-сплайн), хотя и являются во всех точках C^2 гладкими, в некоторых местах могут быть плоскими или выпуклыми либо волнистыми. Самые лучшие математические методы определения качества поверхности используют Эйлеровы (ортогональные) сетки минимальной и максимальной кривизны и гауссовой кривизны.

Вспомним (разд. 6.8), что две комбинации главных кривизн, называемые средней и гауссовой (общей) кривизнами, характеризуют локальную форму поверхности. Средняя кривизна определяется как

$$\kappa_a = \frac{\kappa_{\min} + \kappa_{\max}}{2} . \quad (45)$$

Гауссова кривизна определяется как

$$\kappa_g = \kappa_{\min} \cdot \kappa_{\max} , \quad (46)$$

где κ_{\min} и κ_{\max} являются главными кривизнами. Гауссова кривизна в точке на поверхности показывает, является ли поверхность локально эллиптической, гиперболической или параболической (гауссова кривизна положительна, отрицательна или равна нулю).

Интересно отметить здесь, что если гауссова кривизна равна нулю, то поверхность является развертывающейся, т.е. она может быть развернута в плоскость. Такая поверхность изогнута в одном направлении, например, конус или цилиндр. Это подразумевает, что одна из главных кривизн, κ_{\min} и κ_{\max} равна нулю. Следовательно, равна нулю и гауссова кривизна.

Существуют несколько методов визуализации средней и гауссовой кривизн поверхности. Если изобразительные возможности ограничены рисованием отрезков, то наиболее полезны контурные чертежи. В ряде работ показано, что эффективным методом этого является кодирование гауссовой кривизны на растровом изображении с помощью цветов или набора полутонов серого цвета.

На рис. 52 показаны закодированные с помощью полутонов серого цвета изображения гауссовой кривизны для нескольких тестовых поверхностей вместе с соответствующим характеристическим многогранником (слева) и проволочным параметрическим представлением поверхностей (посередине). Все поверхности являются бикубическими $(k = l = 4)$ В-сплайн поверхностями.

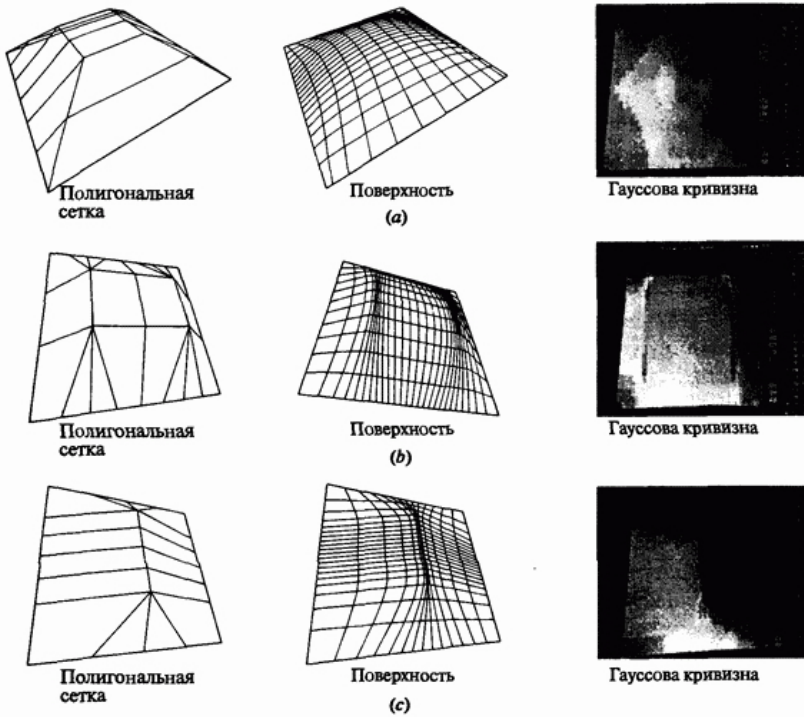


Рис. 52. Гауссова кривизна. (а) Гладкая поверхность; (б) короткая линия «складки»; (с) более длинная линия «складки».

На рис. 52 изображены три поверхности по мере увеличения степени нарушения их гладкости. На рис. 52а представлена совершенно гладкая поверхность, без изъянов. Два ярко выраженных гребня уменьшенной гладкости на рис. 52b вызваны совпадением на каждой стороне трех линий полигональной сетки. На рис. 52с удлиненная линия «складки» в середине поверхности получилась из-за совпадения трех линий полигональной сетки на участке, пересекающем несколько внутренних линий сетки, что показано на характеристическом многограннике.

Вообще, изображения закодированной гауссовой кривизны более наглядно показывают свойства поверхностей. Например, рисунки 52а и б демонстрируют большое отрицательное значение кривизны в угловых точках. Эта отрицательная кривизна является результатом ограничений на границы поверхности - они должны быть прямыми и

плоскими, тогда как внутренняя область выпукла и положительно изогнута. Закодированное изображение гауссовой кривизны на рис. 52b подчеркивает уплощение области, расположенной между гребнями. Отметим, что, так как гауссова кривизна равна нулю в этой области, то эта часть поверхности является разворачивающейся. Отметим также, что задающая полигональная сетка в этой области является разворачивающейся. И наконец, полоса поперек середины закодированного изображения на рис. 52c показывает, что поверхность в этой области представляет собой плоскость, согнутую посередине. Тот факт, что сгиб является прямой линией, объясняет исчезновение гауссовой кривизны вдоль этой линии.

Метод вычисления гауссовой кривизны будет проиллюстрирован на примере.

Пример 17. Гауссова кривизна

Найти гауссову кривизну в точке с параметрами $u = 1/2$, $w = 1$ для незамкнутой В-сплайн поверхности, определенной ранее в примере 15.

Вспомним сначала базисные функции $N_{i,4}$ и $M_{j,1}$ из примера 15. По этим данным можно вычислить первую и вторую производные, необходимые для нахождения Q_u , Q_w , Q_{uw} , Q_{uu} и Q_{ww} , и последующего вычисления гауссовой кривизны. А именно

$$N_{1,4} = (1-u)^3 \qquad M_{1,4}^r = -3(1-u)^2$$

$$M_{1,4}^{r'} = 6(1-u)$$

$$N_{2,4} = 3u(1-u)^2 \qquad M_{2,4}^r = 3(1-u)(1-3u)$$

$$M_{2,4}^{r'} = 6(3u-2)$$

$$N_{3,4} = 3u^2(1-u) \qquad M_{3,4}^r = 3u(2-3u)$$

$$N'_{3,4} = 6(1 - 3u)$$

$$N_{4,4} = u^3$$

$$N''_{4,4} = 3u^2$$

$$N'''_{4,4} = 6u$$

и

$$M_{1,3} = 0$$

$$M'_{1,3} = 0$$

$$M''_{1,3} = 0$$

$$M_{2,3} = \frac{(2 - \varpi)^2}{2}$$

$$M'_{2,3} = \varpi - 2$$

$$M''_{2,3} = 1$$

$$M_{3,3} = \frac{(2 - \varpi)(3\varpi - 2)}{2}$$

$$M'_{3,3} = 4 - 3\varpi$$

$$M''_{3,3} = -3$$

$$M_{4,3} = (\varpi - 1)^2$$

$$M'_{4,3} = 2(\varpi - 1)$$

$$M''_{4,3} = 2$$

Вычисление производных в точке $u = 1/2$, $\varpi = 1$ и подстановка в уравнения (71)-(75) приводит к следующим результатам:

$$Q(1/2, 1) = [0 \quad 35/4 \quad 0],$$

$$Q_u(1/2, 1) = [30 \quad 0 \quad 0],$$

$$Q_\varpi(1/2, 1) = [0 \quad 0 \quad 10],$$

$$Q_{\omega\omega}(1/2,1)=[0 \ 0 \ 0],$$

$$Q_{uu}(1/2,1)=[0 \ -30 \ 0],$$

$$Q_{\omega\omega}(1/2,1)=[0 \ -10 \ 10].$$

Компоненты уравнения (48) для гауссовой кривизны таковы:

$$Q_u \times Q_\omega = [30 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ 10] = [0 \ -300 \ 0]$$

$$|Q_u \times Q_\omega|^4 = (300)^4$$

$$A = [Q_u \times Q_\omega] \cdot Q_{uu} = [0 \ -300 \ 0] \cdot [0 \ -30 \ 0] = 9000$$

$$B = [Q_u \times Q_\omega] \cdot Q_{\omega\omega} = [0 \ -300 \ 0] \cdot [0 \ 0 \ 0] = 0$$

$$C = [Q_u \times Q_\omega] \cdot Q_{\omega\omega} = [0 \ -300 \ 0] \cdot [0 \ -10 \ 10] = 3000$$

Используя уравнение (48), получим гауссову кривизну

$$\kappa_g = \frac{AC - B}{|Q_u \times Q_\omega|^4} = \frac{(9000)(3000) - (0)}{(300)^4} = 3.33 \times 10^{-3}$$

Так как $\kappa_g > 0$, то поверхность является локально эллиптической.

6.16. РАЦИОНАЛЬНЫЕ В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТИ

Так же как и для рациональных кривых, возможно существование рациональных форм квадратичных поверхностей, бикубических поверхностей Кунса и поверхностей Безье. Однако здесь будут рассмотрены только рациональные В-сплайн поверхности, как из-за нехватки места, так и в связи с тем, что такие поверхности являются обобщением всех этих форм.

Декартово произведение рациональной В-сплайн поверхности в четырехмерном пространстве однородных координат задается формулой

$$Q(u, \varpi) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j}^h N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi) \quad , \quad (85)$$

где $B_{i,j}^h$ являются 4D однородными вершинами характеристического многогранника, а $N_{i,k}(u)$ и $M_{j,l}(\varpi)$ являются нерациональными В-сплайн базисными функциями, приведенными ранее в уравнении (84) п.3.

Проецирование обратно в трехмерное пространство с помощью деления на однородную координату дает рациональную В-сплайн поверхность

$$Q(u, \varpi) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi)} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, \varpi) \quad , \quad (86)$$

где $B_{i,j}^h$ являются 3D-точками задающей полигональной сетки и $S_{i,j}(u, \varpi)$ - базисными функциями от двух переменных рациональной В-сплайн поверхности

$$S_{i,j}(u, \varpi) = \frac{h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi)}{\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi)} \quad (87)$$

Удобно положить $h_{i,j} \geq 0$ для всех i, j .

Важно отметить здесь, что $S_{i,j}(u, \varpi)$ не являются произведением $R_{i,k}(u)$ и $R_{j,l}(\varpi)$ (см. уравнение 123 п.3). Тем не менее $S_{i,j}(u, \varpi)$ имеют форму и аналитические свойства, похожие на

функцию произведения $N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varpi)$. Следовательно, рациональные В-сплайн поверхности имеют аналитические и геометрические свойства, похожие на их нерациональные двойники. Конкретнее, сумма базисных функций рациональной поверхности для любых значений u, ϖ равна

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} S_{i,j}(u, \varpi) \equiv 1 \quad (88)$$

Каждая базисная функция рациональной поверхности положительна или равна нулю для всех значений параметров u, ϖ , т. е. $S_{i,j} \geq 0$.

Кроме случая $k=1$ или $l=1$, каждая базисная функция рациональной поверхности имеет ровно один максимум.

Максимальный порядок рациональной В-сплайн поверхности в каждом параметрическом направлении равен числу вершин характеристического многогранника в этом направлении.

Рациональная В-сплайн поверхность порядка k, l (степени $k-1, l-1$) гладкая во всех точках C^{k-2}, C^{l-2} .

Рациональная В-сплайн поверхность инвариантна относительно проективного преобразования; т.е. любое проективное преобразование может быть применено к поверхности путем его применения к задающей полигональной сетке. Отметим, что это условие является более строгим, чем для нерациональной В-сплайн поверхности.

Поверхность лежит внутри выпуклой оболочки задающей полигональной сетки, образуемой объединением всех выпуклых оболочек k, l соседних вершин полигональной сетки.

Свойство затухания изменений для рациональных В-сплайн поверхностей неизвестно.

Влияние одной вершины полигональной сетки ограничивается $\pm k/2$, $\pm l/2$ интервалами в каждом параметрическом направлении.

При триангуляции задающая полигональная сетка образует плоскую аппроксимацию поверхности.

Если число вершин задающей полигональной сетки равно порядку в каждом параметрическом направлении и дублированных внутренних узловых величин нет, то рациональная В-сплайн поверхность является рациональной поверхностью Безье.

Из уравнений (86) и (87) ясно, что когда все $k_{i,j} = 1$, тогда $S_{i,j}(u, \varphi) = N_{i,k}(u) M_{j,l}(\varphi)$. Таким образом, базисные функции рациональной В-сплайн поверхности и сами поверхности превращаются в их нерациональные эквиваленты. Следовательно,

рациональные В-сплайн поверхности представляют соответственно обобщение нерациональных В-сплайн поверхностей и рациональных и нерациональных поверхностей Безье.

Снова, как и в случае рациональных В-сплайн кривых, алгоритмы для увеличения степени, разбиения (см. разд. 6.4) и интерполяции (см. разд. 6.13) нерациональных В-сплайн поверхностей можно применять просто путем их использования для 4D-вершин задающей полигональной сетки.

Незамкнутый однородный, периодический однородный и неоднородный узловой векторы могут быть использованы для генерации рациональных В-сплайн базисных функций и рациональных В-сплайн поверхностей. Типы узловых векторов могут смешиваться. Например, в параметрическом \mathcal{U} -направлении может использоваться незамкнутый однородный узловой вектор, а в \mathcal{V} -направлении - неоднородный узловой вектор. Сначала мы остановимся на незамкнутых однородных узловых векторах.

На рис. 6.53 представлены бикубическая $(k=l=4)$ рациональная В-сплайн поверхность и ее задающая полигональная сетка для $h_{1,3} = h_{2,3} = 0,1,5$.

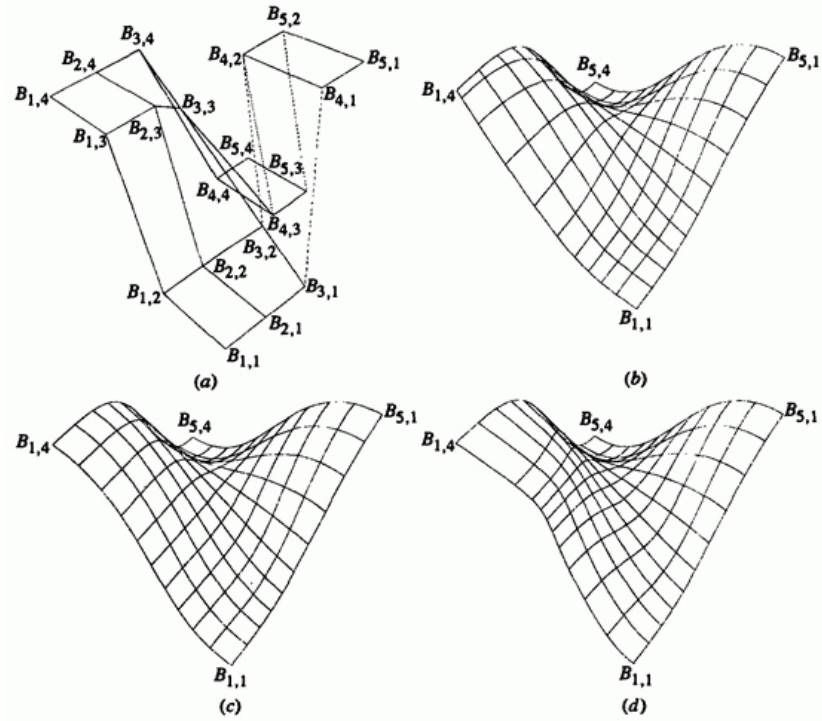


Рис. 53. Рациональные В-сплайн поверхности с $n + 1 = 5$, $m + 1 = 4$, $k = l = 4$. (a) Характеристический многогранник; (b) $h_{1,3} = h_{2,3} = 0$; (c) $h_{1,3} = h_{2,3} = 1$; (d) $h_{1,3} = h_{2,3} = 5$.

Изображение на рис. 53с с $h_{1,3} = h_{2,3} = 1$ идентично нерациональной В-сплайн поверхности. Результаты варьирования значений однородной координаты можно заметить, сравнивая рис. 53с с рис. 53b и d. Эти результаты аналогичны полученным для рациональных В-сплайн кривых (см. разд. 3.13), но проявляются не в столь сильной степени. В

данном случае уменьшение эффекта обусловлено тем, что $S_{i,j}(u, \omega)$ является функцией смешения от двух переменных.

На рис. 54а и б иллюстрируется результат, полученный при присвоении всем внутренним $h_{i,j}$ значений 0 и 500, соответственно; т. е. $h_{2,2} = h_{2,3} = h_{3,2} = h_{3,3} = h_{4,2} = h_{4,3} = 0$ или 500.

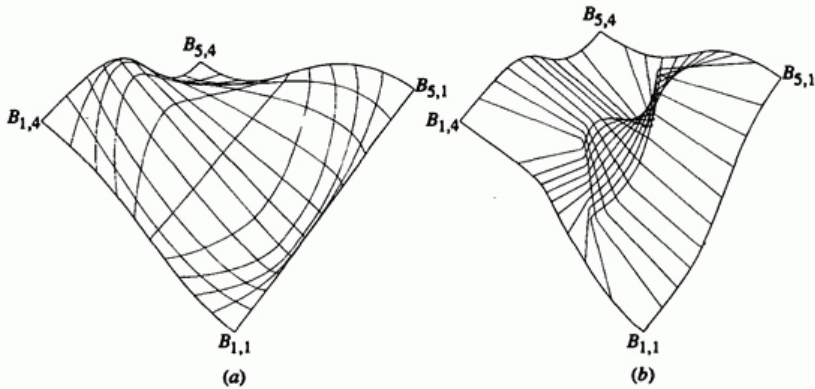


Рис. 54. Рациональные В-сплайн поверхности с $n+1=5$, $m+1=4$, $k+l=4$. (а) Все внутренние $h_{i,j} - e = 0$; (б) все внутренние $h_{i,j} - e = 500$

Все остальные $h_{i,j} = 1$. Характеристический многогранник изображен на рис. 53а. Установка всех внутренних $h_{i,j} = 0$ приводит к игнорированию внутренних вершин характеристического многогранника. Интерполируются только вершины граничных кривых. Напротив, присвоение всем внутренним $h_{i,j} = 500$ сводит к минимуму влияние граничных вершин. Заметим, что изменение $h_{i,j}$ влияет на параметризацию поверхности. Это иллюстрируется скоплением параметрических линий около границ поверхности, когда внутренние $h_{i,j} = 0$ (см. рис. 54а), и во внутренней части поверхности, когда внутренние $h_{i,j} = 500$ (см. рис. 54б).

Результаты, возникающие при совпадении нескольких вершин или линий сетки аналогичны результатам, полученным для нерациональных В-сплайн поверхностей (см. разд. 6.12) и рациональных В-сплайн кривых (см. разд. 3.13). Также аналогичны результаты смещения одной вершины на поверхности.

Одним из самых привлекательных свойств рациональных В-сплайн поверхностей является их способность представлять квадратичные поверхности и плавно переходить в скульптурные поверхности высоких степеней. В качестве простого примера квадратичной поверхности рассмотрим обобщенный цилиндр, образуемый заметанием кривой. Ясно, что в направлении заметания такая поверхность должна быть второго порядка, т. е. прямой линией. Следовательно, для заметаемой в направлении и поверхности формула выглядит следующим образом:

$$Q(u, \omega) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, \omega), \quad (89)$$

где $S_{i,j}(u, \omega)$ имеет в параметрическом направлении ω тот же порядок, что и кривая, и порядок 2 в направлении u . Кроме того, вершины характеристического многогранника в направлении u равны $B_{1,j} = B_j$ и $B_{2,j} = B_i + sD$, где D задает направление и расстояние заметания. Параметр s изменяется в диапазоне $0 \leq s \leq 1$. Элементы B_j являются вершинами задающего многоугольника для заметающей кривой. Однородные координаты остаются неизменными в направлении заметания; т.е. $h_{1,j} = h_{2,j} = h_j$, где h_j - это однородная координата для заметаемой кривой. На рис. 55 изображен эллиптический цилиндр, образованный с использованием эллиптической кривой, представленной на рис. 67b п.3. С каждой стороны поверхности показана отодвинутая заметаемая кривая.

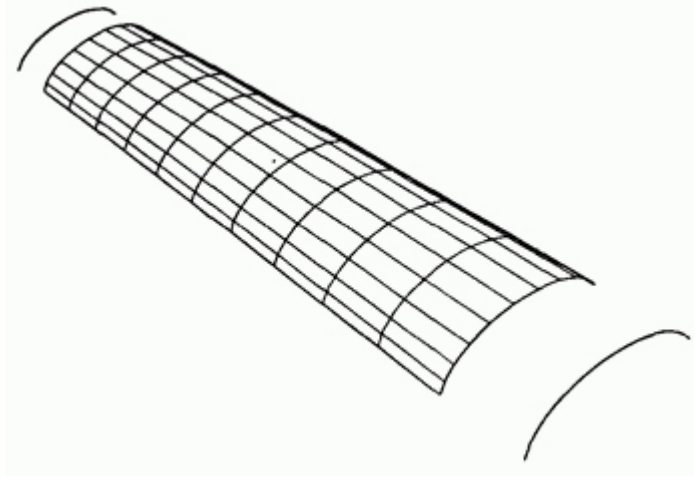


Рис. 55. Рациональный В-сплайн эллиптический цилиндр, сгенерированный заметанием рациональной эллиптической кривой на рис. 67b п.3.

Рациональные В-сплайн поверхности используются также для создания линейчатых поверхностей. Эллиптический цилиндр, изображенный на рис. 55, является, конечно, линейчатой поверхностью. Для генерации с помощью рациональных В-сплайнов линейчатой поверхности более общего вида требуется, чтобы обе кривые имели одинаковый порядок (степень), одинаковый узловой вектор и одинаковое число вершин задающего многоугольника.

Если кривые имеют разный порядок (степень), то степень кривой меньшего порядка увеличивают (и пример 18). Требуемый узловой вектор является объединением узловых векторов двух кривых. Любые кратные узловые значения для любой кривой включаются в окончательный узловой вектор. Для обеспечения идентичности обоих узловых векторов используется вставка узлов. Увеличение степени и вставка узлов обеспечивают равенство числа вершин характеристического многоугольника для обеих кривых. Получающаяся рациональная В-сплайн линейчатая поверхность описывается уравнением (89) с

$$R_1(\varphi) = Q(0, \varphi) = \sum_{j=1}^{m+1} B_{1,j} R_{j,1}(\varphi)$$

и

$$R_2(\varphi) = \sum_{j=1}^{m+1} B_{2,j} R_{j,1}(\varphi) = Q(1, \varphi)$$

На рис. 56 показан пример линейчатой поверхности, переводящей четверть окружности в рациональную В-сплайн кривую четвертого порядка.

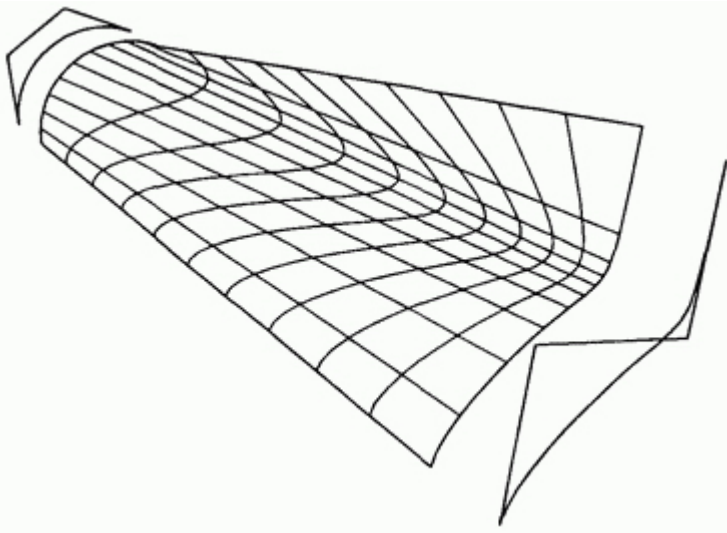


Рис. 56. Рациональная В-сплайн линейчатая поверхность.

Кривые и их характеристические многоугольники изображены отодвинутыми от края поверхности. Данный метод лучше проиллюстрировать на примере.

Пример 18. Рациональные В-сплайн линейчатые поверхности

Найти точку с параметрами $u = \varphi = 0.5$ на линейчатой поверхности,

образованной смещением 120° дуги окружности и рациональной кривой четвертого порядка. Дуга окружности представляется рациональной В-сплайн кривой, заданной $B_{1,1}[0 \ 0 \ 0]$, $B_{1,2}[1 \ \sqrt{3} \ 0]$, $B_{1,3}[2 \ 0 \ 0]$ и $[H]=[1 \ 1/2 \ 1]$. Вторая кривая определяется $B_{2,1}[0 \ 0 \ 10]$, $B_{2,2}[1 \ 1 \ 10]$, $B_{3,2}[2 \ 0 \ 10]$, $B_{4,2}[3 \ 1 \ 10]$ $[H]=[1 \ 3/4 \ 5 \ 1]$.

Сначала необходимо увеличить степень дуги окружности. В действительности дуга является рациональной кривой Безье. Обсуждавшийся ранее метод увеличения степени в рациональном случае применяется к 4D однородным координатам. В результате получаем:

$$B_1^{h*} = B_1^h,$$

$$B_i^{h*} = \alpha_i B_{i-1}^h + (1 - \alpha_i) B_i^h \quad \alpha_i = \frac{1}{n+1} \quad i = 2, \dots, n,$$

$$B_{n+1}^{h*} = B_n^h$$

После проецирования обратно в трехмерное пространство имеем:

$$B_1^* = B_1,$$

$$B_i^* = \frac{\alpha_i h_{i-1} B_{i-1} + (1 - \alpha_i) h_i B_i}{\alpha_i h_{i-1} + (1 - \alpha_i) h_i} \quad i = 2, \dots, n,$$

$$h_i^* = \alpha_i h_{i-1} + (1 - \alpha_i) h_i.$$

Использование данных результатов для увеличения степени 120° дуги приведет к

$$h_{1,1}^* = h_{1,1} = 1,$$

$$B_{1,1}^* = B_{1,1} = [0 \quad 0 \quad 0],$$

$$h_{1,2}^* = \left(\frac{1}{3}\right)(1) + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3},$$

$$B_{1,2}^* = \left\{ \frac{1}{3}(1)[0 \quad 0 \quad 0] + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)[1 \quad \sqrt{3} \quad 0] \right\} / \left(\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0 \right],$$

$$h_{1,3}^* = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)(1) = \frac{2}{3},$$

$$B_{1,3}^* = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)[1 \quad \sqrt{3} \quad 0] + \frac{1}{3}(1)[2 \quad 0 \quad 0] \right\} / \left(\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{3}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 0 \right],$$

$$h_{1,4}^* = h_{1,3} = 1,$$

$$B_{1,4}^* = B_{1,3} = [2 \quad 0 \quad 0].$$

Теперь каждая кривая имеет четыре вершины характеристического многоугольника. Узловой вектор для каждой кривой равен $[X] = [Y] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$. Следовательно, включение

узлов применять не нужно.

Для $u = \varpi = 0.5$ из уравнения (84) п.3 получим

$$\begin{aligned} M_{1,2} &= 0.5; & N_{2,2} &= 0.5; \\ M_{1,4} &= 0.125; & M_{2,4} &= 0.375; & M_{3,4} &= 0.375; \\ M_{4,4} &= 0.125 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (87) приведет к следующим результатам:

$$\begin{aligned} S_{1,1} &= 0.0396 & S_{1,2} &= 0.0792 & S_{1,3} &= 0.0792 \\ S_{1,4} &= 0.0396 \\ S_{2,1} &= 0.0396 & S_{2,2} &= 0.0891 & S_{2,3} &= 0.594 \\ S_{2,4} &= 0.0396 \end{aligned}$$

Координаты точки на поверхности

$$Q(0.5, 0.5) = [1.634 \quad 0.266 \quad 7.624]$$

Вся поверхность изображена на рис. 56.

С помощью В-сплайнов могут быть также представлены поверхности вращения. Предположим, что

$$P(\varpi) = \sum_{j=1}^{m+1} B_j B_{j,l}(\varpi)$$

с узловым вектором $[Y]$ является рациональной В-сплайн кривой, и вспомним, что полная окружность получается при объединении четырех четвертей окружности, заданных девятью вершинами многоугольника. Это приводит нас к рациональной В-сплайн поверхности вращения, задаваемой

$$Q(u, \omega) = \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^{m+1} B_{i,j} S_{i,j}(u, \omega), \quad (90)$$

где $[X]$ — узловый вектор $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4]$. Предположим, что вращение происходит вокруг оси z , кривая $P(\omega)$ определена в плоскости xz , элементы $B_{i,j}$ задаются как $B_{1,j} = B_j$ для фиксированного j с $1 \leq i \leq 9$. Вершины характеристического многоугольника образуют угловые и средние точки квадрата, лежащего в плоскости, перпендикулярной оси z , и с размером стороны, равным удвоенному радиусу окружности вращения. Однородные весовые множители являются произведением множителей, необходимых для задания рациональной В-сплайн кривой и для задания окружности вращения. Конкретнее, для фиксированного j , $k_{1,j} = k_j$, $k_{2,j} = k_j \sqrt{2}/2$, $k_{3,j} = k_j$, $k_{4,j} = k_j \sqrt{2}/2$, ..., $k_{9,j} = k_j$. На рис. 57 показаны характеристический многоугольник и сама кривая для окружности вращения и для вращаемой рациональной В-сплайн кривой.

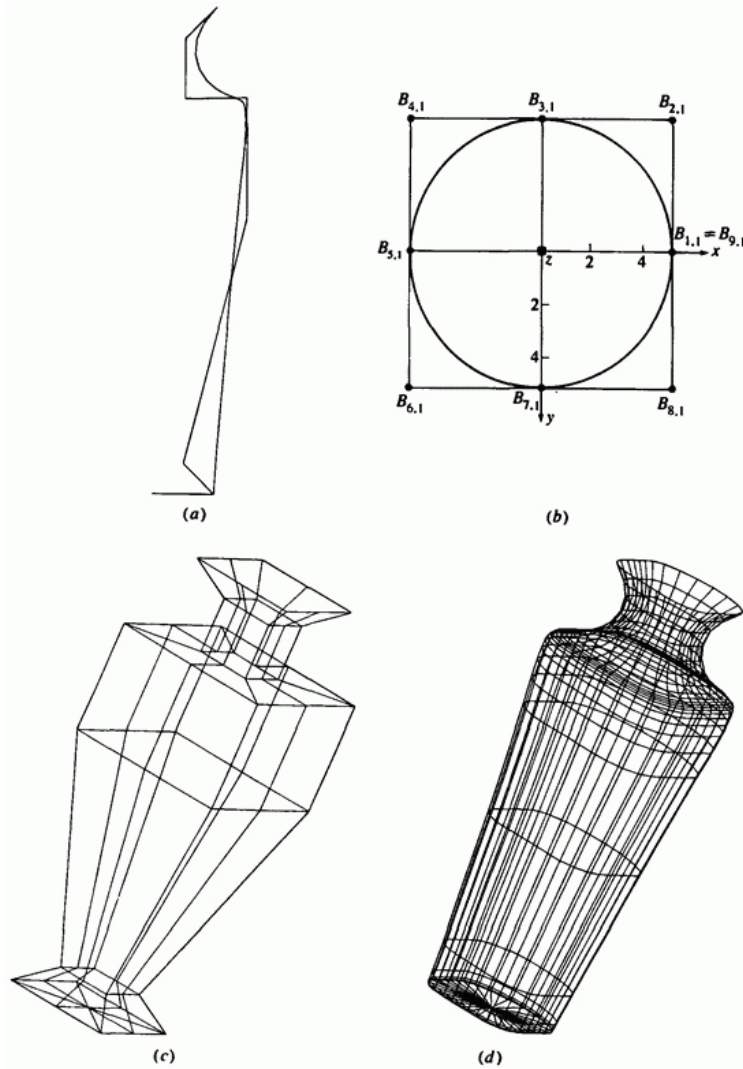


Рис. 57. Рациональная В-сплайн поверхность вращения. (а) Образующая кривая и задающая сетка; (б) окружность вращения; (с) характеристический многогранник; (д) поверхность вращения.

Также на рисунке приведены объединенный характеристический многогранник поверхности и сама поверхность.

На рис. 58 и 59 представлены обычные поверхности вращения - тор и сфера, вместе со своими характеристическими многогранниками.

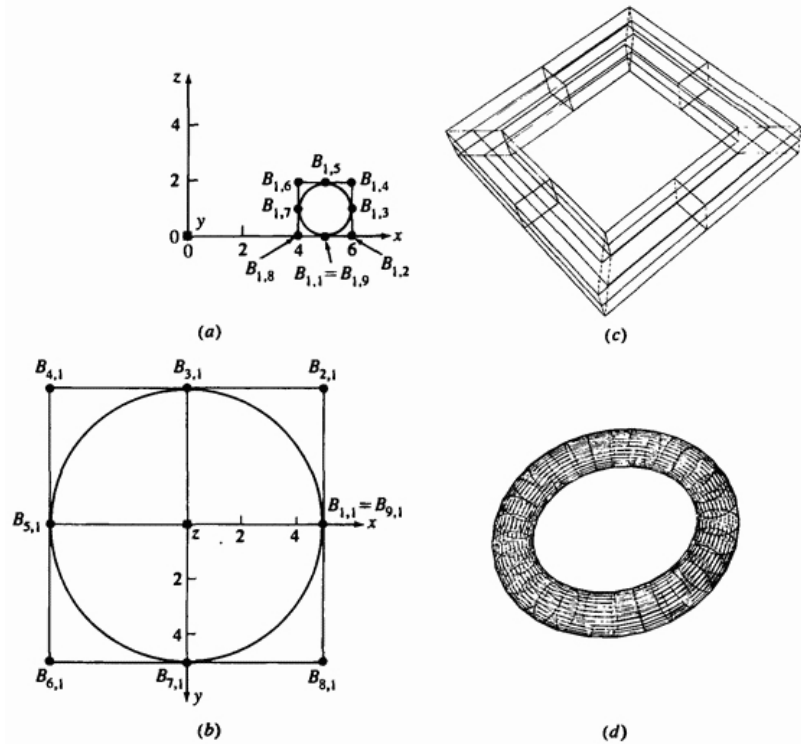


Рис. 58. Тор, сгенерированный как рациональная В-сплайн поверхность. (а) Смещенная окружность и задающий многоугольник; (б) окружность вращения и задающий многоугольник; (с) характеристический многогранник для тора; (d) тор.

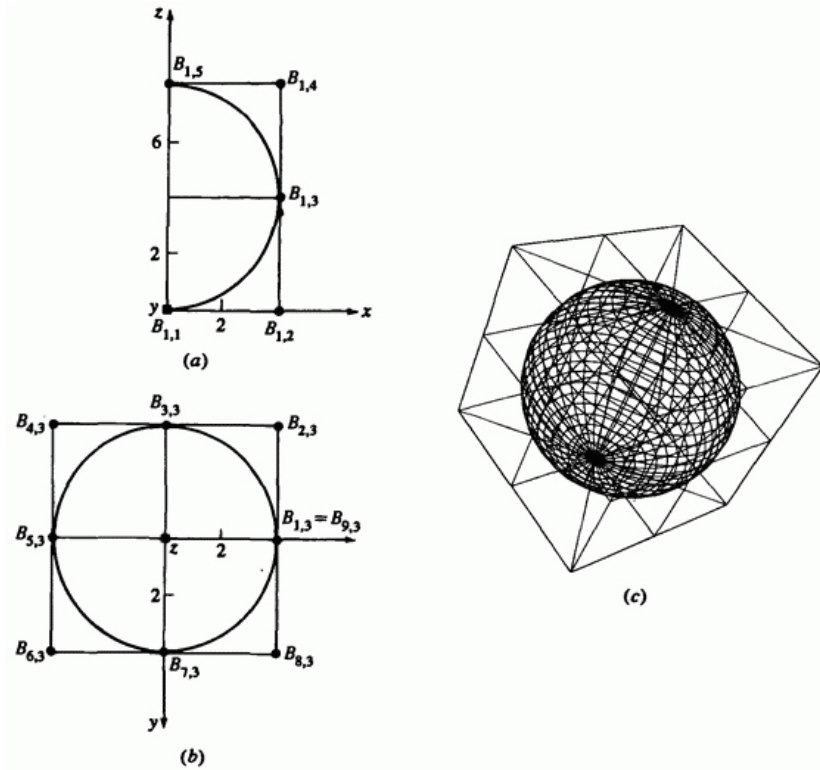


Рис. 59. Сфера, сгенерированная как рациональная В-сплайн поверхность. (а) Смещенная окружность и задающий многоугольник; (б) окружность вращения и задающий многоугольник; (с) характеристический многогранник и сфера.

Тор генерируется путем вращения смещенной окружности вокруг одной из осей. Сфера генерируется путем вращения полуокружности, составленной из двух 90° дуг вокруг оси, проходящей через диаметр полуокружности.

Как было ранее упомянуто, одной из наиболее мощных характеристик рациональных в отличие от нерациональных В-сплайн поверхностей является их способность «упрячивать» (или включать) квадратичные элементы поверхности внутри обобщенной скульптурной поверхности.

Например, как часть более общей поверхности, может быть включен цилиндрической элемент. На рис. 60 представлено три примера.

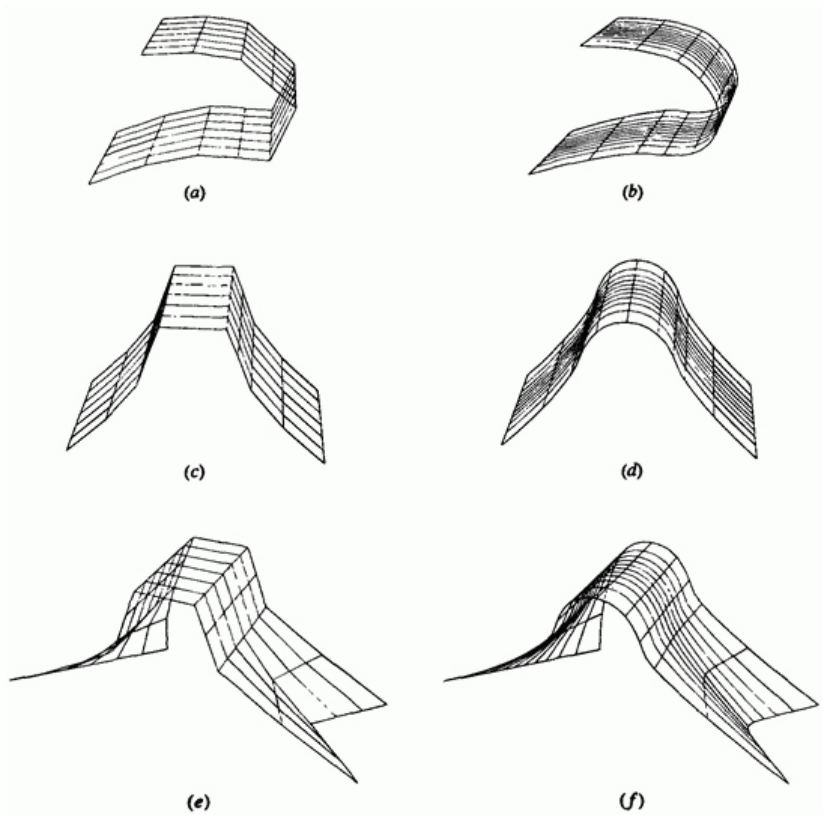


Рис. 60. Элемент квадратичной поверхности внутри более общей рациональной В-сплайн поверхности. Передняя кромка крыла. (а) Характеристический многогранник; (b) поверхность. Корма корабля. (с) Характеристический многогранник; (d) поверхность. Цилиндр как часть более общей поверхности. (е) Характеристический многогранник; (f) поверхность.

Центральной частью каждой поверхности четвертого порядка является секция кругового цилиндра. Рис. 60а мог бы изображать переднюю кромку крыла или лопасти турбины, рис. 60b - цилиндрический нос корабля. Обе поверхности генерируются с помощью задания дуги

окружности третьего порядка, увеличения степени дуги (см. пример 18), создания из дуги линейчатой поверхности и ее включения между двумя крайними элементами поверхностей четвертого порядка.

Случайно обе поверхности, показанные на рис. 60а и б, оказались линейчатыми развертывающимися поверхностями. На рис. 60с изображен цилиндрический элемент, упрятанный в более общую поверхность.

Производные рациональной В-сплайн поверхности получаются с помощью формального дифференцирования уравнения (86):

$$Q_u = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_u}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_u}{\bar{D}} \right), \quad (91a)$$

$$Q_w = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_w}{\bar{N}} - \frac{\bar{D}_w}{\bar{D}} \right), \quad (91b)$$

$$Q_{uw} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{uw}}{\bar{N}} - \frac{\bar{N}_u}{\bar{N}} \frac{\bar{D}_w}{\bar{D}} - \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}} \frac{\bar{D}_u}{\bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_u}{\bar{D}} \frac{\bar{D}_w}{\bar{D}} - \frac{\bar{D}_{uw}}{\bar{D}} \right), \quad (91c)$$

$$Q_{uu} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{uu}}{\bar{N}} - 2 \frac{\bar{N}_u}{\bar{N}} \frac{\bar{D}_u}{\bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_u^2}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{D}_{uu}}{\bar{D}} \right), \quad (91d)$$

$$Q_{ww} = \frac{\bar{N}}{\bar{D}} \left(\frac{\bar{N}_{ww}}{\bar{N}} - 2 \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}} \frac{\bar{D}_w}{\bar{D}} + 2 \frac{\bar{D}_w^2}{\bar{D}^2} - \frac{\bar{D}_{ww}}{\bar{D}} \right), \quad (91e)$$

где \bar{N} и \bar{D} являются числителем и знаменателем, соответственно, уравнения (86) с производными

$$\overline{N}_u = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N'_{i,k}(u) M_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{N}_\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) M'_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{N}_{u\omega} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N''_{i,k}(u) M'_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{N}_{\omega u} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N''_{i,k}(u) M_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{N}_{\omega\omega} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} B_{i,j} N_{i,k}(u) M''_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{D}_u = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N''_{i,k}(u) M_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{D}_\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M'_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{D}_{u\omega} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N'_{i,k}(u) M'_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{D}_{\omega u} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N'_{i,k}(u) M_{j,l}(\omega)$$

$$\overline{D}_{\omega \omega} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m+1} h_{i,j} N_{i,k}(u) M''_{j,l}(\omega)$$

Штрих обозначает производную относительно соответствующего параметра. Функции $N'_{i,k}(u)$, $M'_{j,l}(\omega)$, $N''_{i,k}(u)$, $M''_{j,l}(\omega)$ задаются уравнениями (97)-(100) п.3.

Эти производные полезны при определении гауссовой кривизны поверхности (см. разд. 6.15), а также других свойств поверхности.

Литература

1. Норден А.П., Теория поверхностей. – ГИТТЛ, М., 1956.
2. Рашевский П.К., Риманова геометрия и тензорный анализ. – Наука, М., 1967.
- 3 Rogers, D. F., Procedural Elements for Computer Graphics, McGraw-Hill, New York, 1985. (См. [1-1] на с. 74.)
- 4 Bezier P. E., Emploi des Machines a Commande Numerique, Masson et Cie, Paris, France, 1970; Bezier, P. E., «Example of an Existing System in the Motor Industry: The Unisurf System,» Proc. Roy. Soc. (London), Vol. A321, pp. 207-218, 1971.
- 5 Sabin, M. A., «An Existing System in the Aircraft Industry. The British Aircraft Corporation Numerical Master Geometry System,» Proc. Roy. Soc. (London), Vol. A321, pp. 197-205, 1971.
- 6 Peters, C. J., «Interactive Computer Graphics Application of the Bicubic Parametric Surface to Engineering Design Problems,» McDonnell Douglas Automation Company, St. Louis, Missouri, presented at SIAM 1973 National Meeting, Hampton, Va., 18-21 June 1973.
- 7 Rogers D. F., and Satterfield S. D., «Dynamic B-Spline Surfaces,» Proc. of the Fourth International Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design (ICCAS 82), 7-10 June 1982, Annapolis, Maryland, pp. 189-196, North Holland, 1982.
- 8 Cohen, E., «Some Mathematical Tools for a Modeler's Workbench,» IEEE Comp. Graph. & Appl., Vol. 3, pp. 63-66, October 1983.
- 9 Tan, S. T., Yuen, M. F., and Hui, K. C., «Modeling Solids with Sweep Primitives,» Comp. Mech. Eng., Vol. 6, pp. 60-72, 1987.
- 10 Coquillart, S., «A Control-Point-Based Seeping Technique,» IEEE Comp. Graph. & Appl., Vol. 7, pp. 36-45, November 1987.

11 Patton, D., Dept. of Mech. and Prod. Engr., Royal Melbourne Inst, of Tech., Melbourne, Australia, private communication, 1988.

12 Dresden, A., Solid Analytic Geometry and Determinants, Dover Publications, New York, 1964.

13 Sommerville, D. M. Y., Analytical Geometry of Three Dimensions, Cambridge Univ. Press, 1959.

14 Snyder, V., and Sisam, C. H., Analytic Geometry of Space, Henry Holt and Co., New York, 1914.

15 Goldman, R. N., «Two Approaches to a Computer Model for Quadric Surfaces,» IEEE Comp. Graph. & Appl., Vol. 3, pp. 21-24, September 1983.

16 Wilson, P. R., «Conic Representation for Shape Description,» IEEE Comp. Graph. & Appl., Vol. 7, pp. 23-30, 1987.

17 Miller, J. R., «Geometric Approaches to Non-planar Quadric Surfaces Intersection Curves,» ACM Trans, on Graph., Vol. 6, pp. 274-307, 1987.

18 Dill, J. C., «An Application of Color Graphics to the Display of Surface Curvature,» Comp. Graph., Vol. 15, pp. 153-161, 1981, (SIGGRAPH 81).

19 Coons, S., «Surfaces for Computer-Aided Design of Space Forms,» M. I. T. Proj. MAC, MAC-TR-41, June 1967. (Also as AD 663 504).

20 Ferguson, J. C., «Multivariable Curve Interpolation,» J. ACM, Vol. 2, pp. 221-228, April 1964.

21 Barnhill, R. E., «Smooth Interpolation over TVi angles,» in Computer Aided Geometric Design, Barnhill, R. E., and Riesenfeld, R. F. (eds.), Academic Press, New York, pp. 45- 70, 1974.

22 Barnhill, R. E., «Coons Patches,» Comp. in Ind., Vol. 3, pp. 37-43, 1982.

23 Charrot, P., and Gregory, J., «A Pentagonal Surface Patch for Computer Aided Geometric Design,» Comp. Aid. Geom. Des., Vol. 1, pp. 87-94, 1984.

24 Faux, I. D., and Pratt, M. J., *Computational Geometry for Design and Manufacture*, Ellis Horwood (John Wiley & Sons), 1979.

25 Bezier, P. E., *The Mathematical Basis of the Unisurf CAD System*, Butterworth, London, 1986.

26 Barsky, B. A., and Greenberg, D. P., «Determining a Set of B-spline Control Vertices to Generate an Interpolating Surface,» *Comp. Graph. Imag. Proc.*, Vol. 14, pp. 203-226, 1980.

27 Rogers, D. F., and Fog, N. G., «Constrained B-spline Curve and Surface Fitting,» *CADJ*, Vol. 21, pp. 641-648, 1989.

28 Munchmeyer, F. C., Schubert, C., and Nowacki, H., «Interactive Design of Fair Hull Surfaces Using B-splines,» *Proc. of the Third International Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design (ICCAS 79)*, 18-21 June 1979, University of Strathclyde, Glasgow, Scotland, pp. 67-76, North Holland, 1979.

29 Munchmeyer, F. C., «The Gaussian Curvature of Coons Biquintic Patches,» *Proc. ASME Century 2 Inter. Comp. Tech. Conf.*, 12-15 August 1980.

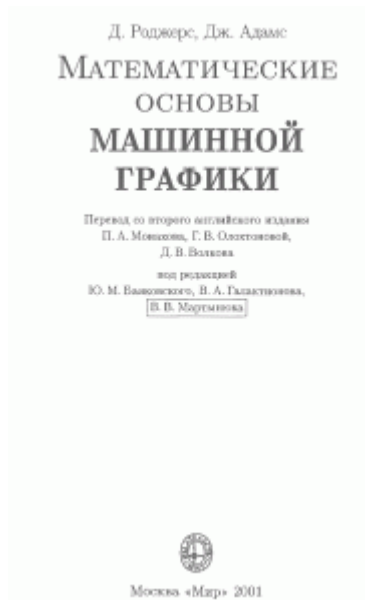
30 Dill, J. C., «An Application of Color Graphics to the Display of Surface Curvature,» *Comp. Graph.*, Vol. 15, pp. 153-161, 1981, (SIGGRAPH 81).

31 Forrest, A. R., «On the Rendering of Surfaces,» *Comp. Graph.*, Vol. 13, pp. 253-259, 1979, (SIGGRAPH 79).

32 Dill, J. C., and Rogers, D. F., «Color Graphics and Ship Hull Surface Curvature,» *Proc. of the Fourth International Conference on Computer Applications in the Automation of Shipyard Operation and Ship Design (ICCAS 82)*, pp. 197-205, North Holland, 1982.

33 Piegl, L., and Tiller, W., «Curve and Surface Constructions Using Rational B-splines,» *Comp. Aid. Des.*, Vol. 19, pp. 485-498, 1987.

Математические основы машинной графики



Роджерс Д., Адамс Дж.
Математические основы
машинной графики. М.: Мир,
2001. 604 с.

Полностью переработанное и дополненное второе издание книги известных американских специалистов (перевод первого издания вышел в издательстве «Машиностроение» в 1980 г.). Книгу отличает глубина и фундаментальность материала, четкий и лаконичный стиль изложения, удачное сочетание строгости подхода с практической направленностью. От читателя требуется знакомство с математикой в объеме вузовской программы и знание одного из языков программирования.

Для математиков-прикладников, для всех, кто занимается и интересуется машинной графикой, автоматизацией проектирования, для студентов вузов.

Введение к первому изданию

Прошло уже более десяти лет с момента выхода в свет первого издания книги; за это время машинная графика привлекла к себе пристальное внимание множества специалистов из разных областей знания. В процентном отношении основное внимание в среде увеличивающейся плеяды профессионалов по машинной графике уделялось проблемам программирования, системного проектирования, аппаратуре и т. п. Именно это обстоятельство отмечал Сазерленд в своем предисловии к книге Принса «Interactive Graphics for Computer Aided Design», изданной в 1971 г. Такая ситуация наблюдается и сегодня. Однако я считаю, что уделяется недостаточно внимания именно прикладным проблемам, а это влечет за собой дефицит информации, которую можно было бы использовать при создании действительно работоспособных систем машинной графики. Основное принципиальное требование к разработке систем машинной графики состоит в необходимости глубокого понимания связи ее практических аспектов со спецификой конкретного приложения. Фундаментом большинства приложений машинной графики являются математические методы, особенно геометрия и способы преобразования. Тем не менее многие программисты и аналитики, работающие в области машинной графики, в своих работах обычно не рассматривают основы и не разбирают сложных математических задач. Более того, потенциал машинной графики часто остается полностью не реализованным именно вследствие неадекватного использования математического аппарата с его ограничениями и допущениями. Ценность книги профессоров Роджера и Адамса состоит в ее практической ориентации. Четкий и лаконичный стиль изложения значительно облегчает задачу читателей по освоению материала. Книга является редким примером такой работы, которую многим практикам следует поместить на видное место в своей библиотеке в качестве неоцененного энциклопедического справочника. Она может быть также с успехом использована и в качестве основы учебного курса.

Оглавление

[Предисловие к русскому изданию](#)

[Введение к первому изданию](#)

[Предисловие](#)

[Предисловие к первому изданию](#)

[Благодарности](#)

[Глава 1. Введение в машинную графику](#)

[1-1 ОБЗОР МАШИННОЙ ГРАФИКИ](#)

[1-2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ](#)

[1-3 ПОДГОТОВКА ИЗОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ ВЫВОДА](#)

[1-4 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДГОТОВЛЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ](#)

[1-5 ОРГАНИЗАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ИЗОБРАЖЕНИЕМ](#)

[1-6 ТИПЫ ГРАФИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ](#)

[1-7 ГРАФИЧЕСКИЕ ДИСПЛЕИ НА ЗАПОМИНАЮЩЕЙ ТРУБКЕ](#)

[1-8 ГРАФИЧЕСКИЕ ДИСПЛЕИ С РЕГЕНЕРАЦИЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ](#)

[1-9 РАСТРОВЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ДИСПЛЕИ С РЕГЕНЕРАЦИЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ](#)

[1-10 УСТРОЙСТВО ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВОЙ ТРУБКИ](#)

[1-11 УСТРОЙСТВО ЦВЕТНОЙ РАСТРОВОЙ ЭЛТ](#)

[1-12 СИСТЕМЫ С ТЕЛЕВИЗИОННЫМ РАСТРОМ](#)

[1-13 ДИСПЛЕИ С ПЛОСКИМ ЭКРАНОМ](#)

[1-14 ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИЕ ГРАФОПОСТРОИТЕЛИ](#)

[1-15 ЛАЗЕРНЫЕ ПЕЧАТАЮЩИЕ УСТРОЙСТВА](#)

[1-16 МАТРИЧНЫЕ ГРАФОПОСТРОИТЕЛИ](#)

[1-17 УСТРОЙСТВО СТРУЙНОЙ ПЕЧАТИ](#)

[1-18 УСТРОЙСТВО ТЕРМОПЕЧАТИ](#)

[1-19 ПЕРЬЕВЫЕ ГРАФОПОСТРОИТЕЛИ](#)

[1-20 ЦВЕТНЫЕ ВИДЕОКАМЕРЫ](#)

[1-21 АКТИВНЫЕ И ПАССИВНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА](#)

[1-22 ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МАШИННОЙ ГРАФИКИ](#)

[1-23 ЛИТЕРАТУРА](#)

[Глава 2. Двумерные преобразования](#)

[2-1 ВВЕДЕНИЕ](#)

[2-2 ИЗОБРАЖЕНИЕ ТОЧЕК](#)

[2-3 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И МАТРИЦЫ](#)

[2-4 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТОЧЕК](#)

[2-5 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ](#)

[2-6 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СРЕДНЕЙ ТОЧКИ](#)

[2-7 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ](#)

[2-8 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ](#)

[2-9 ПОВОРОТ](#)

[2-10 ОТРАЖЕНИЕ](#)

[2-11 МАСШТАБИРОВАНИЕ](#)

[2-12 КОМБИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ](#)

[2-13 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЕДИНИЧНОГО КВАДРАТА](#)

[2-14 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЖЕСТКИХ КОНСТРУКЦИЙ](#)

[2-15 ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ](#)

[2-16 ПОВОРОТ ВОКРУГ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКИ](#)

[2-17 ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРЯМОЙ](#)

[2-18 ПРОЕЦИРОВАНИЕ - ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ОДНОРОДНЫХ КООРДИНАТ](#)

[2-19 ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ](#)

[2-20 ТОЧКИ БЕСКОНЕЧНОСТИ](#)

[2-21 ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ](#)

[2-22 ЛИТЕРАТУРА](#)

[Глава 3. Пространственные преобразования и проекции](#)

[3-1 ВВЕДЕНИЕ](#)

[3-2 ТРЕХМЕРНОЕ МАСШТАБИРОВАНИЕ](#)

[3-3 ТРЕХМЕРНЫЕ СДВИГИ](#)

[3-4 ТРЕХМЕРНОЕ ВРАЩЕНИЕ](#)

[3-5 ТРЕХМЕРНОЕ ОТРАЖЕНИЕ](#)

[3-6 ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ПЕРЕНОС](#)

[3-7 КОМПОЗИЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ](#)

[3-8 ПОВОРОТЫ ВОКРУГ ОСИ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КООРДИНАТНОЙ ОСИ](#)

[3-9 ПОВОРОТ ВОКРУГ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСИ В ПРОСТРАНСТВЕ](#)

[3-10 ОТРАЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ](#)

- [3-11 АФФИННАЯ И ПЕРСПЕКТИВНАЯ \(НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ\) ГЕОМЕТРИЯ](#)
- [3-12 ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ](#)
- [3-13 АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ](#)
- [3-14 КОСОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ](#)
- [3-15 ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ](#)
- [3-16 МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ВИДОВ](#)
- [3-17 ТОЧКИ СХОДА](#)
- [3-18 ФОТОГРАФИЯ И ПЕРСПЕКТИВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ](#)
- [3-19 СТЕРЕОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ](#)
- [3-20 СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ – С ФИКСИРОВАННЫМ ОБЪЕКТОМ И С ФИКСИРОВАННЫМ ЦЕНТРОМ ПРОЕКЦИИ](#)
- [3-21 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ПРОЕКЦИЯМ](#)
- [3-22 ЛИТЕРАТУРА](#)
- [Глава 4 Плоские кривые](#)
- [4-1 ВВЕДЕНИЕ](#)
- [4-2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КРИВЫХ](#)
- [4-3 НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ](#)
- [4-4 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ](#)
- [4-5 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ](#)
- [4-6 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЭЛЛИПСА](#)
- [4-7 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛЫ](#)
- [4-8 ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГИПЕРБОЛЫ](#)
- [4-9 ПРОЦЕДУРА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ](#)
- [4-10 ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ](#)
- [4-11 ЛИТЕРАТУРА](#)
- [Глава 5 Пространственные кривые](#)
- [5-1 ВВЕДЕНИЕ](#)
- [5-2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ](#)
- [5-3 КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ](#)
- [5-4 НОРМАЛИЗОВАННЫЕ КУБИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ](#)
- [5-5 ДРУГИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ](#)
- [5-6 ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ](#)
- [5-7 ОБОБЩЕННАЯ ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ](#)
- [5-8 КРИВЫЕ БЕЗЪЕ](#)
- [5-9 В-СПЛАЙНЫ](#)
- [5-10 КОНЕЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В-СПЛАЙНОВ](#)
- [5-11 ПОДГОНКА В-СПЛАЙНОВ](#)
- [5-12 РАЗБИЕНИЕ В-СПЛАЙНОВ](#)
- [5-13 РАЦИОНАЛЬНЫЕ В-СПЛАЙНЫ](#)
- [5-14 ЛИТЕРАТУРА](#)
- [Глава 6 Поверхности](#)
- [6-1 ВВЕДЕНИЕ](#)
- [6-2 ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ](#)
- [6-3 ЗАМЕТАЮЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-4 КВАДРАТИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-5 КУСОЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ](#)
- [6-6 ОТОБРАЖЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ](#)
- [6-7 БИЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ](#)
- [6-8 ЛИНЕЙЧАТЫЕ И РАЗВЕРТЫВАЮЩИЕСЯ ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-9 ЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА](#)
- [6-10 БИКУБИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КУНСА](#)
- [6-11 ПОВЕРХНОСТИ БЕЗЪЕ](#)
- [6-12 В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-13 В-СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ](#)
- [6-14 РАЗБИЕНИЕ В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТЕЙ](#)
- [6-15 ГАУССОВА КРИВИЗНА И КАЧЕСТВО ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-16 РАЦИОНАЛЬНЫЕ В-СПЛАЙН ПОВЕРХНОСТИ](#)
- [6-17 ЛИТЕРАТУРА](#)

Предисловие к русскому изданию

Я с большой радостью узнал о выходе в свет в переводе на русский язык второго английского издания «Математические основы машинной графики». Эта книга составит прекрасный тандем вместе с ранее изданной в переводе на русский язык книгой «Алгоритмические основы машинной графики». Я надеюсь, что в совокупности эти две книги образуют фундаментальный материал по машинной графике и в какой-то степени они скомпенсируют существующую нехватку публикаций по этому предмету на русском языке.

Сегодня, даже в большей степени, чем в ту пору, когда была написана эта книга, машинная графика глубоко проникает в искусство, технику, рекламу, связь. Я упомянул лишь некоторые немногие области приложений, а список можно продолжить. В частности, следует отметить Интернет, который возник как средство быстрого и легкого обмена текстовой информацией между учеными, а в настоящее время он сильно зависит от технологии машинной графики.

Почти на каждом веб-сайте для представления информации используется машинная графика. Многие спецэффекты в видео- и кинофильмах не обходятся без применения средств машинной графики.

В индустриальном мире машинная графика играет огромную роль, особенно в робототехнике, автоматизированном проектировании и производстве, в научной визуализации. В наши дни обычный человек, не задумываясь, может послать картинку своим друзьям и коллегам по электронной почте простым нажатием на кнопку «мышки». Отмечу и такой факт: объем бизнеса в машинной графике достиг 90 млрд. долларов.

Дэвид Ф. Роджерс Аннаполис, Мэриленд, США 1 декабря 2000 г.