

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ**

А.Ю. Кононюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Модульна технологія навчання)

Книга 2

Навчальний посібник

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки
України**

**Київ
КНТ
2009**

**УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К 213**

**Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних
закладів**

(лист № 1.48-Г-725 від 31.03.2008)

Рецензенти:

В.В.Довгай - к-т фіз.-мат. наук, доц. (Національний
технічний університет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р фіз.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т
техн. наук, доц. (Київський університет економіки, туризму і
права); *М.К.Печурін* - д-р техн. наук, проф. (Національний
авіаційний університет).

Кононюк А.Ю.

К 213 Вища математика. (Модульна технологія навчання). В 2-х
кн. Кн.2. Д 332. Навчальний посібник. К.: КНТ, 2009. – 790 с.

ISBN 978-966-373-467-5 (багатотомне видання)

ISBN 978-966-373-518-4 (Книга 2)

У посібнику навчальний матеріал викладено на базі
модульної технології вивчення вищої математики.

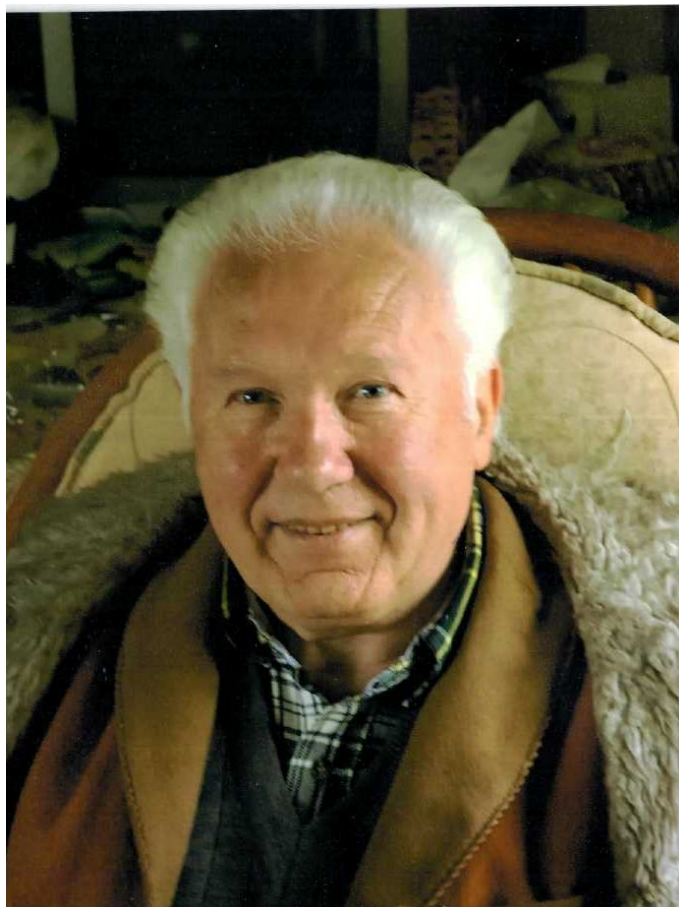
В першій частині навчального посібника викладено ті
розділи вищої математики, які вивчаються на першому курсі
вищих навчальних закладів технічного і економічного профілів.

Навчальний матеріал викладено у вигляді логічно
завершених розділів – модулів. Модуль складається з трьох
частин – мікромодулів. Кожний мікромодуль містить,
відповідно до програми курсу, достатні теоретичні відомості,
практичну частину, в якій наведено приклади розв’язання
типових задач і вправ, а також індивідуальні тестові завдання.

Для студентів вищих технічних і економічних закладів.

**УДК 51 (075.8)
ББК
В161.я7**

ISBN 978-966-373-467-5 (багатотомне видання) **А.Ю. Кононюк, 2009**



Зміст

Вступ.....	4
Модуль 8. Комплексні числа. Многочлени.....	6
Мікромодуль 18. Комплексні числа.....	6
Мікромодуль 19. Многочлени і їхні корені.....	52
Мікромодуль 20. Обчислення коренів многочленів	89
Модуль 9. Інтегральне числення	137
Мікромодуль 21. Невизначений інтеграл.	137
Мікромодуль 22. Визначений інтеграл.....	199
Мікромодуль 23. Застосування визначеного інтеграла.....	279
Модуль 10. Диференціальні рівняння.....	306
Мікромодуль 24. Диференціальні рівняння різних порядків.....	306
Мікромодуль 25. Лінійні рівняння і системи лінійних рівнянь.....	365
Мікромодуль 26. Наближене і числове розв'язання рівнянь.....	411
Модуль 11. Кратні інтеграли	431
Мікромодуль 27. Основи кратних інтегралів	431
Мікромодуль 28. Варіанти кратних інтегралів і векторне поле..	477
Модуль 12. Ряди	530
Мікромодуль 29. Числові, функціональні і степеневі ряди	530
Мікромодуль 30. Тригонометричні ряди і ряди Фур'є.	574
Модуль 13. Теорія ймовірностей	627
Мікромодуль 31. Елементи теорії ймовірностей.....	627
Мікромодуль 32. Числові характеристики випадкових величин	673
Список літератури.....	741

Вступ

Як зазначено в Національній доктрині розвитку освіти в Україні, модернізація системи освіти на сучасному етапі спрямована на забезпечення її якості, відповідно до освітніх досягнень науки, культури і соціальної практики. Держава здійснює перманентний моніторинг якості освіти, забезпечує його прозорість, сприяє розвитку громадського контролю.

Одним із шляхів поліпшення якості навчально-виховного процесу у ВЗО є введення модульно-рейтингової системи навчання, яка є невід'ємною складовою всього навчально-виховного процесу та діагностики результатів навчання. Модульно-рейтингова система сприяє створенню необхідних умов і обставин для отримання певного рівня кваліфікації.

На відміну від сталої дидактичної системи оцінювання знань модульно-рейтингова система зорієнтована на стимулювання пізнавальної діяльності студентів, за рахунок скорочення аудиторних занять і приріст об'єму годин на самостійну роботу, індивідуальну роботу під керівництвом викладача. Студент у процесі навчання розвиває в собі навички самостійно оцінювати свій рівень підготовки, вибирати і визначати рівень засвоєння знань.

На підставі загальних положень в даному навчальному посібнику розроблені конкретні форми модульної системи організації навчання з дисципліни „Вища математика” і врахована специфіка і особливості навчального процесу. Рекомендована кількість модулів складає 2-4 модулі на семестр.

Матеріал посібника розділено на дві книги.

Перша книга містить матеріал з 1-го по 7-й модулі включно, який в основному відповідає навчальній програмі першого курсу вищих навчальних закладів.

Друга книга містить матеріал з 8-го по 13-й модулі включно, який відповідає навчальній програмі другого курсу вищих навчальних закладів.

Зміст всього навчального посібника відповідає програмі загального курсу вищої математики для бакалаврів і магістрів технічних та економічних вищих навчальних закладів і розрахований на 600-650 годин навчального процесу.

Модуль являє собою логічно завершений розділ навчального матеріалу. Матеріал навчального посібника поділено на тринадцять модулів. Кожен модуль складається з кількох мікромодулів.

Мікромодуль містить :

- 1)теоретичну частину,
- 2)практичну частину,
- 3)тестові завдання.

В теоретичній частині викладено в повному обсязі матеріал, опанування яким дозволяє засвоїти вказану в ньому тему.

Практична частина містить приклади розв'язання типових задач, які ілюструють теоретичний матеріал.

Наприкінці модуля вміщено мікромодуль індивідуальних тестових завдань, які послугують для контролю засвоєння студентами матеріалу даного розділу.

Враховуючи різну кількість годин, які відводяться за планом для вивчення вищої математики студентами різних спеціальностей, викладач (лектор) може коригувати зміст модулів, кількість тестових завдань, які студент повинен виконати протягом терміну, відведеного навчальним планом.

Модуль 8

Комплексні числа. Многочлени

Мікромодуль 18 Комплексні числа

8.1. Числове поле. Система комплексних чисел

Протягом курсу елементарної алгебри кілька разів відбувається збагачення запасу чисел. Учень, який приступає до вивчення алгебри, приносить з арифметики знайомство з додатними цілими і дробовими числами. Алгебра починається, власне кажучи, з уведення від'ємних чисел, тобто з оформлення першої серед найважливіших числових систем — системи *цілих чисел*, яка складається з усіх додатних, і усіх від'ємних цілих чисел і нуля, і більш широкої системи *раціональних чисел*, яка складається з усіх цілих чисел і всіх дробових чисел, як додатних, так і від'ємних.

Поняття числа пройшло довгий шлях історичного розвитку. У школі вивчали про те, як від найпростіших, натуральних чисел переходити до більш складних, дійсних чисел. Зараз ми хочемо повернутися до розгляду цього питання. Але при цьому нам доведеться трохи відступити від того порядку, у якому історично розвивалося поняття числа.

Одною з найпростіших числових множин є множина натуральних чисел $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

У ній завжди можна здійснити дві основні алгебраїчні дії: додавання і множення. Це означає, що, які б не були натуральні числа m і n , сума їх $m+n$, а також добуток $m \cdot n$ є неодмінно натуральними числами. При цьому дотримуються наступних п'яти законів:

1) комутативний закон додавання:

$$m + n = n + m;$$

2) асоціативний закон додавання:

$$(m + n) + k = m + (n + k);$$

3) комутативний закон множення:

$$m \cdot n = n \cdot m;$$

4) асоціативний закон множення:

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k);$$

5) дистрибутивний закон множення щодо додавання:

$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k.$$

Що стосується віднімання і ділення, то ці дві дії в множині натуральних чисел можна здійснити не завжди. Так, ні одну з різностей $3-5$ і $2-2$, а також жодну з часток $3:5$ і $7:4$ не можна виразити ніяким натуральним числом.

Щоб дію віднімання можна було здійснити завжди, множину натуральних чисел потрібно розширити шляхом приєднання до неї всіх від'ємних цілих чисел і нуля. У результаті такого розширення ми приходимо до *множини всіх цілих чисел*:

$$\dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots$$

Числова множина, у якій завжди можна здійснити додавання і множення, для якої виконуються зазначені вище п'ять законів, а також віднімання, називається кільцем. Таким чином, множина усіх цілих чисел утворює кільце.

Розширивши множину усіх натуральних чисел до множини всіх цілих чисел, ми домоглися тим самим, що дія віднімання стала здійсненою завжди. Але ділення як і раніше залишилося, узагалі говорячи, нездійсненним. Щоб усунути цю прогалину, потрібно розширити і множину усіх цілих чисел. Зробити це можна шляхом приєднання до неї всіх звичайних

дробів, тобто чисел вигляду $\frac{m}{n}$, де m і n — довільні цілі числа і

$n \neq 0$. У результаті такого розширення ми одержуємо *множину усіх раціональних чисел*. У цій числовій множині завжди можна здійснювати дії додавання, множення, віднімання і ділення (крім ділення на нуль), причому перші дві з них підлягають п'ятьом основним законам додавання і множення.

Множина чисел, у якій завжди можна здійснювати дії додавання і множення, а також дії, які підлягають п'яти основним законам, в тому числі також дії віднімання і ділення (крім ділення на нуль), називається полем. Множина усіх раціональних чисел є найпростішим числовим полем.

Доречно відразу ж помітити, що множина всіх ірраціональних чисел поля не утворює. Дійсно, кожна з чотирьох дій (додавання, множення, віднімання і ділення) над ірраціональними числами може привести до числа раціональному. Так, наприклад,

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0, \quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

і т.д. А от множина усіх дійсних чисел утворить поле. Дії додавання, множення, віднімання і ділення дійсних чисел (крім ділення на нуль) не виводять нас за границі дійсних чисел, причому дії додавання і множення виконуються за вимогою п'ятьох основних законів.

Приведемо ще один, більш складний приклад числового поля. Розглянемо всі дійсні числа вигляду $r+s\sqrt{2}$, де r і s — раціональні числа. Нехай $a+b\sqrt{2}$ і $c+d\sqrt{2}$ — довільні два числа розглянутого вигляду. Тоді

$$\begin{aligned} (a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) &= (a + c) + (b + d)\sqrt{2}, \\ (a + b\sqrt{2}) - (c + d\sqrt{2}) &= (a - c) + (b - d)\sqrt{2}, \\ (a+b\sqrt{2}) \cdot (c+d\sqrt{2}) &= ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Припустимо тепер, що число $c+d\sqrt{2}$ не дорівнює нулеві. Тоді, мабуть, і спряжене йому число $c-d\sqrt{2}$ буде відмінне від нуля. Тому можна написати:

$$\begin{aligned} \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} &= \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(ac - 2bd) + (bc - ad)\sqrt{2}}{c^2 - 2d^2} = \\ &= \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Як ми бачимо, кожна з чотирьох дій (додавання, віднімання, множення і ділення) над числами вигляду $r+s\sqrt{2}$ приводить до числа того ж самого вигляду. Ясно також, що додавання і множення всіх цих чисел підлегле кожному з п'яти зазначених вище законів. Тому сукупність усіх чисел вигляду $r + s\sqrt{2}$, де r і s — раціональні числа, утворить числове поле.

Подальше розширення запасу чисел відбувається тоді, коли в розгляд вводяться ірраціональні числа. Система, яка складається з усіх раціональних і всіх ірраціональних чисел, називається системою *дійсних чисел*.

Потреби математики уже давно указували на необхідність розширення поля дійсних чисел. Як ми знаємо, в ньому, окрім додавання, віднімання, множення і ділення, можна виконувати дію піднесення до кореня, яка представляє собою не що інше, ніж багатократне множення. А ось добування коренів, тобто дії, яка зворотна піднесенню до степеня, можна виконати не завжди. Ми не знаємо, наприклад, який зміст можна придати виразам

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-16}$. Тому в полі дійсних чисел не можна розв'язати навіть такі на перший погляд прості рівняння, як $x^2+1=0$, $x^4+16=0$ і т.д.

Таким чином, ми приходимо до необхідності *розширити поле дійсних чисел шляхом приєднання до нього нових чисел так, щоб розширена множина утворила числове поле, в якому завжди виконувалась би дія добування коренів*.

Подивимося, які ж елементи повинно містити нове, розширене поле.

Насамперед воно повинно містити всі дійсні числа. Далі, у ньому повинно бути розв'язне рівняння $x^2 = -1$, оскільки дія, зворотна зведенню в степінь, у цьому полі може бути здійснена. Число, квадрат якого дорівнює -1 , прийнято позначати буквою i і називати уявною одиницею. Отже, по визначенню числа i

$$i^2 = -1.$$

Ми вимагаємо, щоб нова множина чисел була полем. Тому поряд з дійсним числом b і уявною одиницею i йому повинно належати і їх добуток ib . Точно так само разом з дійсним числом a і добутком ib новому числовому полю повинно належати і їх сума $a+ib$. Таким чином, нова множина чисел повинна містити всі числа вигляду

$$a+ib,$$

де a і b — довільні дійсні числа, а i — уявна одиниця. Ці числа ми назвемо *комплексними числами*.

Ця система чисел залишається для читача менш звичною, звичайно, чим система дійсних чисел, хоча насправді вона володіє багатьма дуже цікавими властивостями.

Комплексні числа вводяться в зв'язку з наступною задачею.

Відомо, що дійсних чисел недостатньо для того, щоб розв'язати будь-яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами. Найпростіше з квадратних рівнянь, що не мають коренів серед дійсних чисел, є

$$x^2 + 1 = 0. \tag{8.1}$$

Тільки це рівняння буде нас зараз цікавити. Задача, що стоїть перед нами, така: *потрібно розширити систему дійсних чисел до такої системи чисел, у якій рівняння (8.1) уже мало би корінь*.

За матеріал, з якого буде будуватися ця нова система чисел, ми візьмемо точки площини. Нагадаємо, що зображення дійсних чисел точками прямої лінії (яке засновано на тому, що ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між множиною всіх

точок прямої і множиною всіх дійсних чисел, якщо при заданому початку координат і одиниці масштабу всякій точці прямої поставимо у відповідність її абсцису) систематично використовується у всіх розділах математики і є настільки звичним, що зазвичай ми не робимо розмежування між дійсним числом і точкою, що його зображує.

Таким чином, ми хочемо визначити систему чисел, що зображуються всіма точками площини. Дотепер нам не приходилося складати або перемножувати точки площини, тому визначення операцій над точками ми маємо право вибирати, піклуючись лише про те, щоб нова система чисел володіла всіма тими властивостями, заради яких вона створюється.

Нехай на площині обрана прямокутна система координат. Умовимося позначати точки площини буквами $\alpha, \beta, \lambda, \dots$ і записувати точку α з абсцисою a й ординатою b через (a, b) , тобто, трохи відступаючи від того, що прийнято в аналітичній геометрії, писати $\alpha=(a, b)$. Якщо задано точки $\alpha=(a, b)$ і $\beta=(c, d)$, то сумою цих точок ми будемо називати точку з абсцисою $a+c$ і ординатою $b+d$, тобто

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (8.2)$$

добутком точок $\alpha=(a, b)$ і $\beta=(c, d)$ ми будемо називати точку з абсцисою $ac - bd$ і ординатою $ad+bc$, тобто

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad+bc). \quad (8.3)$$

Цим шляхом ми визначили в множині всіх точок площини дві алгебраїчні операції. Покажемо, що ці операції володіють всіма основними властивостями, якими володіють операції в системі дійсних чисел або в системі раціональних чисел: вони обидві комутативні й асоціативні, зв'язані законом дистрибутивності і для них існують обернені операції — віднімання і ділення (крім ділення на нуль).

Комутативність і асоціативність додавання очевидні (точніше, випливають з відповідних властивостей додавання дійсних чисел), тому що при додаванні точок площини ми окремо складаємо їхні абсциси й окремо ординати. Комутативність множення заснована на тому, що у визначення добутку точки α і β входять симетричним чином.

Асоціативність множення доводять наступні рівняння:

$$\begin{aligned} [(a, b)(c, d)](e, f) &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) = \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce), \\ (a, b)[(c, d)(e, f)] &= (a, b)(ce - df, cf + de) = \end{aligned}$$

$$= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf),$$

Закон дистрибутивності випливає з рівнянь

$$\begin{aligned} [(a, b) + (c, d)](e, f) &= (a + c, b + d)(e, f) = \\ &= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de), \\ (a, b) + (c, d)(e, f) &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) = \\ &= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de). \end{aligned}$$

Розглянемо питання про обернені операції. Якщо задано точки $\alpha=(a, b)$ і $\beta=(c, d)$, то їх різницею буде така точка (x, y) , що $(c, d) + (x, y) = (a, b)$.

Звідси випливає, через (8.2)

$$c + x = a, \quad d + y = b$$

Таким чином, різницею точок $\alpha=(a, b)$ і $\beta=(c, d)$ служить точка

$$\alpha - \beta = (a - c, b - d) \quad (8.4)$$

і ця різниця однозначно визначена. Зокрема, нулем буде служити початок координат $(0, 0)$, а точкою, протилежною для точки $\alpha=(a, b)$, буде точка

$$-\alpha = (-a, -b). \quad (8.5)$$

Нехай, далі, задано точки $\alpha=(a, b)$ і $\beta=(c, d)$, причому точка β відмінна від нуля, тобто хоча б одна з координат c, d не є нуль і тому $c^2 + d^2 \neq 0$. Часткою від ділення α і β повинна бути така точка (x, y) , що $(c, d)(x, y) = (a, b)$. Звідси, через (8.3),

$$\begin{aligned} cx - dy &= a \\ dx + cy &= b. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, ми одержимо:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Таким, при $\beta \neq 0$ частка α/β існує й однозначно визначена:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right). \quad (8.6)$$

Вважаючи тут $\beta = \alpha$, ми одержимо, що одиницею при нашому множенні точок служить точка $(1, 0)$, яка лежить на осі абсцис на відстані 1 праворуч від початку координат. Вважаючи, далі, у (8.6), що $\alpha = 1 = (1, 0)$, ми одержимо, що при $\beta \neq 0$ точкою, оберненою для β , буде:

$$\beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right). \quad (8.7)$$

Таким чином, ми побудували систему чисел, яка зображується точками площини, причому операції над цими числами визначаються формулами (8.2) і (8.3). Ця система чисел називається *системою комплексних чисел*.

Покажемо, що *система комплексних чисел є розширенням системи дійсних чисел*. Для цієї мети розглянемо точки, що лежать на осі абсцис, тобто точки вигляду $(a, 0)$; ставлячи у відповідність точці $(a, 0)$ дійсне число a , ми одержуємо, мабуть, взаємно однозначну відповідність між розглянутою множиною точок і множиною всіх дійсних чисел. Застосування до цих точок формул (8.2) і (8.3) дає рівняння

$$\begin{aligned}(a, 0) + (b, 0) &= (a+b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0),\end{aligned}$$

тобто, точки $(a, 0)$ складаються і перемножуються одна з одною так само, як відповідні дійсні числа. Таким чином, *множина точок, які лежать на осі абсцис, яка розглядається як частина системи комплексних чисел, за своїми алгебраїчними властивостями нічим не відрізняється від системи дійсних чисел, яка звичайним способом зображена точками прямої лінії*. Це дозволяє нам не розрізняти в майбутньому точку $(a, 0)$ і дійсне число a , тобто завжди думати $(a, 0) = a$. Зокрема, нуль $(0, 0)$ і одиниця $(1, 0)$ системи комплексних чисел виявляються звичайними дійсними числами 0 і 1.

Нам потрібно тепер показати, що *серед комплексних чисел існує корінь рівняння (8.1)*, тобто таке число, квадрат якого дорівнює дійсному числу (-1) . Це буде, наприклад, точка $(0, 1)$, тобто точка, яка лежить на осі ординат на відстані 1 нагору від початку координат. Дійсно, застосовуючи (8.3), одержуємо:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Домовимося позначати цю точку буквою i , так що $i^2 = -1$.

Покажемо, що *для побудованих комплексних чисел може бути отриманий їх звичайний запис*. Для цього знайдемо спочатку добуток дійсного числа b на точку i :

$$ib = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b);$$

це буде, отже, точка, що лежить на осі ординат і має ординату b , причому всі точки осі ординат представлені у вигляді таких добутків. Якщо тепер (a, b) — довільна точка, то через рівність

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

одержуємо:

$$(a, b) = a + ib$$

тобто ми дійсно приходимо до алгебраїчної форми запису комплексних чисел; добуток і суму у виразі $a+ib$ варто розуміти, зазвичай, у змісті операцій, визначених у побудованій нами системі комплексних чисел.

Тепер, коли комплексні числа вже побудовані, можна без труднощів перевірити, що *весь зміст попередніх модулів* — і теорія визначників, і теорія систем лінійних рівнянь, і теорія лінійної залежності векторів, і теорія операцій над матрицями — *без всяких обмежень переноситься на той випадок, коли до розгляду допускаються будь-які комплексні числа, а не тільки числа дійсні*.

9.2. Алгебраїчні дії над комплексними числами

Яу уже згадувалось раніше, ми будемо називати комплексне число i *уявною одиницею*, а числа вигляду ib — *чисто уявними числами*, хоча існування цих чисел не викликає в нас сумнівів і ми можемо вказати ті точки площини — точки осі ординат, — якими ці числа зображуються. У записі комплексного числа a у вигляді $a = a + ib$ число a називається *дійсною частиною* числа a , а ib — його *уявною частиною*. Площина, точки якої ототожджені з комплексними числами у спосіб, викладений вище, буде називатися *комплексною площиною*. Вісь абсцис цієї площини називається *дійсною віссю*, тому що її точки зображують дійсні числа; відповідно вісь ординат комплексної площини називається *уявною віссю*.

Додавання, множення, віднімання і ділення комплексних чисел, записаних у вигляді $a+ib$, провадяться наступним чином в такий спосіб, як впливає з формул (8.2), (8.3), (8.4) і (8.6):

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d);$$

$$(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d);$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc);$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ми можемо сказати, що *при додаванні комплексних чисел складаються окремо їх дійсні частини і окремо їх уявні частини*; аналогічне правило має місце і для віднімання. Останню з цих формул немає необхідності запам'ятовувати; варто лише пам'ятати, що її можна вивести, помноживши чисельник і знаменник заданого дроби на число, яке відрізняється від знаменника лише знаком при уявній частині. Дійсно,

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Приклади.

- 1) $(2+i5) + (1-i7) = (2+1) + i(5-7) = 3-i2;$
- 2) $(3-i9) - (7+i) = (3-7) + i(-9-1) = -4-i10;$
- 3) $(1+i2)(3-i) = [1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)] + i[1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3] = 5+i5;$
- 4) $\frac{23+i}{3+i} = \frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{70-i20}{10} = 7-i2.$

Загальне правило для перших чотирьох дій

Формально розв'язання над комплексними числами $a+ib$ виконуються так же, як і над звичайними двочленами, покладаючи $i^2=-1$. При діленні одного комплексного числа на друге „знищують уявність в знаменнику” (аналогічно знищенню ірраціональності в знаменнику); помножують чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику, користуючись рівністю $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ (дійсне число).

Приклад перетворення:

$$\begin{aligned} \frac{(3-i4)(-1+i5)^2}{1+i3} + \frac{10+i7}{i5} &= \frac{(3-i4)(1-i10-25)}{1+i3} + \frac{i(10+i7)}{i5 \cdot i} = \\ &= \frac{-2(3-i4)(12+-i5)}{1+i3} + \frac{7-i10}{5} = \frac{-2(56-i33)(1-i3)}{(1+i3)(1-i3)} + \frac{7-i10}{5} = \\ &= \frac{-2(-43-i201)}{10} + \frac{7-i10}{5} = \frac{1}{5}(50+i191) = 10+i38,2. \end{aligned}$$

Зображення комплексних чисел точками площини приводить до природного бажання мати геометричне тлумачення операцій, визначених для комплексних чисел. Для додавання таке тлумачення може бути отримане без утруднень. Нехай дано числа $\alpha = a+ib$ і $\beta = c+id$.

З'єднуємо відповідні їм точки (a, b) і (c, d) відрізками з початком координат і будуюмо на цих відрізках, як на сторонах, паралелограм (рис. 8.1).

Четвертою вершиною цього паралелограма буде, мабуть, точка $a+c, b+d$. Таким чином, додавання комплексних чисел геометрично виконується за правилом паралелограма, тобто за правилом додавання векторів, які виходять з початку координат.

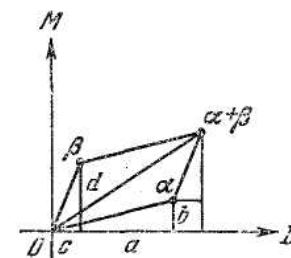


Рис. 8.1.

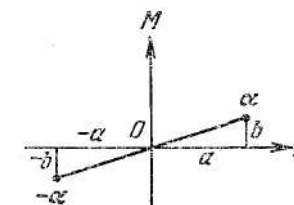


Рис. 8.2.

Далі, число, протилежне числу $\alpha = a+ib$, буде точкою комплексної площини, симетричної з точкою α відносно початку координат (рис. 8.2).

Звідси без труднощів може бути отримане геометричне тлумачення віднімання.

Геометричний зміст множення і ділення комплексних чисел стане ясним лише після того, як ми введемо для комплексних чисел новий запис, відмінний від того, який вживався нами дотепер. Запис числа α у вигляді $\alpha = a+ib$ використовує декартові координати точки, які відповідають цьому числу. Положення точки

на площині цілком визначається заданням її полярних координат: відстані r від початку координат до точки і кута φ між додатним напрямленням осі абсцис і напрямленням з початку координат на цю точку (рис.8.3).

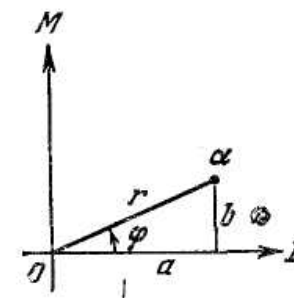


Рис. 8.3.

Число r є додатним дійсним числом, причому воно дорівнює нулеві лише для точки 0. Для α , яке лежить на дійсній

осі, тобто яке є дійсним числом, число r є абсолютною величиною α , тому і для будь-якого комплексного числа α його іноді називають *абсолютною величиною* числа α ; частіше, утім, число r називають *модулем* числа α . Позначається воно через $|\alpha|$.

Кут φ буде називатися *аргументом* числа α і позначатися $\arg \alpha$. Кут α може приймати будь-які дійсні значення, як додатні, так і від'ємні, причому додатні кути повинні відраховуватися проти годинної стрілки, однак, якщо кути відрізняються один від одного на 2π або число, кратне 2π , то відповідні їм точки площини збігаються.

У такий спосіб аргумент комплексного числа α має нескінченно багато значень, які відрізняються одне від одного на цілі кратні числа 2π ; з рівності двох комплексних чисел, заданих їх модулями і аргументами, можна лише сказати, що аргументи відрізняються на ціле кратне числа 2π , у той час як модулі рівні. Аргумент не визначений лише для числа 0; це число цілком визначається, однак, рівністю $|0|=0$.

Аргумент комплексного числа є природним узагальненням знака дійсного числа. Справді, аргумент додатного дійсного числа дорівнює 0, аргумент від'ємного дійсного числа дорівнює π ; на дійсній осі з початку координат виходить лише два напрямлення і їх можна розрізнити двома символами $+$ і $-$, тоді як на комплексній площині напрямлень, що виходять із точки 0, нескінченно багато і розрізняються вони вже кутом, який зіставлений ними з додатним напрямленням дійсної осі.

Між декартовими і полярними координатами точки існує наступний зв'язок, справедливий при будь-якому розташуванні точок на площині:

$$a=r \cos \varphi, b=r \sin \varphi. \quad (8.8)$$

Звідси

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}. \quad (8.9)$$

Застосуємо формули (8.8) до довільного комплексного числа $\alpha=a+ib$:

$$\alpha=a+ib= r \cos \varphi+i(r \sin \varphi)$$

або

$$\alpha= r (\cos \varphi+i \sin \varphi). \quad (8.10)$$

Зворотно, нехай число $\alpha=a+ib$ допускає запис вигляду

$$\alpha=r_0(\cos \varphi_0+i \sin \varphi_0)$$

де r_0 і φ_0 – деякі дійсні числа, причому $r_0 \geq 0$. Тоді

$$r_0 \cos \varphi_0=a, r_0 \sin \varphi_0=b,$$

звідки

$$r_0 = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

тобто у вигляді (8.9), $r_0=|\alpha|$. Звідси, використовуючи (8.8), одержуємо

$$\cos \varphi_0= \cos \varphi, \sin \varphi_0= \sin \varphi, \text{ тобто } \varphi_0=\arg \alpha.$$

Таким чином, *усяке комплексне число α однозначним чином записується у вигляді (8.10), де $r=|\alpha|$, $\varphi=\arg \alpha$* (причому аргумент φ визначено, звичайно, лише з точністю до доданків, кратних 2π). Цей запис числа α називається його *тригонометричною формою* і буде далі досить часто використовуватися. Числа

$$\alpha=3[\cos(\pi/4)+i \sin(\pi/4)], \beta= \cos(19\pi/3)+i \sin(19\pi/3),$$

і

$$\gamma = \sqrt{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right]$$

задані в тригонометричній формі, тут $|\alpha|=3$, $|\beta|=1$, $|\gamma|=\sqrt{3}$; $\arg \alpha=\pi/4$, $\arg \beta=(19/3)\pi$, $\arg \gamma=-\pi/7$, (або $\arg \beta=\pi/3$, $\arg \gamma=(13/7)\pi$)

З іншого боку, комплексні числа

$$\alpha' = -2[\cos(\pi/5)+i \sin(\pi/5)], \beta' = 3[\cos(2\pi/3)+i \sin(2\pi/3)],$$

$$\gamma' = 2[\cos(\pi/3)+i \sin(3\pi/4)], \delta' = \sin(3\pi/4)+i \cos(3\pi/4),$$

задано не в тригонометричній формі, хоча їх запис нагадує запис (8.10). У тригонометричній формі ці числа записуються так:

$$\alpha' = -2[\cos(6\pi/5)+i \sin(6\pi/5)], \beta' = 3[\cos(4\pi/3)+i \sin(4\pi/3)],$$

$$\delta' = \cos(7\pi/4)+i \sin(7\pi/4)]$$

Пошук тригонометричної форми числа γ' наштовхується на труднощі, які майже завжди зустрічаються при переході від звичайного запису комплексного числа до тригонометричного і назад: неможливо, крім деяких випадків, по заданих числових значеннях синуса і косинуса знайти точно кут, а для заданого кута написати точні значення його синуса і косинуса.

Нехай комплексні числа α і β задані в тригонометричній формі

$$\alpha= r(\cos \varphi+i \sin \varphi), \beta= r'(\cos \varphi'+i \sin \varphi').$$

Перемножимо ці числа:

$$\alpha \beta= [r(\cos \varphi+i \sin \varphi)] \cdot [r'(\cos \varphi'+i \sin \varphi')]=$$

$$=rr'(\cos \varphi \cos \varphi'+i \cos \varphi \sin \varphi'+i \sin \varphi \cos \varphi'- \sin \varphi$$

$\sin \varphi')$,

або

$$\alpha \beta= rr'[\cos(\varphi+\varphi')+i \sin(\varphi+\varphi')]. \quad (8.11)$$

Ми одержали запис добутку $\alpha\beta$ у тригонометричній формі, і тому $|\alpha\beta|=r r'$, або

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \quad (8.12)$$

тобто модуль добутку комплексних чисел дорівнює добуткові модулів співмножників.

Далі, $\arg(\alpha\beta)=\varphi+\varphi'$ або

$$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta \quad (8.13)$$

тобто аргумент добутку комплексних чисел дорівнює сумі аргументів співмножників. Ці правила поширюються, мабуть, на будь-яке кінцеве число множників. У застосуванні до випадку дійсних чисел формула (8.12) дає відому властивість абсолютних величин цих чисел, а (8.13) перетворюється, як легко перевірити, у правило знаків при множенні дійсних чисел.

Аналогічні правила мають місце і для частки. Дійсно, нехай $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\beta=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$, причому $\beta\neq 0$, тобто $r'\neq 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi'-i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi'+i\sin^2\varphi')} = \\ &= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi'+i\sin\varphi\cos\varphi'-i\cos\varphi\sin\varphi'+\sin\varphi\sin\varphi') \end{aligned}$$

або

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')] \quad (8.14)$$

Звідси випливає, що $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r'}$ або

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad (8.15)$$

тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює модулю діленого, діленому на модуль дільника;

далі,

$$\arg(\alpha/\beta) = \varphi - \varphi',$$

або

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta, \quad (8.16)$$

тобто аргумент частки двох комплексних чисел отримують відніманням аргументу дільника з аргументу діленого.

Геометричний зміст множення і ділення з'ясовується тепер без утруднень. Дійсно, через формули (8.12) і (8.13), ми одержимо точку, що зображує добуток числа α на число

$$\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi'),$$

якщо вектор, що йде від 0 до α (рис. 8.4), повернемо проти годинної стрілки на кут $\varphi'=\arg\beta$, а потім розтягнемо цей вектор у $r'=|\beta|$ разів (при $0\leq r'<1$ це буде стиском, а не розтягненням).

Далі, з (8.14) випливає, що при

$$\alpha = r\cos(\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$$

буде

$$\alpha^{-1} = r^{-1}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] \quad (8.17)$$

тобто

$$|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}, \quad \arg(\alpha^{-1}) = -\arg\alpha.$$

Таким чином, ми одержимо точку α^{-1} , якщо від точки α перейдемо до точки α' , що лежить на відстані r^{-1} від нуля на тій же напівпрямій, що виходить з нуля що і точка α (рис. 8.5), а потім перейдемо до точки, симетричної з α' щодо дійсної осі.

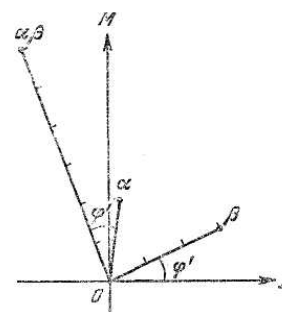


Рис. 8.4.

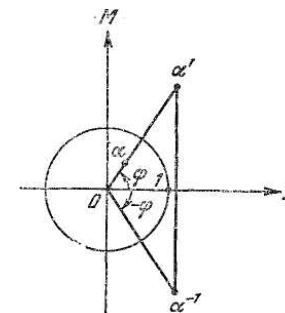


Рис. 8.5.

(Тоді і тільки тоді $|\alpha'|=|\alpha|$, якщо $|\alpha|=1$, тобто якщо точка α лежить на колі одиничного круга. Якщо α лежить усередині одиничного круга, то α' буде поза ним, і навпаки, причому цим шляхом ми одержуємо взаємно однозначну відповідність між усіма точками комплексної площини, що лежать поза одиничним кругом, і всіма точками, що лежать усередині цього круга і відмінними від нуля.)

Суму і різницю комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі, не можна виразити формулами, подібними до формул (8.11) і (8.14). Для модуля суми мають місце наступні важливі нерівності:

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (8.18)$$

тобто модуль суми двох комплексних чисел менше або дорівнює сумі модулів які складаються, але більше або дорівнює різниці цих модулів. Нерівності (8.18) впливають з відомої теореми елементарної геометрії про сторони трикутника через те, що $|\alpha + \beta|$ дорівнює, як ми знаємо, діагоналі паралелограма зі сторонами $|\alpha|$ і $|\beta|$. Спеціального розгляду, вимагає випадок, коли точки α, β і 0 лежать на одній прямій; лише в цьому випадку у формулах (8.18) можуть досягатися рівності. З (8.18), через $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ і

$$|-\beta| = |\beta| \quad (8.19)$$

(ця рівність впливає з геометричного тлумачення числа $-\beta$), впливають також нерівності

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (8.20)$$

тобто для модуля різниці мають місце такі ж нерівності, як і для модуля суми.

Нерівності (8.18) можна було б одержати також наступним шляхом. Нехай

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \beta = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$$

і нехай тригонометрична форма числа $\alpha + \beta$ є

$$\alpha + \beta = R(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Складаючи окремо дійсні й окремо уявні частини, одержуємо:

$$r \cos \varphi + r' \cos \varphi' = R \cos \psi,$$

$$r \sin \varphi + r' \sin \varphi' = R \sin \psi;$$

помноживши обидві частини першої рівності на $\cos \psi$, обидві частини другої — на $\sin \psi$ і складаючи, одержуємо:

$$r(\cos \varphi \cos \psi + i \sin \varphi \sin \psi) + r'(\cos \varphi' \cos \psi + i \sin \varphi' \sin \psi) = R(\cos^2 \psi + i \sin^2 \psi).$$

Тобто

$$r \cos(\varphi - \psi) + r' \cos(\varphi' - \psi) = R.$$

Звідси, тому що косинус ніколи не буває більше одиниці, впливає нерівність $r + r' \geq R$, тобто $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$. З другої сторони, $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = (\alpha + \beta) + (-\beta)$. Звідси, по доведеному й у силу (8.19),

$$|\alpha| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$

звідки

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|.$$

Варто помітити, що для комплексних чисел поняття «більше» і «менше» не можуть бути розумно визначені, тому що ці числа, на відміну від дійсних чисел, розташовуються не на прямій лінії, точки якої природним чином упорядковані, а на площині. Тому

саме комплексні числа (а не їх модулі) ніколи не можна з'єднувати з знаком нерівності.

Показникова форма. Часто застосовується наступна форма запису комплексного числа α з модулем ρ і аргументом φ

$$\alpha = \rho e^{i\varphi} \quad (\text{показникова форма})$$

Так, наприклад, число $1 + \sqrt{i3}$ може бути записано так:

$$\text{алгебраїчна форма} \quad 1 + \sqrt{i3} =$$

$$\text{тригонометрична форма} \quad = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) =$$

$$\text{показникова форма} \quad = 2e^{i\pi/3},$$

а також, якщо не обмежуватися головним значенням аргументу :

$$1 + \sqrt{i3} = 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right) \right] = 2e^{i \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi \right)}$$

Спряжені числа. Нехай задано комплексне число $\alpha = a + ib$. Число $a - ib$, яке відрізняється від α лише знаком при уявній частині, називається числом, спряженим з α , і позначається $\bar{\alpha}$.

Нагадаємо, що при розгляді ділення комплексних чисел ми прибігали до спряжених чисел, хоча і не вводили цієї назви.

Числом, спряженим з α , буде $\bar{\alpha}$, тобто можна говорити про пару спряжених чисел. Дійсні числа, і тільки вони, спряжені самі собі.

Геометрично спряжені числа є точками, симетричними щодо дійсної осі (рис.8.6). Звідси впливають рівності

$$|\bar{\alpha}| = |\alpha|, \quad \arg \bar{\alpha} = -\arg \alpha \quad (8.21)$$

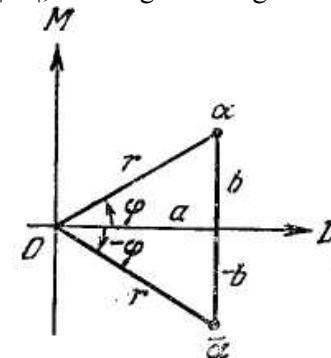


Рис. 8.6.

Сума і добуток спряжених комплексних чисел є дійсними числами.

Справді,

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \bar{\alpha} &= 2a \\ \alpha\bar{\alpha} &= a^2 + b^2 = |\alpha|^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Остання рівність показує, що число $\alpha\bar{\alpha}$ додатне навіть при $\alpha \neq 0$. Рівність

$$(a-ib) + (c-id) = (a+c) - i(b+d)$$

показує, що число, яке спряжене із сумою двох чисел, дорівнює сумі чисел спряжених із співмножниками:

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}. \quad (8.23)$$

Аналогічно, з рівності

$$(a-ib)(c-id) = (ac-bd) - i(ad+bc)$$

впливає, що число, яке спряжене з добутком, дорівнює добуткові чисел, спряжених із співмножниками:

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}. \quad (8.24)$$

Безпосередня перевірка показує також справедливність формул

$$\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta}. \quad (8.25)$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \quad (8.26)$$

Доведемо наступне твердження: якщо число α деяким чином виражене через комплексні числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ за допомогою додавання, множення, віднімання і ділення, то, замінюючи в цьому виразі всі числа β_k їх спряженими, ми одержимо число, яке спряжене з α ; зокрема, якщо число α дійсне, то воно не змінюється при заміні всіх комплексних чисел β_k їх спряженими.

Будемо доводити це твердження індукцією по n , тому що при $n=2$ воно випливає з формул (8.23) — (8.26).

Нехай число α виражено через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, не обов'язково різні. У цьому виразі вказано визначений порядок, у якому застосовуються операції додавання, множення, віднімання і ділення. Останнім кроком буде застосування однієї з цих операцій до числа γ_1 , вираженому через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, де $1 \leq k \leq n-1$, і до числа γ_2 , вираженому через числа $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$. По індуктивному припущенню заміна чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ на спряжені спричиняє заміну числа γ_1 на $\bar{\gamma}_1$ а заміна чисел $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$

на спряжені заміняє γ_2 на $\bar{\gamma}_2$. Однак по одній з формул (8.23) — (8.26) перехід від γ_1 і γ_2 до $\bar{\gamma}_1$ і $\bar{\gamma}_2$, перетворює число α в $\bar{\alpha}$.

Узагальнимо усе сказане у вигляді властивостей спряжених чисел:

$$1) \overline{(\bar{\alpha})} = \overline{(a-ib)} = \overline{[a+i(-b)]} = a - i(-b) = a + ib = \alpha,$$

тобто, числа α і $\bar{\alpha}$ є взаємно спряженими;

$$2) \alpha + \bar{\alpha} = 2\text{Re}\alpha, \quad \alpha - \bar{\alpha} = 2i\text{Im}\alpha;$$

$$3) \bar{\bar{\alpha}} = \alpha \quad \text{у тому і тільки у тому випадку, якщо } \alpha \text{ дійсне;}$$

$$4) \alpha\bar{\alpha} = (a-ib)(a+ib) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2;$$

5) $|\bar{\alpha}| = |\alpha|$, $\arg \bar{\alpha} = -\arg \alpha$, тобто точки $\bar{\alpha}$ і α симетричні щодо дійсної осі;

$$6) \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2,$$

так як

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha_1 + \alpha_2)} &= \overline{(a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2)} = \overline{[a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)]} = \\ &= a_1 + a_2 - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + (a_2 - ib_2) = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2; \end{aligned}$$

$$7) \overline{(\alpha_1\alpha_2)} = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2, \text{ що перевіряється аналогічно властивості 6).}$$

Якщо у властивості 7) замість α_1 , підставити $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, одержимо

$$\bar{\alpha}_1 = \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} \bar{\alpha}_2,$$

звідки

$$8) \overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_2}.$$

Властивості 6) і 7) автоматично поширюються на будь-яке число доданків або співмножників. Звідси

$$\overline{(\alpha^n)} = (\bar{\alpha})^n, \quad \overline{(2\alpha^n + i\alpha^m)} = \overline{(2\alpha^n)} + \overline{(i\alpha^m)} = 2(\bar{\alpha})^n - i(\bar{\alpha})^m \text{ і т.д.}$$

Узагалі, щоб перейти від будь-якого раціонального виразу, який містить любу кількість змінних і коефіцієнтів, до спряженого виразу, потрібно кожен змінну і кожен коефіцієнт замінити на спряжену величину. Можна показати, що це правило справедливе не тільки для раціональних виразів, але і для

іраціональних, для сум степеневих рядів і т.д. Звідси випливає, що будь-яка рівність між комплексними виразами описаного вигляду залишається справедливою, якщо в цій рівності усюди i замінити на $-i$, так як при цьому ми перейдемо від рівності комплексних чисел до рівності спряжених чисел. Тому числа i і $-i$ алгебраїчно нерозрізнені; зокрема, помилковою є поширена думка, що $i = \sqrt{-1}$, $-i = -\sqrt{-1}$, насправді $\sqrt{-1}$ має два значення: $\pm i$.

Спряжені числа застосовуються, зокрема, якщо в дробові виду

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

треба відокремити дійсну частину від уявної. Для цього виконують множення чисельника і знаменника на $\bar{\alpha}_2$, після чого знаменник стає дійсним і необхідне відділення легко здійснити. Наприклад,

$$\operatorname{Re} \frac{2+i5}{3-i2} = \operatorname{Re} \frac{(2+i5)(3+i2)}{(3-i2)(3+i2)} = \operatorname{Re} \frac{6+i4+i15-19}{13} = \operatorname{Re} \left(-\frac{4}{13} + i\frac{19}{13} \right) = -\frac{4}{13}.$$

8.2 Піднесення комплексних чисел до степеня і добування кореня з комплексних чисел

Додавання, віднімання, ділення і піднесення в цілу степінь — дії однозначні; добування же кореня n -го степеня дає завжди n різних значень.

Переходимо до питання про піднесення комплексних чисел до степеня і добування з них кореня. Для піднесення числа $\alpha = a+ib$ у цілий додатний степінь n досить застосувати до виразу $(a+ib)^n$ формулу бінома Ньютона (ця формула справедлива і для комплексних чисел, так як її доведення засновано лише на законі дистрибутивності), а потім скористатися рівностями

$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$$

звідки взагалі $i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1, i^{4k+3} = -i$.

Якщо число α задано в тригонометричній формі, то при цілому додатному n з формули (8.11) впливає наступна формула, яка називається загальною формулою Муавра:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (8.27)$$

тобто при піднесенні комплексного числа до степеня модуль підноситься до цього ж степеня, а аргумент збільшується на

показник степеня. Формула (8.27) вірна і для цілих від'ємних показників. Дійсно, так як $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, достатньо застосувати формулу Муавра до числа α^{-1} , тригонометричну форму якого дає формула (8.17).

Приклади

$$1) i^{37} = i, i^{122} = -1;$$

$$2) (2+i5)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot i5 + 3 \cdot 2 \cdot i^2 5^2 + i^3 5^3 = 8 + i60 - 150 - i125 = -142 - i65$$

$$3) \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos \pi + i \sin \pi) = -4;$$

$$4) \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right]^3 = 3^3 \left[\cos \left(-\frac{3}{5} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{5} \pi \right) \right] = \frac{1}{27} \left(\cos \frac{7}{5} \pi + i \sin \frac{7}{5} \pi \right).$$

Частковий випадок формули Муавра, а саме рівність

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

дозволяє легко одержати формули для синуса і косинуса кратного кута. Дійсно, розкриваючи ліву частину цієї рівності по формулі бінома і прирівнюючи окремо дійсні і уявні частини обох частин рівності, ми одержимо:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots,$$

$$\sin n\varphi = \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots;$$

тут $\binom{n}{k}$ є звичайне позначення біноміального коефіцієнта:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}$$

При $n=2$ ми приходимо до відомих формул

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

а при $n=3$ — до формул

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Добування кореня з комплексних чисел представляє вже набагато більше труднощів. Почнемо з добування квадратного кореня з числа $\alpha = a + ib$. Ми не знаємо поки, чи існує таке комплексне число, квадрат якого дорівнює α . Припустимо, що таке число $u + iv$ існує, тобто, уживаючи звичайну символіку, можна написати

$$\left. \begin{array}{l} \text{З рівності} \\ \text{впливає} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sqrt{a+ib} = u+iv. \\ (u+iv)^2 = a+ib \\ \left. \begin{array}{l} u^2 - v^2 = a \\ 2uv = b \end{array} \right\}. \end{array} \quad (8.28)$$

Підносячи до квадрату обидві частини кожну з рівностей (8.28), а потім складаючи їх, одержуємо:

$$(u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2,$$

звідки

$$u^2 + v^2 = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

додатний знак узятий тому, що числа u і v дійсні, а тому ліва частина рівності додатна. З цієї рівності і з першої з рівностей (8.28) одержуємо:

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a^2 + b^2} \right), \\ v^2 &= \frac{1}{2} \left(-a + \sqrt{a^2 + b^2} \right) \end{aligned}$$

Ми приходимо, добуваючи квадратні корені, до двох значень для u , які відрізняються одне від одного знаком, а також до двох значень для v . Усі ці значення будуть дійсними, тому що квадратні корені будуть добуватися при будь-яких a і b з додатних чисел. Отримані значення для u і v не можна комбінувати між собою довільним чином, тому що, через другу з рівностей (8.28), знак добутку uv повинний збігатися зі знаком b . Це дає дві можливі комбінації значень u і v , тобто два числа вигляду $u + iv$, які можуть служити значеннями квадратного кореня з числа α ; ці числа відрізняються одне від одного знаком. Елементарна, хоча і громізка, перевірка (піднесення отриманих чисел до квадрату, окремо для випадку $b > 0$ і для випадку $b < 0$) показує, що знайдені нами числа дійсно є значеннями квадратного кореня з числа α . Таким чином, добування

квадратного кореня з комплексного числа завжди можливе і дає два значення, які відрізняються одне від одного знаком.

Зокрема, тепер робиться можливим добування квадратного кореня u з від'ємного дійсного числа, причому значення цього кореня будуть чисто уявними. Справді, якщо $a < 0$ і $b = 0$, то

$$\sqrt{a^2 + b^2} = -a,$$

так як цей корінь повинен бути додатним, а тоді

$$u^2 = \frac{1}{2}(a - a) = 0,$$

тобто $u = 0$, звідки $\sqrt{a} = \pm iv$.

Приклад.

Нехай

$$\alpha = 21 - i20.$$

Тоді

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29.$$

Тому

$$u^2 = \frac{1}{2}(21 + 29) = 25, \quad v^2 = \frac{1}{2}(-21 + 29) = 4,$$

звідки $u = \pm 5, v = \pm 2$.

Знаки u і v повинні бути різними через від'ємності b ,

$$\sqrt{21 - i20} = \pm(5 - i2).$$

Спроби добування коренів з комплексних чисел, заданих у вигляді $a + ib$ більш високого степеня, ніж другий, натрапляють на нездоланні труднощі. Так, якби ми захотіли таким же методом, як вище, добути з числа $a + ib$ кубовий корінь, то повинні були б розв'язати деяке допоміжне кубове рівняння. З іншого боку, тригонометрична форма досить добре пристосована для добування коренів будь-якого степеня і, користуючись нею, ми зараз розв'яжемо це питання.

Нехай потрібно добути корінь n -го степеня з числа $\alpha = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.

Припустимо, що це зробити можна і що в результаті виходить число $\rho(\cos\theta + i \sin\theta)$, тобто.

$$[\rho(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i \sin\varphi). \quad (8.29)$$

Тоді по формулі Муавра,

$$\rho^n = r, \quad \text{тобто } \rho = \sqrt[n]{r},$$

де в правій частині стоїть однозначно визначене додатне значення кореня n -го степеня з додатного дійсного числа r . З іншого боку, аргумент лівої частини рівності (8.29) є $n\theta$. Не можна стверджувати, однак, що $n\theta$ дорівнює φ , так як ці кути можуть у дійсності відрізнятися на доданок, що є деяким цілим кратним числа 2π . Тому $n\theta = \varphi + 2k\pi$, де k – ціле число, звідки

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Зворотно, якщо ми беремо число

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

то при будь-якому цілому k , додатному або від'ємному, n -ий степінь цього числа дорівнює α . Таким чином,

$$\sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right). \quad (8.30)$$

Придаючи k різні значення, ми не завжди будемо одержувати різні значення шуканого кореня. Дійсно, при

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (8.31)$$

ми одержимо n значень кореня, які усі будуть різними, тому що збільшення k на одиницю спричиняє збільшення аргументу на $2\pi/n$. Нехай тепер k довільне. Якщо $k = nq + r$, $0 \leq r \leq n - 1$, то

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{n} = \frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} = \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi,$$

тобто значення аргументу при нашому k відрізняється від значення аргументу при $k=r$ на число, кратне 2π ; ми одержуємо, отже, таке ж значення кореня, як при значенні k , рівному r , тобто який входить в систему (8.31).

Таким чином, добування кореня n -го степеня з комплексного числа α завжди можливе і дає n різних значень. Усі значення кореня n -го степеня розташовані на колі радіуса

$$\sqrt[n]{|\alpha|}$$

с центром у нулі і поділяють це коло на n рівних частин.

Зокрема, корінь n -го степеня з дійсного числа a також має n різних значень; дійсних серед цих значень буде два, одне або жодного в залежності від знака a і парності n .

Приклади.

$$1) \beta = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$k=0: \beta_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$k=1: \beta_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11}{12}\pi + i \sin \frac{11}{12}\pi \right);$$

$$k=2: \beta_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19}{12}\pi + i \sin \frac{19}{12}\pi \right);$$

$$2) \beta = \sqrt{i} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2};$$

$$\beta_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \beta_1 = \cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi = -\beta_0$$

$$3) \beta = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$\beta_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$\beta_1 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$\beta_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Корені з одиниці. Особливо важливий випадок добування кореня n -го степеня з числа 1. Цей корінь має n значень, причому, через рівність $1 = \cos 0 + i \sin 0$ і формули (8.30), усі ці значення або, як ми будемо говорити, усі корені n -го степеня з одиниці, даються формулою

$$\sqrt[n]{1} = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n); \quad k=0, 1, \dots, n-1 \dots \quad (8.32)$$

Дійсні значення кореня n -го степеня з одиниці виходять з формули (8.32) при значеннях $k=0$ і $\pi/2$, якщо n парний і

при $k=0$, якщо n непарний. На комплексній площині корені n -го степеня з одиниці розташовані на колі одиничного круга і поділяють його на n рівних дуг; однією з точок ділення служить число 1. Звідси випливає, що ті з коренів n -го степеня з одиниці, які не є дійсними, розташовані симетрично відносно дійсної осі, тобто попарно спряжені.

Квадратний корінь з одиниці має два значення: 1 та -1 , корінь четвертого степеня з одиниці — чотири значення: 1, -1 , i та $-i$. Для подальшого корисно запам'ятати, значення кубового кореня з одиниці. Це будуть, через (8.32), числа $\cos(2k\pi/3)+i\sin(2k\pi/3)$, де $k=0, 1, 2$, тобто, крім самої одиниці, також спряжені між собою числа

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.33)$$

Усі значення кореня n -го степеня з комплексного числа α можна одержати множенням одного з цих значень на всі корені n -го степеня з одиниці. Дійсно, нехай β буде одне зі значень кореня n -го степеня з числа α , тобто $\beta^n = \alpha$ а ε - довільне значення кореня n -го степеня з одиниці, тобто $\varepsilon^n = 1$. Тоді $(\beta\varepsilon)^n = \beta^n \varepsilon^n = \alpha$, тобто $\beta\varepsilon$ також буде одним зі значень для $\sqrt[n]{\alpha}$. Помноживши β на кожний з коренів n -го степеня з одиниці, ми одержуємо n різних значень кореня n -го степеня з числа α , тобто всі значення цього кореня.

Приклади.

- 1) Одне зі значень кубового кореня з -8 є -2 . Два інших будуть, через (8.33), числа $-2\varepsilon_1 = 1-i\sqrt{3}$ та $-2\varepsilon_2 = 1+i\sqrt{3}$ (див. вище приклад 3)).
- 2) $\sqrt[4]{81}$ має чотири значення: 3, -3 , $i3$, $-i3$.

Добуток двох коренів n -го степеня з одиниці сам є корінь n -го степеня з одиниці. Дійсно, якщо $\varepsilon^n = 1$ і $\eta^n = 1$, то $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n \eta^n = 1$. Далі, число, зворотне кореневі n -го степеня з одиниці, саме є такий же корінь. Справді, нехай $\varepsilon^n = 1$. Тоді з $\varepsilon \cdot \varepsilon^{-1} = 1$ випливає $\varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1$, тобто $(\varepsilon^{-1})^n = 1$. Узагалі, усякий степінь кореня n -го степеня з одиниці є також корінь n -го степеня з одиниці.

Усякий корінь k -го степеня з одиниці буде також коренем l -го степеня з одиниці для всякого l , кратного k . Звідси випливає,

що якщо ми будемо розглядати всю сукупність коренів n -го степеня з одиниці, то деякі з цих коренів уже будуть коренями n' -го степеня з одиниці для деяких n' , що є дільниками числа n . Для всякого n існують такі корені n -го степеня з одиниці, що не є коренями з одиниці ніякого меншого степеня. Такі корені називаються *першообразними коренями n -го степеня з одиниці*. Їх існування випливає з формули (8.32): якщо значення кореня, яке відповідає даному значенню k , ми позначимо через ε_k (так що $\varepsilon_0 = 1$), то на підставі формули Муавра (8.27)

$$\varepsilon_{k \cdot 1} = \varepsilon_k.$$

Ніякий степінь числа ε_1 , менше, ніж n -й, не буде, отже, дорівнювати 1, тобто

$$\varepsilon_1 = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$$

є першообразним коренем.

Корінь n -го степеня з одиниці ε тоді і тільки тоді буде першообразним, якщо його степені ε^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, різні, тобто якщо ними вичерпуються всі корені n -го степеня з одиниці.

Дійсно, якщо всі зазначені степені числа ε різні, то ε буде, мабуть, першообразним коренем n -го степеня. Якщо ж, наприклад, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ при $0 \leq k < l \leq n-1$, то $\varepsilon^{l-k} = 1$, тобто, через нерівності $1 \leq l-k \leq n-1$, корінь ε не буде першообразним.

Число ε_1 , яке знайдене вище, у загальному випадку — не єдиний першообразний корінь n -го степеня. Для знаходження всіх цих коренів служить наступна теорема.

Якщо ε є першообразний корінь n -го степеня з одиниці, то число ε^k тоді і тільки тоді буде першообразним коренем n -го степеня, якщо k взаємно просто з n .

Справді, нехай d буде найбільшим загальним дільником чисел k і n . Якщо $d > 1$ і $k = dk'$, $n = dn'$, то

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1,$$

тобто корінь ε^k виявився коренем n' -го степеня з одиниці.

Нехай, з іншого боку, $d=1$ і нехай, разом з тим, число ε^k виявляється коренем m -го степеня з одиниці, $1 \leq m < n$. Таким чином

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1$$

Так як число ε є першообразний корінь n -го степеня з одиниці, тобто лише його степені з показниками, які кратні n , можуть бути рівними одиниці, то число km буде кратним n . Звідси

виходить, однак, так як $1 \leq m < n$, то числа k і n не можуть бути взаємно простими в протиріччі з припущенням.

Таким чином, число первісних коренів n -го степеня з одиниці дорівнює числу цілих додатних чисел k , менших n і взаємно простих з ним. Вираз для цього числа, яке позначається через $\phi(n)$, можна знайти в будь-якому курсі теорії чисел.

Якщо p — просте число, то першообразними коренями p -го степеня з одиниці будуть усі ці корені, крім самої одиниці. З іншого боку, серед коренів четвертого степеня з одиниці першообразними будуть i та $-i$, але не 1 та -1 .

Алгебраїчні функції комплексної змінної. Якщо величина a є комплексною змінною (величиною, що приймає будь-яке комплексне значення $a = a + ib$), то результат проведення над a (і, може бути, деякими сталими) визначених алгебраїчних дій є алгебраїчною функцією цієї змінної $w = f(\bar{a})$. Такими є, наприклад, функції

$$w = c\bar{a} + d, \quad w = \frac{1}{\bar{a}}, \quad w = \bar{a}^2, \quad w = \frac{\bar{a} + i}{\bar{a} - i}, \quad w = \sqrt{\bar{a}^2 - c^2}.$$

8.3. Комплексні числа як оператори

Оператори розтягування і повороту. В електротехніці, де векторами зображуються синусоїдальні величини, розглядається задача переходу від даного вектора \mathbf{a} (сила струму) до іншого вектора \mathbf{b} (напруга). Це виконується множенням довжини вектора \mathbf{a} на додатне число ρ і поворотом вектора на деякий кут ϕ (проти годинної стрілки, якщо $\phi > 0$, і по годинній стрілці, якщо $\phi < 0$). Такий перехід від \mathbf{a} до \mathbf{b} відзначають рівністю: $\rho_{\phi} \mathbf{a} = \mathbf{b}$ (на рис. 8.7, наприклад, $2_{\pi/4} \mathbf{a} = \mathbf{b}$).

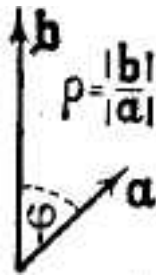


Рис. 8.7.

Символ ρ_{ϕ} є оператор розтягування і повороту (Drehstreckungsoperator). Якщо $\rho < 1$, то фактично відбувається не розтягування, а стиск), що діє на вектор \mathbf{a} . Якщо $\rho = 1$, то маємо оператор „чистого“ повороту.

Скалярний множник як оператор. Множення скаляра λ на вектор \mathbf{a} дає вектор \mathbf{b} , колінеарний \mathbf{a} : $\lambda \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Можна розглядати додатний скаляр як оператор вигляду ρ_0 , а від’ємний скаляр — як оператор вигляду ρ_{π} , наприклад:

$$2_0 \mathbf{a} = 2\mathbf{a}, \quad 2_{\pi} \mathbf{a} = -2\mathbf{a}$$

Множення і ділення операторів. Послідовна дія двох операторів $\rho'_{\phi'}$ і $\rho''_{\phi''}$ на вектор \mathbf{a} розтягує \mathbf{a} в $\rho' \cdot \rho''$ раз і повертає його на кут $\phi' + \phi''$, тобто відповідає операторові $(\rho' \cdot \rho'')_{\phi' + \phi''}$:

$$\rho'_{\phi'} \cdot \rho''_{\phi''} \mathbf{a} = (\rho' \cdot \rho'')_{\phi' + \phi''} \mathbf{a}$$

Цей оператор називається *добутком* операторів

$$\rho = \rho'_{\phi'} \cdot \rho''_{\phi''}, \quad \text{якщо } \rho = \rho' \rho'' \text{ і } \phi = \phi' + \phi''.$$

Ділення операторів - дія, зворотна множенню:

$$\rho_{\phi} = \frac{\rho'_{\phi'}}{\rho''_{\phi''}}, \quad \text{якщо } \rho = \frac{\rho'}{\rho''} \text{ і } \phi = \phi' - \phi''$$

Додавання і віднімання операторів.

Нехай два оператори $\rho'_{\phi'}$ і $\rho''_{\phi''}$ діють на один вектор \mathbf{a} : $\rho'_{\phi'} \mathbf{a} = \mathbf{b}$

$$\text{і } \rho''_{\phi''} \mathbf{a} = \mathbf{c}$$

Сумою (різницею) цих операторів називається оператор ρ_{ϕ} , який, діючи на вектор \mathbf{a} , дає вектор, що є сумою (різницею) векторів \mathbf{b} і \mathbf{c} (рис. 8.8) $\rho'_{\phi'} \pm \rho''_{\phi''} = \rho_{\phi}$,

$$\text{якщо } \rho'_{\phi'} \mathbf{a} \pm \rho''_{\phi''} \mathbf{a} = \rho_{\phi} \mathbf{a}.$$

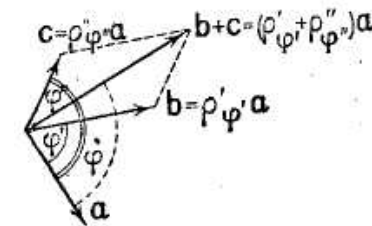


Рис. 8.8.

Піднесення оператора до степеня і витяг кореня з оператора визначаються як повторне множення і дія, зворотна йому:

$$(\rho_\varphi)^n = (\rho_\varphi^n) \rho_\varphi,$$

$$\sqrt[n]{\rho_\varphi} = \left(\sqrt[n]{\rho}\right)_{\varphi + \frac{2k\pi}{n}}.$$

Властивість оператора $1_{\pi/2}$. Оператор $1_{\pi/2}$ (поворот проти годинної стрілки на прямий кут без зміни довжини вектора) при піднесенні до квадрату дає 1_π , тобто оператор -1 :

$$(1_{\pi/2})^2 = -1,$$

$$(1_{\pi/2})^2 \mathbf{a} = -\mathbf{a}.$$

Ця властивість дозволяє позначити оператор $1_{\pi/2}$ символом i . На рис. 8.9 $\mathbf{b} = i\mathbf{a}$.

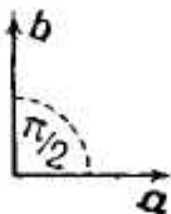


Рис. 8.9.

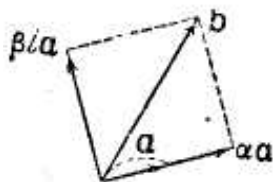


Рис. 8.10.

Комплексна форма оператора. Розкладаючи вектор $\mathbf{b} = \rho_\varphi \mathbf{a}$ на суму двох векторів, один із яких колінарний \mathbf{a} , а інший перпендикулярний до нього:

$$\rho_\varphi \mathbf{a} = \alpha \mathbf{a} + i\beta \mathbf{a}$$

одержуємо, одночасно і розкладання оператора ρ_φ на суму: оператора розтягування (α) і оператора повороту на 90° з розтягуванням (βi) (рис. 8.10):

$$\rho_\varphi = \alpha + \beta i$$

Алгебра операторів. Оператори розтягування і повороту є однією з інтерпретацій комплексних чисел, і алгебра операторів зводиться до алгебри комплексних чисел. Оператор ρ_φ відповідає комплексному числу з модулем ρ і аргументом φ :

$$\rho_\varphi = \rho e^{i\varphi} = \rho (\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

8.4. Комплексні функції від дійсного аргументу

Означення і властивості. Іноді приходится розглядати такі функції, для яких хоча незалежна змінна дійсна, але сама функція приймає комплексні значення. Прикладами можуть служити

- 1) $z = (t+i)^3$;
- 2) $z = Me^{pt}$ ($p = a+i\omega$) і т.д.

тут незалежна змінна позначена буквою t , а функція — буквою z . Якщо розкласти значення функції на дійсну і уявну частини, $z = x + iy$, то кожна з цих частин буде функцією t (тут x і y — дійсні числа, а i — уявна одиниця); так, у приведених прикладах одержимо

$$1) z = t^3 - 3t, \quad y = 3t^2 - 1; \quad 2) x = Me^{at} \cos \omega t, \quad y = Me^{at} \sin \omega t$$

У загальному випадку, якщо

$$z = f(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \tag{8.34}$$

то ми одержуємо

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t); \tag{8.35}$$

Зворотно, від (8.35) можна перейти до (8.34). Таким чином, завдання комплексної функції від дійсного аргументу рівнозначно завданню двох звичайних, дійсних функцій від того ж аргументу. Ця картина зовсім аналогічна завданню векторної функції від скалярного аргументу; аналогія стане ще більшою, якщо витлумачувати комплексні числа як вектори.

У результаті теорія комплексних функцій від дійсного аргументу не має істотно нових рис у порівнянні з теорією дійсних функцій. Зокрема, визначення безперервності, похідної і т.п. переносяться без змін. При цьому усі формули диференціювання зберігаються, наприклад.

$$[(t+i)^3]' = 3(t+i)^2, \quad (Me^{pt})' = Mpe^{pt} \quad \text{і т.п.}$$

Зображується функція (8.34) лінією в комплексній площині з параметричними рівняннями (8.35).

При застосуванні функцій вигляду (8.34) треба мати на увазі наступні очевидні властивості:

якщо комплексні функції складаються, то і їх дійсні частини складаються, а також їх уявні частини складаються;

якщо комплексна функція збільшується на дійсну сталу або дійсну функцію, то дійсна і уявна частини одержують той же множник;

якщо комплексну функцію продиференціювати, то над її дійсною і уявною частинами виконується та ж дія.

Формулами ці властивості можна записати так:

$$\operatorname{Re}[f_1(t)+f_2(t)] = \operatorname{Re} f_1(t) + \operatorname{Re} f_2(t) \quad \text{і т.д.}$$

Ці властивості дають можливість, замість того щоб робити зазначені дії над дійсною або уявною частиною, здійснити ці дії над усією комплексною функцією, а від результату взяти дійсну або відповідно уявну частину. Такий перехід до комплексних величин зі зворотним переходом до дійсних величин які шукаються може виявитися простіше і наочніше, ніж безпосередні дії над дійсними величинами.

Застосування комплексних функцій для опису коливань.

Функцію

$$U(t) = Me^{i(\omega t + \alpha)} = M \cos(\omega t + \alpha) + iM \sin(\omega t + \alpha) \quad (M > 0, \omega > 0) \quad (8.36)$$

зручно застосувати для дослідження гармонійних коливань. Для цього треба помітити, що величина (8.36) має модуль M і аргумент $\omega t + \alpha$, тобто вона представлена вектором сталої довжини, який рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω

Розглянемо, наприклад, накладення коливань, які відбуваються з однаковою частотою. Нехай треба скласти дві величини:

$$u_1(t) = M_1 \sin(\omega t + \alpha_1) \quad \text{і} \quad u_2(t) = M_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Для цього уведемо відповідні комплексні величини

$$U_1(t) = M_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} \quad \text{і} \quad U_2(t) = M_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}$$

у яких i_1 і i_2 будуть служити уявними частинами.

Вектори $U_1(t)$ і $U_2(t)$ рівномірно обертаються з кутовою швидкістю ω , виходить, і вектор $U_1(t) + U_2(t)$ рівномірно обертається з тією же швидкістю і тому його можна представити у вигляді (8.36). Щоб знайти M і α , досить розглянути картину в момент $t=0$ (рис. 8.11); з неї, проектуючи на осі координат, одержимо

$$\begin{aligned} M \cos \alpha &= M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2, \\ M \sin \alpha &= M_1 \sin \alpha_1 + M_2 \sin \alpha_2 \end{aligned} \quad (8.37)$$

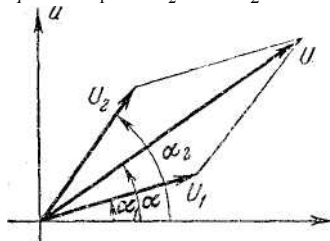


Рис. 8.11.

Узявши уявну частину від $U(t)$, ми приходимо остаточно до висновку, що: $u_1(t) + u_2(t) = M \sin(\omega t + \alpha)$, де M і α знаходяться з рівностей (8.37).

Аналогічний результат виходить при накладанні будь-якого числа гармонійних коливань, що відбуваються з однаковою частотою. Перевага експоненти (8.36) перед тригонометричними функціями особливо виявляються при диференціюванні:

$$\frac{dU}{dt} = Me^{i(\omega t + \alpha)} i\omega = i\omega U.$$

Виходячи з дій над комплексними числами одержуємо вектор, що також рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω , але випереджаючий U на 90° і що має модуль у ω раз більший.

При подальших диференціюваннях ці поворот і розтягування повторюються. Покажемо застосування функції вигляду (8.36) к розрахунку сталого струму в ланцюзі з активним опором і індуктивністю (рис. 8.12), якщо до ланцюга підключено джерело напруги, що змінюється по гармонійному закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \beta)$.

При цьому в ланцюзі виникає струм, що також змінюється по гармонійному закону $j = j_0 \sin(\omega t + \alpha)$, однак j_0 і α нам заздалегідь не відомі.

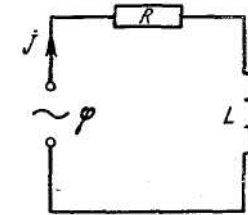


Рис. 8.12.

Прирівнюючи φ сумі падінь напруг на R і L на основі відомих у фізиці законів, одержимо основне рівняння задачі

$$Rj + L \frac{dj}{dt} = \varphi.$$

Уведемо поняття комплексної напруги і комплексної сили струму по формулах

$$\Phi = \varphi_0 e^{i(\omega t + \beta)}, \quad J = j_0 e^{i(\omega t + \alpha)};$$

«дійсні» напруга і сила струму служать уявними частинами цих виразів. У силу властивостей, які описані у попередньому розділі, для одержання j треба розв'язати рівняння

$$RJ+L \frac{dJ}{dt} = \Phi,$$

а від відповіді взяти уявну частину. Відповідно до формули (8.38) одержуємо

$$RJ+Li\omega J = \Phi, \text{ тобто } J = \frac{\Phi}{R+i\omega L}. \quad (8.39)$$

Ми бачимо, що індуктивність L можна витлумачити як якийсь опір, чисельно рівний $i\omega L$; це значення називається *удаваним опором або імпедансом* елемента L . Записавши $(R+i\omega L)^{-1}$ у показниковій формі $re^{-i\psi}$, з (8.39) одержимо

$$j_0 = r \varphi_0 = \varphi_0 (R^2 + \omega^2 L^2)^{-1/2}, \quad \alpha = \beta - \arctg \frac{\omega L}{R}.$$

Перетворення площини. Функція $w=f(z)$, де $z=x+iy$ і $w=u+iv$, визначена, якщо відомі дві функції від двох дійсних змінних:

$$u=u(x,y), v=v(x,y).$$

Функція комплексного змінного робить перетворення площини z у площину w : кожна точка z_1 переходить у відповідну точку w_1 , геометричні образи (криві, області) площини z при переході в площину w перетворюються в інші. Крива $x=x(t), y=y(t)$ переходить у криву $u=u[x(t), y(t)], v=v[x(t), y(t)]$ (t — параметр).

Координатні лінії $y=c$ переходять в $u=u(x, c), v=v(x, c)$, де x — параметр; координатні лінії $x=c_1$ переходять у $u=u(c_1, y), v=v(c_1, y)$, де y — параметр.

Приклад відображення: $u=2x+y, v=x+2y$ (рис. 8.13). Лінії $y=c$ переходять у $u=2x+c, v=x+2c$, тобто в прямі

$$v = \frac{u}{2} + \frac{3}{2}c;$$

аналогічно, лінії $x=c_1$ у прямі $v=2u-3c_1$, заштрихована область переходить у заштриховану.

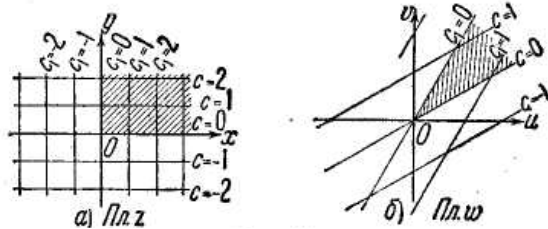


Рис. 8. 13.

Аналітичні функції. Функція \tilde{w} .

Нехай $w=f(z), w+\Delta w=f(z+\Delta z)$ (рис. 8.14).

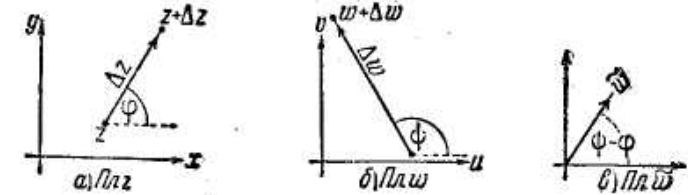


Рис. 8.14.

Будемо зменшувати абсолютну величину Δz , не змінюючи його аргументу (напрявлення). Функція w називається *безпервною* у точці x , якщо $|\Delta w| \rightarrow 0$ при $|\Delta z| \rightarrow 0$ і при будь-якому напрямленні Δz . Розглянемо комплексне число

$$\tilde{w} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z};$$

воно, узагалі кажучи, залежить як від числа z (є функцією z), так і від напрямлення Δz . Так як

$$\tilde{w} \approx \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

(з точністю до нескінченно малих), то

$$|\tilde{w}| \approx \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$$

і $\arg \tilde{w} \approx \arg \Delta w - \arg \Delta z$: модуль \tilde{w} показує, у скільки разів при перетворенні площини збільшується довжина вектора Δz , а аргумент \tilde{w} показує, на який кут повертається вектор Δz при переході до Δw .

Аналітичні функції. Якщо в даній точці z число \tilde{w} те саме для всіх напрямлень Δz , то функція w називається *голоморфною* (інакше: *правильною, регулярною, моногеною*) у цій точці. Функція, яка голоморфна у всіх точках деякої області, називається *аналітичною* в цій області, а \tilde{w} , яка є в цьому випадку функцією тільки від z , називається *похідною* від функції w і позначається dw/dz або w' :

$$w' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

Необхідні і достатні умови аналітичності функції $w=f(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{умови Коши-Римана}).$$

Наприклад: функція $w=z^2(u=x^2-y^2, v=2xy)$ - аналітична усюди; функція $u=2x+y, v=x+2y$ - не аналітична ніде.

Якщо функція є аналітичною в деякій області за винятком деяких окремих її точок, то такі точки, у яких функція неголоморфна, називаються *особливими*. Для аналітичної функції u і v є *гармонійними функціями*, тобто задовольняють рівнянню Лапласа:

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Знаючи гармонійну функцію u , можна з точністю до сталого доданка визначити *спряжену* з нею гармонійну функцію v з умов Коши-Римана:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \text{де} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

і, аналогічно, по v визначити u .

Формула Ейлера. Перейдемо до трансцендентних дій над комплексними числами. Раніше ми бачили, що для дійсних x

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (8.40)$$

Якщо замість x поставити z , одержимо *визначення експоненти з комплексним показником*: по визначенню

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!}z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots \quad (8.41)$$

Далі ми побачимо, що це визначення має сенс для всіх z , а також що при цьому зберігається основна властивість експоненти:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad (8.42)$$

Формули (8.40) і (8.41) показують, що в окремому випадку, коли z дійсне, це нове визначення e^z збігається зі старим; узагалі *всьяке нове визначення не повинне суперечити уже установленим фактам*. У той же час формула (8.42) підтверджує доцільність саме даного визначення e^z . Подібним чином можна стандартним способом визначити для комплексних значень аргументу функції, спочатку заданих лише для дійсних значень аргументу. Для цього

треба задану функцію $f(x)$ розкласти в ряд Тейлора по степеням x або степеням $x - a$, де a — яке-небудь дійсне число, після чого замінити x на z і позначити суму отриманого ряду через $f(z)$. Так, подібно (8.41), одержуємо для комплексних z

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (8.43)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (8.44)$$

і т.д. При цьому, як ми побачимо далі, всі основні формули, що мають характер тотожних рівностей і справедливі для дійсних значень аргументу (такі, наприклад, як $\sin(-x) = -\sin x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ і т.п.), залишаються в силі і для комплексних його значень. На основі приведених формул розкривається глибокий зв'язок показникової функції з тригонометричними. Саме, якщо в (8.41) підставити iz замість z , ми одержимо

$$e^{iz} = \left(1 + \frac{1}{1!}iz - \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}iz^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{5!}iz^5 - \frac{1}{6!}z^6 - \frac{1}{7!}iz^7 + \dots \right) = \\ = \left(1 + \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{3!}iz^3 + \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{5!}iz^5 - \frac{1}{6!}z^6 - \frac{1}{7!}iz^7 + \dots \right)$$

Звідси за допомогою (8.43) і (8.44) виводимо дуже важливу *формулу Ейлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (8.45)$$

Застосовується також формула

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

і впливаючі з неї і (8.45) формули

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2}. \quad (8.46)$$

З формули Ейлера (8.45) на основі властивості (8.42) одержуємо вираз для експоненти з будь-яким комплексним показником

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (8.47)$$

Порівняння з тригонометричною формою показує, що

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y + 2k\pi. \quad (8.48)$$

Зокрема видно, що завжди

$$|e^z| > 0, \quad \text{тобто} \quad |e^z| \neq 0.$$

Якщо у формулі (8.47) замість e^z писати z , то на підставі (8.48) одержимо

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z| e^{i \arg z} = \rho e^{i\varphi}.$$

Така «показникова форма» комплексного числа буває зручна для виконання над ним алгебраїчних дій.

З формул (8.46) випливають співвідношення між тригонометричними і гіперболічними функціями: $\cos z = ch iz$, $\sin z = sh iz/i$, тобто $sh iz = isin z$. Звідси, підставивши iz замість z , одержимо також $\cos iz = ch z$, $\sin i = i sh z$.

У цьому складається причина глибокого зв'язку між зазначеними функціями, і на основі цього зв'язку можна переходити від співвідношень між тригонометричними функціями до співвідношень для гіперболічних функцій і зворотно.

За допомогою формул (8.46) легко одержати також вираз степенів синуса і косинуса через тригонометричні функції кратних аргументів (дуг); наприклад:

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i \cdot 3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i \cdot 3x}}{8} = \\ &= \frac{e^{i \cdot 3x} + e^{-i \cdot 3x}}{8} + \frac{3}{8}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3 \cos x}{4} \end{aligned}$$

і т.п. Таке перетворення застосовується при інтегруванні.

Логарифми комплексних чисел. Означення «комплексних логарифмів» дається таке ж, як дійсних: логарифм числа z — це число w , для якого $z = e^w$. Щоб знайти, чому дорівнює такий логарифм, позначимо

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = u + iv.$$

Тоді з формули (8.47) одержуємо

$$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z = e^w = e^n (\cos v + i \sin v)$$

Звідси, тому що u і v дійсні

$$e^n = \rho, \text{ тобто } u = \ln \rho, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad (k - \text{ціле}),$$

де під $\ln \rho$ розуміється «звичайний», дійсний логарифм додатного числа. Отже,

$$\text{Ln} z = u + iv = \ln \rho + i\varphi + i2k\pi = \ln|z| + i \arg z,$$

де під Ln розуміється сукупність усіх значень логарифма. Отже, логарифм комплексного числа має нескінченну кількість різних значень. Єдиним виключенням є число «нуль», що не має логарифма; можна умовно написати, що $\text{Ln } 0 = -\infty + iv$, де v довільне.

Так як дійсні додатні числа - це частковий випадок комплексних, то і їх логарифм має нескінченне число значень, з них одне — «звичайне», дійсне, а інші — уявні. Наприклад

$$\text{Ln} 1 = \ln 1 + i0 + i2k\pi = i2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

при $k=0$ одержуємо старе значення $\ln 1=0$, але також за логарифм 1 можна прийняти $i2\pi, -i2\pi, i4\pi$ і т.п. Перевіримо це ще раз:

$$e^{i2k\pi} = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = 1 + i0 = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots); \quad (8.50)$$

Від'ємні числа також мають логарифми, однак усі їх значення уявні. Наприклад,

$$\text{Ln}(-1) = i\pi(2k+1).$$

За допомогою логарифмів визначається піднесення комплексного числа до будь-якого комплексного степеня:

$$z_1^{z_2} = (e^{\text{Ln} z_1})^{z_2} = e^{z_2 \text{Ln} z_1},$$

причому права частина обчислюється по формулі (8.47). Так як логарифми мають нескінченне число значень, то і увесь степінь має, узагалі говорячи, нескінченне число значень.

Конформні відображення. Перетворення площини, здійснюване аналітичною функцією, володіє важливою властивістю; в околиці точки z , для якої $w' \neq 0$, нескінченно малі вектори всіх напрямлень:

1) збільшуються (або зменшуються) по своїй довжині в одне і те ж число раз, рівне $|w'|$ (з точністю до нескінченно малих вищого порядку), і 2) повертаються на той самий кут, рівний $\arg w'$. У такий спосіб фігури в нескінченно малій області перетворюються в собі подібні — зберігають форму (рис.8.15).

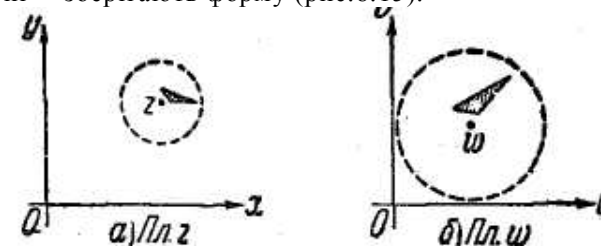


Рис. 8.15.

Таке перетворення називається *конформним відображенням*. Фігури кінцевих розмірів спотворюються, але кути між двома кривими зберігаються (*консерватизм кутів*, рис.8.16).

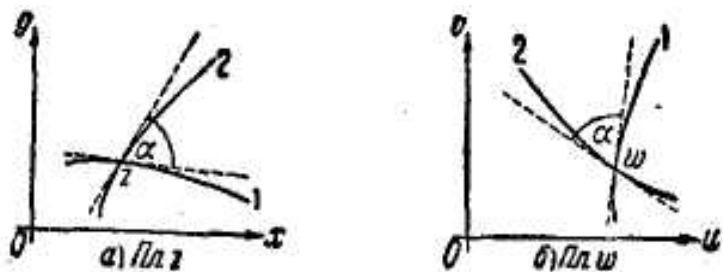


Рис. 8.16.

Зокрема, координатні лінії $x=\text{const}$ і $y=\text{const}$ у конформному відображенні перетворюються в два сімейства взаємно ортогональних кривих і, зворотно, для будь-якого конформного відображення існує деяка ортогональна сітка кривих, що перетвориться в прямокутну декартову сітку. У прикладі: $u=2x+y$, $v=x+2y$ ортогональність порушується; у прикладі $w=z^2$ вона зберігається; координатні лінії переходять у два сімейства софокусних парабол (рис. 8.17).

У точці $z=0$ маємо $w=0$ - конформність порушується. Перший координатний квадрант переходить у верхню напівплощину.

Конформні відображення застосовуються в електротехніці, гідро- і аеромеханіці й інших прикладних питаннях.

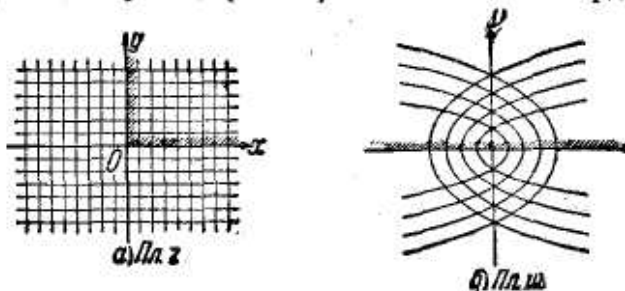


Рис.8.17

Мікромодуль 18

Приклади розв'язання типових задач

1. Приклади складання комплексних чисел

- 1) $(1 + i) + (2 + i3) = (1 + 2) + i(1 + 3) = 3 + i4;$
- 2) $(5 + i6) + (7 - i6) = (5 + 7) + i(6 - 6) = 12 + i0;$
- 3) $(4 + i9) + (-4 + i) = (4 - 4) + i(9 + 1) = 0 + i10;$

4) $(3 - i7) + (-3 + i7) = (3 - 3) + i(-7 + 7) = 0 + i0.$

2. Приклади віднімання комплексних чисел

- 1) $(5 + i6) - (3 + i7) = (5 - 3) + i(6 - 7) = 2 - i;$
- 2) $(2 + i) - (9 + i) = (2 - 9) + i(1 - 1) = -7 + i0,$
- 3) $(3 + i4) - (3 - i) = (3 - 3) + i(4 + 1) = 0 + i5.$
- 4) $(7 - i) - (7 - i) = (7 - 7) + i(-1 + 1) = 0 + i0.$

3. Приклади множення комплексних чисел

- 1) $(2 + i3)(6 - i5) = 12 - i10 + i18 - i^2 15 = (12 + 15) + i(18 - 10) = 27 + i8;$
- 2) $(4 + i)(4 - i) = 16 - i4 + i4 - i^2 = (16 + 1) + i(-4 + 4) = 17 + i0;$
- 3) $(1 + i)^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = (1 - 1) + i2 = 0 + i2.$

4. Приклади ділення комплексних чисел

Знайти відношення

$$\frac{9 - i7}{2 - i3}$$

Розв'язання. Нехай

$$\frac{9 - i7}{2 - i3} = x + iy.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (x + iy)(2 - i3) &= 9 - i7, \\ 2x + i2y - i3x - i^2 3y - 9 - i7, \\ (2x + 3y) + i(2y - 3x) &= 9 - i7. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ -3x + 2y = -7 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $x=3$, $y=1$. Тому

$$\frac{9 - i7}{2 - i3} = 3 + i.$$

5. Приклади запису комплексних чисел в тригонометричній формі.

1) Записати в тригонометричній формі комплексне число $1 + i$.

Знайдемо модуль r і аргумент φ цього числа,

$$r = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{2}.$$

Отже,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + 2n\pi.$$

Таким чином

$$1+i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \right].$$

де n — будь-яке ціле число. Зазвичай, з нескінченної множини значень аргументу комплексного числа вибирають те, яке знаходиться в інтервалі між 0 і 2π . У даному випадку таким значенням є $\pi/4$. Тому

$$1+i = \sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \right]$$

2) Записати в тригонометричній формі комплексне число $\sqrt{3}-i$.
Маємо:

$$r = \sqrt{3+1} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

Тому з точністю до кута, кратного 2π , $\varphi = (11/6)\pi$; отже,

$$\sqrt{3}-i = 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)$$

3). Записати в тригонометричній формі комплексне число i .

Комплексному числу i відповідає вектор \overrightarrow{OA} , який закінчується в точці A осі y з ординатою 1 (рис. 8.18).

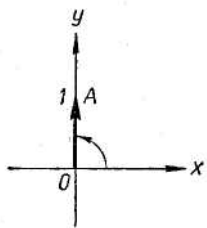


Рис. 8.18.

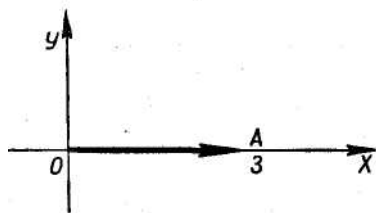


Рис. 8.19.

Довжина такого вектора дорівнює 1 , а кут, який він утворює з віссю абсцис, дорівнює $\pi/2$. Тому

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}.$$

4) Записати в тригонометричній формі комплексне число 3 .

Комплексному числу 3 відповідає вектор \overrightarrow{OA} , який закінчується в точці осі x з абсцисою 3 (рис. 8.19). Довжина такого вектора дорівнює 3 , а кут, який він утворює з віссю абсцис, дорівнює 0 . Тому

$$3 = 3 (\cos 0 + i \sin 0).$$

5) Записати в тригонометричній формі комплексне число -5 .

Комплексному числу -5 відповідає вектор \overrightarrow{OA} , який закінчується в точці осі x з абсцисою -5 (рис. 8.20). Довжина такого вектора дорівнює 5 , а кут, який він утворює з віссю абсцис, дорівнює π . Тому

$$-5 = 5 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

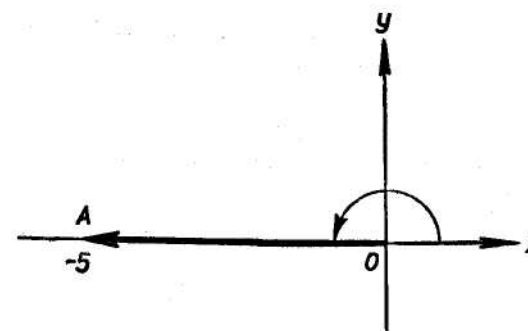


Рис. 8.20.

6. Множення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі.

$$1) 2 (\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ) \cdot 3 (\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ) = 6 (\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) = 6;$$

$$2) 5 (\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ) \cdot 4 (\cos 13^\circ + i \sin 13^\circ) = 20 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 20 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 10 + i10\sqrt{3}.$$

7. Ділення комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі

$$1) \frac{2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)}{3(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)} = \frac{2}{3} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

$$2) \frac{\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ}{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ} = \cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ) = \cos 30^\circ - i \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2}$$

8. Знайти всі значення кореня 4-го степеня з числа i .

Представивши i у вигляді $t = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, знайдемо,

що модулі всіх коренів рівні $\sqrt[4]{1} = 1$, а аргументи

$$\frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4}; \quad \frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4},$$

або

$$\frac{\pi}{8}; \quad \frac{3}{8}\pi; \quad \frac{9}{8}\pi; \quad \frac{13}{8}\pi.$$

Тому коренями 4-го степеня з числа i є числа:

$$\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8};$$

$$\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi;$$

$$\cos \frac{9}{8}\pi + i \sin \frac{9}{8}\pi;$$

$$\cos \frac{13}{8}\pi + i \sin \frac{13}{8}\pi.$$

9. Знайти всі значення кубового кореня з одиниці.

Розв'язання. Представимо одиницю в тригонометричній формі:

$$1 = \cos 0 + i \sin 0.$$

Користуючись формулою

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

отримуємо

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3}.$$

Покладаючи k рівним 0;1;2, знаходимо три значення кореня:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3};$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Маючи на увазі, що

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

отримуємо:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

На рис. 8.21 точки A, B, C є геометричними зображеннями отриманих коренів.

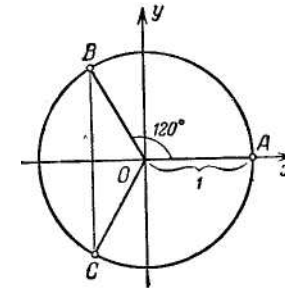


Рис. 8.21.

10. Розв'язати рівняння

$$x^4 = 1$$

(Нагадаємо, що рівняння вигляду $x^n = A$ називається двучленим.)

Розв'язання.

$$x = \sqrt[4]{\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi} = \cos \frac{2k\pi}{4} + i \sin \frac{2k\pi}{4}.$$

Покладаючи k рівним 0;1;2;3 отримуємо:

$$x_1 = \cos 0 + i \sin 0 = 1; \quad x_2 = \cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} = i;$$

$$x_3 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} = -1; \quad x_4 = \cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4} = -i.$$

11. Виразимо степені $\cos \varphi$ і $\sin \varphi$ та їх добутки через синус і косинус кратних дуг:

$$1) \cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (e^{2iy} + 2 + e^{-2iy}) =$$

$$= \frac{1}{4} [(\cos 2y + i \sin 2y)] + 2 + (\cos 2y - i \sin 2y) =$$

$$= \frac{1}{4} (2 \cos 2y + 2) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2y).$$

$$2) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 = \frac{(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi})^2}{4 \cdot 4i^2} = -\frac{1}{8} \cos 4\varphi + \frac{1}{8}.$$

12. Представити числа 1; i ; -2 ; $-i$ в показниковій формі.

Розв'язання.

$$1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{i2k\pi},$$

$$i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$-2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi},$$

$$-i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

Мікромодуль 18

Індивідуальні тестові завдання

Додавання комплексних чисел

1. Знайти дійсні числа x і y з рівнянь:

а) $(5x + i3y) + (2y - ix) = 3 - i$;

б) $(2x - i5) + (7y + i2x) = -12 + i3y$;

в) $(x + i3y) + \left(\frac{3}{2}y + i2x\right) = 4 + i8$.

Віднімання комплексних чисел

2. Знайти дійсні числа x і y з рівнянь:

а) $(0 + i3x) - (10x + i2y) = -5y + i3$;

б) $(-3y + \frac{1}{2}ix) - (-8x + i5y) = -2 + i12$;

$$в) \left(\frac{3}{4}x - i2y \right) - \left(\frac{1}{3}y + i6x \right) = 0 + i21$$

3. Множення комплексних чисел

Розв'язати :

1) $(5 + i)(-2 + i3)$. 2) $(5 + i)(15 - i3)$.

3) $(3 + i4)(6 - i5)$. 4) $(7 - i2)(3,5 - i)$.

5) $(0,5 + i0,2)(2 + i3)$. 6) $(7 + i4)^2$.

7) $(-6 + i2)(11 + i5)$. 8) $(\sqrt{2} - i)(\sqrt{3} + i2)$.

9) $(0,5 + i)(1 + i2)$. 10) $(\sqrt{3} + i5)(5 - i\sqrt{3})$.

11) $(3 + i5)(4 - i)$. 12) $(6 + i11)(7 + i3)$.

Знайти комплексне число z з рівняння

$$(2 - i3) \cdot z = -1 - i5.$$

4. Ділення комплексних чисел.

Розв'язати:

1) $\frac{0 + i4}{1 + i}$, 2) $\frac{2 + i}{2 - i}$, 3) $\frac{5 + i0}{-4 + i3}$, 4) $(3 - i)/(4 + 5i)$.

Довести рівності:

1) $\frac{6 - i}{3 + i4} = \frac{13 + i41}{-25 + i25}$, 2) $\frac{2 + i}{3 - i} = \frac{13 + i4}{17 - i9}$.

5. Геометричне зображення комплексних чисел.

1) Дані комплексні числа зобразити точками площини:

а) $1 + i$; б) $-2 + i3$; в) $1 - i$; г) $-3 - i2$; д) $5 + i0$; е) $-6 + i0$; ж) $0 + i5$; з) $0 - i4$;

2) Які комплексні числа зображують на рис. 8.22 точками A, B, C, D і O ?

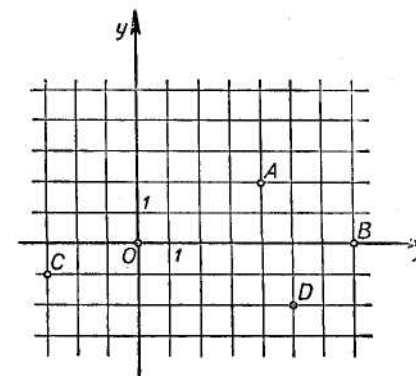


Рис. 8.22

3) Дати геометричну інтерпретацію формулам:

а) $(1+i2)+(1-i2) = 2+i0$;

б) $(3-i4)+(-1+i2)=2-i2$.

4) Нехай точка M служить зображенням на площині комплексного числа $a+ib$. Побудувати на тій же площині точки, які зображували б комплексні числа:

а) $a-ib$; д) $0+ib$;

б) $-a+ib$; е) $-a+i0$;

в) $-a-ib$; ж) $0+ib$.

г) $a+i0$;

5) Нехай точка M служить зображенням на площині комплексного числа $a-ib$. Де на тій же площині розміщені точки, що зображують числа:

а) $3a + i0$; г) $0+i2b$;

б) $-5a + i0$; д) $4a + i3b$?

в) $0-ib$;

6. Дійсні і чисто уявні числа

1) Знайти дійсні числа з рівнянь:

а) $(x+y)+i(x-y)=2+i4$;

б) $(x+y)+i(x-y)=i4$;

в) $(x+y)+i(x-y)=2$;

г) $(y+2x)+i(2y+4x)=0$;

д) $(x+1,5y)+i(2x+3y)=i13$.

2) Знайти чисто уявні числа u і v з рівнянь:

а) $u+iv=-3+i2$; б) $5u+iv=-24-i5$.

3) Розв'язати

а) $[i(2-i)]^2$; б) $[2i(3-4i)]^2$.

7. Спряжені числа

1) Назвати комплексні числа, які спряженні даним. Зобразити дані і спряженні до них числа точками площини:

а) $1+i$; б) $2-i3$; в) 5 ; г) $i4$; д) 0 ; е) $i2-1$.

2) Розв'язати

а) $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; б) $\frac{42+i2}{3+i5}$; в) $\frac{7-i2}{2+i7}$; г) $\frac{1}{i}$; д) $\frac{2-i5}{4+i} - \frac{6-i7}{4-i}$;

е) $\frac{2+i}{3-i5} + \frac{i}{i-1}$; ж) $\frac{a-ib}{b+ia} - i \frac{b-ia}{a+ib}$.

8. Степені уявної одиниці.

Розв'язати:

1) $i^6+i^{16}+i^{26}+i^{36}+i^{46}+i^{56}$.

2) $i^3+i^{13}+i^{23}+i^{33}+i^{43}+i^{53}$.

3) $i+i^2+i^3+i^4+\dots+i^n$ ($n>4$).

4) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}$.

5) $\frac{1}{i^3}$.

6) $\frac{1}{i^{11}} - \frac{1}{i^{41}} + \frac{1}{i^{75}} - \frac{1}{i^{1023}}$.

9. Тригонометрична форма комплексних чисел.

1) Данні комплексні числа записати в тригонометричній формі, визначивши їхні модулі і аргументи:

а) $2+i2\sqrt{3}$; б) $\sqrt{3}+i$; в) $6-i6$; г) $i12-5$; д) 25 ; е) -4 ; ж) $i3$; з) $-i2$; і) $i3-4$.

2) Указати на площині множину точок, які зображують комплексні числа, модулі r і аргументи φ яких задовольняють умовам:

а) $r=1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; б) $r=2$; в) $r \leq 3$; г) $r < 3$; д) $2 < r < 3$; ж) $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

з) $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$; і) $0 < \varphi = \pi$; к) $1 < r < 2$; л) $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

3) Данні комплексні числа представити в тригонометричній формі, визначивши їхні модулі й аргументи:

а) $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$. б) $\sin \varphi + i \cos \varphi$.

в) $-5 (\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ)$. г) $2 (\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ)$.

д) $3 (-\cos 15^\circ - i \sin 15^\circ)$.

10. Множення і ділення комплексних чисел, які задані в тригонометричній формі.

1) Виконати указані дії:

а) $5 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ) \cdot 3 (\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$;

б) $2 (\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ) \cdot 7 (\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$;

в) $4 \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \cdot 6 \left(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi \right)$;

г) $7 \left(\cos \frac{8}{15}\pi + i \sin \frac{8}{15}\pi \right) \cdot 3 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{4}{5}\pi + i \sin \frac{4}{5}\pi \right)$

2) Розв'язати :

а) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right)^{100}$; б) $(\sqrt{3}+i)^{50}$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^8$.

3) Виконати ділення:

а) $\frac{\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$; б) $\frac{\cos 130^\circ - i \sin 130^\circ}{\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ}$;

в) $\frac{-\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}{\cos 40^\circ - i \sin 40^\circ}$; г) $\frac{2(\cos 107^\circ + i \sin 107^\circ)}{5(\cos 47^\circ + i \sin 47^\circ)}$.

11. Витяг кореня з комплексного числа.

1) Знайти всі значення даних коренів:

а) $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{1+i}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[4]{-1}$; д) $\sqrt{\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ}$.

2) Розв'язати рівняння:

а) $x^5 = a$ (a — дійсне число); б) $x^5 = i$.

3) Розв'язати рівняння:

$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

12. Привести до тригонометричного вигляду вирази:

а) $1+i$. Від. $\sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)]$.

б) $1-i$. Від. $\sqrt{2}[\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4)]$.

13. Знайти $\sqrt[3]{i}$. Від. $(i+\sqrt{3})/2, -i, (i-\sqrt{3})/2$.

14. Виразити через степені $\cos x$ і $\sin x$ наступні вирази:

$\sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \sin 5x, \cos 5x$.

15. Виразити через синус і косинус кратних дуг:

$\cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x, \cos^5 x, \cos^6 x; \sin^2 x, \sin^3 x, \sin^4 x, \sin^5 x, \sin^6 x$.

Мікромодуль 19

Многочлени і їхні корені

8.4. Операції над многочленами

Загальний вигляд рівняння n -го степеня (де n — деяке ціле додатне число) є,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (8.51)$$

Коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ цього рівняння ми будемо вважати довільними комплексними числами, причому старший коефіцієнт a_0 повинний бути відмінним від нуля.

Якщо написано рівняння (8.51), то завжди передбачається, що потрібно його розв'язати. Іншими словами, потрібно знайти такі числові значення для невідомого x , які задовольняють цьому рівнянню, тобто після підстановки замість невідомого і

виконання всіх зазначених операцій обертають ліву частину рівняння (8.51) у нуль.

Доцільно, однак, замінити задачу розв'язання рівняння (8.51) більш загальною задачею вивчення лівої частини цього рівняння

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (8.52)$$

яку називають *многочленом* (або *поліномом*) n -го степеня від невідомого x . Ми вибираємо перший з цих термінів; варто твердо пам'ятати, що тепер многочленом називається лише вираз вигляду (8.52), тобто лише сума цілих, невід'ємних степенів невідомого x , узятих з деякими числовими коефіцієнтами, а не будь-яка сума одночленів, як це було в елементарній алгебрі. Зокрема, ми не будемо вважати многочленами такі вирази, які містять невідоме x з від'ємними або дробовими показниками, наприклад,

$$2x^2 - \frac{1}{x} + 3, \quad \text{або} \quad ax^{-3} + bx^{-2} + cx^{-1} + d + ex + fx^2, \quad \text{або} \quad x^{1/2} + 1.$$

Для скороченого запису многочленів будуть уживатися символи $f(x), g(x), \varphi(x)$ і т.д.

Два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будуть вважатися *рівними* (або *тотожно рівними*), $f(x) = g(x)$, у тому випадку, якщо рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях невідомого. Зокрема, ніякий многочлен, хоча б один коефіцієнт якого відмінний від нуля, не може бути рівним нулеві, і тому знак рівності, уживаний у записі рівняння n -го степеня (8.51), не має ніякого відношення до визначеної зараз рівності многочленів.

Знак $=$, який зв'язує многочлени, треба надалі завжди розуміти в змісті тотожної рівності цих многочленів.

Таким чином, на многочлен n -го степеня (8.52) варто дивитися як на деякий формальний вираз, який цілком обумовлений набором своїх коефіцієнтів $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, де $a_0 \neq 0$. Помітимо, що, крім запису многочлена у вигляді (8.52), тобто по убутних степенях невідомого x , будуть допускатися й інші його записи, що виходять з (8.52) перестановкою даданків, наприклад, записом по зростаючих степенях невідомого.

На многочлен (8.52) можна дивитися і з погляду математичного аналізу, тобто вважати його комплексною функцією комплексної змінної x . Варто врахувати, що дві функції вважаються рівними в тому випадку, якщо рівні їхні з н а ч е н н я при всіх значеннях змінної x .

Два многочлени, які рівні в зазначеному вище формально-алгебраїчному змісті, будуть рівні і як функції від x .

Існують многочлени n -го степеня для будь-якого натурального числа n . Розглядаючи всілякі такі многочлени, ми, крім многочленів першого степеня, квадратних, кубових і т.д., зустрінемося і з *многочленами нульового степеня*, тобто з відмінними від нуля комплексними числами. Число нуль також буде вважатися многочленом; це буде єдиний многочлен, ступень якого не визначена.

Зараз ми визначимо для многочленів з комплексними коефіцієнтами операції додавання і множення. Ці операції будуть уведені на зразком операцій над многочленами з дійсними коефіцієнтами, відомих з курсу елементарної алгебри.

Якщо дано многочлени $f(x)$ і $g(x)$ з комплексними коефіцієнтами, які записані для зручності по зростаючих степенях x :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad a_n \neq 0, \\ g(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s, \quad b_s \neq 0, \end{aligned}$$

і якщо, наприклад, $n \geq s$, то їхньою *сумою* називається многочлен

$$f(x) + g(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n,$$

коефіцієнти якого утворюються додаванням коефіцієнтів многочленів $f(x)$ і $g(x)$, що стоять при однакових степенях невідомої, тобто

$$c_i = a_i + b_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (8.53)$$

причому при $n > s$ коефіцієнти $b_{s+1}, b_{s+2}, \dots, b_n$ варто вважати рівними нулеві. Степінь суми буде дорівнювати n , якщо n більше s , але при $n = s$ вона може випадково виявитися менше n , а саме у випадку $b_n = -a_n$.

Добутком многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається многочлен

$$f(x) \cdot g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n+s-1}x^{n+s-1} + d_{n+s}x^{n+s},$$

коефіцієнти якого визначаються в такий спосіб:

$$d_i = \sum_{k+l=i} a_k b_l, \quad i = 0, 1, \dots, n+s-1, n+s, \quad (8.54)$$

тобто, коефіцієнт d_i є результат перемножування таких коефіцієнтів многочленів $f(x)$ і $g(x)$, сума індексів яких дорівнює i , і додавання всіх таких добуток; зокрема, $d_0 = a_0 b_0$, $d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, ..., $d_{n+s} = a_n b_s$. З останньої рівності випливає нерівність $d_{n+s} \neq 0$ і тому *ступінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів цих многочленів*.

Звідси випливає, що *добуток многочленів, відмінних від нуля, ніколи не буде рівним нулеві*.

Якими властивостями володіють введені операції для многочленів? Комутативність і асоціативність додавання впливають зі справедливості цих властивостей для додавання чисел, так як складаються коефіцієнти при кожнім степені невідомого окремо. Віднімання є здійснюваним: роль нуля грає число нуль, яке включене в число многочленів, а протилежним для записаного вище многочлена $f(x)$ буде многочлен

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - \dots - a_{n-1}x^{n-1} - a_nx^n.$$

Комутативність множення впливає з комутативності множення чисел і того факту, що у визначенні добутку многочленів коефіцієнти обох множників $f(x)$ і $g(x)$ використовуються зовсім рівноправним чином. Асоціативність множення доводиться в такий спосіб: якщо, крім записаних вище многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дано ще многочлен

$$h(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{t-1}x^{t-1} + c_t x^t, \quad c_t \neq 0,$$

то коефіцієнтом при x^i , $i = 0, 1, \dots, n+s+t$ у добутку $[(f(x)g(x)h(x))]$ буде служити число

$$\sum_{j+m=i} \left(\sum_{k+l=j} a_k b_l \right) c_m = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m,$$

а в добутку $[(f(x)g(x)h(x))]$ - рівне йому число

$$\sum_{k+j=i} a_k \left(\sum_{l+m=j} b_l c_m \right) = \sum_{k+l+m=i} a_k b_l c_m.$$

Нарешті, справедливність закону дистрибутивності впливає з рівності

$$\sum_{k+l=i} (a_k + b_k) c_l = \sum_{k+l=i} a_k c_l + \sum_{k+l=i} b_k c_l,$$

так як ліва частина цієї рівності є коефіцієнтом при x^i у многочлені $[f(x)+g(x)]h(x)$, а права частина — коефіцієнтом при тому же степені невідомого в многочлені $f(x)h(x)+g(x)h(x)$. Помітимо, що роль одиниці при множенні многочленів грає число 1, яке розглянуте як многочлен нульового степеня. З іншого боку, *многочлен $f(x)$ тоді і тільки тоді володіє оберненим многочленом $f^{-1}(x)$,*

$$f(x)f^{-1}(x) = 1, \quad (8.55)$$

якщо $f(x)$ є многочлен нульового степеня. Дійсно, якщо $f(x)$ є відмінним від нуля числом a , то оберненим многочленом служить для нього число a^{-1} . Якщо ж $f(x)$ має степінь $n \geq 1$, то степінь лівої частини рівності (8.55), якби многочлен $f^{-1}(x)$ існував, була б не менше n , у той час як праворуч стоїть многочлен нульового степеня.

Звідси випливає, що для множення многочленів обернена операція — ділення — не існує. У цьому відношенні система усіх многочленів з комплексними коефіцієнтами нагадує систему всіх цілих чисел. Ця аналогія проявляється й у тім, що для многочленів як і для цілих чисел, існує алгоритм ділення з залишком. Цей алгоритм для випадку многочленів з дійсними коефіцієнтами відомий ще з елементарної алгебри. Так як ми розглядаємо тепер випадок многочленів з комплексними коефіцієнтами, необхідно ще раз привести всі стосовно цього формулювання і привести доведення.

Для будь-яких двох многочленів $f(x)$ і $g(x)$ можна знайти такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad (8.56)$$

причому степінь $r(x)$ менший степеня $g(x)$ або ж $r(x) = 0$. Многочлени $q(x)$ і $r(x)$, які задовольняють цій умові, визначаються однозначно.

Доведемо спершу другу половину теореми. Нехай існують ще многочлени $\bar{q}(x)$ і $\bar{r}(x)$, які також задовольняють рівності

$$f(x) = g(x)\bar{q}(x) + \bar{r}(x), \quad (8.57)$$

причому степінь $\bar{r}(x)$ знову менше степеня $g(x)$. Прирівнюючи одну одній праві частини рівностей (8.56) і (8.57), одержимо;

$$g(x) = [q(x) - \bar{q}(x)]g(x) = \bar{r}(x) - r(x).$$

Степінь правої частини цієї рівності менше степеня $g(x)$, степінь же лівої частини був б при $q(x) - \bar{q}(x) \neq 0$ більшим або дорівнює степеню $g(x)$. Тому повино бути $q(x) - \bar{q}(x) = 0$, тобто $q(x) = \bar{q}(x)$, а тоді і $r(x) = \bar{r}(x)$, що і потрібно було довести.

Переходимо до доведення першої половини теореми. Нехай многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають відповідно степені n і s . Якщо $n < s$, то можна покласти $q(x) = 0$, $r(x) = f(x)$. Якщо ж $n \geq s$, то скористаємося тим же методом, яким в елементарній алгебрі

проводилось ділення многочленів з дійсними коефіцієнтами, які розташовані по убутних степенях невідомого. Нехай

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0, \\ g(x) = b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_{s-1} x + b_s, \quad b_0 \neq 0.$$

Вважаючи

$$f(x) - \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} g(x) = f_1(x), \quad (8.58)$$

ми одержимо многочлен, степінь якого менше n . Позначимо цей степінь через n_1 , а старший коефіцієнт многочлена $f_1(x)$ — через a_{10} . Покладемо, далі, якщо усе ще $n_1 \geq s$,

$$f_1(x) - \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} g(x) = f_2(x), \quad (8.59)$$

позначимо через n_2 — степінь, а через a_{20} — старший коефіцієнт многочлена $f_2(x)$, покладемо далі

$$f_2(x) - \frac{a_{20}}{b_0} x^{n_2-s} g(x) = f_3(x), \quad (8.60)$$

і т.д.

Так як степені многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots$ убувають, $n > n_1 > n_2 > \dots$, то ми дійдемо після кінцевого числа кроків до такого многочлена $f_k(x)$,

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} g(x) = f_k(x), \quad (8.61)$$

степінь якого n_k менше s , після чого процес зупиняється. Складаючи тепер рівності (8.58), (8.59), (8.60), (8.61), ми одержимо:

$$f(x) - \left(\frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s} \right) g(x) = f_k(x),$$

тобто многочлени

$$q(x) = \frac{a_0}{b_0} x^{n-s} + \frac{a_{10}}{b_0} x^{n_1-s} + \dots + \frac{a_{k-1,0}}{b_0} x^{n_{k-1}-s},$$

$$r(x) = f_k(x),$$

дійсно задовольняють рівності (8.56), причому степінь $r(x)$ насправді менше степеня $g(x)$.

Помітимо, що многочлен $q(x)$ називається *часткою* від ділення $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — *залишком* від цього ділення.

З розгляду алгоритму ділення з залишком легко встановлюється, що якщо $f(x)$ і $g(x)$ є многочленами з дійсними коефіцієнтами, то коефіцієнти всіх многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots$, а тому і коефіцієнти частки $q(x)$ і залишку $r(x)$ будуть дійсними.

8.5. Дільники. Найбільший загальний дільник

Нехай дано ненульові многочлени $f(x)$ і $\varphi(x)$ з комплексними коефіцієнтами. Якщо залишок від дільника $f(x)$ на $\varphi(x)$ дорівнює нулеві, тобто, як говорять, $f(x)$ ділиться (або націло ділиться) на $\varphi(x)$, то многочлен $\varphi(x)$ називається *дільником* многочлена $f(x)$.

Многочлен $\varphi(x)$ тоді і тільки тоді буде дільником многочлена $f(x)$, якщо існує многочлен $\psi(x)$, який задовольняє рівності

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \quad (8.62)$$

Справді, якщо $\varphi(x)$ є дільником для $f(x)$, то в якості $\psi(x)$ варто взяти частку від ділення $f(x)$ на $\varphi(x)$. Зворотно, нехай многочлен $\psi(x)$, який задовольняє рівності (8.62), існує.

З доведеної в попередньому розділі одиничності (єдинственності) многочленів $q(x)$ і $r(x)$, що задовольняють рівності

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x).$$

і умові, що степінь $r(x)$ менше степеня $\varphi(x)$, у нашому випадку впливає, що частка від ділення $f(x)$ на $\varphi(x)$ дорівнює $\psi(x)$, а залишок дорівнює нулеві.

Зрозуміло, що якщо рівність (8.62) має місце, то $\psi(x)$ також буде дільником для $f(x)$. Вочевидь, далі, що степінь $\varphi(x)$ не більше степеня $f(x)$.

Помітимо, що якщо многочлен $f(x)$ і його дільник $\varphi(x)$ обоє мають раціональні або дійсні коефіцієнти, то і многочлен $\psi(x)$ також буде мати раціональні або, відповідно, дійсні коефіцієнти, тому що він розшукується за допомогою алгоритму ділення. Звичайно, многочлен з раціональними або дійсними коефіцієнтами може володіти і такими дільниками, не всі коефіцієнти яких раціональні або, відповідно, дійсні, що показує, наприклад, рівність

$$x^2 + 1 = (x-i)(x+i).$$

Приведемо деякі основні властивості подільності многочленів, що знайдуть надалі численні застосування.

I. Якщо $f(x)$ ділиться на $g(x)$, а $g(x)$ ділиться на $h(x)$, то $f(x)$ буде ділитися на $h(x)$.

Справді, за умовою $f(x) = g(x)\varphi(x)$ і $g(x) = h(x)\psi(x)$, а тому $f(x) = h(x)[\psi(x)\varphi(x)]$.

II. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ діляться на $\varphi(x)$, то їхня сума і різниця також діляться на $\varphi(x)$.

Дійсно, з рівностей $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ і $g(x) = \varphi(x)\chi(x)$ випливає $f(x) \pm g(x) = \varphi(x)[\psi(x) \pm \chi(x)]$.

III. Якщо $f(x)$ ділиться на $\varphi(x)$, то добуток $f(x)$ на будь-який многочлен $g(x)$ також буде ділитися на $\varphi(x)$.

Дійсно, якщо $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$, то $f(x)g(x) = \varphi(x)[\psi(x)g(x)]$. З II і III випливає наступна властивість:

IV. Якщо кожний з многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ ділиться на $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ буде ділитися і многочлен

$$f_1(x)g_1(x) + f_2(x)g_2(x) + \dots + f_k(x)g_k(x),$$

де $g_1(x), g_2(x), \dots, g_k(x)$ - довільні многочлени.

V. Усякий многочлен $f(x)$ ділиться на будь-який многочлен нульового степеня.

Дійсно, якщо

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

а c довільне число, яке не рівне нулеві, тобто довільний многочлен нульового степеня, то

$$f(x) = c \left(\frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \dots + \frac{a_n}{c} \right).$$

VI. Якщо $f(x)$ ділиться на $\varphi(x)$, то $f(x)$ ділиться і на $c\varphi(x)$, де c - довільне число, яке відмінне від нуля.

Справді, з рівності $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ випливає рівність

$$f(x) = [c\varphi(x)] \cdot [c^{-1}\psi(x)].$$

VII. Многочлени $cf(x)$, $c \neq 0$, і тільки вони будуть дільниками многочлена $f(x)$, які мають таку ж степінь, що і $f(x)$.

Дійсно, $f(x) = c^{-1}[cf(x)]$, тобто $f(x)$ ділиться на $cf(x)$.

Якщо, з іншого боку, $f(x)$ ділиться на $\varphi(x)$, причому степені $f(x)$ і $\varphi(x)$ збігаються, то степінь частки від дільника $f(x)$ на $\varphi(x)$ повинний бути рівний нулеві, тобто $f(x) = d\varphi(x)$, $d \neq 0$, звідки $\varphi(x) = d^{-1}f(x)$.

Звідси випливає наступна властивість:

VIII. Тоді і тільки тоді многочлени $f(x)$, $g(x)$ одночасно діляться один на одного, якщо $g(x)=cf(x)$, $c \neq 0$.

Нарешті, з VIII і I випливає властивість

IX. Усякий дільник одного з двох многочленів $f(x)$, $cf(x)$, де $c \neq 0$, буде дільником і для іншого многочлена.

Найбільший загальний дільник. Нехай дано довільні многочлени $f(x)$ і $g(x)$. Многочлен $\varphi(x)$ буде називатися загальним дільником для $f(x)$ і $g(x)$, якщо він служить дільником для кожного з цих многочленів. Властивість V (див. вище) показує, що до числа загальних дільників многочленів $f(x)$ і $g(x)$ належать усі многочлени нульового степеня. Якщо інших загальних дільників ці два многочлени не мають, то вони називаються *взаємно простими*.

У загальному ж випадку многочлени $f(x)$ і $g(x)$ можуть мати дільники, що залежать від x , і ми хочемо ввести поняття про *найбільший загальний дільник* цих многочленів.

Було б незручним прийняти таке визначення, по якому найбільший загальний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ є їхній загальний дільник найбільшого степеня. З одного боку, ми не знаємо поки, чи не будуть $f(x)$ і $g(x)$ мати багато різних загальних дільників найбільшого степеня, які відрізняються один від одного не тільки на множник нульового степеня, тобто чи не містить це означення занадто великої невизначеності. З іншого боку, ми вже зустрічалися в елементарній арифметиці з задачею знаходження найбільшого загального дільника цілих чисел і знаємо, що найбільший загальний дільник 6 цілих чисел 12 і 18 не тільки є найбільшим серед загальних дільників цих чисел, але навіть ділиться на будь-який інший їхній загальний дільник; дійсно, іншими загальними дільниками чисел 12 і 18 будуть числа 1, 2, 3, —1, —2, —3, —6.

Ми приймемо тому для випадку многочленів таке означення:

Найбільшим загальним дільником відмінних від нуля многочленів $f(x)$ і $g(x)$ називається такий многочлен $d(x)$, який є їхнім загальним дільником і, разом з тим, сам ділиться на будь-який інший загальний дільник цих многочленів. Позначається найбільший загальний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

Це означення залишає відкритим питання, чи існує найбільший загальний дільник для будь-яких многочленів $f(x)$ і $g(x)$. На це питання буде дана позитивна відповідь. Одночасно

буде приведено метод для практичного пошуку найбільшого загального дільника даних многочленів. Зрозуміло, що ми не можемо перенести сюди той спосіб, яким зазвичай розшукується найбільший загальний дільник цілих чисел, тому що поки не маємо для многочленів нічого аналогічного розкладанню цілого числа в добуток простих множників. Для цілих чисел існує, однак, і інший спосіб, який називають *алгоритмом послідовного дільника* або *алгоритмом Евкліда*; цей спосіб цілком застосовується і до многочленів.

Алгоритм Евкліда для многочленів полягає в наступному. Нехай дано многочлени $f(x)$ і $g(x)$. Поділимо $f(x)$ на $g(x)$ і одержуємо, узагалі говорячи, деякий залишок $r_1(x)$. Поділимо потім $g(x)$ на $r_1(x)$ і одержуємо залишок $r_2(x)$, поділимо $r_1(x)$ на $r_2(x)$ і т.д. Так як степені залишків увесь час знижуються, то в цьому ланцюжку послідовних ділень ми повинні дійти до такого місця, на якому ділення учиниться націло і тому процес зупиниться. Той залишок $r_k(x)$, на який націло ділиться попередній залишок $r_{k-1}(x)$, і буде найбільшим загальним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Для доведення запишемо викладене в попередньому абзаці у вигляді наступного ланцюжка рівностей:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(x)q_1(x) + r_1(x), \\ g(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \\ r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \\ &\dots\dots\dots \\ r_{k-3}(x) &= r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \\ r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_k(x) + r_k(x), \\ r_{k-1}(x) &= r_k(x)q_{k+1}(x). \end{aligned} \right\} \quad (8.63)$$

Остання рівність показує, що $r_k(x)$ служить дільником для $r_{k-1}(x)$. Звідси випливає, що обое доданки правої частини передостанньої рівності діляться на $r_k(x)$, а тому $r_k(x)$ буде дільником і для $r_{k-2}(x)$. Далі, таким же шляхом, піднімаючись вище, ми одержимо, що $r_k(x)$ є дільником і для $r_{k-3}(x)$, ..., $r_2(x)$, $r_1(x)$. Звідси, через другу рівність, буде впливати, що $r_k(x)$ служить дільником для $g(x)$, а тому, на підставі першої

рівності,— і для $f(x)$. Таким чином, $r_k(x)$ є загальним дільником для $f(x)$ і $g(x)$.

Візьмемо тепер довільний загальний дільник $\varphi(x)$ многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Так як ліва частина і перший доданок правої частини першої з рівностей (8.63) діляться на $\varphi(x)$, то $r_1(x)$ також буде ділитися на $\varphi(x)$. Переходячи до другої і наступної рівностей, ми таким же способом одержимо, що на $\varphi(x)$ діляться многочлени $r_2(x)$, $r_3(x)$, ... Нарешті, якщо вже буде доведено, що $r_{k-2}(x)$ і $r_{k-1}(x)$ діляться на $\varphi(x)$, то з передостанньої рівності ми одержимо, що $r_k(x)$ ділиться на $\varphi(x)$. Таким чином, $r_k(x)$ насправді буде найбільшим загальним дільником для $f(x)$ і $g(x)$.

Ми довели, отже, що будь-які два многочлени мають найбільший загальний дільник, і одержали спосіб для його обчислення. Цей спосіб показує, що якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають обидва раціональні або дійсні коефіцієнти, то і коефіцієнти їхніх найбільшого загального дільника також будуть раціональними або, відповідно, дійсними, хоча, звичайно, у цих многочленів можуть існувати і такі дільники, не всі коефіцієнти яких раціональні (дійсні). Так, многочлени з раціональними коефіцієнтами

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 6, \quad g(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

мають найбільшим загальним дільником многочлен з раціональними коефіцієнтами $x^2 - 2$, хоча в них є загальний дільник $x - \sqrt{2}$, не всі коефіцієнти якого раціональні.

Якщо $d(x)$ є найбільший загальний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то, як показують властивості VIII і IX (див. вище), у якості найбільшого загального дільника цих многочленів можна було б вибрати також многочлен $cd(x)$, де c — довільне число, відмінне від нуля. Іншими словами, *найбільший загальний дільник двох многочленів може бути визначений лише з точністю до множника нульового степеня*. Через це можна домовитися, що старший коефіцієнт найбільшого загального дільника двох многочленів буде завжди вважатися рівним одиниці. Використовуючи цю умову, можна сказати, що *два многочлени тоді і тільки тоді взаємно прості, якщо їх найбільший загальний дільник дорівнює одиниці*. Справді, у якості найбільшого загального дільника двох взаємно простих многочленів можна взяти будь-яке число, відмінне від нуля, але, помноживши його на обернений елемент, ми одержимо одиницю.

Використаємо алгоритм Евкліда для доведення наступної теореми:

Якщо $d(x)$ є найбільший загальний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$, то можна знайти такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x). \quad (8.64)$$

Можна вважати при цьому, якщо степені многочленів $f(x)$ і $g(x)$ більші нуля, що ступінь $u(x)$ менше степеня $g(x)$, а ступінь $v(x)$ менше степеня $f(x)$.

Це доведення засновано на рівностях (8.63). Якщо ми врахуємо, що $r_k(x) = d(x)$, і покладемо $u_1(x) = 1$, $v_1(x) = -q_k(x)$, то передостання з рівностей (8.63) дасть:

$$d(x) = r_{k-2}(x)u_1(x) + r_{k-1}(x)v_1(x).$$

Підставляючи сюди вираз $r_{k-1}(x)$ через $r_{k-3}(x)$ і $r_{k-2}(x)$ з попередньої рівності (8.63), ми одержимо:

$$d(x) = r_{k-3}(x)u_2(x) + r_{k-2}(x)v_2(x),$$

де, вочевидь,

$$u_2(x) = v_1(x), \quad v_2(x) = u_1(x) - v_1(x)q_{k-1}(x).$$

Продовжуючи підніматися вище по рівностях (8.63), ми прийдемо, нарешті, до рівності (8.64), яка доводиться.

Для доведення другого твердження теореми припустимо, що многочлени $u(x)$ і $v(x)$, які задовольняють рівності (8.64), уже знайдені, але, наприклад, ступінь $u(x)$ більший або дорівнює степеню $g(x)$. Ділимо $u(x)$ на $g(x)$:

$$u(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де ступінь, $r(x)$ менший степеня $g(x)$, і підставляємо цей вираз в (8.64). Ми одержимо рівність

$$f(x)r(x) + g(x)[v(x) + f(x)q(x)] = d(x).$$

Ступінь множника, що стоїть при $f(x)$, уже менше степеня $g(x)$. Ступінь многочлена, що стоїть в квадратних дужках, буде у свою чергу менше степеня $f(x)$, так як в протилежному випадку ступінь другого доданка лівої частини був б не менше степеня добутку $g(x)f(x)$, а так як ступінь першого цього доданку, менше степені цього добутку, то вся ліва частина мала би ступінь, більший або рівний степені $g(x)f(x)$, тоді як многочлен $d(x)$ свідомо має, при наших припущеннях, менший ступінь.

Теорема доведена. Одночасно ми одержуємо, що якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають раціональні або дійсні коефіцієнти, то і многочлени

$u(x)$ і $v(x)$, що задовольняють рівності (8.64), можна підібрати так, що їхні коефіцієнти будуть раціональними або, відповідно, дійсними.

Застосовуючи доведену зараз теорему до взаємно простих многочленів, ми одержуємо такий результат:

Многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тоді і тільки тоді взаємно прості, якщо можна знайти многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що задовольняють рівності

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \quad (8.65)$$

Спираючись на цей результат, можна довести декілька простих, але важливих теорем про взаємно прості многочлени:

а) *Якщо многочлен $f(x)$ взаємно простий з кожним із многочленів $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то він взаємно простий і з їхнім добутком.*

Справді, існують, по (8.65), такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що

$$f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = 1.$$

Помноживши цю рівність на $\psi(x)$, одержуємо:

$$f(x)[u(x)\psi(x)] + [\varphi(x)\psi(x)]v(x) = \psi(x),$$

звідки випливає, що всякий спільний дільник $f(x)$ і $\varphi(x)\psi(x)$ був би дільником і для $\psi(x)$; однак за умовою $(f(x), \psi(x)) = 1$.

б) *Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на $\varphi(x)$, але $f(x)$ і $\varphi(x)$ взаємно прості, то $g(x)$ ділиться на $\varphi(x)$.*

Справді, помноживши рівність

$$f(x)u(x) + \varphi(x)v(x) = 1$$

на $g(x)$, ми одержимо

$$[f(x)g(x)]u(x) + \varphi(x)[v(x)g(x)] = g(x).$$

Обоє доданки лівої частини цієї рівності діляться на $\varphi(x)$; на нього ділиться, отже, і $g(x)$.

в) *Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на кожний з многочленів $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, які між собою взаємно прості, то $f(x)$ ділиться і на їх добуток.*

Дійсно, $f(x) = \varphi(x)\bar{\varphi}(x)$, так що добуток, що стоїть праворуч, ділиться на $\psi(x)$. Тому, по б), $\bar{\varphi}(x)$ ділиться на $\psi(x)$,

$$\bar{\varphi} = \psi(x)\bar{\psi}(x), \text{ звідки } f(x) = [\varphi(x)\psi(x)]\bar{\psi}(x).$$

Визначення найбільшого спільного дільника може бути поширене на випадок будь-якої кінцевої системи многочленів: *найбільшим спільним дільником* многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ називається такий спільний дільник цих многочленів, який ділиться на будь-який інший спільний дільник цих многочленів.

Існування найбільшого спільного дільника для будь-якої кінцевої системи многочленів випливає з наступної теореми, що дає також спосіб його обчислення.

Найбільший спільний дільник многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ дорівнює найбільшому спільному дільникові многочлена $f_s(x)$ і найбільшого спільного дільника многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)$.

Справді, при $s=2$ теорема очевидна. Тому ми прийемо, що для випадку $s=1$ вона справедлива, тобто, зокрема, уже доведено існування найбільшого спільного дільника $d(x)$ многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)$. Позначимо через $\bar{d}(x)$ найбільший спільний дільник многочленів $d(x)$ і $f_s(x)$. Він буде, мабуть, спільним дільником для всіх заданих многочленів. З іншого боку, всякий інший спільний дільник цих многочленів буде дільником також і для $d(x)$, а тому і для $\bar{d}(x)$.

Зокрема, система многочленів $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ називається *взаємно простою*, якщо спільними дільниками цих многочленів є лише многочлени нульового степеня, тобто якщо їхній найбільший спільний дільник дорівнює 1. Якщо $s>2$, то попарно ці многочлени можуть і не бути взаємно простими. Так, система многочленів

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15, \quad g(x) = x^2 - x - 20, \quad h(x) = x^3 + x^2 - 12x$$

взаємно проста, хоча

$$(f(x), g(x)) = x - 5, \quad (f(x), h(x)) = x - 3, \quad (g(x), h(x)) = x + 4.$$

8.6. Корені многочленів

Ми вже зустрічалися раніше зі значеннями многочлена, коли говорили про теоретико-функціональну точку зору на поняття многочлена. Нагадаємо визначення.

Якщо

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad (8.66)$$

є деякий многочлен, а c — деяке число, то число

$$f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_n,$$

яке отримано заміною у виразі (8.66) для $f(x)$ невідомого x числом c і наступним виконанням усіх зазначених операцій, називається *значенням многочлена $f(x)$ при $x=c$* . Зрозуміло, що якщо $f(x) = g(x)$ у змісті алгебраїчної рівності многочленів, визначеного раніше, то $f(c) = g(c)$ при кожному c . Легко бачити також, що якщо

$$\varphi(x) = f(x) + g(x), \quad \psi(x) = f(x)g(x),$$

то

$$\varphi(c)=f(c)+g(c), \quad \psi(c)=f(c)g(c).$$

Іншими словами, додавання і множення многочленів перетворюються при теоретико-функціональній точці зору на многочлени в додавання і множення функцій, які розуміються в змісті додавання або множення відповідних значень цих функцій.

Якщо $f(c)=0$, тобто многочлен $f(x)$ обертається в нуль при підстановці в нього числа c замість невідомого, то c називається *коренем* многочлена $f(x)$ (або рівняння $f(x)=0$). Нами буде показано, що це поняття цілком відноситься до тієї теорії подільності многочленів, яка була предметом вивчення в попередньому розділі.

Якщо ми будемо ділити многочлен $f(x)$ на довільний многочлен першого степеня (або, як будемо говорити далі, на *лінійний многочлен*), то залишок буде або деяким многочленом нульового степеня, або нулем, тобто у всякому разі деяким числом r . Наступна теорема дозволяє знайти цей залишок, не виконуючи самого ділення, у випадку, коли виконується ділення на многочлен вигляду $x-c$.

Залишок від ділення многочлена $f(x)$ на лінійний многочлен $x-c$ дорівнює значенню $f(c)$ многочлена $f(x)$ при $x=c$.

Дійсно, нехай

$$f(x) = (x-c)q(x) + r.$$

Взявши значення обох частин цієї рівності при $x=c$, ми одержуємо:

$$f(c) = (c-c)q(c) + r = r,$$

що доводить теорему.

Звідси випливає винятково важливий висновок:

Число c тоді і тільки тоді буде коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(x)$ ділиться на $x-c$.

З іншого боку, якщо $f(x)$ ділиться на деякий многочлен першого степеня $ax+b$, то ділиться, мабуть, і на многочлен $x-(-b/a)$, тобто на многочлен вигляду $x-c$. Таким чином, *пошук коренів многочлена $f(x)$ рівносильний пошуку його лінійних дільників.*

Через сказане вище становить інтерес наступний метод ділення многочлена $f(x)$ на лінійний двочлен $x-c$, більш простий, чим загальний алгоритм ділення многочленів. Цей метод називається *методом Горнера*.

Нехай

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \tag{8.67}$$

і нехай

$$f(x) = (x-c)q(x) + r, \tag{8.68}$$

де

$$q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у (8.68), одержуємо:

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0, \\ a_1 &= b_1 - cb_0, \\ a_2 &= b_2 - cb_1, \\ &\dots \dots \dots \\ a_{n-1} &= b_{n-1} - cb_{n-2}, \\ a_n &= r - cb_{n-1}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$a_0 = b_0, \quad b_k = cb_{k-1} + a_k, \quad k=1, 2, \dots, n-1,$$

тобто коефіцієнт b_k отримується множенням попереднього коефіцієнта b_{k-1} на c і додаванням відповідного коефіцієнта a_k . Нарешті, $r = cb_{n-1} + a_n$, тобто і залишок r , рівний, як ми знаємо, $f(c)$, виходить з цього закону. Таким чином, коефіцієнти частки і залишок можна послідовно одержувати за допомогою однотипних обчислень, що розташовуються в схему, яку показує наступний приклад:

Розділити $f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$ на $x+1$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -8 \quad 1 \quad 4 \quad -9 \\ -1 \quad | \quad 1 \quad -9 \quad 10 \quad -6 \quad -3 \end{array}$$

Тому частка буде

$$q(x) = x^3 - 9x^2 + 10x - 6$$

а залишок $r = f(-1) = -3$.

Цей приклад показує, що *метод Горнера може бути використаний також для швидкого обчислення значення многочлена при даному значенні невідомого.*

Кратні корені. Якщо c — корінь многочлена $f(x)$, тобто $f(c)=0$, то $f(x)$ ділиться, як ми знаємо, на $x-c$. Може виявитися, що многочлен $f(x)$ ділиться не тільки на перший степінь лінійного двочлена $x-c$, але і на більш високі його степені. У всякому разі знайдеться таке натуральне число k , що $f(x)$ націло ділиться на $(x-c)^k$, але не ділиться на $(x-c)^{k+1}$. Тому

$$f(x) = (x-c)^k \varphi(x)$$

де многочлен $\varphi(x)$ на $x=c$ уже не ділиться, тобто число c своїх коренів не має. Число k називається *кратністю* кореня c у многочлені $f(x)$, а сам корінь c — *k-кратним коренем* цього многочлена. Якщо $k=1$, то говорять, що корінь c — *простий*.

Поняття кратного кореня тісно зв'язано з поняттям похідної від многочлена. Ми вивчаємо, однак, многочлени з будь-якими комплексними коефіцієнтами і тому не можемо просто скористатися поняттям похідної, введеним у курсі математичного аналізу. Те, що буде сказано нижче, варто розглядати як незалежне від курсу аналізу визначення похідної многочлена.

Нехай дано многочлен n -го степеня

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Його похідною (або *першою похідною*) називається многочлен $(n-1)$ -го степеня

$$f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \dots + 2a_{n-2}x + a_{n-1}.$$

Похідна від многочлена нульового степеня і від нуля вважається рівна нулеві. Похідна від першої похідної називається *другою похідною* від многочлена $f(x)$ і позначається через $f''(x)$ і т.д. Очевидно, що

$$f''(x) = n!a_0$$

і тому $f^{(n+1)}=0$, тобто $(n+1)$ -а похідна від многочлена n -го степеня дорівнює нулеві.

Ми не можемо користуватися в нашому випадку многочленів з комплексними коефіцієнтами властивостями похідної, доведеними в курсі аналізу для многочленів з дійсними коефіцієнтами, і повинні, використовуючи лише дане вище визначення похідної, знову ці властивості довести. Нас цікавлять наступні властивості, що є, як говорять, формулами диференціювання для суми і добутку;

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad (8.69)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x). \quad (8.70)$$

Ці формули легко перевірити, утім, безпосереднім підрахунком, взявши в якості $f(x)$ і $g(x)$ два довільних многочлени і застосовуючи дане вище визначення похідної.

Формула (8.70) без труднощів поширюється на випадок добутку будь-якого кінцевого числа множників, а тому звичайним способом може бути виведена формула і для похідної від степеня:

$$(f^k(x))' = kf^{k-1}(x)f'(x). \quad (8.71)$$

Нашою метою є доведення наступної теореми:

Якщо число c є k -кратним коренем многочлена $f(x)$, то при $k > 1$ воно буде $(k-1)$ -кратним коренем першої похідної цього многочлена; якщо ж $k=1$, то c не буде служити коренем для $f'(x)$.

Справді, нехай

$$f(x) = (x-c)^k \varphi(x), \quad k \geq 1 \quad (8.72)$$

де $\varphi(x)$ уже не ділиться на $x-c$. Диференціюючи рівність (8.72), одержуємо:

$$f'(x) = (x-c)^k \varphi'(x) + k(x-c)^{k-1} \varphi(x) = (x-c)^{k-1} [(x-c)\varphi'(x) + k\varphi(x)].$$

Перший доданок суми, що стоїть в квадратних дужках, ділиться на $x-c$, а другий на $x-c$ не ділиться; тому вся ця сума не може ділитися на $x-c$. З огляду на те, що частка від дільника $f'(x)$ на $(x-c)^{k-1}$ визначена однозначно, ми одержуємо, що $(x-c)^{k-1}$ є найбільшим степенем двочлена $(x-c)$, на яку ділиться многочлен $f'(x)$, що і потрібно було довести.

Застосовуючи цю теорему кілька разів, ми одержуємо, що *k-кратний корінь многочлена $f(x)$ буде $(k-s)$ -кратним у s -й похідній цього многочлена ($k \geq s$) і вперше не буде служити коренем для k -ї похідної від $f(x)$.*

8.7 Основна теорема про існування кореня многочлена

Займаючись у попередньому розділі коренями многочленів, ми не ставили питання про те, чи всякий многочлен має корні. Відомо, що існують многочлени з дійсними коефіцієнтами, які не мають дійсних коренів; x^2+1 - один з таких многочленів. Можна було б очікувати, що існують многочлени, які не мають коренів навіть серед комплексних чисел, особливо якщо розглядаються многочлени з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Якби це було так, то система комплексних чисел потребувала б подальшого розширення. Насправді, однак, справедлива наступна основна теорема алгебри комплексних чисел:

Усякий многочлен з будь-якими числовими коефіцієнтами, степінь якого не менше одиниці, має хоча б один корінь, який у загальному випадку комплексний.

Ця теорема є одним з найбільших досягнень усієї математики і знаходить застосування у різних областях науки.

На ній заснована, зокрема, уся подальша теорія многочленів з числовими коефіцієнтами, і тому цю теорему називали раніш (а іноді називають і тепер) «основною теоремою вищої алгебри». У дійсності, однак, основна теорема не є чисто алгебраїчною.

У доведенні, яке буде приведено, многочлен $f(x)$ з комплексними коефіцієнтами буде розглядатися як комплексна функція комплексної змінної x . Таким чином, x може приймати будь-які комплексні значення, тобто, як говорять, з огляду на викладений раніше спосіб побудови комплексних чисел, змінна x змінюється на *комплексній площині*. Значення функції $f(x)$ також будуть комплексними числами. Можна вважати, що ці значення відмічаються на другому екземплярі комплексної площини, подібно тому як у випадку дійсних функцій дійсної змінної значення незалежної змінної відмічаються на одній числовій прямій (осі абсцис), а значення функції — на іншій (осі ординат).

Визначення безперервної функції, яке відоме з курсу математичного аналізу, переноситься і на функції комплексної змінної, причому у формулюванні визначення абсолютні величини заміняються модулями.

Саме комплексна функція $f(x)$ комплексної змінної x називається *безперервною в точці x_0* , якщо для всякого додатного дійсного числа ε можна підібрати таке додатне дійсне число δ , що, який би не був (узагалі говорячи, комплексний) приріст h , модуль якого задовольняє нерівності $|h| < \delta$, буде справедливим також нерівність

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функція $f(x)$ називається *безперервною*, якщо вона безперервна у всіх точках x_0 , у яких вона визначена, тобто, якщо $f(x)$ є многочленом на всій комплексній площині.

Многочлен $f(x)$ є безперервною функцією комплексної змінної x .

Доведення цієї теореми можна було б провести так само, як це робиться в курсі математичного аналізу, а саме, показавши, що сума і добуток безперервних функцій самі безперервні, і як ми помітили, що функція, яка стало дорівнює одному і тому же самому комплексному числу, є безперервною. Але ми підемо іншим шляхом.

Доведемо спочатку окремий випадок теореми, а саме, випадок, коли вільний член многочлена $f(x)$ дорівнює нулеві, причому доведемо лише безперервність $f(x)$ у точці $x_0=0$.

Іншими словами, ми доведемо наступну лему (замість h ми пишемо x):

Лема 1. *Якщо вільний член многочлена $f(x)$ дорівнює нулеві:*

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x,$$

тобто $f(0)=0$, то для всякого $\varepsilon > 0$ можна підібрати таке $\delta > 0$, що при всіх x , для яких $|x| < \delta$, буде $|f(x)| < \varepsilon$.

Дійсно, нехай

$$A = \max(|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|).$$

Число ε нам уже дано. Покажемо, що якщо за число δ узяти

$$\delta = \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}, \tag{8.73}$$

то воно буде задовольняти необхідним умовам.

Справді,

$|f(x)| \leq |a_0| |x|^n + |a_1| |x|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}| |x| \leq A(|x|^n + |x|^{n-1} + \dots + |x|)$, тобто

$$|f(x)| \leq A \frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

Так як $|x| < \delta$ і, по (8.73), $\delta < 1$, то

$$\frac{|x| - |x|^{n+1}}{1 - |x|} < \frac{|x|}{1 - |x|},$$

і тому

$$|f(x)| < \frac{A|x|}{1 - |x|} < \frac{A\delta}{1 - \delta} = \frac{A \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{A + \varepsilon}} = \varepsilon.$$

що і потрібно було довести.

Уведемо тепер наступну формулу. Нехай дано многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Підставимо в нього замість x суму $x+h$, де h — друге невідоме. Розкладаючи в правій частині кожен зі степенів $(x+h)^k$, $k \leq n$, по формулі бінома і збираючи разом члени з однаковими степенями h , ми одержимо рівність

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x),$$

тобто доведемо формулу Тейлора, що дає розкладання $f(x+h)$ по степенях «приріст» h .

Безперервність довільного многочлена $f(x)$ у будь-якій точці x_0 доводиться тепер у такий спосіб. По формулі Тейлора

$$f(x_0+h) - f(x_0) = c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n = \varphi(h),$$

де

$$c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0), \dots, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Многочлен $\varphi(h)$ від невідомого h є многочлен без вільного члена, тому, по лемі 1, для всякого $\varepsilon > 0$ можна підібрати таке $\delta > 0$, що при $|h| < \delta$ буде $|\varphi(h)| < \varepsilon$, тобто

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$$

що і потрібно було довести.

З нерівності

$$||f(x_0+h)| - |f(x_0)|| \leq |f(x_0+h) - f(x_0)|,$$

яка базується на формулі (8.20), і з доведеної зараз безперервності многочлена впливає безперервність модуля $|f(x)|$ многочлена $f(x)$; цей модуль ε , вочевидь, дійсною невід'ємною функцією комплексного змінного x .

Нижче будуть доведені леми, які використовуються при доведенні основної теореми.

Лема про модуль старшого члена. Якщо дано многочлен n -го степеня, $n \geq 1$,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

з довільними комплексними коефіцієнтами і якщо k — будь-яке додатне дійсне число, то для досить великих, по модулю, значень невідомого x має місце нерівність

$$|a_0 x^n| > k |a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n| \quad (8.74)$$

тобто модуль старшого члена буде більше модуля суми всіх інших членів, притому у скільки завгодно раз.

Справді, нехай A - найбільший з модулів коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_n :

$$A = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|).$$

Тоді (див. приведені раніше властивості модулів суми і добутку комплексних чисел)

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| \leq |a_1| |x|^{n-1} + |a_2| |x|^{n-2} + \dots + |a_n| \leq$$

$$\leq A (|x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \dots + 1) = A \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}.$$

Покладаючи $|x| > 1$, ми одержимо:

$$\frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} < \frac{|x|^n}{|x| - 1},$$

Звідки

$$|a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n| < A \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Таким чином, нерівність (8.74) буде виконуватися, якщо x задовольняє, крім умови $|x| > 1$, також нерівності

$$kA \frac{|x|^n}{|x| - 1} \leq |a_0 x^n| = |a_0| |x|^n,$$

тобто, якщо

$$|x| \geq \frac{kA}{|a_0|} + 1. \quad (8.75)$$

Так як права частина нерівності (8.75) більше 1, то можна стверджувати, що для значень x , які задовольняють цій нерівності, має місце нерівність (8.74), що доводить лему.

Лема про зростання модуля многочлена. Для всякого многочлена $f(x)$ з комплексними коефіцієнтами, степінь якого не менше одиниці, і всякого додатного дійсного числа M , як завгодно великого, можна підібрати таке додатне дійсне число N , що при $|x| > N$ буде $|f(x)| > M$.

Нехай

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

По формулі (8.18)

$$|f(x)| = |a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n)| \geq |a_0 x^n| - |a_1 x^{n-1} + \dots + a_n|. \quad (8.76)$$

Застосуємо лему про модуль старшого члена, поклавши $k=2$: існує таке число N_1 , що при $|x| > N_1$ буде

$$|a_0 x^n| > 2 |a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n|.$$

Звідси

$$|a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n| < \frac{1}{2} |a_0 x^n|,$$

тобто, по (8.76),

$$|f(x)| > |a_0 x^n| - \frac{1}{2} |a_0 x^n| = \frac{1}{2} |a_0 x^n|.$$

Права частина цієї нерівності буде більшою M при

$$|x| > N_2 = n \sqrt{\frac{2M}{|a_0|}}$$

Таким чином, при $|x| > N = \max(N_1, N_2)$ буде $|f(x)| > M$.

Зміст цієї леми може бути з'ясований за допомогою наступної геометричної ілюстрації, яка у даному розділі буде неодноразово використовуватися. Припустимо, що в кожній точці x_0 комплексної площини до цієї площини встановлено перпендикуляр, довжина якого (при заданій одиниці масштабу) дорівнює модулю значення многочлена $f(x)$ у цій точці, тобто дорівнює $|f(x_0)|$. Кінці перпендикулярів будуть складати, через доведену вище безперервність модуля многочлена, деяку безперервну криву поверхню, яка розташована над комплексною площиною. Лема про зростання модуля многочлена показує, що ця поверхня при зростанні $|x_0|$ все більше і більше віддаляється від комплексної площини, хоча, зрозуміло, це віддалення зовсім не є монотонним. Рис. 8.23 схематично зображує лінію перетинання цієї поверхні з площиною, перпендикулярною до комплексної площини і яка проходить через точку O .

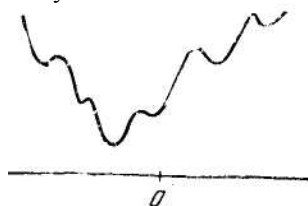


Рис. 8.23.

Основну роль у доведенні грає наступна лема:

Лема Даламбера. Якщо при $x = x_0$ многочлен $f(x)$ степеня n , $n \geq 1$, не обертається в нуль, $f(x_0) \neq 0$ і тому $|f(x_0)| > 0$, то можна знайти такий приріст h , у загальному випадку комплексний, що

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|.$$

По формулі Тейлора, якщо приріст h поки-що довільний, буде

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Згідно з умовою, x_0 не є коренем для $f(x)$. Випадково, однак, це число може виявитися коренем для $f'(x)$, а також, не виключено,

для деяких з подальших похідних. Нехай k -а похідна ($k \geq 1$) буде першою, що не має x_0 своїм коренем, тобто

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(k)}(x_0) \neq 0.$$

Таке k існує, тому що, якщо a_0 є старший коефіцієнт многочлена $f(x)$, то

$$f^{(n)}(x_0) = n! a_0 \neq 0.$$

Таким чином,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Деякі з чисел

$$f^{(k+1)}(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0)$$

також можуть дорівнювати нулеві. Але це для нас не істотно.

Розділивши обидві частини цієї рівності на $f(x_0)$, яка відмінна, за умовою, від нуля, і вводячи позначення

$$c_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j! f(x_0)}, \quad j = k, k+1, \dots, n,$$

ми одержимо:

$$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} = 1 + c_k h^k + c_{k+1} h^{k+1} + \dots + c_n h^n,$$

або, через $c_k \neq 0$

$$\frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} = (1 + c_k h^k) + c_k h^k \left(\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right).$$

Переходячи до модулів, одержимо:

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| \leq |1 + c_k h^k| + |c_k h^k| \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right|. \quad (8.77)$$

До цього моменту ми не робили ніяких припущень про приріст h . Тепер ми будемо вибирати h , причому будемо окремо вибирати його модуль і його аргумент. Модуль h буде вибиратися в такий спосіб. Так як

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k}$$

є многочленом від h без вільного члена, то, по лемі 1 (покладаючи $\varepsilon = 1/2$), можна знайти таке δ_1 , яке при $|h| < \delta_1$ буде

$$\left| \frac{c_{k+1}}{c_k} h + \dots + \frac{c_n}{c_k} h^{n-k} \right| < \frac{1}{2}. \quad (8.78)$$

З іншого боку, при $|h| < \delta_2 = \sqrt[k]{|c_k|^{-1}}$ буде

$$|c_k h^k| < 1. \quad (8.79)$$

Покладемо що модуль h вибрано відповідно до нерівності

$$|h| < \min(\delta_1, \delta_2). \quad (8.80)$$

Тоді, через (8.78), нерівність (8.77) перетворюється в строго нерівність

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| < |1 + c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k|; \quad (8.81)$$

умовою (8.79) ми скористаємося пізніше.

Для вибору аргументу h зажадаємо, щоб число $c_k h^k$ було від'ємним дійсним числом. Іншими словами,

$$\arg(c_k h^k) = \arg c_k + k \arg h = \pi,$$

звідки

$$\arg h = \frac{\pi - \arg c_k}{k}$$

При цьому виборі h число $c_k h^k$ буде відрізнятися знаком від своєї абсолютної величини,

$$|c_k h^k| = -|c_k h^k|,$$

а тому, використовуючи нерівність (8.79),

$$|1 + c_k h^k| = |1 - |c_k h^k|| = 1 - |c_k h^k|.$$

Таким чином, при виборі h на підставі умов (8.80) і (8.82) нерівність (8.81) приймає вигляд

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| < 1 - |c_k h^k| + \frac{1}{2} |c_k h^k| = 1 - \frac{1}{2} |c_k h^k|,$$

тобто тим більш

$$\left| \frac{f(x_0 + h)}{f(x_0)} \right| = \frac{|f(x_0 + h)|}{|f(x_0)|} < 1,$$

звідки випливає

$$|f(x_0 + h)| < |f(x_0)|$$

що доводить лему Даламбера.

За допомогою тієї геометричної ілюстрації, яка була наведена вище, можна так пояснити лему Даламбера. Дано, що $|f(x_0)| > 0$. Це значить, що довжина перпендикуляра, проведеного до комплексної площини в точці x_0 відмінна від нуля. Тоді, по лемі Даламбера, можна знайти таку точку $x_1 = x_0 + h$, що $|f(x_1)| < |f(x_0)|$, тобто перпендикуляр у точці x_1 буде більш коротким, чим у точці x_0 , і, отже, поверхня, яка утворена кінцями перпендикулярів, буде в цій новій точці трохи ближче до комплексної площини. Як показує доведення лемі, модуль h можна вважати як завгодно малим, тобто точку x_1 можна вибрати як завгодно близько до точки x_0 .

Коренями многочлена $f(x)$ будуть служити, мабуть, ті комплексні числа (тобто ті точки комплексної площини), у яких поверхня, яка утворена кінцями перпендикулярів, торкнеться цієї площини. Спираючись лише на лему Даламбера, не можна довести існування таких точок. Справді, користуючись цією лемою, можна знайти таку нескінченну послідовність точок $x_1, x_2, x_3 \dots$, що

$$|f(x_0)| > |f(x_1)| > |f(x_2)| > \dots \quad (8.83)$$

Звідси не випливає, однак, існування такої точки \bar{x} , що $f(\bar{x}) = 0$, тим більше, що убутна послідовність додатних дійсних чисел (8.83) зовсім не зобов'язана прагнути до нуля.

Подальші розгляди будуть засновані на одній теоремі з теорії функцій комплексної змінної, яка узагальнює теорему Вейнерштрасса. Вона відноситься до дійсних функцій комплексної змінної, тобто до функцій комплексної змінної, яка приймає лише дійсні значення; прикладом таких функцій служить модуль многочлена. У формулюванні цієї теореми ми будемо говорити для простоти про замкнуте коло E , розуміючи під цим коло на комплексній площині, до якого приєднані всі точки його границі.

Якщо дійсна функція $g(x)$ комплексної змінної x безперервна у всіх точках замкнутого кола E , то існує в колі E така точка x_0 , що для всіх x з E має місце нерівність $g(x) \geq g(x_0)$. Точка x_0 є, отже, точкою мінімуму для $g(x)$ у колі E .

Обмежуючись випадком, коли функція $g(x)$ невід'ємна у всіх точках кола E , — тільки цей випадок представляє для нас інтерес, — пояснимо геометрично цю теорему за допомогою тієї ілюстрації, що уже використана вище. У кожній точці x_0 кола E проводимо перпендикуляр довжини $g(x_0)$. Кінці цих

перпендикулярів складають шматок безперервної кривої поверхні, причому завдяки замкнутості кола E існування точок мінімуму для цього шматка поверхні робиться геометрично досить ясным. Ця ілюстрація не заміняє, звичайно, доведення теореми.

Тепер ми можемо перейти до безпосереднього доведення основної теореми. Нехай дано многочлен $f(x)$ степеня n , $n \geq 1$. Якщо його вільний член є a_n , то, мабуть, $f(0) = a_n$. Застосуємо до нашого многочлена лему про зростання модуля многочлена, покладаючи $M = |f(0)| = |a_n|$. Існує, отже, таке N , яке при $|x| > N$ буде $|f(x)| > |f(0)|$. Очевидно, далі, що зазначене вище узагальнення теореми Вейерштрасса може бути застосовано до функції $|f(x)|$ при будь-якому виборі замкнутого кола E . У якості E ми візьмемо замкнуте коло, яке обмежене кругом радіуса N з центром у точці 0 .

Нехай точка x_0 буде точкою мінімуму для $|f(x)|$ у колі E , звідки, зокрема, впливає $|f(x)| \leq |f(0)|$.

Легко бачити, що x_0 *насправді* буде *служити точкою мінімуму* для $|f(x)|$ на всій комплексній площині: якщо точка x' лежить поза E , то $|x'| > N$, і тому

$$|f(x')| > |f(0)| \geq |f(x_0)|.$$

Звідси впливає, нарешті, що $f(x_0) = 0$, тобто що x_0 *служить коренем* для $f(x)$; якби було $f(x_0) \neq 0$, то, по лемі Даламбера, існувала б така точка x_1 , що $|f(x_1)| < |f(x_0)|$; це суперечить, однак, тільки що установленій властивості точки x_0 .

8.8. Слідства з основної теореми

Нехай дано многочлен n -го степеня, $n \geq 1$,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n. \quad (8.84)$$

з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Ми знову розглядаємо його як формально-алгебраїчний вираз, цілком обумовлений набором своїх коефіцієнтам. Основна теорема про існування кореня, яка доведена в попередньому розділі, дозволяє стверджувати існування для $f(x)$ кореня α_1 , комплексного або дійсного. Тому многочлен $f(x)$ має розкладання

$$f(x) = (x - \alpha_1) \varphi(x).$$

Коефіцієнти многочлена $\varphi(x)$ знову є дійсними або комплексними числами, і тому $\varphi(x)$ має корінь α_2 , звідки

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \psi(x).$$

Продовжуючи так далі, ми прийдемо після кінцевого числа кроків до розкладання многочлена n -го степеня $f(x)$ у добуток n лінійних множників.

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n). \quad (8.85)$$

Коефіцієнт a_0 з'явився з наступної причини: якби справа у виразі (8.85) стояв деякий коефіцієнт b , то після розкриття дужок старший член многочлена $f(x)$ мав би вигляд bx^n , хоча насправді, через (8.84), ним є член $a_0 x^n$. Тому $b = a_0$.

Розкладання (8.85) є для многочлена $f(x)$ єдиним з точністю до порядку співмножників розкладанням такого типу.

Нехай, справді, ми маємо ще розкладання

$$f(x) = a_0(x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n). \quad (8.86)$$

З (8.85) і (8.86) впливає рівність

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) = (x - \beta_1)(x - \beta_2) \dots (x - \beta_n). \quad (8.87)$$

Якби корінь α_i був відмінний від усіх β_j , $j = 1, 2, \dots, n$, то, підставляючи α_i замість невідомого в (8.87), ми одержали б зліва нуль, а справа число, яке відмінне від нуля. Таким чином, *усякий корінь α_i дорівнює деякому кореневі β_j - і навпаки.*

Звідси ще не впливає співпадання розкладань (8.85) і (8.86). Дійсно, серед коренів α_i , $i = 1, 2, \dots, n$, можуть бути рівні між собою. Нехай, наприклад, s цих коренів рівні α_1 і нехай, з іншого боку, серед коренів β_j , $j = 1, 2, \dots, n$, є t рівних кореневі α_1 . Потрібно показати, що $s = t$.

Так як степінь добутку многочленів дорівнює сумі степенів співмножників, то добуток двох многочленів, відмінних від нуля, не може дорівнювати нулеві. Звідси впливає, що якщо два добутки многочленів рівні один одному, *то обидві частини рівності можна скоротити на загальний множник*: якщо

$$f(x)\varphi(x) = g(x)\varphi(x)$$

$$\text{і } \varphi(x) \neq 0, \text{ то з } [f(x) - g(x)]\varphi(x) = 0$$

$$\text{впливає } f(x) - g(x) = 0$$

$$\text{тобто } f(x) = g(x).$$

Застосуємо це до рівності (8.87). Якщо, наприклад, $s > t$, то, скорочуючи обидві частини рівності (8.87) на множник $(x - \alpha_1)^t$, ми прийдемо до рівності, ліва частина якої ще містить множник $x - \alpha_1$ а права її не містить. Вище показано, однак, що це приводить до протиріччя. Таким чином, *одиночність розкладання (8.85) для многочлена $f(x)$ доведена.*

Поєднуючи разом однакові множники, розкладання (8.85) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}, \quad (8.88)$$

де

$$k_1 + k_2 + \dots + k_l = n.$$

При цьому передбачається, що серед коренів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ уже немає рівних.

Доведемо, що число k_i з (8.88), $i=1, 2, \dots, l$, є кратністю кореня α_i в многочлені $f(x)$. Дійсно, якщо ця кратність дорівнює s_i , то $k_i \leq s_i$. Нехай, однак, $k_i < s_i$. У силу визначення кратності кореня для $f(x)$ існує розкладання

$$f(x) = (x - \alpha_i)^{s_i} \varphi(x).$$

Заміняючи в цьому розкладанні множник $\varphi(x)$ його розкладанням на лінійні множники, ми одержали б для $f(x)$ розкладання на лінійні множники, яке свідомо відмінне від розкладання (8.85), тобто прийшли б до протиріччя з доведеною вище одиничністю цього розкладання.

Ми довели, таким чином, наступний важливий результат:

Усякий многочлен $f(x)$ степеня n , $n \geq 1$, з будь-якими числовими коефіцієнтами має n коренів, якщо кожний з коренів рахувати стільки разів, яка є його кратність.

Помітимо, що ця теорема справедлива і при $n=0$, так як многочлен нульового степеня не має, зрозуміло, коренів. Ця теорема не застосовується лише до многочлена 0, що не має степені і дорівнює нулеві при будь-якому значенні x . Цим останнім зауваженням ми скористаємося при доведенні наступної теореми:

Якщо многочлени $f(x)$ і $g(x)$, степені яких не перевищують n , мають рівні значення більш ніж при n різних значеннях невідомого, то $f(x) = g(x)$.

Дійсно, многочлен $f(x) - g(x)$ має при наведених припущеннях більш ніж n коренів, а так як його степінь не перевершує n , то повинна мати місце рівність $f(x) - g(x) = 0$.

Таким чином, з огляду на те, що різних чисел нескінченно багато, можна стверджувати, що для будь-яких двох різних многочленів $f(x)$ і $g(x)$ найдуться такі значення c невідомого x , що $f(c) \neq g(c)$. Такі c можна знайти не тільки серед комплексних чисел, але і серед дійсних, серед раціональних і навіть серед цілих чисел.

Таким чином, два многочлени з числовими коефіцієнтами, які мають хоча б при одному степені невідомого x різні

коефіцієнти, будуть різними комплексними функціями комплексної змінної x . Цим доведена, нарешті, *рівносильність для многочленів з числовими коефіцієнтами двох зазначених визначень рівності многочленів — алгебраїчного і функціонального.*

Теорема, яка доведена вище, дозволяє стверджувати, що *многочлен, степінь якого не більше n , цілком визначається своїми значеннями при будь-яких різних значеннях невідомого, число яких більше n .* Чи можна ці значення многочлена задавати довільно? Якщо припустити, що задаються значення многочлена при $n+1$ різних значеннях невідомого, то відповідь буде позитивною: *завжди існує многочлен не більш ніж n -го степеня, який приймає наперед задані значення при $n+1$ заданих різних значеннях невідомого.*

Справді, нехай потрібно побудувати многочлен не більш ніж n -го степеня, котрий при значеннях невідомого a_1, a_2, \dots, a_{n+1} , які передбачаються бути різними, приймає відповідно значення c_1, c_2, \dots, c_{n+1} .

Цим многочленом буде

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{c_i(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_{n+1})}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{n+1})}. \quad (8.89)$$

Дійсно, його степінь не більше n , а значення $f(a_i)$ дорівнює c_i .

Формула (8.89) називається *інтерполяційною формулою Лагранжа*. Назва «інтерполяційна» зв'язана з тим, що по цій формулі, знаючи значення многочлена в $n+1$ точці, можна обчислювати його значення у всіх інших точках.

Формули Вьєта. Нехай дано многочлен $f(x)$ степеня n зі старшим коефіцієнтом 1,

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n, \quad (8.90)$$

і нехай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — його корені (кожен кратний корінь узятий тут відповідне число раз). Тоді $f(x)$ має наступне розкладання:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Перемножуючи вирази в дужках, що стоять праворуч, а потім приводячи подібні члени і порівнюючи отримані коефіцієнти з коефіцієнтами з (8.90), ми одержимо наступні рівності, які називаються *формулами Вьєта* і які виражають коефіцієнти многочлена через його корені:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n), \\
 a_2 &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\
 a_3 &= -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n), \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{n-1} &= (-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1} + \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n + \dots + \alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n), \\
 a_n &= (-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n.
 \end{aligned}$$

Таким чином, у правій частині k -ї рівності, $k=1, 2, \dots, n$, стоїть сума всіляких добутоків по k коренів, яка узята зі знаком плюс або мінус, у залежності від парності або непарності k .

При $n=2$ ці формули перетворюються у відомий з елементарної алгебри зв'язок між коренями і коефіцієнтами квадратного многочлена. При $n=3$, тобто для кубового многочлена, ці формули приймають вигляд

$$a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \quad a_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \quad a_3 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Формули Вьета полегшують написання многочлена по заданих його коренях. Так, знайдемо многочлен $f(x)$ четвертого степеня, що має простими коренями числа 5 і -2 і дворазовим коренем число 3. Ми одержимо:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -(5 - 2 + 3 + 3) = -9 \\
 a_2 &= 5 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 17, \\
 a_3 &= -[5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 3 \cdot 3] = 33, \\
 a_4 &= 5 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 3 = -90,
 \end{aligned}$$

а тому

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 17x^2 + 33x - 90.$$

Якщо старший коефіцієнт a_0 многочлена $f(x)$ відмінний від 1, то для застосування формул Вьета необхідно спочатку розділити всі коефіцієнти на a_0 , що не впливає на корені многочлена. Таким чином, у цьому випадку формули Вьета дають вираз для відношень усіх коефіцієнтів до старшого.

Многочлени з дійсними коефіцієнтами. Виведемо деякі наслідки з основної теореми алгебри комплексних чисел, які відносяться до многочленів з дійсними коефіцієнтами. Власне кажучи, саме на цих наслідках засновано те винятково велике значення основної теореми, про яке говорилося раніш.

Нехай многочлен з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

має комплексний корінь α , тобто

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0.$$

Ми знаємо, що остання рівність не порушиться, якщо в ній всі числа замінити на спряженні. Однак усі коефіцієнти $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, а також число 0, що стоїть праворуч, які є дійсними, залишаться при цій заміні без зміни, і ми приходимо до рівності

$$a_0 \bar{\alpha}^n + a_1 \bar{\alpha}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{\alpha} + a_n = 0,$$

тобто

$$f(\bar{\alpha}) = 0.$$

Таким чином, якщо комплексне (але не дійсне) число α служить коренем многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, то коренем для $f(x)$ буде і спряжене число $\bar{\alpha}$.

Многочлен $f(x)$ буде ділитися, отже, на квадратний тричлен

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}, \quad (8.91)$$

коефіцієнти якого, як ми знаємо, дійсні. Користуючись цим, доведемо, що корені α і $\bar{\alpha}$ мають у многочлені $f(x)$ ту саму кратність.

Нехай, справді, ці корені мають відповідно кратності k і l і нехай, наприклад, $k > l$. Тоді $f(x)$ ділиться на l -й степінь многочлена $\varphi(x)$,

$$f(x) = \varphi^l(x)q(x).$$

Многочлен $q(x)$, як частка двох многочленів з дійсними коефіцієнтами, також має дійсні коефіцієнти, але, у протиріччя з доведеним вище, він має число α своїм $(k-l)$ -кратним коренем, тоді як число $\bar{\alpha}$ не є для нього коренем. Звідси випливає, що $k = l$.

Таким чином, тепер можна сказати, що комплексні корені всякого многочлена з дійсними коефіцієнтами попарно спряжені. Звідси і з доведеної вище одиничності розкладань вигляду (8.85) випливає наступний остаточний результат:

Усякий многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами може бути представлений, притому єдиним способом (з точністю до порядку множників), у вигляді добутку свого старшого коефіцієнта a_0 і декількох многочленів з дійсними коефіцієнтами, лінійних вигляду $x - \alpha$, що відповідають його дійсним кореням, і квадратних вигляду (8.91), що відповідають парам спряжених комплексних коренів.

Для подальшого корисно підкреслити, що серед многочленів з дійсними коефіцієнтами і зі старшим коефіцієнтом 1, які не розкладаються на множники меншого

степеня або, як ми будемо говорити, такі, що є *неприводимими*, є лише лінійні многочлени вигляду $x - \alpha$ і квадратні многочлени вигляду (8.91).

8.9. Раціональні дробі

У курсі математичного аналізу вивчаються, крім цілих раціональних функцій, названих нами многочленами, також *дробово-раціональні функції*; це будуть частки $f(x)/g(x)$ двох цілих раціональних функцій, де $g(x) \neq 0$. Над цими функціями виконуються алгебраїчні операції за такими ж законами, як над раціональними числами, тобто як над дробами з цілими чисельниками і знаменниками. Рівність двох дробово-раціональних функцій або, як ми будемо далі говорити, *раціональних дробів* також розуміється в тому ж змісті, що і рівність дробів в елементарній арифметиці. Для визначеності ми будемо розглядати раціональні дробі з дійсними коефіцієнтами. Весь зміст цього розділу може бути майже дослівно перенесений на випадок раціональних дробів з комплексними коефіцієнтами.

Раціональний дріб називається *нескоротним*, якщо його чисельник взаємно простий зі знаменником.

Усякий раціональний дріб дорівнює деякому нескоротному дробові, який обумовлений однозначно з точністю до множника нульового степеня, загального для чисельника і знаменника.

Дійсно, усякий раціональний дріб можна скоротити на найбільший загальний дільник його чисельника і знаменника, після чого буде отримано рівний йому нескоротний дріб. Якщо, далі, рівні один одному нескоротні дробі

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ і } \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

тобто,

$$f(x)\psi(x) = g(x)\varphi(x), \quad (8.92)$$

то із взаємної простоти $f(x)$ і $g(x)$ випливає, по властивості б) з розділу 8.7, що $\varphi(x)$ ділиться на $f(x)$, а із взаємної простоти $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ випливає, що $f(x)$ ділиться на $\varphi(x)$. Таким чином, $f(x) = c\varphi(x)$, і тоді з (8.84) випливає $g(x) = c\psi(x)$.

Раціональний дріб називається *правильний*, якщо степінь чисельника менше степеня знаменника. Якщо до числа

правильних дробів ми умовимося зараховувати многочлен 0, то справедлива наступна *теорема*:

Усякий раціональний дріб може бути представлений, притому єдиним способом, у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

Дійсно, якщо дано раціональний дріб $f(x)/g(x)$ і якщо, поділивши чисельник на знаменник, ми одержимо рівність

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x),$$

де степінь $r(x)$ менше степеня $g(x)$, то, як легко перевірити,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Якщо має місце також рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

де степінь $\varphi(x)$ менше степеня $\psi(x)$, то ми одержуємо рівність,

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)g(x) - \psi(x)r(x)}{\psi(x)g(x)}.$$

Так як ліворуч стоїть многочлен, а праворуч, як легко бачити, правильний дріб, то ми одержимо $q(x) - \bar{q}(x) = 0$ і

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0.$$

Правильні раціональні дробі можуть бути піддані подальшому вивченню. При цьому нагадаємо, що, як відзначено наприкінці попереднього розділу, що неприводимими дійсними многочленами є многочлени вигляду $x - \alpha$, де число α дійсне, і многочлени вигляду

$$x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta},$$

де β і $\bar{\beta}$ - пари спряжених комплексних чисел. Як легко перевірити, у комплексному випадку аналогічну роль відіграють многочлени вигляду $x - \alpha$, де α — будь-яке комплексне число.

Правильний раціональний дріб $f(x)/g(x)$ називається *найпростішим*, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем многочлена, який неприводиться

$$g(x) = p^k(x), \quad k \geq 1,$$

а степінь чисельника $f(x)$ менше степеня $p(x)$,

Справедлива наступна основна теорема:

Усякий правильний раціональний дріб розкладається в суму найпростіших дробів.

Доведення. Розглянемо спочатку правильний раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)}$$

де многочлени $g(x)$ і $h(x)$ взаємно прості, $(g(x), h(x))=1$.

Існують, отже, такі многочлени $\bar{u}(x)$ і $\bar{v}(x)$, що

$$g(x)\bar{u}(x) + h(x)\bar{v}(x) = 1.$$

Звідси

$$g(x)[\bar{u}(x)f(x)] + h(x)[\bar{v}(x)f(x)] = f(x). \quad (8.93)$$

Нехай, розділивши добуток $\bar{u}(x)f(x)$ на $h(x)$, ми одержимо залишок $u(x)$, степінь якого менше степеня $h(x)$. Тоді рівність (8.93) можна буде переписати у вигляді

$$g(x)u(x) + h(x)v(x) = f(x), \quad (8.94)$$

де $v(x)$ — многочлен, вираз якого може бути без труднощів написаний. Так як степінь добутку $g(x)u(x)$ менше степеня добутку $g(x)h(x)$ і це ж, за умовою, вірно для многочлена $f(x)$, то і добуток $h(x)v(x)$ має степінь меншу, чим $g(x)h(x)$, а тому степінь $v(x)$ менше степеня $g(x)$. З (8.94) випливає тепер рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)h(x)} = \frac{v(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{h(x)}$$

у правій частині якої стоїть сума правильних дробів.

Якщо хоча б один зі знаменників $g(x)$, $h(x)$ розкладається в добуток взаємно простих множників, то можна виконати подальше розкладання. Продовжуючи так далі, ми одержимо, що *всякий правильний дріб розкладається в суму декількох правильних дробів, кожен з яких має знаменником степінь деякого многочлена, який не приводиться*. Або, якщо дано правильний дріб $f(x)/g(x)$, знаменник якого має розкладання на множники, що не приводяться

$$g(x) = p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_l^{k_l}(x)$$

(завжди можна вважати, звичайно, що старший коефіцієнт знаменника раціонального дробу дорівнює одиниці), причому $p_i(x) \neq p_j(x)$ при $i \neq j$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{u_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \dots + \frac{u_l(x)}{p_l^{k_l}(x)} + \frac{u(x)}{h(x)},$$

усі доданки в правій частині цієї рівності є правильними дробами.

Нам залишається розглянути правильний дріб вигляду $u(x)/p^k(x)$, де $p(x)$ — многочлен, що не приводиться. Застосовуючи алгоритм ділення з залишком, розділимо $u(x)$ на $p^{k-1}(x)$, отриманий залишок розділимо на $p^{k-2}(x)$ і т.д.

Ми прийдемо до наступних рівностей:

$$u(x) = p^{k-1}(x)s_1(x) + u_1(x),$$

$$u_1(x) = p^{k-2}(x)s_2(x) + u_2(x),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{k-2}(x) = p(x)s_{k-1}(x) + u_{k-1}(x).$$

Так як при цьому степінь $u(x)$, за умовою, менше степеня $p^k(x)$, а степінь кожного з залишків $u_i(x)$, $i=1, 2, \dots, k-1$, менше степеня відповідного дільника $p^{k-i}(x)$, то степені всіх часток $s_1(x), s_2(x), \dots, s_{k-1}(x)$ будуть строго менше степеня многочлена $p(x)$. Степінь останнього залишку $u_{k-1}(x)$ також менше степеня $p(x)$. З отриманих рівностей випливає:

$$u(x) = p^{k-1}(x)s_1(x) + p^{k-2}(x)s_2(x) + \dots + p(x)s_{k-1}(x) + u_{k-1}(x).$$

Звідси ми приходимо до шуканого представлення раціонального дробу $u(x)/p^k(x)$ — у вигляді суми найпростіших дробів:

$$\frac{u(x)}{p^k(x)} = \frac{u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{s_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \dots + \frac{s_2(x)}{p^2(x)} + \frac{s_1(x)}{p(x)}.$$

Основна теорема доведена. Її можна доповнити наступною теоремою про єдине розкладання.

Усякий правильний раціональний дріб має єдине розкладання в суму найпростіших дробів.

Нехай, справді, деякий правильний дріб може бути двома способами представлений у вигляді суми найпростіших дробів. Віднімаючи одне з цих представлень з іншого і приводячи подібні члени, ми одержимо суму найпростіших дробів, тотожно рівну нулеві. Нехай знаменники найпростіших дробів, які складають цю суму, будуть деякими степенями різних многочленів, які не приводяться, $p_1(x), p_2(x), \dots, p_s$ і нехай

найвищий степінь многочлена $p_i(x)$, $i=1, 2, \dots, s$, що є одним з цих знаменників, буде $p_i^{k_i}(x)$. Помножимо обидві частини цієї рівності на добуток

$$p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_s^{k_s}(x).$$

Усі доданки нашої суми, крім одного, перетворяться при цьому в многочлени. Що ж стосується доданка

$$\frac{u(x)}{p_1^{k_1}(x)},$$

то він перетвориться в дріб, знаменником якого служить $p_1(x)$, а чисельником — добуток

$$u(x)p_2^{k_2}(x)\dots p_s^{k_s}(x).$$

Чисельник не ділиться націло на знаменник, тому що многочлен $p_1(x)$ неприводимий, а всі множники чисельника з ним взаємно прості. Виконуючи ділення із залишком, ми в результаті одержимо, що сума многочлена дорівнює нулеві і відмінного від нуля правильного дробу, що, однак, неможливо.

Мікромодуль 19

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Знайти найбільшим загальний дільник многочленів

$$f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3, \quad g(x)=3x^3+10x^2+2x-3.$$

Застосовуючи алгоритм Евкліда до многочленів з цілими коефіцієнтами, ми можемо, щоб уникнути дробових коефіцієнтів, помножити ділене або скоротити дільник на будь-яке не рівне нулеві число, причому не тільки починаючи яке-небудь з послідовних ділень, але й у процесі самого цього ділення. Це буде приводити, зрозуміло, до перекручування частки, але цікавлячі нас залишки будуть здобувати лише деякий множник нульового степеня, що, як ми знаємо, при пошуку найбільшого загального дільника дозволяється.

Ділимо $f(x)$ на $g(x)$, попередньо помноживши $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r} 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9 \quad | \quad 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \underline{3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x} \quad | \quad x + 1 \\ -x^3 - 5x^2 - 12x - 9 \end{array}$$

(множимо на -3)

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 15x^2 + 27x + 27 \\ \underline{3x^3 + 10x^2 + 2x - 3} \\ 5x^2 + 25x + 30 \end{array}$$

Таким чином, перший залишок, після скорочення на 5, буде $r_1(x)=x^2+5x+6$. Ділимо на нього многочлен $g(x)$:

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \quad | \quad x^2 + 5x + 6 \\ \underline{3x^3 + 15x^2 + 18x} \quad | \quad 3x - 5 \\ -5x^2 - 16x - 3 \\ \underline{-5x^2 - 25x - 30} \\ 9x + 27 \end{array}$$

Другим залишком після скорочення на 9, буде, отже

$$r_2(x)=x+3.$$

Так як

$$r_1(x)=r_2(x)(x+2)$$

то $r_2(x)$ буде тим останнім залишком, на який націло ділиться попередній залишок. Він буде, таким чином, шуканим найбільшим загальним дільником;

$$(f(x), g(x)) = x+3.$$

Приклад 2. Знайдемо многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що задовольняють рівності (8.64) при

$$f(x)=x^3-x^2+3x-10, \quad g(x)=x^3+6x^2-9x-14.$$

Застосуємо до цих многочленів алгоритм Евкліда, причому тепер при виконанні ділення уже не можна допускати перекручування часток, тому що ці частки використовуються при пошуку многочленів $u(x)$ і $v(x)$.

Ми одержимо таку систему рівностей:

$$f(x) = g(x) + (-7x^2 + 12x + 4);$$

$$g(x) = (-7x^2 + 12x + 4) \left(-\frac{1}{7}x - \frac{54}{49} \right) + \frac{235}{49}(x-2);$$

$$-7x^2 + 12x + 4 = (x-2)(-7x-2).$$

Звідси випливає, що

$$(f(x), g(x)) = x-2$$

і що

$$u(x) = \frac{7}{235}x + \frac{54}{235}, \quad v(x) = -\frac{7}{235}x - \frac{5}{235}.$$

Приклад 3. Розділити $f(x)=2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ на $x - 3$.

Складемо таблицю, у якій над рискою розташовані коефіцієнти многочлена $f(x)$, під рискою — відповідні коефіцієнти частки і залишок, які послідовно обчислюються, а ліворуч збоку — значення c у даному прикладі:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & -3 \\ & 2 \cdot 3 & -1 \cdot 3 & -3 \cdot 3 & 0 \cdot 3 & 1 \cdot 3 & -3 \cdot 3 \\ \hline & 0 & 2 & 6 & 9 & 3 & -12 \end{array}$$

Таким чином, шукана частка буде

$$q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109,$$

а залишок $r=f(3)=324$.

Приклад 4. Розкласти в суму найпростіших дробів дійсний правильний дріб $f(x)/g(x)$, де

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3, \\ g(x) &= x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2. \end{aligned}$$

Легко перевіряється, що

$$g(x) = (x+2)(x-1)^2(x^2+1),$$

причому кожний з многочленів

$$x+2, \quad x-1, \quad x^2+1$$

неприводимий.

З викладеної вище теорії випливає, що шукане розкладання повинно мати вигляд

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}, \quad (8.95)$$

де числа A, B, C, D і E ще повинні бути розшукані.

З (8.95) випливає рівність

$$f(x) = A(x-1)^2(x^2+1) + B(x+2)(x^2+1) + C(x+2)(x-1)^2(x^2+1) + Dx(x+2)(x-1)^2 + E(x+2)(x-1)^2. \quad (8.96)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях невідомого x з обох частин рівності (8.96), ми одержали би систему п'яти лінійних рівнянь щодо п'яти невідомих A, B, C, D, E , причому, як випливає з доведеного вище, ця система має розв'язання і притому єдине. Ми підемо, однак, іншим шляхом.

Покладаючи в рівності (8.96) $x = -2$, ми прийдемо до рівності $45A = 135$, звідки

$$A = 3. \quad (8.97)$$

Маючи на увазі, далі, у (8.96) $x=1$, ми одержимо $6B=6$, тобто

$$B = 1 \quad (8.98)$$

Після цього покладемо в рівності (8.96) послідовно $x=0$ і $x=-1$. Використовуючи (8.97) і (8.98), ми одержимо рівняння

$$\begin{cases} -2C + 2E = -2, \\ -4C - 4D + 4E = -8. \end{cases} \quad (8.99)$$

Звідси

$$D = 1. \quad (8.100)$$

Покладемо, нарешті, у рівності (8.96) $x=2$. Використовуючи (8.97), (8.98) і (8.100), ми прийдемо до рівняння

$$20C + 4E = -52$$

яке разом з першим з рівнянь (8.99) дає

$$C = -2, \quad E = -3.$$

Таким чином,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$

Мікромодуль 19

Індивідуальні тестові завдання

1. $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ розділити на $x+4$. Від. $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, тобто часткове $=x^2-8x+40$; залишок $f(-4)=-161$

2. $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ розділити на $x+3$.

Від. $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$.

3. $f(x)=x^7-1$ розділити на $x-1$. Від. $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$

Розкласти на дільники з дійсними коефіцієнтами многочлени:

4. $f(x)=x^4-1$. Від. $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

5. $f(x)=x^2-x-2$. Від. $f(x)=(x-2)(x+1)$.

6. $f(x)=x^3+1$. Від. $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$

Мікромодуль 20

Обчислення коренів многочленів

8.10. Рівняння другого, третього і четвертого степеня

Основна теорема, яка доведена в розділі 8.7, установлює для будь-якого многочлена n -го степеня з числовими

коефіцієнтами існування n комплексних коренів. Її доведення (як приведенного вище, так і будь-якого іншого з нині відомих) не дають, однак, ніяких методів для практичного пошуку цих коренів, будучи чистими «доведеннями існування». Пошуки таких методів почалися зі спроб виводу формул, аналогічних формулі для розв'язання квадратного рівняння, відомої для випадку дійсних коефіцієнтів зі шкільного курсу алгебри. Ми покажемо зараз, що ця формула залишається справедливою і для квадратних рівнянь з комплексними коефіцієнтами і що аналогічні формули, хоча і багато більш громіздкі, можуть бути виведені для рівнянь третього і четвертого степеня.

Квадратні рівняння. Нехай дано квадратне рівняння

$$x^2 + px + q = 0$$

з будь-якими комплексними коефіцієнтами; старший коефіцієнт без обмеження спільності можна вважати рівним одиниці. Це рівняння можна переписати у вигляді

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = 0.$$

Як ми знаємо, з комплексного числа $(p^2/4) - q$ можна добути квадратний корінь, не виходячи за границі системи комплексних чисел. Два значення цього кореня, які відрізняються один від одного лише знаком, ми запишемо у вигляді

$$\pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Тому

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

тобто корені заданого рівняння можна знаходити по формулі

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^2 - 3x + (3-i) = 0$$

Застосовуючи виведену формулу, одержуємо:

$$x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (3-i)} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-3+i4}.$$

За допомогою методів добування кореня комплексних чисел, які викладені в 8.2, ми знаходимо:

$$\sqrt{-3+i4} = \pm(1+i2),$$

а тому $x_1 = 2+i, x_2 = 1-i$

Кубові рівняння. На відміну від випадку квадратних рівнянь, дотепер у нас не було методу для розв'язання кубових рівнянь навіть у випадку дійсних коефіцієнтів. Зараз ми виведемо для кубових рівнянь формулу, аналогічну формулі для квадратних рівнянь, причому відразу припустимо, що коефіцієнти є будь-якими комплексними числами. Нехай дано кубове рівняння

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0 \tag{8.101}$$

з будь-якими комплексними коефіцієнтами. Заміняючи в рівнянні (8.101) невідоме y новим невідомим x , зв'язаним з y рівністю

$$y = x - (a/3), \tag{8.102}$$

ми одержимо рівняння щодо невідомого x , яке не має, як легко перевірити, квадрата цього невідомого, тобто рівняння вигляду

$$x^3 + px + q = 0. \tag{8.103}$$

Якщо будуть знайдені корені рівняння (8.103), то, через (8.102), ми одержимо і корені заданого рівняння (8.101). Нам залишається, отже, навчитися розв'язувати «неповне» кубове рівняння (8.103) з будь-якими комплексними коефіцієнтами.

Рівняння (8.103) має по основній теоремі три комплексних кореня. Нехай x_0 буде кожний з цих коренів. Уведемо допоміжне невідоме u і розглянемо многочлен

$$f(u) = u^2 - x_0 u - \frac{p}{3}.$$

Його коефіцієнти — комплексні числа, і тому він має два комплексних кореня α і β , причому, по формулах Вьєта,

$$\alpha + \beta = x_0, \tag{8.104}$$

$$\alpha\beta = -\frac{p}{3}. \tag{8.105}$$

Підставляючи в (8.103) вираз (8.104) кореня x_0 , ми одержимо:

$$(\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q = 0$$

або
$$\alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + p)(\alpha + \beta) + q = 0.$$

Однак з (8.105) випливає $3\alpha\beta+p=0$, і тому ми одержуємо:

$$\alpha^3 + \beta^3 = -q. \quad (8.106)$$

З іншого боку, з (8.105) випливає

$$\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}. \quad (8.107)$$

Рівності (8.106) і (8.107) показують, що числа α^3 і β^3 служать коренями квадратного рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (8.108)$$

з комплексними коефіцієнтами.

Розв'язуючи рівняння (8.108), ми одержимо:

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

звідки (при цьому нам байдуже, який з коренів рівняння (8.108) прийняти за α^3 і який — за β^3 , так як α і β у рівності (8.106) і (8.107), а також у виразі (8.104) для x_0 входять симетричним чином.)

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (8.109)$$

Ми приходимо до наступної *формули Кардано*, яка виражає корені рівняння (8.103) через його коефіцієнти за допомогою квадратних і кубових радикалів:

$$x_0 = \alpha + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Так як кубовий радикал має в полі комплексних чисел три значення, то формули (8.109) дають три значення для α і три для β . Не можна, однак, застосовуючи формулу Кардано, комбінувати будь-яке значення радикала α с будь-яким значенням радикала β : для даного значення α варто брати лише те з трьох значень β , що задовольняє умові (8.105).

Нехай α_1 буде кожне з трьох значень радикала α . Тоді два інших можна одержати, як доведено раніше, множенням α_1 на кубові корені ε і ε^2 з одиниці:

$$\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon, \quad \alpha_3 = \alpha_1\varepsilon^2.$$

Позначимо через β_1 те з трьох значень радикала β , що відповідає значенню α_1 радикала α на підставі (8.105), тобто

$$\alpha_1\beta_1 = (-p/3).$$

Два інших значення β будуть

$$\beta_2 = \beta_1\varepsilon, \quad \beta_3 = \beta_1\varepsilon^2$$

Так як, через $\varepsilon^3 = 1$

$$\alpha_2\beta_3 = \alpha_1\varepsilon \cdot \beta_1\varepsilon^2 = \alpha_1\beta_1\varepsilon^3 = \alpha_1\beta_1 = (-p/3),$$

то значенню α_2 радикала α відповідає значення β_3 радикала β ; аналогічно значенню α_3 відповідає значення β_2 . Таким чином, усі три корені рівняння (8.103) можуть бути записані в такий спосіб:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 + \beta_1, \\ x_2 &= \alpha_2 + \beta_3 = \alpha_1\varepsilon + \beta_1\varepsilon^2, \\ x_3 &= \alpha_3 + \beta_2 = \alpha_1\varepsilon^2 + \beta_1\varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (8.110)$$

Кубові рівняння з дійсними коефіцієнтами. Подивимося, що можна сказати про корені неповного кубового рівняння

$$x^3 + px + q = 0, \quad (8.111)$$

якщо його коефіцієнти дійсні. Виявляється, що в цьому випадку основну роль грає знак виразу $(q^2/4) + (p^3/27)$, що стоїть у формулі Кардано під знаком квадратного кореня. Помітимо, що знак цього виразу протилежний знакові виразу

$$D = -4p^3 - 27q^2 = -108 [(q^2/4) + (p^3/27)],$$

який називається *дискримінантом* рівняння (8.111); у подальших формулюваннях буде використовуватися знак дискримінанта.

1) **Нехай $D < 0$.** У цьому випадку у формулі Кардано під знаком кожного з квадратних радикалів стоїть додатне число, а тому під знаком кожного з кубових радикалів знаходяться дійсні числа. Однак кубовий корінь з дійсного числа має одне дійсне і два спряжених комплексних значення. Нехай α_1 буде дійсне значення радикала α ; тоді значення β_1 радикала β , що відповідає α_1 на підставі формули (8.105), також буде дійсним через дійсність числа p . Таким чином, корінь $x_1 = \alpha_1 + \beta_1$ рівняння (8.111) виявляється дійсним. Два інших корені ми знайдемо, замінюючи у формулах (8.110) корені з одиниці $\varepsilon = \varepsilon_1$ і $\varepsilon^2 = \varepsilon_2$ їхніми виразами з (8.33):

$$x_2 = \alpha_1 \varepsilon + \beta_1 \varepsilon^2 = \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} + i \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

$$x_3 = \alpha_1 \varepsilon^2 + \beta_1 \varepsilon = \alpha_1 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \beta_1 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} - i \sqrt{3} \frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}$$

ці два корені з'являються в зв'язку дійсності чисел α_1 і β_1 спряженими комплексними числами, причому коефіцієнт при уявній частині відмінний від нуля, так як $\alpha_1 \neq \beta_1$, - ці числа є значеннями різних кубових радикалів.

Таким чином, якщо $D < 0$, то рівняння (8.111) має один дійсний і два спряжених комплексних корені.

2) **Нехай $D = 0$.** У цьому випадку

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Нехай α_1 буде дійсне значення радикала α ; тоді β_1 також буде, через (8.105), дійсним числом, причому $\alpha_1 = \beta_1$. Заміняючи у формулах (8.110) β_1 через α_1 і використовуючи очевидну рівність $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, ми одержимо:

$$x_1 = 2\alpha_1, \quad x_2 = \alpha_1(\varepsilon + \varepsilon^2) = -\alpha_1, \quad x_3 = \alpha_1(\varepsilon^2 + \varepsilon) = -\alpha_1$$

Таким чином, якщо $D = 0$, то всі корені рівняння (8.111) дійсні, причому два з них рівні між собою.

3) **Нехай $D > 0$.** У цьому випадку у формулі Кардано під знаком квадратного кореня стоїть від'ємне дійсне число, а тому під знаками кубових радикалів стоять спряжені комплексні числа. Таким чином, усі значення радикалів α і β будуть тепер комплексними числами. Серед коренів рівняння (8.111) повинен, однак, утримуватися хоча б один дійсний. Нехай це буде корінь

$$x_1 = \alpha_0 + \beta_0.$$

Так як дійсні і сума чисел α_0 і β_0 , і їхній добуток, який рівний $-(p/3)$, то числа α_0 і β_0 спряжені між собою як корені квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами. Але тоді спряжені між собою і числа $\alpha_0 \varepsilon$ і $\beta_0 \varepsilon^2$, а також числа $\alpha_0 \varepsilon^2$ і $\beta_0 \varepsilon$, звідки випливає, що корені рівняння (8.111)

$$x_2 = \alpha_0 \varepsilon + \beta_0 \varepsilon^2, \quad x_3 = \alpha_0 \varepsilon^2 + \beta_0 \varepsilon,$$

також будуть дійсними числами.

Ми одержали, що всі три корені рівняння (8.111) дійсні, причому легко показати, що серед них немає рівних. Справді, у

протилежному випадку вибір кореня x_1 можна було б здійснити так, щоб мала місце рівність $x_2 = x_3$, звідки

$$\alpha_0(\varepsilon - \varepsilon^2) = \beta_0(\varepsilon - \varepsilon^2),$$

тобто $\alpha_0 = \beta_0$, що явно неможливо.

Таким чином, якщо $D > 0$, то рівняння (8.111) має три різних дійсних корені.

Розглянутий зараз останній випадок показує, що практичне значення формули Кардаіо досить невелике. Справді, хоча при $D > 0$ усі корені рівняння (8.111) з дійсними коефіцієнтами є дійсними числами, однак пошук їх по формулі Кардано вимагає обчислення кубових коренів з комплексних чисел, що ми вміємо робити лише переходом до тригонометричної форми цих чисел.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$y^3 + 3y^2 - 3y - 14 = 0.$$

Підстановка $y = x - 1$ приводить це рівняння до вигляду

$$x^3 - 6x - 9 = 0 \quad (8.112)$$

Тут $p = -6$, $q = -9$, тому

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} > 0,$$

тобто рівняння (8.112) має один дійсний і два спряжених комплексних корені. По (8.109)

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1}.$$

Тому $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 1$, тобто $x_1 = -3$. Два інших корені знайдемо по формулах (8.110):

$$x_2 = -\frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Звідси випливає, що коренями заданого рівняння служать числа

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -\frac{5}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y_3 = -\frac{5}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$x^3 - 12x + 16 = 0.$$

Тут $p = -12$, $q = 16$, тому

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{49}{4} = 0.$$

Звідси випливає

$$\alpha = \sqrt[3]{-8}, \text{ тобто } \alpha_1 = -2.$$

Тому

$$x_1 = -4, \quad x_2 = x_3 = 2.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння
 $x^3 - 19x + 30 = 0.$

Тут $p = -19, q = 30$, тому

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{784}{27} < 0.$$

Таким чином, якщо залишатися в області дійсних чисел, формула Кардано до цього рівняння незастосовна, хоча його коренями є дійсні числа 2, 3 і -5.

Рівняння четвертого степеня. Розв'язання рівняння четвертого степеня

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0 \quad (8.113)$$

з довільними комплексними коефіцієнтами зводиться до розв'язання деякого допоміжного кубового рівняння. Досягається це наступним методом, що належить Феррарі.

Попереднє рівняння (8.113) підстановкою $y = x - (a/4)$ приводиться до вигляду

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0. \quad (8.114)$$

Потім ліва частина цього рівняння в такий спосіб тотожно перетвориться за допомогою допоміжного параметра α :

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \alpha^2 - 2\alpha x^2 - p\alpha$$

або

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 - \left[2\alpha x^2 - qx + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0. \quad (8.115)$$

Підберемо тепер α так, щоб многочлен, який стоїть в квадратних дужках, став повним квадратом. Для цього він повинен мати один двократний корінь, тобто повинна мати місце рівність

$$q^2 - 4 \cdot 2\alpha \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0. \quad (8.116)$$

Рівність (8.116) є кубовим рівнянням щодо невідомого α з комплексними коефіцієнтами. Це рівняння має, як ми знаємо, три комплексних корені. Нехай α_0 буде один з них; він виражається через формулу Кардано за допомогою радикалів через коефіцієнти рівняння (8.116), тобто через коефіцієнти рівняння (8.114).

При цьому виборі значення для α многочлен, який стоїть в квадратних дужках у (8.115), має двократний корінь $q/4\alpha_0$, і тому рівняння (8.115) приймає вигляд

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}\alpha_0\right)^2 - 2\alpha_0 \left(x - \frac{q}{4\alpha_0}\right)^2 = 0,$$

тобто воно розпадається на два квадратних рівняння:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 + \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) &= 0, \\ x^2 + \sqrt{2\alpha_0}x + \left(\frac{p}{2} + \alpha_0 - \frac{q}{2\sqrt{2\alpha_0}}\right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.117)$$

Так як від рівняння (8.114) до рівнянь (8.117) ми прийшли за допомогою тотожних перетворень, то корені рівнянь (8.117) будуть служити коренями і для рівняння (8.114). Легко бачити разом з тим, що корені рівняння (8.114) виражаються через коефіцієнти за допомогою радикалів.

8.11. Границі коренів

Ми знаємо, що не існує методу для пошуку точних значень коренів многочленів з числовими коефіцієнтами. Проте, усілякі проблеми механіки, фізики і всіляких галузей техніки зводяться до питання про корені многочленів, притому іноді досить високих степенів.

Ця обставина стала приводом для досить численних досліджень, що мали метою навчитися робити ті або інші висловлення про корені многочлена з числовими коефіцієнтами, не знаючи цих коренів.

Вивчалоя, наприклад, питання про розташування коренів на комплексній площині (умови, при яких усі корені лежать усередині одиничного кола, тобто по модулю менше одиниці,

або умови для того, щоб усі корені лежали в лівій напівплощині, тобто мали б від'ємні дійсні частини, і т. д.). Для многочленів з дійсними коефіцієнтами розроблялися методи визначення числа їхніх дійсних коренів, розшукувалися границі, між якими ці корені можуть знаходитися, і т.д.

Нарешті, багато досліджень було присвячено методам наближеного обчислення коренів: у технічних додатках зазвичай досить знати лише наближені значення коренів з деякою заздалегідь даною точністю і якби, наприклад, корені многочлена навіть записувалися в радикалах, ці радикали все одно були б замінені їх наближеними значеннями.

Усі ці дослідження склали у свій час основний зміст вищої алгебри. Ми включаємо в наш курс лише досить невелику частину результатів, які мають до цього відношення, причому, з огляду на першочергові потреби додатків, обмежуємося випадком многочленів з дійсними коефіцієнтами і їхніми дійсними коренями, і тільки лише іноді виходячи за ці рамки. При цьому ми будемо систематично розглядати многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами як (безперервну) дійсну функцію дійсної змінної x і усюди, де це буде корисно, будемо застосовувати результати і методи математичного аналізу.

Дослідження дійсних коренів многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами корисно починати з розгляду графіка цього многочлена: *дійсними коренями многочлена будуть, мабуть, абсциси точок перетинання його графіка з віссю x і тільки вони.*

Розглянемо, наприклад, многочлен п'ятого степеня

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3.$$

На підставі результатів вивчених нами раніше про корені цього многочлена можна стверджувати наступне: так як його степінь непарний, то $h(x)$ володіє хоча б одним дійсним коренем; якщо ж число дійсних коренів більше одиниці, то воно дорівнює трьом або п'яти, тому що комплексні корені попарно спряжені.

Розгляд графіка многочлена $h(x)$ дозволяє сказати більше про його корені. Побудуємо цей графік (рис. 8.24) (на рисунку масштаб по осі y узятий у десять разів меншим, чим по осі x), беручи лише цілі значення x і обчислюючи відповідні значення $h(x)$ хоча б методом Горнера:

x	$h(x)$
.	.
.	.
.	.
-4	-39
-3	144
-2	83
-1	18
0	-3
1	-4
2	39
.	.

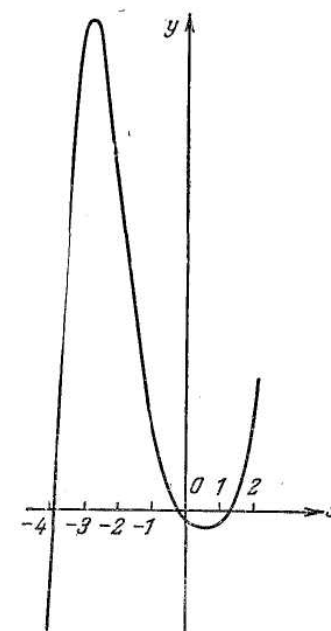


Рис. 8.24.

Ми бачимо, що многочлен $h(x)$ у всякому разі має три дійсних корені — додатний корінь α_1 і два від'ємні корені α_2 і α_3 , причому

$$1 < \alpha_1 < 2, \quad -1 < \alpha_2 < 0, \quad -4 < \alpha_3 < -3.$$

Інформація про (дійсні) корені многочлена, яка виходить з розгляду графіка, практично зазвичай виявляється досить задовільною. Однак щораз залишаються сумніви, чи дійсно нами знайдені всі корені. Так, у розглянутому прикладі ми не показали, що правіше точки $x=2$ і лівіше $x=-4$ уже немає коренів многочлена. Більше того, так як ми брали лише цілочисленні значення x , то можна допустити, що побудований нами графік не цілком точно відбиває справжнє поведіння функції $h(x)$, не враховує, може бути, її більш дрібних коливань і тому упускає деякі корені.

Правда, можна було б при побудові графіка брати не тільки цілочисленні значення x , а значення з точністю до 0,1 або 0,01. Цим, однак, відразу надзвичайно ускладнилося б обчислення значень $h(x)$, у той час як відзначені вище сумніви аж ніяк не були б ліквідовані. З іншого боку, можна було би методами математичного аналізу досліджувати функцію $h(x)$ на максимум і мінімум і таким шляхом порівняти наш графік із справжнім поведінням функції; це приводить, однак, до питання про корені похідної $h'(x)$, тобто до такої ж задачі, як і та, котрою ми займаємося.

Звідси випливає потреба в більш розроблених методах для пошуку границь, між якими розташовані дійсні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами, і для визначення числа цих коренів. Зараз ми будемо займатися питанням про границі дійсних коренів, відносячи питання про їхнє число до наступних розділів.

Доведення леми про модуль старшого члена вже дає деяку границю для модулів коренів многочлена. Дійсно, покладаючи в нерівності (8.75) $k=1$, ми одержуємо, що при

$$|x| \geq 1 + \frac{A}{|a_0|}, \tag{8.118}$$

де a_0 — старший коефіцієнт, а A — максимум модулів інших коефіцієнтів, модуль старшого члена многочлена більше модуля суми всіх інших членів, а тому ніяке значення x , яке задовольняє нерівності (8.118), не може служити коренем цього многочлена.

Таким чином, для многочлена $f(x)$ з будь-якими числовими коефіцієнтами число $1 + \frac{A}{|a_0|}$ служить верхньою границею для

модулів усіх його коренів, дійсних і комплексних. Так, для розглянутого вище многочлена $h(x)$ цією границею, через $a_0=1$, $A=8$, служить число 9.

Ця границя зазвичай виявляється, однак, занадто високою, особливо якщо ми цікавимося лише границями дійсних коренів. Нижче будуть викладені інші методи, більш точні. При цьому варто пам'ятати, що якщо вказуються границі, між якими повинні утримуватися дійсні корені многочлена, то цим зовсім не стверджується, що такі корені насправді існують.

Покажемо спочатку, що *досить уміти знаходити лише верхню границю додатних коренів будь-якого многочлена*. Справді, нехай дано многочлен $f(x)$ степеня n і нехай N_0 буде верхньою границею його додатних коренів. Розглянемо многочлени

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x^n f\left(\frac{1}{x}\right), \\ \varphi_2(x) &= f(-x), \\ \varphi_3(x) &= x^n f\left(-\frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

і знайдемо верхні границі їхніх додатних коренів; нехай це будуть відповідно числа N_1, N_2, N_3 . Тоді число $1/N_1$ — буде нижньою границею додатних коренів многочлена $f(x)$: якщо α є додатний корінь $f(x)$, то $1/\alpha$ — буде додатним коренем для $\varphi_1(x)$, і з $1/\alpha < N_1$ випливає $\alpha > 1/N_1$. Аналогічно числа N_2 і $1/N_3$ служать відповідно нижньою і верхньою границями від'ємних коренів многочлена $f(x)$. Таким чином, усі додатні корені многочлена $f(x)$ задовольняють нерівностям

$$1/N_1 < x < N_0,$$

усі від'ємні корені — нерівностям

$$-N_2 < x < -(1/N_3).$$

Для визначення верхньої границі додатних коренів можна застосувати наступний метод. Нехай дано многочлен

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a^n$$

з дійсними коефіцієнтами, причому $a_0 > 0$. Нехай, далі, $a_k, k \geq 1$, буде першим з від'ємних коефіцієнтів; якби таких коефіцієнтів не було, то многочлен $f(x)$ узагалі не міг би мати додатних коренів. Нарешті, нехай B буде найбільша з абсолютних величин від'ємних коефіцієнтів. Тоді число

$$1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$$

служить верхньою границею додатних коренів многочлена $f(x)$. Справді, покладаючи $x > 1$ і заміняючи кожний з коефіцієнтів a_1, a_2, \dots, a_{k-1} числом нуль, а кожний з коефіцієнтів a_k, a_{k+1}, a_n — числом $-B$, ми можемо лише зменшити значення многочлена, тобто

$$f(x) \geq a_0 x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \dots + x + 1) = a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1},$$

тобто, через $x > 1$

$$f(x) > a_0 x^n - B \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} = \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} [a_0 x^{k-1} (x - 1) - B]. \quad (8.119)$$

Якщо

$$x > 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}, \quad (8.120)$$

то, так як

$$a_0 x^{k-1} (x - 1) - B \geq a_0 (x - 1)^k - B,$$

вираз в квадратних дужках у формулі (8.119) виявиться додатним, тобто, через (8.119), значення $f(x)$ буде строго додатним. Таким чином, значення x , які задовольняють нерівності (8.120), не можуть служити коренями для $f(x)$, що і потрібно було довести.

Для розглянутого вище многочлена $h(x)$ цей метод дає, маючи на увазі, що $k=2$ і $B=7$, в якості вищої границі додатних коренів число $1 + \sqrt{7}$, що можна замінити найближчим більш великим цілим числом 4.

З численних інших методів пошуку верхньої границі додатних коренів ми викладемо ще лише *метод Ньютона*. Цей метод більш громіздкий, чим викладений вище, але зате дає, зазвичай, дуже гарний результат.

Нехай дано многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами і додатним старшим коефіцієнтом a_0 . Якщо при $x=c$ многочлен $f(x)$ і всі його послідовні похідні $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)$ приймають додатні значення, то число c служить верхньою границею додатних коренів.

Справді, по формулі Тейлора

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + \frac{(x-c)^2 f''(c)}{2!} + \dots + \frac{(x-c)^n f^{(n)}(c)}{n!}$$

Ми бачимо, що якщо $x \geq c$, то праворуч буде стояти строго додатне число, тобто такі значення x не можуть служити коренями для $f(x)$.

При пошуку для даного многочлена $f(x)$ відповідного числа c корисно вчиняти в такий спосіб. Похідна $f^{(n)}(x) = n! a_0$ є додатним числом, тому многочлен $f^{(n-1)}(x)$ є зростаючою функцією x . Існує, отже, таке число c_1 , що при $x \geq c_1$ похідна $f^{(n-1)}(x)$ додатна. Звідси випливає, що при $x \geq c_1$ похідна $f^{(n-2)}(x)$ буде зростаючою функцією x , тому існує таке число $c_2, c_2 \geq c_1$ що при $x \geq c_2$ похідна $f^{(n-2)}(x)$ також буде додатною. Продовжуючи далі, ми дійдемо, нарешті, до шуканого числа c .

Застосуємо метод Ньютона до многочлена $h(x)$, який розглядався вище. Ми маємо

$$\begin{aligned} h(x) &= x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3, \\ h'(x) &= 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7, \\ h''(x) &= 20x^3 + 24x^2 - 30x + 16, \\ h'''(x) &= 60x^2 + 48x - 30, \\ h^{IV}(x) &= 120x + 48, \\ h^V(x) &= 120. \end{aligned}$$

Легко перевірити (хоча б методом Горнера), що всі ці многочлени додатні при $x=2$. Таким чином, число 2 служить верхньою границею додатних коренів многочлена $h(x)$ — результат, набагато більш точний, ніж отримані вище іншими методами.

Для пошуку нижньої границі від'ємних коренів многочлена $h(x)$ розглянемо многочлен $\varphi_2(x) = -h(-x)$. (Ми беремо $-h(-x)$ замість $h(-x)$ тому, що для застосування методу Ньютона старший коефіцієнт повинний бути додатним. На корені многочлена $\varphi_2(x)$ ця заміна знака не робить ніякого впливу).

Так як

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 8x^2 - 7x + 3, \\ \varphi_2'(x) &= 5x^4 - 8x^3 - 15x^2 - 16x - 7, \\ \varphi_2''(x) &= 20x^3 - 24x^2 - 30x - 16, \\ \varphi_2'''(x) &= 60x^2 - 48x - 30, \\ \varphi_2^{IV}(x) &= 120x - 48, \\ \varphi_2^V(x) &= 120. \end{aligned}$$

а всі ці многочлени додатні, як легко перевірити, при $x=4$, то число 4 служить верхньою границею додатних коренів для $\varphi_2(x)$, і тому число -4 буде нижньою границею від'ємних коренів для $h(x)$.

Розглядаючи, нарешті, многочлени

$$\varphi_1(x) = -x^5 h\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 5x^2 - 2x - 1,$$

$$\varphi_3(x) = -x^5 h\left(-\frac{1}{x}\right) = 3x^5 - 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 - 2x + 1,$$

ми знайдемо для них, знову застосовуючи метод Ньютона, в якості верхніх границь додатних коренів відповідно числа 1 і 4, а тому нижньою границею додатних коренів многочлена $h(x)$ служить число $1/1 = 1$, верхньою же границею від'ємних коренів - число $(-1/4)$.

Таким чином, додатні корені многочлена $h(x)$ розташовані між числами 1 і 2, від'ємні корені — між числами (-4) і $(-1/4)$.

Цей результат дуже добре погоджується з тим, який було знайдено вище при розгляді графіка.

8.12. Теорема Штурма

Тепер ми перейдемо до питання про число дійсних коренів многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами. Ми будемо при цьому цікавитися як загальним числом дійсних коренів, так і окремо числом додатних і числом від'ємних коренів і взагалі числом коренів, розміщених між заданими границями a і b . Існує кілька методів для пошуку точного числа коренів, причому усі вони досить громіздкі; серед них більш зручним є *метод Штурма*, який і буде викладено.

Уведемо спочатку одне визначення.

Нехай дана деяка упорядкована кінцева система дійсних чисел, відмінних від нуля, наприклад

$$1, 3, -2, 1, -4, -8, -3, 4, 1. \quad (8.121)$$

Випишемо послідовно знаки цих чисел:

$$+, +, -, +, -, -, -, +, +. \quad (8.122)$$

Ми бачимо, що в системі знаків (8.122) чотири рази стоять поруч протилежні знаки. Через це говорять, що в упорядкованій системі (8.121) мають місце чотири *зміни знаків*. Число змін знаків можна підрахувати для будь-якої упорядкованої кінцевої системи відмінних від нуля дійсних чисел.

Розглянемо тепер многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, причому будемо припускати, що многочлен $f(x)$ не має кратних коренів, тому що інакше ми могли б його розділити на найбільший загальний дільник його з його похідної. Кінцева упорядкована система відмінних від нуля многочленів з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x), \quad (8.123)$$

називається *системою Штурма* для многочлена $f(x)$, якщо виконуються наступні вимоги:

1) Сусідні многочлени системи (8.123) не мають загальних коренів.

2) Останній многочлен, $f_s(x)$, не має дійсних коренів.

3) Якщо α — дійсний корінь одного з проміжних многочленів $f_k(x)$ системи (8.123), $1 \leq k \leq s-1$, то $f_{k-1}(\alpha)$ і $f_{k+1}(\alpha)$ мають різні знаки.

4) Якщо α — дійсний корінь многочлена $f(x)$, то добуток $f(x)f_1(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, коли x , зростаючи, проходить через точку α .

Питання про те, чи всякий многочлен володіє системою Штурма, буде розглянуто нижче; зараз же, припускаючи, що $f(x)$ такою системою володіє, покажемо, як вона може бути використана для знаходження числа дійсних коренів.

Якщо дійсне число c не є коренем даного многочлена $f(x)$, а (8.123) — система Штурма для цього многочлена, то візьмемо систему дійсних чисел

$$f(c), f_1(c), f_2(c), \dots, f_s(c),$$

викреслимо з неї всі числа, рівні нулеві, і позначимо через $W(c)$ число змін знаків у системі, яка залишилася; будемо *називати* $W(c)$ *числом змін знаків у системі Штурма* (8.123) *многочлена* $f(x)$ *при* $x=c$. (Само собою зрозуміло, що зміни знаків у системі Штурма многочлена $f(x)$ не мають нічого спільного зі зміною знака самого многочлена $f(x)$, що відбувається від проходження x через корінь цього многочлена.)

Справедлива наступна теорема.

Теорема Штурма. *Якщо дійсні числа* a *і* b , $a < b$, *не є коренями многочлена* $f(x)$, *який не має кратних коренів, то* $W(a) \geq W(b)$ *і різниця* $W(a) - W(b)$ *дорівнює числу дійсних коренів многочлена* $f(x)$, *розміщених між* a *і* b .

Таким чином, для визначення числа дійсних коренів многочлена $f(x)$, розміщених між a і b (нагадаємо, що $f(x)$ за умовою не має кратних коренів), потрібно лише установити, наскільки зменшується число змін знаків у системі Штурма цього многочлена при переході від a до b .

Для доведення теореми розглянемо, як змінюється число $W(x)$ при зростанні x . Поки x , зростаючи, не зустріне кореня жодного з многочленів системи Штурма (8.123), знаки многочленів цієї системи не будуть мінятися, і тому число $W(x)$ залишиться без зміни. Через це, а також через умову 2) з визначення системи Штурма, нам залишається розглянути два випадки: перехід x через корінь одного з проміжних многочленів $f_k(x)$, $1 \leq k \leq s-1$, і перехід x через корінь самого многочлена $f(x)$.

Нехай α буде коренем многочлена $f_k(x)$, $1 \leq k \leq s-1$. Тоді, за умовою 1), $f_{k-1}(\alpha)$ і $f_{k+1}(\alpha)$ відмінні від нуля. Можна знайти, отже, таке додатне число ε , яке може бути і дуже мале, що у відрізку $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ многочлени $f_{k-1}(x)$ і $f_{k+1}(x)$ не мають коренів і тому зберігають сталі знаки, причому, за умовою 3), ці знаки різні. Звідси випливає, що кожна із систем чисел

$$f_{k-1}(\alpha - \varepsilon), f_k(\alpha - \varepsilon), f_{k+1}(\alpha - \varepsilon) \quad (8.124)$$

і

$$f_{k-1}(\alpha + \varepsilon), f_k(\alpha + \varepsilon), f_{k+1}(\alpha + \varepsilon) \quad (8.125)$$

володіє рівно одною зміною знаків незалежно від того, які знаки чисел $f_k(\alpha - \varepsilon)$ і $f_k(\alpha + \varepsilon)$. Так, наприклад, якщо многочлен $f_{k-1}(x)$ на розглянутому відрізку від'ємний, а $f_{k+1}(x)$ додатний і якщо $f_k(\alpha - \varepsilon) > 0$, $f_k(\alpha + \varepsilon) < 0$, то системам (8.124) і (8.125) відповідають системи знаків

$$-, +, +, -, -, +.$$

Таким чином, при переході x через корінь одного з проміжних многочленів системи Штурма зміни знаків у цій системі можуть лише переміщатися, але не виникають знову і не зникають, і тому число $W(x)$ при такому переході не міняється.

Нехай, з іншого боку, α буде коренем самого даного многочлена $f(x)$. За умовою 1) α не буде коренем для $f_1(x)$. Існує, отже, таке додатне число ε , що відрізок $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ не містить коренів многочлена $f_1(x)$, а тому $f_1(x)$ зберігає на цьому відрізку сталий знак. Якщо цей знак додатний, то через умову 4) сам многочлен $f(x)$ при переході x через α змінює знак з мінуса на плюс, тобто $f(\alpha - \varepsilon) < 0$, $f(\alpha + \varepsilon) > 0$. Системам чисел

$$f(\alpha - \varepsilon), f_1(\alpha - \varepsilon) \text{ і } f(\alpha + \varepsilon), f_1(\alpha + \varepsilon) \quad (8.126)$$

відповідають, отже, системи знаків

$$-, + \text{ і } +, +,$$

тобто у системі Штурма губиться одна зміна знака. Якщо ж знак $f_1(x)$ на відрізку $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ від'ємний, то знову, через умову 4), многочлен $f(x)$ змінює знак із плюса на мінус при переході x через α , тобто $f(\alpha - \varepsilon) > 0$, $f(\alpha + \varepsilon) < 0$; системам чисел (8.126) відповідають тепер системи знаків

$$+, - \text{ і } -, -,$$

тобто у системі Штурма знову губиться одна зміна знака.

Таким чином, число $W(x)$ міняється (при зростанні x) лише при переході x через корінь многочлена $f(x)$, причому в цьому випадку воно зменшується рівно на одиницю.

Цим доведена теорема Штурма. Для того щоб скористатися нею для пошуку загального числа дійсних коренів многочлена $f(x)$, досить у якості a взяти нижню границю від'ємних коренів, у якості b — верхню границю додатних коренів. Простіше, однак, зробити це в такий спосіб. Через лему, яка доведена раніше, існує таке додатне число N , яке може бути і дуже велике, що при $|x| > N$ знаки всіх многочленів системи Штурма будуть збігатися зі знаками їхніх старших членів. Іншими словами, існує настільки велике додатне значення невідомого x , що знаки відповідних йому значень усіх многочленів системи Штурма збігаються зі знаками їхніх старших коефіцієнтів; це значення x , обчислювати яке немає необхідності, умовно позначається символом ∞ . Існує, з іншого боку, настільки велике по абсолютній величині від'ємне значення x , що знаки відповідних йому значень многочленів системи Штурма збігаються зі знаками їхніх старших коефіцієнтів для многочленів парного степеня і протилежні знакам старших коефіцієнтів для многочленів непарного степеня; це значення x умовимося позначати через $-\infty$. У відрізку $(-\infty, \infty)$ знаходяться, мабуть, усі дійсні корені всіх многочленів системи Штурма і, зокрема, усі дійсні корені многочлена $f(x)$. Застосовуючи до цього відрізка теорему Штурма, ми знайдемо число цих коренів, застосування ж теореми Штурма до відрізків $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ дає відповідно число від'ємних і число додатних коренів многочлена $f(x)$.

Нам залишається показати, що *всякий* многочлен $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, який не має кратних коренів, має систему Штурма. З різних методів, які використовуються для побудови такої системи, ми викладемо один, найбільш уживаний. Покладемо $f(x)=f'(x)$, чим забезпечується виконання умови 4) з визначення системи Штурма. Дійсно, якщо α — дійсний корінь многочлена $f(x)$, то $f'(\alpha)\neq 0$. Якщо $f'(\alpha)>0$, то $f'(x)>0$ в околі точки α , а тому $f(x)$ змінює знак з мінуса на плюс при переході x через α ; це ж вірно тоді і для добутку $f(x)f_1(x)$. Аналогічні міркування знаходять місце і у випадку $f'(\alpha)<0$. Ділимо потому $f(x)$ на $f_1(x)$ і залишок від цього ділення, узятий з оберненим знаком, приймаємо за $f_2(x)$:

$$f(x) = f_1(x)q_1(x) - f_2(x),$$

Узагалі, якщо многочлени $f_{k-1}(x)$ і $f_k(x)$ уже знайдені, то $f_{k+1}(x)$ буде залишком від ділення $f_{k-1}(x)$ на $f_k(x)$, узятим з оберненим знаком:

$$f_{k-1}(x) = f_k(x)q_k(x) - f_{k+1}(x). \tag{8.127}$$

Викладений тут метод відрізняється від алгоритму Евкліда, який застосовується до многочленів $f(x)$ і $f'(x)$, лише тим, що в залишку щораз міняється знак на обернений і наступне ділення виконується вже на цей залишок з оберненим знаком. Так як при пошуку найбільшого загального дільника така зміна знаків не істотна, то наш процес зупиниться на деякому $f_s(x)$, який є найбільшим загальним дільником многочленів $f(x)$ і $f'(x)$, причому з відсутності у $f(x)$ кратних коренів, тобто з його взаємної простоти з $f'(x)$, буде впливати, що насправді $f_s(x)$ є деяким відмінним від нуля дійсним числом.

Звідси випливає, що побудована нами система многочленів

$$f(x)=f_0(x), f'(x)=f_1(x), f_1(x), \dots, f_s(x),$$

задовольняє й умові 2) з визначення системи Штурма. Для доведення виконання умови 1) припустимо, що сусідні многочлени $f_k(x)$ і $f_{k+1}(x)$ мають загальний корінь α . Тоді, по (8.127), α буде коренем і для многочлена $f_{k-1}(x)$. Переходячи до рівності

$$f_{k-2}(x) = f_{k-1}(x) q_{k-1}(x) - f_k(x),$$

ми одержимо, що α служить коренем і для $f_{k-2}(x)$. Продовжуючи далі, ми одержимо, що α служить загальним коренем для $f(x)$ і $f'(x)$, що суперечить, однак, нашим припущенням. Нарешті, виконання умови 3) впливає безпосередньо з рівності (8.127): якщо $f_k(\alpha)=0$, то

$$f_{k-1}(\alpha) = -f_{k+1}(\alpha).$$

Застосуємо метод Штурма до многочлена, що розглядався в попередньому розділі

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-x-3.$$

Ми не будемо при цьому попередньо перевіряти, що $h(x)$ не має кратних коренів, тому що метод побудови системи Штурма, викладений вище, одночасно служить для перевірки взаємної простоти многочлена і його похідної.

Знайдемо систему Штурма для $h(x)$, застосовуючи зазначений метод. При цьому в процесі ділення ми будемо, на відміну від алгоритму Евкліда, множити і скорочувати лише на довільні додатні числа, так як знаки залишків грають у методі Штурма основну роль. Ми одержимо таку систему:

$$h(x) = x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 3,$$

$$h_1(x) = 5x^4 + 8x^3 - 15x^2 + 16x - 7,$$

$$h_2(x) = 66x^3 - 152x^2 + 172x + 61,$$

$$h_3(x) = -464x^2 + 1135x + 723,$$

$$h_4(x) = -32599457x - 8486093,$$

$$h_5(x) = -1.$$

Визначимо знаки многочленів цієї системи при $x=-\infty$ і $x=\infty$, для чого, як було зазначено, варто дивитися лише на знаки старших коефіцієнтів і на степені цих многочленів. Ми одержимо таку таблицю:

	$h(x)$	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$	Число змін знаків
$-\infty$	-	+	-	-	+	-	4
∞	+	+	+	-	-	-	1

Таким чином, при переході x від $-\infty$ до ∞ система Штурма втрачає три зміни знаків, а тому многочлен $h(x)$ має рівно три дійсних коренів.

Звідси видно, що при побудові в попередньому розділі графіка цього многочлена ми не упустили жодного з коренів.

Застосуємо метод Штурма до іншого многочлена, більш простого. Нехай дано многочлен

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1.$$

Знайдемо число його дійсних коренів, а також цілі границі, між якими кожний з цих коренів розташований, причому не будемо будувати заздалегідь графік цього многочлена,

Система Штурма для многочлена $f(x)$ буде

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 1,$$

$$f_1(x) = 3x^2 + 6x,$$

$$f_2(x) = 2x + 1,$$

$$f_3(x) = 1.$$

Знайдемо число змін знаків у цій системі при $x = -\infty$ і $x = \infty$

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число змін знаків
$-\infty$	-	+	-	+	3
∞	+	+	+	+	0

Многочлен $f(x)$ володіє, отже, трьома дійсними коренями. Для більш точного визначення положення цих коренів продовжимо попередню таблицю:

	$f(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	Число змін знаків
$x = -3$	-	+	-	+	3
$x = -2$	+	0	-	+	2
$x = -1$	+	-	-	+	2
$x = 0$	-	0	+	+	1
$x = 1$	+	+	+	+	0

Таким чином, система Штурма многочлена $f(x)$ утрачає по одній зміні знаків при переході x від -3 до -2 , від -1 до 0 і від 0 до 1 . Корені α_1 , α_2 і α_3 ці многочлени задовольняють, отже, нерівностям:

$$-3 < \alpha_1 < -2, \quad -1 < \alpha_2 < 0, \quad 0 < \alpha_3 < 1.$$

Теорема Штурма цілком вирішує питання про число дійсних коренів многочлена.

8.12. Наближене обчислення коренів

Викладені в попередніх розділах методи дозволяють зробити відокремлення дійсних коренів многочлена $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами, тобто для кожного з коренів указати границі, між якими знаходиться тільки один цей корінь. Якщо ці

границі досить вузькі, то будь-яке число, яке знаходиться між ними, можна вважати наближеним значенням шуканого кореня. Таким чином, після того як методом Штурма буде встановлено, що між раціональними числами a і b знаходиться лише один корінь многочлена $f(x)$, залишається задача настільки звужити ці границі, щоб нові границі a' і b' мали наперед задане число співпадаючих перших десяткових знаків; цим шуканий корінь буде обчислений із заданою точністю.

Існує багато методів, які дозволяють досить швидко знаходити наближене значення кореня з необхідною точністю. Ми укажемо на більш уживанні методи, теоретично більш прості і загальні і які при спільному вживанні досить швидко приводять до мети. Варто помітити, що методи, які будуть зараз викладені, можуть бути застосовані не тільки до многочленів, але і до більш широких класів безперервних функцій.

Будемо вважати далі, що α є простий корінь многочлена $f(x)$, так як від кратних коренів ми завжди можемо звільнитися, і що корінь α уже відділений границями a і b , $a < \alpha < b$; звідси випливає, зокрема, що $f(a)$, і $f(b)$ мають різні знаки.

Методи проб, хорд і дотичних. *Метод проб*, з якого часто починають, полягає в наступному. Нехай для визначеності $f(a) < 0$; $f(b) > 0$. Тоді беруть довільне значення c між a і b і обчислюють $f(c)$, причому тут істотний тільки знак $f(c)$. Припустимо, що вийде $f(c) > 0$. Це значить, що відбувся «переліт», отже, $a < \alpha < c$. Тоді беруть яке-небудь значення d між a і c , обчислюють $f(d)$; якщо $f(d) < 0$, то відбувся «недоліт», тобто $d < \alpha < c$, і т.д. При цьому значення c , d , ... беруться більш-менш довільними, зручними для обчислення; правда, якщо, наприклад, $|f(a)|$ значно менше, ніж $f(b)$, то досить ймовірно, що α виявиться ближче до a , ніж до b , і тому c варто взяти ближче до a і т. п.

Метод хорд полягає в тому, що в якості c береться не довільна точка, а (рис. 8.25) точка перетинання осі x з хордою графіка, проведеної через точки $M[a; f(a)]$ і $N[b; f(b)]$. Іншими словами, ми як би приблизно приймаємо дугу графіка за відрізок прямої, тобто робимо лінійну інтерполяцію, що є досить обгрунтовано, якщо інтервал a, b не занадто великий.

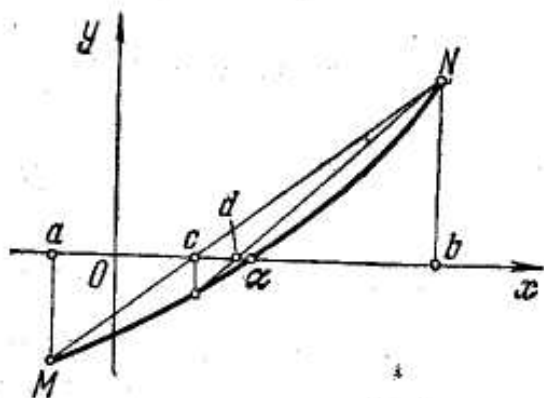


Рис. 8.25.

Для пошуку точки c напишемо рівняння хорди MN

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a},$$

а потім, поклавши $y=0$, знайдемо відповідне значення $x=c$:

$$c = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \quad (8.128)$$

Якщо необхідно, цю побудову можна повторимо, (див. рис. 8.25).

Метод дотичних або Ньютона. Так як α - простий корінь многочлена $f(x)$, то $f'(\alpha) \neq 0$. Прийmemo, що також $f''(\alpha) \neq 0$, тому що інакше питання зводиться до обчислення кореня многочлена $f'(x)$, який має менший степiнь, чим $f(x)$. Прийmemo, далі, що відрізок (a, b) не тільки не містить коренів $f(x)$, відмінних від α , але і не містить ні кореня многочлена $f'(x)$, а також і многочлена $f''(x)$.

Таким чином, як впливає з курсу математичного аналізу, крива $y=f(x)$ на відрізку (a, b) або монотонно зростає, або монотонно убыває, а також або у всіх точках цього відрізка обернена опуклістю вгору, або у всіх точках обернена опуклістю вниз. У розташуванні кривої на відрізку (a, b) можуть зустрітися, отже, чотири випадки, представлених на рис.8.26—8.29.

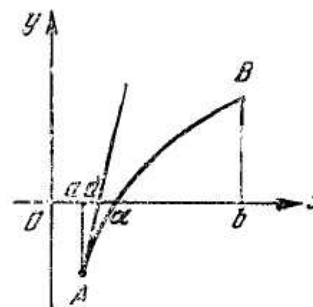


Рис. 8.26.

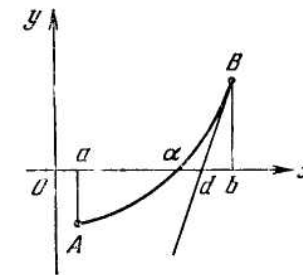


Рис. 8.27.

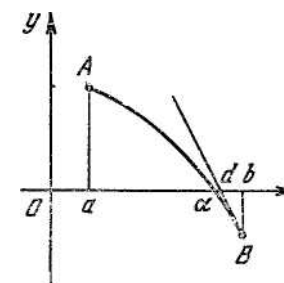


Рис. 8.28.

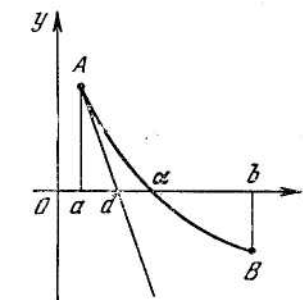


Рис. 8.29.

Позначимо через a_0 ту з границь a і b , у якій знак $f'(x)$ збігається зі знаком $f''(x)$. Так як $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки, а $f''(x)$ зберігає знак на усьому відрізку (a, b) , то таке a_0 може бути вказане. У випадках, представлених на рис. 8.27 і 8.29, буде $a_0=a$, у двох інших випадках $a_0=b$. У точці кривої $y=f(x)$ з абсцисою a_0 , тобто в точці з координатами $(a_0, f(a_0))$, проведемо дотичну до цієї кривої і позначимо через d абсцису точки перетинання цієї дотичної з віссю x . Рис. 8.26—8.29 показують, що число d можна вважати наближеним значенням кореня α . Метод Ньютона складається, отже, у заміні кривої $y=f(x)$ на відрізку (a, b) її дотичною в одній із границь цього відрізка. Умова, яка накладена на вибір точки a_0 , дуже істотна: рис. 8.30 показує, що без дотримання цієї умови точка перетинання дотичної з віссю x може зовсім не давати наближення до шуканого кореня.

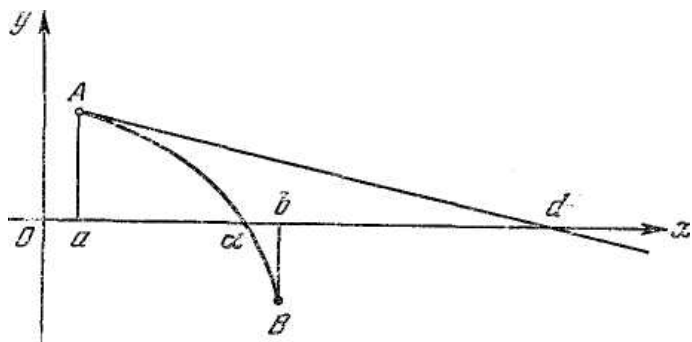


Рис. 8.30

Виведемо формулу, по якій розшукується число d . Як відомо, рівняння дотичної до кривої $y=f(x)$ у точці $(a_0, f(a_0))$ може бути записане у вигляді

$$y-f(a_0)=f'(a_0)(x-a_0).$$

Підставляючи сюди координати $(d, 0)$ точки перетинання дотичної з віссю x , одержимо:

$$-f(a_0)=f'(a_0)(d-a_0),$$

звідси

$$d=a_0-\frac{f(a_0)}{f'(a_0)}. \quad (8.129)$$

Якщо з'єднати на рис. 8.27—8.29 точки A і B хордами, то виявиться, що методи лінійної інтерполяції (хорд) і Ньютона в усіх випадках дають наближення до дійсного значення кореня α з різних сторін. Тому доцільно, якщо відрізок (a, b) уже такий, як це потрібно в методі Ньютона, комбінувати ці два методи. Ми одержимо цим шляхом багато більш тісні границі c і d для кореня α . Якщо вони ще не дають необхідної точності наближення, то до цих границь треба ще раз застосувати зазначені методи (див. рис. 8.31) і т.д., причому можна довести, що цей процес дійсно дозволяє обчислити корінь α з будь-якою точністю.

Застосуємо ці методи до многочлена, який розглядався в попередніх розділах

$$h(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x^2-7x-3,$$

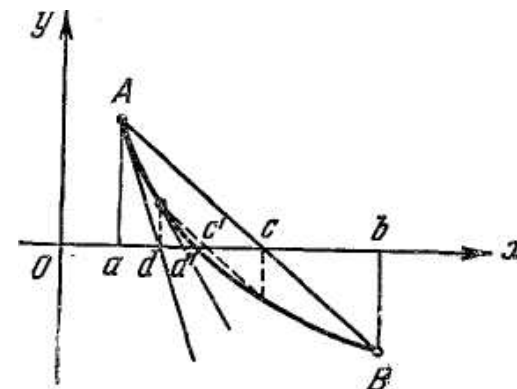


Рис.8.31.

Ми знаємо, що цей многочлен має простий корінь α_1 , який має границі $1 < \alpha_1 < 2$. Можна сказати заздалегідь, що ці границі занадто широкі для того, щоб методи лінійної інтерполяції і Ньютона, які були застосовані лише по одному разу, могли дати гарний результат. Застосуємо їх, щоб мати один приклад, що не вимагає складних обчислень.

У результаті зроблених обчислень було встановлено, що, при $x=1$ похідні $h'(x), h''(x), \dots, h^v(x)$ одержують додатні значення. Звідси випливає, на підставі отриманих раніше результатів, що значення $x=1$ служить для $h'(x)$, а також і для $h''(x)$ верхньою границею додатних коренів. Відрізок $(1, 2)$ не містить, отже, коренів цих похідних, а тому до нього можна застосувати метод Ньютона. Крім того, $h''(x)$ усюди в цьому відрізку додатна, а так як

$$h(1)=-4, \quad h(2)=39,$$

то потрібно прийняти $a_0=2$. З огляду на те, що $h'(2)=109$, ми по формулі (8.129) одержуємо:

$$d=2-\frac{39}{109}=\frac{179}{109}=1,64\dots$$

З іншого боку, керуючись формулою лінійної інтерполяції

$$c=\frac{bf(a)-af(b)}{f(a)-f(b)},$$

маємо

$$c = \frac{2 \cdot (-4) - 1 \cdot 39}{-4 - 39} = \frac{47}{43} = 1,09\dots$$

і, отже, корінь α_1 знаходиться в границях $1,09 < \alpha_1 < 1,65$.

Ми одержали занадто незначне звуження границь для того, щоб визнати цей результат задовільним. Звичайно, до знову отриманих границь можна було б ще раз застосувати наші методи. Доцільно, однак, із самого початку знайти для α_1 досить тісні границі, наприклад з точністю до 0,1 або навіть 0,01, і лише потім застосувати ці методи. Це відразу зробить всі обчислення досить громіздкими, але при розв'язанні конкретних задач, які вимагають досить точного знання коренів многочлена, на це приходится йти.

Повернемося до нашого многочлена $h(x)$ і його кореня α_1 , причому помітимо, що всі значення многочленів, які приводяться нижче, обчислюються методом Горнера. Так як

$$h(1,3) = -0,13987, \quad h(1,31) = 0,0662923851,$$

то

$$1,3 < \alpha_1 < 1,31,$$

тобто ми знайшли значення кореня α_1 , з точністю до 0,01. Застосуємо тепер до цих нових границь метод лінійної інтерполяції:

$$c = \frac{1,31 \cdot (-0,13987) - 1,3 \cdot 0,0662923851}{-0,13987 - 0,0662923851} = \frac{0,26940980063}{0,2061623851} = 1,30678\dots$$

Застосуємо до цих же границь метод Ньютона, причому варто покласти $a_0 = 1,31$. Так як

$$h'(1,31) = 20,92822405,$$

то

$$d = 1,31 - \frac{0,0662923851}{20,92822405} = \frac{27,3496811204}{20,92822405} = 1,30683\dots$$

Таким чином,

$$1,30678 < \alpha_1 < 1,30684,$$

і тому, поклавши $\alpha_1 = 1,30581$, ми зробимо похибку, меншу ніж 0,00003.

Метод Ньютона можна витлумачити незалежно від його геометричного змісту. Позначимо нульове наближення розв'язання через x_0 і розкладемо ліву частину рівняння $f(x) = 0$ по степенях $x - x_0$ у силу формули Тейлора: ми одержимо рівняння

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots = 0.$$

Якщо зробити лінеаризацію, тобто відкинути члени вище першого порядку малості, одержимо лінеаризоване рівняння $f(x) = 0$:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Розв'язання цього лінеаризованого рівняння

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

можна прийняти за перше наближення розв'язання рівняння $f(x) = 0$; ми приходимо до тієї ж формули:

$$c = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

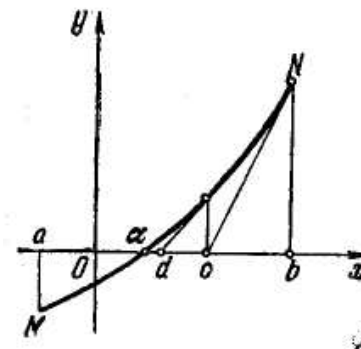


Рис. 8.32.

З першого наближення можна одержати друге по формулі

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (8.130)$$

і т.д. Метод Ньютона завжди приводить до мети, якщо тільки нульове наближення не лежить занадто далеко від шуканого розв'язання.

Іноді застосовується наступний варіант методу Ньютона: знаменник формули (8.130), а також формул для подальших наближень замінюють на $f'(x_0)$; геометрично це означає, що всі похилі прямі на рис. 8.32 проводять паралельно дотичної у

вихідній точці N . Метод у цьому варіанті сходиться трохи гірше, але підрахунок кожного наближення спрощується.

Комбінований метод заснований на тому розумінні, що якщо ділянка графіка, яка розглядається, не має ні зламів, ні точок перегину, то метод хорд і метод дотичних дають точки, які розташовані по різні сторони від шуканого кореня. Якщо, наприклад, графік розташований так, як показано на рис. 8.33, то, відправляючись від інтервалу a, b , можна побудувати точку a_1 по методу хорд, а точку b_1 по методу дотичних, у результаті чого вийде новий інтервал a_1, b_1 , на якому лежить шуканий корінь α . Проробивши аналогічну побудову на інтервалі a_1, b_1 одержимо новий інтервал a_2, b_2 , який містить шуканий корінь, і т.д. При цьому виходить двостороннє наближення до цього кореня, що обривається при досягненні необхідної точності.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$x^3 + x^2 - 3 = 0 \quad (8.131)$$

коефіцієнти якого будемо вважати зовсім точними. Дослідження похідних показує, що при $-\infty < x < -2/3$ ліва частина, що ми позначимо через $f(x)$, зростає від $-\infty$ до $-2(23/27)$, потім при $-2/3 < x < 0$ убуває до -3 і далі зростає до ∞ і має єдину точку перегину при $x = -1/3$. Виходить, рівняння має єдиний дійсний і притому додатний корінь α . Так як $f(0) = -3$, $f(1) = -1$, $f(2) = 9$ (рис. 8.34), то $1 < \alpha < 2$.

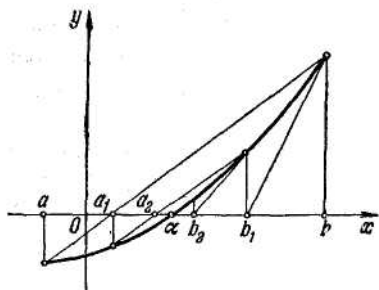


Рис. 8.33

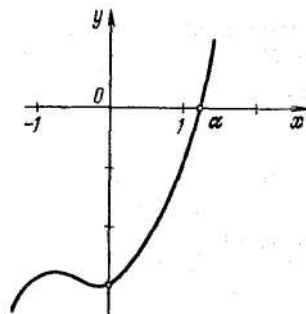


Рис. 8.34.

Відповідно до методу проб обчислюємо $f(1,1) = -0,459$; $f(1,2) = 0,168$, тобто $1,1 < \alpha < 1,2$ (груба «прикидка» кореня проводиться за допомогою методу проб). Покладаючи $a = 1,1$; $b = 1,2$, застосовуємо формули (8.128) і (8.129) відповідно до комбінованого методу:

$$a_1 = 1,2 - \frac{0,168 \cdot 0,1}{0,168 + 0,459} = 1,173,$$

$$b_1 = 1,2 - \frac{0,168}{6,72} = 1,175.$$

Таким чином, з точністю до 0,001 можна покласти $\alpha = 1,174$. Якщо ця точність недостатня, то можна провести подальше обчислення:

$f(1,174) = -0,003628$ («недоліт»; обчислення з точністю до 10^{-6}); $f(1,175) = 0,002859$. Приймавши $a = 1,174$, $b = 1,175$, одержуємо по комбінованому методу після обчислень з точністю до 10^{-7} :

$a_2 = 1,1745593$; $b_2 = 1,1745596$. Таким чином, з точністю до 0,000001 можна покласти $\alpha = 1,174559$.

Ми не показали дотепер, що викладені вище методи насправді дозволяють обчислити корінь з будь-якою точністю, тобто не довели збіжності цих методів. Доведемо це хоча б для методу Ньютона.

Нехай, як і вище, простий корінь α многочлена $f(x)$ утримується у відрізьку (a, b) , обраному так, як це необхідно для застосування методу Ньютона. Звідси випливає, зокрема, існування таких додатних чисел A і B , що усюди на відрізьку (a, b)

$$|f'(x)| > A, \quad |f''(x)| < B. \quad (8.132)$$

Уведемо позначення

$$C = \frac{B}{2A}$$

і покладемо, що

$$C(b-a) < 1. \quad (8.133)$$

Для виконання цієї нерівності прийдеться, можливо, замінити границі (a, b) кореня α більш вузькими границями; це не відіб'ється, однак, на справедливості нерівностей (8.132). Нехай a_0 буде та з границь a, b , у якій варто застосовувати метод Ньютона. На підставі формули (8.129) ми послідовно одержимо як наближені значення кореня α числа $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$, які лежать у відрізьку (a, b) і зв'язані між собою рівностями

$$a_k = a_{k-1} - \frac{f(a_{k-1})}{f'(a_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.134)$$

Нехай

$$\alpha = a_k + h_k, \quad k=1,2,\dots \quad (8.135)$$

Тоді

$$0 = f(\alpha) = f(a_k) + h_k f'(a_k) + \frac{h_k^2}{2} f''(a_k + \theta h_k),$$

де $0 < \theta < 1$.

Так як

$$f'(a_k) \neq 0$$

через умову, накладену на відрізок (a, b) , то, з огляду на (8.134) і (8.135), одержимо:

$$-\frac{h_k^2}{2} \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{f'(a_k)} = h_k + \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} = \alpha - \left(a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)} \right) = \alpha - a_{k+1} = h_{k+1}.$$

Звідси

$$|h_{k+1}| = h_k^2 \left| \frac{f''(a_k + \theta h_k)}{2f'(a_k)} \right| < h_k^2 \frac{B}{2A} = Ch_k^2, \quad k=0,1,2,\dots$$

Таким чином,

$$|h_{k+1}| < Ch_k^2 < C^3 h_{k-1}^4 < C^7 h_{k-2}^8 < \dots < C^{2^{k+1}-1} h_0^{2^{k+1}},$$

або, так як
маємо

$$|h_0| = |\alpha - a_0| < b - a$$

$$|h_{k+1}| < C^{-1} [C(b-a)]^{2^{k+1}}, \quad k=0,1,2,\dots \quad (8.136)$$

Звідси, через умову (8.133), випливає, що різниця h_k між коренем α і його наближеним значенням a_k , отриманим послідовним застосуванням методу Ньютона, прагне до нуля при зростанні k , що і потрібно було довести.

Відзначимо, що формула (8.136) дає оцінку похибки для $(k+1)$ -го кроку, що істотно, якщо метод Ньютона застосовується один, а не в комбінації з методом лінійної інтерполяції.

3. Метод ітерацій. Методи, які описано вище, належать до числа ітераційних методів (інакше кажучи, методів послідовних наближень), у яких деякий однаковий процес послідовно повторюється («ітерується», від латинського «ітераціо» — повторення), у результаті чого виходять усе більш точні наближені розв'язання. Ця однаковість має численні зручності, зокрема, у застосуванні обчислювальної техніки.

У загальному вигляді в застосуванні до рівняння $f(x)=0$ метод ітерацій виглядає так: рівняння переписується в рівносильній формі:

$$x = \varphi(x). \quad (8.137)$$

Потім вибирається деяке значення $x=x_0$ як нульове наближення; бажано, щоб воно було по можливості ближче до шуканого розв'язання, якщо про останнє що-небудь відомо. Наступні наближення обчислюються по формулах $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1)$, ..., узагалі

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (8.138)$$

При цьому може бути два випадки.

1) *Процес може сходиться*, тобто послідовні наближення x_n при $n \rightarrow \infty$ прагнуть до деякої границі \bar{x} ; у цьому випадку, переходячи у формулі (8.138) до границі при $n \rightarrow \infty$, бачимо, що $x = \bar{x}$ є розв'язком рівняння (8.137).

2) *Процес може розходитися*, тобто кінцевої границі побудованих „наближень” існувати не буде. З цього аж ніяк не випливає, що і розв'язання рівняння (8.137) не існує, просто могло виявитися, що процес ітерацій обраний невдало. (Утім, і у випадку збіжності буває, що у вибраних границя виходить не той розв'язок, біля якого ми вибрали x_0 , а інше може бути таким, що навіть не має фізичного змісту.)

Пояснимо сказане на простому прикладі рівняння, яке можна розв'язати без усякої «науки»,

$$x = (x/2) + 1 \quad (8.139)$$

є очевидним розв'язанням $\bar{x}=2$. Якщо покласти $x_0=0$ і обчислювати з точністю до 0,001, то одержимо $x_1=1,000$; $x_2=1,500$; $x_3=1,750$; $x_4=1,875$; $x_5=1,938$; $x_6=1,969$; $x_7=1,984$; $x_8=1,992$; $x_9=1,996$; $x_{10}=1,998$; $x_{11}=1,999$; $x_{12}=2,000$; $x_{13}=2,000$, тобто процес практично зійшовся.

Якщо замість (8.139) розглянути рівняння

$$x = (x/10) + 1$$

і прийняти $x_0=0$, то з точністю до 0,001 буде $x_1=1,000$; $x_2=1,100$; $x_3=1,110$; $x_4=1,111$; $x_5=1,111$, тобто процес практично зійшовся вже після чотирьох ітерацій.

Якщо рівняння (8.139) розв'язати відносно x , який стоїть в правій частині, тобто переписати в рівносильній формі

$$x = 2x - 2, \quad (8.140)$$

і почати з $x_0=0$, то ми одержимо послідовність $x_1=-2$, $x_2=-6$, $x_3=-14$ і т.д., тобто процес сходиться не буде. Це можна було передбачати, помітивши, що з (8.138) випливає рівність

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}), \quad (8.141)$$

тобто

$$x_2 - x_1 = \varphi(x_1) - \varphi(x_0); \quad x_3 - x_2 = \varphi(x_2) - \varphi(x_1); \quad \text{і т.д.}$$

Якщо значення функції міняються повільніше, ніж значення аргументу, точніше, якщо

$$|\varphi(x) - \varphi(\bar{x})| \leq k |x - \bar{x}| \quad (k = \text{const} < 1), \quad (8.142)$$

то відстані між послідовними наближеннями будуть швидко прагнути до нуля і процес ітерацій сходиться, притому тим швидше, чим менше k . Нерівність (8.142) повинна виконуватися для всіх x, \bar{x} або, у всякому разі, поблизу шуканого кореня x рівняння (8.137). У п. 4 буде показано, що нерівність (8.142) виконується, якщо $|\varphi'(x)| \leq k$.

Ми бачимо, що рівняння (8.139) і (8.140) цілком рівносильні, але породжують різні ітераційні процеси. І в інших випадках рівняння $f(x)=0$ можна переписати у формі (8.137) багатьма способами, кожний з яких породжує свій ітераційний процес, причому одні з цих процесів можуть виявитися такими, які швидко сходяться і тому найбільш зручними, другі виявляються такими, які повільно сходяться, а треті - навіть зовсім розбіжними. Зокрема, легко перевірити, що якщо рівняння $f(x)=0$ записати у вигляді

$$x = x - \frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}$$

то, якщо починати з $x_0=a$ [див. формулу (8.128)], вийде метод хорд, а якщо рівняння $f(x)=0$ записати у вигляді

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad (8.143)$$

то вийде метод дотичних.

У більш складних прикладах, чим ті, які були розібрані вище, найчастіше не проводять теоретичного доведення збіжності процесу ітерацій, а просто обчислюють кілька наближень і по їх вигляду роблять висновок про збіжність або про те, що процес розходиться. Якщо вважають, що яке-небудь наближення достатньо мало відрізняється від попереднього, наприклад, якщо відмінність виходить за рамки прийнятого ступеня точності, то процес ітерацій обривають. У всякому разі, це свідчить про те, що досягнуте наближення задовольняє рівнянню (8.137) з необхідною точністю, так як якщо

$$|x_n - x_{n+1}| < h, \quad \text{то і } |x_n - \varphi(x_n)| < h.$$

4. Формула кінцевих приростів. Нерівність (8.142) можна перевірити за допомогою так названої формули кінцевих приростів, що ми зараз введемо. Припустимо, що функція $y=\varphi(x)$ на інтервалі a, b (включаючи кінці) безперервна разом зі своєю похідною. Розглянемо (рис. 8.35) графік цієї функції на інтервалі $a \leq x \leq b$, проведемо хорду MN , яка стягує його кінці, і припустимо для визначеності, що графік хоча б частково розташовано над цією хордою. Проведемо тоді вище графіка пряму $l \parallel MN$ і станемо її безупинно опускати, залишаючи паралельною MN . Тоді в деякому

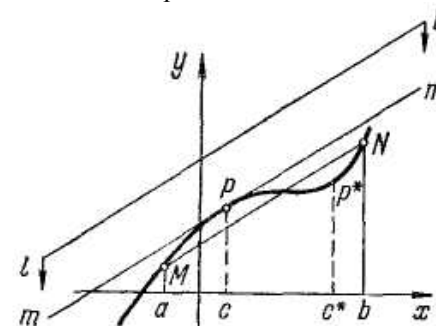


Рис. 8.35.

положенні вона торкнеться графіка в точці P , тобто на гладкій дузі неодмінно зійдеться принаймні одна точка, у якій дотична паралельна хорді, яка стягає цю дугу. Якщо прирівняти кутові коефіцієнти хорди і дотичної, то ми одержимо

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} = \varphi'(c), \quad \text{тобто } \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a), \quad (8.144)$$

де c — деяка точка між a і b . Формула (8.144) називається *формулою кінцевих приростів* (тому що відстань a від b може бути не малою) або *теоремою Лагранжа*. Відзначимо, що значення c , яке фігурує у формулі (8.144), для даної функції і даного інтервалу a, b ніяк не є довільним, хоча для c може вийти кілька придатних значень. Наприклад, для рис. 8.35 і формулі (8.144) замість c можна взяти c^* , тому що в точці P^* дотична також паралельна хорді MN . При застосуванні формули (8.144) значення c зазвичай невідоме, однак про c часто досить знати, що воно знаходиться десь між a і b .

Наприклад, нехай дано, що на деякому інтервалі $|\varphi'(x)| \leq k$.

Тоді, застосовуючи формулу (8.144) до будь-яких двох точок x і \bar{x} цього інтервалу, побачимо, що для них $|f(x) - f(\bar{x})| \leq k|x - \bar{x}|$ [див. формулу (8.142)].

З формул (8.141) і (8.144) випливає також, що якщо послідовні наближення знаходяться недалеко від точного розв'язання \bar{x} , так що $f'(x)$ міняється мало, то процес ітерацій сходиться приблизно зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $f'(\bar{x})$. Якби різниці між послідовними наближеннями утворювали точну геометричну прогресію, то її перший член $a = x_1 - x_0$, а знаменник

$$q = \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}.$$

Тому сума всієї прогресії, тобто $\bar{x} - x_0$, дорівнювала б

$$\frac{a}{1 - q} = \frac{x_1 - x_0}{1 - \frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}} = \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2},$$

звідки

$$\bar{x} = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2x_1 - x_0 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_0x_2}{2x_1 - x_0 - x_2}. \quad (8.145)$$

У більш складних прикладах послідовні різниці лише нагадують геометричну прогресію. Тоді формула (8.145) не дає точного розв'язка, але дає можливість «перескочити» через кілька наближень і одержати наближене значення розв'язка, від якого можна знову почати ітерації.

Особливу роль грає ітераційний процес Ньютона. Справді, похідна від правої частини (8.143), тобто

$$1 - \frac{ff' - ff''}{f'^2} = \frac{ff''}{f'^2},$$

обертається в нуль при $x = \bar{x}$, так як $f(\bar{x}) = 0$. Виходить, у силу попереднього, метод Ньютона сходиться швидше геометричної прогресії з будь-яким знаменником. Швидкість цієї збіжності легко установити на наступному простому типовому прикладі. Нехай розглядаються наближення за способом Ньютона до нульового кореня рівняння $x + x^2 = 0$. Ці наближення зв'язані один з одним співвідношенням

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + x_n^2}{1 + 2x_n} = \frac{x_n^2}{1 + 2x_n} \approx x_n^2.$$

Для оцінки швидкості збіжності замінимо цю наближену рівність на точну; тоді послідовно одержимо $x_1 = x_0^2$, $x_2 = x_1^2 = x_0^4$, $x_3 = x_2^2 = x_0^8$ і т.д. При $|x_0| < 1$ права частина зі збільшенням n прагне до нуля швидше будь-якої експоненти.

5. Метод малого параметра. Метод малого параметра, він же метод збурювань, як і метод ітерацій, являє собою один з найбільш універсальних методів у математиці і полягає в наступному. Нехай формулювання деякої задачі, крім основних невідомих величин, містить деякий параметр α , причому ця задача при якомусь значенні $\alpha = \alpha_0$ може бути більш-менш легко розв'язана (незбурений розв'язок). Тоді розв'язок задачі при α , близьких до α_0 (збурений розв'язок), у багатьох випадках можна одержати розкладеним по степенях $\alpha - \alpha_0$ з тим або іншим ступенем точності. При цьому перший член розкладання, який не має виразу $\alpha - \alpha_0$, отримується при $\alpha = \alpha_0$, тобто дає незбурений розв'язок. Подальші ж члени дають поправки на «збурювання» розв'язка; ці поправки мають перший, другий і т.д. порядки малості (у порівнянні з $\alpha - \alpha_0$). Ці члени звичайно знаходяться по методу невизначених коефіцієнтів, тобто коефіцієнти при $(\alpha - \alpha_0)$, $(\alpha - \alpha_0)^2$ і т.д. позначаються якимись літерами, що знаходяться потім з умов задачі. Цей метод дає гарний результат тільки при α , близьких до α_0 , при цьому чим $|\alpha - \alpha_0|$ менша, тим менше членів розкладання потрібно обчислювати; так як часто приймають $\alpha_0 = 0$, то звідси і відбувається назва методу. Варто мати також на увазі, що при великих $|\alpha - \alpha_0|$ метод може призвести до принципових помилок, тому що може вийти так, що члени, які відкидаються, більш істотні, чим ті, що залишаються.

Таким чином, метод малого параметра дає можливість, виходячи з розв'язок деяких «вузлових» задач, одержати розв'язок задач, формулювання яких близьке до цих вузлових, якщо, звичайно, зміна формулювання не спричиняє принципової, якісної зміни розв'язки. У багатьох задачах уже вигляд першого члена, що містить параметр, дає можливість зробити корисні висновки про залежність розв'язки від параметра при його малій зміні.

Приклад. Знайдемо розв'язок рівняння

$$x^3 - \alpha x^2 + 1 = 0 \quad (8.146)$$

при малих $|\alpha|$ з точністю до величин порядку α^3 включно. Для цього помітимо, що при $\alpha=0$ виходить рівняння $x^3+1=0$ з очевидним розв'язком $x_0=-1$. Тому пишемо

$$x_\alpha = -1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \text{члени вищого порядку малості.}$$

Підставляючи цей вираз в (8.146) і виписуючи члени тільки до α^3 , одержимо $[-1+3a\alpha+3b\alpha^2-3a^2\alpha^2-6aba^3+3c\alpha^3+a^3\alpha^3]-\alpha(1-2a\alpha-2b\alpha^2+a^2\alpha^2)+1+$ + члени вищого порядку малості=0.

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях α , одержимо $3a-1=0$, $3b-3a^2+2a=0$, $-6ab+3c+a^3+2b-a^2=0$ і послідовно знаходимо $a=1/3$, $b=-1/9$, $c=2/81$, тобто розв'язок рівняння (8.146)

$$x_\alpha = -1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^2}{9} + \frac{2\alpha^3}{81} \quad (8.147)$$

з точністю до величин вищого порядку малості відносно α . Той же результат можна одержати, застосовуючи безпосередньо формулу Тейлора зі зміненими позначеннями:

$$x_\alpha = x_0 + \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0 \alpha + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)_0 \alpha^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3x}{d\alpha^3}\right)_0 \alpha^3; \quad (8.148)$$

індекс «нуль» указує на підстановку $\alpha=0$. Для цього диференціюємо рівність (8.146) по α :

$$3x^2 \frac{dx}{d\alpha} - x^2 - 2\alpha x \frac{dx}{d\alpha} = 0,$$

$$6x \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + 3x^2 \frac{d^2x}{d\alpha^2} - 4x \frac{dx}{d\alpha} - 2\alpha \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 - 2\alpha x \frac{d^2x}{d\alpha^2} = 0,$$

$$6 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^3 + 18x \frac{dx}{d\alpha} \frac{d^2x}{d\alpha^2} + 3x^2 \frac{d^3x}{d\alpha^3} - 6 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 - 6x \frac{d^2x}{d\alpha^2} - 6\alpha \frac{dx}{d\alpha} \frac{d^2x}{d\alpha^2} - 2\alpha x \frac{d^3x}{d\alpha^3} = 0$$

Підставляючи $\alpha=0$, $x=-1$, одержимо

$$3 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0 - 1 = 0, \quad -6 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0^2 + 3 \left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)_0 + 4 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0 = 0,$$

$$6 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0^3 - 18 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0 \left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)_0 + 3 \left(\frac{d^3x}{d\alpha^3}\right)_0 - 6 \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0^2 + 6 \left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)_0 = 0,$$

звідки одержуємо послідовно

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)_0 = \frac{1}{3}; \quad \left(\frac{d^2x}{d\alpha^2}\right)_0 = -\frac{2}{9}; \quad \left(\frac{d^3x}{d\alpha^3}\right)_0 = \frac{4}{27}.$$

Звідси з формули (8.148) випливає розкладання (8.147), що дає гарну точність при малих $|\alpha|$.

Метод малого параметра безпосередньо зв'язаний з методом ітерацій, що ми продемонструємо на тому ж прикладі (8.146). Зручно, щоб незбурений розв'язок був нульовим; це досягається за допомогою підстановки $x=-1+y$, звідки

$$-1+3y-3y^2+y^3-\alpha+2\alpha y-\alpha y^2+1=0,$$

тобто

$$y = \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha y + y^2 + \frac{1}{3}\alpha y^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Якщо тепер проводити ітерації, починаючи від значення $y_0=0$ і відкидаючи в розкладанні члени вище третього порядку малості, то за три кроки ми прийдемо до необхідного розкладання. При цьому легко перевірити, що в кожнім наближенні можна відкидати члени, порядок малості яких вище номера наближення.

8.13. Інтерполяція

Інтерполяційна формула Лагранжа. Нехай при вивченні деякого явища встановлено, що існує функціональна залежність між величинами y і x , яка описує кількісну сторону даного явища; при цьому функція $y=\varphi(x)$ залишається нам невідомою, але на основі експерименту встановлені значення цієї функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ при деяких значеннях аргументу $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, які належать відрізкові $[a, b]$.

Задача полягає в тому, щоб знайти функцію, по можливості більш просту з погляду обчислювальності (наприклад, многочлен), яка відображала б невідому функцію $y=\varphi(x)$ на відріжку $[a, b]$ точно або приблизно. У більш відверненій формі цю задачу можна сформулювати так: на відріжку $[a, b]$ задані значення невідомої функції $y=\varphi(x)$ у $n+1$ різних точках x_0, x_1, \dots, x_n :

$$y_0=\varphi(x_0), \quad y_1=\varphi(x_1), \dots, \quad y_n=\varphi(x_n);$$

потрібно знайти многочлен $P(x)$ степеня $\leq n$, який приблизно виражає функцію $\varphi(x)$.

В якості такого многочлена природно взяти многочлен, значення якого в точках $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ збігаються з

відповідними значеннями $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ функції $\varphi(x)$ (рис. 8.36). Тоді поставлена задача, яка називається «задачею інтерполяції функції», формулюється так: для даної функції $\varphi(x)$ знайти многочлен $P(x)$ степеня $\leq n$, який при заданих значеннях x_0, x_1, \dots, x_n приймає би значення

$$y_0 = \varphi(x_0), y_1 = \varphi(x_1), \dots, y_n = \varphi(x_n).$$

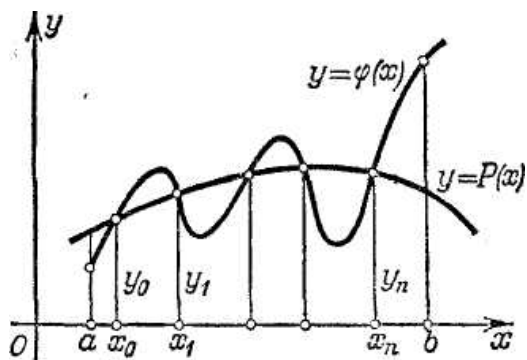


Рис. 8.36.

В якості шуканого многочлена візьмемо многочлен n -го степеня вигляду

$$P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + C_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + C_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) + C_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \quad (8.149)$$

і визначимо коефіцієнти C_0, C_1, \dots, C_n так, щоб виконувалися умови

$$P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n. \quad (8.150)$$

Покладемо у формулі (8.149) $x = x_0$; тоді, приймаючи до уваги рівності (8.150), одержимо:

$$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n),$$

звідки

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}.$$

Потім, поклавши $x = x_1$, одержимо:

$$y_1 = C_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n),$$

звідки

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x_1 - x_n)}.$$

У такий же спосіб знайдемо:

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\dots(x_2 - x_n)}$$

$$\dots$$

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_n - x_{n-1})}.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у формулу (8.149), одержимо:

$$P(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1 + \dots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n \quad (8.151)$$

Ця формула називається *інтерполяційною формулою Лагранжа*.

Відзначимо без доведення, що якщо $\varphi(x)$ має похідну $(n+1)$ -го порядку на відрізку $[a, b]$, то похибка при заміні функції $\varphi(x)$ многочленом $P(x)$, тобто величина

$$R(x) = \varphi(x) - P(x),$$

задовольняє нерівності

$$|R(x)| < |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \max|\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Покажемо, що існують і інші інтерполяційні формули. Одна з них - інтерполяційна формула Ньютона — буде розглянута нижче.

Приклад. З експерименту отримані такі значення функції $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ при $x_1 = 2$; $y_2 = -4$ при $x_2 = -4$. Потрібно представити приблизно функцію $y = \varphi(x)$ многочленом 2-го степеня.

Розв'язання. По формулі (8.151) маємо (при $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4,$$

або

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}$$

Інтерполяційні формули Ньютона. Якщо відстань h між сусідніми значеннями x , при яких задається функція f , є сталою, то можна користуватися більш зручними формулами,

ніж формула Лагранжа. Нехай, наприклад, відомі значення

$$f(x_0)=y_0; f(x_1)=y_1; f(x_2)=y_2; f(x_3)=y_3,$$

де $x_1=x_0+h$, $x_2=x_0+2h$, $x_3=x_0+3h$. Тоді многочлен $P(x)$, який приймає ті ж значення при зазначених значеннях x , буде мати третій степінь. Ньютон запропонував шукати його у виді

$$P(x)=A+Bs+Cs(s-h)+Ds(s-h)(s-2h), \quad (8.152)$$

де $s=x-x_0$. Відповідно до умови повинно бути

$$y_0 = P(x_0) = P|_{s=0} = A; \quad y_1 = P(x_1) = P|_{s=h} = A + Bh;$$

$$y_2 = P(x_2) = P|_{s=2h} = A + B \cdot 2h + C \cdot 2h^2;$$

$$y_3 = P(x_3) = P|_{s=3h} = A + B \cdot 3h + C \cdot 3 \cdot 2h^2 + D \cdot 3 \cdot 2h^3.$$

Складаючи різниці для лівих і правих частин, одержимо

$$\Delta y_0 = Bh; \quad \Delta y_1 = Bh + C \cdot 2h^2; \quad \Delta y_2 = Bh + C \cdot 2 \cdot 2h^2 + D \cdot 3 \cdot 2h^3$$

Удруге складаючи різниці, а потім і втретє, знайдемо

$$\Delta^2 y_0 = C \cdot 2h^2; \quad \Delta^2 y_1 = C \cdot 2h^2 + D \cdot 3 \cdot 2h^2; \quad \Delta^3 y_0 = D \cdot 3 \cdot 2h^2;$$

Звідси знаходимо

$$A = y_0; \quad B = \frac{\Delta y_0}{h}; \quad C = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}; \quad D = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}.$$

Підставляючи ці значення в (8.152) і помітивши, що замість x_0 можна було починати від будь-якого табличного значення x_k , одержимо *формулу Ньютона*

$$f(x) \approx P(x) = y_k + \Delta y_k \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_k}{2!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_k}{3!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \left(\frac{s}{h} - 2 \right) \quad (8.153)$$

де $s=x-x_k$.

Аналогічний вигляд має формула для інтерполяційних многочленів інших степенів. Збільшуючи цей степінь можемо перейти до нескінченного ряду

$$f(x) = y_k + \Delta y_k \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_k}{2!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) + \frac{\Delta^3 y_k}{3!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \left(\frac{s}{h} - 2 \right) + \dots, \quad (8.154)$$

причому не виписані члени містять відповідно різниці четвертого, п'ятого і т.д. порядків і тому мають четвертий, п'ятий і т.д. порядок малості в порівнянні з кроком h . На практиці цю формулу, зазвичай, обривають, доводячи її до місця, починаючи з якого доданками можна зневажити. Якщо крок великий або якщо ми знаходимося поблизу від кінця

інтервалу, на якому задана функція $f(x)$, то може виявитися, що такого місця досягти не можна: тоді і формулою (8.154) користуватися не можна. Формули Ньютона (8.153) або (8.154) легко застосовувати, якщо функція f задана таблично, так як в цьому випадку легко підраховувати різниці. Особливо часто вони застосовуються *на початку таблиці* (наприклад, якщо $k=0$, x_0 — перше табличне значення аргументу, а $x_0 < x < x_1$). Степінь інтерполяційного многочлена $P(x)$ вибирають, керуючись значеннями різниць; наприклад, якщо треті різниці дуже малі, то останній член у формулі (8.153) малий і його можна відкинути, тобто обмежитися многочленом другого степеня. У формулі (8.154) можна покласти і $k=0$, $x < x_0$, якщо різниця $|x-x_0|$ невелика, це приведе до *екстраполяції таблиці назад*.

Подібно (8.154) виводиться *інша формула Ньютона*:

$$f(x) = y_{k+1} - \Delta y_k \frac{t}{h} + \frac{\Delta^2 y_{k-1}}{2!} \frac{t}{h} \left(\frac{t}{h} - 1 \right) - \frac{\Delta^3 y_{k-2}}{3!} \frac{t}{h} \left(\frac{t}{h} - 1 \right) \left(\frac{t}{h} - 2 \right) + \dots, \quad (8.155)$$

де $t=x_{k+1}-x$, що застосовується, зокрема, *наприкінці таблиці*, наприклад, якщо x_{k+1} — останнє табличне значення аргументу, а $x_k < x < x_{k+1}$. Ця ж формула застосовується для *екстраполяції таблиці вперед*. При інтерполяції в середині таблиці бажано мати формулу, яка використовує рівною мірою табличні значення функції як спереду, так і позаду значенням x , яке розглядається. Однією з таких формул служить *формула Бесселя*, яка виходить, якщо взяти напівсуму правих частин (8.154) і (8.155):

$$f(x) = \frac{y_k + y_{k+1}}{2} + \Delta y_k \left(\frac{s}{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta^2 y_{k-1} + \Delta^2 y_k}{2 \cdot 2!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) + \quad (8.156)$$

$$+ \frac{\Delta^3 y_{k-1}}{3!} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \left(\frac{s}{h} - \frac{1}{2} \right) + \dots,$$

де $s = x - x_k$. Ця формула, має високу точність.

Інтерполяційні формули застосовуються також до задачі *оберненої інтерполяції*, яка складається у відшуканні значення аргументу за заданим значенням функції. Будемо виходити, наприклад, з формули (8.153). Приймавши рівність за точне, цю формулу можна розв'язати щодо другого доданка в правій частині, який після ділення на Δy_k дасть

$$\frac{s}{h} = \frac{y - y_k}{\Delta y_k} - \frac{\Delta^2 y_k}{2! \Delta y_k} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) - \frac{\Delta^3 y_k}{3! \Delta y_k} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \left(\frac{s}{h} - 2 \right) \quad (8.157)$$

Якщо задано y , то для знаходження s можна застосувати метод послідовних наближень. Для цього в якості нульового наближення можна покласти

$$\left(\frac{s}{h}\right)_0 = \frac{y - y_k}{\Delta y_k};$$

підставивши це значення в праву частину (8.157), знаходимо (s/h) і т.д. При малому h процес добре сходиться. При інтерполяції розривної функції або функції з розривної похідної треба мати на увазі, що поблизу точок розриву якість апроксимації може значно понизитися, тому що інтерполяційний многочлен розривів не має. Для імітації розриву можна значно зближати вузли інтерполяції поблизу точок розриву, але зазвичай бажають проводити інтерполяцію тільки на інтервалах між точками розриву.

Кінцеві різності і їхній зв'язок з похідними. Перш ніж перейти до подальшого, розглянемо одне з важливих понять сучасної математики, поняття *кінцевої різності*. Нехай $y=f(x)$; тоді при даному h вираз $\Delta_h y = f(x+h) - f(x)$ називається *кінцевою різністю першого порядку* («першою різністю») функції f із кроком h , а вираз

$$\frac{1}{h} \Delta_h y = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ -першою розділеною різністю.}$$

З визначення похідної ясно, що при досить малому h буде

$$\frac{1}{h} \Delta_h y \approx y', \tag{8.158}$$

точніше
$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \Delta_h y.$$

Нехай, наприклад, $y = x^3$. Тоді

$$\Delta_h y = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3xh^2 + h^3,$$

$$\frac{1}{h} \Delta_h y = 3x^2 + 3xh + h^2,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \Delta_h y\right) = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 = y'.$$

З очевидних властивостей різностей відзначимо такі:

$$\Delta_h (y_1 + y_2) = \Delta_h y_1 + \Delta_h y_2; \quad \Delta_h (Cy) = C \Delta_h y \quad (C = const).$$

Від різності можна взяти різність (∂y):

$$\Delta_h^2 y = \Delta_h (\Delta_h y) = \Delta_h [f(x+h) - f(x)] = [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

Аналогічно визначається друга розділена різність

$$\frac{1}{h} \Delta_h \left(\frac{1}{h} \Delta_h y\right) = \frac{1}{h^2} \Delta_h (\Delta_h y) = \frac{1}{h^2} \Delta_h^2 y = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

Так як узяття розділеної різності з малим кроком приблизно рівнозначно диференціюванню, то друга розділена різність з малим кроком приблизно дорівнює другій похідній, точніше,

$$y'' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Delta_h^2 y = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \tag{8.159}$$

Так, у попередньому прикладі

$$\Delta_h^2 y = \Delta_h (3x^2h + 3xh^2 + h^3) = 3(x+h)^2h + 3(x+h)h^2 + h^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3 = 6xh^2 + 6h^3;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \Delta_h^2 y = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 6h) = 6x = y''.$$

Аналогічно визначається третя різність

$$\Delta_h^3 y = \Delta_h (\Delta_h^2 y)$$

і третя розділена різність
$$\frac{1}{h^3} \Delta_h^3 y,$$

яка в границі дає третю похідну y''' , і т.д.

Обчислення цих різностей особливо зручне, якщо функція задана табличним способом. Для таблиці загального вигляду можна написати $\Delta y_l = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, узагалі $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$, тут нижній індекс у Δy_k означає вже не крок, що для таблиці зафіксований, а номер різності. Далі $\Delta^2 y_l = \Delta y_2 - \Delta y_1$, $\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$ і т.д. Наприклад, при $h=0,1$:

x	10,0	10,1	10,2	10,3	10,4	10,5	10,6
y	1,00000	1,00432	1,00860	1,01284	1,01703	1,02119	1,02531
$10^5 \Delta y$	432	428	424	419	416	412	407
$10^5 \Delta^2 y$	-4	-4	-5	-3	-4	-5	
$10^5 \Delta^3 y$	0	-1	2	-1	-1		

(Це приведений уривок з таблиці логарифмів, причому значення різностей помножені на 100000, щоб позбутися десяткових нулів.)

Малість і майже сталість других різностей у приведеному прикладі вказують на плавність ходу зміни функції, на відсутність випадкових «випадів» з цього ходу. Така закономірність може проявлятися в різностях більш високого порядку і завжди свідчить про «правильність» ходу зміни функції. Звичайно, якщо крок не малий, а також поблизу точок розриву і т.п. різності можуть і не бути малими, але, зазвичай, в них виявляється та або інша закономірність. У той же час випадкові похибки в складанні таблиці різко виявляються у вищих різностях і, таким чином, можуть бути вилучені. Нехай, наприклад, у приведеній таблиці замість 1,01284 помилково було б написано 1,01294. Тоді четвертий рядок мав би вигляд $-4, +6, -25, +7, -4, -5$, тобто закономірність, мабуть, порушена. По цій же причині, якщо таблиця отримана з експерименту, проведеного не з особливо високою точністю, то різності вище другого порядку застосовуються рідко; часто обмежуються навіть тільки першими різностями.

Іноді різність $y_{k+1} - y_k$ порівнюють не зі значенням x_k , як наведено вище, а зі значенням $x_k + h/2$, яке позначають

$$x_{k+\frac{1}{2}}$$

і умовно називають *напівцілим*, на відміну від «цілих» значень x_k (звичайно, цілими або напівцілими насправді є номери, а не самі x). Тоді різність називається *центральною* і позначається

$$\delta_{k+\frac{1}{2}} y = y_{k+1} - y_k.$$

При діленні її на крок h виходить розділена центральна різність. Аналогічно складаються центральні різності другого порядку

$$\delta^2_k y = \delta_{k+\frac{1}{2}} y - \delta_{k-\frac{1}{2}} y;$$

вони знову визначені при «цілих» значеннях аргументу і т.д.

З рис. 8.37 видно, що розділена центральна різність, дорівнює кутовому коефіцієнту хорди BP , ближче до похідної (до кутового коефіцієнта дотичної в точці A), ніж проста

розділена різність (кутовий коефіцієнт хорди AD). Це легко перевірити за допомогою ряду Тейлора: різність

$$\frac{\Delta y}{h} - y' = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - y'(x) = \frac{h}{2} y''(x) + \frac{h^2}{6} y'''(x) + \dots$$

при малих h має порядок h , тоді як різність

$$\frac{\delta y}{h} - y' = \frac{y\left(x+\frac{h}{2}\right) - y\left(x-\frac{h}{2}\right)}{h} - y'(x) = \frac{h^2}{6} y'''(x) + \frac{h^4}{1920} y^{(5)}(x) + \dots$$

має порядок h^2 . (Аналогічно знаходиться порядок похибки інших наближених формул при малому кроці.) Отже, наближені значення похідної краще визначати за допомогою центральної розділеної різності, ніж по формулі (8.158). У розглянутому нами нижче методі числового диференціювання буде визначено ще більш точний спосіб наближеного обчислення похідних будь-якого порядку.

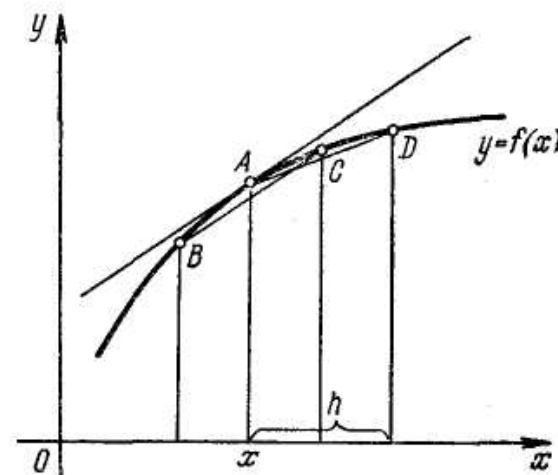


Рис. 8.37.

Якщо розділені різності при малому кроці близькі до відповідних похідних і багато в чому їм аналогічні, то самі (нерозділені) різності близькі до відповідних диференціалів. Наприклад, з формул (8.159) бачимо, що

$$\frac{1}{h^2} \Delta^2_h y = y'' + \alpha$$

($|\alpha| \ll 1$, тобто α — нескінченно мала при $h \rightarrow 0$); звідси

$$\Delta^2_h y = y''h^2 + \alpha h^2 = y''(\Delta x)^2 + \alpha h^2 = d^2 y + \alpha h^2 \quad (|\alpha h^2| \ll h^2).$$

Виходить, при $y'' \neq 0$, $\Delta^2_h y$ і $d^2 y$ розрізняються на величину вищого порядку малості і при $h \rightarrow 0$ є нескінченно малими еквівалентними.

Числове диференціювання. Числове диференціювання, зазвичай, виконується, якщо функція, від якої треба знайти похідну, задана таблично. Це можна зробити так: відповідно до методів, які викладені вище, необхідно замінити розглянуту функцію многочленом, від якого і знайти похідну. Наприклад, з формули (8.153) виходить

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y_k}{h} + \frac{\Delta^2 y_k}{h} \left(\frac{s}{h} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta^3 y_k}{2h} \left[\left(\frac{s}{h} \right)^2 - 2 \left(\frac{s}{h} \right) + \frac{2}{3} \right];$$

взявши у формулі (8.154) більше членів, можна одержати більш точний результат. Зокрема, якщо покласти що $x = x_k$ (тобто $s=0$), одержимо

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_k - \frac{\Delta^2 y_k}{2} + \frac{\Delta^3 y_k}{3} \right).$$

Більш точна формула має вигляд нескінченного ряду

$$f'(x_k) \approx \frac{1}{h} \left(\frac{\Delta y_k}{1} - \frac{\Delta^2 y_k}{2} + \frac{\Delta^3 y_k}{3} - \frac{\Delta^4 y_k}{4} + \dots \right). \quad (8.160)$$

Подібним чином можна одержати формули для похідних другого і наступного порядків. Можна скористатися і формулами (8.155) і (8.156), а також іншими інтерполяційними формулами.

Відзначимо, зокрема, формулу, що випливає з формули (8.156),

$$f'(x_k) = \frac{1}{2h} \left\{ \Delta y_{k-1} + \Delta y_k - \frac{1}{6} (\Delta^3 y_{k-2} + \Delta^3 y_{k-1}) + \frac{1}{30} (\Delta^5 y_{k-3} + \Delta^5 y_{k-2}) - \dots \right\}.$$

У ній послідовні члени мають перший, третій, п'ятий і т.д. порядки малості і коефіцієнти убувають швидше, ніж у ряді (8.160).

Якщо таблиця функції вийшла в результаті експерименту, то мала похибка в значенні функції після ділення на малий крок може привести до кінцевої і навіть великої похибки в значенні похідної. Ще гірше стоїть справа при обчисленні похідних

вищих порядків. Тому бажано, щоб крок таблиці був принаймні на порядок (тобто, скажемо, у 10 разів) більше, ніж можлива похибка в значенні функції; для обчислення похідної другого порядку крок повинний бути на два порядки більше цієї похибки. Через ці труднощі при диференціюванні емпіричних функцій часто воліють користуватися не інтерполяційними, а іншими емпіричними формулами, які складають з урахуванням усіх дослідних даних і є значно більш стійкими щодо випадкових помилок експерименту.

8.14. Про найкраще наближення функцій многочленами.

У зв'язку з задачею, розглянутою нами в попередніх розділах, природно поставити таке питання: нехай на відріжку $[a, b]$ задана безперервна функція $\varphi(x)$. Чи можна цю функцію з кожним наперед заданим ступенем точності приблизно представити у вигляді многочлена $P(x)$? Інакше кажучи, чи можна підібрати такий многочлен $P(x)$, щоб різниця між $\varphi(x)$ і $P(x)$ по абсолютній величині у всіх точках відрізка $[a, b]$ була менше кожного наперед заданого додатного числа ε ? Позитивна відповідь на це питання отримується в наступній теоремі, що ми приводимо тут без доведення:

Теорема Вейерштрасса. Якщо функція $\varphi(x)$ безперервна на відріжку $[a, b]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий многочлен $P(x)$, що у всіх точках зазначеного відрізка виконується нерівність

$$|\varphi(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Приводимо наступний спосіб безпосередньої побудови таких многочленів, які приблизно рівні безперервній функції $\varphi(x)$ на заданому відріжку. Нехай, наприклад, функція $\varphi(x)$ безперервна на відріжку $[0, 1]$. Складемо вираз

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^n \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C^m_n x^m (1-x)^{n-m}.$$

Тут C^m_n — біноміальні коефіцієнти,

$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ — значення даної функції в точці $x = m/n$

Вираз $B_n(x)$ є многочленом n -го степеня. Якщо задано довільне $\varepsilon > 0$, то можна підібрати такий приведений вище многочлен (тобто так

вибрати його степінь n), щоб для всіх значень x на відрізку $[0, 1]$ виконувалася нерівність

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Якщо задано довільне $\varepsilon > 0$, то можна підібрати такий приведений вище многочлен (тобто так вибрати його степінь n), щоб для всіх значень x на відрізку $[0, 1]$ виконувалася нерівність

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Відзначимо, що розгляд відрізка $[0, 1]$, а не довільного відрізка $[a, b]$ не є істотним обмеженням спільності, тому що за допомогою заміни змінної $x = a + t(b - a)$ можна будь-який відрізок $[a, b]$ перетворити у відрізок $[0, 1]$. При цьому многочлен n -го степеня перетвориться у многочлен того ж степеня.

Мікромодуль 20.

Приклади розв'язання типових задач

Розглянемо приклади наближеного обчислення коренів з допомогою найбільш уживаних методів.

Приклад 1. Розглянемо рівняння $\operatorname{tg} ax^2 - bx^2 = 0$ (*) де a, b — задані додатні сталі. Заміна $ax^2 = s$ приводить до рівняння

$$\operatorname{tgs} = ks \quad k = \left(\frac{b}{a}\right) \quad (**)$$

Графіки лівої і правої частин показані на рис. 8.38, причому ясно, що нас цікавить лише значення $s \geq 0$. Ми бачимо, що рівняння (**), а з ним і (*), має нескінченне число розв'язок $s_0 = 0 < s_1 < s_2 < \dots$, причому на графіку добре видно залежність розв'язок від k , тобто від a і b . Зокрема, видно, що при $k > 1$ на інтервалі $0 < s < (\pi/2)$ з'являється новий розв'язок. Легко одержати асимптотичний вираз для розв'язання s_n рівняння (**), яке придатне для великих n . Нехай для визначеності $k < 1$.

Тоді з рис.8.38 одержуємо шуканий вираз $s_n = n\pi + (\pi/2) - \alpha_n$ — де $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо ми хочемо уточнити це розкладання, то треба його підставити в (**), що дасть $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо ми хочемо уточнити це розкладання, то треба його підставити в (**), що дасть

$$\operatorname{tg}[n\pi + (\pi/2) - \alpha_n] = k[n\pi + (\pi/2) - \alpha_n]$$

і після перетворень $\operatorname{cosa}_n = k[n\pi + (\pi/2) - \alpha_n] \operatorname{sina}_n$ (***)

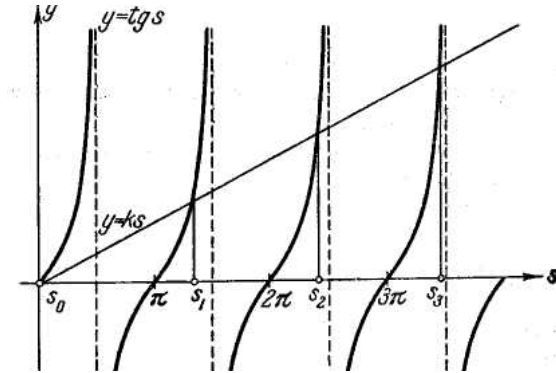


Рис. 8.38.

Звідси
$$\alpha_n \sim \operatorname{sina}_n = \frac{\operatorname{cosa}_n}{k \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha_n \right)} \sim \frac{1}{k\pi n}.$$

Якщо потрібно подальше уточнення, то можна, наприклад, у формулі (***) позначити $(1/n) = t \rightarrow 0$, $\alpha_n = \alpha(t) \rightarrow 0$, що дасть

$\operatorname{tcosa} = k \{ \pi + [(\pi/2) - \alpha] t \} \operatorname{sina}$ ($\alpha = \alpha(t)$; $\alpha(0) = 0$), після чого написати перші члени розкладання $\alpha(t)$ у ряд Маклорена, по степенях t . Обчислення, дають

$$\alpha = \frac{1}{k\pi} t - \frac{1}{2k\pi} t^2 + \frac{1}{k\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{k\pi^2} - \frac{1}{3k^2\pi^2} \right) t^3 + \dots = \frac{1}{k\pi n} - \frac{1}{2k\pi n^2} + \dots$$

Застосування формули

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots$$

дає асимптотичний вираз для додатних розв'язок рівняння (*) при великих n

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{\frac{s_n}{a}} = a^{-1/2} \sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k\pi n} + \frac{1}{2k\pi n^2} - \dots} = \\ &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{k\pi^2 n^2} + \dots\right)^{1/2} = \\ &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{4n} - \left(\frac{1}{2k\pi^2} + \frac{1}{32}\right) \frac{1}{n^2} + \dots\right]. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти найменший додатний корінь рівняння $\sin x - x \cos x = 0$.

Заміняючи це рівняння йому еквівалентним $x = \operatorname{tg} x$, графічно знаходимо (рис. 8.39), що шуканий корінь близький до $(3\pi/2) = 4,71\dots$

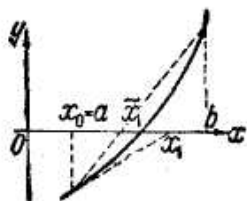


Рис. 8.39.

Більш точно значення знаходимо послідовними наближеннями:

а) По методу Ньютона і лінійної інтерполяції. Для

$$f(x) = \sin x - x \cos x$$

маємо

$$f'(x) = x \sin x^*$$

Якщо взяти $x_0 = (3\pi/2)$, то

$$f(x_0) = -1, f'(x_0) = -4,71 \text{ і } x_1 = 4,71 - (1/4,71) = 4,50.$$

Так як $f(x_1) = -0,029$ того ж знака, що і $f(x_0)$, то лінійна інтерполяція не може бути застосована. Обчислення показує, що $f(4,45) = 0,189$ і, отже, шуканий корінь лежить між 4,45 і 4,50. Застосовуючи лінійну інтерполяцію, одержимо наступне наближення:

$$\tilde{x}_1 = 4,50 - \frac{-0,09}{-0,029 - 0,189} \cdot (4,50 - 4,45) = 4,4930.$$

Обчислення по формулі Ньютона наступного за x_1 наближення дає

$$x_2 = 4,50 - \frac{-0,029}{-4,399} = 4,4934.$$

Так як наближення по методу Ньютона і методу лінійної інтерполяції лежать по різні сторони від кореня, то похибка x_2 не перевищує 0,0001.

б) По методу ітерації: рівняння $x = \operatorname{tg} x$ непридатно для ітерації, тому що $(\operatorname{tg} x)' > 1$; переходячи до оберненої функції, одержимо рівняння $x = \operatorname{arctg} x$, яке можна ітерувати.

Приймаючи $x_0 = 4,7$, знайдем послідовно:

$$x_1 = \operatorname{arctg} x_0 = 258^\circ = 4,503; \quad x_2 = \operatorname{arctg} x_1 = 257^\circ 29' = 4,4942;$$

$x_3 = \operatorname{arctg} x_2 = 257^\circ 27',3 = 4,4934$; $x_4 = \operatorname{arctg} x_3 = 257^\circ 27',2 = 4,4934$.
Очевидно, що в x_4 можна вважати всі знаки вірними.

Мікромодуль 20.

Індивідуальні тестові завдання

1. На основі експерименту отримано значення функції у від х:

$$y_1 = 4 \quad \text{при } x_1 = 0,$$

$$y_2 = 6 \quad \text{при } x_2 = 1,$$

$$y_3 = 10 \quad \text{при } x_3 = 2.$$

Представити наближено функцію многочленом другого степеня.

2. Знайти многочлен четвертого степеня, який приймає при $x = 1, 2, 3, 4, 5$, значення 2, 1, -1, 5.

3. Знайти многочлен якомога низького степеня, який приймає при $k = 2, 4, 5, 10$, значення 3, 7, 9, 19.

4. Знайти многочлен 1-го, 2-го, 3-го, 4-го степенів для функції $y = \sin \pi x$ на відрізку $[0, 1]$.

Модуль 9

Інтегральне числення

Мікромодуль 21

Невизначений інтеграл

9.1. Елементарні методи інтегрування

З перших класів середньої школи усі звикли до того, що в математиці всі дії, в основному, групуються парами - пряма і обернена: додавання і віднімання (дія, обернена додаванню), множення і ділення (дія, обернена множенню) і т.д. При цьому саме наявність обернених дій дає можливість розв'язувати найбільш змістовні задачі. Раніше нами була введена ще одна дія - диференціювання. Обернена диференціюванню дія називається *інтегруванням*.

Що таке дія диференціювання? За допомогою диференціювання шукається похідна від заданої функції. Отже, обернена дія - інтегрування повинна полягати в наступному: задана похідна, необхідно знайти функцію.

Означення 1. Функція $F(x)$ називається *первісною* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо у всіх точках цього відрізка виконується рівність

$$F'(x)=f(x). \quad (9.1)$$

Наприклад, для функції $f(x)=\cos x$ первісною буде функція $F(x)=\sin x$, тому що $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$ для всіх x ; для функції x^2 первісною буде функція $1/3x^3$, тому що $(1/3x^3)'=1/3 \cdot 3x^2=x^2$ для всіх x ; для швидкості v точки первісною буде шлях s , що пройшла ця точка, так як $s'_t=v$, і так далі.

Так як первісна має похідну, то вона безперервна. Але вірне і більш глибоке твердження: якщо функція $f(x)$ безперервна, то вона має первісну. В інтегральному численні ми будемо мати справу тільки з безперервними функціями.

Основна задача диференціального числення — це задача про знаходження похідної і безпосередньо зв'язана з нею задача про знаходження диференціала заданої функції.

Основна задача інтегрального числення — це задача про знаходження первісної для заданої функції, тобто про знаходження функції по заданій її похідній. Ця задача складніша, ніж задача диференціювання. (Узагалі «обернені» задачі, зазвичай, складніші «прямих»: наприклад, задача про витяг кореня складніша задачі про піднесення до степеня). Зокрема, ми побачимо, що первісна від будь-якої елементарної функції, хоча і завжди існує, але далеко не завжди є елементарною функцією.

Первісна в заданої функції не одна; наприклад, не тільки $(x^3)'=3x^2$, але і $(x^3+5)'=3x^2$. (І в інших прикладах розв'язок «обернених» задач часто буває неоднозначним.) Узагалі, якщо функція $f(x)$ має первісні $F_1(x)$ і $F_2(x)$, то $F_1'=f$, $F_2'=f$, тобто $F_1'-F_2'=0$, $(F_1 - F_2)'=0$, $F_1 - F_2 = \text{const}$, $F_1 = F_2 + \text{const}$. Таким чином, *будь-які дві первісні до однієї і тієї жє функції відрізняються одна від одної на сталий доданок*; щоб одержати всі первісні для даної функції, треба взяти яку-небудь одну і додати до неї довільну сталу. Наприклад, сукупність усіх первісних до функції $3x^2$ задається формулою x^3+C , де C -довільна стала, придаючи якій чисельні значення, ми одержимо індивідуальні первісні:

$$x^3, x^3+5, x^3-\sqrt{2}, x^3+(5/6), \text{ і т.п.} \quad (9.2)$$

Природно виникає питання: як знайти всі первісні для заданої функції? Частково відповідь дається наступною теоремою.

Теорема . Якщо $F(x)$ є первісна для $f(x)$, на (a, b) , то всі первісні для $f(x)$ знаходяться у формулі,

$$F(x)+C \quad (9.3)$$

Нехай $\Phi(x)$ - будь-яка первісна для $f(x)$. Тоді $\Phi'(x)=f(x)$, звідки

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

У силу теореми про ознаку сталості функції звідси випливає, що

$$\Phi(x) - F(x) = C, \text{ або } \Phi(x) = F(x) + C,$$

а так як

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$$

при довільній C , то теорема доведена.

Означення 2. Сукупність усіх первісних до заданої функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* від функції і позначається так:

$$\int f(x)dx$$

(читається: «інтеграл еф від ікс де ікс»); $f(x)$ називається *підінтегральною функцією*, добуток $f(x)dx$ — *підінтегральним виразом*, \int - знаком *інтеграла*.

Якщо $F(x)$ є первісна для $f(x)$, то в силу приведеної вище теореми

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Наприклад

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C;$$

при цьому говорять, що проінтегровано функцію $\cos x$ і функцію x^2 (або узято інтеграл від функції $\cos x$ і від функції x^2). Обчислення інтеграла від заданої функції називається інтегруванням цієї функції. Таким чином, інтегрування функції $f(x)$ — це відшукання її первісної $F(x)$, тобто такої функції $F(x)$, що $F'(x)=f(x)$. Іншими словами, інтегрування полягає в тому, щоб по похідній $F'(x)$ знайти саму функцію $F(x)$.

Таким чином, якщо

$$F'(x)=f(x), \text{ то } \int f(x)dx = F(x) + C. \quad (9.4)$$

і, навпаки.

Наприклад,

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

Іншими словами, невизначений інтеграл — це загальна первісна, яка утримує довільну сталу, при кожному числовому значенні якої виходить часткова первісна.

З формули (9.4) випливає, що

$$(\int f(x)dx)' = f(x); d(\int f(x)dx) = f(x)dx; \int (dF(x)) = F(x) + C \quad (9.5)$$

Таким чином, знаки диференціала й інтеграла знищують один одного. Результат обчислення невизначеного інтеграла завжди можна перевірити, узявши похідну від відповіді; при цьому повинна вийти підінтегральна функція. Кожній формулі диференціального числення відповідає деяка формула інтегрального числення.

З геометричної точки зору невизначений інтеграл представляє сукупність (сімейство) кривих, кожна з яких виходить шляхом зміщення однієї з кривих паралельно самої собі вгору або вниз, тобто уздовж осі Oy .

Природно виникає питання: чи для усякої функції $f(x)$ існують первісні (а виходить, і невизначений інтеграл)? Виявляється, що не для всякої. Помітимо, однак, без доведення, що якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то для цієї функції існує первісна (а виходить, і невизначений інтеграл). З'ясуванню методів, за допомогою яких знаходяться первісні (і невизначені інтеграли) від деяких класів елементарних функцій, присвячений цей мікромодуль. Знаходження первісної для даної функції $f(x)$ називається інтегруванням функції $f(x)$. Помітимо наступне: якщо похідна від елементарної функції завжди є елементарною функцією, то первісна від елементарної функції може виявитися і не має представлення за допомогою кінцевого числа елементарних функцій.

З визначення 2 випливає:

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто якщо $F'(x) = f(x)$, то і

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = f(x). \quad (9.6)$$

Останню рівність потрібно розуміти в тому змісті, що похідна від будь-якої первісної дорівнює підінтегральній функції.

2. Диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx. \quad (9.7)$$

Це виходить на підставі формули (9.6).

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює цій функції плюс довільна стала

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливість останньої рівності легко перевірити диференціюванням (диференціали від обох частин рівності рівні $d(x)$).

Найпростіші інтеграли. Найпростіші інтеграли виходять у результаті обернення формул для похідних основних елементарних функцій. Наприклад, з формули $(\sin x)' = \cos x$ одержуємо

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (9.8)$$

(див. формулу (9.4)). Формулу $(\cos x)' = -\sin x$ краще переписати у вигляді $(-\cos x)' = \sin x$, звідки одержуємо $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

Аналогічно

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

пишуть просто

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C. \quad (9.9)$$

З формули $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

випливає, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arccos} x + C. \quad (9.10)$$

На перший погляд здається, що ця формула суперечить попередній. Але це не так: на підставі формули $\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \pi/2$ з (9.9) випливає, що

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + \frac{\pi}{2} + C = -\operatorname{arccos} x + C_1$$

де $C_1 = \frac{\pi}{2} + C$.

Отже, справа в тім, що в *правих частинах* формул (9.9) і (9.10) *довільні стали різні*. Таке розходження форми відповідей буває й в інших прикладах невизначених інтегралів. Природно, що з двох формул (9.9) і (9.10) треба користуватися тільки однією, наприклад (9.9). З подальших формул диференціювання одержуємо

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C; \int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Недоліком останньої формули є те, що функція $1/x$, від якої береться первісна, існує як при $x > 0$, так і при $x < 0$, тоді як права частина існує тільки при $x > 0$. Однак легко перевірити формулу диференціювання $(\ln|x|)' = 1/x$; дійсно, при $x > 0$ буде $|x| = x$, і тому одержуємо звичайну похідну логарифма, а при $x < 0$ буде $|x| = -x$, тобто $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = (1/(-x))(-1) = 1/x$. Так як при $x > 0$, так і при $x < 0$ можна написати

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (9.11)$$

Далі одержуємо $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; в окремому випадку, $\int e^x dx = e^x + C$;

$$\int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n} + C, \text{ тобто } \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Зазвичай, остання формула при $n = -1$ не підходить, так як тоді знаменник обертається в нуль. Але в цьому випадку інтеграл

набирає вигляд $\int \frac{dx}{x}$ і обчислюється по формулі (9.11). Далі,

$$\int ch x dx = sh x + C; \int sh x dx = ch x + C; \int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = arsh x + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

Знайдену зараз формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C$$

можна довести без усяких гіперболічних функцій, за допомогою диференціювання відповіді. Більш того, так як $(\ln|u|)' = (1/u)u'$, то

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 + a}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}},$$

звідки

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

при сталому a будь-якого знаку.

Виведені формули (*табличні інтеграли*) варто виписати у вигляді таблиці і запам'ятати напам'ять, так як вони широко застосовуються при обчисленні інтегралів. Зокрема, за допомогою цих формул обчислюються (або, як говорять, *беруться*) деякі «майже табличні» інтеграли. Для цього виходять з табличної формули і намагаються змінити відповідь так, щоб похідна від нього давала підінтегральну функцію; цей метод *безпосереднього інтегрування*, власне кажучи, складається просто в застосуванні формули (9.4). Наприклад, при обчисленні інтеграла

$$\int \cos 3x dx \quad (9.12)$$

природно згадати формулу (9.8).

Однак відповідь $\int \cos 3x dx = \sin 3x + C$ неправильна, так як похідна від правої частини дорівнює $3\cos 3x$, а не $\cos 3x$, як повинно бути. Але якщо праву частину поділити на 3, то і похідна поділиться на 3. Отже, $(1/3\sin 3x)' = \cos 3x$, тобто

$$\int \cos 3x dx = 1/3 \sin 3x + C.$$

Подібним чином знайдемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - (2x+5)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin(2x+5) + C, \int \frac{dx}{x-3} = \ln|x-3| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{2}} = \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2} \arctg \frac{x}{\sqrt{2}} + C, \text{ і т.д.} \quad (9.13)$$

Узагалі, якщо знайдено інтеграл $\int f(x) dx = F(x) + C$,

то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$ ($a, b = \text{const}$).

Таблиця інтегралів

Перш ніж приступити до викладу методів інтегрування, приведемо таблицю інтегралів від найпростіших функцій.

Безпосередньо з таблиці похідних випливає таблиця інтегралів. (Справедливість написаних у ній рівностей легко перевірити диференціюванням, тобто установити, що похідна від правої частини дорівнює підінтегральній функції.)

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$). (Тут і в наступних формулах під C будемо розуміти довільну сталу).

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$.

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$.

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = -\ln |\sin x| + C$.

9. $\int e^x dx = e^x + C$.

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

11'. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$.

13'. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$.

Зауваження. У таблиці похідних немає формул, що відповідають формулам 7, 8, 11', 12, 13' і 14. Однак справедливість останніх також легко встановлюється за допомогою диференціювання.

У випадку формули 7 маємо:

$$(-\ln |\cos x|)' = -\frac{-\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x,$$

отже,

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$$

У випадку формули 8 маємо

$$(-\ln |\sin x|)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x,$$

отже,

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$$

У випадку формули 12 маємо

$$\left(\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \right)' = \frac{1}{2a} [\ln |a+x| - \ln |a-x|]' = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right]$$

отже,

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

У випадку формули 14 маємо

$$\left(\ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

Аналогічно перевіряються формули 11' і 13'. Помітимо, що ці формули виведені з формул 11 і 13.

Найпростіші властивості невизначеного інтеграла. Ці властивості випливають з аналогічних властивостей похідної.

Наприклад,

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int \varphi(x) dx, \quad (9.14)$$

тобто інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів. Для доведення треба взяти похідні від лівої і від правої частин і помітити, що в силу першої формули (9.5) і властивості «похідна суми дорівнює сумі похідних» результати диференціювання рівні. Але якщо похідні рівні, то функції можуть розрізнятися лише на сталий доданок, який у формулі (9.14) писати не потрібно, так як знаки невизначених інтегралів містять у собі довільні сталі доданки.

Аналогічно перевіряється, що

$$\int Af'(x)dx = A \int f'(x)dx \quad (A=\text{const}), \quad (9.15)$$

тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла. Застосування формул (9.14) і (9.15) часто дає можливість представити заданий інтеграл у вигляді суми табличних інтегралів, після чого зробити почленне інтегрування і написати загальну відповідь (це — так називаний метод розкладання). Приведемо кілька прикладів:

$$\begin{aligned} \int (3x^3 - 2x + 5)dx &= \int (3x^3)dx - \int (2x)dx + \int 5dx = 3 \int (x^3)dx - 2 \int xdx + 5 \int dx = \\ &= 3 \frac{x^4}{4} - 2 \frac{x^2}{2} + 5x + C = \frac{3}{4}x^4 - x^2 + 5x + C \end{aligned} \quad (9.16)$$

(зазвичай, треба писати тільки одну сталу, так як сума довільних сталих дає довільну сталу);

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2} a \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

аналогічно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0). \quad (9.17)$$

Інші приклади:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C;$$

$$\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$\ln |x-1| - \ln |x| + C = \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C;$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx &= \int \frac{(x+a) - (x-a)}{2a(x-a)(x+a)} dx = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

Приєм представлення заданого дробу у вигляді суми дробів більш простого вигляду, який був застосований при обчисленні двох останніх інтегралів, є досить загальним. Він полягає в тому, що знаменник розкладають на множники, після чого намагаються представити чисельник у вигляді комбінації множників, що стоять у знаменнику. Якщо це вдається, то після розкладання дробу на суму декількох дробів можна зробити скорочення в кожному з доданків.

Приведемо ще корисний приклад. Нехай треба обчислити $\int \sin 5x \cos 3x dx$. З тригонометрії відома формула

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \sin 5x \cos 3x dx &= \int \frac{\sin 8x + \sin 2x}{2} dx = -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

В аналогічних випадках застосовуються також формули

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

Наприклад

$$\int \sin^2 3x dx = \int \frac{1 - \cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12} \sin 6x + C.$$

Відзначимо ще один цікавий прийом, заснований на застосуванні комплексних функцій від дійсного аргументу, для яких усі формули інтегрування залишаються в силі. Ясно, що якщо таку функцію проінтегрувати, то її дійсна і уявна частини теж проінтегруються, тобто

$$\int \operatorname{Re} = \operatorname{Re} \int, \quad \int \operatorname{Im} = \operatorname{Im} \int.$$

Це дає можливість, наприклад, обчислити за допомогою формули Ейлера такий дійсний інтеграл:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bxdx &= \int \operatorname{Re}[e^{ax} e^{ibx}] dx = \operatorname{Re} \int e^{(a+ib)x} dx = \operatorname{Re} \frac{e^{(a+ib)x}}{a+ib} + C = \\ &= \operatorname{Re} \frac{e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)(a-ib)}{a^2 + b^2} + C = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

Інтегрування по частинам. На жаль, не існує формули, яка виражає інтеграл від добутку функцій через інтеграл від співмножників. З цим зв'язана та обставина, що на відміну від похідних *інтеграл від елементарної функції не завжди є елементарною функцією.* Наприклад, інтеграл $\int \sin x dx$ і

$$\int \frac{1}{x} dx - \text{табличні, тоді як інтеграл } \int \frac{\sin x}{x} dx \text{ не виражається через}$$

основні елементарні функції («не береться в елементарних функціях»). Як бути з такими, неелементарними функціями, ми скажемо пізніше. Проте, якщо проінтегрувати обидві частини формули $(uv)' = u'v + uv'$, вийде

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx,$$

тобто

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} \tag{9.18}$$

або, що те ж само

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{9.19}$$

Формула (9.18) і рівносильна їй формула (9.19) називаються *формулами інтегрування по частинам.* При застосуванні формули (9.18) підінтегральна функція розкладається на два множники

(u і v'), з яких один диференціюється, а другий інтегрується; іншими словами, ми переходимо до інтеграла, у якого замість u стоїть u' , а замість v' стоїть v . Після такого перетворення іноді може вийти табличний інтеграл або інтеграл більш простий, чим вихідний.

Приведемо кілька прикладів. При обчисленні інтеграла $\int x^2 \ln x dx$ вигідно продиференціювати $\ln x$, так як тоді вийде степенева функція, що простіша логарифмічної; правда, при цьому другий множник (x^2) доведеться інтегрувати, але він і після інтегрування залишиться степеневою функцією. Отже, позначаємо

$$u = \ln x, \quad dv = x^2 dx$$

звідки

$$v = \frac{x^3}{3}$$

і

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Відзначимо, що при обчисленні v не треба було писати довільну сталу, тобто писати $v = (x^3/3) + C$, так як у формулі (9.18) v є якоюсь однією, індивідуальною функцією.

Аналогічним чином часто намагаються продиференціювати функції $\operatorname{arctg} x$ і $\arcsin x$, так як після цього виходять більш прості функції.

При обчисленні інтеграла $\int x^2 \sin 3x dx$ варто диференціювати степінь, так як при цьому показник степеня знижується на одиницю (тому інтегрувати по частинам прийдеться два рази); у той же час при диференціюванні синуса, як і при його інтегуванні, він не спрощується і не ускладнюється:

$$\int x^2 \sin 3x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \sin 3x dx \\ du = 2x dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \int \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 2x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos 3x dx \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + C.$$

Допоміжні записи тут відділені вертикальними рисками.

Буває так, що після інтегрування по частинам і перетворень у правій частині виходить вихідний інтеграл, але з іншим коефіцієнтом. Тоді, приводячи подібні члени, можна цей інтеграл обчислити. Наприклад,

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{1-x^2}, \quad dv = dx \\ du = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad v = x \end{array} \right| = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$. = x\sqrt{1-x^2} - \int \sqrt{1-x^2} dx + \arcsin x.$$

Переносячи отриманий інтеграл у ліву частину (від чого в правій частині може залишитися сталий доданок, так як невизначений інтеграл відомий лише з точністю до такого доданка), одержимо

$$2 \int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C,$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C_1 \quad \left(C_1 = \frac{C}{2} \right).$$

Розглянемо ще ряд прикладів

Приклад 1. Потрібно обчислити $\int \arctg x dx$. Покладемо $u = \arctg x$, $dv = dx$; тоді

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = x.$$

Отже,

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Приклад 2. Потрібно обчислити

$$\int x^2 e^x dx.$$

Покладемо $u = x^2$, $dv = e^x dx$; тоді $du = 2x dx$, $v = e^x$,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

Останній інтеграл проінтегруємо по частинам, маючи на увазі,

$$\begin{array}{l} u_1 = x, \quad dv_1 = e^x dx, \\ du_1 = dx, \quad v_1 = e^x. \end{array}$$

Тоді

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Остаточо будемо мати:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Приклад 3. Потрібно обчислити

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx.$$

Покладемо

$$u = x^2 + 7x - 5, \quad dv = \cos 2x dx;$$

тоді

$$du = (2x + 7) dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2};$$

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} - \int (2x + 7) \frac{\sin 2x}{2} dx.$$

Застосовуючи метод інтегрування по частинам до останнього інтеграла, приймаючи

$$u_1 = \frac{2x + 7}{2}, \quad dv_1 = \sin 2x dx;$$

тоді

$$du_1 = dx, \quad v_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int \frac{2x + 7}{2} \sin 2x dx = \frac{2x + 7}{2} \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) - \int \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) dx =$$

$$= -\frac{(2x + 7) \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Остаточо будемо мати:

$$\int (x^2 + 7x - 5) \cos 2x dx = (x^2 + 7x - 5) \frac{\sin 2x}{2} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C =$$

$$= (2x^2 + 14x - 11) \frac{\sin x}{4} + (2x + 7) \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Приклад 4.

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$$

Зробимо тотожні перетворення. Помножимо і розділимо підінтегральну функцію на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Останній інтеграл проінтегруємо по частинам, маючи на увазі $u=x, du=dx$

$$dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

тоді

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Підставляючи останній результат в отриманий раніше вираз даного інтеграла, будемо мати:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

Переносячи інтеграл зправа ліворуч і виконавши елементарні перетворення, остаточно одержимо:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Приклад 5. Обчислити інтеграли

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx \quad \text{і} \quad I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Застосовуючи метод інтегрування по частинам до першого інтеграла, одержимо:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx,$$

$$dv = \cos bxdx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо метод інтегрування по частинам:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx,$$

$$dv = \sin bxdx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Підставляючи отриманий вираз в попередню рівність, одержимо:

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Знайдемо з останньої рівності I_1 :

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx\right) + C \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)$$

звідки

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогічно знаходимо:

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Заміна змінної. Ми зараз опишемо один з найбільш розповсюджених прийомів інтегрального числення, заснований на формулі похідної складеної функції.

Припустимо, що функція $F(x)$ є первісною до $f(x)$, а x якось залежить від змінної t , $x = \varphi(t)$. Знайдемо похідну від $F(x)$ по t :

$$[F(x)]'_t = [F(x)]'_x \cdot x'_t = f(x) \varphi'(t) = f[\varphi(t)] \varphi'(t).$$

Якщо проінтегрувати обидві частини по t , то одержимо

$$F(x) + C = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt;$$

іншими словами, у силу формул (9.4)

$$[f(x)dx]_{|x=\varphi(t)} = [f(\varphi(t))\varphi'(t)dt]. \quad (9.20)$$

Це і є основна формула заміни змінної.

Так як $\varphi'(t)dt=dx$, то праву частину формули (9.20) можна переписати у вигляді $\int f(x)dx$; однак тут у процесі інтегрування x не вважається незалежною змінною, а залежить від t . Тому формулу (9.20) можна витлумачити так:

$$\text{будь-яка формула інтегрування вигляду} \\ \int f(x)dx = F(x) + C \quad (9.21)$$

зберігає силу, якщо як у підінтегральному виразу, так і в правій частині зробити довільну заміну змінної $x=\varphi(t)$. У цьому випадку усяка формула вигляду (9.21) інваріантна.

Наприклад, з формули (9.8) після підстановки $x=u^3$ випливає

$$\int \cos u^3 d(u^3) = \sin u^3 + C$$

тобто

$$\int u^2 \cos u^3 du = \frac{1}{3} \sin u^3 + C$$

і т.п. Однак при практичному застосуванні формули (9.20), зазвичай, не відправляються від табличної формули, а, навпаки, намагаються зробити таку підстановку, щоб із заданого інтеграла вийшов табличний.

Розглянемо кілька прикладів. В інтегралі

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx,$$

щоб позбутися радикала, робимо заміну змінної

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{t}{1+t^2} \cdot 2tdt = 2 \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt =$$

$$= 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2} \right) = 2(t - \arctgt + C) = 2(\sqrt{x} - \arctgt\sqrt{x}) + C.$$

Таким чином, після заміни змінної й інтегрування треба виконати зворотну заміну, тобто перейти від t до x . Формулу (9.20) часто читають «зправа наліво», тобто роблять заміну не вигляду $x=\varphi(t)$, а вигляду $\psi(x)=u$. Наприклад, щоб обчислити інтеграл

$$\int xe^{x^2} dx,$$

зауважують, що підінтегральний вираз просто виражається через x^2 , так як

$$xdx = \frac{1}{2} d(x^2);$$

тому

$$\int xe^{x^2} dx = \left| \begin{matrix} x^2 = u \\ 2xdx = du \end{matrix} \right| = \int e^u \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Застосовуються також заміни вигляду $\psi(x)=\varphi(t)$.

Інтеграл (9.12) можна було б обчислити шляхом заміни змінної

$$\int \cos 3xdx = \left| \begin{matrix} 3x = t \\ 3dx = dt \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

Обчислення можна проводити, не виписуючи заміну явно:

$$\int \cos 3xdx = \int \cos 3x \frac{d(3x)}{3} = \frac{1}{3} \int \cos 3xd(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C;$$

тут ми безпосередньо використовували інваріантність формули (9.8).

Подібним чином,

$$\int \frac{tgx dx}{\cos x} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C;$$

узагалі

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln |f(x)| + C. \quad (9.22)$$

Далі,

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{x^2+1} + C.$$

узагалі

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = [f(x)]^{-1/2} df(x) = \frac{[f(x)]^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{f(x)} + C. \quad (9.23)$$

За допомогою формул (9.22) і (9.23) і доповнення до повного квадрата обчислюються, зокрема, інтеграли, які часто зустрічаються

$$\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r} dx,$$

i

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}} dx.$$

Покажемо, наприклад, обчислення інтеграла

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx;$$

для цього помітимо, що похідна підкореневого виразу дорівнює $-6x+2 = -6(x-1/3)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx &= \int \frac{2\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\right]-3}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx = \int \frac{2\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx + \\ &+ \int \frac{-\frac{7}{3}}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{-6\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{-3x^2+2x+1}} dx - \frac{7}{3\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right]}} = \\ &= -\frac{2}{3} \sqrt{-3x^2+2x+1} - \frac{7}{3\sqrt{3}} \int \frac{d\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}} = -\frac{2}{3} \sqrt{-3x^2+2x+1} - \\ &-\frac{7}{3\sqrt{3}} \arcsin \frac{x-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + C = -\frac{2}{3} \sqrt{-3x^2+2x+1} - \frac{7}{3\sqrt{3}} \arcsin \frac{3x-1}{2} + C. \quad (9.24) \end{aligned}$$

Обчислення інтегралів — більш складна справа, ніж обчислення похідних; щоб опанувати елементарними методами інтегрування, потрібно виконати велике число вправ.

9.2. Систематичне інтегрування

У цьому розділі буде зазначено кілька класів функцій, інтеграли від яких можна обчислювати стандартними методами. Варто мати на увазі, що ці стандартні методи не завжди є найпростішими; у багатьох випадках ті або інші попередні перетворення або безпосереднє застосування методів, розглянутих у попередньому розділі, істотно спрощують обчислення. Свідомий

вибір найпростішого шляху обчислення інтегралів можна здійснити тільки після необхідної практики в інтегруванні.

Інтеграли від деяких функцій, що містять квадратний тричлен
I. Розглянемо інтеграл

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Перетворимо попередньо тричлен, що стоїть в знаменнику, представивши його у вигляді суми або різниці квадратів

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] = \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right], \end{aligned}$$

де позначено

$$\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2.$$

Знак плюс або мінус береться в залежності від того, чи буде вираз, що стоїть ліворуч, додатним або від'ємним, тобто чи будуть корені тричлена ax^2+bx+c комплексними або дійсними.

Таким чином, інтеграл I_1 приймає вигляд

$$I_1 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

Зробимо в останньому інтегралі заміну змінної

$$x+\frac{b}{2a} = t, \quad dx=dt.$$

Тоді одержимо:

$$I_1 = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^2\pm k^2}.$$

Це — табличні інтеграли (див. формули 11' і 12).

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Розв'язання.

$$I = \int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 10} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 10 - 4} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+2)^2 + 6}$$

Робимо заміну змінної $x+2=t$, $dx=dt$. Підставляючи в інтеграл, одержуємо табличний інтеграл

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 6} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{6}} + C.$$

Підставляючи замість t його вираз через x , остаточно знаходимо:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C.$$

II. Розглянемо інтеграл більш загального вигляду

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Зробимо тотожне перетворення підінтегральної функції

$$I_2 = \int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Останній інтеграл представимо у вигляді суми двох інтегралів. Виносячи сталі множники за знак інтегралів, одержимо:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Другий інтеграл є інтеграл I_1 , обчислювати який ми вміємо. У першому інтегралі зробимо заміну змінної

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt.$$

Отже,

$$\int \frac{(2ax + b)dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |ax^2 + bx + c| + C$$

Таким чином, остаточно одержуємо:

$$I_2 = \frac{A}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) I_1.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx$$

Застосуємо зазначений прийом:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - 2x - 5} dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2) + \left(3 + \frac{1}{2}\right)}{x^2 - 2x - 5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2 - 2x - 5} + 4 \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 5} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 6} = \frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x - 5| + 2 \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} - (x-1)}{\sqrt{6} + (x-1)} \right| + C.$$

III. Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

За допомогою перетворень, розглянутих у п. I, цей інтеграл зводиться, у залежності від знака a , до табличних інтегралів вигляду

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}} \text{ при } a > 0 \text{ або } \int \frac{dt}{\sqrt{k^2 - t^2}} \text{ при } a < 0,$$

які вже розглянуті в таблиці інтегралів (див. формули 13' і 14).

IV. Інтеграл вигляду

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

обчислюється за допомогою наступних перетворень, аналогічних тим, що були розглянуті в п. II:

$$\int \frac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax + b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{A}{2a} \int \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Застосувавши до першого з отриманих інтегралів підстановку

$$ax^2 + bx + c = t, \quad (2ax + b)dx = dt,$$

одержимо:

$$\int \frac{(2ax + b)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{ax^2 + bx + c} + C.$$

Другий же інтеграл був розглянутий нами в п. III цього розділу.

Приклад 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx &= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx = \frac{5}{2} \int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}} dx - \\ &- 7 \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} = 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}| + C = \\ &= 5\sqrt{x^2+4x+10} - 7 \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}| + C. \end{aligned}$$

Раціональні дроби. Найпростіші раціональні дроби і їхнє інтегрування

Як ми побачимо нижче, далеко не всяка елементарна функція має інтеграл, що виражається в елементарних функціях. Тому дуже важливо виділити такі класи функцій, інтеграли яких виражаються через елементарні функції. Найпростішим з цих класів є клас раціональних функцій.

Усяку раціональну функцію можна представити у вигляді раціонального дроби, тобто у вигляді відношення двох многочленів:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + \dots + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n}.$$

Не обмежуючи спільність міркування, будемо припускати, що ці многочлени не мають загальних коренів.

Якщо степінь чисельника нижче степеня знаменника, то дріб називається *правильним*, у протилежному випадку дріб називається *неправильним*.

Якщо дріб неправильний, то, розділивши чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів), можна представити даний дріб у вигляді суми многочлена і деякого правильного дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)};$$

тут $M(x)$ — многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ — правильний дріб.

Приклад 1. Нехай дано неправильний раціональний дріб

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}.$$

Розділивши чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів), одержимо:

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 - \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1}.$$

Так як інтегрування многочленів не представляє утруднень, то основні труднощі при інтегруванні раціональних дробів полягають в інтегруванні *правильних* раціональних дробів.

Означення. Правильні раціональні дроби вигляду:

I. $\frac{A}{x-a},$

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k — ціле додатне число ≥ 2),

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корені знаменника комплексні, тобто $(p^2/4) - q < 0$),

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ (k — ціле додатне число ≥ 2 ; корені знаменника

комплексні),

називаються *найпростішими дробами I, II, III і IV типу*.

Далі буде доведено, що всякий раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших дробів. Тому ми розглянемо спочатку інтеграл від найпростіших дробів.

Інтегрування найпростіших дробів типу I, II і III не складає великих труднощів, тому ми проведемо їхнє інтегрування без яких-небудь додаткових пояснень:

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C,$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \int (x-a)^{-k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$

$$\begin{aligned} \text{III.} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \end{aligned}$$

Більш складних обчислень вимагає інтегрування найпростіших дробів IV типу. Нехай нам дано інтеграл такого типу:

$$\text{IV.} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx.$$

Зробимо перетворення:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \\ &+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} \end{aligned}$$

Перший інтеграл береться підстановкою

$$x^2+px+q=t, \quad (2x+p)dx=dt;$$

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k} dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C = \frac{1}{(1-k)(x^2+px+q)^{k-1}} + C$$

Другий інтеграл — позначимо його через I_k — запишемо у вигляді

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$$

покладаючи $x+(p/2)=t$, $dx=dt$, $q-(p^2/4)=m^2$ (по припущенню корені знаменника комплексні, а отже, $q - \frac{p^2}{4} > 0$).

Далі вчиняєм в такий спосіб:

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2+m^2)-t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt. \quad (9.25)$$

Перетворимо останній інтеграл:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2+m^2)}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Інтегруючи по частинам, будемо мати:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+m^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)} \left[t \frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right].$$

Підставляючи цей вираз в рівність (9.25), одержимо:

$$\begin{aligned} I_k &= \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{m^2} \frac{1}{2(k-1)} \left[\frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} - \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \right] = \\ &= \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}} \end{aligned}$$

У правій частині утримується інтеграл того ж типу, що I_k , але показник степеня знаменника підінтегральній функції на одиницю нижче ($k-1$); таким чином, ми виразили I_k через I_{k-1} .

Продовжуючи йти тим же шляхом, дійдемо до відомого інтеграла:

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Підставляючи потім усюди замість t і m їх значення, одержимо вираз інтеграла IV через x і задані числа A, B, p, q .

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + (-1-1)}{(x^2+2x+3)^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} - 2 \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} \end{aligned}$$

До останнього інтеграла застосуємо підстановку $x+1=t$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} &= \int \frac{dx}{[(x+1)^2+2]^2} = \int \frac{dx}{(t^2+2)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+2)-t^2}{(t^2+2)^2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt \end{aligned}$$

Розглянемо останній інтеграл:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t d(t^2+2)}{(t^2+2)^2} = -\frac{1}{2} \int t d\left(\frac{1}{t^2+2}\right) = -\int \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2+2} =$$

$$= -\frac{t}{2(t^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}}$$

(довільної сталої поки не пишемо; ми врахуємо її тільки в остаточному результаті).

Отже,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left[-\frac{x+1}{2(x^2+2x+3)} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right]$$

Остаточно будемо мати:

$$\int \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} dx = -\frac{x+2}{2(x^2+2x+3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Розкладання раціонального дробу на найпростіші

Покажемо, далі, що всякий правильний раціональний дріб можна розкласти на суму найпростіших дробів. Нехай нам дано правильний раціональний дріб

$$F(x)/f(x)$$

Будемо припускати, що коефіцієнти многочленів, які входять до нього - дійсні числа і що даний дріб нескоротний (останнє означає, що чисельник і знаменник не мають загальних коренів).

Т е о р е м а 1. *Нехай $x=a$ є корінь знаменника кратності k , тобто $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$, де $f_1(a) \neq 0$; тоді даний правильний дріб $F(x)/f(x)$ можна представити у вигляді суми двох інших правильних дробів у такий спосіб:*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \quad (9.26)$$

де A — стала, яка не дорвнює нулеві, а $F_1(x)$ -многочлен, степінь якого нижче степеня знаменника $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Доведення. Напишемо тотожність

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F(x) - Af_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)} \quad (9.27)$$

(справедлива при будь-якому A) і визначимо сталу A так, щоб многочлен $F(x)-af_1(x)$ ділився на $x-a$. Для цього по теоремі Безу необхідно і досить, щоб виконувалася рівність:

$$F(a) - Af_1(a) = 0.$$

Так як $f_1(a) \neq 0, F(a) \neq 0$, то A однозначно визначиться рівністю

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

При такому A будемо мати:

$$F(x) - Af_1(x) = (x-a)F_1(x)$$

де $F_1(x)$ є многочлен, степінь якого нижче степеня многочлена $(x-a)^{k-1} f_1(x)$. Скорочуючи дріб у формулі (9.27) на $(x-a)$, одержуємо рівність (9.26).

Наслідок. До правильного раціонального дробу

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)},$$

який входить в рівність (9.26), можна застосовувати аналогічні міркування. Таким чином, якщо знаменник має корінь $x=a$ кратності k , то можна написати:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{F_k(x)}{f_1(x)},$$

де $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ - правильний нескоротний дріб. До нього також можна

застосувати тільки що доведену теорему, якщо $f_1(x)$ має інші дійсні корені.

Розглянемо далі випадок комплексних коренів знаменника. Нагадаємо, що комплексні корені многочлена з дійсними коефіцієнтами завжди попарно спряжені.

У розкладанні многочлена на дійсні множники кожній парі комплексних коренів многочлена відповідає вираз вигляду x^2+px+q .

Якщо ж комплексні корені мають кратність μ , то їм відповідає вираз

$$(x^2+px+q)^\mu.$$

Теорема 2. *Якщо $f(x)=(x^2+px+q)^\mu \varphi_1(x)$, де многочлен $\varphi_1(x)$ не ділиться на x^2+px+q , то правильний раціональний дріб $-F(x)/f(x)$ можна представити у вигляді суми двох інших правильних дробів у такий спосіб:*

$$\frac{F_k(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{(x^2+px+q)^{\mu-1} \varphi_1(x)} \quad (9.28)$$

де $\Phi_1(x)$ — многочлен, степінь якого нижче степеня многочлена

$$(x^2 + px + q)^{\mu-1} \varphi_1(x)$$

Доведення. Напишемо тотожність

$$\frac{F_k(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)}{(x^2 + px + q)^\mu \varphi_1(x)} \quad (9.29)$$

яка справедлива при будь-яких M і N , і визначимо M і N так, щоб многочлен $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$ ділився на $x^2 + px + q$. Для цього необхідно і досить, щоб рівняння $F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = 0$ мало ті ж корені $\alpha \pm i\beta$, що і многочлен $x^2 + px + q$.

Отже,

$$F(\alpha + i\beta) - [M(\alpha + i\beta) + N]\varphi_1(\alpha + i\beta) = 0$$

або

$$M(\alpha + i\beta) + N = \frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$$

Але

$$\frac{F(\alpha + i\beta)}{\varphi_1(\alpha + i\beta)}$$

є визначене комплексне число, яке можна записати у вигляді $K + iL$, де K і L — деякі дійсні числа. Таким чином,

$$M(\alpha + i\beta) + N = K + iL;$$

звідси

$$M\alpha + N = K, \quad M\beta = L.$$

Або

$$M = \frac{L}{\beta}, \quad N = \frac{K\beta - L\alpha}{\beta}.$$

При цих значеннях коефіцієнтів M і N многочлен

$$F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x)$$

має коренем число $\alpha + i\beta$, а отже, і спряжене число $\alpha - i\beta$. Але в такому випадку многочлен без залишку розділиться на різності $x - (\alpha + i\beta)$ і $x - (\alpha - i\beta)$, а отже, і на їхній добуток, тобто на $x^2 + px + q$. Позначаючи частку від цього ділення через $\Phi_1(x)$,

$$\text{одержимо: } F(x) - (Mx + N)\varphi_1(x) = (x^2 + px + q) \Phi_1(x).$$

Скорочуючи останній дріб у рівності (9.29) на $x^2 + px + q$, одержимо рівність (9.28), причому ясно, що степінь $\Phi_1(x)$ менше степеня знаменника, що і потрібно було довести.

Застосовуючи тепер до правильного дробу $F(x)/f(x)$ результати теорем 1 і 2, ми можемо виділити послідовно всі найпростіші дроби, що відповідають усім кореням знаменника $f(x)$. Таким чином, з попереднього впливає наступний результат.

Якщо

$$f(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu,$$

то дріб $F(x)/f(x)$ - може бути представлений у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{F(x)}{f(x)} = & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \\ & \dots + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \\ & + \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^\mu} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x + N_{\mu-1}}{x^2 + px + q} + \\ & \dots + \frac{Px + Q}{(x^2 + lx + s)^\nu} + \frac{P_1x + Q_1}{(x^2 + lx + s)^{\nu-1}} + \dots + \frac{P_{\nu-1}x + Q_{\nu-1}}{x^2 + lx + s} \end{aligned} \right\} (9.30)$$

Коефіцієнти $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$ можна визначити з наступних понять. Написана рівність є тотожність, тому, привівши дроби до загального знаменника, одержимо тотожні многочлени в чисельниках праворуч і ліворуч. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A, A_1, \dots, B, B_1, \dots$. Цей метод знаходження коефіцієнтів називається *методом невизначених коефіцієнтів*.

Поряд з цим для визначення коефіцієнтів можна скористатися наступним зауваженням: так як многочлени, що вийшли в правій і лівій частинах рівності, після приведення до загального знаменника повинні бути тотожно рівні, то їхні значення рівні при будь-яких часткових значеннях x . Придаваючи x часткові значення, одержимо рівняння для визначення коефіцієнтів.

Таким чином, ми бачимо, що всякий правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми найпростіших раціональних дробів.

Приклад. Нехай потрібно розкласти дріб

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)}$$

на найпростіші дробу. На підставі формули (9.30) маємо:

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{(x-2)}$$

Приводячи до загального знаменника і прирівнюючи чисельники, одержимо:

$$x^2 + 2 = A(x-2) + A_1(x+1)(x-2) + A_2(x+1)^2(x-2) + B(x+1)^3 \quad (9.31)$$

або

$$x^2 + 2 = (A_2+B)x^3 + (A_1+3B)x^2 + (A-A_1-3A_2+3B)x + (-2A-2A_1-2A_2+B)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при x^3 , x^2 , x^1 , x^0 (вільний член), одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів:

$$0 = A_2 + B,$$

$$1 = A_1 + 3B,$$

$$0 = A - A_1 - 3A_2 + 3B,$$

$$2 = -2A - 2A_1 - 2A_2 + B.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$A = -1, \quad A_1 = 1/3, \quad A_2 = 2/9, \quad B = 2/9.$$

Можна було б також визначити деякі коефіцієнти з рівнянь, що виходять при деяких часткових значеннях x з рівності (9.31), що є тотожністю відносно x . Так,

$$\text{покладаючи } x = -1, \text{ одержимо } 3 = -3A \text{ або } A = -1;$$

$$\text{покладаючи } x = 2, \text{ одержимо } 6 = 27B; \quad B = 2/9.$$

Якщо до цих двох рівнянь приєднаємо два рівняння, що виходять прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях x , то одержимо чотири рівняння для визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів. У результаті одержуємо розкладання:

$$\frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{3(x+1)^2} - \frac{2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)}$$

Інтегрування раціональних дробів

Нехай потрібно обчислити інтеграл від раціонального дробу $\frac{Q(x)}{f(x)}$,

тобто інтеграл

$$\int \frac{Q(x)}{f(x)} dx.$$

Якщо даний дріб неправильний, то ми представляємо його у вигляді суми многочлена $M(x)$ і правильного раціонального дробу $F(x)/f(x)$. Останній же представляємо по формулі (9.30) у вигляді суми найпростіших дробів. Таким чином, інтегрування всякого раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена і декількох найпростіших дробів.

З результатів попереднього розділу випливає, що вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $f(x)$. Тут можливі наступні випадки.

I випадок. Корені знаменника дійсні і різні, тобто

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-d).$$

У цьому випадку дріб $F(x)/f(x)$ розкладається на найпростіші дробу I типу:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{D}{x-d};$$

і тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{Q(x)}{f(x)} dx &= \int \frac{A}{x-a} dx + \int \frac{B}{x-b} dx + \dots + \int \frac{D}{x-d} dx = \\ &= A \ln|x-a| + B \ln|x-b| + \dots + D \ln|x-d| + C \end{aligned}$$

II випадок. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні:

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \dots (x-d)^\delta.$$

У цьому випадку дріб $F(x)/f(x)$ розкладається на найпростіші дробу I і II типів.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)} dx &= -\int \frac{dx}{(x+1)^3} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{2}{9} \int \frac{dx}{(x+1)} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{(x-2)} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{2}{9} \ln|x+1| + \frac{2}{9} \ln|x-2| + C = \\ &= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

III випадок. Серед коренів знаменника є комплексні неповторювані (тобто різні):

$$f(x) = (x^2 + px + q) \dots (x^2 + lx + s) \dots (x-a)^\alpha \dots (x-d)^\delta$$

У цьому випадку дріб $F(x)/f(x)$ розкладається на найпростіші дробу I, II і III типів.

Приклад 2. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)}$$

Розкладемо підінтегральний дріб на найпростіші

$$\frac{x}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

Отже,

$$x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1)$$

Покладаючи $x=1$, одержимо: $1=2C$, $C=1/2$;

покладаючи $x=0$, одержимо: $0=-B+C$, $B=1/2$.

Прирівнюючи коефіцієнти при x^2 , одержимо $0=A+C$, звідки $A=-1/2$.

Таким чином,

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{(x^2 + 1)(x - 1)} &= -\frac{1}{2} \int \frac{x-1}{x^2 + 1} \, dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{2} \int \frac{x \, dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln |x^2 + 1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln |x-1| + C. \end{aligned}$$

IV випадок. Серед коренів знаменника є комплексні кратні

$$f(x) = (x^2 + px + q)^\mu \dots (x^2 + lx + s)^\nu (x-a)^\alpha \dots (x-d)^\delta$$

У цьому випадку розкладання дробу $F(x)/f(x)$ буде містити і найпростіші дробу IV типу.

Приклад 3. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \, dx.$$

Розв'язання. Розкладаємо дріб на найпростіші:

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 2x + 3)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 3} + \frac{E}{x + 1},$$

звідки

$$x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 12x + 8 = (Ax + B)(x + 1) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 3)(x + 1) + E(x^2 + 2x + 3)^2$$

Комбінуючи зазначені вище методи визначення коефіцієнтів, знаходимо:

$$A=1, B=-1, C=0, D=0, E=1.$$

Таким чином, одержуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x + 1)} \, dx &= \int \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2} \, dx + \int \frac{dx}{x+1} = \\ &= -\frac{x+2}{2(x^2 + 2x + 3)} - \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln |x+1| + C. \end{aligned}$$

Перший інтеграл, що стоїть праворуч, був розглянутий раніше. Другий інтеграл береться безпосередньо.

З усього викладеного випливає, що інтеграл від будь-якої раціональної функції може бути виражений через елементарні функції в кінцевому вигляді, а саме:

- 1) через логарифми — у випадку найпростіших дробів I типу;
- 2) через раціональні функції — у випадку найпростіших дробів II типу;
- 3) через логарифми й арктангенси — у випадку найпростіших дробів III типу;
- 4) через раціональні функції й арктангенси — у випадку найпростіших дробів IV типу.

Інтеграли від ірраціональних функцій

Не від всякої ірраціональної функції інтеграл виражається через елементарні функції. У цьому і наступному розділах ми розглянемо ті ірраціональні функції, інтегралі від яких за допомогою підстановок приводяться до інтегралів від раціональних функцій і, отже, до кінця інтегруються.

1. Розглянемо інтеграл $\int R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}) \, dx$, де R — раціональна функція своїх аргументів. (Запис $R(x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s})$ указує, що над величинами $x, x^{m/n}, \dots, x^{r/s}$ виконуються тільки раціональні операції. Точно також варто розуміти надалі записи вигляду

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \dots\right), \quad R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right), \quad R(\sin x, \cos x)$$

і т.д. Так, наприклад, запис $R(\sin x, \cos x)$ указує, що над $\sin x$ і $\cos x$ виконуються раціональні операції.)

Нехай k - загальний знаменник дробів $m/n, \dots, r/s$. Зробимо підстановку: $x=t^k, dx=kt^{k-1}dt$.

Тоді кожен дробовий степінь x виразиться через цілий степінь t і, отже, підінтегральна функція перетвориться в раціональну функцію від t .

Приклад 1. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + x}$$

Розв'язання. Загальний знаменник дробів $1/2, 3/4$ є 4 ; тому робимо підстановку $x=t^4, dx=4t^3 dt$; тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4} + 1} &= 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} t^3 dt = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} dt = 4 \int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 1} \right) dt = \\ &= 4 \int t^2 dt - 4 \int \frac{t^2}{t^3 + 1} dt = 4 \frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \ln |t^3 + 1| + C = \\ &= \frac{4}{3} \left[x^{3/4} - \ln |x^{3/4} + 1| \right] + C. \end{aligned}$$

II. Розглянемо тепер інтеграл вигляду

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{m/n}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r/s} \right) dx.$$

Цей інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k.$$

де k — загальний знаменник дробів $m/n, \dots, r/s$.

Приклад 2. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$$

Розв'язання. Робимо підстановку

$$x+4=t^2, x=t^2-4, dx=2t dt$$

тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx &= 2 \int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2 \int \left(1 + \frac{4}{t^2-4} \right) dt = 2 \int dt + 8 \int \frac{dt}{t^2-4} = \\ &= 2t + 2 \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Розглянемо інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \tag{9.32}$$

де $a \neq 0$.

Такий інтеграл приводиться до інтеграла від раціональної функції нової змінної за допомогою наступних підстановок Ейлера.

1. *Перша підстановка Ейлера.* Якщо $a > 0$, то покладемо:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} + t.$$

Перед коренем \sqrt{a} візьмемо для визначеності знак плюс. Тоді

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{a} xt + t^2,$$

звідки x визначається як раціональна функція від t

$$x = \frac{t^2 - c}{b - 2\sqrt{a} t}$$

(виходить, dx теж буде виражатися раціонально через t), отже,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t = \sqrt{a} \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} + t,$$

тобто

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

є раціональною функцією від t .

Так як

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}, x \text{ і } dx$$

виражаються раціонально через t , то, отже, даний інтеграл (9.32) перетвориться в інтеграл від раціональної функції від t .

Приклад 1. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$$

Розв'язання. Так як тут $a=1 > 0$, то покладаємо

$$\sqrt{x^2 + c} = -c + t;$$

тоді

$$x^2 + c = x^2 - 2xt + t^2,$$

звідки

$$x = \frac{t^2 - c}{2t}.$$

Отже,

$$dx = \frac{t^2 + c}{2t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2 + c} = -c + t = -\frac{t^2 - c}{2t} + t = \frac{t^2 + c}{2t}.$$

Повертаючись до вихідного інтеграла, одержуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}} = \int \frac{\frac{t^2 + c}{2t^2} dt}{\frac{t^2 + c}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C_1 = \ln |x + \sqrt{x^2 + c}| + C_1$$

(див. формулу 14 таблиці інтегралів),

2. Друга підстановка Ейлера. Якщо $c > 0$, то покладаємо:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

тоді (перед \sqrt{c} для визначеності беремо знак плюс)

$$ax^2 + bx + c = x^2 t^2 + 2xt\sqrt{c} + c.$$

Звідси x визначається як раціональна функція від t :

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

Так як

$$dx \text{ і } \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

теж виражаються раціонально через t , то, підставляючи значення x ,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \text{ і } dx$$

в інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

ми зведемо його до інтеграла від раціональної функції від t .

Приклад 2. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx$$

Розв'язання. Покладаємо

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1$$

тоді

$$1 + x + x^2 = x^2 t^2 + 2xt + 1, \quad x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2} dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}; \quad 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + t}{1 - t^2}.$$

Підставляючи отримані значення у вихідний інтеграл, знаходимо:

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2 \sqrt{1 + x + x^2}} dx &= \int \frac{(-2t^2 + t)^2 (1 - t^2)^2 (1 - t^2) (2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2 (2t - 1)^2 (t^2 - t + 1) (1 - t^2)^2} dt = \\ &= 2 \int \frac{t^2}{1 - t^2} dt = -2t + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln \left| \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}-1}{x - \sqrt{1+x+x^2}+1} \right| + C = \\ &= -\frac{2(\sqrt{1+x+x^2}-1)}{x} + \ln |2x + 2\sqrt{1+x+x^2} + 1| + C. \end{aligned}$$

3. Третя підстановка Ейлера. Нехай α і β — дійсні корені тричлена

$$ax^2 + bx + c.$$

Покладаємо:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t,$$

Так як

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a(x - \alpha)(x - \beta),$$

то

$$\sqrt{a(x - \alpha)(x - \beta)} = (x - \alpha)t,$$

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2,$$

$$a(x - \beta) = (x - \alpha)t^2.$$

Звідси знаходимо x як раціональну функцію від t :

$$x = \frac{a\beta - at^2}{a - t^2}$$

Так як

$$dx \text{ і } \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

теж раціонально залежить від t , то даний інтеграл перетвориться в інтеграл від раціональної функції від t .

Зауваження 1. Третя підстановка Ейлера може бути застосована не тільки при $a < 0$, але і при $a > 0$ - лише б многочлен $ax^2 + bx + c$ мав два дійсних корені.

Приклад 3. Потрібно обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$$

Розв'язання. Так як

$$x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1),$$

то підставляємо:

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = (x + 4)t;$$

тоді

$$(x + 4)(x - 1) = (x + 4)^2 t^2, \quad x - 1 = (x + 4)t^2,$$

$$x = \frac{1 + 4t^2}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{10t}{(1 - t^2)^2} dt,$$

$$\sqrt{(x + 4)(x - 1)} = \left[\frac{1 + 4t^2}{1 - t^2} + 4 \right] t = \frac{5t}{1 - t^2}.$$

Повертаючись до вихідного інтеграла, одержуємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \int \frac{10t(1 - t^2)}{(1 - t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left| \frac{1 + t}{1 - t} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}}{1 - \sqrt{\frac{x - 1}{x + 4}}} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 1}} \right| + C.$$

Зауваження 2. Помітимо, що для приведення інтеграла (9.32) до інтеграла від раціональної функції досить першої і третьої підстановок Ейлера. Розглянемо тричлен $ax^2 + bx + c$. Якщо $b^2 - 4ac > 0$, то корені тричлена дійсні і, отже, може бути застосована третя підстановка Ейлера. Якщо $b^2 - 4ac \leq 0$, то в цьому випадку

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

і, отже, тричлен має знак, що збігається зі знаком a .

Щоб

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

був дійсним, потрібно, щоб тричлен був додатним, а отже, повинне бути $a > 0$. У цьому випадку може бути застосована перша підстановка.

Інтегрування деяких класів тригонометричних функцій

Дотепер ми систематично вивчали інтегралі тільки від алгебраїчних функцій (раціональних і ірраціональних). У цьому підрозділі ми розглянемо інтегралі від деяких класів неалгебраїчних, у першу чергу тригонометричних функцій. Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x) dx. \quad (9.33)$$

Покажемо, що цей інтеграл за допомогою підстановки

$$tg \frac{x}{2} = t \quad (9.34)$$

завжди зводиться до інтеграла від раціональної функції. Виразимо $\sin x$ і $\cos x$ через $tg \frac{x}{2}$, а отже, і через t :

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Далі

$$x = 2\arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким чином, $\sin x$, $\cos x$ і dx виразилися раціонально через t . Так як раціональна функція від раціональних функцій є функція раціональна, то, підставляючи отримані вирази в інтеграл (9.33), одержимо інтеграл від раціональної функції:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Приклад 1. Розглянемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

На підставі написаних вище формул маємо:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$$

Розглянута підстановка дає можливість проінтегрувати усяку функцію вигляду $R(\cos x, \sin x)$. Тому її іноді називають «універсальною тригонометричною підстановкою». Однак на практиці вона часто приводить до занадто складних раціональних функцій. Тому поряд з «універсальною» підстановкою буває корисно знати також інші підстановки, які у деяких випадках швидше приводять до мети.

1) Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\sin x)\cos x dx$, то підстановка $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ приводить цей інтеграл до вигляду $\int R(t)dt$.

2) Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\cos x)\sin x dx$, то він приводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$.

3) Якщо підінтегральна функція залежить тільки від tgx , то заміна $tgx = t$, $x = \arctgt$, $dx = dt/(1+t^2)$ приводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}$$

4) Якщо підінтегральна функція має вигляд $R(\sin x, \cos x)$, але $\sin x$ і $\cos x$ входять тільки в парних степенях, то застосовується та ж підстановка:

$$tgx = t, \tag{9.35}$$

так як $\sin^2 x$ і $\cos^2 x$ виражаються раціонально через tgx :

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Після підстановки ми одержимо інтеграл від раціональної функції.

Приклад 2. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx$$

Розв'язання. Цей інтеграл легко привести до вигляду

$$\int R(\cos x)\sin x dx.$$

Дійсно,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x} \sin x dx$$

Зробимо заміну $\cos x = z$. Тоді

$$\sin x dx = -dz:$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx &= \int \frac{1-z^2}{2+z} (-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2} dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2}\right) dz = \\ &= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln(z+2) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$$

Зробимо заміну $tgx=t$:

$$\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2 - \frac{t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{tgx}{\sqrt{2}} \right) + C$$

5) Розглянемо тепер ще один інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ — саме інтеграл, під знаком якого стоїть добуток $\sin^m x \cos^n x dx$ (де m і n — цілі числа). Тут розглянемо три випадки.

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n такі, що принаймні одне з них непарне число. Припустимо для визначеності, що n непарне. Покладемо $n = 2p+1$ і перетворимо інтеграл:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^p \cos x dx$$

Зробимо заміну змінної:

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

Підставляючи нову змінну в даний інтеграл, одержимо:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m (1-t^2)^p dt.$$

а це є інтеграл від раціональної функції від t .

Приклад 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Позначаючи

$$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$$

одержимо:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{(1-t^2) dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n — числа неневід'ємні і парні.

Покладемо $m=2p$, $n=2q$. Напишемо формули, відомі з тригонометрії:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \quad (9.36)$$

Підставляючи в інтеграл, одержимо:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Зводячи в степінь і розкриваючи дужки, одержимо члени, що містять $\cos 2x$ у непарних і парних степіннях. Члени з непарними степіннями інтегруються, як зазначено у випадку а). Парні показники степенів знову знижуємо по формулах (9.36). Продовжуючи так, дійдемо до членів вигляду $\int \cos kx dx$, які легко інтегруються.

Приклад 5.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right] + C.$$

в) Якщо обое показники парні, причому хоча б один з них від'ємний, то попередній прийом не приводить до мети. Тут варто зробити заміну $tg x = t$ (або $ctg x = t$).

Приклад 6.

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^6 x} dx = \int tg^2 x (1 + tg^2 x)^2 dx.$$

Покладемо $tg x = t$, тоді

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

і ми одержуємо:

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 (1+t^2) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C$$

б) Розглянемо на закінчення інтеграли вигляду

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx.$$

Вони беруться за допомогою наступних формул ($m \neq n$):

(Ці формули легко довести в такий спосіб:

$$\cos(m+n)x = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.$$

Складаючи ці рівності почленно і розділивши навпіл, одержимо першу з приведених нижче трьох формул. Віднімаючи почленно і

розділивши навпіл, одержимо третю формулу. Друга формула виводиться аналогічно, якщо написати аналогічні рівності для $\sin(m+n)x$ і $\sin(m-n)x$ і потім почленно їх скласти.)

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Підставляючи й інтегруючи, одержимо:

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] \, dx = \\ &= \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюються і два інших інтеграли.

Приклад 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [-\cos 8x + \cos 2x] \, dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

Повернемося до інтеграла,

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

де $a \neq 0$ і $c - \frac{b^2}{4a} \neq 0$ (у випадку $a=0$ інтеграл має вигляд II, при

$c - \frac{b^2}{4a} = 0$ вираз $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ і ми маємо справу з

раціональною функцією, якщо $a > 0$, при $a < 0$ функція

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ не визначена ні при якому значенні x).

Покажемо тут метод перетворення цього інтеграла до інтеграла вигляду

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) dz, \quad (9.38)$$

який розглянутий у попередньому підрозділі.

Зробимо перетворення тричлена, що стоїть під коренем

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Зробимо заміну змінної, поклавши

$$x + \frac{b}{2a} = t, \quad dx = dt.$$

Тоді
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

Розглянемо всі можливі випадки.

1. Нехай

$$a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

Уведемо позначення $a = m^2$, $c - \frac{b^2}{4a} = n^2$. У цьому випадку будемо

мати:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 + n^2}$$

2. Нехай

$$a > 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

Тоді

$$a = m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = -n^2.$$

Отже,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{m^2 t^2 - n^2}$$

3. Нехай

$$a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} > 0.$$

Тоді

$$a = -m^2, \quad c - \frac{b^2}{4a} = n^2.$$

Отже,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{n^2 - m^2t^2}$$

Нехай

$$a < 0, \quad c - \frac{b^2}{4a} < 0.$$

У цьому випадку $\sqrt{ax^2 + bx + c}$

є комплексне число при будь-якому значенні x .

Таким чином, інтеграл (9.37) перетвориться до одного з наступних типів інтегралів:

I.
$$\int R(t, \sqrt{m^2t^2 + n^2}) dt. \quad (9.39.1)$$

II.
$$\int R(t, \sqrt{m^2t^2 - n^2}) dt. \quad (9.39.2)$$

III.
$$\int R(t, \sqrt{n^2 - m^2t^2}) dt. \quad (9.39.3)$$

Очевидно, що інтеграл (9.39.1) приводиться до інтеграла вигляду (9.38) за допомогою підстановки

$$t = \frac{n}{m} \operatorname{tg} z.$$

Інтеграл (9.39.2) приводиться до інтеграла вигляду (9.38) за допомогою підстановки

$$t = \frac{n}{m} \sec z.$$

Інтеграл (9.39.3) приводиться до інтеграла вигляду (9.38) за допомогою підстановки

$$t = \frac{n}{m} \sin z.$$

Приклад. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

Розв'язання. Це інтеграл типу III. Зробимо заміну $x = a \sin z$, тоді

$$dx = a \cos z \, dz,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} &= \int \frac{a \cos z \, dz}{\sqrt{(a^2 - a^2 \sin^2 z)^3}} = \int \frac{a \cos z \, dz}{a^3 \cos^3 z} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \\ &= \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{a^2} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

*) $\sqrt{1 - \sin^2 z} = |\cos z|$; ми для визначеності зупиняємося лише на одному випадку: $|\cos z| = \cos z$.

Про функції, інтеграли від яких не виражаються через елементарні функції

Раніше ми уже відзначали (без доведення), що усяка функція $f(x)$, яка безперервна на інтервалі (a, b) , має на цьому інтервалі первісну, тобто існує така функція $F(x)$, що $F'(x) = f(x)$. Однак не всяка первісна, навіть тоді, коли вона існує, виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції.

Такими є первісними, котрі виражені інтегралами

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x},$$

і багато які інші.

В усіх подібних випадках первісна являє собою, мабуть, деяку нову функцію, що не зводиться до комбінації кінцевого числа елементарних функцій.

Так, наприклад, та з первісних

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C,$$

яка обертається в нуль при $x=0$, називається *функцією Лапласа* і позначається $\Phi(x)$. Таким чином,

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} dx + C_1, \quad \text{якщо } \Phi(0) = 0.$$

Ця функція добре вивчена. Складено докладні таблиці її значень при різних значеннях x .

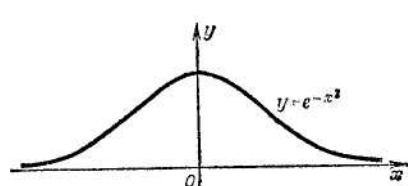


Рис. 9.1.

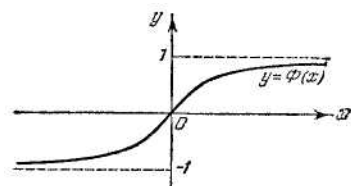


Рис. 9.2.

На рис. 9.1 і рис. 9.2 зображено графік підінтегральної функції $y = e^{-x^2}$ і графік функції Лапласа $y = \Phi(x)$.

Мікромодуль 21

Приклади розв'язання типових задач

I. Обчислити інтеграли:

$$1. \int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx = \int 2x^3 dx - \int 3 \sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int \sin x dx +$$

$$+ 5 \int x^{1/2} dx = 2 \frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5 \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{2} x^4 + 3 \cos x + \frac{10}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$2. \int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4\sqrt{x} \right) dx = 3 \int x^{-1/3} dx + \frac{1}{2} \int x^{-1/2} dx + \int x^{5/4} dx =$$

$$= 3 \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + \frac{1}{2} \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + \frac{x^{5/4+1}}{5/4+1} + C = \frac{9}{2} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9} x^{24}\sqrt{x} + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

$$4. \int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin x + C.$$

$$5. \int \sin(2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-6) + C.$$

II. Інтегрування по частинам

$$1. \int x e^x dx.$$

Прийемо $e^x dx$ за dv , x – за u , тобто покладемо

$$\left. \begin{aligned} e^x dx &= dv \\ x &= u \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \int e^x dx = e^x, \\ du &= dx. \end{aligned} \right.$$

По формулі $\int u dv = uv - \int v du$ отримуємо

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

$$2. \int x \ln x dx$$

Покладемо

$$\left. \begin{aligned} x dx &= dv \\ \ln x &= u \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \frac{x^2}{2}, \\ du &= \frac{dx}{x}. \end{aligned} \right.$$

Тоді

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

$$3. \int x^2 \cos x dx.$$

$$\left. \begin{aligned} \cos x dx &= dv \\ x^2 &= u \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} v &= \sin x, \\ du &= 2x dx. \end{aligned} \right.$$

Тоді

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

4. $\int e^x \cos x \, dx$

Покладемо

$$\left. \begin{aligned} e^x \, dx &= dv \\ \cos x &= u \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\left\{ \begin{aligned} v &= e^x, \\ du &= -\sin x \, dx. \end{aligned} \right.$$

Тоді

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx.$$

Знову застосуємо інтегрування по частинам, поклавши

$$\left. \begin{aligned} e^x \, dx &= dv \\ \sin x &= u \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\left\{ \begin{aligned} v &= e^x, \\ du &= \cos x \, dx. \end{aligned} \right.$$

Тоді отримаємо

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.$$

і ми прийшли до вихідного інтегралу. Підставимо знайдений вираз в результат першої операції і отримаємо

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx;$$

переносячи інтеграл з правої частини в ліву, знайдемо

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x \cos(x + \sin x) + C.$$

II. Заміна змінної (метод підстановки).

1. $\int x^2 \sqrt[3]{4-3x^3} \, dx$

Покладемо

$$4-3x^3 = u$$

Диференціюючи, маємо

$$-9x^2 \, dx = du \quad \text{і} \quad x^2 \, dx = -\frac{1}{9} du.$$

Тому

$$\begin{aligned} &\int x^2 \sqrt[3]{4-3x^3} \, dx \\ &= -\frac{1}{9} \int \sqrt[3]{u} \, du = -\frac{1}{12} u^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{1}{12} (4-3x^3)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{4-3x^3} + C \end{aligned}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$

Покладемо $\sqrt{e^x+1} = u$, тобто $e^x+1 = u^2$.

Тоді $e^x dx = 2u \, du$ і $dx = \frac{2u \, du}{e^x} = \frac{2u \, du}{u^2-1}$

Отже $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u \, du}{(u^2-1)u} = 2 \int \frac{du}{u^2-1} = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C.$

Повертаючись до змінної x , отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| + C.$$

3. $\int x^5 e^{x^3} \, dx$

Покладемо $x^3 = u$. Маємо $3x^2 \, dx = du$ і, значить,

$$\int x^2 x^3 e^{x^3} \, dx = \frac{1}{3} \int u e^u \, du,$$

а цей інтеграл, як ми знаємо, береться по частинам.

Отримуємо $\int x^5 e^{x^3} \, dx = \frac{1}{3} e^u (u-1) + C = \frac{1}{3} e^{x^3} (x^3-1) + C.$

4. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$

Покладемо $x = \sin u$, $dx = \cos u \, du$.

Підставляючи, знаходимо

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \int \cos^2 u \, du = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} \sin 2u \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x і помічаючи, що

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u = 2x\sqrt{1-x^2}, \text{ отримуємо}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} (\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}) + C.$$

5. $\int \sqrt{x^2+1} dx.$

Тут дуже зручна підстановка $x = sh u, dx = ch u du$:

$$\int \sqrt{x^2+1} dx = \int ch^2 u du = \frac{1}{2} \int (1 + ch 2u) du = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{2} sh 2u \right) + C.$$

Так як $u = Arsh x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, а $sh 2u = 2sh u ch u = 2x\sqrt{x^2+1}$, то

$$\int \sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})] + C.$$

Так само при допомозі $x = ch u$ знайдемо

$$\int \sqrt{x^2-1} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2-1} - \ln(x + \sqrt{x^2-1})] + C.$$

III. Інтегрування раціональних функцій.

1. $\int \frac{x-3}{x^3-x} dx.$

Розкладання підінтегральної функції на простіші дроби повинно мати вигляд

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{x-3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

Перш за все нам потрібно знайти коефіцієнти A, B, C .

Звільняючись від знаменника, отримуємо

$$x-3 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1).$$

Так як це – тотожність, то коефіцієнти при однакових степенях x повинні бути рівними між собою

$$0 = A + B + C, \quad 1 = B - C, \quad -3 = -A.$$

З цієї системи трьох рівнянь з трьома невідомими знаходимо

$$A=3, \quad B=-1, \quad C=-2.$$

Таким чином, тотожність має вигляд

$$\frac{x-3}{x^3-x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1},$$

тому

$$\int \frac{x-3}{x^3-x} dx = 3 \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} - 2 \int \frac{dx}{x+1} = 3 \ln|x| - \ln|x-1| - 2 \ln|x+1| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2} \right| + C.$$

2. $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx.$

Розкладемо знаменник підінтегрального дробу на множники. Помічаючи, що він обертається в нуль при $x=-1$, розділимо його на $x+1$; в частковому випадку отримуємо $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ і, значить, розкладання дробу на простіші повинно мати вигляд

$$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx = \frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C . Приводячи до спільного знаменника і звільняючись від нього, отримуємо

$$x-5 = A(x-2)^2 + B(x+1) + C(x+1)(x-2).$$

Тут можна покласти $x=-1, x=2, x=0$; отримуємо

$$-6=9A, \quad -3=3B, \quad -5=4A+B-2C.$$

Звідси

$$A = -\frac{2}{3}, \quad B = -1, \quad C = \frac{2}{3}.$$

Отже

$$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4} dx = -\frac{2}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x-2)^2} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{2}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{3} \ln|x-2| + C.$$

3. $\int \frac{12}{x^4+x^3-x-1} dx.$

Знаменник легко розкладається на множники:

$$x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x+1) - (x+1) = (x+1)(x^2 - 1) = (x+1)(x-1)(x^2 + x + 1).$$

Розкладемо підінтегральну функцію на простіші:

$$\frac{12}{(x+1)(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D з тотожності

$$12 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x+1)(x^2+x+1) + (Cx+D)(x+1)(x-1).$$

Підставляючи сюди чотири різні числові значення x , наприклад, $x=1, x=-1, x=0, x=2$, отримуємо систему

$$\begin{aligned} 12 &= 6B, & 12 &= -A+B-D, \\ 12 &= -1A, & 12 &= 7A+21B+3(2C+D), \end{aligned}$$

з якої знаходимо $A=-6, B=2, C=4, D=-4$

Отже

$$\int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = -6 \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx.$$

Останній інтеграл в правій частині знаходимо, виділяючи в чисельнику похідну знаменника:

$$\int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1-3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C.$$

Остаточо маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{12}{x^4 + x^3 - x - 1} dx &= -6 \ln|x+1| + 2 \ln|x-1| + \\ &+ 2 \ln(x^2+x+1) - 4\sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

IV. Інтегрування іраціональних функцій.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

Покладемо $x=u^6$. Тоді $\sqrt{x}=u^3, \sqrt[3]{x}=u^2, dx=6u^5 du$ і

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6 \int \frac{u^5}{u^3 + u^2} du = 6 \int \frac{u^3}{u+1} du.$$

Виділяючи цілу частину і інтегруя, отримуємо

$$6 \int \frac{u^3}{u+1} du = 6 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1| \right) + C,$$

і, повертаючись до старої змінної,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln|\sqrt[6]{x} + 1| + C.$$

2. Обчислити інтеграл

$$I = \int \sqrt{2x^2 - 2x + 1} dx.$$

Для цього запишемо

$$\int \sqrt{2x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} dx = (Ax+B)\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + K \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}};$$

$$\frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = A\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + (Ax+B) \frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} + \frac{K}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}};$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 &| \quad 4A = 2, \\ x &| \quad -3A + 2B = -2, \\ 1 &| \quad A - B + K = 1. \end{aligned} \right\} \text{звідки } A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{4}, \quad K = \frac{1}{4};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{2} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln |2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}| + C_1 \quad \left(C_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 + C \right).$$

Остаточню

$$I = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln |2x - 1 + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}| + C_2 \quad \left(C_2 = \frac{1}{4}C_1 \right)$$

Звичайно, у відповіді замість C_2 можна писати просто C .

V. Інтегрування тригонометричних функцій.

1. $\int \frac{dx}{\sin x}$ і $\int \frac{dx}{\cos x}$.

Покладаючи $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+u^2}{2u} \frac{2du}{1+u^2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$$

2. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$

Покладаючи $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, отримаємо

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(3 + 5 \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = \int \frac{du}{4-u^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+u}{2-u} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} \right| + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}$

Робимо підстановку

$$u = \operatorname{tg} x, \quad \sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}, \quad dx = \frac{du}{1+u^2}.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 3 \cos^2 x} = \int \frac{2du}{(1+u^2)\left(\frac{u^2}{1+u^2} - \frac{3}{1+u^2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{u - \sqrt{3}}{u + \sqrt{3}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} \right| + C.$$

4. Такою же підстановкою береться інтеграл вигляду $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

Візьмемо інтеграл

$$\int \frac{dx}{1 - 2 \operatorname{tg} x} = \frac{du}{(1+u^2)(1+2u)}.$$

Знаходячи інтеграл від раціонального дроби і повертаючись до старої змінної, отримаємо

$$\int \frac{dx}{1 - 2 \operatorname{tg} x} = \frac{1}{5} [x + 2 \ln |\cos x + 2 \sin x|] + C.$$

5. Знайти наступний інтеграл підстановкою $\sin x = u$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \sin x dx = - \int \frac{(1-u^2)^2}{u^2} du.$$

Розбиваючи інтеграл на суму інтегралів, інтегруючи і повертаючись до змінної x , отримуємо

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

6. Знайти наступний інтеграл

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

Так як обидва показники степені додатні і парні, то можна запровадити тригонометричні перетворення з кратними аргументами

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx + \\ &+ \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \cos 2x d(2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Мікромодуль 21

Індивідуальні тестові завдання

I. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} 1. \int x^5 dx. \quad 2. \int (x + \sqrt{x}) dx. \quad 3. \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx. \quad 4. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}}. \\ 5. \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx. \quad 6. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}. \quad 7. \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Інтегрування методом підстановки

$$\begin{aligned} 8. \int e^{5x} dx. \quad 9. \int \cos 5x dx. \quad 10. \int \sin ax dx. \quad 11. \int \frac{\ln x}{x} dx. \\ 12. \int \frac{dx}{\sin^2 3x}. \quad 13. \int \frac{dx}{\cos^2 7x}. \quad 14. \int \frac{dx}{3x-7}. \quad 15. \int \frac{dx}{1-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \int \frac{dx}{5-2x}. \quad 17. \int \operatorname{tg} 2x dx. \quad 18. \int \operatorname{ctg}(5x-7) dx. \quad 19. \int \frac{dy}{\operatorname{ctg} 3y}. \\ 20. \int \operatorname{ctg} \frac{x}{3} dx. \quad 21. \int \operatorname{tg} \varphi \cdot \sec^2 \varphi d\varphi. \quad 22. \int (\operatorname{ctg} e^x) e^x dx. \\ 23. \int \left(\operatorname{tg} 4S - \operatorname{ctg} \frac{S}{4} \right) dS. \quad 24. \int \sin^2 x \cos x dx. \quad 25. \int \cos^3 x \sin x dx. \\ 26. \int \sqrt{x^2+1} dx. \quad 27. \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}. \quad 28. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}. \quad 29. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}. \\ 30. \int \frac{\sin x dx}{\cos^3 x}. \quad 31. \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx. \quad 32. \int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx. \quad 33. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}. \\ 34. \int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx. \quad 35. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}. \quad 36. \int \frac{\sin 2x dx}{(1 + \cos 2x)^2}. \\ 37. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}. \quad 38. \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x + 1}}{\cos^2 x} dx. \quad 39. \int \frac{\cos 2x dx}{(2 + 3 \sin 2x)^3}. \\ 40. \int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}. \quad 41. \int \frac{\ln^2 x dx}{x}. \quad 42. \int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 43. \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}. \\ 44. \int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad 45. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx. \quad 46. \int \frac{xdx}{x^2+1}. \\ 47. \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx. \quad 48. \int \frac{\cos x dx}{2 \sin x + 3}. \quad 49. \int \frac{dx}{x \ln x}. \\ 50. \int 2x(x^2+1)^4 dx. \quad 51. \int \operatorname{tg}^4 x dx. \quad 52. \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}. \\ 53. \int \frac{dx}{\cos^2 x (3 \operatorname{tg} x + 1)}. \quad 54. \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx. \quad 55. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}. \\ 56. \int \frac{\cos 2x}{2+3 \sin 2x} dx. \quad 57. \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}. \\ 58. \int \cos(a+bx) dx. \quad 59. \int e^{2x} dx. \quad 60. \int e^{x/3} dx. \quad 61. \int e^{\sin x} \cos x dx. \end{aligned}$$

62. $\int a^{x^2} x dx$. 63. $\int e^{x/a} dx$. 64. $\int (e^{2x})^2 dx$. 65. $\int 3^x e^x dx$.
 66. $\int e^{-3x} dx$. 67. $\int (e^{5x} + a^{5x}) dx$. 68. $\int e^{x^2+4x+3} (x+1) dx$.
 69. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x} dx$. 70. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$. 71. $\int \frac{e^{2x} dx}{2+e^{2x}}$. 72. $\int \frac{dx}{1+2x^3}$.
 73. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. 74. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. 75. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 76. $\int \frac{dx}{4+x^2}$.
 77. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. 78. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$. 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. 80. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$.
 81. $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2+a^2x^2}}$. 82. $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$. 83. $\int \frac{x dx}{5-x^6}$. 84. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.
 85. $\int \frac{x dx}{x^4+a^4}$. 86. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. 87. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$. 88. $\int \frac{\cos x dx}{a^2+\sin^2 x}$.
 89. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 90. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 91. $\int \frac{x - \arctg x}{1-x^2} dx$.
 92. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$. 93. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$. 94. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.
 95. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. 96. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$. 97. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x} \sin 2x dx$.
 98. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. 99. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. 100. $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} dx$.
 101. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$. 102. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.
 103. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 4}$. 104. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 1}$. 105. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5}$.
 106. $\int \frac{dz}{2z^2 - 2z + 1}$. 107. $\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 2}$. 108. $\int \frac{(6x-7)dx}{3x^2 - 7x + 11}$.

109. $\int \frac{(3x-2)dx}{5x^2-3x+2}$. 110. $\int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx$. 111. $\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx$.
 112. $\int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx$. 113. $\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1} dx$.
 114. $\int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin x \cos x + \sin^2 x}$.
 Інтегралы вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.
 115. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-4x^2}}$. 116. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$. 117. $\int \frac{dS}{\sqrt{2aS+S^2}}$.
 118. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$. 119. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(3x+5)}}$. 120. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$.
 121. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-x-1}}$. 122. $\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.
 123. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. 124. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$. 125. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.
 126. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{x(2x-1)}} dx$.
 Інтегрування по частинам:
 127. $\int xe^x dx$. 128. $\int x \ln x dx$. 129. $\int x \sin x dx$. 130. $\int \ln x dx$.
 131. $\int \arcsin x dx$. 132. $\int \ln(1-x) dx$. 133. $\int x^n \ln x dx$.
 134. $\int x \arctg x dx$. 135. $\int x \arcsin x dx$. 136. $\int \ln(x^2+1) dx$.
 137. $\int \arctg \sqrt{x} dx$. 138. $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$. 139. $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$.
 140. $\int x \cos^2 x dx$. 141. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 142. $\int \frac{x \arctg x}{(x^2+1)^2} dx$.

143. $\int x \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - x} dx$. 144. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

145. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$. 146. $\int \arcsin x \frac{xdx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

Застосувати тригонометричні підстановки в прикладах:

147. $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$. 148. $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$. 149. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 + x^2}}$.

150. $\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$. 151. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$.

Інтегрування раціональних дробів

152. $\int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} dx$. 153. $\int \frac{x dx}{(x + 1)(x + 3)(x + 5)}$.

154. $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$. 155. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2 - 1)(x + 2)}$. 156. $\int \frac{dx}{(x - 1)^2(x - 2)}$.

157. $\int \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x} dx$. 158. $\int \frac{3x + 2}{x(x - 1)^3} dx$. 159. $\int \frac{x^2 dx}{(x + 2)^2(x + 4)^2}$.

160. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}$. 161. $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x - 12)(x^2 - 2x + 3)} dx$.

162. $\int \frac{x^2 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$. 163. $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$. 164. $\int \frac{3x - 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx$.

165. $\int \frac{4dx}{x^4 + 1}$.

166. $\int \frac{x^5}{x^3 - 1} dx$. 167. $\int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx$. 168. $\int \frac{(4x^2 - 8x)dx}{(x - 1)^2(x^2 + 1)^2}$.

169. $\int \frac{dx}{(x^2 - x)(x^2 - x + 1)^2}$.

Інтегрування іраціональних функцій:

170. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}} dx$. 171. $\int \frac{\sqrt{x^3 - \sqrt[3]{x}}}{6\sqrt[4]{x}} dx$. 172. $\int \frac{\sqrt[6]{x + 1}}{\sqrt[6]{x^7 + \sqrt[4]{x^5}}} dx$.

173. $\int \frac{2 + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + 1} dx$. 174. $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x^2}$. 175. $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \frac{dx}{x}$.

176. $\int \frac{\sqrt[7]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[7]{x^8} + \sqrt[4]{x^{15}}} dx$. 177. $\int \sqrt{\frac{2 + 3x}{x - 3}} dx$.

Інтегралі вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$:

178. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x + 3}}$. 179. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2 + x - x^2}}$. 180. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$.

181. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} dx$. 182. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)^3}}$. 183. $\int \sqrt{2x - x^2} dx$.

184. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$. 184. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$. 185. $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x + x^2}}$.

186. $\int \frac{x + 1}{(2x + x^2)\sqrt{2x + x^2}} dx$. 187. $\int \frac{1 - \sqrt{1 + x + x^2}}{x\sqrt{1 + x + x^2}} dx$.

188. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{x^2} dx$.

Інтегрування тригонометричних функцій:

189. $\int \sin^2 x dx$. 190. $\int \sin^5 x dx$. 191. $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$.

192. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$. 193. $\int \cos^2 x dx$. 194. $\int \sin^4 x dx$. 195. $\int \cos^6 x dx$.

196. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$. 197. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$. 198. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$.

199. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$. 200. $\int \sec^8 x dx$. 201. $\int \operatorname{tg}^4 x \sec^4 x dx$.

$$202. \int \frac{dx}{\cos^4 x}. 203. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx. 204. \int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$$

$$205. \int \sin x \sin 3x dx. 206. \cos 4x \cos 7x dx. 207. \int \cos 2x \sin 4x dx.$$

$$208. \int \sin \frac{1}{4}x \cos \frac{3}{4}x dx. 209. \int \frac{dx}{4-5 \sin x}. 210. \int \frac{dx}{5-3 \cos x}$$

$$211. \int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}. 212. \int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}. 213. \int \frac{\sin 2x}{\cos^4 + \sin^4 x} dx.$$

$$214. \int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}. 215. \int \frac{dx}{\sin^2 x + tg^2 x}. 216. \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2} dx.$$

Мікромодуль 22

Визначений інтеграл

При розв'язанні багатьох важливих задач приходиться підсумовувати нескінченно велике число нескінченно малих доданків. Це приводить до одного з центральних понять математики, а саме, до поняття визначеного інтеграла.

9.3. Означення й основні властивості

1. Приклади, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Розглянемо задачу, оберенну до тої, котра розбиралася нами при визначенні поняття похідної. А саме, будемо вважати, що нам відомий закон зміни миттєвої швидкості $v=v(t)$ при русі точки і нас цікавить шлях, пройдений за деякий проміжок часу від $t = \alpha$ до $t = \beta$.

Оскільки рух не передбачається рівномірним, ми не можемо обчислювати шлях як добуток швидкості на минулий час. Тому для підрахунку шляху зробимо так. Розіб'ємо весь проміжок часу на велике число малих, не обов'язково рівних один одному інтервалів часу

$$t_0 (= \alpha) \leq t \leq t_1, \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad \dots, t_{n-1} \leq t \leq t_n (= \beta),$$

де t_1, \dots, t_{n-1} — деякі проміжні довільно обрані моменти часу.

Якщо ці інтервали досить малі, то без великої похибки на кожному з них рух можна вважати рівномірним, що дасть наближений вираз для шляху

$$s \approx v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2 + \dots + v_n \Delta t_n; \quad (9.40)$$

тут $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, а v_k — яке-небудь зі значень миттєвої швидкості v на k -у інтервалі часу, тобто $v_k = v(\tau_k)$, $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$. (Звернемо увагу на деяку відмінність цих позначень від позначень, які вживались раніше, де було $t_k - t_{k-1} = \Delta t_{k-1}$, $v_k = v(t_k)$). Тому формулу (9.40) можна інакше записати так:

$$s \approx \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k \quad (\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta; t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k).$$

Ця формула тим точніша, чим дрібніша розбивка основного проміжку часу; щоб одержати точну формулу, треба перейти до границі, прийнявши, що ця розбивка нескінченно подрібнюється:

$$s = \lim \sum_{k=1}^n v(\tau_k) \Delta t_k. \quad (9.41)$$

Подібним чином у розглянутій нами задачі про наповнення судини, при відомій, але змінній швидкості наповнення $w=w(t)$ загальний об'єм V , наповнений за проміжок часу від α до β , дорівнює

$$V = \lim \sum_{k=1}^n w(\tau_k) \Delta t_k. \quad (9.42)$$

при тім же змісті позначень. Як і для формули (9.41), це базується на тому, що протягом малого проміжку часу швидкість наповнення при підрахунку наповненого об'єму можна вважати майже сталою; точніше кажучи, протягом нескінченно малого проміжку часу цю швидкість можна вважати сталою.

У третьому прикладі, який ми розглядали раніше, якщо вважати заданою лінійну щільність ρ нитки в кожній точці s , тобто $\rho = \rho(s)$, аналогічно одержимо загальну масу нитки

$$M = \lim \sum_{k=1}^n \rho(\sigma_k) \Delta s_k \quad (\alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_n = \beta; s_{k-1} \leq \sigma_k \leq s_k). \quad (9.43)$$

причому границя береться в процесі, коли уявна розбивка нитки нескінченно подрібнюється; α і β - значення s , які відповідають кінцям нитки.

Розглянемо, нарешті, важливий геометричний приклад. Нехай потрібно обчислити площу фігури, яка заштрихована на рис. 9.3 і яку називають *криволінійною трапецією*, причому для простоти будемо вважати, що $f(x) > 0$. Якщо розбити весь інтервал $\alpha \leq x \leq \beta$ зміни x на малі проміжки за допомогою точок ділення

$$x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$$

і прийняти висоту на кожному з цих малих проміжків сталою, то одержимо наближений вираз для площі криволінійної трапеції

$$S \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k).$$

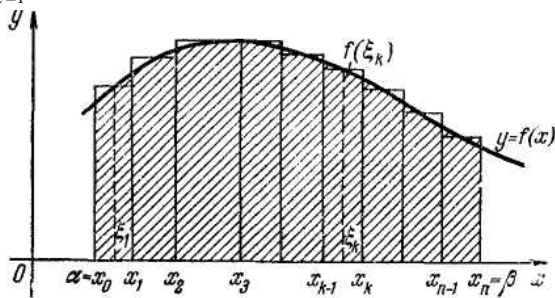


Рис. 9.3.

Геометричний зміст правої частини — це площа східчної фігури, яка зображена на рис. 9.3 і отриманої в результаті заміни кожного з n стовпчиків, на які розбита криволінійна трапеція, прямокутником з тією же основою і з висотою, рівною одній з висот стовпчика. У границі, при нескінченному здрібнюванні розбивки, одержуємо

$$S = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \tag{9.44}$$

2. Основне означення. Вирази (9.41) — (9.44), які виходять при розв’язанні різних задач, мають однакову структуру. Аналогічні вирази виходять і в багатьох інших задачах, що дає підставу для наступного загального означення. Нехай деяка функція $f(x)$ задана при $\alpha \leq x \leq \beta$. Розіб’ємо довільно цей інтервал на маленькі проміжки за допомогою точок розподілу $x_0 = \alpha < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = \beta$ і утворимо *інтегральну суму*

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n, \tag{9.45}$$

де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, а кожна з точок ξ_k довільно обрана між x_{k-1} і x_k , тобто на k -му проміжку розбивки. Нехай тепер розбивка нескінченно подрібнюється; тоді границя, до якої прагне інтегральна сума в цьому процесі, називається *визначеним інтегралом від функції $f(x)$ по інтервалові інтегрування $\alpha \leq x \leq \beta$* і позначається

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \tag{9.46}$$

У прикладах п.1 одержуємо відповідно

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} v(t) dt, \quad V = \int_{\alpha}^{\beta} w(t) dt, \quad M = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(s) ds, \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \tag{9.47}$$

З останньої рівності ясний геометричний зміст визначеного інтеграла у випадку, якщо підінтегральна функція додатна: він дорівнює площі криволінійної трапеції, яка обмежена графіком підінтегральної функції, віссю абсцис і прямими, паралельними осі ординат, побудованими на кінцях інтервалу інтегрування.

Ці кінці називаються *нижньою і верхньою границями інтегрування*. Якщо підінтегральна функція від’ємна або змінює знак, то в інтегральну суму (9.45) деякі члени ввійдуть зі знаком мінус. У границі вийде, що інтеграл дорівнює *алгебраїчній сумі площ* ділянок криволінійної трапеції, причому (рис.9.4) площі ділянок, які лежать вище (відповідно нижче) осі x , беруться зі знаком $+$ (відповідно $-$). З порівняння формул (9.47) випливає також, що для одержання величини пройденого шляху при заданій на графіку (рис. 9.5) залежності швидкості від часу треба просто взяти площа відповідної криволінійної трапеції.

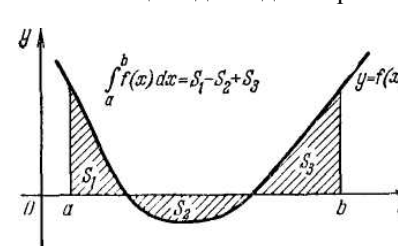


Рис. 9.4.

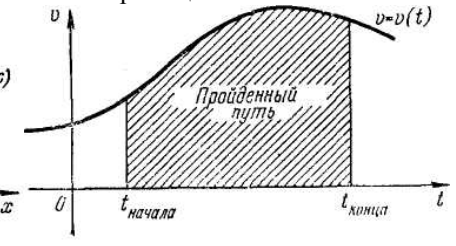


Рис. 9.5.

І тут, якщо $v < 0$, графік проходить нижче осі t , а приріст координати точки, що рухається, від’ємний, тобто зазначену площу треба брати зі знаком $-$.

Це правило знаків при підрахунку площ діє й у великому числі інших прикладів.

Зупинимося на граничному переході у формулі (9.46). Іноді говорять, що границя береться при $n \rightarrow \infty$; це не зовсім точно, так як ділянки Δx_k не передбачаються рівними і якщо зажадати тільки, щоб $n \rightarrow \infty$, то може вийти, що одна частина інтервалу $\alpha \leq x \leq \beta$ подрібнюється, а інша - ні. Краще говорити, що *границя береться при безмежному здрібнюванні інтервалу інтегрування*. Степінь цього здрібнювання можна охарактеризувати найбільшою з довжин Δx_k ділянок даної розбивки, так як якщо найбільша з цих довжин мала, то і всі довжини малі. Тому можна сказати, що граничний перехід у формулі (9.46) здійснюється в процесі, коли

$$\max_k \Delta x_k \rightarrow 0.$$

Приведемо приклад підрахунку інтеграла на основі його означення (9.46).

Нехай треба обчислити інтеграл

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Розіб'ємо інтервал інтегрування на п'ять рівних частин довжини 0,2 і виберемо для визначеності на кожній з цих частин точку в лівому кінці. Тоді

$$\xi_1=0,0; \quad \xi_2=0,2; \quad \xi_3=0,4; \quad \xi_4=0,6; \quad \xi_5=0,8$$

і

$$\int_0^1 x^2 dx \approx \sum_{k=1}^5 \xi_k^2 \Delta x_k = (0,0^2+0,2^2+0,4^2+0,6^2+0,8^2) \cdot 0,2 = 0,24.$$

При аналогічній розбивці на 10 частин вийшло б значення 0,29, а при розбивці на 100 частин — значення 0,33, що зовсім близьке до точного значення, рівному 1/3, як ми побачимо в п. 3.

Таким чином, хоча інтегральна сума (9.45) має високий степінь сваволі, він залежить як від вибору точок ділення x_k , так і від вибору проміжних точок ξ_k , але якщо розбивку взяти досить дрібною, то ця сума практично просто дорівнює своїй границі, тобто інтегралові (9.46) (який, зазвичай, уже не залежить ні від точок x_k , ні від ξ_k). При досить дрібній розбивці кожний з доданків у сумі стає досить малим за рахунок малості Δx_k , але число доданків настільки велике, що вся сума має кінцеве значення; грубо говорячи, якщо число доданків у сумі дорівнює n , то всі Δx_k ,

а тому і кожен доданок у сумі мають порядок $1/n$. З огляду на знак границі у формулі (9.46), можна сказати, що **визначений інтеграл — це сума нескінченно великого числа нескінченно малих доданків**. На практиці часто можна визначений інтеграл розглядати просто як суму досить великого числа досить малих однорідних (тобто однієї розмірності, одного характеру, одного змісту) доданків, настільки малих, що ця сума практично дорівнює своїй границі. Це цілком відповідає поняттю про практично нескінченно великих і нескінченно малих величинах, як про величини досить великих і досить малих, але теоретично кінцевих. Відзначимо, що не всяка сума нескінченно великого числа нескінченно малих доданків дає інтеграл: це ясно вже з того, що, як було сказано вище, число доданків і їхній розмір повинні бути погоджені так, щоб ця сума приймала кінцеве значення.

З такого тлумачення інтеграла як суми виникло його означення. Якщо вважати доданки в сумі (9.45) практично нескінченно малими і позначити тоді $\Delta x_k = dx$, то всю суму (9.45) можна переписати у вигляді

$$\sum_{\text{від } x=\alpha}^{\text{до } x=\beta} f(x) dx.$$

На закінчення відзначимо, що підінтегральна функція на інтервалі інтегрування може бути або безперервною, або розривною, тобто мати точки розриву. Однак у цьому розділі обов'язково потрібно, щоб інтервал інтегрування був кінцевим і підінтегральна функція на цьому інтервалі ніде не оберталася в нескінченність. Тоді в більш повних курсах математичного аналізу доводиться, без усякого посилання на геометричний або фізичний зміст, що інтеграл обов'язково існує, тобто має визначене кінцеве числове значення. Якщо ж зазначені умови порушуються, то, як буде показано нижче, інтеграл може виявитися позбавленим числового значення.

3. Зв'язок визначеного інтеграла з невизначеним. Почнемо з простого зауваження: *визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування*, тобто

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(s) ds = \dots \quad (9.48)$$

Це впливає хоча б з геометричного змісту інтеграла, так як усі виписані інтеграли рівні одній і тій же площі. Отже, *змінна*

інтегрування у визначеному інтегралі є німою, подібно індексів підсумовування, і тому може бути позначена будь-якою буквою.

Нехай дана деяка функція $f(x)$, яку ми будемо інтегрувати. Однак тільки нижню границю x_0 ми будемо вважати зафіксованою, а верхню границю x будемо вважати довільною, змінною. Тоді результат інтегрування буде залежати від x і ми його позначимо через $\Phi(x)$. Це можна записати так:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx \quad (x_0 = const)$$

або, краще, маючи на увазі рівності (9.48), так:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (x_0 = const). \quad (9.49)$$

Перший запис, хоча і припустимий, іноді приводить до непорозуміннь, так як буква x у ньому має два різних змісти (верхня границя і змінна інтегрування), про що треба пам'ятати.

Доведемо, що побудована функція $\Phi(x)$ є первісною для підінтегральної функції $f(x)$, тобто

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t)dt = f(x):$$

похідна від інтеграла по верхній границі дорівнює значенню підінтегральної функції на верхній границі. Для цього спочатку припустимо функцію $f(x)$ безперечною і розглянемо рис.9.6. З геометричного змісту інтеграла випливає, що якщо x одержить приріст Δx , то $\Delta\Phi$ дорівнює заштрихованій площі. Ця площа дорівнює добуткові $\Delta x \cdot f^n$, де f^n — деяка середня ордината між x і $x+\Delta x$. Звідси

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} f^* = f(x^*),$$

і якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то $x^* \rightarrow x$ і в границі одержуємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x^*) = f(x),$$

що і потрібно було довести. Ми бачимо, зокрема, що *безперевна функція завжди має первісну*; щоб її одержати, треба узяти визначений інтеграл від заданої функції при зафіксованій нижній границі і розглянути його як функцію від верхньої границі.

Якщо підінтегральна функція розривна (але кінцева, так як ми поки розглядаємо тільки кінцеві функції), то в її точках розриву функція (9.49) безперевна, але має «злам» (рис. 9.7), так як похідна від $\Phi(x)$ при переході через таку точку повинна перетерпіти стрибок. Допускаючи такі злами, ми розширюємо поняття первісної функції, так як в самій точці зламу єдиної похідної немає. При цьому природному розширенні виходить, що і всяка усюди кінцева функція має первісну, котра є безперечною функцією.

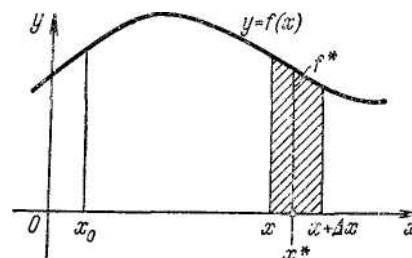


Рис. 9.6.

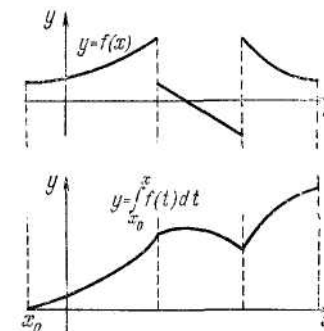


Рис. 9.7.

Припустимо тепер, що нам треба обчислити інтеграл

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

і ми знаємо якусь первісну $F(x)$ до функції $f(x)$. Так як функція

$$\int_{\alpha}^x f(t)dt \quad \text{— теж первісна до } f(x), \text{ то}$$

$$\int_{\alpha}^x f(t)dt = F(x) + C,$$

де C — деяка стала. Якщо тут покласти $x=\alpha$, то з геометричного змісту інтеграла випливає, що ліва частина обернеться в нуль, тобто

$$0 = F(\alpha) + C; \quad C = -F(\alpha); \quad \int_{\alpha}^x f(t)dt = F(x) - F(\alpha) .$$

Якщо в останній формулі покласти $x=\beta$, то на основі (9.48) одержимо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha), \quad (9.50)$$

тобто визначений інтеграл дорівнює приросту первісної до підінтегральної функції, коли незалежна змінна змінюється від нижньої до верхньої границі. Праву частину рівності (9.50) записують ще у вигляді

$$F(x) \Big|_{\alpha}^{\beta},$$

де $\Big|_{\alpha}^{\beta}$ — знак подвійної підстановки, що означає, що в розглянуту

функцію треба підставити замість аргументу верхню границю, потім нижню і з першого результату відняти другий.

Формулу (8.50) записують ще так:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \left(\int f(x)dx \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}, \quad (9.51)$$

так як

$$\begin{aligned} \left(\int f(x)dx \right) \Big|_{\alpha}^{\beta} &= (F(x) + C) \Big|_{\alpha}^{\beta} = [F(\beta) + C] - [F(\alpha) + C] = F(\beta) - F(\alpha) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \end{aligned}$$

Отже, визначений інтеграл дорівнює приросту невизначеного. Цей результат, один з найважливіших у математиці, називається *теоремою Ньютона — Лейбниці*.

Наприклад,

$$\int_0^1 x^2 dx = \left(\int x^2 dx \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Відзначимо, що тут ми при обчисленні невизначеного інтеграла не писали довільної сталої C , так як вище ми бачили, що

члени $+C$ і $-C$ усе рівно взаємно знищуються. Добре видно, що визначений інтеграл при заданих границях інтегрування є сталим числом, тоді як невизначений інтеграл є функцією.

Дотепер ми вважали, що $\alpha < \beta$. Якщо $\alpha \geq \beta$, то формула (9.50) приймається за визначення інтеграла, що стоїть в лівій частині.

Так як $f(x)=F'(x)$, то формулу (9.50) можна переписати так:

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} F'(x)dx \right) = F(\beta) - F(\alpha),$$

тобто визначений інтеграл від похідної дорівнює приросту первісної.

4. Основні властивості визначеного інтеграла

1. При перестановці границь інтегрування інтеграл помножується на -1 . Дійсно, у силу формули (9.50)

$$\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = F(\alpha) - F(\beta) = -[F(\beta) - F(\alpha)] = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

Ця проста властивість, яку можна записати також у вигляді

$$F(x) \Big|_{\alpha}^{\beta} = -F(x) \Big|_{\beta}^{\alpha}.$$

дає можливість, змінивши знак у невизначеного інтеграла, підставляти границі в зворотному порядку, тобто обчислювати так:

$$\int_3^5 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_3^5 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

З властивості 1, зокрема, випливає правило диференціювання інтеграла по нижній границі:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_x^{x_0} f(t)dt \right) = \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x f(t)dt \right) = -f(x).$$

Наступна властивість уже застосовувалася в п. 3.

2. Якщо границі інтегрування збігаються, то інтеграл дорівнює нулеві, тобто

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0.$$

3. «Теорема про розбивку інтервалу інтегрування»:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx.$$

Дійсно, ліва частина дорівнює

$$[F(\beta) - F(\alpha)] + [F(\gamma) - F(\beta)] = F(\gamma) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx.$$

4. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \pm \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx.$$

Для доведення треба виходити з аналогічної властивості невизначених інтегралів і прирівняти прирост лівої і правої частин, коли x міняється від α до β .

5. Сталій множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_{\alpha}^{\beta} Mf(x)dx = M \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \quad (M = const).$$

Властивості 4 і 5 спільно читаються так: *визначений інтеграл лінійний відносно підінтегральної функції.*

Тут термін «лінійний» розуміють так. Формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1 \quad (9.53)$$

при зафіксованих α , β ставить у відповідність кожній кінцевій функції, визначеної при $\alpha \leq x \leq \beta$ число 1. Іншими словами, формула (9.53) визначає відображення нескінченномірною лінійного простору всіх таких функцій в одновірний лінійний простір усіх чисел, а властивості 4 і 5 означають, що це відображення лінійне.

(Перевірте, наприклад, що при $\alpha=1$, $\beta=2$ функції $y=x^2$ відповідає число $I=3/7$, функції $y=1/x^3$ - число $3/8$, а функції $y=5x^2 - (3/x^3)$ - число $5 \cdot (7/3) - 3 \cdot (3/8) = 10,54$.) Закон, по якому функціям ставляться у відповідність числа, називається *функціоналом*; виходить, формула (9.53) визначає *лінійний функціонал*, визначений на зазначеному просторі функцій.

6. Формула інтегрування по частинам

$$\int_{\alpha}^{\beta} uv' dx = (uv) \Big|_{x=\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u'v dx$$

також виходить з відповідної формули для невизначених інтегралів.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left| \begin{matrix} u = x, & dv = \sin x dx \\ dv = dx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| = (-x \cos x) \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \\ &= (-x \cos x) \Big|_0^{\pi} + (\sin x) \Big|_0^{\pi} = \pi. \end{aligned}$$

7. Формула заміни змінної для визначених інтегралів виходить, якщо прирівняти приріст обох частин формули (9.20), коли t міняється від α до β . Враховуючи, що при цьому x , який дорівнює $\varphi(t)$ (при цьому треба зазначити, що функція $\varphi(t)$ є строго монотонною), зміниться від $\varphi(\alpha)$ до $\varphi(\beta)$, одержимо

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \left[\int f(x)dx \right]_{x=\varphi(\beta)} - \left[\int f(x)dx \right]_{x=\varphi(\alpha)}$$

або, з огляду на формулу (9.51),

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

Таким чином, тут треба додатково виконати заміну границь інтегрування, з'ясувавши інтервал, який повина пройти нова змінна, щоб зв'язана з нею стара змінна інтегрування пройшла спочатку заданий для неї інтервал. Якщо, наприклад, при обчисленні інтеграла

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

ми хочемо зробити підстановку $x=R \sin t$, то треба врахувати, що якщо x змінювався від 0 до R , то t уже буде мінятися від 0 до $\pi/2$. Тому

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t dt = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{R^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi R^2}{4}.$$

Як бачимо, на відміну від заміни змінної в невизначеному інтегралі, тут не потрібно виконувати зворотню підстановку, тобто перейти у відповіді до старої змінної.

Ми вивели властивості 3—5 визначеного інтеграла за допомогою формули (9.50). Однак їх можна було б вивести і на основі визначення (9.46) інтеграла як границі інтегральної суми. Наприклад, переходячи у формулі

$$\sum_{k=1}^n [f_1(\xi_k) \pm f_2(\xi_k)] \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f_1(\xi_k) \Delta x_k \pm \sum_{k=1}^n f_2(\xi_k) \Delta x_k$$

до границі при нескінченному здрібнюванні розбивки інтервалу $\alpha \leq x \leq \beta$, одержуємо властивість 4 і т.д. З того ж визначення випливає властивість 8.

8. Якщо змінні, які розглядаються, мають розміри, то

$$\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right] = [f] \cdot [x],$$

так як підсумовування і перехід до границі не змінюють розмірності.

9. Інтегрування в симетричних границях часто можна спростити по формулах (рис. 9.8):

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \text{— якщо } f(x) \text{— парна функція,}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad \text{— якщо } f(x) \text{— непарна функція.}$$

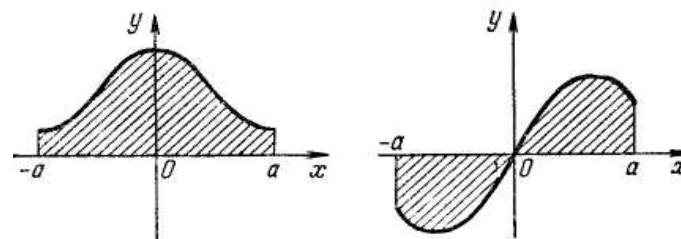


Рис. 9.8.

10. Інтеграл від періодичної функції по періоду не залежить від розміщення інтервалу інтегрування: іншими словами, якщо $f(x+A)=f(x)$, то інтеграл

$$I = \int_x^{x+A} f(s) ds$$

не залежить від x .

Насправді, за правилом диференціювання складеної функції і на основі функції і на основі формул для похідної інтеграла по верхній і нижній границях одержуємо

$$\frac{df}{dx} = f(x+A) \frac{d(x+A)}{dx} - f(x) \frac{dx}{dx} = f(x+A) - f(x) = 0.$$

5. Інтегрування нерівностей. З визначення інтеграла і з його геометричного змісту (п. 2) випливає, що якщо $f(x) \geq 0$ і $\alpha < \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0. \tag{9.54}$$

Остання нерівність може обернутися в рівність, тільки якщо $f(x)=0$ ($\alpha \leq x \leq \beta$). Утім, підінтегральна функція може бути відмінною від нуля в окремих, дискретних точках, так як такі значення не позначаються на значенні інтеграла.

Якщо дано, що

$$\varphi(x) \leq \psi(x) \quad \text{при } \alpha \leq x \leq \beta \tag{9.55}$$

то, позначивши $\psi(x) - \varphi(x) = f(x)$ і застосовуючи твердження (9.54), одержимо

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\psi(x) - \varphi(x)] dx \geq 0, \quad \int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) dx - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx \geq 0,$$

тобто

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) dx. \quad (9.56)$$

Отже, з нерівності (9.55) ми одержали (9.56), тобто нерівності можна інтегрувати в додатному напрямку.

Як і вище, в умовах (9.55) нерівність (9.56) може обернутися в рівність, тільки якщо $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ при $\alpha \leq x \leq \beta$.

Як наслідок одержимо саму грубу оцінку інтеграла. Нехай

$$f_{\min} \leq f(x) \leq f_{\max} \quad (\alpha \leq x \leq \beta),$$

де f_{\min} і f_{\max} —дві константи. Інтегруючи ці нерівності, одержимо

$$f_{\min}(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f_{\max}(\beta - \alpha). \quad (9.57)$$

У зв'язку з цією оцінкою знаходиться важливе поняття середнього (говорять також «середнього інтегрального» або «середнього арифметичного») значення функції. Якщо функція $f(x)$ розглядається на інтервалі $\alpha \leq x \leq \beta$, то її середнім значенням на цьому інтервалі називається така константа \bar{f} , інтеграл від якої по інтервалу $\alpha \leq x \leq \beta$ дорівнює інтегралові від функції $f(x)$ по цьому інтервалу. Таким чином,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \bar{f} dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \bar{f} \cdot (\beta - \alpha).$$

З останньої формули середнього значення одержуємо вираз для середнього значення

$$\bar{f} = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

З нерівності (9.57) випливає, як і варто очікувати, що

$$f_{\min} \leq \bar{f} \leq f_{\max}.$$

Геометричний зміст середнього значення функції показано на рис. 9.9: \bar{f} повинна бути такою, щоб площа прямокутника $AB'C'D$ дорівнювала площі криволінійної трапеції $ABCD$. Ясно, що якщо функція $f(x)$ безперервна, то вона приймає десь на інтервалі $\alpha < x < \beta$ значення \bar{f} (на рис. 9.9 при $x = \gamma$); розривна функція може не приймати свого середнього значення.

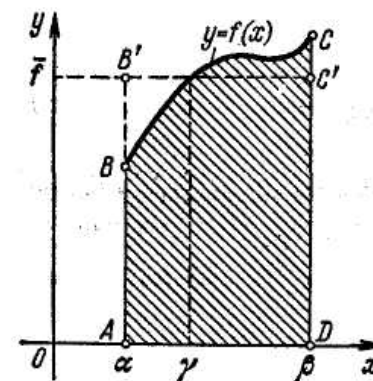


Рис. 9.9.

Зміст приведеного тут визначення середнього значення функції добре видний, наприклад, при розгляді залежності миттєвої швидкості від часу в процесі нерівномірного руху точки. Так як інтеграл від швидкості за часом дорівнює шляху (див. першу формулу 9.47)), то виходить, що середнє значення швидкості за деякий проміжок часу— це така стала швидкість, при якій точка за той же проміжок часу пройшла б той же шлях, що і при розглянутому нерівномірному русі. Іншими словами, у силу (9.58) середнє значення швидкості за кінцевий проміжок часу при нерівномірному русі — це відношення пройденого шляху до минулого часу; таким чином, це поняття збігається з добре відомим поняттям середньої швидкості. Поняття середньої щільності, середньої потужності і т.д., які застосовуються у фізиці, також відповідають зазначеним загальним поняттям середнього значення функції.

Якщо функція $f(x)$ задана на нескінченному інтервалі, наприклад, при $\alpha \leq x < \beta$, то її середнім значенням називається

$$\bar{f} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx,$$

тобто границя середнього значення по кінцевому інтервалу. Легко перевірити, що ця границя, якщо вона існує, не залежить від вибору значення α .

Наприклад, у ланцюзі змінного струму сила струму і напруга зазвичай виражаються формулами

$$j=j_0\cos(\omega t+\alpha),$$

$$u=u_0\cos(\omega t+\alpha+\varphi),$$

де φ —стале зміщення фази напруги в порівнянні із силою струму. Тому середня споживана потужність дорівнює

$$\bar{h} = \overline{ju} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T j_0 \cos(\omega t + \alpha) u_0 \cos(\omega t + \alpha + \varphi) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{j_0 u_0}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\alpha + \varphi) + \cos \varphi] dt =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{j_0 u_0}{4\omega} \frac{\sin(2\omega T + 2\alpha + \varphi) - \sin(2\alpha + \varphi)}{T} + \frac{j_0 u_0}{2} \cos \varphi \right\} = \frac{j_0 u_0}{2} \cos \varphi$$

Звідси випливає значення величини $\cos \varphi$ в електротехніці.

Укажемо на закінчення одну нерівність, що іноді застосовується. Якщо для інтегральної суми (9.45) записати, що абсолютне значення суми не перевершує суми абсолютних значень:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k) \Delta x_k| = \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k,$$

а потім перейти до границі, то ми одержимо

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx . \quad (9.59)$$

Іншими словами, абсолютне значення інтеграла не перевершує інтеграла від абсолютного значення функції.

9.4 Числове інтегрування

12. Загальні зауваження. Описаний у п. 3 основний спосіб обчислення визначеного інтеграла за допомогою невизначеного на практиці не завжди можливий і доцільний. Як було зазначено раніше, багато невизначених інтегралів навіть від елементарних функцій не виражаються через елементарні функції або мають надмірно громіздкі вирази. Крім того, функція, яку треба проінтегрувати, може бути задана не формулою, а якось інакше. У цих випадках для обчислення інтегралів застосовується цілий ряд способів, про які ми зараз дамо загальне представлення.

1. Інтеграли можуть виражатися через добре вивчені неелементарні «спеціальні» функції.

Такими є, наприклад, функція похибок

$$\text{Erf } x = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

від англійського «error function»;

інтеграли Френеля (О. Френель, французький фізик, творець хвильової теорії світла)

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi t^2}{2} dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

інтегральна показникова функція

$$\text{Ei } x = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

інтегральний синус і інтегральний косинус

$$\text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

$$\text{Ci } x = \int_{-\infty}^x \frac{\cos t}{t} dt \quad (-\infty < x < \infty),$$

і багато інших функцій.

Наприклад, щоб обчислити інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx,$$

зробимо інтегрування по частинам

$$u = \sin^2 x, \quad dv = x^{-2} dx,$$

$$I = -\frac{\sin^2 x}{x} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2 \sin x \cos x}{x} dx = -\sin^2 1 + \int_0^1 \frac{\sin 2x}{x} dx = |2x = t| =$$

$$= -\sin^2 1 + \int_0^2 \frac{\sin t}{t} dt = -\sin^2 1 + \text{Si } 2 = 0,8973.$$

2. Іноді вдається знайти точне значення для визначеного інтеграла з тими або іншими границями, не обчислюючи

невизначений інтеграл. Це часто буває досить важко, хоча деякі приклади будуть приведені надалі.

Наприклад, у деяких джерелах ми можемо прочитати, що

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^p x dx = \frac{\pi}{2} \left(\cos \frac{p\pi}{2} \right)^{-1} \quad (-1 < p < 1). \quad \int_0^{\pi} \ln \sin x dx = -\pi \ln 2$$

і т.п., хоча відповідні невизначені інтеграли не є елементарними функціями.

3. Часто застосовуються розкладання підінтегральної функції в ряди різного вигляду. Докладний опис цього методу буде дано далі, однак прості степеневі ряди можна застосовувати вже зараз.

Наприклад, застосовуючи ряд для e^x , одержимо

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1}{x} dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{1!} + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right) dx = \frac{1}{1!} + \frac{x}{2 \cdot 2!} + \frac{x^2}{3 \cdot 3!} + \dots = 1,318 \quad (\text{з точністю до } 0,001).$$

Як говорилося раніше, до подібних рядів на практиці треба відноситися як до кінцевих сум, число членів яких береться відповідно до необхідного степеня точності.

4. *Графічне інтегрування* застосовується, якщо підінтегральна функція задана графіком. Воно засновано на геометричному змісті визначеного інтеграла (п. 2), рівного площі відповідної криволінійної трапеції.

5. Найбільш універсальними методами, придатними до інтегралів від довільних функцій, заданих будь-яким способом, особливо таблично (це, зокрема, зручно при застосуванні обчислювальних машин), є методи числового інтегрування (п. 13).

13. Формули числового інтегрування. Ці формули дають наближені значення визначеного інтеграла, якщо відомі значення підінтегральної функції в деяких точках (*вузлах*) інтервалу інтегрування.

Почнемо з найбільш простої формули. Нехай потрібно обчислити

$$\int_a^b y dx, \quad y = f(x), \tag{9.60}$$

причому передбачається, що інтервал інтегрування $a \leq x \leq b$ розбитий на деяке число n рівних частин і задані або обчислені значення підінтегральної функції в точках ділення. Позначимо

$$\frac{b-a}{n} = h. \quad f(a) = y_0, f(a+h) = y_1, f(a+2h) = y_2, \dots, f(a+nh) = f(b) = y_n.$$

Якщо провести ординати для кожного з отриманих вузлів, то криволінійна трапеція, площа якої дорівнює інтегралові (9.60), розбивається (рис. 9.10) на n стовпчиків, кожний з яких також являє собою криволінійну трапецію. Замінімо ці стовпчики прямолінійними («шкільними») трапеціями, побудованими на крайніх ординатах, як показано на рис. 9.10. Площі цих трапецій послідовно рівні

$$\frac{y_0 + y_1}{2} h, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}, \dots, h \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

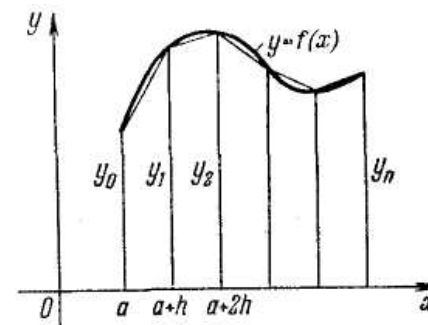


Рис.9.10.

Склавши ці площі, ми одержимо площу багатокутної фігури, яка вписана у вихідну криволінійну трапецію. Якщо n досить велике, тобто h досить мале, то ця площа приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції, тобто інтегралові, і ми одержуємо

$$\int_a^b y dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + \dots + h \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

або

$$\int_a^b y \, dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (9.61)$$

Це — так називана *формула трапецій*.

Формулі трапецій можна дати тлумачення, яке не залежить від її геометричного змісту. По суті справи, ми перед інтегруванням замінили на кожнім з інтервалів $a \leq x \leq a+h$, $a+h \leq x \leq a+2h$ і т.д. розглянуту функцію $y=f(x)$ на лінійну, яка приймає ті ж значення в кінцевих точках, тобто зробили лінійну інтерполяцію, після чого вже здійснили інтегрування. Раніше були приведені інтерполяційні формули, які дають наближення функції з набагато більшою точністю, чим при лінійній інтерполяції. Тому формули числового інтегрування, які отримані на основі цих інтерполяційних формул, є значно більш точними, ніж формула (9.61).

Якщо застосувати інтерполяційний многочлен другого степеня, то вийде *формула Симпсона*. Припустимо спочатку, що значення функції, яка інтегрується, дано в трьох точках

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_0 + h) = y_1, \quad y(x_0 + 2h) = y_2.$$

Тоді інтерполяційний многочлен другого степеня, який приймає в цих точках такі ж значення, виписується по формулі Ньютона:

$$P(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \quad (s = x - x_0).$$

Звідси для інтеграла одержуємо вираз

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x) \, dx &= \int_{x_0}^{x_0+2h} dx = \int_{0 \leq s \leq 2h} ds = \int_0^{2h} \left[y_0 + \Delta y_0 \frac{s}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \frac{s}{h} \left(\frac{s^2}{h^2} - \frac{s}{h} \right) \right] ds = \\ &= y_0 \cdot 2h + \Delta y_0 \cdot 2h + \frac{\Delta^2 y_0}{2} \cdot \frac{2}{3} h. \end{aligned}$$

якщо, далі, підставити

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

то після приведення подібних членів одержимо

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+2h} f(x) \, dx &\approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x) \, dx = \\ &= 2h \left[y_0 + (y_1 - y_0) + \frac{1}{6} (y_2 - 2y_1 + y_0) \right] = h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3}. \end{aligned}$$

Якщо тепер відрізок інтегрування $a \leq x \leq b$ розбито на $2n$ рівних частин за допомогою точок ділення

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \dots, x_{2n} = a + 2nh = b \quad \left(h = \frac{b-a}{2n} \right),$$

то до кожної пари з цих частин можна застосувати формулу (9.62)

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} y \, dx \approx h \frac{y_0 + 4y_1 + y_2}{3},$$

$$\int_{x_0+2h}^{x_0+4h} y \, dx \approx h \frac{y_2 + 4y_3 + y_4}{3}, \dots, \quad \int_{x_0+(2n-2)h}^{x_0+2nh} y \, dx \approx h \frac{y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}}{3}.$$

Склавши ці формули і привівши подібні члени, одержимо формулу Симпсона:

$$\int_a^b y \, dx \approx \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})] \quad (9.63)$$

Перейдемо тепер до оцінки точності формул (9.61) і (9.63). З формули Ньютона видно, що при здійсненні лінійної інтерполяції виходить похибка порядку $\Delta^2 y$, тобто порядку h^2 . При інтегруванні вона множиться на довжину h інтервалу інтегрування (див. формулу (9.57)), тобто здобуває порядок h^3 . Але формула (9.61) виходить у результаті додавання n наближених формул, кожна з похибкою порядку h^3 , тому сумарна похибка має порядок

$$n \cdot h^3 = \frac{b-a}{h} h^3 = (b-a) \cdot h^2,$$

тобто порядок h^2 .

Наприклад, якщо число точок ділення збільшити в два рази, то точність формули (9.61) покращиться приблизно в чотири рази.

Якщо міркувати так само про формулу (9.63), то може показатися, що її похибка має порядок h^3 . Насправді ж точність

вище. Дійсно, коли ми у формулі Ньютона відкидаємо член $\Delta^3 u$, то робимо похибку порядку h^3 ; але інтеграл від цього члена дорівнює нулеві

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} \frac{s}{h} \left(\frac{s}{h} - 1 \right) \left(\frac{s}{h} - 2 \right) dx = \int_0^{2h} \left[\left(\frac{s}{h} \right)^3 - 3 \left(\frac{s}{h} \right)^2 + 2 \frac{s}{h} \right] ds = \left(\frac{s^4}{4h^3} - \frac{3s^3}{3h^2} + \frac{2s^2}{2h} \right) \Big|_0^{2h} = 0.$$

Тому після інтегрування похибку дає тільки наступний член формули Ньютона, що має порядок h^4 . Виходить, похибка у формулі (9.62) має порядок h^5 , а в остаточній формулі (9.63) — порядок h^4 ; наприклад, якщо збільшити число точок ділення в два рази, то точність формули (9.63) покращиться в 16 разів. У той же час формула (9.63) для застосування ненабагато складніша формули (9.61). Розглянемо для приклада інтеграл

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} = 0,785.$$

Якби ми не знали відповіді, то інтеграл можна було б приблизно обчислити по формулах (9.61) або (9.63). Прийемо для простоти $n=2$, тобто

$$h=0,5, x_0=0; x_1=0,5; x_2=1; y_0=1,000; y_1=0,800; y_2=0,500.$$

Підрахунок по формулі (9.61) дає

$$I \approx 0,5 \left(\frac{1,000 + 0,500}{2} + 0,800 \right) = 0,775; \text{ похибка } \delta_{(38)} \approx 1,3\%.$$

Підрахунок по формулі (9.63) дає

$$I \approx \frac{0,5}{3} (1,000 + 0,500 + 4 \cdot 0,800) = 0,783; \text{ похибка } \delta_{(40)} \approx 0,3\%$$

Відзначимо, що іноді застосовуються формули з нерівновіддаленими вузлами.

9.5. Невласні інтеграли

Дотепер при розгляді визначених інтегралів ми вважали, що інтервал інтегрування кінцевий і що підінтегральна функція на ньому не обертається в нескінченність; такі інтеграли ми будемо називати *інтегралами у власному змісті слова* або, коротко, *власними*. Якщо хоча б одна з цих двох умов не виконана, то інтеграл називається *невласним*. Власний інтеграл (див. п. 2) завжди має визначене числове значення. На відміну від цього

невласні інтеграли, до яких ми зараз переходимо, не усі мають таке значення.

14. Інтеграл з нескінченною границею інтегрування.

Розглянемо спочатку інтеграл вигляду

$$I = \int_a^{\infty} f(x) dx, \quad (9.64)$$

де нижня границя a і підінтегральна функція $f(x)$ при $a \leq x < \infty$ передбачаються кінцевими. Такий інтеграл є невластним через те, що його верхня границя нескінченна.

Щоб придати точний зміст інтегралові (9.64), користуються тим же прийомом, за допомогою якого раніше було уточнене поняття суми нескінченного ряду. А саме, спочатку «відрізають» нескінченність, тобто розглядають інтеграл

$$\int_a^N f(x) dx, \quad (9.65)$$

де N -велике, але кінцеве число. Інтеграл (9.65) власний і має визначене числове значення. Потім приймають, що N прагне до нескінченності, тобто до того, чому воно повинно дорівнювати для інтеграла (9.64). При $N \rightarrow \infty$ інтеграл (9.65) якось міняється; якщо він має при цьому визначену кінцеву границю, то інтеграл (9.64) називають таким, що *сходиться і покладають*

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx. \quad (9.66)$$

Якщо кінцевої границі немає, то інтеграл (9.64) називається *розбіжним*; у цьому випадку визначеного числового значення ми йому приписувати не будемо. Отже, ми приймаємо, що невластний інтеграл має визначене числове значення тільки у тому випадку, якщо він *збіжний*.

Відзначимо окремий випадок розбіжності: якщо інтеграл (9.65) при $N \rightarrow \infty$ має нескінченну границю, то інтеграл (9.64) називається *розбіжним до нескінченності*; у цьому випадку можна користуватися формулою (9.66).

Розглянемо кілька прикладів. Нехай на точку T діє сила, спрямована до деякої фіксованої точки O і по модулю зворотно пропорційна квадратові відстані від O ; так поведуться, зокрема, гравітаційна й електростатична сили. Нехай при цьому потрібно

знайти роботу, яку треба затратити, щоб віддалити точку T з деякого положення T_0 на нескінченність; ця робота називається *потенціалом* розглядаємої сили.

Для її підрахунку запишемо силу

$$F = k/s^2 \quad (s = OT),$$

де k — деякий коефіцієнт пропорційності, і роботу

$$A = \int_{s_0}^{\infty} \frac{k}{s^2} ds \quad (9.67)$$

(див. п. 6). Це невластний інтеграл, і по формулі (9.66)

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{s_0}^N \frac{k}{s^2} ds = \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{k}{s} \Big|_{s=s_0}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{s_0} - \frac{k}{N} \right) = \frac{k}{s_0}.$$

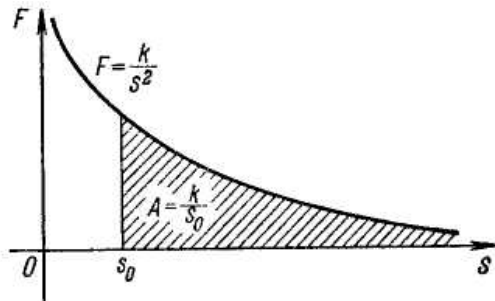


Рис. 9.11.

Отже, інтеграл (9.67) сходиться, і ми одержуємо, що розглянутий потенціал зворотно пропорційний першого степеня відстані від точки 0 . Спочатку може показатися дивним, що при віддаленні на нескінченну відстань виходить кінцева робота, хоча сила теоретично ніколи не припиняє своєї дії. Але справа в тім, що ця сила при віддаленні так слабшає, що затрачувана робота, хоча увесь час і наростає, але прагне не до нескінченності, а до кінцевої величини. Геометричний зміст отриманого результату показано на рис. 9.11: незважаючи на те, що заштрихована фігура простирається в нескінченність, її висота убуває з такою швидкістю, що загальна її площа виявляється кінцевою. Реально s змінюється не до нескінченності, так як усі фізичні величини кінцеві, а до якогось дуже великого, але кінцевого значення S , тобто замість (9.67) треба розглядати інтеграл

$$\int_{s_0}^S \frac{k}{s^2} ds \quad (9.68)$$

Однак для досить великих S цей інтеграл практично не міняється, так що його можна замінити на «граничний» інтеграл (9.67), що простіше в теоретичних дослідженнях, тим більше, що значення S точно не відомо. Збіжність інтеграла (9.67) і означає можливість заміни «реального» інтеграла (9.68) при великих S на інтеграл (9.67); фізично це значить, що на великому віддаленні від точки 0 її дією можна практично знехотити. При такій заміні точно знати S і не потрібно, важливо тільки знати, що S велике.

Як другий приклад розглянемо невластний, інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \quad (9.69)$$

так як
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N = \ln \infty = \infty,$$

то інтеграл (9.69) розходиться до нескінченності і можна написати

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty.$$

Розглянемо, нарешті, невластний інтеграл

$$\int_0^{\infty} \sin x dx \quad (9.70)$$

У даному випадку границя

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_0^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 - \cos N)$$

не існує ні кінцева, ні нескінченна, так як $\cos N$ при $N \rightarrow \infty$ увесь час коливається між $+1$ і -1 . Значить інтеграл (9.70) розходиться, але не до нескінченності, а коливаючись між кінцевими значеннями 0 і 2 . Він не має ні кінцевого, ні нескінченного значень.

15. Основні властивості інтегралів з нескінченною границею інтегрування. На невластні інтеграли вигляду (9.64) безпосередньо поширюються багато властивостей власних інтегралів.

Насамперед, якщо при $a \leq x < \infty$ відома первісна функція $F(x)$ до $f(x)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} [F(N) - F(a)] = F(\infty) - f(a),$$

так як під $F(\infty)$ саме і розуміється $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N)$. Виходить, невластний інтеграл (9.64) можна обчислювати по тій же основній формулі (9.16), що і власні інтеграли. При цьому саме вираз $F(\infty)$ покаже, сходиться інтеграл або розходиться.

Так, у прикладах (9.64), (9.69) і (9.70) можна було обчислювати просто:

$$\int_{s_0}^{\infty} \frac{k}{s^2} ds = -\frac{k}{s} \Big|_{s=s_0}^{\infty} = \frac{k}{s_0} - \frac{k}{\infty} = \frac{k}{s_0},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\infty} = -\cos \infty + 1 \text{ не існує,}$$

так як вираз $\cos \infty$ не має змісту.

Всі основні властивості п. 4 зберігаються і для невластних інтегралів, зазвичай, якщо мати на увазі ускладнення, що виходять у випадку розбіжності інтегралів. У той же час формули (9.57) і (9.58) тут уже не діють, так як *інтеграл від константи, яка не дорівнює нулеві, по нескінченному інтервалу завжди розходиться*. Відзначимо ще таку просту властивість: якщо інтеграл (9.64) сходиться, то при $N \rightarrow \infty$

$$\int_N^{\infty} f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx - \int_a^N f(x) dx \rightarrow 0.$$

Якщо невизначений інтеграл узяти важко, то, зазвичай, починають із з'ясування його збіжності або розбіжності на основі ознак, до яких ми зараз переходимо.

Помітимо насамперед, що факт збіжності або розбіжності інтеграла (9.70) залежить тільки від поведінки функції $f(x)$ на

нескінченності, тобто при досить великих x . Іншими словами, інтеграли

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{і} \quad \int_b^{\infty} f(x) dx$$

сходяться або розходяться одночасно, якщо $f(x)$ між a і b не обертається в нескінченність. Дійсно, ці інтеграли відрізняються на власний інтеграл, що має цілком визначене числове значення і не може порушити збіжність, якщо вона була, і створити збіжність, якщо її не було.

Розглянемо спочатку *інтеграл від додатної функції*

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad f(x) \geq 0. \quad (9.71)$$

Такий інтеграл може або сходиться, або розходиться до нескінченності, так як інтеграл, узятий від a до N , з ростом N росте, а зростаюча величина має кінцеву границю або прагне до нескінченності. Ця збіжність або розбіжність означає геометрично, що площа нескінченної фігури, яка заштрихована рис.9.12, вийде кінцевою або нескінченною. Факт збіжності або розбіжності інтеграла (9.71) можна записати так:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx < \infty \quad \text{або} \quad \text{відповідно} \quad \int_a^{\infty} f(x) dx = 0.$$

Зазвичай, такий запис не можна застосовувати стосовно розбіжних коливних інтегралів типу (9.70).

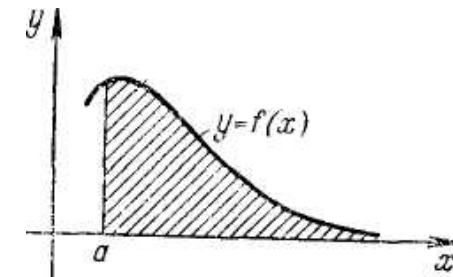


Рис. 9.12

Найпростішою ознакою збіжності є *ознака порівняння*: якщо

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad (a \leq x < \infty) \quad (9.72)$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx < \infty,$$

тобто цей інтеграл сходиться, то і

$$\int_a^{\infty} g(x) dx < \infty,$$

тобто і цей інтеграл сходиться.

Ця ознака випливає з інтегрування нерівності (9.72) або з геометричного змісту збіжності (див. рис. 9.12). З цієї ознаки випливає, що якщо в умовах (9.72) інтеграл від $g(x)$ розходиться (дорівнює нескінченності), то інтеграл від $f(x)$ теж розходиться.

Застосовується також наступна ознака: якщо

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} k \neq 0, \quad k \neq \infty, \quad (9.73)$$

то інтеграли

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{і} \quad \int_b^{\infty} g(x) dx$$

сходяться або розходяться одночасно (хоча у випадку збіжності їх значення можуть істотно розрізнятися, навіть якщо $k=1$ і $a=b$). Дійсно, з умови (9.73) випливає, що на нескінченності обидві функції, $f(x)$ і $g(x)$, не можуть істотно перевершити одна іншу, точніше кажучи, $f(x) \sim kg(x)$ при $x \rightarrow \infty$, де \sim - знак еквівалентності. Тому, якщо для однієї з них заштрихована фігура на рис. 9.12 має кінцеву площу, то і для іншої теж.

Найчастіше заданий інтеграл вигляду (9.71) порівнюють з інтегралом від степеневі функції

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx, \quad (9.74)$$

який легко досліджувати безпосередньо. При $p > 1$ маємо

$$I = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \frac{1}{(-p+1)x^{p-1}} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1} < \infty,$$

тоді як при $p < 1$

$$I = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} = \left. \frac{x^{1-p}}{1-p} \right|_1^{\infty} = \infty - \frac{1}{1-p} = \infty,$$

нарешті, при $p = 1$

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \ln x \Big|_1^{\infty} = \ln \infty - \ln 1 = \infty.$$

Отже, інтеграл (9.74) сходиться при $p > 1$ і розходиться до нескінченності при $p \leq 1$. Звідси в силу ознаки (9.73) можна зробити той же висновок про інтеграл (9.71), якщо

$$f(x) \sim \frac{A}{x^p} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty.$$

Наприклад,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \infty, \quad \text{так як} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{1+x^{-2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}};$$

$$p = \frac{2}{3} < 1;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} < \infty, \quad \text{так як} \quad \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}; \quad p = \frac{3}{2} > 1 \quad (9.75)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} < \infty, \quad \text{так як експонента на нескінченності прагне до нуля}$$

швидше будь-якої степеневі функції і можна застосувати ознаку порівняння (9.72).

Перейдемо тепер до інтегралів від функції будь-якого знака

$$\int_a^{\infty} f(x) dx, \quad f(x) > 0, \quad f(x) < 0. \quad (9.76)$$

Тут ми доведемо тільки одну ознаку: якщо

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \quad (9.77)$$

то інтеграл (9.76) сходиться; у цьому випадку він називається абсолютно збіжним, а функція $f(x)$ називається абсолютно

інтегруємою на інтервалі $a \leq x < \infty$.

Для доведення варто увести функції $f^+(x)$ і $f^-(x)$ - додатну і від'ємну частини функції $f(x)$, які зображені на рис. 9.13 і визначаються в такий спосіб:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{для тих } x, \text{ для котрих } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{для тих } x, \text{ для котрих } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{для тих } x, \text{ для котрих } f(x) \geq 0, \\ |f(x)| & \text{для тих } x, \text{ для котрих } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x),$$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \quad (9.78)$$

Тоді можна написати

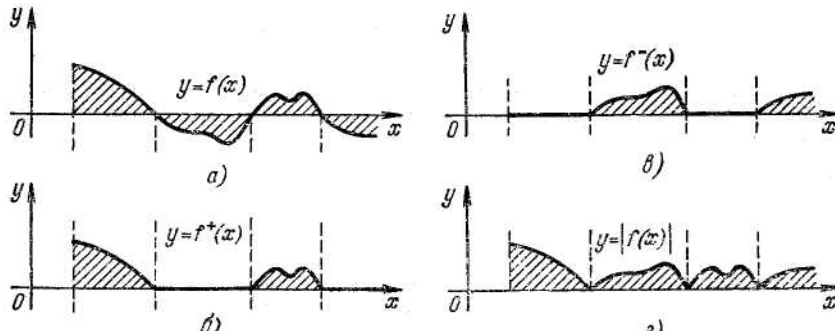


Рис. 9.13.

Якщо умова (9.77) задана, то площа, яка заштрихована на рис. 9.13, з, кінцева. Виходить, кінцеві і площі, які заштриховані на рис. 9.13, б і в, а так як $f^+(x) \geq 0$ і $f^-(x) \geq 0$, то невластні інтеграли від цих функцій сходяться. Але тепер у силу рівності (9.78) і інтеграл (9.76.) сходиться, що і потрібно було довести; більш точно,

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^\infty f^+(x) dx - \int_a^\infty f^-(x) dx.$$

Може вийти, що інтеграл (9.77) розходиться, тобто дорівнює нескінченності, тоді як інтеграл (9.76) сходиться; це — неабсолютна збіжність. У цьому випадку площі, заштриховані на рис. 9.13, б і в, нескінченні, але «збалансовані» так, що якщо на

рис. 9.13,а враховувати знак площі, то нескінченності взаємно знищуються і залишиться кінцевий результат. Наприклад, інтеграл

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (9.79)$$

сходиться абсолютно, так як

$$\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

і тому інтеграл від абсолютної величини можна порівняти з інтегралом (9.74) при $p = 2$. Якщо виконати те ж з інтегралом

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad (9.80)$$

то вийде інтеграл (9.74) при $p=1$, тобто розбіжний. Тоді ознаку порівняння (див. нерівність (9.72)) безпосередньо застосувати не можна. Усе-таки можна довести, що

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \int_1^\infty |\sin x| \frac{1}{x} dx = \infty,$$

так як перший множник періодично коливається біля додатного середнього значення. У той же час інтеграл (9.80) сходиться, так як після інтегрування по частинам

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \left. \frac{1}{x} = u, \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \right|_1^\infty = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

а отриманий інтеграл того ж типу, що і (9.79), і тому сходиться. Отже, інтеграл (9.80) сходиться неабсолютно.

Усе викладене безпосередньо переноситься на інтеграли від комплексних функцій дійсного аргументу, а також на інтеграли вигляду

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad (9.81)$$

які визначаються за допомогою співвідношення

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \quad \lim_{-M \rightarrow -\infty} \int_{-M}^b f(x) dx,$$

(утім, від інтеграла (9.81) легко перейти до інтеграла вигляду (9.64) за допомогою підстановки $x = -y$).

16. Невласні інтеграли інших виглядів. Розглянемо тепер невластний інтеграл вигляду

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (9.82)$$

для якого границі інтегрування кінцеві, але підінтегральна функція перестає бути кінцевою на одній з цих границь, наприклад, при $x \rightarrow a$. Щоб придати такому інтегралові зміст, небезпечний кінець відрізають, після чого переходять до границі:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Як і в п. 14, якщо кінцевої границі немає, то говорять, що інтеграл (9.82) розходиться.

Усі властивості п.15 безпосередньо переносяться і на такі інтеграли. Єдина відмінність виникає при розгляді інтегралів від степеневих функцій. Замість інтеграла (9.74) треба розглянути інтеграл

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx. \quad (9.83)$$

Легко перевірити, що інтеграл (9.83) сходиться при $p < 1$ і розходиться при $p \geq 1$.

Аналогічно розглядається інтеграл (9.82), для якого підінтегральна функція перестає бути кінцевою на верхній границі інтегрування.

Точки на інтервалі інтегрування, у яких підінтегральна функція перестає бути кінцевою, а також нескінченні кінці інтервалу інтегрування, називаються *особливостями* невластного інтеграла, який розглядається.

Дотепер ми говорили про інтеграли з єдиною особливістю, яка лежить в кінці інтервалу інтегрування. Якщо особливість знаходиться усередині інтервалу інтегрування або якщо особливостей декілька, то інтегралові додають зміст за наступною схемою.

Нехай розглядається інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (9.84)$$

для якого підінтегральна функція перестає бути кінцевою в точках a , c і d , тобто інтеграл (9.84) має три особливості (на рис. 9.14 вони зображені кружечками).

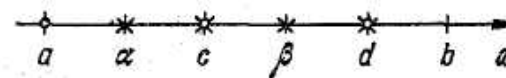


Рис. 9.14.

Тоді за допомогою точок ділення (на рис.9.14 вони зображені зірочками) розбивають інтервал інтегрування на частини так, щоб на кожній була тільки одна особливість і притім наприкінці цієї частини; у розглянутому прикладі таких частин п'ять: $a\alpha$, αc , $c\beta$, βd , db . Якщо кожний з інтегралів

$$\int_a^\alpha f(x)dx, \int_\alpha^c f(x)dx, \int_c^\beta f(x)dx, \int_\beta^d f(x)dx, \int_d^b f(x)dx, \quad (9.85)$$

сходиться, то й інтеграл (9.84) вважається таким, що сходиться і рівним сумі всіх інтегралів (9.85). Якщо ж хоча б один з інтегралів (9.85) розходиться, то й інтеграл (9.84) вважається розбіжним і числового значення не має.

За описаною схемою визначається, зокрема, інтеграл вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$

де функція $f(x)$ кінцева; тут потрібна одна точка ділення.

До кожного з інтегралів (9.85) можна застосувати ознаки, які описані в п.15 і 16. Зокрема, якщо

$$\int_a^b |f(x)|dx < \infty,$$

то інтеграл (9.84) обов'язково сходиться; у цьому випадку він називається абсолютно збіжним, а функція $f(x)$ — *абсолютно інтегруємою на інтервалі a, b* .

Зупинимося окремо на інтегралі з двома особливостями, що лежать в обох кінцях інтервалу інтегрування. Якщо при цьому до

підінтегральної функції $f(x)$ удається знайти первісну $F(x)$, то обчислення інтеграла можна робити в такий спосіб:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^\alpha f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\alpha^{b-\varepsilon} f(x)dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(\alpha) - F(a + \varepsilon)] + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [F(b - \varepsilon) - F(\alpha)] = F(b - 0) - F(a + 0) \quad (9.85)$$

Таким чином, у цьому випадку для обчислення визначеного інтеграла можна користуватися, зазвичай, формулою (9.16), причому якщо підстановка границь у первісну дасть кінцевий результат, то інтеграл сходиться. Якщо інтеграл (9.84) має особливість усередині інтервалу інтегрування, наприклад у точці $x=c$, і відома первісна $F(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = [F(c-0) - F(a)] + [F(b) - F(c+0)] = F(b) - F(a) + [F(c-0) - F(c+0)] \quad (9.86)$$

Виходить, якщо первісна не має розриву, тобто якщо $F(c-0)=F(c+0)$,

то при обчисленні інтеграла можна користуватися, зазвичай, формулою (9.16). Якщо первісна має стрибки, то треба робити виправлення на ці стрибки подібно (9.86). Якщо ж первісна має на інтервалі інтегрування розриви більш складного вигляду, зокрема, якщо вона обертається в нескінченність, то інтеграл розходиться. Ці правила справедливі при будь-якому числі особливостей.

Наприклад, інтеграл

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

можна обчислити так:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-1}^2 x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_{-1}^2 = \frac{3}{2} \left(2^{\frac{2}{3}} - 1 \right) = 0,881,$$

так як в даному випадку первісна, яка пропорційна $x^{\frac{2}{3}}$, безперервна і тому інтеграл сходиться. У той же час останній приклад у п. 4 був розрахований невірно, так як там первісна, тобто $-(1/x)$, оберталася в нескінченність на інтервалі інтегрування при $x=0$ і тому інтеграл розходився.

При обчисленні невластних інтегралів широко застосовуються розкладання в ряди різного вигляду. Якщо таке розкладання гарно діє тільки поблизу особливості, то заданий інтеграл представляють у вигляді суми власного і невластного, узятого по інтервалу біля особливості; перші обчислюють методами, які розглянуті в 9.5, а другий розкладають у ряд. Наприклад, для обчислення інтеграла (9.75) можна зробити так:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_a^\infty x^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \int_a^\infty \left(x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} x^{-\frac{9}{2}} + \frac{3}{8} x^{-\frac{15}{2}} - \dots \right) dx = \quad (9.87)$$

$$= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{1}{7\sqrt{a^7}} + \frac{3}{52\sqrt{a^{13}}} - \dots \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} + S.$$

при цьому для розкладання підінтегральної функції ми скористалися формулою бінома Ньютона. Тут $a > 0$ - довільне число; але якщо a взяти занадто великим, то буде важко обчислити останній інтеграл, а якщо занадто маленьким, то буде погано з поруч стоячим.

Візьмемо $a=2$ і підрахуємо останній інтеграл по формулі Симпсона (п.13), розбивши інтервал інтегрування на вісім частин. Тоді одержимо

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = 1,402; \quad S = 1,402,$$

і тим самим інтеграл (9.75) дорівнює 2,804.

Для розбіжного інтеграла, наприклад, вигляду (9.64) може виникнути питання про більш точну характеристику поведінки

його «кінцевої частини» (9.65), тобто при $N \rightarrow \infty$. Для з'ясування цього також застосовуються розкладання в ряди.

Наприклад,

$$\begin{aligned} \int_0^N \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N x^{-\frac{2}{3}} (1+x^{-2})^{-\frac{1}{3}} dx = \\ &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} + \int_a^N \left(x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{8}{3}} + \frac{2}{9} x^{-\frac{14}{3}} - \dots \right) dx = \\ &= 3N^{\frac{1}{3}} + C + \frac{1}{5} N^{-\frac{5}{3}} - \frac{2}{33} N^{-\frac{11}{3}} + \dots, \end{aligned}$$

де

$$C = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} - 3a^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5} a^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{33} a^{-\frac{11}{3}} - \dots$$

— стала, котру можна обчислити, як у попередньому прикладі.

Аналогічне питання може виникнути для інтеграла, що сходитьсь. Так, міркуючи як при обчисленнях (9.87), одержимо

$$\int_0^N \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} - \int_N^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}} = 2,804 - \frac{2}{\sqrt{N}} + \frac{1}{7\sqrt{N^7}} + \dots;$$

інтегруючи по частинам, знайдемо

$$\begin{aligned} \int_0^N e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_N^\infty \frac{1}{2x} \cdot 2xe^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx + \frac{1}{2x} e^{-x^2} \Big|_N^\infty + \frac{1}{2} \int_N^\infty \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx - \frac{1}{2N} e^{-N^2} + \text{величина порядку } \frac{1}{N^3} e^{-N^2}. \end{aligned}$$

Те, що отриманий інтеграл має зазначений порядок, легко довести за допомогою правила Лопітала; для уточнення розкладання можна застосувати повторне інтегрування по частинам.

17. Гамма-функція. Як важливий приклад невластного інтеграла розглянемо неелементарну «гамма-функцію», уведено Ейлером

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx. \tag{9.88}$$

Цей інтеграл називається також *Ейлеровим інтегралом другого роду*.

Інтеграл (9.88) невластний уже через нескінченну верхню границю. Однак, так як e^{-x} при $x \rightarrow \infty$ прагне до нуля швидше будь-якого степеня x , то на верхній границі інтеграл (9.88) сходитьсь. Якщо $p < 1$, то інтеграл (9.88) має особливість і при $x=0$. Так як $e^{-x} x^{p-1} \sim 1/x^{1-p}$ при $x \rightarrow \infty$, то в силу початку п. 16 інтеграл (9.88) сходитьсь при $1-p < 1$, тобто при $p > 0$, і розходитьсь при $1-p \geq 1$, тобто при $p \leq 0$. Отже, формулу (9.88) треба розглядати при $0 < p < \infty$.

Для виводу основної властивості гамма-функції зробимо інтегрування по частинам:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(p+1)-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^p dx = -e^{-x} x^p \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} p x^{p-1} dx.$$

Член, що виділився, дорівнює нулеві на обох границях, і ми одержуємо

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \tag{9.89}$$

Легко обчислити, далі,

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{1-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1.$$

Якщо тепер у формулу (9.89) підставляти послідовно $p=1, 2, 3, \dots$, ми одержимо

$\Gamma(2)=1 \cdot \Gamma(1)=1$; $\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2 \cdot 1$; $\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3 \cdot 2 \cdot 1$ і т.д.; Узагалі

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n=1, 2, 3, \dots) \tag{9.90}$$

Якщо прочитати формулу (9.90) зправа наліво, то ми бачимо, що гамма-функція дає представлення факторіала. У той же час вона має сенс і для нецілих значень аргументу і тим самим продовжує факторіальну функцію з дискретних значень аргументу на безперервні. Графік цієї функції зображено на рис. 9.15; на ньому, зокрема, показана рівність $\Gamma(+0) = +\infty$, що впливає з формули (9.89).

З формули (9.90) видно, зокрема, що $0! = \Gamma(1) = 1$.

Далі,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 1,772;$$

це значення буде виведене в п.18 (формула (9.94)). Звідси

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0,886;$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{2} = 1,329 \quad \text{і т.д.}$$

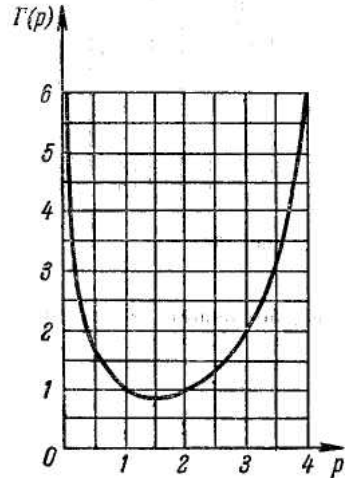


Рис. 9.15.

Гамма-функція визначається і при від'ємних значеннях аргументу. Користуватися формулою (9.88) при цьому не можна, так як інтеграл розходиться. Однак можна застосувати формулу (9.89), переписавши її у вигляді

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}. \tag{9.91}$$

Якщо $-1 < p < 0$, то $0 < p+1 < 1$, і тому права частина має сенс, чим і визначається значення $\Gamma(p)$ при таких p ; відзначимо, що вийде $\Gamma(p) < 0$. Якщо, далі, $-2 < p < -1$, то $-1 < p+1 < 0$, і тому права частина рівності (9.91) уже визначена, чим визначається і ліва, причому $\Gamma(p) > 0$. Потім визначаємо $\Gamma(p)$ при $-3 < p < -2$ і т.д. Тим самим $\Gamma(p)$ визначиться для p будь-якого знака, причому для всіх p має місце формула (9.89). З формули (9.91) видно також, послідовно, що

$$\Gamma(0) = \pm \infty, \Gamma(-1) = \pm \infty, \Gamma(-2) = \pm \infty \quad \text{і т.д.}$$

Графік гамма-функції при від'ємних значеннях аргументу показано на рис. 9.16.

18. Бета-функція. Бета-функція, або Ейлерів інтеграл першого роду, визначається формулою

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx. \tag{9.92}$$

При цьому повинно бути $p > 0$ і $q > 0$, так як в протилежному випадку інтеграл розходиться на нижній або на верхній границі. Відзначимо, що невизначений інтеграл (9.92) береться елементарно тільки для спеціальних комбінацій показників p і q .

Як буде виведено далі, бета-функція виражається через гамма-функцію по формулі

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.93}$$

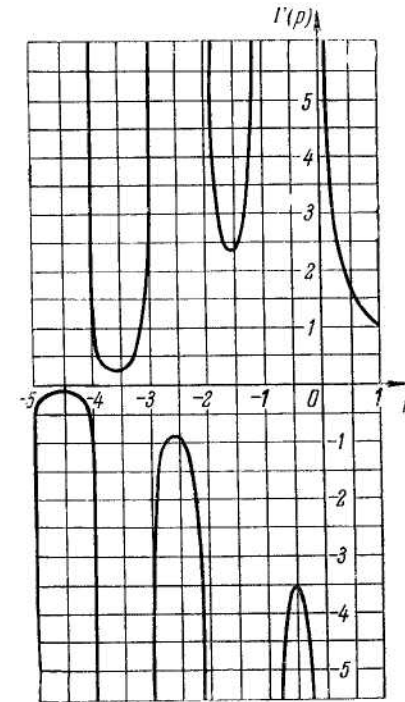


рис. 9.16.

З цієї формули випливає цікавий наслідок: поклавши $p=q=1/2$, одержимо

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(1-2x)^2}} =$$

$$= -\arcsin(1-2x) \Big|_0^1 = \pi,$$

а так як $\Gamma(p) > 0$ при $p > 0$, то

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (9.94)$$

Звідси у свою чергу можна вивести значення важливого інтеграла

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \left| x = \sqrt{t} \right| = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (9.95)$$

Через бета- і тим самим через гамма-функцію виражаються багато визначених інтегралів, для яких невизначені інтеграли при довільних показниках не беруться в елементарних функціях, наприклад,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx = \left| \sin x = \sqrt{t} \right| = \int_0^1 \frac{1}{2} t^{\frac{p-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \quad (p > -1);$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^{p+q}} dx = \left| x = \frac{y}{1-y} \right| = \int_0^1 \frac{y^{p-1}(1-y)^{p+q}}{(1-y)^{p-1}(1-y)^2} dy = \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{p-1} dy = \quad (9.96)$$

$$= B(p, q) \quad (p > 0, q > 0);$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^p)^q} = \left| x = y^{\frac{1}{p}} \right| = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{y^{\frac{1}{p}-1}}{(1-y)^q} dy = \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, q - \frac{1}{p}\right) \quad (p > 0, qp > 1) \quad (9.97)$$

(див.(9.96))іт.д.Зокрема, з (9.97) одержуємо значення інтеграла (9.75):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2,676 \cdot 5,566}{3\sqrt{\pi}} = 2,804$$

19. Головне значення розбіжного інтеграла. У деяких випадках, зокрема при дослідженні суцільних середовищ, виявляється доцільним окремим розбіжним інтегралам приписувати в деякому умовному змісті числове значення. Це можна зробити різними способами. Коші запропонував робити це так. Нехай інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx \quad (9.98)$$

має єдину особливість *усередині* інтервалу інтегрування в точці $x=c$. Тоді цю особливість *симетрично* вирізають, після чого переходять до границі, тобто покладають

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (9.99)$$

Така границя може існувати й у тому випадку, якщо інтеграл (9.98) у звичайному розумінні (п.16) розходиться. Тоді границя (9.99) називається *головним значенням* інтеграла (9.98), що позначається буквами *v. p.* (від англійського *value principal*, *головне значення*) при знаку інтеграла, а сам інтеграл часто називають *сингулярним*, на відміну від власних або невластних інтегралів, що сходяться, які (ті й інші) *називають регулярними*. Подібним чином головним значенням інтеграла, узятого по всій числовій осі, називається границя

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx$$

Наприклад, інтеграл $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx$ розходиться, так як *первісна* функція, тобто $\ln|x|$, має нескінченний розрив на інтервалі інтегрування при $x=0$. У той же час *головне значення*

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^2 \frac{1}{x} dx \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^2 \right] = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\ln \varepsilon - \ln 1 + \ln 2 - \ln \varepsilon] = \ln 2 = 0,693 \end{aligned}$$

існує, так як небезпечні доданки $\pm \ln \varepsilon$ взаємно знищуються до переходу до границі. Інший приклад:

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N \sin x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (-\cos x) \Big|_{-N}^N = \lim_{N \rightarrow \infty} [-\cos N + \cos N] = 0,$$

тобто і тут головне значення інтеграла існує, хоча сам інтеграл розходиться і тому є сингулярним.

Зазвичай, далеко не всі розбіжні інтеграли мають головне значення.

8.6. Інтеграли, що залежать від параметра

20. Власні інтеграли. Розглянемо інтеграл вигляду

$$I = \int_a^b f(x; \lambda) dx \tag{9.100}$$

де під знак інтеграла, крім змінної інтегрування x , входить *параметр* (довільна стала) λ , тобто величина, яка у процесі інтегрування вважається сталою, але взагалі може приймати різні значення. Тоді і результат інтегрування, узагалі говорячи, залежить від λ , тобто $I=I(\lambda)$. Такі інтеграли часто зустрічаються в додатках, коли функція, яка інтегрується, містить у собі які-небудь маси, розміри і т.п., які у процесі інтегрування є сталими. Ми для простоти будемо вважати, що підінтегральна функція містить тільки один параметр, хоча результати виходять аналогічними при будь-якому числі параметрів. Приведемо кілька формальних прикладів:

$$\int_0^1 (x^2 + \lambda x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\lambda}{2}; \int_0^{\pi} \sin \alpha x dx = \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha}; \int_0^1 (s+1)x^s dx = 1 \quad (s > -1)$$

Ми будемо вважати тут інтеграл (9.100) власним, тобто границі інтегрування і підінтегральну функцію кінцевими, і розглянемо деякі його властивості.

1. Якщо підінтегральна функція при $a \leq x \leq b$ залежить від λ безперервно, то й інтеграл I залежить від λ безперервно. Це

впливає, наприклад, з геометричного змісту інтеграла як площі криволінійної трапеції: якщо при нескінченно малому зміні λ криволінійна сторона трапеції зміниться нескінченно мало, то і площа зміниться нескінченно мало.

Відзначимо, що при цьому функція I не зобов'язана залежати від x безперервно; вона може мати кінцеві розриви.

Буває, що і границі інтегрування залежать від параметра:

$$I(\lambda) = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f(x; \lambda) dx \tag{9.101}$$

Тоді для безперервності $I(\lambda)$ треба додатково зажадати, щоб функції $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ не мали розривів.

2. *Правило Лейбница: можливе диференціювання по параметру під знаком інтеграла* (9.100); іншими словами,

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b f'(x; \lambda) dx \tag{9.102}$$

Справа в тому, що інтеграл (9.100) є аналогом суми досить великого числа доданків (п. 2), кожен з яких залежить від λ , а диференціювання під знаком суми можливе, так як похідна суми дорівнює сумі похідних.

Формула (9.102) розуміється в найпростішому змісті, якщо не тільки інтеграл (9.100) власний, але й інтеграл (9.102) власний, або невласний, але такий, що сходиться. Буває, що інтеграл (9.102) розходиться: тоді формула (9.102) усе-таки справедлива, але в деякому узагальненому змісті, про що мова буде іти в п. 27.

При диференціюванні інтеграла (9.101) треба врахувати, що λ у праву частину входить тричі, так що треба користуватися формулою для похідної складеної функції, а також формулами для похідної від інтеграла по верхній і нижній границях (п. 4). Вийде

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_{a(\lambda)}^{b(\lambda)} f'(x; \lambda) dx + f(b(\lambda); \lambda)b'(\lambda) - f(a(\lambda); \lambda)a'(\lambda) \tag{9.103}$$

3. *Можливе інтегрування по параметру під знаком інтеграла* (9.100):

$$\int_a^{\beta} I(\lambda) d\lambda = \int_a^{\beta} \left(\int_a^b f(x; \lambda) d\lambda \right) dx$$

Це обґрунтовується так само, як властивість 2.

21. Невласні інтеграли. Ми розглянемо інтеграл вигляду

$$I(\lambda) = \int_a^{\infty} f(x; \lambda) dx, \quad (9.104)$$

який не має особливостей при кінцевих x ; властивості невластних інтегралів інших виглядів (п.16) аналогічні. Зазвичай, насамперед треба вимагати, щоб інтеграл (9.104) схилювався. Однак у порівнянні з п. 20 ми зіштовхуємося з наступною новою обставиною: *навіть якщо функція f безперервно залежить від λ , залежність інтеграла від λ може вийти розривною*. Це зв'язано з тим, що нескінченно мала зміна функції на нескінченно великій ділянці інтегрування може привести до кінцевої зміни інтеграла.

Наприклад, далі буде показано, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Звідси відразу випливає, що при $\lambda > 0$

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin s}{s} ds = \frac{\pi}{2}.$$

У той же час при $\lambda=0$ виходить $I=0$, а при $\lambda < 0$

$$I(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{\sin |\lambda|x}{x} dx = -\int_0^{\infty} \frac{\sin |\lambda|x}{x} dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Отже, у даному прикладі $I(\lambda)$ при $\lambda=0$ має стрибок. Це може показатися дивним, тому що невластний інтеграл виходить як границя власних

$$I(\lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{\sin \lambda x}{x} dx,$$

а кожен власний інтеграл залежить від λ безперервно. Але справа в тім, що *границя безперервних функцій*, як ми зараз побачимо, *не зобов'язана бути безперервною функцією*.

На рис. 9.17 показано графіки функцій

$$I_N(\lambda) = \int_0^N \frac{\sin \lambda x}{x} dx$$

при малому і при великому N . Хоча ці функції і безперервні, але при великому N перехід від $-\pi/2$ до $+\pi/2$ відбувається на малому інтервалі λ , причому чим більше N , тим цей інтервал менше. У границі, при $N=\infty$, цей перехід здійснюється на нескінченно малому інтервалі λ , тобто з'являється розрив.

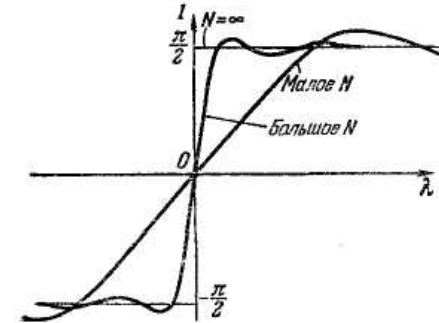


Рис. 9.17.

Можливість таких розривів ускладнює дослідження інтегралів вигляду (9.104), зокрема, застосування властивостей 2 і 3 з п. 20. Тому іноді замість (9.104) приходиться розглядати інтеграл по кінцевому інтервалу, від a до N , а потім переходити до границі при $N \rightarrow \infty$. Проте, як ми зараз покажемо, є важливий окремий випадок, коли такі розриви неможливі.

Назвемо інтеграл (9.104) *правильно збіжним*, якщо при всіх розглянутих значеннях λ

$$|f(x; \lambda)| \leq \varphi(x) \quad (a \leq x < \infty), \quad \text{де} \quad \int_a^{\infty} \varphi(x) dx < \infty. \quad (9.105)$$

Наприклад, інтеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin \lambda x}{x^2} dx$$

сходиться правильно, так як

$$\left| \frac{\sin \lambda x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1 < \infty.$$

Відносно правильно збіжного інтеграла (9.104) можна стверджувати, що якщо підінтегральна функція залежить від λ безперервно, то і інтеграл I залежить від λ безперервно. Дійсно, цей інтеграл можна представити у вигляді

$$I(\lambda) = \int_a^N f(x; \lambda) dx + \int_N^\infty f(x; \lambda) dx.$$

Тут перший доданок, як власний інтеграл, залежить від λ безперервно, тоді як другий можна оцінити так:

$$\left| \int_N^\infty f(x; \lambda) dx \right| \leq \int_N^\infty |f(x; \lambda)| dx \leq \int_N^\infty \varphi(x) dx,$$

і в силу умови (9.105) цей інтеграл при досить великому N буде досить малий відразу для всіх значень λ (п.15). Тому малій змінній λ відповідає мала зміна і всієї суми $I(\lambda)$, що й означає безперервну залежність I від λ .

Властивості правильно збіжних інтегралів цілком аналогічні властивостям власних інтегралів, описаним у п. 20.

9.7. Криволінійні інтеграли

22. Інтеграл по довжині дуги. Третій приклад п. 1 є одночасно найпростішим прикладом криволінійного інтеграла по довжині дуги. У загальному випадку означення дають в такий спосіб.

Нехай у просторі або на площині дана кінцева лінія (L) і в кожній її точці задано значення деякої величини u . Якщо відраховувати уздовж (L) дугу s від деякої точки, то можна вважати, що u є функцією s , $u=f(s)$. Щоб скласти інтегральну суму, треба подумки розбити лінію (L) на маленькі примкнуті одна до одної дуги; ця сума має вигляд

$$\sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta s_k \quad (\alpha = s_0 < s_1 < \dots < s_n = \beta, \quad s_{k-1} \leq \sigma_k \leq s_k),$$

де значення $s=\alpha$ і $s=\beta$ відповідають кінцям лінії (L) , а n — число ділянок розбивки. Щоб одержати інтеграл, треба перейти до границі в процесі, коли розбивка нескінченно подрібнюється (порівн. п. 2, але без геометричного змісту):

$$\int_{(L)} u ds = \int_{(L)} f(s) ds = \int_\alpha^\beta f(s) ds = \lim \sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta s_k \quad (9.106)$$

Цей інтеграл і називається *криволінійним інтегралом по довжині дуги*. Таким чином, у згаданому прикладі п.1

$$M = \int_{(L)} \rho ds.$$

Подібним чином (порівн. приклад п. 6), якщо точка проходить лінію (L) , причому на неї діє сила F , узагалі говорячи змінна, то робота

$$A = \int_{(L)} F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{\tau}) ds,$$

де $\mathbf{\tau}$ — одиничний вектор («орт») дотичної до (L) .

Так як з формули (9.106) видно, що криволінійний інтеграл по довжині дуги — це різновид звичайного визначеного інтеграла, то багато властивостей визначеного інтеграла (див., зокрема, властивості 2— 5 п. 4, а також п. 5) автоматично поширюються на криволінійний інтеграл. У той же час треба мати на увазі, що Δs і тому ds тут *вважаються завжди додатними*, тобто при переході в (9.106) до визначеного інтеграла інтегрування завжди йде від меншого до більшого; тому властивість 1 п. 4 для криволінійних інтегралів по дузі позбавлена змісту. Іноді величина u задається у всьому просторі, наприклад, $u=f(x,y,z)$. Тоді інтеграл (9.106) можна записати у вигляді

$$I = \int_{(L)} f(x, y, z) ds.$$

Якщо лінія (L) задана в параметричному вигляді

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t),$$

то обчислення цього інтеграла можна робити по формулі

$$I = \int_\gamma^\delta f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt,$$

де значення $t=\gamma$ і $t=\delta$ відповідають кінцям лінії (L) . Інтеграл по дузі іноді записують у вигляді

$$\int_{(L)} u |dr|.$$

Пишуть і так:

$$\int_{(L)} u(M) ds,$$

де M — поточна точка лінії (L) ; тоді і інтегральну суму можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^n u_k \Delta s_k = \sum_{k=1}^n u(M_k) \Delta s_k,$$

де M_k — деяка точка на k -й дузі розбивки.

Покажемо приклад застосування інтеграла по довжині дуги. З механіки відомо, що якщо в площині дана система матеріальних точок $M_k(x_k, y_k)$ маси m_k , де $k=1, \dots, n$, то координати центра ваги цієї системи визначаються по формулах

$$x_{ц.в.} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}, \quad y_{ц.в.} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}.$$

Якщо тепер уявити собі в площині матеріальну лінію (L) з, узагалі говорячи, несталою лінійною щільністю ρ , то центр ваги цієї лінії можна знайти в такий спосіб.

Розіб'ємо подумки (L) на маленькі дуги Δs_k і замінимо кожную з дуг матеріальною точкою маси $m_k = \rho_k \Delta s_k$, яка розташована на цій дузі. Ця «дискретна модель» матеріальної лінії має центр ваги з координатами

$$x_{ц.в.} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho_k \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho_k \Delta s_k}, \quad y_{ц.в.} = \frac{\sum_{k=1}^n y_k \rho_k \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho_k \Delta s_k}. \quad (9.107)$$

Якщо перейти до границі при нескінченному здрібнюванні розбивки, то дискретна модель перейде в безперервну лінію, для якої, в силу формул (9.107), одержимо

$$x_{ц.в.} = \frac{\int_{(L)} \rho x ds}{\int_{(L)} \rho ds}, \quad y_{ц.в.} = \frac{\int_{(L)} \rho y ds}{\int_{(L)} \rho ds}. \quad (9.108)$$

Особливо прості формули вийдуть для лінії з сталою щільністю; тоді центр ваги називається *геометричним*. З формул

(9.108), скорочуючи на ρ , виводимо

$$x_{г.ц.в.} = \frac{\int_{(L)} x ds}{L}, \quad y_{г.ц.в.} = \frac{\int_{(L)} y ds}{L}, \quad (9.109)$$

де під L розуміється довжина лінії (L) .

Якщо порівняти другу формулу (9.109) з формулою

$$S = 2\pi \int_{x=a}^b y dL = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

для площі поверхні обертання, то ми побачимо, що

$$S = 2\pi \int_{(L)} y ds = L \cdot 2\pi y_{г.ц.в.}$$

Іншими словами, якщо плоска лінія обертається навколо осі, яка лежить у площині цієї лінії і не перетинає її, то площа отриманої поверхні обертання дорівнює добуткові довжини цієї лінії на шлях, пройдений її геометричним центром ваги. Ця теорема називається „першою теоремою Гульдена”. Її застосування особливе зручне, якщо положення центра ваги легко визначити. Наприклад, з неї одержуємо площу поверхні тора (рис. 9.18), отриманої обертанням кола навколо осі, що лежить у площині цього кола і не перетинає її.

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR.$$

23. Інтеграл по координаті. Крім криволінійних інтегралів по довжині дуги, розглядаються також *криволінійні інтеграли по координаті*. При складанні останнього лінія (L) передбачається орієнтовною, тобто повинно бути зазначено, у якому напрямку вона проходить; якщо лінія розімкнута, це значить, що треба вказати, яка з граничних точок цієї лінії вважається її початком, а яка — кінцем. Для визначення інтеграла треба замість формули (9.106) написати

$$\left. \begin{aligned} \int_{(L)} u dx &= \lim \sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta x_k, \\ \int_{(L)} u dy &= \lim \sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta y_k, \quad \int_{(L)} u dz = \lim \sum_{k=1}^n f(\sigma_k) \Delta z_k, \end{aligned} \right\} (9.110)$$

де Δx_k — приріст абсциси x на k -й дузі розбивки і т.д.

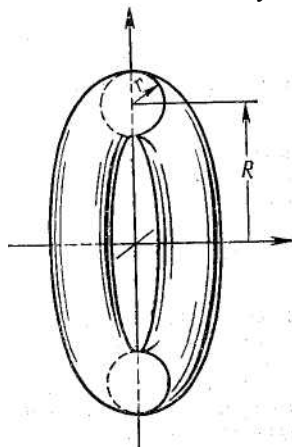


Рис. 9.18.

Інтеграли вигляду (9.110) легко зводяться до звичайних визначених інтегралів. Так, якщо лінія (L) задана в параметричному вигляді, то і значення u уздовж (L) стають функцією параметра t і

$$\int_{(L)} u \, dx = \int_{\gamma}^{\delta} u(t) \dot{x}(t) dt,$$

де значення $t=\gamma$ і $t=\delta$ відповідають кінцям лінії (L) . Тому основні властивості визначеного інтеграла (властивості 2—5 п.4) поширюються і на інтеграли по координаті. У той же час тут має місце і властивість 1 п.4, яку можна сформулювати так: *при зміні орієнтації лінії (L) інтеграли (9.110) помножуються на -1*; дійсно, якщо лінію (L) проходити в протилежному напрямку, то всі Δx , а з ними і dx , поміняють знак. Можливість зміни знака в dx приводить також до того, що на інтеграли по координаті не поширюються властивості, зв'язані з інтегруванням нерівностей (п.5): так, інтеграл вигляду (9.110) від додатної функції, на відмінність від інтеграла по довжині дуги, не зобов'язаний бути додатним.

У теорії диференціальних рівнянь і в теорії векторного поля застосовуються комбінації інтегралів (9.109) вигляду

$$\int_{(L)} (u \, dx + v \, dy + w \, dz) = \int_{(L)} u \, dx + \int_{(L)} v \, dy + \int_{(L)} w \, dz.$$

Надалі нам знадобиться також інтеграл

$$\int_{(L)} y \, dx,$$

розповсюджений по плоскій замкнутій лінії (L) , довільно розташованій в просторі (рис. 9.19). Для його обчислення спроектуємо лінію (L) на площину xOy і помітимо, що

$$\int_{(L)} y \, dx = \int_{(L')} y \, dx \tag{9.111}$$

так як відповідні точки лінії (L) і (L') відрізняються тільки значеннями z , що ніяк не мають прояву в інтегралах (9.111). Для правого інтеграла (9.111)

$$\int_{(L')} y \, dx = -S'.$$

Скористаємося тепер тим, що *при проектуванні плоскої фігури на іншу площину площа проекції дорівнює добуткові площі вихідної фігури на косинус кута між обома площинами*, так як при цьому (рис.9.20) розміри в одному напрямку не міняються, тоді як в іншому помножуються на $\cos \alpha$.

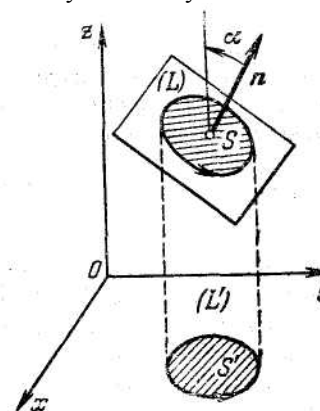


Рис. 9.19.

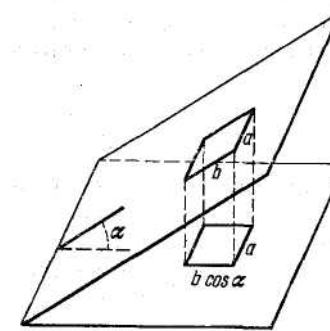


Рис. 9.20.

Отже,

$$\int_{(L)} y \, dx = -S \cos \alpha = -S \cos(\widehat{\mathbf{n}, z}), \quad (9.112)$$

де S — площа, яка обмежена лінією (L) , а \mathbf{n} -одичний вектор зовнішньої нормалі до площини лінії (L) , напрям якого погоджено з обходом (L) за правилом гвинта.

Аналогічно можна було б довести формулу

$$\int_{(L)} x \, dy = S \cos(\widehat{\mathbf{n}, x}). \quad (9.113)$$

Якщо зробити циклічну перестановку координатних осей, то з формул (9.112) і (9.113) одержимо також

$$\left. \begin{aligned} \int_{(L)} z \, dy &= -S \cos(\widehat{\mathbf{n}, x}), & \int_{(L)} x \, dz &= -S \cos(\widehat{\mathbf{n}, y}), \\ \int_{(L)} y \, dz &= S \cos(\widehat{\mathbf{n}, x}), & \int_{(L)} z \, dx &= S \cos(\widehat{\mathbf{n}, y}). \end{aligned} \right\} \quad (9.114)$$

Відзначимо на закінчення, що інтеграли вигляду

$$\oint_{(L)} f(x) \, dx, \quad \oint_{(L)} \varphi(y) \, dy, \quad \oint_{(L)} \psi(z) \, dz$$

по замкнутій лінії (L) (криволінійний інтеграл по замкнутому контурові прийнято позначати знаком \oint) завжди дорівнюють нулеві. Справді, якщо $F(x)$ -первісна до $f(x)$, то перший з інтегралів дорівнює приросту функції $F(x)$, коли точка обходить (L) і повертається у вихідне положення, тобто дорівнює нулеві.

24. Умови незалежності криволінійного інтеграла по координатах від контуру інтегрування. Розглянемо інтеграл вигляду

$$I = \int_{(L)} [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz], \quad (9.115)$$

де P, Q і R — деякі функції, задані у всьому просторі x, y, z або в деякій його області і не обертаються там у нескінченність, а (L) — довільна лінія в цій області. У фізичних задачах іноді буває, що інтеграл (9.115) залежить тільки від положення початкової і кінцевої точок лінії (L) , але не залежить від того, як саме лінія (L) проходить між цими точками. Іншими словами (рис. 9.21),

$$\begin{aligned} \int_{(L')} (Pdx + Qdy + Rdz) &= \int_{(L'')} (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ &= \int_{(L''')} (Pdx + Qdy + Rdz) = \dots \end{aligned} \quad (9.116)$$

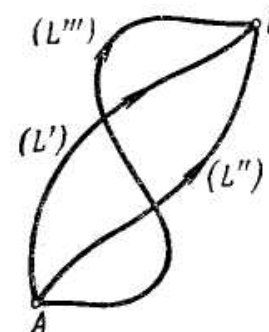


Рис. 9.21.

при будь-якому розташуванні точок A і B . Тоді ми будемо говорити, що інтеграл (9.115) не залежить від контуру інтегрування. Наприклад, інтеграл (9.115) може мати сенс роботи силового поля при переміщенні точки; тоді умова (9.116) означає, що ця робота залежить тільки від початкового і кінцевого положень точки.

Для незалежності інтеграла (9.115) від контуру інтегрування необхідно і досить, щоб інтеграл (9.115) по будь-якому замкнутому контурі дорівнював нулеві, тобто щоб

$$\oint_{(L)} (Pdx + Qdy + Rdz) = 0 \quad (9.117)$$

для будь-якого замкнутого контуру (L) .

Для доведення припустимо, що умова (9.117) виконана і дано контури (L') і (L'') з однаковими початковою і кінцевою точками (див. рис.9.21). Побудуємо замкнутий контур (L) , який іде з A в B по (L') і з B в A по (L'') , причому (L'') будемо проходити в протилежному напрямку. Застосуємо умову (9.117), розіб'ємо інтеграл (9.117) на два в силу властивості 3 п. 4 і змінимо в другого інтеграла напрям інтегрування в силу властивості 1 п. 4. Тоді одержимо

$$0 = \oint_{(L)} = \int_{(L')} - \int_{(L'')} , \quad \text{тобто} \quad \int_{(L')} = \int_{(L'')} ,$$

звідки і випливає (9.116). Міркуючи в зворотному порядку, легко з (9.116) вивести (9.117).

Для незалежності інтеграла (9.115) від контуру інтегрування необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз був повним диференціалом якоїсь (однозначної) функції трьох змінних, тобто щоб

$$Pdx + Qdy + Rdz \equiv du \tag{9.118}$$

для деякої функції $u=u(x, y, z)$. Для доведення припустимо спочатку, що умова (9.118) виконана. Тоді

$$\int_{(L)} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{(L)} du = u(B) - u(A),$$

де A і B - початок і кінець лінії (L) . Виходить, інтеграл не залежить від контуру інтегрування.

Нехай, зворотно, інтеграл (9.115) не залежить від контуру інтегрування. Зафіксуємо довільно точку M_0 в просторі і для будь-якої поточної точки $M(x; y; z)$ визначимо значення функції

$$u(M) = \int_{\cup_{M_0M}} (Pdx + Qdy + Rdz) \tag{9.119}$$

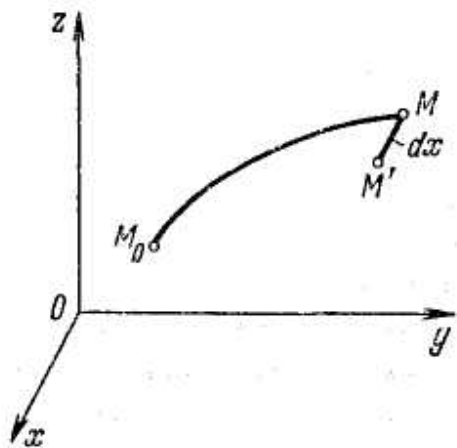


Рис. 9.22.

де \cup_{M_0M} - довільна лінія, що йде з M_0 у M . За умовою ця функція однозначна, тобто приймає в кожній точці M цілком визначене значення. Щоб знайти du , придамо спочатку x нескінченно малий приріст dx . Тоді точка переміститься в положення M' (рис. 9.22), причому нескінченно малий відрізок MM' буде паралельний осі x . Відповідний приріст функції u дорівнює

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= u(M') - u(M) = \int_{\cup_{M_0MM'}} (Pdx + Qdy + Rdz) - \int_{\cup_{M_0M}} (Pdx + Qdy + Rdz) = \\ &= \int_{MM'} (Pdx + Qdy + Rdz). \end{aligned}$$

Але так як уздовж відрізка MM' координати y і z не міняються, то в останньому інтегралі

$$dy = dz = 0 \quad \text{і} \quad \Delta_x u = \int_{MM'} Pdx.$$

Так як відрізок MM' нескінченно малий, то з точністю до малих вищого порядку можна вважати на ньому $P = \text{const}$, звідки, переходячи від приросту до диференціала і тим самим відкидаючи малі вищого порядку, одержимо $\partial_x u = Pdx$. Аналогічно перевіряємо, що $\partial_y u = Qdy$, $\partial_z u = Rdz$, і, складаючи, одержуємо повний диференціал

$$du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

тобто умова (9.118) виконана.

Якщо згадати вираз для повного диференціала, то умову (9.118) можна записати ще так:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R \tag{9.120}$$

Звідси легко вивести, що якщо інтеграл (9.115) не залежить від контуру інтегрування, то

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{9.121}$$

Дійсно, з умов (9.120) одержуємо

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

і в силу незалежності змішаної похідної від порядку диференціювання одержуємо першу рівність (9.121); аналогічно доводяться інші.

У теорії векторного поля доводиться зворотна пропозиція: якщо умови (9.121) виконані й область, у якій розглядаються функції P, Q, R , однозв'язна, то інтеграл (9.115) не залежить від контуру інтегрування. При цьому однозв'язною називається така область, для якої будь-який розташований у ній замкнутий контур можна шляхом безперервної деформації стягнути в точку, не виходячи за границі області.

Наприклад, весь простір, півпростір, двограний або багатограний кут, внутрішність або зовнішність сфери, внутрішність кінцевих або нескінченних кругових циліндрів — усе це однозв'язні області. На відміну від цього зовнішність нескінченного кругового циліндра — це *неоднозв'язна* (двозв'язна) область, так як, наприклад, контур (L), зображений на рис. 9.23, не можна шляхом безперервної деформації стягнути в точку, не виходячи за границі області. Неоднозв'язними є також внутрішність або зовнішність тора, а також повний простір, з якого викинуті усі точки нескінченної прямої лінії або кола. На рис. 9.24 зображені приклади однозв'язної і чотиризв'язної областей на площині. Площина стає двозв'язною, навіть якщо з неї викинути одну лише точку.

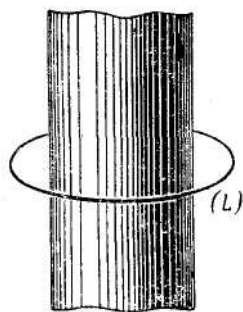


Рис. 9.23.

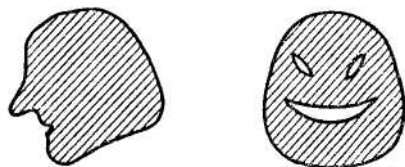


Рис. 9.24.

Порівнюючи умови (9.118) і (9.121), ми бачимо, що в однозв'язній області умови (9.121) необхідні і достатні для того, щоб вираз

$$Pdx + Q dy + R dz$$

був повним диференціалом деякої однозначної функції $u(x, y, z)$. Можна показати, що якщо умови (9.121) виконані в

багатозв'язній області, то функція u , яка побудована по формулі (9.119), задовольняє співвідношенню (9.118), але буде, узагалі говорячи, багатозначною.

9.8 Поняття про узагальнені функції

25. Дельта-функція. Дельта-функція $\delta(x)$, яка широко застосовується в математиці і її додатках, являє найпростіший приклад узагальнених функцій.

Щоб приблизно уявити собі дельта-функцію, розглянемо спочатку розривну функцію, визначену рівностями

$$y = \delta_N(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\infty < x < -\frac{1}{2N}\right), \\ N & \left(-\frac{1}{2N} < x < \frac{1}{2N}\right), \\ 0 & \left(\frac{1}{2N} < x < \infty\right) \end{cases} \quad (9.122)$$

при дуже великому N ; її графік зображено на рис. 9.25. Значення функції в самих точках розриву $x = \pm(1/2N)$ тут, як зазвичай, несуттєві.

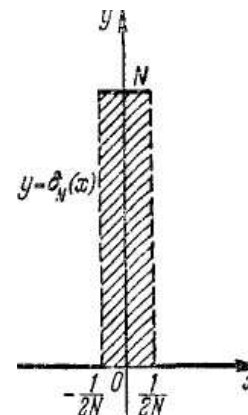


Рис. 9.25

Дельта-функція виходить у границі, коли $N \rightarrow \infty$. Вона, суворо кажучи, не має графіка і може бути визначена так:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < -0; \quad +0 < x < \infty), \\ (-0 < x < +0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \end{cases}$$

утім, останню рівність можна також записати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1; \tag{9.123}$$

Для наближеного зображення дельта-функції не обов'язково користуватися розривною функцією (9.122), можна покласти, наприклад, $\delta_N(x) = (N/\pi)(1+N^2x^2)^{-2}$ ($-\infty < x < \infty$; простежте за графіком цієї функції при $N \rightarrow \infty$) і т.п. Узагалі, згодиться будь-яка функція, що концентрує свої значення біля $x=0$; більш точно, досить тільки, щоб $\delta_N(x) \geq 0$ ($-\infty < x < \infty$) і щоб при $N \rightarrow \infty$ було

$$\int_a^b \delta_N(x) dx \rightarrow 0, \quad \int_{-a}^{-b} \delta_N(x) dx \rightarrow 0, \quad \int_{-a}^b \delta_N(x) dx \rightarrow 1,$$

для будь-яких сталих додатних чисел a і b .

Якщо розглядати маси, які розподілені уздовж осі x , і їхні лінійні щільності, то виявиться, що щільність одиничної точкової маси, розташованої на початку координат, саме дорівнює дельта-функції. Дійсно, якщо спочатку уявити собі цю масу не точковою, а рівномірно розподіленою на відріжку $-1/2N \leq x \leq 1/2N$, то щільність буде мати вигляд, яку зображено на рис. 9.25. Якщо тепер $N \rightarrow \infty$, то в границі маса стане точковою, а щільність — дельта-функцією.

Аналогічним чином функція $Q(x) = m\delta(x-a)$ являє собою щільність лінійної (тобто розташованої уздовж лінії, у даному випадку осі x) маси m , зосередженої в точці a . Так само можна зобразити щільності точкового заряду, зосередженого навантаження і т.п.

Іноді приходиться складати дельта-функцію і звичайну функцію. Наприклад, сума

$$\rho(x) = \rho_0 + m_1\delta(x-a_1) + m_2\delta(x-a_2)$$

являє собою щільність комбінації рівномірно розподіленої маси і двох точкових мас. Тому застосування дельта-функції дає можливість у всіх випадках розподілених, точкових і комбінованих мас застосовувати формули, що відносяться до розподілених мас; більш того, саме протиставлення розподілених мас точковим у значній мірі втрачає зміст. Те ж відноситься до зарядів, навантажень і т.п.

При інтегруванні виразів, що містять дельта-функцію, треба мати на увазі формулу (9.123). Наприклад, якщо $f(x)$ — безперервна функція і $\alpha < a < \beta$, то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx &= \int_{\alpha}^{a-0} f(x)\delta(x-a)dx + \int_{a-0}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx + \\ &+ \int_{a+0}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx = 0 + \int_{a-0}^{a+0} f(a)\delta(x-a)dx + 0 = f(a) \cdot 1 = f(a); \end{aligned} \tag{9.124}$$

при цьому перший і третій інтеграл дорівнюють нулеві, так як там дельта-функція дорівнює нулеві, а в другому інтегралі ми замінили $f(x)$ на $f(a)$, так як на нескінченно малому інтервалі безперервну функцію можна вважати сталою, і скористалися формулою (9.123).

Відзначимо двозначність інтеграла вигляду

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx.$$

Тут обов'язково треба вказати, чи захоплюється чи ні при інтегруванні особливість дельта-функції, так як

$$\int_{\alpha-0}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx = f(a), \quad \int_{\alpha+0}^{\beta} f(x)\delta(x-a)dx = 0.$$

При інтегруванні дельта-функції виходить *одинична функція*

$$e(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t)dt = \begin{cases} 0 & (-\infty < x < 0), \\ 1 & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{9.125}$$

яка також має чисельні застосування. Її графік показано на рис. 9.26; вона виходить при раптовому підключенні якого-небудь сталого впливу, наприклад, напруги в електричний ланцюг.

Отже, якщо проінтегрувати дельта-функцію, то вийде звичайна, не узагальнена функція, хоча і розривна. При вторинному інтегруванні вийшла б навіть безперервна функція.

Якщо продиференціювати рівність (9.125), то вийде, що

$$\delta(x) = e'(x). \quad (9.126)$$

Ця рівність розуміється в узагальненому змісті. Наприклад, можна замінити на рис. 9.26 вертикальний відрізок на косий, що з'єднає точки $(-1/2N; 0)$ і $(1/2N; 1)$ і зображений пунктиром. Тоді розривна функція заміниться на безперервну, похідна якої має графік, зображений на рис. 9. 25. Якщо тепер перейти до границі при $N \rightarrow \infty$, ми й одержимо співвідношення (9.126).

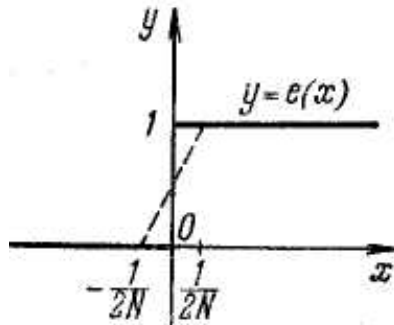


Рис. 9.26.

Таким чином, дельта-функція виходить при диференціюванні розривної функції, що володіє кінцевим стрибком. Наприклад, для закону руху точки, її швидкість виражається формулами

$$s'_t = \begin{cases} at & (0 \leq t < t^*), \\ v & (t^* < t < \infty) \end{cases}$$

і тому при $t=t^*$ має стрибок

$$s_t(t^*+0) - s_t(t^*-0) = at^* - v.$$

Тому прискорення дорівнює

$$(at^* - v) \delta(t - t^*) + ae(t^* - t).$$

Перший член у цій сумі описує явище удару.

26. Додаток до побудови функції впливу. Одним з важливих додатків дельта-функції є побудова функції впливу, яку називають також функцією Гріна. Розглянемо спочатку приклад. Нехай досліджується прогин $h(x)$ балки під дією зовнішнього

поперечного навантаження, прикладеного з щільністю $p(x)$ (див. рис. 9.27, де зображено графік або, як говорять, епюр зовнішнього навантаження). Будемо вважати навантаження не занадто великими, так щоб можна було скористатися законом лінійності: при додаванні зовнішніх навантажень прогини складаються.

Позначимо через $y=G(x;\xi)$ прогин у точці x , отриманий у результаті прикладення в точці ξ одиничного навантаження. Ця функція $G(x;\xi)$ і називається функцією впливу в розглянутому прикладі. Ми зараз покажемо, що якщо вона відома, то легко знайти прогин і від дії довільного навантаження з щільністю $p(x)$.

Дійсно, розглянемо навантаження, що приходить на ділянку осі від точки ξ до точки $\xi+d\xi$. Це навантаження дорівнює $p(\xi)d\xi$; тому прогин від нього в точці x дорівнює $G(x;\xi)p(\xi)d\xi$, так як із закону лінійності випливає, що якщо зовнішнє навантаження помножити на сталий множник, то і прогин збільшиться на той же множник.

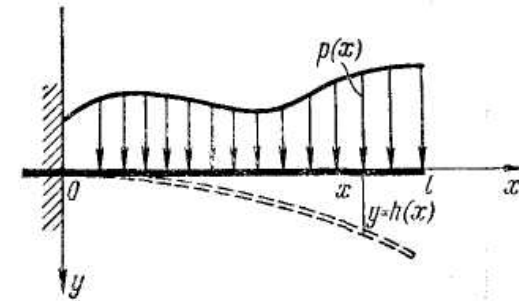


Рис.9.27

Підсумовуючи всі такі нескінченно малі прогини, одержуємо сумарний прогин

$$h(x) = \int_0^l G(x;\xi)p(\xi)d\xi. \quad (9.127)$$

Перейдемо тепер до загальної схеми побудови функції впливу. Нехай зовнішня дія на який-небудь об'єкт описується функцією $f(x)$ ($a \leq x \leq b$; у приведеному прикладі це була функція $p(x)$), а результат цієї дії – функція $\bar{f}(x)$ ($a \leq x \leq b$); у приведеному прикладі це була функція $h(x)$). Таким чином, кожна задана

функція f по якомусь визначеному закону перетвориться в нову функцію \bar{f} ; такий закон перетворення *функцій-прообразів у функції-образи* називається *оператором*.

Наприклад, *оператор диференціювання* D діє за законом $Df = \bar{f}$, тобто $D(\sin x) = \cos x$, $D(x^3) = 3x^2$ і т.д. Тут $\sin x$ — прообраз, що перетвориться оператором D в образ $\cos x$, і т.д. Поняття оператора аналогічне поняттю функції, але якщо функція перетворювала числа-значення незалежної змінної — у числа-значення залежної змінної, то оператор перетворює функції у функції.

Позначимо оператор переходу від функції зовнішньої дії $f(x)$ до функції «відгуку» $\bar{f}(x)$ через A , так що $Af = \bar{f}$. Ми припустимо, що діє закон лінійності, або, як говорять, *принцип суперпозиції*: при додаванні зовнішніх дій їхні результати також додаються. Цей закон, який можна записати у формі

$$A(f_1 + f_2) = Af_1 + Af_2,$$

часто застосовується, коли зовнішні дії не занадто великі. Оператор, що володіє такою властивістю, називається *лінійним*.

З закону лінійності можна вивести, що при множенні зовнішньої дії на константу його результат збільшиться на ту ж константу, тобто

$$A(Cf) = CAf \quad (C = \text{const}).$$

Позначимо через $G(x; \xi)$ результат зовнішньої дії, який описується дельта-функцією $\delta(x - \xi)$ при деякому фіксованому ξ , тобто

$$A[\delta(x - \xi)] = G(x; \xi).$$

Будь-яку функцію $f(x)$ можна представити у вигляді суми «стовпчастих» функцій (рис.9.28), кожна з яких має особливість лише в одній точці ξ , а тому дорівнює

$$f(\xi) d\xi \delta(x - \xi).$$

Тобто

$$f(x) = \sum f(\xi) d\xi \delta(x - \xi).$$

Це, власне кажучи, формула (9.124) в іншому записі. Звідси $A[f(x)] = A[\sum f(\xi) d\xi \delta(x - \xi)] = \sum A[f(\xi) d\xi \delta(x - \xi)] f(x) = \sum f(\xi) d\xi A[\delta(x - \xi)] = \sum f(\xi) d\xi G(x; \xi).$

Але при нескінченно малих $d\xi$ ця сума є інтегралом, тобто остаточно

$$A[f(x)] = \int_a^b G(x; \xi) f(\xi) d\xi. \tag{9.128}$$

(зрів. с формулою (9.127)).

Функцію впливу можна в більш простих випадках підрахувати теоретично, а в більш складних визначити експериментально, виконуючи необхідні виміри, наприклад вимірюючи деформацію системи під дією зосередженої сили. Центральним пунктом є перевірка *лінійності системи*, тобто можливості застосування принципу суперпозиції; ця можливість виводиться з загальнотеоретичних принципів, або перевіряється експериментально. Зрозуміло, не всі системи є точно або приблизно лінійними.

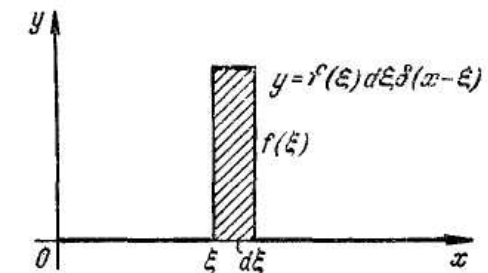
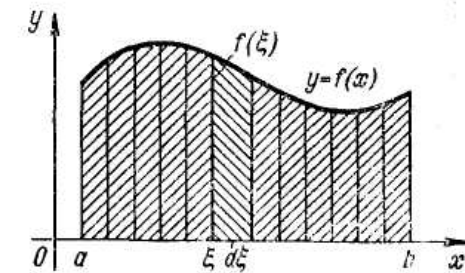


Рис.9.28.

Відзначимо, що функції f і \bar{f} можуть бути задані на різних інтервалах; більш того, незалежні змінні x і ξ у формулі (9.128) можуть мати різний фізичний зміст. Незалежна змінна ξ може відігравати роль часу; тоді функція впливу описує результат дії *одиночного імпульсу*, який подіяв у момент ξ .

Буває, що розглянута задача є лінійною тільки при нескінченно малих зовнішніх діях, а дельтоподібну зовнішню дію не можна вважати малою. Тоді функцію впливу треба визначити по формулі

$$G(x; \xi) = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{1}{P} A[P\delta(x - \xi)].$$

Так, у розібраному прикладі можна знайти прогин від малого навантаження P , а результат розділити на P . У таких випадках формула (9.128) справедлива лише для малих (точніше, нескінченно малих) по амплітуді зовнішніх дій $f(x)$.

27. Інші узагальнені функції. Якщо при наближеному представленні дельта-функції (п.25) скористатися безперервною моделлю, а потім зробити диференціювання, то ми одержимо наближене представлення про $\delta'(x)$. У неї ще більш «гостра» особливість, чим у $\delta(x)$, причому $\delta'(x)$ приймає значення обох знаків.

Якщо δ -функція описує щільність одиничного заряду, розташованого на початку координат (п. 25), то $\delta'(x)$ описує щільність *диполя*, розташованого там же. Справді, такий диполь вийде, якщо розмістити заряди $-q$ і q відповідно в точках $x=0$ і $x=l$, а потім, залишаючи $p=ql$ (*момент диполя*) без зміни, спрямувати l до нуля так, що в границі вийдуть два рівних нескінченно великих заряди протилежного знака на нескінченно близькій відстані. До переходу до границі щільність заряду має вигляд

$$q\delta(x-l) - q\delta(x) = -\frac{\delta(x-l) - \delta(x)}{-l};$$

тому після переходу до границі при $l \rightarrow 0$ щільність заряду дорівнює $-\delta'(x)$.

Інтеграли за участю $\delta'(x)$ обчислюються за допомогою інтегрування по частинам: якщо $f(x)$ має безперервну похідну і $\alpha < a < \beta$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\delta'(x-a)dx = f(x)\delta(x-a) \Big|_{x=a}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \delta(x-a)f'(x)dx = -f'(a).$$

Цікаво відзначити, що обчислення цього інтеграла по такому методу:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\delta'(x-a)dx &= \int_{a-0}^{a+0} f(x)\delta'(x-a)dx = f(a) \int_{a-0}^{a+0} \delta'(x-a)dx = \\ &= f(a)\delta(x-a) \Big|_{x=a-0}^{a+0} = 0 \end{aligned}$$

є помилковим, так як заміна $f(x)$ на $f(a)$ при досить гострій особливості в $\delta'(x-a)$ є занадто грубою. Аналогічно можна розглядати і подальші похідні від дельта-функції, а також їхньої комбінації.

Узагальнені функції можна класифікувати по числу інтегрувань, після яких із заданої функції вийде безперервна функція. При такій класифікації безперервні функції можна вважати узагальненими функціями нульового порядку; функції з кінцевими розривами і звичайні функції з особливостями, що інтегруються, на кінцевій відстані (п. 16) — узагальненими функціями першого порядку. Функція $\delta(x)$ — це найпростіший приклад функції другого порядку (див. п. 25), $\delta'(x)$ має третій порядок і т.д. При диференціюванні функції її порядок підвищується на одиницю, а при інтегруванні - знижується на одиницю. При тлумаченні функції з особливістю, що неінтегрується, в якості узагальненої функції треба вказувати, похідною від якої функції нульового або першого порядку вона є.

Наприклад, функцію $1/x$, яка має особливість, що неінтегрується при $x=0$, можна при $x \neq 0$ вважати рівною або

$$(\ln|x|)', \tag{9.129}$$

або ж, скажемо,

$$(\ln|x|+e(x))', \tag{9.130}$$

так як при $x \neq 0$ буде $e'(x)=0$. Однак функції (9.129) і (9.130) розрізняються на $e'(x)=\delta(x)$ і тому їхні властивості неоднакові. Тому в теорії узагальнених функцій замість $1/x$ — воліють застосовувати запис (9.129) або (9.130) (що, зазвичай, не те саме), так як зміст такого запису вже однозначний. Аналогічно функцію $1/x^2$ — можна розглядати як $-(\ln|x|)''$ і т.п.

Виявляється, що якщо користуватися узагальненими функціями, то більшість правил, зв'язаних з диференціюванням тих або інших формул, буде справедливим без будь-яких обмежень на характер функцій, що беруть участь. Наприклад, правило Лейбніца про диференціювання по параметру під знаком інтеграла

(п.20) стає справедливим, незалежно від характеру збіжності розглянутих інтегралів і т.п.

Мікромодуль 22

Приклади роз'язання типових задач

Приклад 1. Обчислимо інтеграл

$$\int_a^b kx \, dx \quad (b > a).$$

Розв'язання. Геометрично задача еквівалентна обчисленню площі Q трапеції, обмеженої лініями $y=kx$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ (рис. 9.29).

Функція $y=kx$, що стоїть під знаком інтеграла, безперервна. Отже, для обчислення визначеного інтеграла ми вправі, як це було відмічено вище, зробити розбивку відрізка $[a, b]$ довільним способом і довільно вибрати проміжні точки ξ_k .

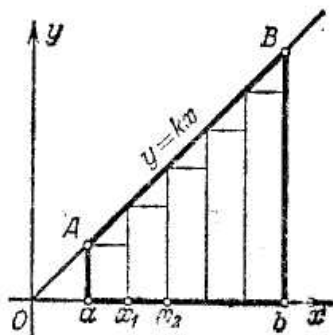


Рис. 9.29.

Результат обчислення визначеного інтеграла не залежить від способу побудови інтегральної суми — аби крок розбивки прагнув до нуля.

Ділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних відрізків.

Довжина Δx кожного часткового відрізка дорівнює

$$\Delta x = \frac{b-a}{n};$$

це число і буде кроком розбивки. Точки ділення мають координати:

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_n = a + n\Delta x.$$

За точки ξ_k візьмемо ліві точки кожного з відрізків

$$\xi_1 = a, \xi_2 = a + \Delta x, \xi_3 = a + 2\Delta x, \dots, \xi_n = a + (n-1)\Delta x.$$

Складемо інтегральну суму. Так як

$$f(\xi_i) = k\xi_i,$$

то

$$\begin{aligned} s_n &= k\xi_1\Delta x + k\xi_2\Delta x + \dots + k\xi_n\Delta x = ka\Delta x + [k(a+\Delta x)]\Delta x + \dots + \{k[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{a+(a+\Delta x)+(a+2\Delta x)+\dots+[a+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = \\ &= k\{na+[\Delta x+2\Delta x+\dots+(n-1)\Delta x]\}\Delta x = k\{na+[1+2+\dots+(n-1)]\Delta x\}\Delta x, \end{aligned}$$

де

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}.$$

Враховуючи, що

$$1+2+\dots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(сума арифметичної прогресії), отримаємо

$$s_n = k \left[na + \frac{n(n-1)}{2} \frac{b-a}{n} \right] \frac{b-a}{n} = k \left[a + \frac{n-1}{n} \frac{b-a}{2} \right] (b-a).$$

Так як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = k \left[a + \frac{b-a}{2} \right] (b-a) = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Тоді,

$$\int_a^b kx \, dx = k \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Площу $ABba$ (рис. 9.29) легко обчислити методами елементарної геометрії. Результат вийде той же.

Приклад 2. Обчислимо

$$\int_0^b x^2 \, dx.$$

Розв'язання. Даний інтеграл дорівнює площі Q криволінійної трапеції, обмеженою параболою $y=x^2$, ординатою $x=b$ і прямою $y=0$ (рис. 9.30).

Розіб'ємо відрізок $[0, b]$ на n рівних частин точками:

$$x_0=0, x_1=\Delta x, x_2=2\Delta x, \dots, x_n=b=n\Delta x, \\ \Delta x=b/n.$$

За точки ξ_i візьмемо крайні праві точки кожного з відрізків.

Складемо інтегральну суму:

$$s_n = x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \dots + x_n^2 \Delta x = [(\Delta x)^2 \Delta x + (2\Delta x)^2 \Delta x \dots + (n\Delta x)^2 \Delta x] = \\ = (\Delta x)^3 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2].$$

Як відомо

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

тому

$$s_n = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right);$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

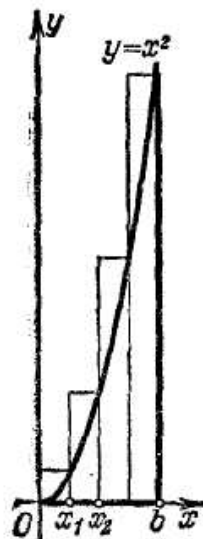


Рис. 9.30.

Приклад 3. Обчислити

$$\int_a^b m dx \quad (m=\text{const}).$$

Розв'язання.

$$\int_a^b m dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n m \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} m \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = m(b-a).$$

Тут

$\sum_{i=1}^n \Delta x_i$ є сума довжин відрізків, на які розбито відрізок $[a, b]$.

При будь-якому способі розбивки ця сума дорівнює довжині відрізка $b-a$.

Приклад 4. Обчислити

$$\int_a^b e^x dx$$

Розв'язання. Знову розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин:

$$x_0=a, x_1=a+\Delta x, \dots, x_n=a+n\Delta x, \\ \Delta x=(b-a)/n.$$

За точки ξ_i візьмемо ліві крайні точки. Складемо інтегральну суму:

$$s_n = e^a \Delta x + e^{a+\Delta x} \Delta x + \dots + e^{a+(n-1)\Delta x} \Delta x = e^a (1 + e^{\Delta x} + e^{2\Delta x} + \dots + e^{(n-1)\Delta x}) \Delta x.$$

Вираз в дужках є геометрична прогресія зі знаменником $e^{\Delta x}$ і першим членом суми, тому

$$s_n = e^a \frac{e^{n\Delta x} - 1}{e^{\Delta x} - 1} \Delta x = e^a (e^{n\Delta x} - 1) \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1}.$$

Далі, маємо

$$n\Delta x = b - a, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x} - 1} = 1$$

(По правилу Лопіталя $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{e^z - 1} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{e^z} = 1$.)

Таким чином

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = Q = e^a (e^{b-a} - 1) \cdot 1 = e^b - e^a,$$

тобто $\int_a^b e^x dx = e^b - e^a$.

Приклад 5. Обчислити

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

використовуючи метод заміни змінної

Розв'язання. Зробимо заміну змінної:

$$x = r \sin t, \quad dx = r \cos t dt.$$

Визначимо нові границі:

$$x=0 \text{ при } t=0, \quad x=r \text{ при } t=\pi/2.$$

Тобто,

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t} r \cos t dt = \int_0^{\pi/2} r \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt = r^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi r^3}{4}. \end{aligned}$$

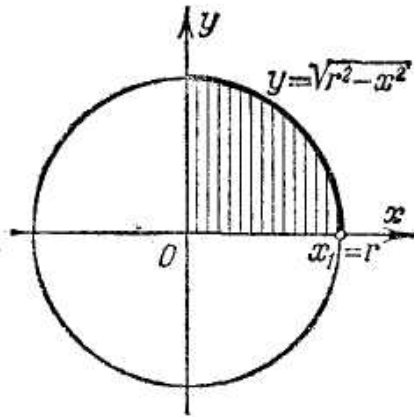


Рис. 9.31.

Обчислений інтеграл з геометричної точки зору представляє площу $1/4$ круга, обмеженого колом $x^2 + y^2 = r^2$ (рис. 9.31).

Приклад 6. Обчислити

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

використовуючи метод інтегрування по частинам.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = \\ &= - \sin^{n-1} x d \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos x d \cos x = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx. \end{aligned}$$

В обраних позначеннях останню рівність можна записати так:

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

звідки знаходимо:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (*)$$

Тим же прийомом знайдемо:

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4},$$

тому

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}.$$

Продовжуючи в такий же спосіб далі, ми дійдемо або до I_0 або до I_1 у залежності від того, чи буде число n парним або непарним. Розглянемо два випадки:

1) n — число парне, $n = 2m$:

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0;$$

2) n — число непарне, $n = 2m+1$:

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} I_1,$$

але так як

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 x dx = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2},$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1,$$

то

$$I_{2m} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2m}{2m+1} \cdot \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}.$$

З цих формул випливає *формула Валліса*, що виражає число $\pi/2$ у вигляді нескінченного добутку.

Дійсно з останніх двох рівностей шляхом почленного ділення знаходимо:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdot (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}}. \quad (**)$$

Доведемо тепер, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Для всіх x інтервалу $(0, \pi/2)$ справедливі нерівності $\sin^{2m-1} x > \sin^{2m} x > \sin^{2m+1} x$.

Інтегруючи в границях від 0 до $\pi/2$, одержимо:

$$I_{2m-1} \geq I_{2m} \geq I_{2m+1},$$

звідки

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} \geq \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} \geq 1. \quad (***)$$

З рівності (*) випливає:

$$\frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \frac{2m+1}{2m}.$$

Отже,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m-1}}{I_{2m+1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m+1}{2m} = 1.$$

З нерівності (***) одержуємо:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{I_{2m}}{I_{2m+1}} = 1.$$

Переходячи до границі у формулі (**), одержимо *формулу Валліса*:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{3 \cdot 5 \cdot (2m-1)} \right)^2 \frac{1}{2m+1} \right].$$

Цю формулу можна записати в наступному вигляді:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m-1} \cdot \frac{2m}{2m+1} \right).$$

П р и к л а д 6. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad (\text{рис. 9.32 і 9.33})$$

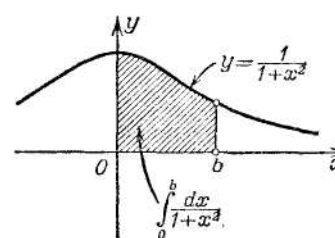


Рис. 9.32.

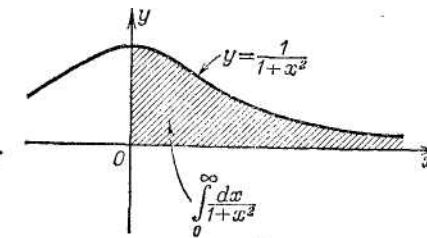


Рис. 9.33.

Розв'язання. По визначенню невласного інтеграла знаходимо:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Розглянутий інтеграл виражає площу нескінченної криволінійної трапеції, яка заштрихована на рис. 9.34.

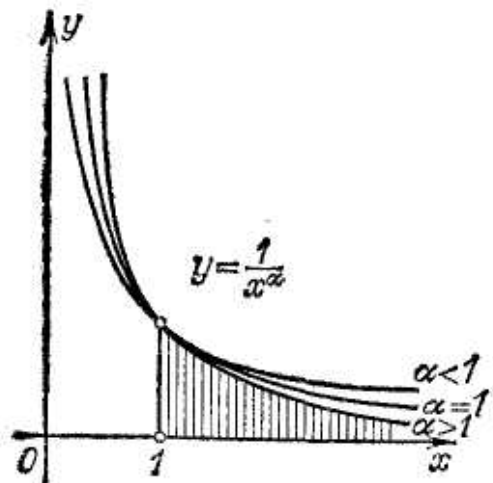


Рис. 9.34.

Приклад 7. Установити, при яких значеннях α (рис. 9.34) інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

сходиться і при яких розходиться.

Розв'язання. Так як (при $\alpha \neq 1$)

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1)$$

то

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} (b^{1-\alpha} - 1).$$

Отже, щодо розглянутого інтеграла можна зробити наступні висновки:

якщо $\alpha > 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, тобто інтеграл сходиться,

якщо $\alpha < 1$, то $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$, тобто інтеграл розходиться.

При $\alpha = 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \infty$ інтеграл розходиться.

Приклад 8. Обчислити

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Розв'язання.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Другий інтеграл дорівнює $\pi/2$ (див. приклад 6). Обчислимо перший інтеграл:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \arctg x \Big|_{\alpha}^0 = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty}$$

$$(\arctg 0 - \arctg \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

Отже, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

Приклад 9. Дослідити, чи сходиться інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}.$$

Розв'язання. Помітимо, що при $1 \leq x$

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Далі

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = 1.$$

Отже,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$$

сходиться і його значення менше 1.

Приклад 10. Дослідити, чи сходиться інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx.$$

Помічаємо, що

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^3}} > \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Але

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} \Big|_1^b = +\infty.$$

Отже, розходиться і даний інтеграл.

Приклад 11. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3} dx.$$

Розв'язання. Тут підінтегральна функція — знакозмінна.

Помічаємо, що

$$\left| \frac{\sin x}{x^3} \right| \leq \left| \frac{1}{x^3} \right|. \text{ Але } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^3} \right| dx$ сходиться. Звідси випливає, що сходиться і даний інтеграл.

Приклад 12. Обчислити

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}},$$

Розв'язання

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{b \rightarrow 1-0} \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{b \rightarrow 1-0} 2\sqrt{1-x} \Big|_0^b = -\lim_{b \rightarrow 1-0}$$

$$2(\sqrt{1-b} - 1) = 2$$

Приклад 13. Обчислити

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Розв'язання. Так як усередині відрізка інтегрування існує точка $x=0$, де підінтегральна функція розривна, то інтеграл потрібно представити як суму двох доданків:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Обчислимо кожну границю окремо:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \int_{-1}^{\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{\varepsilon_1} = -\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow -0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty.$$

Отже, на ділянці $[-1, 0]$ інтеграл розходиться:

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty$$

Виходить, на ділянці $[0, 1]$ інтеграл також розходиться.

Таким чином, даний інтеграл розходиться на усьому відрізку $[-1, 1]$. Відзначимо, що якби ми стали обчислювати даний інтеграл, не звертаючи уваги на розрив підінтегральної функції в точці $x=0$, то одержали б невірний результат. Дійсно,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

що неможливо (рис.9.35)

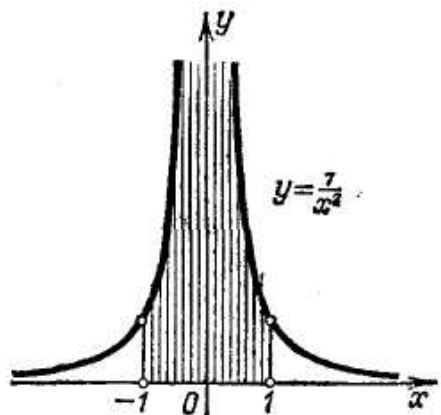


Рис. 9.35.

Приклад 14. Чи сходиться інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$$

Розв'язання. Підінтегральна функція розривна в лівому кінці відрізка $[0, 1]$. Порівнюючи її з функцією $1/\sqrt{x}$, маємо:

$$\frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ існує.

Отже невластний інтеграл від меншої функції, тобто

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+4x^3}} dx$$

теж існує.

Приклад 15. Обчислити наближено

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання. Розділимо відрізок $[1, 2]$ на 10 рівних частин (рис. 9.36). Покладаючи

$$\Delta = \frac{2-1}{10} = 0,1,$$

складемо таблицю значень підінтегральної функції:

x	y=1/x	x	y=1/x
$x_0=1,0$	$y_0=1,00000$	$x_6=1,6$	$y_6=0,62500$
$x_1=1,1$	$y_1=0,90909$	$x_7=1,7$	$y_7=0,58824$
$x_2=1,2$	$y_2=0,83333$	$x_8=1,8$	$y_8=0,55556$
$x_3=1,3$	$y_3=0,76923$	$x_9=1,9$	$y_9=0,52632$
$x_4=1,4$	$y_4=0,71429$	$x_{10}=2,0$	$y_{10}=0,50000$
$x_5=1,5$	$y_5=0,66667$		

I. По першій формулі прямокутників

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}),$$

одержимо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_9) = 0,1 \cdot 7,18772 = 0,71877,$$

По другій формулі прямокутників

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n),$$

одержимо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1(y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 0,1 \cdot 6,68773 = 0,66877.$$

Безпосередньо з (рис. 9.36) випливає, що в даному випадку перша формула дає значення інтеграла з надлишком, друга - з недостаткою.

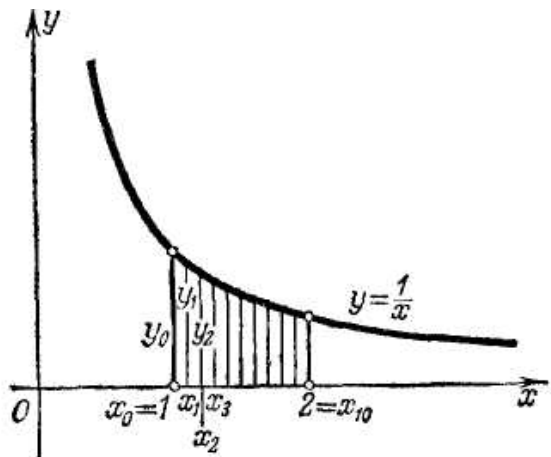


Рис.9.36.

II. По формулі трапецій

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

одержимо:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0,1 \left(\frac{1+0,5}{2} + 6,18773 \right) = 0,69377.$$

III. По формулі Симпсона маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x} &\approx \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + \\ &4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \\ &= \frac{0,1}{3} (1+0,5+2 \cdot 2,72818+4 \cdot 3,45955) = 0,69315. \end{aligned}$$

У дійсності $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0,6931472$ (з точністю до сьомого знака).

Таким чином, при розбивці відрізка $[0, 1]$ на 10 частин по формулі Симпсона ми одержали п'ять вірних знаків; по формулі

трапецій — лише три вірних знаки; по формулі прямокутників ми можемо ручатися тільки за перший знак.

П р и к л а д 16. Обчислити інтеграл

$$I(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Розв'язання. Помітимо перш за все, що безпосередньо обчислити цей інтеграл ми не можемо, так як першообразну від функції

$$e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x}$$

не можна виразити через елементарні функції. Для обчислення даного інтеграла будемо розглядати його як функцію від параметра α . Тоді його похідна по α знайдеться по формулі Лейбниці (формула Лейбниці виведена в припущенні, що границі інтеграції a і b кінцеві. Однак в даному випадку формула Лейбниці також справедлива, хоча одна із границь інтегрування дорівнює нескінченності):

$$I'(\alpha) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} \right]' dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos \alpha x dx.$$

Але останній інтеграл легко обчислюється за допомогою елементарних функцій. Він дорівнює

$$\frac{1}{1 + \alpha^2}.$$

Тому

$$I'(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha^2}$$

Інтегруючи отриману тотожність, знайдемо $f(\alpha)$:

$$I(\alpha) = \arctg \alpha + C. (*)$$

Залишається визначити C . Для цього зауважуємо, що

$$I(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin 0 \cdot x}{x} dx = \int_0^{\infty} 0 dx = 0$$

Крім того, $\arctg 0 = 0$. Підставляючи в рівність (*) $\alpha = 0$, знайдемо:

$I(0) = \arctg 0 + C$, звідки $C = 0$. Отже, для будь-якого значення α має місце рівність $I(\alpha) = \arctg \alpha$, тобто

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \arctg \alpha .$$

Приклад 17. Гамма-функція.

Розглянемо інтеграл, що залежить від параметра α ,

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx . (**)$$

Покажемо, що цей невластний інтеграл існує (сходиться) при $\alpha > 0$, Представимо його у вигляді суми

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx + \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx .$$

Перший інтеграл правої частини сходиться, тому що

$$0 < \int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} .$$

Другий інтеграл також сходиться. Дійсно, нехай n — ціле число таке, що $n > \alpha - 1$. Тоді, очевидно,

$$0 < \int_1^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx < \int_1^{\infty} x^n e^{-x} dx < \infty .$$

Останній інтеграл обчислюємо шляхом інтегрування по частинам з обліком того, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{e^k} = 0 (***)$$

при будь-якому цілому додатному k . Отже, інтеграл (**) визначає деяку функцію α . Її позначають $\Gamma(\alpha)$ і називають *гамма-функцією*:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx .$$

Ця функція часто використовується в додатках математики. Знайдемо значення $\Gamma(\alpha)$ при цілих α . При $\alpha=1$ маємо

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1 (****)$$

Нехай ціле $\alpha > 1$. Інтегруємо по частинам:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = -x^{\alpha-1} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + (\alpha-1) \int_0^{\infty} x^{\alpha-2} e^{-x} dx .$$

Або, враховуючи (***)

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) (*****)$$

На підставі (****) і (*****) знаходимо при $\alpha=n$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Мікромодуль 22.

Індивідуальні тестові завдання

1. Зіставляючи інтегральну суму s_n і переходячи до границі, обчислити визначені інтеграли

$$\int_a^b x^2 dx .$$

Указівка. Відрізок $[a, b]$ розділити на n частин точками $x_i = aq^i$

($i=0, 1, 2, \dots, n$), де $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$.

$$2. \int_a^b \frac{dx}{x}, \text{ де } 0 < a < b .$$

Указівка. Розподіл відрізка $[a, b]$ проводити так само, як і в попередньому прикладі.

$$3. \int_a^b \sqrt{x} dx .$$

Указівка. Див. попередній приклад.

$$4. \int_a^b \sin x dx$$

Указівка. Попередньо установити наступну тотожність:

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin[a+(n-1)h] = \frac{\cos(a-h) - \cos(a+nh)}{2 \sin h},$$

для цього треба помножити і розділити всі члени лівої частини на $\sin h$ і замінити добуток синусів різницею косинусів.

$$5. \int_a^b \cos x \, dx$$

Користуючись формулою Ньютона—Лейбница, обчислити визначені інтеграли:

$$6. \int_0^1 x^4 \, dx \quad 7. \int_0^1 e^x \, dx \quad 8. \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx \quad 9. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad 10. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. \int_0^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx \quad 12. \int_1^e \frac{dx}{x} \quad 13. \int_1^x \frac{dx}{x} \quad 14. \int_0^x \sin x \, dx \quad 15. \int_{\sqrt[3]{a}}^x x^2 \, dx.$$

$$16. \int_1^z \frac{dx}{2x-1} \quad 17. \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \quad 18. \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx.$$

Вирахувати значення нижченаведених інтегралів, приймаючи зазначені підстановки:

$$19. \int_0^{\pi/2} \sin \cos^2 x \, dx, \quad \cos x = t \quad 20. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

$$21. \int_1^4 \frac{xdx}{\sqrt{2+4x}}, \quad 2+4x=t^2 \quad 22. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad x = \operatorname{tg} t.$$

$$23. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad x-1=t^2 \quad 24. \int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, \quad z = \frac{1}{x}.$$

$$25. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{6-5\sin \varphi + \sin^2 \varphi}, \quad \sin \varphi = t.$$

Довести, що

$$26. \int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m \, dx \quad (m > 0, n > 0).$$

$$27. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx \quad 28. \int_0^a f(x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) \, dx.$$

Обчислити наступні невласні інтеграли:

$$29. \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 30. \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx \quad 31. \int_0^{\infty} \frac{dx}{a^2-x^2} \quad 32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$33. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^5} \quad 34. \int_0^1 \ln x \, dx \quad 35. \int_0^{\infty} x \sin x \, dx \quad 36. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$37. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} \quad 38. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad 39. \int_0^2 \frac{dx}{x^3} \quad 40. \int_0^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$41. \int_{-t}^1 \frac{dx}{x^4} \quad 42. \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx \quad (a > 0) \quad 43. \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$$

Обчислити наближені значення інтегралів:

$$44. \ln 5 = \int_1^5 \frac{dx}{x}$$

по формулі трапецій і по формулі Симпсона ($n=22$).

$$45. \int_1^{11} x^3 \, dx$$

по формулі трапецій і по формулі Симпсона ($n=10$).

$$46. \int_0^1 \sqrt{1-x^3} \, dx$$

по формулі трапецій ($n=6$).

$$47. \int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$$

по формулі Симпсона ($n = 4$).

$$48. \int_4^{10} \lg_{10} x \, dx$$

по формулі трапецій і по формулі Симпсона ($n = 10$).

49. Вирахувати значення π із співвідношення

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

застосовуючи формулу Симпсона ($n = 10$).

$$50. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

по формулі Симпсона ($n = 10$).

51. Виходячи з рівності

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \, dx = \frac{1}{\alpha},$$

де $a > 0$, знайти при цілому $n > 0$ величину інтеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n \, dx.$$

52. Виходячи з рівності

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}},$$

знайти величину інтеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}$$

53. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x} \, dx$$

54. Користуючись рівністю

$$\int_0^1 x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n},$$

обчислити інтеграл

Мікромодуль 23

Застосування визначеного інтеграла

Дві схеми застосування. Є дві основні схеми застосування визначеного інтеграла до знаходження геометричних, фізичних і т.п. величин.

Перша схема заснована на визначенні інтеграла як границі інтегральної суми (див. формулу (9.46)). Досліджувана величина приблизно представляється у вигляді інтегральної суми, причому зі здрібнюванням розбивки це представлення стає усе більш точним і в границі переходить у точне. Тому дана величина дорівнює границі інтегральної суми, тобто інтегралові. Цей прийом досить продемонстрований на прикладах п. 1, що привели до чотирьох інтегралів (9.47). Як зазначено в п. 2, ця схема заснована на представленні про інтеграл як про суму нескінченно великого числа нескінченно малих доданків.

Друга схема застосування інтегралів полягає в тому, що складається співвідношення між диференціалами розглянутих величин, яке називають *диференціальним рівнянням*. Від цього співвідношення ми переходимо до співвідношення між самими величинами за допомогою інтегрування на основі формули (9.52), яку можна записати також у вигляді

$$\int dy = y_{\text{кінцеве}} - y_{\text{початкове}}$$

Це співвідношення означає просто, що сума всіх нескінченно малих приростів якої-небудь величини дорівнює повному приросту цієї величини.

Розглянемо приклад. Нехай точка рухається уздовж осі s , проходячи відрізок від $s=a$ до $s=b$, причому на ній діє змінна сила, спрямована уздовж осі і яка приймає в кожній точці s значення $F(s)$. Нехай потрібно обчислити загальну роботу $A_{\text{заг}}$, виконану цією силою на зазначеному шляху. Для цього помітимо, що робота A , яка виконана силою у процесі руху, знаходиться у

функціональному зв'язку з пройденим шляхом, тобто $A=A(s)$. Якщо точка проходить малий інтервал від s до $s+\Delta s$, то сила не встигає істотно змінитися і її можна приблизно вважати сталою, тобто написати по відомій формулі фізики

$$\Delta A \approx F(s)\Delta s.$$

Більш точна формула має вигляд

$$\Delta A = F(s)\Delta s + \alpha, \text{ де } |\alpha| \ll \Delta s, \quad (9.131)$$

тобто α має вищий порядок малості, чим Δs . Те, що тут дійсно вищий порядок малості, впливає з наступного міркування: α виходить через те, що F на ділянці Δs устигає змінитися, але при нескінченно малому Δs ця зміна також нескінченно мала, а при підрахунку ΔA цю зміну треба ще помножити на Δs .

Якщо тепер згадати визначення диференціала як головної лінійної частини приросту, то з (9.131) можна написати

$$dA = F(s)ds. \quad (9.132)$$

Інтегруючи, одержимо

$$A_{\text{заг}} = A(b) - A(a) = \int_a^b dA = \int_a^b F(s)ds;$$

часто пишуть просто

$$A = \int F ds.$$

Хоча тут границі інтегрування не виписані, але, зазвичай, це інтеграл визначений, границі міркуються.

На практиці, зазвичай, замість цього детального міркування користуються наступним, більш коротким: протягом нескінченно малого інтервалу шляху ds силу можна вважати сталою, тобто для відповідного нескінченно малого приросту роботи відразу виходить формула (9.132), яку і інтегрують. Якщо докладно розібратися в цьому вірному, але короткому міркуванні, то і вийде приведенне вище детальне міркування.

Диференціальні рівняння з розподільними змінними. Співвідношення (9.132) у загальному вигляді можна записати так:

$$dy = f(x)dx, \quad (9.133)$$

де x і y — якісь змінні, які функціонально зв'язані між собою. Інтегруючи, одержимо

$$y_1 - y_0 = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx, \text{ де } y_0 = y(x_0), \text{ а } y_1 = y(x_1).$$

Рівняння (9.133) — це найпростіше диференціальне рівняння. Більш докладно диференціальні рівняння будуть вивчатися в іншому модулі, однак найпростіші приклади, що не вимагають особливої теорії, можна показати вже зараз. Так, зустрічаються рівняння вигляду

$$dy = \varphi(y)dx. \quad (9.134)$$

Таке рівняння не можна відразу інтегрувати, так як тоді в правій частині під знаком інтеграла буде стояти невідома функція $y(x)$. Потрібно попередньо перенести y до dy , тобто написати

$$\frac{dy}{\varphi(y)} dx,$$

звідки

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\varphi(y)} = x_1 - x_0.$$

Аналогічним чином рівняння

$$dy = f(x)\varphi(y)dx \quad (9.135)$$

інтегрується так:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x) dx, \quad \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\varphi(y)} = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

Рівняння (9.133)—(9.135) називаються *диференціальними рівняннями з розподільними змінними*, так як в результаті найпростіших алгебраїчних перетворень у них удається відокремити член з dx і x від члена з dy і y , після чого інтегрування негайно виконується.

Розглянемо, наприклад, задачу про витікання рідини з циліндричної судини, у дні якої пророблено отвір площею σ (рис. 9.37). Висота h рівня рідини залежить від часу t , тобто $h=h(t)$. Якщо рідина нев'язка і силами поверхневого натягу можна знехотити, то швидкість v витікання рідини із судини з достатньою точністю описується законом Торічеллі.

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (9.136)$$

На підставі цього закону легко скласти диференціальне рівняння задачі. Будемо міркувати коротко, як в останньому абзаці п.6. За час dt швидкість витікання можна вважати сталою; виходить, у силу формули (9.136) об'єм, який витік дорівнює

$$dV = \sigma \cdot v dt = \sigma \sqrt{2gh} dt.$$

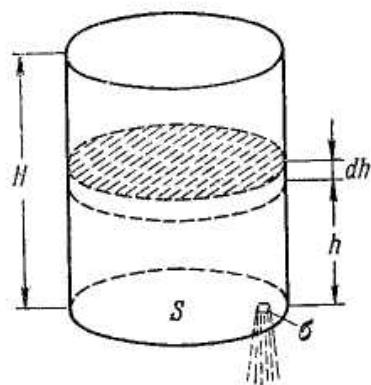


Рис. 9.37.

З іншого боку, той же об'єм дорівнює $dV = S|dh| = -Sdh$; треба врахувати, що h убиває і тому $dh < 0$. Прирівнюючи обидва вирази, одержимо рівняння

$$-S dh = \sigma \sqrt{2gh} dt$$

типу (9.134). Для його інтегрування віднесемо h до dh :

$$-\frac{S dh}{\sigma \sqrt{2gh}} dt; \int_H^0 -\frac{S dh}{\sigma \sqrt{2gh}} = T,$$

де T - повний час витікання рідини. Обчислюючи, одержимо

$$-\frac{S}{\sigma \sqrt{2g}} 2\sqrt{h} \Big|_{h=H}^0 = T, \quad T = \frac{S}{\sigma} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Обчислення площ плоских фігур. Застосування визначеного інтеграла для обчислення площі криволінійної трапеції було розглянуто в п. 2, а правило знаків показано на рис. 9.4. Якщо треба знайти всю заштриховану на рис.9.4 площу в «арифметичному», а не «алгебраїчному» змісті, то можна користуватися формулою

$$S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^b |f(x)| dx ;$$

останній інтеграл обчислюється, як описано в прикладі 1 п. 4.

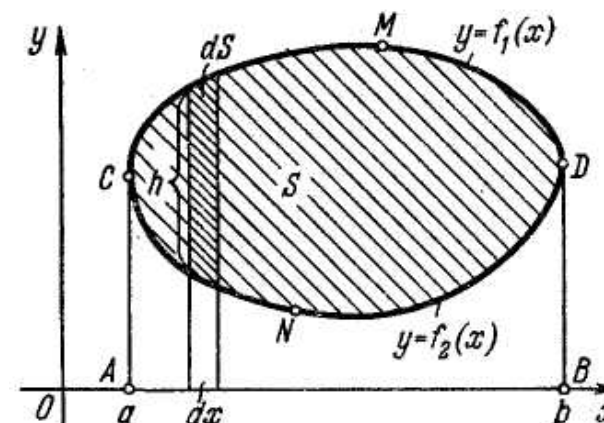


Рис. 9.38.

Обчислення площ фігур, відмінних від криволінійних трапецій, також здійснюється за допомогою інтегралів. Так, фігуру, яка зображена на рис. 9.38, можна одержати як різницю двох криволінійних трапецій $ACMDBA$ і $ACNDBA$, тобто

$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_a^b h(x) dx, \quad (9.138)$$

де $h(x)$ — висота перерізу фігури прямою, яка паралельна осі y , на даній абсцисі x . Формулу (9.138) можна зрозуміти також у такий спосіб. Якщо розглянути частину фігури, яка лежить ліворуч від прямої $x = \text{const}$, то площа цієї частини залежить від x . Якщо x одержить нескінченно малий приріст dx (див. рис. 9.38), то до площі додається смужка, яку з точністю до малих вищого порядку можна вважати прямокутником (порівн. висновок формул (9.131) і (9.132)). Звідси $dS = h(x)dx$ і, інтегруючи, одержуємо формулу (9.138).

Площа S фігури (рис. 9.39), яка обмежена графіком функції $y=f(x)$ (зверху) і $y=g(x)$ (знизу) і прямими $x=a$, $x=b$, обчислюється по формулі

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (9.139)$$

У силу геометричного змісту визначеного інтеграла маємо (рис. 9.39)

$$\int_a^b f(x) dx = \text{пл. } (AA_1B_1b)$$

і

$$\int_a^b g(x) dx = \text{пл. } (cBb) - \text{пл. } (aAc)$$

тому

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \\ &= \text{пл. } (AA_1B_1b) - \text{пл. } (cBb) + \text{пл. } (aAc) = S, \end{aligned}$$

як це видно з креслення.

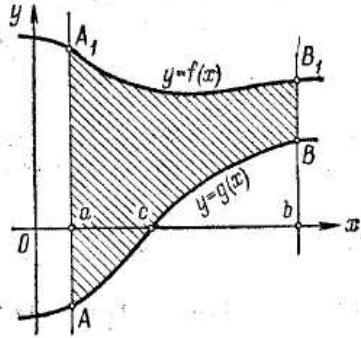


Рис. 9.39.

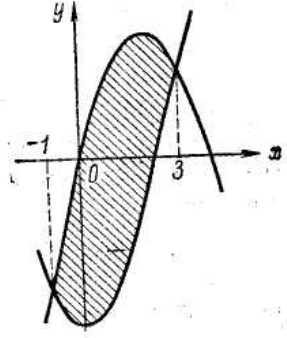


Рис. 9.40.

Наприклад, обчислимо площу між параболою $y=4x-x^2$ і $y=x^2-6$ (рис. 9.40). Спочатку знайдемо точки перетинання парабол, для чого розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = x^2 - 6, \end{cases}$$

тобто знайдемо точки на площині, координати яких задовольняють одночасно рівнянням обох парабол. З цієї системи $x^2 - 2x - 3 = 0$ і $x_1 = -1$; $x_2 = 3$.

Тоді по формулі (9.139) шукана площа S буде дорівнювати

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 [(4x - x^2)] dx = \int_{-1}^3 [6 + 4x - 2x^2] dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 \right] - \left[6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 \right] = 21 \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Часто контур фігури буває заданий у параметричному вигляді. Тоді в розглянутих інтегралах треба зробити заміну змінних, прийнявши параметр за нову змінну інтегрування.

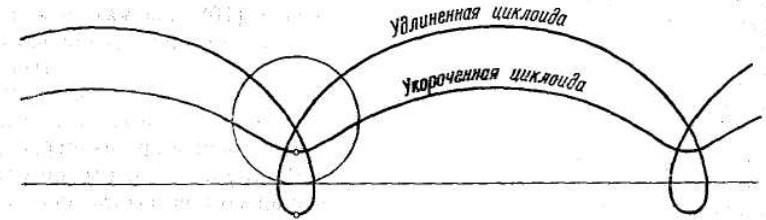


Рис. 9.40-А

Обчислимо, наприклад, площу, яка розташована під однією з арок циклоїди (рис. 9.40-А), що має параметричні рівняння

$$\begin{cases} x = OQ = OT - QT = \tilde{MT} - MP = R\psi - R\sin\psi; & x = R(\psi - \sin\psi); \\ y = OM = TN - PN = R - R\cos\psi; & y = R(1 - \cos\psi); \end{cases}$$

при цьому, щоб вийшла одна арка, повинно бути $0 \leq \psi \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} R(1 - \cos\psi) d[R(\psi - \sin\psi)] = \\ &= R^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\psi)^2 d\psi = 3\pi R^2, \end{aligned}$$

так як

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos\psi)^2 d\psi &= \int (1 - 2\cos\psi + \cos^2\psi) d\psi = \psi - 2\sin\psi + \int \frac{1 + \cos 2\psi}{2} d\psi = \\ &= \frac{3}{2}\psi - 2\sin\psi + \frac{\sin 2\psi}{4} + C. \end{aligned}$$

Розглянемо тепер площу фігури, яка обмежена замкнутим контуром, заданим у параметричному вигляді, $x=x(t)$, $y=y(t)$. Нехай при зміні t від α до γ контур (L) проходиться один раз у

додатному напрямку, тобто проти годинної стрілки (рис. 9. 41).
Тоді

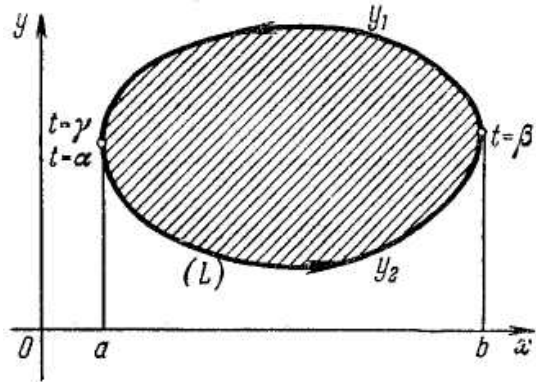


Рис. 9.41.

$$S = \int_a^b y_1 dx - \int_a^b y_2 dx.$$

Однак, перший інтеграл дорівнює

$$\int_\gamma^\beta y \dot{x} dt,$$

так як коли t змінюється від α до γ , то x змінюється від a до b , а $y=y_1$ і $x dt = dx$. Аналогічно перетворюється другий інтеграл, і ми одержуємо

$$S = \int_\gamma^\beta y \dot{x} dt - \int_\alpha^\beta y \dot{x} dt = - \int_\alpha^\beta y \dot{x} dt - \int_\beta^\gamma y \dot{x} dt = - \int_\alpha^\gamma y \dot{x} dt. \quad (9.140)$$

У силу властивості 10 п. 4 в остаточній формулі (9.140.) значення $t=\alpha$ і $t=\gamma$ не зобов'язані відповідати крайній лівій точці контуру; важливо тільки, щоб він обходився рівно один раз.

Аналогічно, проектуючи контур на вісь y , можна вивести формулу

$$S = \int_\alpha^\gamma x \dot{y} dt. \quad (9.141)$$

Якщо ж скласти формули (9.140) і (9.141), то вийде

$$S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\gamma (x \dot{y} - y \dot{x}) dt. \quad (9.142)$$

Якби зі зростанням t контур проходить у від'ємному напрямленні, то у всіх формулах (9.140)—(9.142) треба було б змінити знак.

Наприклад, площа еліпса з параметричними рівняннями

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

на основі формули (9.142) дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t (-a \sin t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

Перейдемо до виразу площі в полярних координатах. Нехай лінія задана полярним рівнянням $\rho=f(\varphi)$ і ми хочемо обчислити площу «сектора» $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ (рис. 9.42).

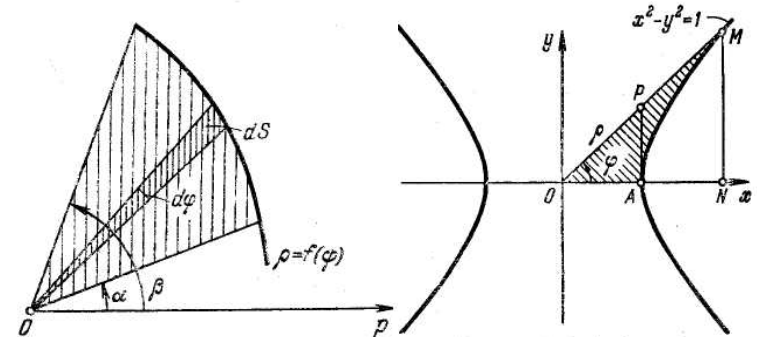


Рис. 9.42.

Рис. 9.43.

Якщо кут φ збільшується на $d\varphi$, то до площі додається шматочок, що з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за рівнобедрений трикутник з висотою ρ і основою $\rho d\varphi$. Виходить,

$$dS = \frac{1}{2} \rho \rho d\varphi; \quad S = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi. \quad (9.143)$$

Як приклад знайдемо площу, яка заштрихована на рис. 9.43. Перехід у рівнянні гіперболи до полярних координат дає

$$\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi = 1, \quad \text{тобто} \quad \rho^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi},$$

і по формулі (9.143) одержуємо,

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi}.$$

Звідси виходить наступний наслідок. Так як

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = e^{4S}, \operatorname{tg} \varphi = \frac{e^{4S} - 1}{e^{4S} + 1} = \frac{e^{2S} - e^{-2S}}{e^{2S} + e^{-2S}} = \operatorname{th} 2S$$

то

$$NM = \rho \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{\operatorname{th} 2S}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 2S}} = \frac{\operatorname{th} 2S}{\frac{1}{\operatorname{ch} 2S}} = \operatorname{sh} 2S$$

Аналогічно знаходимо, що

$$ON = \rho \cos \varphi = \operatorname{ch} 2S, AP = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{th} 2S.$$

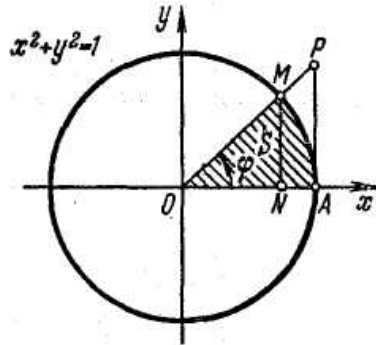


Рис. 9.44

Порівняння цих результатів на рис. 9.44, де

$$\varphi = 2S, MN = \sin 2S, ON = \cos 2S, AP = \operatorname{tg} 2S,$$

показує геометричну причину зв'язку тригонометричних (кругових) функцій з гіперболічними і розкриває походження терміна «гіперболічні» синус, косинус і тангенс.

Довжина лінії і дуги.

Перейдемо тепер до наступної задачі - визначення довжини лінії. У шкільному курсі приводилося визначення довжини кола як границі периметрів правильних вписаних багатокутників при необмеженому подвоєнні числа їхніх сторін. Тепер ми повинні узагальнити це визначення на будь-які лінії. Для цього виділимо з приведенного вище визначення саме істотне: у лінію (коло)

уписується ламана, береться довжина цієї ламаної, а потім збільшується число ланок ламаної так, що довжини всіх ланок прагнуть до нуля (подвоювання числа сторін). З цього і будемо виходити.

Означення. Довжиною l лінії L називається границя

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \text{довжина } (AA_1A_2 \dots A_{n-1}B) = l, \quad (9.144)$$

де $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ — вписана в L ламана, а μ — довжина найбільшої з ланок цієї ламаної (рис. 9.45).

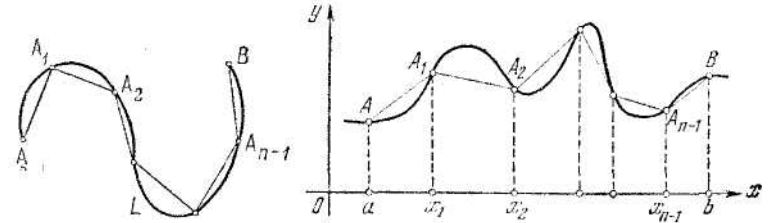


Рис. 9.45.

Рис. 9.46.

Покажемо, що якщо лінія L є графік функції $y = -f(x)$, $a \leq x \leq b$, що має безперервну похідну, то її довжина

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (9.145)$$

Впишемо в лінію L ламану $AA_1A_2 \dots A_{n-1}B$ (рис. 9.46). Її вершини мають координати: $A(a; f(a))$, $A_1(x_1; f(x_1))$, $A_2(x_2; f(x_2))$, ..., $A_{n-1}(x_{n-1}; f(x_{n-1}))$, $B(b; f(b))$. Обчислимо довжину цієї ламаної.

По формулі Лагранжа $f(x_1) - f(a) = f'(c_1)(x_1 - a)$, $a < c_1 < x_1$, так як довжина першої ланки дорівнює

$$AA_1 = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f(x_1) - f(a)]^2} = \sqrt{(x_1 - a)^2 + [f'(c_1)(x_1 - a)]^2} = \sqrt{1 + [f'(c_1)]^2} (x_1 - a), \quad a < c_1 < x_1.$$

Аналогічно встановлюється, що довжина другої ланки дорівнює

$$A_1A_2 = \sqrt{1 + [f'(c_2)]^2} (x_2 - x_1), \quad x_1 < c_2 < x_2,$$

і т.д., і нарешті, довжина останньої ланки

$$A_{n-1}B = \sqrt{1 + [f'(c_n)]^2} (b - x_{n-1}), \quad x_{n-1} < c_n < b.$$

Отже, у силу визначення довжини лінії (формула (9.144))

$$l = \lim_{\mu \rightarrow 0} [\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}(x_1 - a) + \sqrt{1+[f'(c_2)]^2}(x_2 - x_1) + \dots + \sqrt{1+[f'(c_n)]^2}(b - x_{n-1})]$$

А так як очевидно, що найбільша ланка μ ламаної і довжина λ найбільшого з відрізків $[a; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; b]$ (на які розбився відрізок $[a; b]$) прагнуть до нуля одночасно, то

$$l = \lim_{\mu \rightarrow 0} [\sqrt{1+[f'(c_1)]^2}(x_1 - a) + \sqrt{1+[f'(c_2)]^2}(x_2 - x_1) + \dots + \sqrt{1+[f'(c_n)]^2}(b - x_{n-1})] = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx,$$

так як в квадратних дужках стоїть інтегральна сума для написаного інтеграла.

Знайдемо, наприклад, довжину лінії $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3$.

Так як $y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} = \sqrt{x},$

то по формулі (9.145) одержуємо довжину l лінії

$$l = \int_0^3 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2} \Big|_0^3 = \frac{2}{3}[4^{3/2} - 1^{3/2}] = 4\frac{2}{3}.$$

Розглянемо лінію $y=f(x), a \leq x \leq b$, і точку на ній $M(x;f(x))$. Кожному числу x поставимо у відповідність число $l=l(x)$ - довжину лінії AM (рис. 9.47). Цим на відрізку $[a; b]$ задана функція $l=l(x)$. Диференціал цієї функції dl називається *диференціалом дуги*. Покажемо, що

$$dl^2 = dx^2 + dy^2. \tag{9.147}$$

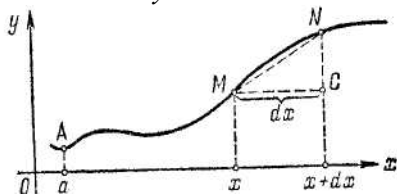


Рис. 9.47.

Дійсно, так як в силу формули (9.145)

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2} dt$$

то, використовуючи властивість визначеного інтеграла про те, що визначений інтеграл зі змінною верхньою границею є первісна для підінтегральної функції, отримуємо

$$dl = l'_x dx = \left(\int_a^x \sqrt{1+[f'(t)]^2} dt \right)' dx = \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx. \tag{9.147}$$

Звідси, підносячи до квадрату і з огляду на те, що $f'(x)dx=dy$, одержуємо

$$dl^2 = (1+[f'(x)]^2)dx^2 = dx^2 + [f'(x)dx]^2 = dx^2 + dy^2,$$

що і потрібно було довести.

Формула (9.146) має простий геометричний зміст — це теорема Піфагора «у малому». Справді, якщо скористатися формулою $\Delta y \approx dy$

то (рис. 9.47)

$$NC = \Delta y \approx dy, \quad M'N = \Delta l \approx dl. \tag{9.148}$$

Але по теоремі Піфагора для прямокутного ΔMNC

$$MN^2 = MC^2 + NC^2,$$

звідки, користуючись наближеними рівностями (9.148), одержуємо

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

і рівність при цьому точна, що гарантується формулою (9.146).

Перейдемо до задачі визначення довжини дуги. Диференціал дуги вже зустрічався в нашому курсі; будемо позначати його dL :

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

При цьому ми перед коренем беремо тільки +, вважаючи $d > 0$. Звідси якщо дуга обмежена значеннями $t=\alpha$ і $t=\beta$, то її довжина

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt$$

Формула для довжини плоскої лінії відповідно спрощується. Якщо ж лінія задана рівнянням вигляду $y=f(x)$, то при $a \leq x \leq b$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Наприклад, довжина циклоїди між її сусідніми точками повернення і симетрії циклоїди дорівнює

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^{\pi} R \sqrt{(\psi - \sin \psi)^2 + (1 - \cos \psi)^2} d\psi = 2R \int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos \psi)^2 + \sin^2 \psi} d\psi = \\ &= 2R \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \psi} d\psi = 4R \int_0^{\pi} \sin \frac{\psi}{2} d\psi = -8R \cos \frac{\psi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8R. \end{aligned}$$

Диференціал дуги в полярних координатах легко виходить з рис. 9.48:

$$dL = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}. \quad (9.149)$$

Звідси, якщо рівняння лінії дано в полярних координатах у вигляді $\rho=f(\varphi)$, то її довжина при $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ дорівнює

$$dL = \int_{\varphi=\alpha}^{\beta} \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2} d\varphi$$

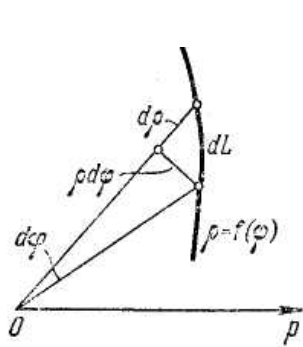


Рис. 9.48.

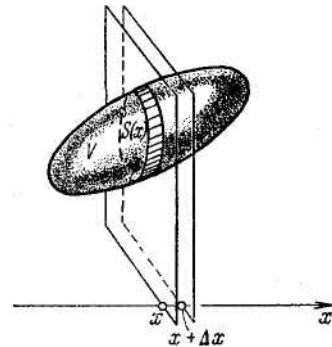


Рис. 9.49.

Вираз (9.149) можна одержати також з формул

$$dL = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

Об'єм тіла. Нехай потрібно знайти об'єм тіла, якщо відомі площі перерізів площинами, перпендикулярними до деякої осі,

яку ми прийемо за вісь x (рис. 9.49), $S=S(x)$. Якщо відрахувати об'єм від лівого кінця тіла до зазначеної площини, то, коли x збільшиться на $x=dx$ і ця площина пересунеться праворуч, до об'єму додасться «скибка», яку з точністю до малих вищого порядку можна вважати циліндром із широкою основою і маленькою висотою. Звідси

$$\Delta V = S(x)\Delta x + \text{малі вищого порядку},$$

тобто

$$dV = S(x)dx,$$

і якщо x змінюється від a до b ,

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (9.150)$$

Як приклад знайдемо об'єм *циліндричного копита*, що відтинається від прямого кругового циліндра площиною, яка проходить через діаметр основи (рис. 9.50). З подоби трикутників ABC і $A'B'C$ одержуємо, що площа заштрихованого перерізу дорівнює

$$S = \frac{1}{2}RH \frac{R^2 - x^2}{R^2} = \frac{R^2 - x^2}{2R} H$$

і по формулі (9.150)

$$V = 2 \int_0^R S(x) dx = 2 \int_0^R \frac{R^2 - x^2}{2R} H dx = \frac{H}{R} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{2}{3} R^2 H.$$

Розглянемо, зокрема, *об'єм тіла обертання*. Нехай лінія з рівнянням $y=f(x)$ обертається в просторі навколо осі x ;

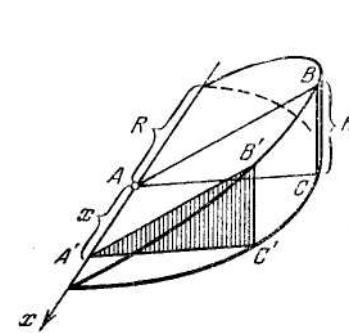


Рис. 9.50.

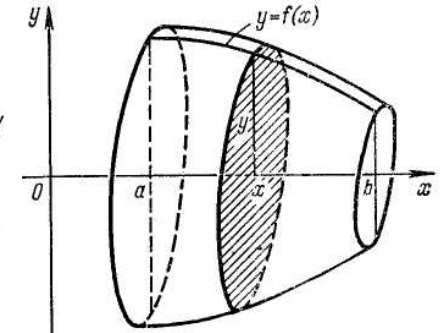


Рис. 9.51.

тоді площа поперечного перерізу дорівнює $S=\pi y^2$ (див. рис. 9.51) і по формулі (9.150)

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (9.151)$$

Наприклад, куля виходить у результаті обертання півкола з рівнянням

$$y = \sqrt{R^2 - x^2};$$

тому об'єм кулі

$$V = \pi \cdot 2 \int_0^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Площа поверхні обертання. Формула для площі поверхні довільного вигляду буде виведена в іншому модулі. Однак обчислення площі поверхні обертання можна показати зараз. Нехай лінія $y=f(x)>0$ обертається навколо осі x (рис. 9.52); будемо проводити площини, перпендикулярні до осі обертання, і розглядати площу поверхні, яка розташована ліворуч будь-якого такого перерізу.

Якщо площина переміститься на dx , то до площі додається «елементарне кільце», заштриховане на рис. 9.52. Розрізавши це кільце і розгорнувши його, одержимо смужку шириною d і довжиною $2\pi y$, так як y — радіус кільця. Звідси

$$dS = 2\pi y dL = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

і тим самим

$$S = 2\pi \int_a^b y dL = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (9.152)$$

Обчислимо площу частини параболоїда обертання, яка відсічена площиною, перпендикулярною до осі обертання (рис. 9.53), якщо дано радіус основи R і висота H . Так як обертовою лінією служить парабола з віссю по осі x , то рівняння лінії має вигляд $x=ky^2$.

Константу k треба підібрати так, щоб парабола пройшла через точку (H, R) , тобто $H = kR^2$,

$$k = \frac{H}{R^2},$$

і остаточно рівняння лінії буде

$$x = \frac{H}{R^2} y^2, \quad \text{тобто } y = R \sqrt{\frac{x}{H}}$$

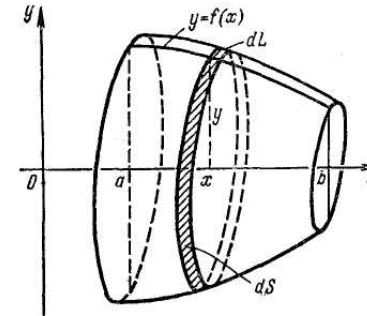


Рис. 9.52.

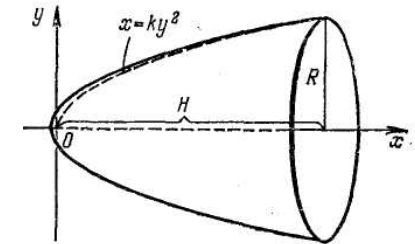


Рис. 9.53.

Користуючись формулою (9.152), одержимо

$$S = 2\pi \int_0^H R \sqrt{\frac{x}{H}} \sqrt{1 + \left[\left(R \sqrt{\frac{x}{H}} \right)' \right]^2} dx = 2\pi \frac{R}{\sqrt{H}} \int_0^H \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{R^2}{H} \cdot \frac{1}{4x}} dx =$$

$$= \pi \frac{R}{H} \int_0^H \sqrt{4xH + R^2} dx = \pi \frac{R}{H} \left. \left(\frac{3}{2} \right) \cdot 4H \right|_0^H = \frac{\pi R}{6H^2} [(4H^2 + R^2)^{3/2} - R^3]$$

Обчислення роботи за допомогою визначеного інтеграла

Нехай під дією деякої сили F матеріальна точка M рухається по прямій Os , причому напрямлення сили збігається з напрямом руху. Потрібно знайти роботу, яка виконана силою F при переміщенні точки M з положення $s=a$ у положення $s=b$.

1) Якщо сила F стала, то робота A виражається добутком сили F на довжину шляху, тобто

$$A = F(b-a).$$

2) Припустимо, що сила F безперервно змінюється в залежності від положення матеріальної точки, тобто являє собою функцію $F(s)$, безперервну на відрізьку $a \leq s \leq b$.

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n довільних частин с довжинами $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, потім у кожному частковому відрізку $[s_{i-1}, s_i]$ виберемо довільну точку ξ_i і замінимо роботу сили $F(s)$ на шляху Δs_i ($i=1, 2, \dots, n$) добутком

$$\Delta s_i F(\xi_i) \Delta s_i.$$

Це значить, що в границях кожного часткового відрізка ми приймаємо силу F за сталу, а саме: покладаємо $F=F(\xi_i)$. У такому випадку вираз $F(\xi_i)\Delta s_i$ при досить малому Δs_i дає нам наближене значення роботи сили F на шляху Δs_i , а сума

$$A_n = \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \Delta s_i$$

буде наближеним виразом роботи сили F на усьому відрізку $[a, b]$.

Очевидно, A_n являє собою інтегральну суму, яка зіставлена для функції $F=F(s)$ на відрізку $[a, b]$. Границя цієї суми при $\max(\Delta s_i) \rightarrow 0$ існує і виражає роботу сили $F(s)$ на шляху від точки $s=a$ до точки $s=b$:

$$A = \int_a^b F(s) ds. \tag{9.153}$$

Приклад 1. Стиск S гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі F . Обчислити роботу сили F при стиску пружини на 5 см, якщо для стиску її на 1 см, потрібна сила в 1 кг (рис. 9.54).

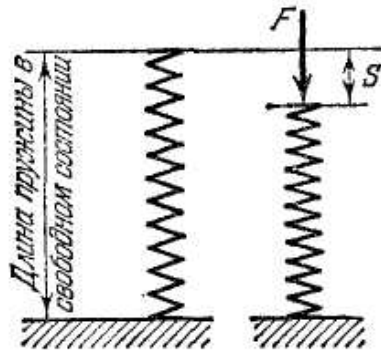


Рис. 9.54.

Розв'язання. Сила F і переміщення S зв'язані за умовою залежністю $F=k$, де k — стала.

Будемо виражати S у метрах, F — у кілограмах. При $S=0,01$ $F=1$, тобто $1=k \cdot 0,01$, звідки $k=100$, $F=100S$.

На підставі формули (9.153) маємо:

$$A = \int_0^{0,05} 100S ds = 100 \frac{S^2}{2} \Big|_0^{0,05} = 0,125 \text{ кжм}.$$

Приклад 2. Сила F , з яким електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2 (ті ж знаки), що знаходиться від нього на відстані r , виражається формулою

$$F = k \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

де k -стала.

Визначити роботу сили F при переміщенні заряду e_2 із точки A_1 , що відстоїть від e_1 на відстані r_1 у точку A_2 , що відстоїть від e_1 на відстані r_2 , покладаючи, що заряд e_1 розміщено у точці A_0 , яку прийнято за початок відліку.

Розв'язання. По формулі (9.153) маємо:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} k \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = -k e_1 e_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = k e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

При $r_2 = \infty$ одержимо

$$A = \int_{r_1}^{\infty} \frac{k e_1 e_2}{r^2} dr = \frac{k e_1 e_2}{r_1},$$

При $e_2 = 1$

$$A = k \frac{e_1}{r}.$$

Остання величина називається *потенціалом поля*, створюваного зарядом e_1 .

Координати центра ваги

Нехай на площині Oxy дана система матеріальних точок

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n),$$

з масами m_1, m_2, \dots, m_n .

Добутки $x_i m_i$ і $y_i m_i$ називаються *статичними моментами* маси m_i щодо осей Oy і Ox .

Позначимо через x_c і y_c координати центра ваги даної системи. Тоді, як відомо з курсу механіки, координати центра ваги описаної матеріальної системи визначаються формулами:

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (9.154)$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (9.155)$$

Ми використовуємо ці формули при пошуку центрів ваги різних фігур і тіл.

1. Центр ваги плоскої лінії. Нехай дана крива AB рівнянням $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, і нехай ця крива являє собою матеріальну лінію.

Припустимо, що лінійна щільність (лінійною щільністю називається маса одиниці довжини даної лінії. Ми припускаємо, що лінійна щільність на всіх ділянках кривої однакова.) такої матеріальної кривої дорівнює γ . Розіб'ємо лінію на n частин довжини $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Маса цих частин будуть дорівнювати добуткові їхніх довжин на (сталу) щільність: $\Delta m_i = \gamma \Delta s_i$. На кожній частині дуги Δs_i візьмемо довільну точку з абсцисою ξ_i . Представляючи тепер кожну частину дуги Δs_i матеріальною точкою $P_i[\xi_i, f(\xi_i)]$ з масою $\gamma \Delta s_i$ і підставляючи у формули (9.154) і (9.155) замість x_i значення ξ_i , замість y_i значення $f(\xi_i)$, а замість m_i , значення $\gamma \Delta s_i$ (маси частин Δs_i) одержимо наближені формули для визначення центра ваги дуги:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \Delta s_i}{\sum \gamma \Delta s_i}.$$

Якщо функція $y=f(x)$ безперервна і має безперервну похідну, то суми, які стоять в чисельнику і знаменнику кожного дробу при

$\max \Delta s_i \rightarrow 0$ мають границі, рівні границям відповідних інтегральних сум. Таким чином, координати центра ваги дуги виражаються визначеними інтегралами:

$$x_c = \frac{\int_a^b x ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}, \quad (9.156)$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x) ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1+f'^2(x)} dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)} dx}. \quad (9.157)$$

Приклад 1. Знайти координати центра ваги півкола $x^2 + y^2 = a^2$, розташованого над віссю Ox .

Розв'язання. Визначимо ординату центра ваги:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx,$$

$$y_c = \frac{\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx}{\int_{-a}^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx} = \frac{a \int_{-a}^a dx}{\pi a} = \frac{2a^2}{\pi a} = \frac{2a}{\pi},$$

$x_c = 0$ (так як півколо симетричне щодо осі Oy).

Центр ваги плоскої фігури. Нехай дана фігура, яка обмежена лініями $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$, являє собою матеріальну плоску фігуру. Поверхневу щільність, тобто масу одиниці площі поверхні, ми будемо вважати сталою і рівною δ для всіх частин фігури.

Розіб'ємо дану фігуру прямими $x=a$, $x=x_1, \dots, x=x_n=b$ на смужки ширини $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Маса кожної смужки буде дорівнювати добуткові її площі на щільність δ . Якщо кожну

смужку замінити прямокутником (рис. 9.55) з основою Δx_i і висотою

$$f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$$

де

$$\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2},$$

то маса смужки буде приблизно дорівнювати

$$\Delta m_i = \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Приблизно центр ваги цієї смужки буде знаходитися в центрі відповідного прямокутника:

$$(x_i)_c = \xi_i, \quad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}.$$

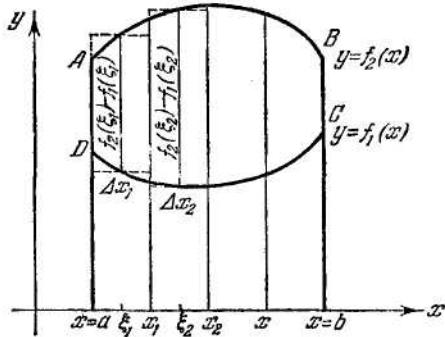


Рис. 9.55.

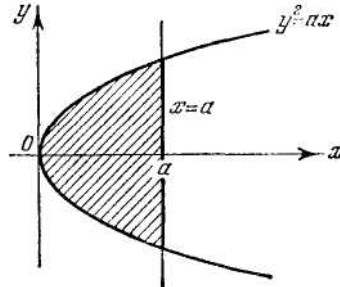


Рис. 9.56.

Замінюючи тепер кожну смужку матеріальною точкою, маса якої дорівнює масі відповідної смужки і зосереджена в центрі ваги цієї смужки, знайдемо наближене значення координат центра ваги усієї фігури (по формулах (9.154) і (9.155)):

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i},$$

$$y_c \approx \frac{\frac{1}{2} \sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}{\sum \delta [f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)] \Delta x_i}.$$

Переходячи до границі при $\Delta x_i \rightarrow 0$, одержимо:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] [f_2(x) - f_1(x)] dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx}.$$

Ці формули справедливі для будь-якої однорідної (тобто, яка має сталу щільність у всіх точках) плоскої фігури. Як ми бачимо, координати центра ваги не залежать від щільності δ фігури (у процесі обчислення δ скоротилося).

Приклад 2. Визначити координати центра ваги сегмента параболи $y^2 = ax$, що відтинається прямою $x=a$ (рис. 9.56).

Розв'язання. У даному випадку

$$f_2(x) = \sqrt{ax}, \quad f_1(x) = -\sqrt{ax},$$

тому

$$x_c = \frac{2 \int_0^a x \sqrt{ax} dx}{2 \int_0^a \sqrt{ax} dx} = \frac{2\sqrt{a} \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^a}{2\sqrt{a} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^a} = \frac{\frac{4}{5} a^3}{\frac{4}{3} a^2} = \frac{3}{5} a$$

$y_c = 0$ (так як сегмент симетричний щодо осі Ox).

Обчислення моменту інерції лінії, кола і циліндра за допомогою визначеного інтеграла. Нехай на площині xOy дана система матеріальних точок $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ з масами m_1, m_2, \dots, m_n . Тоді, як відомо з механіки, *момент інерції* системи матеріальних точок щодо точки O визначається так:

$$I_o = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i \quad \text{або} \quad I_o = \sum_{i=1}^n r_i^2 m_i \quad (9.158)$$

де

$$r_i^2 = \sqrt{x_i^2 + y_i^2},$$

Нехай крива AB дана рівнянням $y=f(x)$, $a \leq x \leq b$, де $f(x)$ — безперервна функція. Нехай ця крива являє собою *матеріальну лінію*. Нехай лінійна щільність лінії дорівнює γ . Знову розіб'ємо лінію на n частин довжини $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$, де

$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, а маси цих частин $\Delta m_1 = \gamma \Delta s_1, \Delta m_2 = \gamma \Delta s_2, \dots, \Delta m_n = \gamma \Delta s_n$. На кожній частині дуги візьмемо довільну точку з абсцисою ξ_i . Ордината цієї точки буде $\eta_i = f(\xi_i)$. Приблизно момент інерції дуги щодо точки O згідно формули (9.158) буде:

$$I_o \approx \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2) \gamma \Delta s_i. \quad (9.159)$$

Якщо функція $y=f(x)$ і її похідна $f'(x)$ безперервні, то при $\Delta s_i \rightarrow 0$ сума (9.159) має границю. Ця границя, що виражається визначеним інтегралом, і визначає момент інерції матеріальної лінії

$$I_o = \gamma \int_a^b [x^2 + f^2(x)] \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (9.160)$$

Момент інерції тонкого однорідного стрижня довжини l щодо його кінця. З'єднаємо стрижень з відрізком осі Ox : $0 < x < l$ (рис. 9.57). У цьому випадку $\Delta s_i = \Delta x_i, \Delta m_i = \gamma \Delta x_i, r_i^2 = x_i^2$ і формула (9.160) приймає вигляд

$$I_{o_c} = \gamma \int_0^l x^2 dx = \gamma \frac{l^3}{3}. \quad (9.161)$$

Якщо дано масу стрижня M , то $\gamma = M/l$ і формула (9.161) приймає вигляд

$$I_{o_c} = \frac{1}{3} Ml^2 \quad (9.162)$$

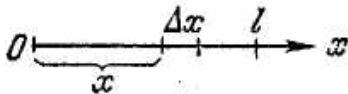


Рис. 9.57.

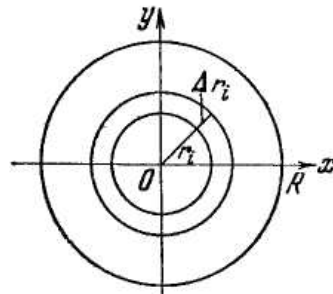


Рис. 9.58.

Момент інерції кола радіуса r щодо центра. Так як всі точки кола знаходяться на відстані r від центра, а його маса $m = 2\pi r \cdot \gamma$, то момент інерції кола буде:

$$I_o = mr^2 = \gamma 2\pi r \cdot r^2 = \gamma 2\pi r^3. \quad (9.163)$$

Момент інерції однорідного круга радіуса R щодо центра. Нехай δ — маса одиниці площі круга. Розіб'ємо круг на n кілець. Розглянемо одне кільце (рис. 9.58). Нехай його внутрішній радіус r_i , а зовнішній $r_i + \Delta r_i$. Маса цього кільця Δm_i з точністю до нескінченно малих вищого порядку відносно Δr_i буде $\Delta m_i = \delta 2\pi r_i \Delta r_i$. Момент інерції цієї маси щодо центра відповідно до формули (9.163) приблизно буде:

$$(\Delta I_o)_i \approx \delta 2\pi r_i \cdot \Delta r_i^2 = \delta 2\pi r_i^3 \cdot \Delta r_i.$$

Момент інерції всього круга, як система кілець, буде виражатися наближеною формулою

$$I_o \approx \sum_{i=1}^n \delta 2\pi r_i^3 \Delta r_i. \quad (9.164)$$

Переходячи до границі при $\max \Delta r_i \rightarrow 0$, одержимо момент інерції площі круга щодо центра

$$I_o = \delta 2\pi \int_0^R r^3 dr = \pi \delta \frac{R^4}{2}. \quad (9.165)$$

Якщо дано масу круга M , то поверхнева щільність δ визначається так:

$$\delta = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Підставляючи це значення, остаточно одержуємо:

$$I_o = MR^2/2 \quad (9.166)$$

Якщо маємо круглий циліндр, радіус основи якого R і маса M , то його момент інерції щодо осі виражається формулою (9.166)

Мікромодуль 23 Індивідуальні тестові завдання

Обчислення площ

1. Обчислити площу фігури, яка обмежена лініями $y^2 = 9x, y = 3x$.

2. Обчислити площу фігури, яка обмежена рівнобічною гіперболою $xy=a^2$, віссю Ox і прямими $x=a$, $x=2a$.
3. Обчислити площу фігури, укладеною між кривою $y=4-x^2$ і віссю Ox .
5. Обчислити площу фігури, яка обмежена ланцюговою лінією $y=ach(x/a)$, віссю Ox , віссю Oy і прямою $x=a$.
6. Обчислити площу фігури, яка обмежена кривою $y=x^3$, прямою $y=8$ і віссю Oy .
7. Обчислити площу області, яка обмежена одною напівхвилею синусоїди і віссю абсцис.
8. Обчислити площу області, укладеною між параболою $y^2=2px$, $x^2=2py$.
9. Обчислити всю площу фігури, яка обмежена лініями $y=x^3$, $y=2x$, $y=x$.
10. Обчислити площу області, яка обмежена одною аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ і віссю абсцис.
11. Обчислити площу фігури, яка обмежена астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.
12. Обчислити площу фігури всієї області, яка обмежена лемніскатою $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.
13. Обчислити площу області, яка обмежена однією петлею кривої $\rho=a\sin 2\varphi$.
14. Обчислити повну площу області, яка обмежена кардіоїдою $\rho=a(1-\cos \varphi)$.
15. Обчислити площу області, яка обмежена кривою $\rho=a\cos \varphi$.
16. Обчислити площу області, яка обмежена кривою $\rho=a\cos 2\varphi$.
17. Обчислити площу області, яка обмежена кривою $\rho=\cos 3\varphi$.
18. Обчислити площу області, яка обмежена кривою $\rho=a\cos 4\varphi$.

Обчислення об'ємів

19. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

- обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.
20. Відрізок прямої, що з'єднує початок координат із точкою (a, b) , обертається навколо осі y . Обчислити об'єм отриманого конуса.
 21. Обчислити об'єм тора, утвореного обертанням кола $x^2+(y-b)^2=a^2$ навколо осі Ox (передбачається, що $b \geq a$).
 22. Площа, яка обмежена лініями $y^2=2px$ і $x=a$, обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.

24. Фігура, яка обмежена одною дугою синусоїди $y=\sin x$ і віссю Ox , обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.
25. Фігура, яка обмежена параболою $y^2=4x$ і прямою $x=4$, обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.
26. Фігура, яка обмежена кривою $y=xe^x$ і прямими $y=0$, $x=1$, обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.
27. Фігура, яка обмежена одною аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ і віссю Ox , обертається навколо осі Ox . Обчислити об'єм тіла обертання.
28. Та ж фігура, що й у задачі 27, обертається навколо осі Oy . Обчислити об'єм тіла обертання.
29. Та ж фігура, що й у задачі 27, обертається навколо прямої, паралельній осі Oy і яка проходить через вершину циклоїди. Обчислити об'єм тіла обертання.
30. Та ж фігура, що й у задачі 27, обертається навколо прямої, паралельній осі Ox і яка проходить через вершину циклоїди. Обчислити об'єм тіла обертання.
31. Циліндр радіуса R пересічений площиною, що проходить через діаметр основи під кутом α до площини основи. Обчислити об'єм відсіченої частини.
32. Обчислити об'єм, який загальний двом циліндрам: $x^2+y^2=R^2$, $y^2+z^2=R^2$.
33. Точка перетинання діагоналей квадрата переміщується уздовж діаметра кола радіуса a ; при цьому площа, у якій лежить квадрат, увесь час залишається перпендикулярною до площини кола, а дві протилежні вершини квадрата переміщуються по колу (при русі величина квадрата, мабуть, міняється). Обчислити об'єм тіла, утвореного цим квадратом, що рухається.
34. Обчислити об'єм сегмента, що відтинається від еліптичного параболоїда $(y^2/2p)+(z^2/2q)=x$ площиною $x=a$.
35. Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами $z=0$, $y=0$, циліндричними поверхнями $x^2=2py$ і $z^2=2px$ і площиною $x=a$.
36. Пряма рухається паралельно площини Oyz , перетинаючи два еліпси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

які лежать у площинах Oxy і Oxz . Обчислити об'єм отриманого тіла.

Обчислення довжин дуг

37. Обчислити довжину астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
38. Обчислити довжину дуги напівкубової параболи $ay^2 = x^3$ від початку координат до точки з абсцисою $x=5a$.
39. Обчислити довжину ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ від початку координат до точки (x, y) .
40. Обчислити довжину однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.
41. Обчислити довжину дуги кривої $y = \ln x$ у границях від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.
42. Обчислити довжину дуги кривої $y = 1 - \ln \cos x$ у границях від $x=0$ до $x=\pi/4$.
43. Обчислити довжину спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ від полюса до кінця першого завитка.
44. Обчислити довжину спіралі $\rho = e^{a\varphi}$ від полюса до точки (ρ, φ) .
45. Обчислити всю довжину кривої $\rho = a \sin^3(\varphi/3)$.
47. Обчислити довжину кардіоїди $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.
48. Обчислити довжину дуги евольвенти кола $x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$, $y = a(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$ від $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_1$.

Обчислення площ поверхонь тіл обертання

49. Обчислити площу поверхні, отриманої обертанням параболи, $y^2 = 4ax$ навколо осі Ox , від початку O до точки з абсцисою $x=3a$.
50. Обчислити площу поверхні конуса, утвореного обертанням відрізка прямої $y=2x$ від $x=0$ до $x=2$:
а) Навколо осі Ox .
б) Навколо осі Oy .
51. Обчислити площу поверхні тора, отриманого обертанням кола $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ навколо осі Ox ($b > a$).
52. Обчислити площу поверхні тіла, утвореного обертанням кардіоїди навколо осі Ox . Кардіоїда задана параметричними рівняннями $x = a(2\cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$.
53. Обчислити площу поверхні тіла, отриманого обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ біля осі Ox .
54. Арка циклоїди (див. задачу 53) обертається біля осі Oy . Обчислити поверхню тіла обертання.
55. Арка циклоїди (див. задачу 53) обертається біля дотичної, паралельної осі Ox і яка проходить через вершину. Обчислити поверхню тіла обертання.

56. Астроида $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ обертається біля осі Ox . Обчислити поверхню тіла обертання.
57. Дуга синусоїди $y = \sin x$ від $x=0$ до $x=2\pi$ обертається біля осі Ox . Обчислити поверхню тіла обертання.
58. Еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

обертається навколо осі Ox . Обчислити поверхню тіла обертання.

Різні додатки визначеного інтеграла

59. Знайти центр ваги площі еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

60. Знайти центр ваги площі фігури, яка обмежена параболою $x^2 + 4y - 16 = 0$ і віссю Ox .
61. Знайти центр ваги об'єму напівкулі.
62. Знайти центр ваги поверхні напівкулі.
63. Знайти центр ваги поверхні кругового прямого конуса, радіус основи якого R , а висота h .
64. Фігура яка обмежена лініями $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), $y = 0$. Знайти центр ваги площі цієї фігури.
65. Знайти центр ваги площі фігури, яка обмежена параболою $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.
66. Знайти центр ваги площі кругового сектора з центральним кутом 2α і радіусом R .
67. Знайти величину тиску води на прямокутник, вертикально занурений у воду, якщо відомо, що основа його дорівнює 8 м, висота 12 м, верхня основа паралельна вільній поверхні води і знаходиться на глибині 5 м.
68. Верхній край шлюзу, що має форму квадрата зі стороною, рівною 8 м, лежить на поверхні води. Визначити величину тиску на кожному з частин шлюзу, утворену діленням квадрата однієї з його діагоналей.
69. Обчислити роботу, яка необхідна для того, щоб викачати воду з напівсферичної судини, діаметр якої дорівнює 20 м.
70. Тіло рухається прямолінійно за законом $x = ct^3$, де x —довжина шляху, який проходить тіло за час t , $c = \text{const}$. Опір середовища пропорційний квадратові швидкості, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює k . Знайти роботу, вироблену опором при пересуванні тіла від точки $x=0$ до точки $x=a$.

71. Обчислити роботу, яку потрібно затратити, щоб викачати рідину щільністю γ з резервуара, що має форму оберненого вершиною донизу конуса, висота якого H , а радіус основи R .

72. Дерев'яний поплавець циліндричної форми, площа підстави якого $S=4000 \text{ см}^2$, а висота $H=50 \text{ см}$, плаває на поверхні води.

Яку роботу потрібно затратити, щоб витягти поплавець на поверхню? (Питома вага дерева 0,8.)

73. Обчислити силу, з якою вода давить на греблю, що має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої $a=6,4\text{м}$, нижня $b=4,2\text{м}$, а висота $H=3 \text{ м}$.

74. Знайти осьову складову $P \text{ кг}$ повного тиску пари на сферичне дно котла. Діаметр циліндричної частини котла $D \text{ мм}$, тиск пари в котлі $p \text{ кг/см}^2$.

75. Кінець вертикального вала радіуса r підтримується плоским під'ятником. Вага вала P розподіляється рівномірно на всю поверхню опори. Обчислити повну роботу сил тертя при одному обороті вала. Коефіцієнт тертя μ .

76. Вертикальний вал закінчується п'ятою, що має форму усіченого конуса. Питомий тиск п'яти на під'ятник сталий і дорівнює P . Верхній діаметр п'яти D , нижній d , кут при вершині конуса 2α . Коефіцієнт тертя μ . Знайти роботу сил тертя за один оборот вала.

Модуль 10 Диференціальні рівняння

Мікромодуль 24

Диференціальні рівняння різних порядків

Диференціальне рівняння — це рівняння, яке зв'язує дві або більше функціонально залежні одна від одної величини і їхні диференціали або, що рівнозначно, похідні. Задача про складання і розв'язання (як говорять, інтегрування) таких рівнянь часто виникає у фізиці і техніці.

10.1 Загальні поняття

1. **Приклади.** Найпростіші диференціальні рівняння вже зустрічалися в нашому курсі. Наприклад, рівняння $dA=F(s)ds$ у

випадку сили, яка змінюється за законом Ньютона, можна переписати у вигляді

$$dA=(k/s^2)ds \text{ або } dA/ds=k/s^2 \quad (10.1)$$

де робота $A=A(s)$ — невідома функція від переміщення, яка знаходиться за допомогою інтегрування.

Рівняння $-S dh = \sigma \sqrt{2gh} dt$ можна переписати у вигляді

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\sigma}{S} \sqrt{2gh}, \quad (10.2)$$

де $h=h(t)$ — невідома функція.

Розглянемо ще приклад пружних коливань матеріальної точки маси M біля положення рівноваги (рис. 10.1). Тут невідомим є закон коливань $y=y(t)$. Прийmemo для простоти лінійний закон пружності, тобто будемо вважати силу пружності прямо пропорційною відхиленню точки від положення рівноваги; тоді ця сила дорівнює

$$F=-ky,$$

де k — коефіцієнт пружності.

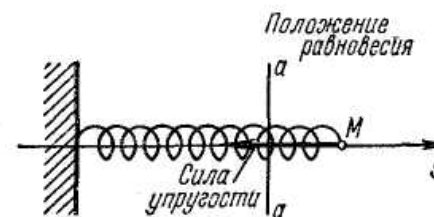


Рис. 10.1.

Відповідно до другого закону Ньютона, якщо інших сил немає, одержимо

$$M(d^2y/dt^2)=F=-ky, \quad (10.3)$$

звідки диференціальне рівняння для закону коливань здобуває вигляд

$$M(d^2y/dt^2)+ky=0 \quad (10.4)$$

В усіх випадках при доведенні диференціального рівняння у фізиці або техніці береться за основу деякий загальний фізичний або який-небудь інший закон, що має диференціальний характер (диференціальний закон), тобто такий, який зв'язує нескінченно малі зміни величин, які розглядаються. Після інтегрування

рівняння виходить інтегрувальний закон, що зв'язує кінцеві значення цих величин. Доведення основних диференціальних рівнянь у тій або іншій області знання — дуже відповідальна справа, тому що те або інше їхнє формулювання в значній мірі визначають подальший хід розвитку цієї області. Математична зрілість фізика або інженера багато в чому характеризується тим, наскільки правильно він може математично формулювати основні задачі в обраній їм області.

2. Основні означення. Найчастіше диференціальне рівняння виходить як рівняння, яке зв'язує аргумент або аргументи, невідому функцію (або функції) і її похідні; навіть якщо спочатку було співвідношення між диференціалами, то можна перейти до співвідношення між похідними (див. формули (10.1)). Якщо шукана функція залежить від одного аргументу, як у прикладах п.1, то диференціальне рівняння називається звичайним; у протилежному випадку воно називається рівнянням з частковими похідними. У цьому модулі будуть розглядатися тільки звичайні диференціальні рівняння.

Найвищий порядок похідної від шуканої функції, яка входить у рівняння, називається порядком цього рівняння. Так, рівняння (10.1) і (10.2) — першого порядку, тоді як рівняння (10.4) має другий порядок. У загальному випадку рівняння n -го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0, \quad (10.5)$$

де $y=y(x)$ — шукана функція. Зазвичай, при цьому функція F може фактично залежати не від усіх виписаних величин: наприклад, рівняння (10.4) не включає незалежну змінну і похідну першого порядку.

Розв'язанням диференціального рівняння називається функція, яка, при підстановці її в це рівняння, обертає його в тотожність. Уже на найпростіших прикладах легко переконатися в тім, що диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

Наприклад, з найпростішого рівняння

$$y'=x^2, \quad y= y(x), \quad (10.6)$$

відразу знайдемо за допомогою інтегрування

$$y = \frac{x^3}{3} + C. \quad (10.7)$$

Це — загальний розв'язок рівняння (10.6); він включає довільну сталу C і є записом усього різноманіття розв'язок. Придаючи довільній сталій конкретне числове значення, ми одержимо конкретні, часткові розв'язки рівняння (10.6):

$$y = \frac{x^3}{3}, \quad y = \frac{x^3}{3} + 6, \quad y = \frac{x^3}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ і т.д.}$$

У загальному випадку (10.5) розв'язок знаходиться в результаті n послідовних інтегрувань, так що загальний розв'язок рівняння n -го порядку містить n довільних сталих, тобто має вигляд

$$y=y(x; C_1, C_2, \dots, C_n). \quad (10.8)$$

Особливо часто загальний розв'язок виходить у неявній формі:

$$\Phi(y, x; C_1, C_2, \dots, C_n)=0. \quad (10.9)$$

Співвідношення (10.8) і (10.9) називаються також загальними інтегралами рівняння (10.5). Часткові розв'язки виходять, якщо придати кожній довільній сталій C_1, C_2, \dots, C_n конкретне числове значення. Графік кожного часткового розв'язка називається інтегральною лінією диференціального рівняння, яке розглядається. Рівняння цієї лінії — це рівняння (10.8) і (10.9) з конкретними C . Щоб із загального розв'язка виділити один частковий, потрібно, крім диференціального рівняння, поставити деякі додаткові умови. Найчастіше ставляться початкові умови, які при дослідженні процесу, який розвивається в часі, є математичним записом початкового стану процесу.

Наприклад, при розгляді процесу коливань у п. 1 з фізичних міркувань ясно, що конкретне коливання цілком визначається, якщо задані початкове відхилення і початкова швидкість коливної точки. Тому початкові умови для рівняння (10.5) мають вигляд

$$\text{при } t=t_0 \quad \text{задано } y=y_0 \text{ і } (dy/dt)=v_0. \quad (10.10)$$

У загальному випадку для рівняння (10.5) початкові умови мають такий вигляд:

$$\text{при } x=x_0 \quad \text{задано } y=y_0, \quad y'=(y')_0, \dots, y^{(n-1)}=y^{(n-1)}_0. \quad (10.11)$$

Так як загальний розв'язок (10.9) містить n довільних сталих, то накладених n співвідношень саме досить, у всякому разі принципово, для знаходження цих сталих і тим самим для знаходження часткового розв'язка. І фізично природно, що якщо відомі диференціальний закон, який керує розвитком процесу, а також початковий стан цього процесу, то сам процес є цілком визначеним.

Для рівняння першого порядку (10.6) умова (10.11) означає, що при деякому значенні $x=x_0$ повинно бути задане значення $y=y_0$. Нехай, наприклад, потрібно, щоб $y(1)=2$. Тоді з (10.7) одержуємо $2=(1^3)/3+C$, $C=5/3$, тобто шуканий частковий розв'язок має вигляд

$$y = \frac{x^3 + 5}{3}.$$

Задача про знаходження часткового розв'язка диференціального рівняння при заданій початковій умові називається *задачею Коші*.

Як ми побачимо в п. 7, деякі диференціальні рівняння, крім часткових розв'язок, які входять до складу загального, мають додатково *особливі* розв'язки, які не входять у цей склад.

10. 2. Рівняння першого порядку

3. Геометричний зміст. Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку такий:

$$F(x, y, y')=0, \tag{10.12}$$

де $y=y(x)$ — невідома функція. Будемо спочатку для простоти вважати, що рівняння може бути розв'язано відносно похідної від шуканої функції, тобто має вигляд

$$y'=f(x, y). \tag{10.13}$$

Початкова умова для рівняння (10.12) згідно п. 2 така:

$$\text{при } x=x_0 \text{ задано } y=y_0. \tag{10.14}$$

Щоб придати геометричний зміст рівнянню (10.13), розглянемо площину x, y ; тоді кожний частковий розв'язок буде зображено у вигляді лінії (інтегральної лінії) на цій площині, але ці лінії нам поки невідомі. Однак, узявши будь-яку точку $M(x; y)$ на площині, можна обчислити значення $f(x, y)$, яке у силу рівняння (10.13) повинно дорівнювати кутовому коефіцієнтові дотичної до шуканої лінії в точці M , якщо ця лінія пройде через M .

Тому можна поступити так: у кожній точці $M(x; y)$ площини уявимо собі проведеним маленький відрізок з кутовим коефіцієнтом $tga=f(x, y)$ (рис.10.2). Звичайно, ми на практиці можемо провести тільки кілька таких відрізків, але теоретично треба уявляти собі, що відрізки проведені в *кожній* точці. Отримана картина називається *полем напрямлень* на площині. Ми

бачимо, що інтегральні лінії рівняння (10.13) повинні проходити так, щоб у кожній своїй точці «йти уздовж поля», тобто дотикатися до відрізка, проведеного в цій точці.

Отже, *рівняння (10.13) задає на площині поле напрямлень*. З іншого боку, *початкова умова (10.14) задає на площині точку $M_0(x_0; y_0)$, через яку повинна пройти шукана інтегральна лінія*. Геометрично ясно (рис. 10.3), що цим інтегральна лінія цілком визначається. Іншими словами, *рівняння (10.13) при початковій умові (10.14) має цілком визначений, єдиний розв'язок*.

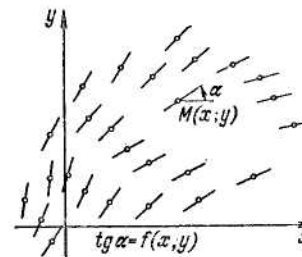


Рис. 10.2.

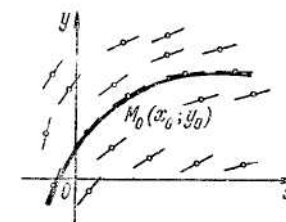


Рис. 10.3.

Більш докладне дослідження, проведене Коші, показало, що для цього досить, щоб у точці M_0 функція f була *безперервна*, а її похідна $\partial f/\partial y$ — *кінцева*. (Випадки порушення умов цієї *теорему Коші* будуть розглянуті в п. 7.)

Приведені міркування добре ілюструються на відомому досвіді з залізними обпилюваннями, поміщеними в магнітне поле. Самі обпилювання утворюють поле напрямлень, а інтегральними лініями цього поля служать так названі магнітні силові лінії.

З'ясований нами геометричний зміст рівняння (10.13) дає можливість приблизно графічно будувати інтегральні лінії цього рівняння. Для цього треба зобразити поле напрямлень по можливості в більшому числі точок площини, а потім будувати лінії, керуючись цими напрямленнями.

При побудові поля на практиці зручніше не вибирати довільно точки на площині, а будувати *ізокліни*, тобто лінії, на яких поле спрямоване однаково. Їхнє рівняння вийде, якщо праву частину рівняння (10.13) прирівняти константі, тобто написати

$$f(x, y) = k,$$

де k — кутовий коефіцієнт поля, який відповідає даній ізокліні.

Розглянемо, наприклад, рівняння $y' = x + y$.

Прирівнювання правої частини сталим $-2, -3/2, -1, -1/2, 0, 1, 2$ дає ізокліни, які у даному прикладі є прямими лініями ($x + y = -2$ і т.д.), які зображені на рис. 10.4. На кожній з цих ізоклін штрихами показано напрямлення поля; щоб знайти це напрямлення, можна побудувати прямокутний трикутник PQR з основою $PQ=1$, паралельною осі x , і висотою $QR=k$, тоді сторона PR піде саме по необхідному напрямленню. На основі цих напрямлень на рис. 10.4 нанесено також кілька інтегральних ліній. Видно, що однією з таких ліній служить пряма $x + y = -1$,

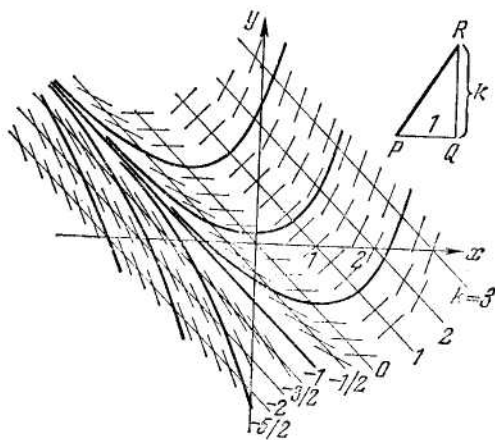


Рис. 10.4.

PR — напрямлення поля.

а також що геометричним місцем найнижчих точок на інтегральних лініях служить пряма $x + y = 0$. У загальному випадку (10.13) для знаходження геометричного місця найнижчих або найвищих точок на інтегральних лініях треба побудувати ізокліну $f(x, y) = 0$.

4. Типи рівнянь, які інтегруються. Диференціальне рівняння вважається проінтегрованим у квадратурах, якщо його загальне розв'язання отримано в явній або неявній формі, яка може містити ще не узяті інтеграли від відомих функцій; як бути з такими інтегралами— учить інтегральне числення. На жаль, багато яких навіть дуже простих рівнянь неможливо проінтегрувати у квадратурах і їх приходиться досліджувати

іншими методами, про які у свій час буде сказано. Проте є кілька класів рівнянь, які інтегруються в квадратурах.

1. Диференціальні рівняння з роздільними змінними, уже були розглянуті раніше; вони мають загальний вигляд

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{10.15}$$

і загальне розв'язання

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x) dx + C. \tag{10.16}$$

Ми написали в правій частині довільну сталу C , щоб підкреслити, що вона входить у загальне розв'язання. Як бачимо, рівняння (10.15) проінтегровано в квадратурах формулою (10.16). Розглянемо, наприклад, найпростіше рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2xy.$$

Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо

$$\frac{dy}{y} = 2x dx, \quad \ln |y| = x^2 + C, \quad |y| = e^{x^2 + C}, \quad y = \pm e^C e^{x^2} \tag{10.17}$$

Відповідь зручніше записати в іншій формі, якщо помітити, що $\pm e^C$ також являє собою довільну сталу, тобто $y = Ce^{x^2}$; звичайно, тут C вже інша, ніж у формулі (10.17).

Щоб уникнути такої зміни позначень, можна було при інтегуванні в (10.17) написати, маючи на увазі подальше потенціювання,

$$\ln |y| = x^2 + \ln C,$$

так як $\ln C$ — теж довільна стала. Після потенціювання одержимо

$$|y| = Ce^{x^2}, \quad y = \pm Ce^{x^2}, \quad y = Ce^{x^2};$$

знак можна включити в C , тобто в останній формулі вважати C будь-якого знака. Ми будемо так робити без особливого попередження.

Аналогічно (10.16) будується загальне розв'язання рівняння

$$P(x)Q(y) dx + R(x)S(y) dy = 0,$$

яке також є рівнянням з роздільними змінними.

2. Рівняння, яке є однорідне відносно аргументу і шуканої функції. Так називається рівняння вигляду (10.12), якщо його ліва

частина являє собою однорідну функцію відносно x і y , які розглядаються як незалежні змінні, тобто якщо

$$F(tx, ty, y') \equiv t^k F(x, y, y')$$

Тоді рівняння (10.12) можна переписати у вигляді

$$F\left(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}, y'\right) = 0, \quad x^k F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = 0,$$

$$\text{тобто } F\left(1, \frac{y}{x}, y'\right) = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно y' , одержимо

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (10.18)$$

Це рівняння інтегрується за допомогою підстановки

$$\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u,$$

де $u = u(x)$ — нова, замість y , шукана функція. Підставляючи в (10.18), одержимо

$$u'x + u = \varphi(u), \quad \frac{du}{dx} x = \varphi(u) - u, \quad \frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x},$$

тобто змінні розділилися; тепер треба виконати інтегрування і перейти від u назад до y .

Для інтегрування більш загального, ніж (10.18), рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right),$$

де двочлени

$$ax + by \text{ і } mx + ny$$

не пропорційні один одному, роблять підстановку

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta,$$

де α і β підбираються так, щоб після підстановки в чисельнику і знаменнику останнього дробу не залишилося вільних членів; потім замінюють $y_1/x_1 = u$.

3. *Лінійні рівняння.* Так називаються рівняння вигляду (10.12), які лінійні відносно шуканої функції і її похідної, тобто рівняння вигляду

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0.$$

Якщо це рівняння розділити на $a(x)$, вийде

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (10.19)$$

$$\text{де } p = \frac{b}{a}, \quad f = -\frac{c}{a}.$$

Рівняння (10.19) називається *лінійним неоднорідним* через наявність у ньому неоднорідного члена $f(x)$. Щоб розв'язати це рівняння, напишемо спочатку допоміжне *однорідне рівняння*, відкинувши неоднорідний член і змінивши позначення шуканої функції:

$$z' + p(x)z = 0. \quad (10.20)$$

У рівнянні (10.20) змінні розділяються:

$$\frac{dz}{z} = -p(x)z, \quad \frac{dz}{z} = -p(x)dx, \quad \ln |z| = -\int p(x)dx + \ln C,$$

$$z = C \exp\left[-\int p(x)dx\right] = Cz_1 \quad (10.21)$$

де z_1 виходить з z при $C=1$, тобто z_1 є часткове розв'язання рівняння (10.20).

Знайшовши z_1 , шукаємо розв'язання рівняння (10.19) у вигляді

$$y = \varphi(x)z_1, \quad (10.22)$$

де z_1 те ж, що у формулі (10.21), а $\varphi(x)$ — поки невідома функція. Така заміна колишньої довільної сталої з формули (10.21) на функцію у формулі (10.22) називається *варіацією довільної сталої*.

З формули (10.22) одержимо, підставляючи в рівняння (10.19),

$$\varphi'z_1 + \varphi z_1' + p\varphi z_1 = f, \quad \varphi'z_1 + \varphi(z_1' + pz_1) = f.$$

Так як z_1 задовольняє рівнянню (10.20), то остання дужка дорівнює нулеві, тобто

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)}{z_1(x)}, \quad \varphi(x) = \int \frac{f(x)}{z_1(x)} dx + C,$$

$$y = z_1(x) \int \frac{f(x)}{z_1(x)} dx + Cz_1(x).$$

Це — загальне розв'язання рівняння (10.19). Перший доданок виходить при $C=0$ і, таким чином, являє собою часткове розв'язання того ж рівняння.

Отже, загальне розв'язання лінійного неоднорідного рівняння (10.19) дорівнює сумі деякого його часткового розв'язання і

загального розв'язання відповідного однорідного рівняння (10.20), отриманого відкиданням неоднорідного члена. У п. 15 ми побачимо, що цією властивістю володіють лінійні рівняння будь-якого вигляду.

Рівняння

$$y' + p(x)y = f(x)y''$$

називається *рівнянням Бернуллі*. Воно приводиться до лінійного, якщо розділити обидві частини на y^n і зробити заміну $y^{1-n} = u$

Є ще декілька мало розповсюджених типів рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Крім того, окремі рівняння, що не належать до визначених типів, іноді вдається проінтегрувати у результаті вдало підібраної підстановки. У той же час більшість рівнянь не інтегрується в квадратурах. Наприклад, не інтегрується в загальному випадку досить розповсюджене рівняння *Ріккати*

$$y' = y^2 + f(x)$$

і багато інших простих рівнянь.

5. Рівняння для експоненти. Зупинимося на дуже простому, але вкрай важливому рівнянні

$$\frac{dy}{dx} = ky \quad (k = \text{const}). \quad (10.23)$$

Воно означає, що швидкість зміни величини y , узята стосовно величини x , пропорційна поточному значенню y . Така пропорційність з $k > 0$, якщо y зростає, і з $k < 0$, якщо y убиває (ми для простоти вважаємо, що $y > 0$), часто приймається в першому наближенні при дослідженні багатьох процесів, а іноді вона виправдується з великою точністю.

У рівнянні (10.23) розділяються змінні, звідки

$$\frac{dy}{y} = k dx, \quad \ln |y| = kx + \ln C, \quad y = Ce^{kx}$$

Якщо є також початкова умова

$$y(x_0) = y_0,$$

то одержуємо

$$y_0 = Ce^{kx_0}, \quad C = y_0 e^{-kx_0}, \quad \text{тобто} \quad y = y_0 e^{k(x-x_0)}. \quad (10.24)$$

Отже, розв'язання рівняння (10.23) являє собою експоненту, тобто показникову функцію. Для розв'язання

характерно, що якщо надавати x значення, які утворюють арифметичну прогресію з різницею Δx , то відповідні значення y утворюють геометричну прогресію зі знаменником $e^{k\Delta x}$. Легко знайти, яке повинно бути Δx , щоб y мінявся (збільшувався або зменшувався) щораз удвічі. Для цього повинно бути

$$|k\Delta x| = \ln 2, \quad \text{тобто} \quad \Delta x = \frac{\ln 2}{|k|}. \quad (10.25)$$

Якщо $k > 0$, то формула (10.25) показує *експонентне наростання* величини y . Так вийде, наприклад, при дослідженні процесу розмноження бактерій у живильному середовищі поки їх там не занадто багато. Прийmemo, що усі вони розмножуються більш-менш незалежно одні від одних; так називаний *закон органічного росту*, характерний для всіляких *ланцюгових реакцій*. Тоді одержуємо, що швидкість наростання кількості u цих бактерій, яка вимірюється в якихось одиницях, пропорційна цій кількості, тобто

$$\frac{du}{dt} = ku; \quad u = u_0 e^{k(t-t_0)}.$$

Аналогічно досліджується задача про безперервне наростання внеску в ощадкасі й інші подібні задачі.

Якщо $k < 0$, то формула (10.24) показує *експонентне убивання* величини y . Так вийде, наприклад, при дослідженні процесу радіоактивного розпаду. Якщо прийняти, що різні ділянки розпадаються незалежно одна від одної, то одержуємо, що швидкість убивання маси m , яка ще не розпалась, радіоактивної речовини пропорційна поточному значенню цієї маси, тобто

$$\frac{dm}{dt} = -pm; \quad m = m_0 e^{-p(t-t_0)}.$$

Відзначимо, зокрема, що в силу формули (10.25) за час

$$\Delta t = \frac{\ln 2}{p}$$

значення m зменшується наполовину; це — *період напіврозпаду*. Так, для радію він приблизно дорівнює $1,8 \cdot 10^3$ років; іншими словами, якби запаси радію не поповнювалися, то через $1,8 \cdot 10^3$ років залишилася би половина початкового запасу, ще через $1,8 \cdot 10^3$ років - чверть початкового запасу і т.д.

Аналогічно досліджуються убавання атмосферного тиску з висотою, процес розрядки конденсатора через опір і багато інших задач. Іноді розглянуте рівняння можна більш-менш просто перетворити до вигляду (10.23). Наприклад, при включенні сталої напруги u у ланцюг, який володіє опором R і індуктивністю L , струм I задовольняє рівнянню

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u. \quad (10.26)$$

Це — лінійне неоднорідне рівняння, яке можна проінтегрувати (розв'язати) по методу п. 4. Але простіше перетворити рівняння так:

$$L \frac{di}{dt} = -Ri + u = -R \left(i - \frac{u}{R} \right), \quad \frac{d \left(i - \frac{u}{R} \right)}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{u}{R} \right),$$

звідки

$$i - \frac{u}{R} = \left(i_0 - \frac{u}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}, \quad i = \frac{u}{R} + \left(i_0 - \frac{u}{R} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}$$

Особливо просто вийде, якщо в початковий момент, за який ми прийmemo $t=0$, струму в ланцюзі не було. Тоді $t_0=0$, $i_0=0$ і

$$i = \frac{u}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \quad (10.27)$$

Графік отриманої залежності показано на рис. 10.5.

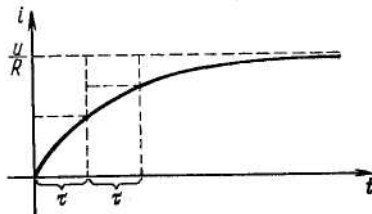


Рис. 10.5.

Ми бачимо, що струм при $t \rightarrow \infty$ експоненціально наближається до граничного стаціонарного значення u/R . Це ж значення легко знайти із самого рівняння (10.26), якщо

помітити, що в процесі встановлення струму, при $t \rightarrow \infty$, буде $(di/dt) \rightarrow 0$, і тому в границі

$$Ri = u, \quad i = \frac{u}{R},$$

тобто коли струм практично установився, уся напруга витрачається тільки на опір R . Відхилення струму від граничного значення зменшується в два рази за час

$$\tau = \frac{\ln 2}{\frac{R}{L}} = \frac{L}{R} \ln 2.$$

Те, що у формулі (10.24) у основі виходить саме число e , і є основна причина значення цієї константи в математиці і її додатках.

6. Інтегрування повного диференціала. Диференціальні рівняння першого порядку часто розглядають замість форми (10.13) у симетричній формі

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \quad (10.28)$$

де $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ — задані функції, а функціональна залежність між x і y невідома. Легко перейти від однієї форми до іншої: наприклад, щоб перейти від (10.28) до форми (10.13), треба обидві частини (10.28) розділити на Qdx , а потім перенести P/Q у праву частину.

Форма (10.28) має перевагу в тих випадках, коли змінні x і y більш-менш рівноправні і заздалегідь не потрібно, щоб саме y вважався функцією x , а не навпаки.

В окремому випадку, коли ліва частина рівняння (10.28) являє собою повний диференціал деякої функції, тобто

$$Pdx + Qdy \equiv du(x,y), \quad (10.29)$$

це рівняння (10.28) легко проінтегрувати. Дійсно, тоді його можна переписати у вигляді $du=0$ і, інтегруючи, одержимо загальне розв'язання

$$u(x,y) = C, \quad (10.30)$$

де C — як завжди, довільна стала.

Питання про те, коли існує така функція $u(x, y)$, було розглянуто раніше. У даному випадку залежності від z немає і $R \equiv 0$, так що з умов (9.121) залишається тільки одна:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10.31}$$

Ця умова необхідна і достатня для того, щоб ліва частина рівняння (10.28) була повним диференціалом. При цьому функція $u(x,y)$ будується по формулі (9.119), де, зазвичай, під знаком інтеграла повинно бути відкинуто останній доданок. Як указано в модулі 9 п. 24, якщо область багатозв'язна, то функція u вийде, узагалі то, багатозначною. Однак формула (10.30) і в такому випадку дає загальне розв'язання рівняння (10.28).

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$(x^2+2xy)dx+(x^2-y^3)dy=0. \tag{10.32}$$

Тут

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+2xy)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2-y^3)}{\partial x} = 2x,$$

тобто умову (10.31) виконано. Для побудови функції u по формулі (9.119) виберемо для визначеності точку M_0 на початку координат, а шлях, що з'єднує M_0 з поточною точкою $M(x; y)$, - як на рис. 10.6. Одержуємо

$$u(x,y) = \int_{M_0M} [(x^2+2xy)dx+(x^2-y^3)dy] = \int_{M_0M'} [(x^2+2xy)dx+(x^2-y^3)dy] + \int_{M'M} [(x^2+2xy)dx+(x^2-y^3)dy]. \tag{10.33}$$

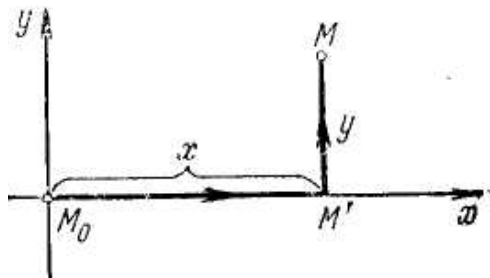


Рис. 10.6.

У першому інтегралі треба покласти $y=0, dy=0$, тоді як у другому вважати $x=const, dx=0$. Звідси

$$u(x,y) = \int_0^x x^2 dx + \int_0^y (x^2 - y^3) dy = \frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^4}{4}.$$

Отже, загальне розв'язання рівняння (10.32) має вигляд

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y - \frac{y^4}{4} = C.$$

Проведемо аналогічне дослідження рівняння

$$-\frac{y dx}{x^2 + y^2} + \frac{x dy}{x^2 + y^2} = 0, \tag{10.35}$$

яке, утім, легко проінтегрувати безпосередньо, так як змінні в ньому розділяються. Це рівняння приходить розглядати на всій площині, за винятком початку координат, як говорять, на площині з *виколотим* початком координат, так як при $x=0, y=0$ обидва коефіцієнти, P і Q , мають розрив. Така область, як зазначено в модулі п. 24, неоднозначна (двозв'язна).

Для рівняння (10.35) умова (10.31) також виконується. Для побудови функції u по формулі (9.119) виберемо точку M_0 де завгодно, але, зазвичай, не на початку координат, наприклад $M_0(1; 0)$. Провівши викладення, аналогічні (10.33), (10.34), і вважаючи спочатку, що $x>0$, одержимо $u=\text{arctg}(y/x)$. Ця ж функція задовольняє співвідношенню (10.29) і при $x<0$; однак якщо її розглянути у всій площині x, y , то вона буде мати розрив на прямій $x=0$. Щоб позбутися від нього, можна покласти

$$u = \text{Arctg} \frac{y}{x} = \varphi \text{ (полярному куту).}$$

Правда, ця функція неоднозначна: навіть якщо в деякій точці $M \neq 0$ вибрати яке-небудь одне значення φ , а потім змусити M обійти навколо початку координат, то φ одержить приріст 2π . Проте загальне розв'язання рівняння (10.35) має вигляд

$$\text{Arctg} \frac{y}{x} = C, \text{ тобто } \frac{y}{x} = \text{tg } C = C_1, \quad y = C_1 x,$$

де C_1 — довільна стала; геометрично одержуємо сімейство всіляких прямих, що проходять через початок координат.

Буває так, що для рівняння (10.28) умова (10.31) не виконана, тобто ліва частина цього рівняння не є повним диференціалом, але стає їм після помноження на деякий відомий множник. Наприклад, ліва частина рівняння

$$-y dx + x dy = 0$$

не задовольняє умові (10.31), але починає задовольняти після помноження обох частин на множник

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

див. (10.35)). Такий множник називається *інтегруючим множителем* для розглянутого рівняння (10.28). Ніяких загальних способів для його знаходження немає; інтегруючий множник використовується в деяких теоретичних дослідженнях.

7. Особливі точки й особливі розв'язання. Буває, що для рівняння, записаного у формі

$$y' = f(x, y) \tag{10.36}$$

(див. рівняння (10.13)) або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{10.37}$$

(див. рівняння (10.28)), через деякі точки на площині x, y проходить більш однієї інтегральної лінії або не проходить ні однієї такої лінії. Ці точки називаються *особливими точками* для рівняння, яке розглядається. Вони можуть бути або *ізольованими*, або заповнювати цілі *особливі лінії*.

Почнемо з дослідження рівняння (10.36) на простому частковому прикладі

$$y' = y^\alpha \quad (\alpha > 0), \tag{10.38}$$

причому будемо вважати $y \geq 0$. Рівняння (10.38) легко інтегрується:

$$\frac{dy}{y^\alpha} = dx, \quad \frac{y^{1-\alpha}}{1-\alpha} = x - C \quad (\alpha \neq 1), \quad \ln y = x - C \quad (\alpha = 1); \tag{10.39}$$

ми написали $-C$ замість $+C$ для зручності подальших міркувань; це несуттєво, тому що сама C може бути будь-якого знака. Будемо розрізняти два випадки.

1. $\alpha > 1$. Тоді розв'язання (10.39) можна записати у вигляді

$$y = \frac{1}{(\alpha - 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{(C - x)^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \frac{const}{(C - x)^{\frac{1}{\alpha-1}}},$$

звідки випливає, що якщо x міняється від $-\infty$ до C , то y зростає від нуля до нескінченності. Зі зміною константи C графік зміщується уздовж осі x . Сімейство інтегральних ліній, яке виходить, зображено на рис. 10.7.

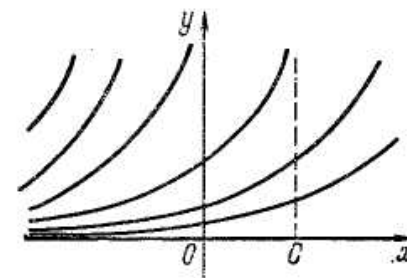


Рис. 10.7.

Сама вісь x також є інтегральною лінією; вона отримується в границі при $C \rightarrow \infty$. Як бачимо, у даному випадку через кожну точку верхньої напівплощини проходить єдина інтегральна лінія.

На даному прикладі видно також, що розв'язання $y(x)$ може існувати не на всій осі x , а лише на деякій її частині — у даному прикладі на інтервалі $-\infty < x < C$.

При $\alpha = 1$ виходить аналогічна одиничність (уніквенність)

2. $0 < \alpha < 1$. Тоді розв'язання (10.39) можна записати у вигляді

$$y = (1 - \alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (x - C)^{\frac{1}{1-\alpha}} = const (x - C)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{10.40}$$

звідки випливає, що якщо x міняється від C до ∞ , то y зростає від нуля до нескінченності. Сімейство інтегральних ліній, яке виходить, зображено на рис. 10.8.

Вісь x і тут є інтегральною лінією, що видно з рівняння (10.38); однак вона не виходить з формули (10.40) ні при якому C . Через кожну точку осі x у даному випадку проходить по дві інтегральні лінії - сама вісь x і крива, тобто одиничність розв'язання задачі Коші, яке для рівняння першого порядку зводиться до задачі про проведення інтегральної лінії через задану точку площини, у точках осі x порушується.

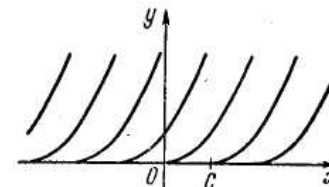


Рис. 10.8

Чим «провинилися» точки осі x у цьому другому випадку, що вони стали особливими, можна побачити, обчисливши похідну від правої частини рівняння (10.38) у цих точках, тобто при $y = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha)\right)_{y=0} = (\alpha y^{\alpha-1})_{y=0} = 0 \text{ (при } \alpha > 1); = 1 \text{ (при } \alpha = 1); = \infty \text{ (при } \alpha < 1).$$

Тому для $0 < \alpha < 1$ при підході до осі x поле повертається так швидко, що інтегральні лінії встигають дійти до неї на кінцевій відстані, а не на нескінченності, як на рис. 10.7.

Отже, ми бачимо, що в розглянутому випадку не виконані умови теореми Коші (п. 3) про існування і одиничність розв'язання, у якій була потрібна кінцевість похідної $\partial f/\partial y$. І в інших випадках, якщо $(\partial f/\partial y)_{M_0}$ перестає бути кінцевою, через M_0 може, хоч і не обов'язково, пройти більше однієї інтегральної лінії. Зокрема, якщо $\partial f/\partial y$ обертається в нескінченність на деякій лінії (L) і сама ця лінія є інтегральною, то, як правило, через кожну точку (L) проходить, крім (L), ще принаймні одна інтегральна лінія. У цьому випадку (L) є *особливою інтегральною лінією*, тобто інтегральною лінією, усі точки якої особливі, а відповідний розв'язок, графіком якого служить особлива інтегральна лінія, називається *особливим розв'язком*. Зазвичай, він не входить до складу загального розв'язка, тобто не виходить з останнього ні при якому значенні довільної сталої. Так, у прикладі (10.38) при $0 < \alpha < 1$ вісь x служить особливою інтегральною лінією, а функція $y=0$ - особливим розв'язком.

До особливого розв'язання можна підійти з інших позицій. З рис.10.8 видно, що в даному випадку вісь x служить огинаючою сімейства інтегральних ліній. Так і в загальному випадку *огинаюча сімейства інтегральних ліній*, якщо вона є, є *інтегральною лінією*, так як вона усюди йде уздовж поля, і в той же час *особливою*, тому що через її точки проходять і інші інтегральні лінії. Тому, якщо удалося знайти загальний розв'язок у формі $\Phi(x,y;C)=0$, то для знаходження особливого розв'язка треба виключити C з рівнянь

$$\Phi(x,y;C)=0, \quad \Phi'_C(x,y;C)=0. \quad (10.41)$$

Перейдемо тепер до рівняння (10.37), причому для простоти припустимо, що функції P, Q безперервні, а їхні часткові похідні першого порядку кінцеві. Так як рівняння (10.37) можна переписати у формі

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \quad (10.42)$$

то може бути застосована тільки що згадана теорема Коші про рівняння (10.36), тобто *через кожну точку $M_0(x_0, y_0)$, у якій $Q(x_0, y_0) \neq 0$ або $P(x_0, y_0) \neq 0$, проходить єдина інтегральна лінія*. (Для застосування теореми Коші досить позначити через $f(x,y)$ ту з правих частин (10.42), у якій знаменник не дорівнює нулеві.) Якщо ж

$$P(x_0, y_0)=0, \quad Q(x_0, y_0)=0, \quad (10.43)$$

то в точці $M_0(x_0, y_0)$ рівняння (10.37) перестає зв'язувати dx і dy , тобто поле напрямлень у такій точці не визначено. Тому особливі точки для рівняння (10.37) визначаються співвідношеннями (10.43). Кілька простих найбільш розповсюджених прикладів особливих точок разом з їхніми найменуваннями показані на рис. 10.9. (Перевірте правильність зазначених там загальних розв'язок і зображень сімейств інтегральних ліній.)

В усіх цих прикладах особливою точкою служить початок координат. У прикладах a, b і d через особливу точку проходить нескінченна кількість інтегральних ліній, у прикладі e — дві такі лінії і у прикладі z — ні однієї. Відзначимо, що в прикладах a, b і e самі осі координат так само служать інтегральними лініями. При інтегруванні рівняння рис. 10.9, d корисно попередньо перейти до полярних координат.

8. Рівняння, які не розв'язані відносно похідної.
Рівняння

$$F(x,y,y')=0. \quad (10.44)$$

відрізняється від розібраного в п. 3 рівняння (10.13) тим, що в даному випадку y' є неявною функцією x, y . Характерною рисою неявних функцій є те, що вони, узагалі то, багатозначні. Тому якщо рівняння (10.44) розв'язати відносно y' (у принципі, так як практично це може мати утруднення), то вийде кілька розв'язків:

$$y'=f_1(x,y), \quad y'=f_2(x,y), \quad \dots, \quad y'=f_k(x,y) \quad (10.45)$$

кожен з яких задовольняє рівнянню (10.44).

Кожне з рівнянь (10.45) задає на площині поле напрямлень і має сімейство інтегральних ліній, які заповнюють площину (п. 3). Тому в тій частині площини, де рівняння (10.44) має k розв'язків відносно y' , воно визначає k полів напрямлень, накладених одне на одне, і через кожну точку проходить k інтегральних

ліній, тобто початкова умова $y(x_0)=y_0$ визначає k розв'язок (див. рис.10.10, де прийнято $k=3$).

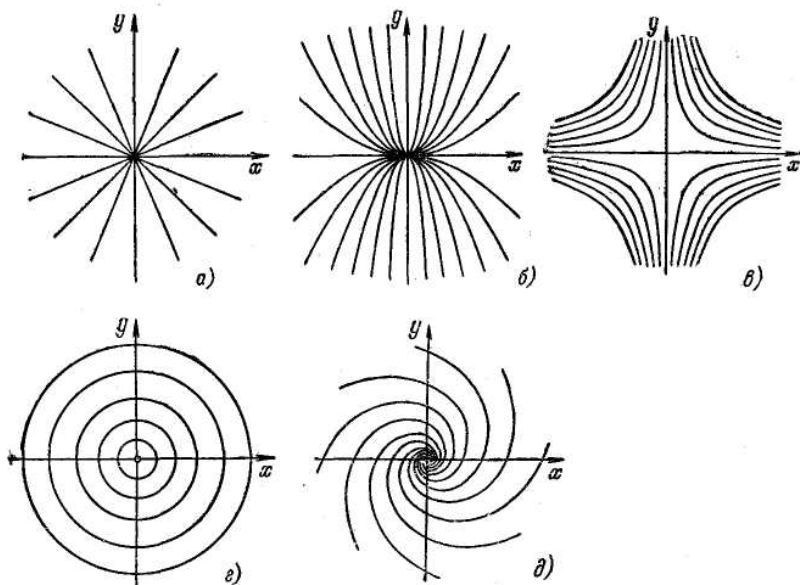


Рис. 10.9.

Особливі точки диференціальних рівнянь:

- а) вузол: $y dx - x dy = 0, \quad y=Cx;$
- б) вузол: $2y dx - x dy = 0, \quad y=Cx^2;$
- в) сідло: $y dx + x dy = 0, \quad xy=C;$
- г) центр: $x dx + y dy = 0, \quad x^2 + y^2 = C;$
- д) фокус: $(x+y) dx - (x-y) dy = 0, \quad \rho = Ce^{\theta}$
(у полярних координатах).

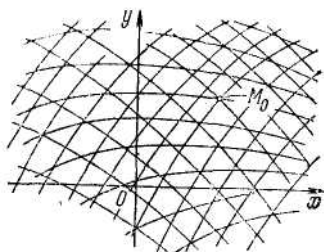


Рис. 10.10.

Подібно п.7, рівняння (10.44) може мати особливі точки, особливі лінії й особливі інтегральні лінії. Так як з рівняння (10.44)

$$-\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, y')}{F'_{y'}(x, y, y')}$$

то в силу теореми Коші (п.3) такі точки і лінії можуть з'явитися, тільки якщо поряд з (10.44) має місце рівність

$$F'_{y'}(x, y, y') = 0 \tag{10.46}$$

(звичайно, якщо $F'_{y'} \neq \infty$).

Зокрема, особливий розв'язок, якщо він є, графік якого є огинаючою сімейства інтегральних ліній, можна одержати, виключаючи y' з рівностей (10.44) і (10.46). Інший спосіб побудови особливого розв'язка заснований на формулах (10.41).

9. Метод попереднього диференціювання. У деяких випадках рівняння (10.44) удасться проінтегрувати після його попереднього диференціювання. Розглянемо, наприклад, рівняння

$$x=f(y'), \tag{10.47}$$

або, як прийнято записувати,

$$x=f(p) \quad (p=y'). \tag{10.48}$$

Якщо продиференціювати обидві частини, одержимо

$$dx=f'(p)dp$$

За допомогою цієї рівності і формули

$$(dy/dx)=p$$

знаходимо вираз для dy : $dy=px=pf'(p)dp$, звідки

$$y=\int pf'(p)dp+C. \tag{10.49}$$

Рівності (10.48) і (10.49) разом визначають функціональну залежність між x і y в параметричному вигляді, причому параметром служить p . Ми одержали загальний розв'язок рівняння (10.47) у параметричному вигляді. Аналогічно розв'язується рівняння $y=f(y')$.

Трохи більш складним є рівняння Лагранжа

$$y=f(y')x+g(y'), \text{ тобто } y=f(p)x+g(p) \quad (p=y'), \tag{10.50}$$

яке лінійне відносно x і y , але нелінійне в основному значенні цього слова (п. 4), Після диференціювання одержуємо

$$dy=pxdx=f'(p)dp x+f(p)dx+g'(p)dp,$$

тобто

$$[p-f(p)](dx/dp)=f'(p)x+g'(p).$$

Якщо $f(p) \neq p$, то після поділення на $p-f(p)$ виходить лінійне рівняння (див. рівняння (10.19)), у якому x розглядається як функція від p . Після інтегрування цього рівняння одержимо рівність вигляду $x=x(p;C)$, що разом з (10.50) дасть загальний розв'язок вихідного рівняння в параметричному вигляді.

В окремому випадку, коли $f(p) \equiv p$, рівняння (10.50) називається *рівнянням Клеро*; воно має вигляд

$$y=xy'+g(y'),$$

тобто

$$y=xp+g(p) \quad (p=y'). \tag{10.51}$$

Попереднє диференціювання дає

$$p \, dx = p \, dx + x \, dp + g'(p) \, dp,$$

тобто

$$dp[x+g'(p)]=0. \tag{10.52}$$

Прирівнюючи нулеві перший множник, одержимо в силу (10.51)

$$p=C, \text{ тобто } y=Cx+g(C). \tag{10.53}$$

Це — загальне розв'язання рівняння (10.51).

Прирівнюючи нулеві другий множник у лівій частині (10.52), одержимо

$$x=-g'(p), \quad y=xp+g(p)=-pg'(p)+g(p). \tag{10.54}$$

Виходить, вийшло ще один, особливий розв'язок рівняння (10.51), визначений в параметричному вигляді. Геометрично формула (10.53) задає сімейство прямих, а формули (10.54) — обгинаючу.

Наприклад, рівняння $y=xy'-y'^2$ має загальний розв'язок

$$y=Cx-C^2 \tag{10.55}$$

і особливий розв'язок, графіком якого служить обгинаюча сімейства прямих (10.55). Для її відшукування продиференціюємо по C обидві частини (10.51), що дасть

$$0=x-2C.$$

Виключаючи C із двох останніх формул, одержимо $C=x/2$, тобто

$$y = \frac{x}{2}x - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}.$$

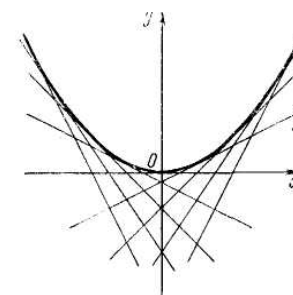


Рис. 10.11.

Відповідні інтегральні лінії показані на рис. 10.11.

10.3. Рівняння вищих порядків і системи рівнянь

10. Рівняння вищих порядків.

Загальні поняття, які відносяться до таких рівнянь, були приведені в п.2 (рівняння (10.5), загальний розв'язок (10.8) або (10.9), початкова умова (10.11)). Утім, як і для першого порядку, рівняння порядку n , зазвичай, буває простіше досліджувати, якщо воно задано у формі, обчисленої щодо старшої похідної:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}).$$

Зокрема, на цю форму безпосередньо поширюється теорема Коші (п.3): *початкові значення (10.11) визначають один і тільки один розв'язок, якщо при цих значеннях функція f безперервна і має кінцеві похідні першого порядку по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$.*

Розглянемо питання про інтегрування цих рівнянь у квадратурах; у випадку рівнянь вищого порядку інтегрування вдається довести до кінця ще рідше, ніж для рівнянь першого порядку. Основним способом формального інтегрування нелінійних рівнянь вищого порядку (про лінійні рівняння ми будемо говорити окремо в 10.4) є *метод зниження порядку*, тобто перехід до рівносильного рівняння нижчого порядку. Як правило, чим нижче порядок рівняння, тим воно простіше. Крім того, буває, що після одного або декількох знижень порядку ми переходимо до рівняння першого порядку одного з типів, які інтегруються, (п.4); тоді інтегрування вдається довести до кінця. Розглянемо деякі часткові способи зниження порядку.

1. Нехай, наприклад, задано рівняння другого порядку

$$y'^2+yy''=0.$$

Для його інтегрування помітимо, що ліву частину можна переписати у вигляді

$$y'^2 + yy'' \equiv (yy')',$$

звідки

$$(yy')' = 0; \quad yy' = C_1; \quad ydy = C_1 dx; \quad (y^2/2) = C_1 x + C_2 \quad (\text{загальний розв'язок}).$$

Інше рівняння

$$y'^2 - yy'' = 0.$$

легко проінтегрувати аналогічним чином, якщо попередньо розділити обидві частини на y^2 :

$$\frac{y'^2 - yy''}{y^2} = 0; \quad -\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0; \quad \frac{y'}{y} = C_1; \quad \frac{dy}{y} = C_1 dx;$$

$$\ln |y| = C_1 x + \ln C_2; \quad y = C_2 e^{C_1 x} \quad (\text{загальний розв'язок}).$$

Як говорять, після ділення на y^2 ми одержали комбінацію, яка інтегрується: «точна похідна» прирівняна до нуля.

Аналогічний прийом іноді застосовується і в інших прикладах.

Подальші випадки зниження порядку ми будемо для простоти викладати для рівнянь другого порядку загального вигляду

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{10.56}$$

2. Нехай у рівнянні (10.56) не є присутнім y , а тільки похідні від нього, тобто ми маємо рівняння вигляду

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{10.57}$$

Тоді вводять позначення

$$y' = p = p(x)$$

і з (10.57) вийде

$$F(x, p, p') = 0,$$

тобто рівняння першого порядку. Якщо нам повезе й удасться його проінтегрувати, то одержимо загальне розв'язання рівняння (10.57)

$$p = \varphi(x; C_1); \quad y' = \varphi(x; C_1); \quad y = \int \varphi(x; C_1) dx + C_2.$$

3. Нехай у рівнянні (10.56) не є присутнім x , тобто ми маємо рівняння

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{10.58}$$

Тоді також позначають $y' = p$, але розглядають p як функцію від y . При цьому в (10.58) не можна підставляти просто $y'' = p'$, тому

що тоді p' означало б похідну від p по x , а не по y . Тому пишуть

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}.$$

З рівняння (10.58) одержимо

$$F(y, p, p(dp/dy)) = 0,$$

тобто рівняння першого порядку. Якщо його удасться проінтегрувати, то ми зможемо знайти загальне розв'язання рівняння (10.58)

$$p = \varphi(y; C_1); \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(y; C_1); \quad \int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2.$$

4. Нехай ліва частина рівняння (10.56) однорідна відносно невідомої функції і її похідних, тобто

$$F(x, ty, ty', ty'') \equiv t^k F(x, y, y', y''). \tag{10.59}$$

У цьому випадку порядок знижується після підстановки

$$(y'/y) = u = u(x),$$

звідки

$$y' = uy, \quad y'' = u'y + uy' = u'y + u \cdot uy' = (u' + u^2)y, \\ F = (x, y, uy, y(u' + u^2)) = 0, \quad F = (x, 1, u, u' + u^2) = 0;$$

в останньому переході ми скористалися властивістю (10.59). Якщо отримане рівняння першого порядку удасться проінтегрувати, то

$$u = \varphi(x; C_1); \quad \frac{y'}{y} = \varphi(x; C_1); \quad \ln |y| = \int \varphi(x; C_1) dx + \ln C_2; \quad y = C_2 \int^{\varphi(x; C_1)} dx.$$

11. Зв'язок рівнянь вищого порядку із системами рівнянь першого порядку. Від рівняння вищого порядку (10.5) завжди можна перейти до рівносильної системи n рівнянь першого порядку з n невідомими функціями. Для цього треба позначити

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)} = y_n. \tag{10.60}$$

Тоді в силу рівняння (10.5) можна написати

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= y_3 \\ &\dots \\ y'_{n-1} &= y_n \\ F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{10.61}$$

Система (10.61) має спеціальний вигляд. Загальний вигляд системи першого порядку, наприклад, із трьох рівнянь із трьома невідомими функціями такий:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3) &= 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3) &= 0 \\ F_3(x, y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.62)$$

Зворотно, із системи (10.62) можна перейти до одного рівняння (у даному випадку третього порядку) з одною невідомою функцією, наприклад y_1 . Тому загальний розв'язок системи (10.62) містить три довільні сталі:

$y_1 = \varphi_1(x; C_1, C_2, C_3)$, $y_2 = \varphi_2(x; C_1, C_2, C_3)$, $y_3 = \varphi_3(x; C_1, C_2, C_3)$,
Для зазначеного переходу треба кожне з рівнянь (10.62) продиференціювати два рази і з отриманих дев'яти рівностей, рахуючи разом з рівностями (10.62), виключити вісім величин $y_2, y_3, y'_2, y'_3, y''_2, y''_3, y'''_2, y'''_3$. Після інтегрування виходить загальний розв'язок $y_1 = \varphi_1(x; C_1, C_2, C_3)$, з якого y_2 і y_3 знаходяться вже без інтегрувань на основі згаданих рівностей.

Систему рівнянь будь-якого порядку можна перетворити в систему рівнянь першого порядку за допомогою позначень, аналогічних (10.60). Наприклад, система двох рівнянь третього порядку щодо однієї невідомої функції і другого порядку щодо іншої, еквівалентна системі з п'яти рівнянь першого порядку з п'ятьма невідомими функціями; загальний розв'язок в цьому прикладі містить п'ять довільних сталих.

12. Геометричний зміст системи рівнянь першого порядку.

Розглянемо для простоти випадок системи з двох рівнянь першого порядку з двома невідомими функціями $y_1(x)$ і $y_2(x)$:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) &= 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.63)$$

Якщо цю систему до інтегрування вдасться розв'язати відносно y'_1 і y'_2 , то вона прийме більш простий вигляд

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2) \end{aligned} \right\} \quad (10.64)$$

тоді говорять, що система записана в *нормальній формі*.

Розв'язком системи (10.63) або, що те ж саме, (10.64) називається, звичайно, *пара функцій*

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad (10.65)$$

яка обертає ці два рівняння в тотожності. Відповідно до п.11 у загальній розв'язок входять дві довільні сталі, тобто він має вигляд

$$y_1 = y_1(x; C_1, C_2), \quad y_2 = y_2(x; C_1, C_2).$$

Система рівнянь (10.64) і її розв'язання (10.65) мають простий геометричний зміст, для з'ясування якого треба розглянути тривимірний простір x, y_1, y_2 . Тоді формули (10.65) визначають лінію в параметричному вигляді, причому тут параметром служить сам x (можна дописати рівність $x=x$); вона називається *інтегральною лінією* системи рівнянь (10.64). Якщо для довільної точки M в просторі (рис. 10.12) обчислити значення правих частин системи (10.64), то ми будемо знати напрямлення дотичних до ліній $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$, тобто до проєкцій інтегральної лінії, і тим самим зможемо довідатися напрямлення дотичної до самої інтегральної лінії, якщо вона проходить через M .

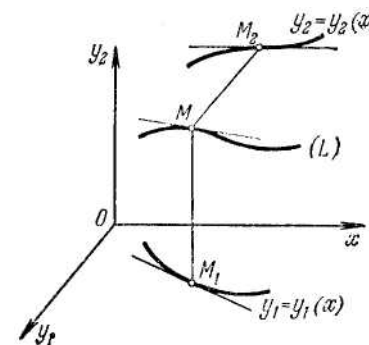


Рис. 10.12.
(L) — інтегральна лінія.

Виходить, система (10.64) задає *поле напрямлень у просторі x, y_1, y_2* , а інтегральна лінія — це лінія, яка у кожній своїй точці іде «уздовж поля», тобто лінія, у кожній точці якої дотична має напрямлення, яке задано цим полем (порівн. з п. 3).

У системі (10.64) змінні y_1 і y_2 рівноправні, а змінна x має інше значення. Буває, що всі три змінні рівноправні, так що кожна з них можна прийняти за незалежну; тоді систему рівнянь воліють записувати в *симетричній формі*, наприклад,

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \quad (10.66)$$

Від форми (10.66) легко перейти до форми (10.64) і навпаки.

Геометричний зміст системи (10.66) аналогічний описаному вище. Так як вектор

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

у будь-якій заданій точці $M(x; y; z)$ у силу співвідношень (10.66) повинний бути паралельний відомому векторові

$$P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

то задача про інтегрування системи (10.66) - це задача про побудову ліній у просторі, які мають у кожній своїй точці задане напрямлення. З геометричного змісту системи (10.64) випливає, що для однозначного визначення інтегральної лінії треба задати точку $M_0(x_0; y_{10}; y_{20})$ у просторі, через яку ця лінія повинна пройти. Іншими словами, *початкова умова*

$$y_1(x_0) = y_{10}, \quad y_2(x_0) = y_{20}$$

однозначно визначає розв'язання системи (10.64). Звичайно, як і в п.7, і тут можливі особливі точки й особливі лінії, які розпізнаються в загальному подібно п.7. Зокрема, для системи (10.66) *особою точкою є всяка точка, у якій усі три знаменники обертаються в нуль*, тобто вектор

$$P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

обертається в нуль-вектор, який не має визначеного напрямлення.

Система першого порядку в нормальній формі з будь-яким числом рівнянь має загальний вигляд

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots & \dots \dots \dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (10.67)$$

Розв'язання її — це система функцій

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \dots, \quad y_n = y_n(x). \quad (10.68)$$

Загальне розв'язання містить n довільних сталих.

Для однозначного визначення часткового розв'язка можна задати початкову умову

$$y_1(x_0) = y_{10}; \quad y_2(x_0) = y_{20}, \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}. \quad (10.69)$$

Коші довів, що умовам (10.69) задовольняє рівно один розв'язок системи (10.67), якщо при значеннях $x = x_0, y_1 = y_{10}, \dots, y_n = y_{n0}$

праві частини системи (10.67) безперервні, а їхні похідні по змінним y_1, y_2, \dots, y_n кінцеві.

Геометричний зміст системи (10.67), розв'язання (10.68) і умов (10.69) — це відповідно поле напрямлень, інтегральна лінія і точка, через яку повинна пройти ця лінія в $(n+1)$ -мірному просторі x, y_1, y_2, \dots, y_n .

Якщо праві частини системи (10.67) не містять незалежної змінної x , то ця система називається *автономною*; виявляється, що її розв'язання зручніше розглядати в n -мірному просторі y_1, y_2, \dots, y_n , який називають *фазовим простором*. Ми обмежимося для простоти випадком $n=2$, будемо позначати незалежну змінну буквою t і *тлумачити її як час*, а шукані функції замість y_1, y_2 будемо позначати x, y , так що $x = x(t), y = y(t)$. Замість (10.67) тоді вийде система рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y).$$

Якщо помножити перше рівняння на \mathbf{i} , друге — на \mathbf{j} , а потім зробити почлене додавання, ми одержимо векторне диференціальне рівняння

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{A}(x, y) (= \mathbf{A}(t)) \quad (10.70)$$

де

$$\mathbf{A} = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

- задане векторне поле на *фазовій площині* x, y . Так як $d\mathbf{r}/dt$ — це вектор швидкості, то на площині x, y виявляється заданим *поле швидкостей*, а розв'язання

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

визначає закон руху точки на площині, при якому ця точка в кожнім своєму положенні має швидкість, задану для цього положення. Деяко вільно можна уявляти собі, що розв'язання (10.70) задає на фазовій площині потік рідини, а розв'язанням відповідають закони руху часток цієї рідини. Автономність рівняння (10.70) означає, що розглянутий потік стаціонарний, а тому різні траєкторії не мають одна з одною загальних точок.

Запишемо, наприклад, рівняння (10.4) у вигляді автономної системи першого порядку

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad M \frac{dv}{dt} = -ky; \quad (10.71)$$

тут u і v -координата і швидкість коливної точки. У курсі фізики виводиться вираз для повної енергії коливної точки

$$E = \frac{Mv^2}{2} + \frac{ky^2}{2} \quad (10.72)$$

При вільних коливаннях без тертя енергія повинна зберігатися. І дійсно, у силу (10.71)

$$\frac{dE}{dt} = Mv \frac{dv}{dt} + ky \frac{dy}{dt} = -kuv + kuv = 0;$$

це - математичне доведення закону збереження енергії в даному прикладі. Таким чином, $E = \text{const}$ для будь-якого розв'язання системи (10.71), тобто рух у фазовій площині u, v відбувається по еліпсах, причому різним еліпсам відповідають коливання навколо положення рівноваги з різною амплітудою (рис. 10.13).

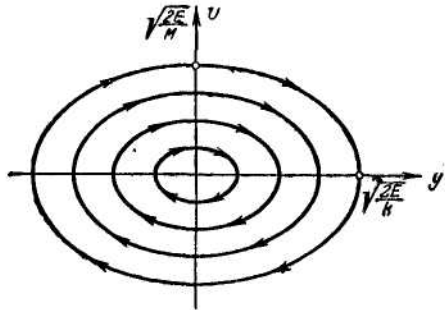


Рис. 10.13.

13. Перші інтеграли. Розглянемо для визначеності систему з трьох рівнянь першого порядку вигляду (10.62). Усяке співвідношення вигляду

$$\Phi(x, y_1, y_2, y_3; C) = 0 \quad (10.73)$$

яке зобов'язане тотожно задовольнятися для будь-якого розв'язання системи, називається *першим інтегралом* цієї системи рівнянь; тут C — стала, узагалі то, різна для різних розв'язань. Знання *першого інтеграла дає можливість понизити число рівнянь у системі на одиницю*: наприклад, якщо з (10.73) виразити y_3 через все інше і підставити результат у перші два рівняння (10.62), то вийде система з двох рівнянь першого порядку з двома невідомими функціями y_1 і y_2 . Якщо її

проінтегрувати, тобто знайти $y_1(x)$ і $y_2(x)$, то $y_3(x)$ можна буде знайти без інтегрувань з рівності (10.73).

Аналогічним чином знання двох незалежних перших інтегралів дозволяє понизити число рівнянь на два, а три незалежних перших інтегралів (тобто таких, що жоден з них не є наслідком інших)

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(x, y_1, y_2, y_3; C_1) &= 0 \\ \Phi_2(x, y_1, y_2, y_3; C_2) &= 0 \\ \Phi_3(x, y_1, y_2, y_3; C_3) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

дають загальне розв'язання системи (10.62), записане в неявній формі.

Іноді перші інтеграли вдається знайти, виводячи з заданих рівнянь системи *комбінації, які інтегруються*. Наприклад, для системи

$$\left. \begin{aligned} y' &= y + z \\ z' &= -y + z \end{aligned} \right\}$$

легко одержати таку комбінацію:

$$yy' + zz' = y(y + z) + z(-y + z) = y^2 + z^2$$

тобто

$$\frac{1}{2}(y^2 + z^2)' = y^2 + z^2, \quad \frac{d(y^2 + z^2)}{y^2 + z^2} = 2dx, \quad \ln(y^2 + z^2) = 2x + \ln C$$

і остаточно маємо перший інтеграл

$$y^2 + z^2 = Ce^{2x}$$

З нього видно, наприклад, що при $x \rightarrow \infty$ розв'язання іде в нескінченність, а при $x \rightarrow -\infty$ розв'язання прагне до нуля; і в інших випадках буває можливо зробити істотні висновки про поведінку розв'язань без повного інтегрування системи. Ще один перший інтеграл для системи (10.74) можна одержати, розділивши одне з рівнянь (10.74) на інше.

У деяких випадках перші інтеграли підказуються фізичними розуміннями, найчастіше тими або іншими законами збереження.

Наприклад, формула (10.72), у якій E відіграє роль довільної сталої C , служить першим інтегралом системи (10.71).

Виразивши з нього v через y і підставивши результат у перше рівняння (10.71), легко довести інтегрування до кінця

Підкреслимо на закінчення, що, як видно з попереднього, найбільш природно розглядати системи, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих функцій; такі системи прийнято називати *замкнутими*. Якщо рівнянь менше, ніж шуканих функцій, то система називається *незамкнутою (недовизначеною)*; у такої системи надлишкову кількість невідомих функцій можна задавати довільно. Найчастіше незамкнутість системи свідчить про те, що просто не всі необхідні співвідношення вписані. Якщо рівнянь більше, ніж невідомих функцій, то система називається *перевизначеною*; така система, зазвичай, суперечлива, тобто не має розв'язок. Перевизначеність системи, зазвичай, свідчить або про її залежності, тобто про те, що деякі з рівнянь є наслідками інших і тому зайві, або про помилку при її складанні.

Графічний метод інтегрування диференціального рівняння другого порядку.

З'ясуємо геометричний зміст диференціального рівняння другого порядку. Нехай маємо рівняння

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (*)$$

Позначимо через φ кут, який дотична до кривої утворить з додатним напрямом осі Ox ; тоді

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (**)$$

Щоб з'ясувати геометричний зміст другої похідної, згадаємо формулу, яка визначає радіус кривизни кривій у даній точці

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

(Дотепер ми завжди вважали радіус кривизни додатним числом, однак тепер ми будемо вважати радіус кривизни числом, що може приймати як додатні, так і від'ємні значення: якщо крива опукла ($y'' < 0$), ми вважаємо радіус кривизни від'ємним ($R < 0$); якщо крива увігнута ($y'' > 0$), — додатним ($R > 0$)).

Звідси

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{R}.$$

Але

$$y' = \operatorname{tg} \varphi; \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi; \quad (1 + y'^2)^{3/2} = |\sec^3 \varphi| = \frac{1}{|\cos^3 \varphi|},$$

тому

$$y'' = \frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} \quad (***)$$

Підставляючи тепер у рівняння (*) отримані вирази для y і y'' , будемо мати:

$$\frac{1}{R |\cos^3 \varphi|} = f(x, y, \operatorname{tg} \varphi),$$

або

$$R = \frac{1}{|\cos^3 \varphi| \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \varphi)}. \quad (***)$$

Звідси видно, що диференціальне рівняння другого порядку визначає величину радіуса кривизни інтегральної лінії, якщо задано координати точки і напрям дотичної в цій точці.

З попереднього впливає спосіб наближеної побудови інтегральної кривої за допомогою гладкої кривої, складеної з дуг кіл. (Крива називається *гладкою*, якщо вона має дотичну у всіх точках, причому кут нахилу цієї дотичної є безперервна функція від довжини дуги s).

Нехай, наприклад, потрібно знайти розв'язання рівняння (*), що задовольняє наступним початковим умовам:

$$y_{x=x_0} = y_0; \quad y'_{x=x_0} = y'_0.$$

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ проведемо промінь M_0T_0 з кутовим коефіцієнтом $y' = \operatorname{tg} \varphi_0 = y'_0$ (рис. 10.14).

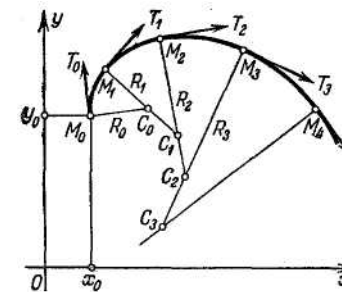


Рис. 10.14

З рівняння (****) знайдемо величину $R=R_0$. Відкладемо відрізок M_0C_0 , рівний R_0 на перпендикулярі до напрямку M_0T_0 , і з точки C_0 , як з центра, опишемо невелику дугу M_0M_1 радіусом R_0 . Помітимо при цьому, що якщо $R_0 < 0$, то відрізок M_0C_0 потрібно направляти в ту сторону, щоб дуга кола була звернена опуклістю нагору, а при $R_0 > 0$ — опуклістю вниз.

Нехай, далі, x_1, y_1 — координати точки M_1 , що лежить на побудованій дузі і досить близької до точки M_0 , а $\operatorname{tg} \varphi_1$ — кутовий коефіцієнт дотичної M_1T_1 до проведеного кола в точці M_1 . З рівняння (****) знайдемо відповідній точці M_1 значення $R=R_1$. Проведемо відрізок M_1C_1 перпендикулярний до M_1T_1 , рівний R_1 і з точки C_1 як центра, опишемо дугу M_1M_2 радіусом R_1 . Потім на цій дузі візьмемо близьку до M_1 точку $M_2(x_2, y_2)$ і продовжуємо в такий спосіб побудови, поки не одержимо досить великий шматок кривої, яка складається з дуг кіл. З попереднього ясно, що ця крива приблизно є інтегральною лінією, що проходить через точку M_0 . Очевидно, що побудована крива буде тим ближче до інтегральної кривої, чим менше будуть дуги M_0M_1, M_1M_2, \dots

Мікромодуль 24

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Нехай ми маємо рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Функція

$$y = \sin x, \quad y = 2\cos x, \quad y = 3\sin x - \cos x$$

і взагалі функція вигляду

$$y = C_1 \sin x, \quad y = C_2 \cos x$$

або

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

є розв'язками даного рівняння при будь-якому виборі сталих C_1 , і C_2 ; у цьому легко переконатися, підставивши зазначені функції в рівняння.

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$y'x - x^2 - y = 0.$$

Його розв'язками будуть усі функції вигляду

$$y = x^2 + Cx,$$

де C - будь-яке стале. Дійсно, диференціюючи функцію $y = x^2 + Cx$, знаходимо:

$$y' = 2x + C.$$

Підставляючи вираз y і y' у вихідне рівняння, одержуємо тотожність

$$(2x + C)x - x^2 - x^2 - Cx = 0.$$

Кожне з рівнянь, розглянутих у прикладах 1 і 2, має незліченну кількість розв'язок.

Приклад 3. Дано рівняння з розділеними змінними:

$$x dx + y dy = 0.$$

Інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1.$$

Так як ліва частина останнього рівняння невід'ємна, то і права частина теж невід'ємна. Позначивши $2C_1$ через C^2 , будемо мати:

$$x^2 + y^2 = C^2$$

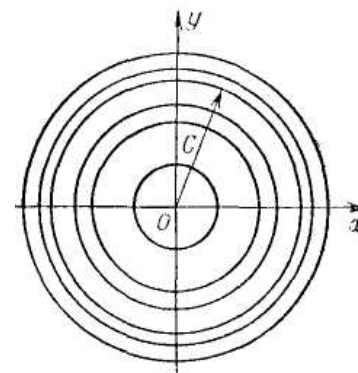


Рис. 10.15.

Це - рівняння сімейства концентричних кіл (рис. 10.15) з центром на початку координат і радіусом C .

Приклад 4. Дано рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Розділяємо змінні $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

Інтегруючи, знаходимо

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

тобто $\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C|$ або $\ln|y| = \ln|\frac{C}{x}|$;

звідси отримуємо загальне розв'язання : $y=C/x$.

Приклад 5. Дано рівняння

$$(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0.$$

Розділяючи змінні, знаходимо

$$\frac{1+x}{x} dx + \frac{1-y}{y} dy = 0; \left(\frac{1}{x}+1\right) dx + \left(\frac{1}{y}-1\right) dy = 0.$$

Інтегруючи, отримуємо

$$\ln|x|+x + \ln|y|-y = C \quad \text{або} \quad \ln|xy|+x-y = C;$$

останнє співвідношення є загальним інтегралом цього рівняння.

Приклади 6-12 на однорідні рівняння. Нагадаємо, що функція $f(x,y)$ називається однорідною n -го виміру відносно змінних x і y , якщо при будь якому справедлива тотожність

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Приклад 6. Функція $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ — однорідна функція першого виміру, так як

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt[3]{(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3} = \lambda \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda f(x, y).$$

Приклад 7. $f(x,y) = xy - y^2$ є однорідна функція другого виміру, так як $(\lambda x)(\lambda y) - (\lambda y)^2 = \lambda^2[xy - y^2]$.

Приклад 8.

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

є однорідна функція нульового виміру, так як

$$\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)} = \frac{x^2 - y^2}{xy},$$

тобто

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

або

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y).$$

Приклад 9. Дано рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Справа стоїть однорідна функція нульового виміру; отже, маємо однорідне рівняння. Робимо заміну $y/x = u$; тоді

$$y = ux; \quad \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}; \quad u + x \frac{du}{dx} = \frac{u}{1-u^2}; \quad x \frac{du}{dx} = \frac{u^3}{1-u^2}.$$

Розділивши змінні, будемо мати

$$\frac{(1-u^2)du}{u^3} = \frac{dx}{x}; \quad \left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x};$$

звідси, інтегруючи, отримуємо

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{або} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln|uxC|.$$

Підставляючи $u=y/x$, одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|Cy|.$$

Приклад 10. Рівняння

$$(2x+3y)dx+(x-2y)dy=0, \quad (x^2+y^2)dx-2xy dy=0$$

є однорідними

П р и к л а д 11. Дано рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1}.$$

Щоб перетворити його в однорідне рівняння, робимо заміну:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + h, \\ y &= y_1 + k. \end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1 + h + k - 3}{x_1 - y_1 + h - k - 1}.$$

Розв'язуючи систему двох рівнянь

$$h+k-3=0; \quad h-k-1=0,$$

знаходимо: $h=2, k=1$.

У результаті одержуємо однорідне рівняння

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1},$$

яке розв'язуємо підстановкою

$$\frac{y_1}{x_1} = u;$$

тоді

$$y_1 = ux_1; \quad \frac{dy_1}{dx_1} = u + x_1 \frac{du}{dx_1}; \quad u + x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u}{1-u},$$

і ми одержуємо рівняння зі змінними, що розділяються

$$x_1 \frac{du}{dx_1} = \frac{1+u^2}{1-u}.$$

Розділимо змінні:

$$\frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx_1}{x_1}.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln x_1 + \ln C, \quad \operatorname{arctg} u = \ln(Cx_1 \sqrt{1+u^2})$$

або

$$Cx_1 \sqrt{1+u^2} = e^{\operatorname{arctg} u}.$$

Підставляючи сюди y_1/x_1 замість u , отримуємо:

$$C\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1}}.$$

Нарешті, переходячи до змінних x і y , остаточно одержуємо:

$$C\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = e^{\operatorname{arctg} \frac{y-1}{x-2}}.$$

П р и к л а д 12. Рівняння

$$y' = \frac{2x+y-1}{4x+2y+5}$$

уже не можна розв'язати підстановкою $x=x_1+h, y=y_1+k$, тому що в цьому випадку система рівнянь, яка служить для визначення h і k , нерозв'язна (тут визначник $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ з коефіцієнтів при змінних дорівнює нулеві).

Це рівняння можна звести до рівняння зі змінними, що розділяються заміною: $2x+y=z$. Тоді $y' = z' - 2$, і рівняння приводиться до вигляду

$$z' - 2 = \frac{z-1}{2z+5},$$

або

$$z' = \frac{5z+9}{2z+5}.$$

Розв'язуючи його, знайдемо:

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln |5z+9| = x + C.$$

Так як $z=2x+y$, то ми одержимо остаточно розв'язання вихідного рівняння у вигляді

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln |10x + 5y + 9| = x + C.$$

або $10y - 5x + 7 \ln |10x + 5y + 9| = C_1,$

тобто у вигляді неявної функції y від x .

Приклад 13. Розглянемо сімейство ліній

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2,$$

де R -стала, C -параметр.

Це - сімейство кіл радіуса R з центрами на осі Ox . Вочевидь, що це сімейство буде мати огинаючими прямі $y=R, y=-R$ (рис. 10.16)

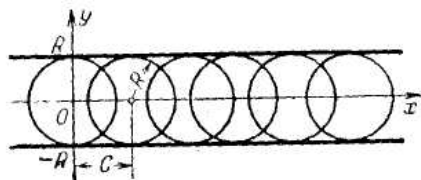


Рис. 10.16.

Приклад 14. Знайти огинаючу сімейства кіл

$$(x - C)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

залежних від одного параметра C .

Розв'язання. Диференціюючи рівняння сімейства по C , одержуємо:

$$2(x - C) = 0.$$

Виключаючи C з цих двох рівнянь, одержимо рівняння

$$y^2 - R^2 = 0, \quad y^2 - R^2 = 0, \text{ або } y = \pm R.$$

З геометричних міркувань ясно, що отримана пара прямих є огинаючою (а не геометричним місцем особливих точок, так як кола, що входять у сімейство, не мають особливих точок).

Приклад 15. Знайти огинаючу сімейства прямих:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (*)$$

де α — параметр.

Розв'язання.

Диференціюючи по α дане рівняння сімейства, будемо мати:

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \quad (**)$$

Для виключення параметра α з рівнянь (*) і (**) помножимо члени першого на $\cos \alpha$, а другого — на $\sin \alpha$ і віднімемо з першого друге; тоді будемо мати:

$$x = p \cos \alpha.$$

Підставляючи цей вираз в рівність (**), знайдемо:

$$y = p \sin \alpha.$$

Підносячи члени двох останніх рівнянь до квадрату і складаючи почленно, одержимо:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

Це - коло. Воно є огинаючою сімейства (а не геометричним місцем особливих точок, так як прямі лінії не мають особливих точок) (рис. 10.17).

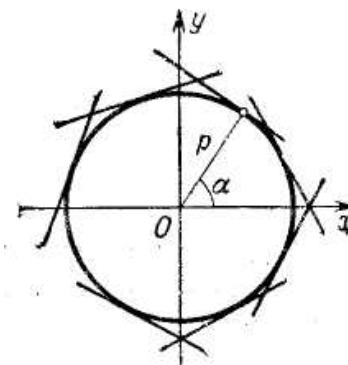


Рис. 10.17.

Приклад 16. Знайти особливий розв'язок рівняння

$$y(1 + y'^2) = R^2. \quad (*)$$

Розв'язання.

Знайдемо його загальний інтеграл. Розв'яжемо рівняння відносно y' :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}.$$

Розділяючи змінні, одержимо:

$$\frac{y \, dy}{\pm \sqrt{R^2 - y^2}} = dx.$$

Звідси, інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Легко бачити, що сімейство інтегральних ліній представляє собою сімейство кіл радіуса R з центрами на осі абсцис. Огинаючою сімейства кривих буде пара прямих $y = \pm R$.

Функції $y = \pm R$ задовольняють диференціальному рівнянню (*). Отже, це є особливий інтеграл.

Приклад 17. Знайти загальний і особливий інтегралі рівняння

$$y = x \frac{dy}{dx} + \frac{a \frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

Розв'язання. Загальний інтеграл одержуємо, замінюючи dDy/dx на C :

$$y = xC + \frac{aC}{\sqrt{1 + C^2}}.$$

Для одержання особливого розв'язка диференціюємо останнє рівняння по C :

$$x + \frac{a}{(1 + C^2)^{3/2}} = 0.$$

Особливий розв'язок (рівняння огинаючої) виходить у параметричному вигляді (де параметром служить C):

$$\begin{cases} x = -\frac{a}{(1 + C^2)^{3/2}} \\ y = \frac{aC^3}{(1 + C^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Виключивши параметр C , можемо одержати безпосередню залежність між x і y . Підносячи обидві частини кожного рівняння до степеня $2/3$ і складаючи почленно отримані рівняння, знайдемо особливий розв'язок в наступному вигляді:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Це—астроїда. Однак огинаючою сімейства (а отже, і особливим розв'язком) є не вся астроїда, а тільки її ліва половина (так як з параметричних рівнянь огинаючої видно, що $x \leq 0$ (рис. 10.18).



Рис. 10.18.

Приклад 18. Дано рівняння

$$y = xy'^2 + y'^2. (*)$$

Поклавши $y' = p$, будемо мати:

$$y = xp^2 + p^2. (**)$$

Диференціюючи по x , одержимо:

$$p = p^2 + [2xp + 2p] \frac{dp}{dx}. (***)$$

Знайдемо особливі розв'язки. Так як $p = p^2$ при $p_0 = 0$ і $p_1 = 1$, то розв'язками будуть лінійні функції (див. (**)):

$$y = x \cdot 0^2 + 0^2, \text{ тобто } y = 0,$$

і

$$y = x + 1$$

Чи будуть ці функції частковими або особливими розв'язками, ми побачимо, коли знайдемо загальний інтеграл. Для його пошуку запишемо рівняння (***) у вигляді

$$\frac{dx}{dp} - x \frac{2p}{p - p^2} = \frac{2}{1 - p}$$

і будемо розглядати x як функцію незалежної змінної p . Інтегруючи отримане лінійне (відносно x) рівняння, знаходимо:

$$x = -1 + \frac{C^2}{(p-1)^2}. \quad (****)$$

Крім p з рівняння (***) і (****), одержимо загальний інтеграл:

$$y = (C + \sqrt{x+1})^2.$$

Особливим інтегралом вихідного рівняння буде: $y=0$, оскільки це розв'язання не виходить із загального ні при якому значенні C .

Функція $y=x+1$ є не особливим, а частковим розв'язком; вона виходить із загального розв'язання при $C=0$.

П р и к л а д 19. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$y'' = \sin(kx)$$

і частковий розв'язок, що задовольняє початковим умовам

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1.$$

Розв'язання.

$$y' = \int_0^x \sin kx \, dx + C_1 = \frac{\cos kx - 1}{k} + C_1,$$

$$y = -\int_0^x \left(\frac{\cos kx - 1}{k} \right) dx + \int_0^x C_1 dx + C_2$$

або
$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + \frac{x}{k} + C_1 x + C_2.$$

Це є загальний інтеграл. Щоб знайти частковий розв'язок, який задовольняє даним початковим умовам, досить визначити відповідні значення C_1 і C_2 .

З умови $y_{x=0}=0$ знаходимо $C_2=0$. З умови $y'_{x=0}=1$ знаходимо $C_1=1$. Таким чином, шукане часткове розв'язання має вигляд

$$y = -\frac{\sin kx}{k^2} + x\left(\frac{1}{k} + 1\right).$$

Диференціальні рівняння розглянутого вигляду зустрічаються в теорії згинання балок.

П р и к л а д 20. Балка наглухо закріплена в кінці O і піддається дії зосередженої вертикальної сили P , прикладеної до

кінця балки L на відстані l від місця закріплення (рис. 10.19). Вагою балки зневажаємо.

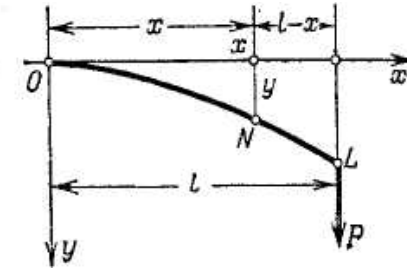


Рис. 10.19

Розглянемо січення у точці $N(x)$. Згинальний момент щодо січення N у даному випадку буде дорівнювати

$$M(x) = (l-x)P.$$

Диференціальне рівняння

$$y'' = [M(x)]/EJ$$

прийме вигляд

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l-x).$$

Початкові умови: при $x=0$ прогин y дорівнює нулеві і дотична до вигнутої осі балки збігається з віссю Ox , тобто

$$y_{x=0} = 0, \quad y'_{x=0} = 1.$$

Інтегруючи рівняння, знайдемо:

$$y' = \frac{P}{EJ} \int_0^x (l-x) dx = \frac{P}{EJ} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right); \quad y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right). \quad (*)$$

Зокрема, з формули (*) визначається прогин h на кінці балки L :

$$h = y_{x=l} = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

П р и к л а д 21. Розглянемо диференціальне рівняння ланцюгової лінії

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}.$$

Покладемо

$$\frac{dy}{dx} = p;$$

тоді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

і ми одержуємо диференціальне рівняння першого порядку щодо допоміжної функції p від x :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{a} \sqrt{1+p^2}.$$

Розділяючи змінні, будемо мати:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{a},$$

звідки

$$\ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x}{a} + C_1, \quad p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} - e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right)$$

Але так як

$$p = \frac{dy}{dx},$$

то останнє співвідношення являє собою диференціальне рівняння щодо шуканої функції y . Інтегруючи його, одержимо рівняння ланцюгової лінії

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a} + C_1} + e^{-\left(\frac{x}{a} + C_1\right)} \right) + C_2.$$

Знайдемо частковий розв'язок, що задовольняє наступним початковим умовам:

$$y_{x=0} = a, \quad y'_{x=0} = 0.$$

Перша умова дає $C_2 = 0$, друга $C_1 = 0$.

Остаточно отримуємо:

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Приклад 22. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$3y'' = y^{\frac{5}{3}}.$$

Розв'язання. Покладемо

$$p = \frac{dy}{dx}$$

розглядаючи p як функцію від y . Тоді

$$y'' = p \frac{dp}{dy},$$

ми одержуємо рівняння першого порядку для допоміжної функції p

$$3p \frac{dp}{dy} = y^{\frac{5}{3}}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$p^2 = C_1 - y^{\frac{2}{3}} \quad \text{або} \quad p = \pm \sqrt{C_1 - y^{\frac{2}{3}}}.$$

Але

$$p = \frac{dy}{dx};$$

отже, для визначення y одержуємо рівняння

$$\pm \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^{\frac{2}{3}}}} = dx, \quad \text{або} \quad \frac{y^{1/3} dy}{\pm \sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}} = dx,$$

звідки

$$x + C_2 = \pm \int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1}}.$$

Для обчислення останнього інтеграла зробимо підстановку:

$$C_1 y^{\frac{2}{3}} - 1 = t^2.$$

Тоді

$$y^{1/3} = (t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{1/2}}; \quad dy = 3t(t^2 + 1)^{1/2} \frac{1}{C_1^{3/2}} dt.$$

Отже

$$\int \frac{y^{1/3} dy}{\sqrt{C_1 y^{2/3} - 1}} = \frac{1}{C_1^2} \int \frac{3t(t^2 + 1)}{t} dt = \frac{3}{C_1^2} \left(\frac{t^3}{3} + t \right) = \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2)$$

Остаточно отримуємо:

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{C_1^2} \sqrt{C_1 y^{2/3} - 1} (C_1 y^{2/3} + 2)$$

Приклад 23. Нехай точка рухається по осі Ox під дією сили, що залежить тільки від положення точки. Диференціальне рівняння руху буде

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x).$$

Нехай при $t=0$ буде $x=x_0$,

$$\frac{dx}{dt} = v_0.$$

Помноживши обидві частини рівняння на $\frac{dx}{dt}$ і проінтегрувавши у границях від 0 до t , одержимо:

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

або

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left[- \int_{x_0}^x F(x) dx \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 = const$$

Перший доданок останньої рівності представляє кінетичну енергію, другий — потенційну енергію точки, яка рухається.

З отриманої рівності випливає, що сума кінетичної і потенційної енергії залишається сталою у весь час руху.

Задача про математичний маятник. Нехай матеріальна точка маси m під дією сили тяжіння рухається по колу L , яке

лежить у вертикальній площині. Знайдемо рівняння руху точки, зневажаючи силами опору (тобто силою тертя, силою опору повітря і т.п.).

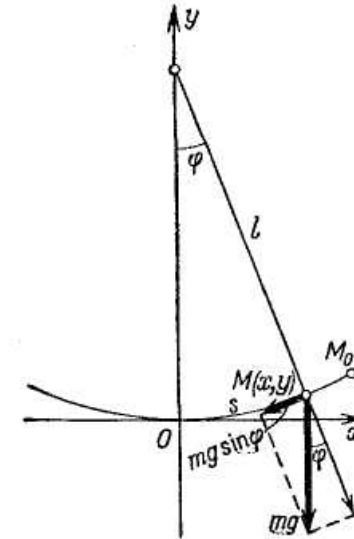


Рис. 10.20.

Розмістимо початок координат у нижчій точці кола, вісь Ox направимо по дотичній до кола (рис. 10.20). Позначимо через l радіус кола, через s - довжину дуги від початку O до змінної точки M , де знаходиться маса m , причому цю довжину беремо з відповідним знаком ($s > 0$, якщо точка M правіше точки O ; $s < 0$, якщо M лівіше O).

Наша задача полягає у встановленні залежності s від часу t . Розкладемо силу тяжіння mg на тангенціальну і нормальну складові. Перша, яка дорівнює $-mgs \sin \phi$, викликає рух, друга знищується реакцією кривої, по якій рухається маса m .

Таким чином, рівняння руху має вигляд

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mgs \sin \phi.$$

Так як для кола кут $\phi = s/l$, то ми одержуємо рівняння

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}.$$

Це диференціальне рівняння II типу (так як воно не містить явно незалежної змінної t).

Інтегруємо його відповідним чином:

$$\frac{ds}{dt} = p, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{ds} p.$$

Отже

$$p \frac{dp}{ds} = -g \sin \frac{s}{l},$$

або

$$p dp = -g \sin \frac{s}{l} ds,$$

звідки

$$p^2 = 2gl \cos \frac{s}{l} + C_1.$$

Позначимо через s_0 найбільшу довжину дуги, на яку відхиляється точка M . При $s=s_0$ швидкість точки дорівнює нулеві:

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{s=s_0} = p \Big|_{s=s_0} = 0.$$

Це дає можливість визначити C_1 :

$$0 = 2gl \cos \frac{s_0}{l} + C_1,$$

звідки

$$C_1 = -2gl \cos \frac{s_0}{l}.$$

Тому

$$p^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2gl \left(\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l} \right),$$

або, застосовуючи до останнього виразу формулу для різниці

косинусів:

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 4gl \sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l},$$

або

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}. \quad (*)$$

Це — рівняння з розподільними змінними. Розділяючи змінні, одержимо:

$$\frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} dt. \quad (**)$$

Будемо поки припускати, що $s \neq s_0$, тоді знаменник дробу відмінний від нуля. Якщо вважати, що при $t=0$ $s=0$, то з рівності (**), одержуємо:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{\sin \frac{s+s_0}{2l} \sin \frac{s_0-s}{2l}}} = 2\sqrt{gl} t.$$

Ця рівність і дає залежність s від t . Інтеграл, що стоїть зліва, не можна виразити через елементарні функції, не можна виразити через елементарні функції і функцію s від t . Розглянемо поставлену задачу приблизно.

Будемо припускати, що кути s_0/l та s/l малі. Кути

$$\frac{s+s_0}{2l} \quad \text{і} \quad \frac{s_0-s}{2l}$$

не будуть перевищувати s_0/l . У рівнянні (*) синуси кутів замінімо приблизно кутами

$$\frac{ds}{dt} = 2\sqrt{gl} \sqrt{\frac{s+s_0}{2l} \frac{s_0-s}{2l}}$$

або

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{s_0^2 - s^2}.$$

Розділяючи змінні, одержимо (припускаємо поки, що $s \neq s_0$):

$$\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt.$$

Знову будемо вважати, що $s=0$ при $t=0$. Інтегруючи останнє рівняння, одержимо:

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

або

$$\arcsin \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

звідки

$$s = s_0 \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Приклад 24. Задача про другу космічну швидкість.

Визначити найменшу швидкість, з якою потрібно кинути тіло вертикально вгору, щоб воно не повернулося на Землю. Опором повітря зневажити.

Розв'язання. Позначимо масу Землі і масу кинутого тіла відповідно через M і m . За законом тяжіння Ньютона сила f притягання, що діє на тіло m , буде:

$$f = k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

де r — відстань між центром Землі і центром ваги кинутого тіла,

k — гравітаційна стала.

Диференціальне рівняння руху зазначеного тіла з масою m буде:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M \cdot m}{r^2},$$

або

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{M}{r^2}. (*)$$

Ми взяли знак мінус тому, що в задачі прискорення від'ємне. Диференціальне рівняння (*) будемо вирішувати при наступних початкових умовах:

при $t=0$ $r=R$, $R \frac{dr}{dt} = v_0$.

Тут R —радіус Землі, v_0 —швидкість кидання. Позначимо

$$\frac{dr}{dt} = v, \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr},$$

де v —швидкість руху. Підставляючи в рівняння (*), одержимо:

$$v \frac{dv}{dr} = -k \frac{M}{r^2}.$$

Розділяючи змінні, одержуємо:

$$v dv = -kM \frac{dr}{r^2}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо:

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} + C_1. (**)$$

За умови, що $v=v_0$ на поверхні Землі (при $r=R$), визначимо C_1 :

$$\frac{v_0^2}{2} = +kM \frac{1}{R} + C_1$$

або

$$C_1 = -\frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}.$$

Підставмо знайдене значення C_1 в рівняння (**)

$$\frac{v^2}{2} = +kM \frac{1}{r} - \frac{kM}{R} + \frac{v_0^2}{2}$$

або

$$\frac{v^2}{2} = kM \frac{1}{r} + \left(\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \right).$$

За умовою тіло повинно рухатися так, щоб швидкість завжди була додатною, отже, $v^2/2 > 0$. Так як величина kM/r при необмеженому зростанні r робиться як завгодно малою, то умова $v^2/2 > 0$ буде виконуватися при будь-якому r тільки у випадку

$$\frac{v_0^2}{2} - \frac{kM}{R} \geq 0$$

або
$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2kM}{R}}$$

Отже, найменша швидкість буде визначатися рівністю

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kM}{R}}, (***)$$

де $k=6,66 \cdot 10^{-8} \text{ (см}^3\text{)/(г} \cdot \text{сек}^2\text{)}$, $R=63 \cdot 10^7 \text{ см}$.

На поверхні Землі при $r=R$ прискорення сили ваги дорівнює g ($g=981 \text{ см/сек}^2$). На підставі цього з рівності (*) одержуємо:

$$g = k \frac{M}{R^2}$$

або

$$M = \frac{gR^2}{k}$$

Підставляючи це значення M в формулу (***), одержуємо:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11,2 \cdot 10^5 \text{ см/сек} = 11,2 \text{ км/сек}.$$

Мікромодуль 24

Індивідуальні тестові завдання

Показати, що зазначені функції, що залежать від довільних сталих, задовольняють відповідним диференціальним рівнянням:

Функції

Диференціальні рівняння

1. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$.

$$\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin x.$$

2. $y = Cx + C - C^2$.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} + y = 0.$$

3. $y^2 = 2Cx + C^2$.

$$y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0.$$

4. $y^2 = Cx^2 - \frac{a^2C}{1+C}$. $xy \left[1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2) \frac{dy}{dx}$.

5. $y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3$. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{3}{x} \frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

6. $y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2k \frac{dy}{dx} + k^2y = e^x$.

7. $y = C_1e^{a \arcsin x} + C_2e^{-a \arcsin x}$. $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2y = 0$.

8. $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} = 0$.

Проінтегрувати диференціальні рівняння з розподільними змінними

9. $y dx - x dy = 0$. 10. $(1+u)v du + (1-v)u dv = 0$.

11. $(1+y) dx - (1-x)dy = 0$.

12. $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 + tx^2 = 0$. 13. $(y-a)dx + x^2dy = 0$.

14. $z dz - (t^2 - a^2)dz = 0$. 15. $\frac{dx}{dy} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. 16. $(1+s^2)dt - \sqrt{t}ds = 0$.

17. $\rho r + \rho \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$. 18. $\sin \theta \cos \varphi d\theta - \cos \theta \sin \varphi d\varphi = 0$.

19. $sc^2\theta \operatorname{tg} \varphi d\theta + sc^2\varphi \operatorname{tg} \theta d\varphi = 0$. 20. $sc^2\theta \operatorname{tg} \varphi d\varphi + sc^2\varphi \operatorname{tg} \theta d\theta = 0$.

21. $(1+x^2)dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$. 22. $\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$.

23. $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1-e^x)sc^2y dy = 0$. 24. $(x-y^2x)dx + (y-x^2y)dy = 0$.

Задачі на складання диференціальних рівнянь

25. Довести, що крива, у якої кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці пропорційний абсцисі точки торкання, є параболою.

26. Знайти таку криву, яка проходить через точку $(0, -2)$, щоб кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій її точці дорівнював ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці.

27. Знайти криву, що проходить через точку $(1, 1)$, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в будь-якій точці був пропорційний квадратові ординати цієї точки.

28. Знайти криву, для якої кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці в n раз більше кутового коефіцієнта прямої, що з'єднує ту ж точку з початком координат.

29. Через точку (2, 1) провести криву, для якої дотична в будь-якій точці збігається з напрямленням радіуса-вектора, проведеного з початку координат у ту ж точку.

30. Знайти в полярних координатах рівняння такої кривої, у кожній точці якої тангенс кута між радіусом-вектором і дотичною дорівнює оберненій величині радіуса-вектора, узятій зі зворотним знаком.

31. Знайти в полярних координатах рівняння такої кривої, у кожній точці якої тангенс кута, утвореного радіусом-вектором з дотичною, дорівнює квадратові радіуса-вектора.

32. Довести, що крива, що володіє тією властивістю, що всі її нормалі проходять через сталу точку, є коло.

33. Знайти таку криву, щоб у кожній її точці довжина піддотичної дорівнювала подвоєній абсцисі.

34. Знайти криву, для якої радіус-вектор дорівнює довжині дотичної між точкою торкання і віссю x .

Розв'язання. За умовами задачі

$$\frac{y}{y'} \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{x^2+y^2},$$

звідки

$$\frac{dy}{y} = \pm \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи, одержуємо два сімейства кривих: $y = Cx$ і $y = C/x$

35. За законом Ньютона швидкість охолодження якого-небудь тіла в повітрі пропорційна різниці між температурою тіла і температурою повітря. Якщо температура повітря дорівнює 20°C і тіло протягом 20 хв. охолоджується з 100° до 60°C , то через скільки годин його температура понизиться до 30°C ?

Розв'язання. Диференціальне рівняння задачі

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20).$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$T - 20 = Ce^{kt}; \quad T = 100 \text{ при } t = 0; \quad T = 60 \text{ при } t = 20;$$

тому

$$C = 80; \quad 40 = Ce^{20k}; \quad e^k \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20},$$

отже

$$T = 20 + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}.$$

Покладаючи $T = 30$, знайдемо $t = 60$ хв.

36. У який час T вода витече через отвір $0,5 \text{ см}^2$ на дні конусної лійки висотою 10 см з кутом при вершині $d = 60^\circ$?

Розв'язання. Підрахуємо двома способами об'єм води, що витекла за час між моментами t і $t + \Delta t$. При сталій швидкості v за 1 сек через отвір виливається циліндр води з основою $0,5 \text{ см}^2$ і висотою v , а за час Δt витікає об'єм води dv , рівний

$$-dv = -0,5v dt = -0,3\sqrt{2gh} dt.$$

(Швидкість v витікання води з отвору, що знаходиться на відстані h від вільної поверхні, дається формулою $v = 0,6\sqrt{2gh}$, де g - прискорення сили ваги.)

С іншого боку, унаслідок витікання висота води одержує від'ємний «приріст» dh , і диференціал об'єму води, яка витекла, дорівнює

$$-dv = \pi r^2 dh = \frac{\pi}{3} (h + 0,7)^2 dh.$$

Таким чином,

$$\frac{\pi}{3} (h + 0,7)^2 dh = -0,3\sqrt{2gh} dt,$$

звідси

$$t = 0,0315(10^{5/2} - h^{5/2}) + 0,0732(10^{3/2} - h^{3/2}) + 0,078(\sqrt{10} - \sqrt{h}).$$

Покладаючи $h = 0$, одержуємо час витікання $T = 12,5$ сек.

37. Сповільнююча дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання ω . Знайти залежність цієї кутової швидкості від часу, якщо відомо, що диск, почавши обертатися зі швидкістю 100 об/хв, після закінчення 1 хв. обертається зі швидкістю 60 об/хв.

38. Припустимо, що у вертикальному повітряному стовпі тиск на кожній рівні обумовлено тиском вищележачих прошарків. Знайти залежність тиску від висоти, якщо відомо, що на рівні моря цей тиск дорівнює 1 кг на 1 см^2 , а на висоті 500 м $0,92 \text{ кг}$ на 1 см^2 .

Указівка. Скористатися законом Бойля — Маріотта, у силу якого щільність газу пропорційна тискові. Диференціальне рівняння задачі $dp = -kp dh$ звідки $p = e^{-0,00017h}$.

Проінтегрувати наступні однорідні диференціальні рівняння:

39. $(y - x) dx + (y + x) dy = 0$. 40. $(x + y) dx + x dy = 0$.

41. $(x + y) dx + (y - x) dy = 0$. 42. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

43. $(8y + 10x) dx + (5y + 7x) dy = 0$. 44. $(2\sqrt{st} - s) dt + t ds = 0$.

45. $(t - s) dt + t ds = 0$. 46. $xy^2 dy = (x^3 + y^3) dx$.

47. $x \cos \frac{y}{x} (y dx + x dy) = y \sin \frac{y}{x} (x dy - y dx)$.

Проінтегрувати наступні диференціальні рівняння які приводяться до однорідних:

48. $(3y - 7x + 7) dx - (3x - 7y - 3) dy = 0$.

49. $(x + 2y + 1) dx - (2x + 4y + 3) dy = 0$.

50. $(x + 2y + 1) dx - (2x - 3) dy = 0$.

51. Визначити криву, піднормаль якої є середнє арифметичне між абсцисою й ординатою.

52. Визначити криву, у якої відношення відрізка, що відтинається дотичною на осі Oy , до радіуса-вектора дорівнює сталій величині.

Розв'язання. За умовами задачі

$$\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m,$$

звідки

$$\left(\frac{x}{C}\right)^m - \left(\frac{C}{x}\right)^m = \frac{2y}{x}.$$

53. Визначити криву, у якої відношення відрізка, що відтинається нормаллю на осі Ox , до радіуса-вектора дорівнює сталій величині.

Розв'язання. За умовою задачі

$$\frac{x + yx \frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = m,$$

звідки $x^2 + y^2 = m^2(x - C)^2$.

54. Визначити криву, у якої відрізок, що відтинається дотичною на осі Oy , дорівнює $a \sec \theta$, де θ — кут між радіусом-вектором і віссю x .

Розв'язання. Так як $\operatorname{tg} \theta = y/x$ і за умовою задачі $y = xdy/dx = a \sec \theta$, то одержуємо:

$$y - x \frac{dy}{dx} = a \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x},$$

звідки

$$y = \frac{x}{2} \left[e^{\frac{a}{x+b}} - e^{-\left(\frac{a}{x+b}\right)} \right].$$

55. Визначити криву, для якої відрізок, що відтинається на осі ординат нормаллю, проведеною в якій-небудь точці кривої, дорівнює відстані цієї точки від початку координат.

Розв'язання. Відрізок, що відтинається нормаллю на осі Oy , дорівнює $y + x/y$; тому, за умовою задачі, маємо:

$$y + \frac{x}{y'} = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad \text{звідки} \quad x^2 = C(2y + C).$$

56. Знайти форму дзеркала, яке усі промені, що виходять з однієї і тієї ж точки O , відбивало б паралельно даному напрямленню.

Розв'язання. За вісь x приймаємо дане напрямлення, точку O — за початок координат. Нехай OM — падаючий промінь, MP — відбитий, MQ — нормаль до шуканої кривої:

$$\alpha = \beta; \quad OM = OQ, \quad NM = y, \quad NQ = NO + OQ - x + \sqrt{x^2 + y^2} = y \operatorname{ctg} \beta = y \frac{dy}{dx},$$

звідки

$$y dy = (-x + \sqrt{x^2 + y^2}) dx;$$

інтегруючи, маємо: $y^2 = C^2 + 2Cx$.

Проінтегрувати наступні диференціальні рівняння:

57. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$. 58. $y' - a \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$.

59. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - ax^3 = 0$. 60. $\frac{ds}{dt} \cos t + s \sin t = 1$.

61. $\frac{ds}{dt} + s \cos t = \frac{1}{2} \sin 2t$. 62. $y' - \frac{n}{x} y = e^x x^n$. 63. $y' + \frac{n}{x} y = \frac{a}{x^n}$.

64. $y' + y = \frac{1}{e^x}$. 65. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$.

Проінтегрувати рівняння Бернуллі:

66. $y' + xy = x^3y^3$. 67. $(1-x^2)y' - xy - axy^2 = 0$.

68. $3y^2y' - ay^3 - x - 1 = 0$. 69. $y'(x^2y^3 + xy) = 1$.

70. $(y \ln x - 2)y dy = x dy$. 71. $y - y' \cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$.

Проінтегрувати наступні рівняння в повних диференціалах:

72. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$. 73. $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$.

74. $(y^3 - x)y' = y$. 75. $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{x} \right] dx + \left[\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2} \right] dy = 0$.

76. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$. 77. $\frac{x dx + (2x + y)dy}{(x + y)^2} = 0$.

78. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx = \frac{2y dy}{x^3}$. 79. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0$.

80. $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$.

81. Визначити криву, що володіє тою властивістю, що добуток квадрата відстані будь-якої її точки від початку координат на відрізок, що відтинається на осі абсцис нормаллю в цій точці, дорівнює кубові абсциси цієї точки.

82. Знайти огинаючу наступних сімейств ліній:

a) $y = Cx + C^2$. b) $y = \frac{x}{C} + C^2$. c) $\frac{x}{C} - \frac{y}{C^3} = 2$. d) $C^2x + Cy - 1 = 0$.

e) $(x - C)^3 + (y - C)^2 = C^2$. f) $(x - C)^2 + y^2 = 4C$. g) $(x - C)^2 + (y - C)^2 = 4$.

83. Пряма переміщається так, що сума відрізків, що відтинаються нею на осях координат, зберігає сталу величину a . Скласти рівняння огинаючої всіх положень прямої.

84. Знайти огинаючу сімейства прямих, на яких осі координат відтинають відрізок сталої довжини a .

85. Знайти огинаючу сімейства кіл, діаметрами яких служать подвоєнні ординати парабол

86. Знайти огинаючу сімейства кіл, центри яких лежать на параболі $y^2 = 2px$, причому всі кола сімейства проходять через вершину цієї параболі.

87. Знайти огинаючу сімейства кіл, діаметрами яких служать перпендикулярні до осі x хорди еліпса

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

88. Знайти еволюту еліпса $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

як огинаючу його нормалей.

Проінтегрувати наступні рівняння (рівняння Лагранжа):

89. $y = 2xy' + y'^2$. 90. $y = xy'^2 + y'^2$. 91. $y = x(1 + y') + (y')^2$.

92. $y = yy'^2 + 2xy'$.

93. Знайти криву, яка має сталу нормаль.

Проінтегрувати дані рівняння Клеро:

94. $y = xy' + y' - y'^2$. 95. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$. 96. $y = xy' + y'$.

97. $y = xy' + \frac{1}{y'}$. 98. $y = xy' - \frac{1}{y'^2}$.

99. Площа трикутника, утвореного дотичною до шуканої кривої й осями координат, є величина стала. Знайти криву.

100. Знайти таку криву, щоб відрізок її дотичної між координатними осями мав сталу довжину a .

101. Знайти криву, дотичні до якої утворюють на осях відрізки, сума яких дорівнює $2a$.

102. Знайти криві, для яких добуток відстані будь-якої дотичної до двох даних точок сталий.

103. Знайти ортогональні траєкторії сімейства кривих $y = ax^n$.

104. Знайти ортогональні траєкторії сімейства парабол $y^2 = 2p(x - a)$ (a —параметр сімейства).

105. Знайти ортогональні траєкторії сімейства кривих $x^2 - y^2 = a$ (a - параметр).

106. Знайти ортогональні траєкторії сімейства кіл $x^2 + y^2 = 2ax$.

107. Знайти ортогональні траєкторії рівних парабол, що дотикаються у вершині даної прямої.

108. Знайти ортогональні траєкторії циссоїд

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

109. Знайти ортогональні траєкторії лемніскат

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2.$$

110. Знайти ізогональні траєкторії сімейства кривих: $x^2 = 2a(x - y\sqrt{3})$, де a -змінний параметр, якщо сталий кут, що утворюють траєкторії з лініями сімейства, дорівнює $\omega = 60^\circ$.

Розв'язання. Знаходимо диференціальне рівняння сімейства

$$y' = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$$

і заміняємо y' виразом

$$q = \frac{y' - \operatorname{tg}\omega}{1 + y' \operatorname{tg}\omega}$$

Якщо $\omega = 60^\circ$, то

$$q = \frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'}$$

і ми одержуємо диференціальний вираз

$$\frac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}y'} = \frac{2y}{x} - \sqrt{3}$$

Загальний інтеграл

$$y^2 = C(x - y\sqrt{3})$$

дає шукане сімейство траєкторій.

111. Знайти ізогональні траєкторії сімейства парабол $y^2 = 4Cx$, коли $\omega = 45^\circ$.

112. Знайти ізогональні траєкторії сімейства прямих $y = Cx$ для випадку $\omega = 30^\circ, 45^\circ$.

113. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Виключити C_1 і C_2 .

114. Написати диференціальне рівняння всіх кіл, що лежать в одній площині.

115. Написати диференціальне рівняння всіх центральних кривих другого порядку, головні осі яких збігаються з осями Ox, Oy .

116. Дано диференціальне рівняння $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ і його загальне розв'язання $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$.

Потрібно: 1) перевірити, що дане сімейство кривих дійсно є загальним розв'язанням;

2) знайти часткове розв'язання, якщо при $x=0$ маємо $y=1, y'=0, y''=-1$.

117. Дано диференціальне рівняння $y'' = 1/2y'$ і його загальне розв'язання

$$y = \pm \frac{2}{3}(x+C)^{3/2} + C_2$$

Потрібно: 1) перевірити, що дане сімейство кривих дійсно є загальним розв'язанням;

2) знайти інтегральну криву, що проходить через точку $(1, 2)$, якщо дотична в цій точці складає з додатним напрямленням осі Ox кут 45° .

Проінтегрувати деякі найпростіші типи диференціальних рівнянь другого порядку, які приводяться до рівнянь першого порядку.

118. $xy''' = 2$. Виділити часткове розв'язання, яке задовольняє наступним початковим умовам: $x=1, y=1, y'=1, y''=3$.

$$119. y^{(n)} = x^m. \quad 120. y'' = a^2 y. \quad 121. y'' = \frac{a}{y^3}$$

У прикладах 122—125 виділити часткове розв'язання, що задовольняє наступним початковим умовам: $x=0, y=-1, y'=0$.

$$122. xy'' - y' = x^2 e^x. \quad 123. yy'' - (y')^2 + (y')^3 = 0. \quad 124. y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x.$$

$$125. (y'')^2 + (y')^2 = a^2. \quad 126. y'' = \frac{1}{2y'}. \quad 127. y''' = y''^2.$$

$$128. y'y''' - 3y''^2 = 0.$$

Мікромодуль 25.

Лінійні рівняння і системи лінійних рівнянь

10.4. Лінійні рівняння

14. Лінійні однорідні рівняння. Дослідження лінійних рівнянь будь-якого порядку багато в чому аналогічне дослідженню лінійних рівнянь першого порядку (п. 4), хоча тепер вже одержати розв'язання в квадратурах у загальному випадку не вдасться. Розглянемо спочатку для простоти рівняння другого порядку. Рівняння

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0, \quad (10.75)$$

ліва частина якого лінійна щодо невідомої функції і її похідних, називається лінійним однорідним рівнянням.

Позначимо для стислості ліву частину рівняння (10.75) через $L[z]$, тобто в даному випадку

$$L[z] \equiv z'' + p(x)z' + q(x)z. \quad (\text{по визначенню}).$$

Тоді рівняння (10.75) можна переписати у вигляді

$$L[z] = 0.$$

Вираз $L[z]$, має наступні властивості:

$$L[z_1 + z_2] = (z_1 + z_2)'' + p(x)(z_1 + z_2)' + q(x)(z_1 + z_2) = (z_1'' + p(x)z_1' + q(x)z_1) + (z_2'' + p(x)z_2' + q(x)z_2) = L[z_1] + L[z_2],$$

$$L[Cz] = CL[z] \quad (C = \text{const})$$

(перевіряється аналогічно).

Про такі вирази, які називають лінійними операторами, ми згадували в модулі 9 п. 26.

Легко довести наступні властивості рівняння (10.75).

1. Сума розв'язок рівняння (10.75) буде розв'язком того ж рівняння. Дійсно, якщо z_1 і z_2 - два таких розв'язки, тобто

$$L[z_1]=0 \text{ і } L[z_2]=0, \text{ то } L[z_1+z_2]=L[z_1]+L[z_2]=0.$$

Аналогічно перевіряється властивість 2:

2. Якщо розв'язок рівняння (10.75) помножити на константу, то вийде розв'язок того ж рівняння.

Властивості 1 і 2 можна об'єднати так: лінійна комбінація розв'язок рівняння (10.75) буде розв'язком того ж рівняння. Наприклад, якщо $z_1(x)$ і $z_2(x)$ задовольняють рівнянню (10.75), то і

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) \quad (10.76)$$

задовольняє тому ж рівнянню при будь-яких сталих C_1, C_2 .

3. Тотожно нульова функція задовольняє рівнянню (10.75).

4. Якщо відомо ненульове розв'язання рівняння (10.75), то його порядок можна понизити на одиницю. Дійсно, нехай $z_1(x)$ — таке розв'язання; зробимо підстановку $z = z_1 u$, де $u = u(x)$ — нова невідома функція. Одержимо

$$(z_1 u + 2z_1' u' + z_1 u'') + p(z_1' u + z_1 u') + qz_1 u = 0,$$

тобто

$$z_1 u'' + (2z_1' + pz_1)u' + (z_1'' + pz_1' + qz_1)u = 0.$$

Але так як $L[z_1]=0$, то останній член відпадає і після підстановки $u'=v$ одержуємо

$$z_1 v' + (2z_1' + pz_1)v = 0,$$

тобто лінійне однорідне рівняння на одиницю нижчого, чим було, порядку.

Доведемо інтегрування до кінця:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{2z_1' + pz_1}{z_1} dx,$$

$$\ln |v| = -2 \ln |z_1| - \int p(x) dx + \ln C_2,$$

$$v = -\frac{C_2}{z_1^2} e^{-\int p(x) dx}, \quad u = C_2 \int \frac{1}{z_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx + C_1,$$

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int \frac{1}{z_1^2} e^{-\int p(x) dx} dx. \quad (10.77)$$

Функція, при якій стоїть множник C_2 , є одним із часткових розв'язок рівняння (10.75), тому що вона виходить із загального розв'язання (10.77), якщо покласти $C_1=0, C_2=1$. Тому якщо позначити її через z_2 , то ми приходимо до властивості 5:

5. Загальне розв'язання рівняння (10.75) має вигляд (10.76), де C_1 і C_2 — довільні сталі, а z_1 і z_2 — два часткові розв'язки цього рівняння.

У цій властивості в якості z_1, z_2 можуть бути узяті тільки два лінійно незалежних розв'язки, а не будь-яка пара розв'язок. Поняття лінійної залежності функцій уводиться подібно аналогічному поняттю для векторів: а саме, кілька функцій називаються лінійно залежними одна від одної, якщо одна з них є лінійною комбінацією інших. Зокрема, дві функції $z_1(x)$ і $z_2(x)$ лінійно залежні, якщо $z_2(x) \equiv C z_1(x)$, тобто якщо вони пропорційні. Тоді формула (10.76) не дає загального розв'язка, тому що

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 \equiv C_1 z_1 + C_2 C z_1 \equiv (C_1 + C_2 C) z_1(x) = D z_1(x),$$

де $D = C_1 + C_2 C$ — стала; виходить, хоча формально праворуч є дві довільні сталі, але вони не є істотними, тобто їхнє число можна зменшити на одиницю.

Усі зазначені властивості справедливі і для лінійного однорідного рівняння будь-якого порядку

$$z^{(n)} + p(x)z^{(n-1)} + q(x)z^{(n-2)} + \dots + s(x)z = 0, \quad (10.78)$$

за тим виключенням, що загальне розв'язання замість (10.76), має вигляд

$$z = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \dots + C_n z_n(x). \quad (10.79)$$

Тут усі C — довільні сталі, а z_1, z_2, \dots, z_n — які-небудь лінійно незалежні розв'язки рівнянь (10.78). Сукупність n лінійно незалежних розв'язок рівняння (10.78) порядку n називається фундаментальною системою розв'язок. Таким чином, загальне розв'язання рівняння (10.78) є лінійна комбінація розв'язок з фундаментальної системи з довільними коефіцієнтами. Можна сказати, що сукупність усіх розв'язок рівняння (10.78) утворює n -мірний лінійний простір; фундаментальна система розв'язок — це базис у цьому просторі.

Відзначимо на закінчення, що в рівнянні (10.78) можна понизити порядок на одиницю по методу п. 10 (тип 4), але це

роблять рідко, тому що після зниження порядку рівняння стає нелінійним.

15. Неоднорідні рівняння. Розглянемо тепер *лінійне неоднорідне рівняння*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (10.80)$$

Відповідно до п. 14 позначимо ліву частину через $L[y]$.

1. Знання якого-небудь часткового розв'язка рівняння (10.80) дозволяє звести задачу про інтегрування цього рівняння до задачі про інтегрування відповідного (тобто з відкинутою правою частиною) однорідного рівняння (10.75).

Дійсно, якщо $Y(x)$ — такий розв'язок, то, зробивши заміну

$$y = Y(x) + z, \quad (10.81)$$

де $z = z(x)$ — нова невідома функція, одержимо

$$L[Y+z] = f(x), \quad L[Y] + L[z] = f(x).$$

Однак $L[Y] = f(x)$

і ми одержуємо рівняння (10.75) для z .

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (10.80) є сума якого-небудь його часткового розв'язка і загального розв'язка відповідного однорідного рівняння (порівн. з розв'язанням лінійного рівняння в п. 4).

2. Якщо права частина $f(x)$ дорівнює лінійної комбінації, наприклад, двох функцій, тобто

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad (\alpha, \beta = \text{const}),$$

і відомі які-небудь часткові розв'язки $Y_1(x)$ і $Y_2(x)$ рівняння (10.80) із правими частинами $f_1(x)$ і $f_2(x)$, то функція

$$Y(x) = \alpha Y_1(x) + \beta Y_2(x)$$

служить частковим розв'язком рівняння (10.80) із правою частиною $f(x)$.

3. Якщо відомо загальне розв'язання однорідного рівняння (10.75), то загальне розв'язання рівняння (10.80) можна знайти за допомогою квадратур. Це робиться за допомогою знайденого Лагранжем методу варіації довільних сталих у такий спосіб. Як ми знаємо, загальне розв'язання рівняння (10.75) має вигляд (10.76). За аналогією з формулою (10.22) ми шукаємо розв'язання рівняння (10.80) у вигляді

$$y = \varphi_1(x)z_1(x) + \varphi_2(x)z_2(x), \quad (10.82)$$

де φ_1, φ_2 — деякі поки невідомі функції. Так як їх дві, а рівняння (10.80) одне, то для знаходження цих функцій ми накладемо на них ще одне додаткове співвідношення ((10.84)). Диференціюючи рівність (10.82), одержимо

$$y' = (\varphi_1 z_1' + \varphi_2 z_2') + (\varphi_1' z_1 + \varphi_2' z_2). \quad (10.83)$$

Загадаємо, щоб друга дужка обернулася в нуль:

$$\varphi_1' z_1 + \varphi_2' z_2 = 0. \quad (10.84)$$

Тоді при диференціюванні рівності (10.83) треба брати до уваги тільки першу дужку, тобто

$$y'' = (\varphi_1 z_1'' + \varphi_2 z_2'') + (\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2'). \quad (10.85)$$

Підставляємо всі отримані результати (10.82), (10.83) і (10.85) у рівняння (10.80), звичайно, не виписуючи нульової суми. Це дасть

$$\varphi_1(z_1'' + pz_1' + qz_1) + \varphi_2(z_2'' + pz_2' + qz_2) + (\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2') = f(x).$$

Оскільки функції z_1, z_2 задовольняють рівнянню (10.75), то в останнім рівнянні перші дві дужки відпадають і воно перетворюється в рівність

$$\varphi_1' z_1' + \varphi_2' z_2' = f(x). \quad (10.86)$$

Отже, для знаходження φ_1, φ_2 у нас залишилися два співвідношення: (10.84) і (10.86). Так як z_1, z_2 і $f(x)$ вважаються відомими, то виходить система двох алгебраїчних рівнянь першого степеня з двома невідомими: φ_1', φ_2' . Розв'язуючи систему, ми знаходимо ці невідомі, а інтегруючи, знаходимо φ_1, φ_2 .

Розглянемо, наприклад, найпростіше рівняння змушених коливань, яке вийде, якщо в правій частині рівняння (10.3) додати зовнішню силу $P(t)$. Розділивши обидві частини рівняння на M , одержимо

$$y'' + \omega_0^2 y = f(t), \quad (10.87)$$

де позначено

$$\omega_0^2 = k/M, \quad f(t) = P(t)/M.$$

Відповідне однорідне рівняння

$$z'' + \omega_0^2 z = 0 \quad (10.88)$$

має, як легко безпосередньо перевірити, два розв'язки, $z_1 = \cos \omega_0 t, z_2 = \sin \omega_0 t$, і тим самим загальне розв'язання

$$z = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (10.89)$$

Звідси видно, зокрема, що ω_0 — це власна частота коливань розглянутої системи, тобто частота коливань при відсутності зовнішніх сил.

Відповідно до формули (10.82) розв'язання рівняння (10.87) шукаємо у вигляді

$$y = \varphi_1(t) \cos \omega_0 t + \varphi_2(t) \sin \omega_0 t. \quad (10.90)$$

Тоді рівняння (10.84) і (10.86) здобувають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' \cos \omega_0 t + \varphi_2' \sin \omega_0 t &= 0, \\ \varphi_1'(-\omega_0 \sin \omega_0 t) + \varphi_2' \omega_0 \cos \omega_0 t &= f(x). \end{aligned} \right\}$$

Звідси безпосередньо знаходимо

$$\varphi_1'(t) = -\frac{1}{\omega_0} f(t) \sin \omega_0 t, \quad \varphi_2'(t) = \frac{1}{\omega_0} f(t) \cos \omega_0 t.$$

При інтегруванні тут незручно скористатися невизначеним інтегралом через наявність у ньому неуточною довольної сталої; краще нижню границю інтеграла зафіксувати, наприклад, поклавши його рівним моменту $t=0$ початку відліку часу:

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + C_1,$$

де C_1 — довільна стала. Оскільки в правій частині t має два змісти — змінна інтегрування і верхня границя, то краще скористатися незалежністю визначеного інтеграла від позначення змінної інтегрування і написати

$$\varphi_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + C_1; \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + C_2.$$

Підставляючи в (10.90), одержимо

$$y = -\frac{1}{\omega_0} \cos \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \sin \omega_0 \tau \, d\tau + \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \int_0^t f(\tau) \cos \omega_0 \tau \, d\tau + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Тепер внесемо $\cos \omega_0 t$ і $\sin \omega_0 t$ під знак інтеграла (цього не можна було б зробити, не змінивши позначення змінної інтегрування t на τ) і об'єднаємо обидва інтеграли:

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t [-f(\tau) \cos \omega_0 t \sin \omega_0 \tau + f(\tau) \sin \omega_0 t \cos \omega_0 \tau] \, d\tau + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t.$$

Звідси одержуємо загальне розв'язання рівняння (10.87):

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) f(\tau) \, d\tau + C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t. \quad (10.91)$$

Довільні сталі C_1 і C_2 можна визначити, наприклад, з початкових умов

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0. \quad (10.92)$$

Підставляючи в дві частини (10.91) значення $t=0$, одержимо $y_0 = C_1$. Щоб використати другу умову (10.92), треба продиференціювати рівність (10.91) по t , після чого підставити $t=0$. При диференціюванні інтеграла треба мати на увазі, що t входить у нього двічі, тобто

$$y' = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \omega_0 \cos \omega_0(t-\tau) f(\tau) \, d\tau + \left[\frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-\tau) f(\tau) \right]_{\tau=t} - C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t = \int_0^t \cos \omega_0(t-\tau) f(\tau) \, d\tau - C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t;$$

$$v_0 = C_2 \omega_0; \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Звідси розв'язання рівняння (10.87) при початкових умовах (10.92)

$$y = \frac{1}{\omega_0} \int_0^t \sin \omega_0(t-\tau) f(\tau) \, d\tau + y_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Усі зазначені властивості справедливі і для рівняння

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + q(x)y^{(n-2)} + \dots + s(x)y = f(x). \quad (10.93)$$

Метод варіації довільних сталих буде виглядати так: у формулу (10.79) замість C_1, C_2, \dots, C_n треба підставити $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, після чого послідовно диференціювати цю формулу, прирівнюючи на кожному кроці, аж до $(n-1)$ -го, групу членів з φ'_k , яка виходить, нулевій; n -е співвідношення вийде з підстановки всіх отриманих виразів у (10.93).

4. *Будь-яке розв'язання рівняння (10.78), а також (10.93) можна продовжити на будь-який інтервал, на якому коефіцієнти і права частина не обертаються в нескінченність.* Для нелінійних рівнянь може вийти, що розв'язок або його похідні при такому продовженні ідуть у нескінченність для кінцевого значення x . Простим прикладом цього служить рівняння (10.38) при $\alpha > 1$ (рис. 10.7): тут з ростом u поле напрямлень так швидко збільшує крутість, що інтегральна лінія піднімається в нескінченність, пройшовши лише кінцеву відстань уздовж осі x . На відміну від цього для лінійного рівняння, наприклад, вигляду $y' = My$ розв'язок $y = Ce^{Mx}$ не може піти в нескінченність при кінцевому x .

16. Крайові задачі. Дотепер, для того щоб виділити часткове розв'язання з загального, ми користувалися початковими умовами, згідно яким шукана функція і її похідні задаються при якому-небудь одному значенні аргументу. Є й інші способи виділення часткового розв'язання з загального, котрі зустрічаються в практичних задачах. Усі ці способи поєднує те, що кількість додаткових рівностей, що накладаються на шуканий розв'язок, повинна дорівнювати числу степенів свободи в загальному розв'язанні розглянутого рівняння, тобто порядковий цього рівняння.

Ці додаткові рівності у випадку рівняння (10.5) порядку n можна записати у вигляді

$$G_k[y] = \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (10.94)$$

де $G_k[y]$ — яка-небудь задана комбінація значень шуканої функції $y(x)$ і її похідних при, узагалі говорячи, різних значеннях аргументу (точніше, $G_k[y]$ - це який-небудь заданий функціонал, а α_k - задані числа. Наприклад, у випадку початкових умов (10.11) $G_k[y]$ означає $y^{(k-1)}(x_0)$.

Якщо відомо загальне розв'язання (10.8) заданого рівняння, то для знаходження необхідного часткового розв'язка треба виразити для загального розв'язання підставити в умови (10.94), у результаті чого вийде система n рівнянь з n невідомими C_1, C_2, \dots, C_n .

Якщо

$$G_k[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 G_k[y_1] + C_2 G_k[y_2] \quad (C_1, C_2 = \text{const}),$$

то умови (10.94) називаються *лінійними*; якщо до того ж усі $\alpha_k = 0$, то вони називаються *лінійними однорідними*. Якщо які-небудь функції, не обов'язково розв'язання диференціального рівняння, задовольняють лінійним однорідним умовам, то і їхня будь-яка лінійна комбінація теж задовольняє цим умовам. Дійсно, якщо, наприклад, $G_k[y_1] = 0$ і $G_k[y_2] = 0$, то

$$G_k[C_1 y_1 + C_2 y_2] = C_1 G_k[y_1] + C_2 G_k[y_2] = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Різниця двох функцій, що задовольняють однаковим неоднорідним лінійним умовам, задовольняє відповідним однорідним умовам.

Надалі ми розглянемо розв'язання рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (a \leq x \leq b) \quad (10.95)$$

при додаткових умовах

$$y(a) = \alpha_1, \quad y(b) = \alpha_2, \quad (10.96)$$

хоча всі отримані загальні висновки справедливі для лінійних диференціальних рівнянь будь-якого порядку n при лінійних додаткових умовах (10.94) будь-якого вигляду. Інтервал (a, b) , а також функції $p(x)$, $q(x)$ і $f(x)$ будемо вважати кінцевими, що дає можливість вважати будь-яке розв'язання продовженим на весь цей інтервал, включаючи кінці (п. 15, властивість 4). Умови вигляду (10.96), які накладені на кінцях інтервалу, у якому будується розв'язання, називаються *крайовими умовами*, а задача про розв'язання диференціального рівняння при заданих крайових умовах називається *крайовою задачею*.

Для розв'язання крайової задачі ми виходимо з вигляду загального розв'язання рівняння (10.95)

$$y(x) = Y(x) + C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) \quad (10.97)$$

(п. 15, властивість 1), де $Y(x)$ — деяке часткове розв'язання рівняння (10.95), а z_1 і z_2 — два лінійно незалежних розв'язки відповідного однорідного рівняння. Підставляючи формулу (10.97) в умови (10.96), одержимо два співвідношення для знаходження C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 z_1(a) + C_2 z_2(a) = \alpha_1 - Y(a) \\ C_1 z_1(b) + C_2 z_2(b) = \alpha_2 - Y(b) \end{cases} \quad (10.98)$$

При розв'язанні цієї системи двох алгебраїчних рівнянь першого степеня з двома невідомими можуть представитися два випадки.

1. *Основний випадок*: визначник системи відмінний від нуля. В цьому випадку система (10.98) має цілком визначений розв'язок і тому рівняння (10.95) при умовах (10.96) має один і тільки один розв'язок при будь-якому неоднорідному члені $f(x)$ і будь-яких числах α_1, α_2 .

2. *Особливий випадок*: визначник системи дорівнює нулеві. В цьому випадку система (10.98), як правило, суперечлива, але при деяких правих частинах вона має нескінченну кількість розв'язок. Виходить, і рівняння (10.95) при умовах (10.96) при довільному виборі функції $f(x)$ і чисел α_1, α_2 , як правило, не має жодного розв'язка; однак при деяких таких виборах задача має нескінченну кількість розв'язок. Наприклад, можна перевірити, що якщо $f(x)$ і α_1 , вже обрані, то нескінченна кількість розв'язок вийде лише при одному значенні α_2 , а при інших значеннях задача не буде мати жодного розв'язка.

Підкреслимо, що те, який саме випадок має місце, залежить від вигляду лівих частин рівняння (10.95) і умов (10.96).

Для того щоб мав місце основний випадок, необхідно і досить, щоб відповідна однорідна задача, у якій покладено $f(x) \equiv 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, мала тільки нульовий розв'язок. В особливому випадку однорідна задача має нескінченну кількість розв'язків, а якщо неоднорідна задача має хоча б один розв'язання, то загальне розв'язання вийде, якщо до цього часткового розв'язку додати загальне розв'язання відповідної однорідної задачі.

При розв'язанні початкової задачі, тобто задачі Коші, завжди має місце основний випадок, тому що таке розв'язання завжди існує і єдине. При розв'язанні крайової задачі може представитися й особливий випадок.

Наприклад, розглянемо задачу з параметром $\lambda = \text{const}$,

$$y'' + \lambda y = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad y(0) = \alpha_1, \quad y(l) = \alpha_2, \quad (10.99)$$

причому будемо вважати спочатку, що $\lambda > 0$. Тоді лінійно незалежними розв'язаннями відповідного однорідного диференціального рівняння служать функції

$$z_1(x) = \cos \sqrt{\lambda}x, \quad z_2(x) = \sin \sqrt{\lambda}x$$

і визначник системи (10.98) дорівнює

$$\begin{vmatrix} z_1(0) & z_2(0) \\ z_1(l) & z_2(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos \sqrt{\lambda}l & \sin \sqrt{\lambda}l \end{vmatrix} = \sin \sqrt{\lambda}l$$

Прирівнюючи його нулеві, одержимо значення

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2, \quad \left(\frac{3\pi}{l}\right)^2, \dots, \quad (10.100)$$

при яких для задачі (10.99) має місце особливий випадок, тобто порушується або існування, або єдиність розв'язання.

Набір значень параметра, які входять у формулювання задачі, при яких задача в тому або іншому змісті вироджується, називається спектром цієї задачі. При $\lambda \leq 0$ для задачі (10.99) завжди має місце основний випадок і тим самим набір значень (10.100) являє собою її спектр.

Отриманий результат має важливий додаток до дослідження стійкості пружного стрижня при його стиску. Нехай однорідний (однаковий по всій довжині) пружний невагомий стрижень розташовано уздовж осі x і стискується уздовж неї

силою P , причому обидва кінці стрижня утримуються на осі x , але можуть вільно обертатися навколо точок закріплення (рис. 10.14, а). Тоді при досягненні силою деякого критичного значення $P_{кр}$ стрижень вигинається, приймаючи положення, яке зображено на рис. 10.21, б. Якщо позначити через y поперечне відхилення точки стрижня від її вихідного положення то, як доводиться в курсах опору матеріалів, функція $y(x)$ з достатньою точністю задовольняє диференціальному рівнянню і крайовим умовам:

$$y'' + \frac{P}{EJ}y = 0, \quad y(0) = y(l) = 0; \quad (10.101)$$

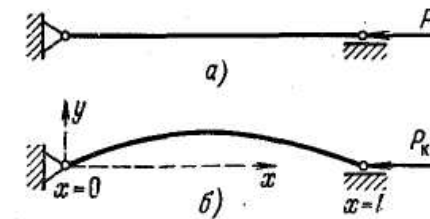


Рис. 10.21.

тут E і J - так називані модуль Юнга і момент інерції поперечного перерізу стрижня. Як випливає з (10.100), при

$$\frac{P}{EJ} < \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (10.102)$$

для задачі (10.101) має місце основний випадок, тобто вона має тільки нульовий розв'язок; вигину не відбувається. Як тільки з приростом P нерівність (10.102) переходить у рівність, то настає особливий випадок і задача (10.101) поряд з нульовим розв'язком здобуває розв'язок вигляду $y = C \sin(\pi/l)x$, де C — довільна стала. Але тоді стрижень нічим не утримується в прямолінійному стані і як завгодно малі зовнішні впливи можуть привести до кінцевих відхилень від цього стану: стрижень *утрачає стійкість*. Вираз, що виходить, для $P_{кр}$

$$P_{кр} = EJ \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

було знайдено Ейлером .

Могло б показатися, що при $P > P_{кр}$ стрижень повинний знову випрямитися. Однак це не так. Рівняння (10.101) описує відхилення стрижня точно лише в границі при малих відхиленнях, а аналіз більш точного нелінійного рівняння, справедливого при будь-яких відхиленнях, показує, що при переході P через $P_{кр}$ поряд з нестійкою прямолінійною виникає скривлена форма рівноваги, що і є стійкою. З ростом P кривизна цієї форми швидко зростає і стрижень руйнується.

До розв'язання неоднорідного рівняння при однорідних крайових умовах

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \quad (10.103)$$

в основному (неособливому) випадку можна застосувати функцію впливу. Дійсно, функцію $f(x)$ можна витлумачити як «зовнішній вплив», а $y(x)$ — як його результат, тобто $y(x) = f(x)$. При цьому має місце принцип суперпозиції.

Відповідно до п. 26 (модуль 9), якщо через $G(x; \xi)$ позначити розв'язання задачі (10.103), у якій замість $f(x)$ узята дельта-функція $\delta(x - \xi)$, то при довільній функції $f(x)$ розв'язання задачі (10.103) вийде по формулі

$$y(x) = \int_a^b f(\xi) G(x; \xi) d\xi. \quad (10.104)$$

Приведемо простий приклад. Нехай розглядається задача $y'' = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad y(0) = y(l) = 0.$ (10.105)

Якщо замість $f(x)$ поставити $\delta(x - \xi)$, то при $0 \leq x < \xi$ і при $\xi < x \leq l$ одержуємо просто $y'' = 0$, тобто розв'язання

$$y = ax + b \quad (0 \leq x \leq \xi), \quad y = cx + d \quad (\xi < x \leq l).$$

де a, b, c, d — якісь сталі. Застосування крайових умов показує, що $b = 0$ і $cl + d = 0$, тобто

$$y = ax \quad (0 \leq x < \xi), \quad y = c(x - l) \quad (\xi < x \leq l). \quad (10.106)$$

Якщо рівність $y'' = \delta(x - \xi)$ проінтегрувати від

$$x = \xi - 0 \quad \text{до} \quad x = \xi + 0,$$

то вийде, що $y' = (\xi + 0) - y'(\xi - 0) = 1$; до речі, для лівої частини рівняння (10.103) вийшов би такий же результат, так як інтегрування кінцевої функції по відрізьку нульової довжини дає нуль. При вторинному інтегруванні дельта-функції виходить уже

безперервна функція (модуль 9, п. 25), так що $y(\xi - 0) = y(\xi + 0)$, і з (10.106) одержуємо $c - a = 1, \quad a\xi = c(\xi - l)$, звідки

$$a = -\frac{l - \xi}{l}, \quad c = \frac{\xi}{l}.$$

Підставляючи в (10.106), знаходимо функцію впливу для задачі (10.105):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{(l - \xi)x}{l} & (0 \leq x < \xi); \\ -\frac{\xi(l - x)}{l} & (\xi < x \leq l) \end{cases}$$

Ця функція зображена на рис. 10.22.

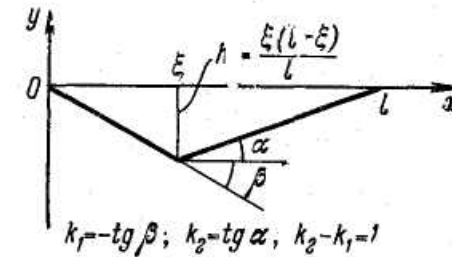


Рис. 10.22.

У силу формули (10.104) одержуємо розв'язання задачі (10.105) при будь-якій функції $f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \int_0^x G(x; \xi) f(\xi) d\xi + \int_x^l G(x; \xi) f(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{(l-x)}{l} \int_0^x \xi f(\xi) d\xi - \frac{x}{l} \int_x^l (l-\xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

10.5. Лінійні рівняння з сталими коефіцієнтами

Лінійні рівняння з сталими коефіцієнтами складають найважливіший клас рівнянь, інтегрування яких порівняно легко доводиться до кінця.

17. Однорідні рівняння. Розглянемо для визначеності рівняння третього порядку

$$z''' + a_1 z'' + a_2 z' + a_3 z = 0 \quad (a_1, a_2, a_3 = \text{const}). \quad (10.107)$$

Эйлер запропонував шукати часткові розв'язання цього рівняння у формі

$$z = e^{px}, \quad (10.108)$$

де p — стала, котру потрібно підібрати.

Підставляючи (10.108) у (10.107), одержимо, що

$$e^{px}(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3) = 0,$$

і так як перший множник відмінний від нуля, то

$$p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0. \quad (10.109)$$

Отже, для того щоб функція (10.108) задовольняла рівнянню (10.107), необхідно і досить, щоб p задовольняло рівнянню (10.109). Алгебраїчне відносно p рівняння (10.109) називається характеристичним рівнянням для рівняння (10.107), а ліва частина рівняння (10.109) називається характеристичним многочленом для рівняння (10.107). Степінь характеристичного рівняння дорівнює порядкові відповідного диференціального рівняння.

Рівняння (10.109) має три корені: p_1, p_2, p_3 . При цьому можуть бути різні випадки.

1. Нехай усі корені дійсні і прості, тобто різні. Тоді в силу формули (10.108) ми маємо три часткові розв'язання рівняння (10.107)

$$z_1 = e^{p_1x}, \quad z_2 = e^{p_2x}, \quad z_3 = e^{p_3x}.$$

Так як вони є незалежними, тобто жодне з них не дорівнює лінійній комбінації інших, то на основі п. 14 загальне розв'язання рівняння (10.107) має вигляд

$$z = C_1e^{p_1x} + C_2e^{p_2x} + C_3e^{p_3x}. \quad (10.110)$$

2. Нехай усі корені прості, але серед них є уявні. Тоді в правій частині формули (10.110) виявляється комплексна функція від дійсного аргументу. Але вся теорія лінійних рівнянь автоматично поширюється на випадок, коли всі коефіцієнти і розв'язки є такими функціями. Тому і при зазначених коренях рівняння (10.109) можна користуватися формулою (10.110); звичайно, тоді довільні стали будуть, узагалі говорячи, комплексними.

Однак якщо всі розгляди виконуються над дійсними функціями, то часто хочуть і відповідь одержати в дійсній формі. Для цього можна скористатися наступним зауваженням: якщо

лінійне однорідне рівняння з дійсними коефіцієнтами має комплексний частковий розв'язок, то його дійсна і уявна частини також є розв'язками того ж рівняння.

Дійсно, якщо

$$L[y_1 + iy_2] = 0$$

(див. позначення в п. 14), то

$$L[y_1] + iL[y_2] = 0,$$

звідки

$$L[y_1] = 0 \quad \text{і} \quad L[y_2] = 0.$$

Виходить, якщо коефіцієнти рівняння (10.107) дійсні і воно має частковий розв'язок

$$e^{(r+is)x} = e^{rx} \cos sx + ie^{rx} \sin sx,$$

то функції

$$e^{rx} \cos sx, \quad e^{rx} \sin sx, \quad (10.111)$$

також слугують розв'язками рівняння (10.107). Якщо згадати, що в алгебраїчного рівняння з дійсними коефіцієнтами спряжені корені присутні парами, то одержуємо, що в розглянутому випадку 2 корені рівняння (10.109) мають вигляд

$$p_1 = r + is, \quad p_2 = r - is \quad (p_3 \text{—дійсне}),$$

і тому розв'язок можна замість (10.110) записати в дійсній формі:

$$z = C_1e^{p_1x} \cos sx + C_2e^{p_2x} \sin sx + C_3e^{p_3x}. \quad (10.112)$$

Наприклад, для рівняння вільних коливань (10.88) одержуємо характеристичне рівняння $p^2 + \omega_0^2 = 0$ з коренями $p_{1,2} = \pm i\omega_0 = 0 \pm i\omega_0$ і аналогічно формулі (10.112) пишемо загальний розв'язок

$$z = C_1e^{0t} \cos \omega_0 t + C_2e^{0t} \sin \omega_0 t,$$

тобто сам розв'язок (10.89).

Формулу (10.112) іноді записують в іншому вигляді, перетворивши

$$C_1 \cos sx + C_2 \sin sx = M \sin(sx + \alpha),$$

для чого треба покласти

$$C_1 = M \sin \alpha, \quad C_2 = M \cos \alpha, \quad M = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{C_1}{C_2}.$$

Тоді замість (10.112) одержимо

$$z = Me^{rx} \sin(sx + \alpha) + C_3e^{p_3x}. \quad (10.113)$$

де довільними сталими є вже M , α і C_3 .

3. Нехай серед коренів характеристичного рівняння (10.109) є кратні, наприклад, $p_2=p_1$, $p_3 \neq p_1$. Тоді формула (10.110) не дасть загального розв'язання й у вигляді (10.108) ми одержимо лише два розв'язки, e^{p_1x} і e^{p_3x} .

Щоб знайти третій розв'язок, розглянемо спочатку випадок, коли

$$p_2=p_1+\Delta p,$$

причому $|\Delta p|$ мале. Тоді рівняння (10.107) поряд з розв'язком e^{p_1x} має розв'язок

$$e^{p_2x} = e^{p_1x} e^{\Delta p \cdot x} = e^{p_1x} \left(1 + \Delta p \cdot x + \frac{(\Delta p)^2 x^2}{2!} + \dots \right),$$

а тому служать розв'язками і їхні лінійні комбінації

$$e^{p_2x} - e^{p_1x} = e^{p_1x} \left(\Delta p \cdot x + \frac{(\Delta p)^2 x^2}{2!} + \dots \right), \quad (10.114)$$

$$\frac{e^{p_2x} - e^{p_1x}}{\Delta p} = e^{p_1x} \left(x + \frac{\Delta p \cdot x^2}{2!} + \dots \right).$$

Це ділення на Δp дає можливість перейти до границі при $\Delta p \rightarrow 0$. Тоді в правій частині всі члени, що містять Δp , відпадуть, і тому при $\Delta p=0$, тобто $p_2=p_1$, розв'язком служить функція $x e^{p_1x}$.

Значить у розглянутому випадку розв'язком рівняння (10.107) буде

$$z = C_1 e^{p_1x} + C_2 x e^{p_1x} + C_3 e^{p_3x}.$$

Подібним чином у випадку $p_1=p_2=p_3$ частковими розв'язками рівняння (10.107) поряд з e^{p_1x} служать функції

$$x e^{p_1x} \quad \text{і} \quad x^2 e^{p_1x};$$

при доведенні цього треба замість (10.114) розглянути другу розділену різницю. Тому в даному випадку загальний розв'язок має вигляд

$$z = C_1 e^{p_1x} + C_2 x e^{p_1x} + C_3 x^2 e^{p_1x}.$$

Розгляд рівнянь будь-якого порядку проходить аналогічно. Якщо який-небудь корінь p характеристичного рівняння має

кратність k , то функції e^{px} , $x e^{px}$, ..., $x^{k-1} e^{px}$ будуть частковими розв'язками розглянутого диференціального рівняння. Якщо яка-небудь пара коренів $r \pm is$ має кратність k , то частковими розв'язками будуть функції

$$e^{rx} \cos sx, \quad e^{rx} \sin sx, \quad x e^{rx} \cos sx, \quad x e^{rx} \sin sx, \dots, \quad x^{k-1} e^{rx} \cos sx, \quad x^{k-1} e^{rx} \sin sx.$$

Отже, практичні труднощі при розв'язанні лінійного однорідного рівняння з сталими коефіцієнтами складаються єдино в розв'язанні відповідного характеристичного рівняння.

Як приклад розглянемо вільні коливання матеріальної точки при лінійному законі пружності і при додатковому в'язкому терті, пропорційному першого степеня швидкості. У цьому випадку в правій частині рівняння (10.3) треба додати доданок $-f(dy/dt)$, де f - коефіцієнт тертя. Після переносу всіх членів ліворуч і ділення на M одержимо аналогічно (10.88) рівняння

$$z'' + 2hz' + \omega_0^2 z = 0, \quad (10.115)$$

де $2h=f/M$, $\omega_0^2=k/M$.

При розв'язанні характеристичного рівняння

$$p^2 + 2hp + \omega_0^2 = 0 \quad (10.116)$$

виникають два основних випадки. Якщо $h < \omega_0$, тобто якщо тертя порівняно мале, рівняння (10.116) має розв'язок

$$p_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \omega_0^2} = -h \pm i \sqrt{\omega_0^2 - h^2},$$

а тому загальний розв'язок рівняння (10.115) має вигляд, подібний (10.113),

$$z(t) = M e^{-ht} \sin(\omega t + \alpha), \quad \text{де} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$$

Ми бачимо, що наявність невеликого тертя робить коливання згасаючими по експонентному закону (множник e^{-ht}) і зменшує частоту (так як $\omega < \omega_0$). Графік розв'язка показано на рис. 10.23. Нулі розв'язка визначаються множителем $\sin(\omega t + \alpha)$ і тому знаходяться на рівній відстані один від одного. Через кожен проміжок часу $T=2\pi/\omega$, коли синус повторює свої

значення, з e^{-ht} виділяється множник $e^{-h \frac{2\pi}{\omega}}$ через що відбувається загасання. Значення T часто називається «періодом»

коливання, хоча $z(t)$ тут неперіодична функція, так як на кожному наступному «періоді» коливання, не змінюючись за формою, зменшується по розмаху в те саме число раз. Якщо $h > \omega_0$, тобто якщо тертя велике, то рівняння (10.116) має дійсні корені, а рівняння (10.115) має загальний розв'язок

$$z(t) = C_1 e^{p_1 x} + C_2 e^{p_2 x} = C_1 e^{-(h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}.$$

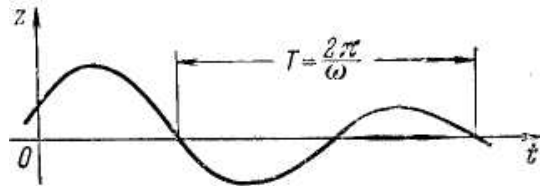


Рис. 10.23.

При великих t тут є істотним тільки перший доданок, тобто ми одержуємо загасання по експонентному закону без коливань; це — так називане *аперіодичне загасання*.

Теоретично можливий «приграничний випадок» $h = \omega_0$. Тоді рівняння (10.116) має подвійний корінь.

18. Неоднорідні рівняння з правими частинами спеціального вигляду. Розглянемо тепер лінійне неоднорідне рівняння з сталими коефіцієнтами, наприклад, третього порядку:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f(x) \quad (a_1, a_2, a_3 = \text{const}). \quad (10.117)$$

Оскільки відповідне однорідне рівняння завжди розв'язується (п. 17), то в силу п. 15 нам залишається лише знайти яке-небудь часткове розв'язання рівняння (10.117). Для правої частини загального вигляду це робиться по методу варіації довільних сталих (п. 15). Але для важливого досить широкого класу правих частин спеціального вигляду часткове розв'язання можна знайти значно швидше по методу невизначених коефіцієнтів. Розглянемо спочатку рівняння

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = K e^{\lambda x} \quad (K, \lambda = \text{const}). \quad (10.118)$$

Природно шукати часткове розв'язання цього рівняння у формі

$$y = A e^{\lambda x}, \quad (10.119)$$

де стала A поки невідома. Підстановка в (1.118) дасть

$$A \lambda^3 e^{\lambda x} + A a_1 \lambda^2 e^{\lambda x} + A a_2 \lambda e^{\lambda x} + A a_3 e^{\lambda x} = K e^{\lambda x},$$

або, після скорочення,

$$A = \frac{K}{\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3}, \quad y = \frac{K}{P(\lambda)} e^{\lambda x}, \quad (1.120)$$

де через $P(\lambda)$ позначено характеристичний многочлен.

Отриманий результат принагідний, якщо $P(\lambda) \neq 0$, тобто якщо λ не є коренем характеристичного рівняння. Якщо $P(\lambda) = 0$, то функція (10.119) задовольняє однорідному рівнянню (10.107), тобто рівнянню (10.118) задовольнити в такій формі неможливо.

Нехай

$$P(\lambda) = 0, \quad P'(\lambda) \neq 0,$$

тобто λ є простим коренем характеристичного рівняння. Тоді розмірковуємо подібно тому, як ми в п. 17 розглядали випадок кратних коренів. Замінімо в правій частині (10.118) λ на

$$\lambda_1 = \lambda + \alpha,$$

де $|\alpha| \neq 0$, але досить мале.

Тоді в силу формули (10.120), так як λ_1 уже не буде коренем характеристичного рівняння, рівняння (10.118) буде мати часткове розв'язання

$$\begin{aligned} \frac{K}{P(\lambda_1)} e^{\lambda_1 x} &= \frac{K}{P(\lambda + \alpha)} e^{(\lambda + \alpha)x} = \frac{K}{P(\lambda + \alpha)} e^{\lambda x} \left(1 + \alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= \frac{K}{P(\lambda + \alpha)} e^{\lambda x} + K \frac{\alpha}{P(\lambda + \alpha)} e^{\lambda x} \left(x + \frac{\alpha x^2}{2!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Однак перший з отриманих доданків задовольняє відповідному однорідному рівнянню; виходить, другий доданок також є частковим розв'язком рівняння (10.118), у якому λ поки ще замінено на λ_1 . Якщо в цьому другому доданку перейти до границі при $\alpha \rightarrow 0$, обчисливши

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{P(\lambda + \alpha)}$$

за правилом Лопітала, то ми в границі одержимо часткове розв'язання рівняння (10.118) при вихідному значенні λ :

$$y = \frac{K}{P'(\lambda)} x e^{\lambda x}. \quad (10.121)$$

Подібним чином, якщо λ є подвійним коренем характеристичного рівняння, то частковий розв'язок рівняння (10.118) має вигляд

$$y = \frac{K}{P''(\lambda)} x^2 e^{\lambda x}$$

і т.д.

За допомогою аналогічного, але більш громіздкого міркування можна довести, що рівняння

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = Q_m(x) e^{\lambda x}, \quad (10.122)$$

де $Q_m(x)$ — заданий многочлен степеня m , якщо λ не є коренем характеристичного рівняння, має частковий розв'язок вигляду

$$y = R_m(x) e^{\lambda x} \quad (10.123)$$

де $R_m(x)$ — деякий інший многочлен степеня m . Його можна знайти по методу невизначених коефіцієнтів, тобто написати його спочатку з буквеними коефіцієнтами, підставити в (10.122) і знайти ці коефіцієнти з умови тотожної рівності лівої і правої частин. Якщо ж λ є коренем характеристичного рівняння кратності k , то є частковий розв'язок вигляду

$$y = x^k R_m(x) e^{\lambda x}.$$

При цьому не виключено мати випадок $\lambda=0$, коли в правій частині рівняння (10.122) стоїть «чистий» многочлен.

Можна також розглянути рівняння

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = Q_m(x) e^{\mu x} \cos vx.$$

Так як праву частину можна переписати у вигляді

$$Q_m(x) e^{\mu x} \frac{e^{ivx} + e^{-ivx}}{2} = \frac{Q_m(x)}{2} e^{(\mu+iv)x} + \frac{Q_m(x)}{2} e^{(\mu-iv)x},$$

то в силу (10.123) якщо

$$\lambda = \mu \pm iv$$

не є коренем характеристичного рівняння, частковий розв'язок можна шукати у вигляді

$$y = R_m(x) e^{(\mu+iv)x} + \tilde{R}_m(x) e^{(\mu-iv)x} = R_m(x) e^{\mu x} (\cos vx + i \sin vx) + \tilde{R}_m(x) e^{\mu x} (\cos vx - i \sin vx) = [R_m(x) + \tilde{R}_m(x)] e^{\mu x} \cos vx + [iR_m(x) - i\tilde{R}_m(x)] e^{\mu x} \sin vx.$$

Уводячи нові позначення, одержимо частковий розв'язок вигляду

$$y = T_m(x) e^{\mu x} \cos vx + S_m(x) e^{\mu x} \sin vx, \quad (10.124)$$

де $T_m(x)$ і $S_m(x)$ — многочлени степеня m , які можна знайти по методу невизначених коефіцієнтів. У вигляді (10.124) шукаються часткові розв'язки рівнянь і з правими частинами

$$Q_m(x) e^{\mu x} \sin vx, \quad Q_m(x) e^{\mu x} \cos(vx + \alpha), \quad Q_m(x) e^{\mu x} \sin(vx + \alpha), \quad (\alpha = const).$$

Якщо

$$\lambda = \mu \pm iv$$

є коренем характеристичного рівняння кратності k , то праву частину формули (10.124) треба помножити ще на x^k .

Розглянемо, наприклад, рівняння змущених коливань (10.87) при синусоїдальному зовнішньому впливові з частотою ω :

$$y'' + \omega_0^2 y = K \sin \omega t. \quad (10.125)$$

Відповідно до формули (10.124), якщо

$$\lambda = \pm i\omega$$

не є коренем характеристичного рівняння, тобто якщо $\omega \neq \omega_0$, то частковий розв'язок треба шукати у вигляді

$$y = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Підстановка в рівняння (10.125) дає

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + A\omega_0^2 \cos \omega t + B\omega_0^2 \sin \omega t = K \sin \omega t.$$

Так як ця рівність повинна бути тотожністю, то

$$-A\omega^2 + A\omega_0^2 = 0, \quad -B\omega^2 + B\omega_0^2 = K,$$

звідки $A = 0, \quad B = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad y = \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t. \quad (10.126)$

Загальне розв'язання рівняння (10.125) вийде, якщо додати загальне розв'язання (10.89) відповідного однорідного рівняння. Отже, якщо частота зовнішнього впливу не дорівнює власній частоті коливань, то виходить накладення двох гармонійних коливань. Одне, яке, зазвичай, називають *змущеним*, відбувається з частотою зовнішнього впливу і має цілком визначені амплітуду і початкову фазу; інше відбувається з власною частотою, і його амплітуда і початкова фаза залежать від початкових даних.

З формули (10.126) видно, що якщо ω близьке до ω_0 , то амплітуда змущеного коливання стає дуже великою. Якщо ж

$\omega = \omega_0$, то відповідно до загальної теорії часткове розв'язання рівняння (10.125) треба шукати у формі

$$y = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t.$$

Підрахунок дає

$$y = -\frac{K}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t;$$

це можна вивести також з (10.126) аналогічно формулі (10.121).

Ми бачимо, що якщо частота зовнішнього впливу дорівнює власній частоті коливань, то амплітуда змущеного коливання зростає по лінійному закону. Це важливе явище добре відоме у фізиці і техніці і називається *резонансом*.

19. Рівняння Ейлера. Так називається лінійне рівняння вигляду

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = f(x),$$

у якому всі коефіцієнти a_1, a_2, \dots, a_n сталі.

Рівняння Ейлера легко приводиться до лінійного рівняння з сталими коефіцієнтами за допомогою заміни незалежної змінної

$$|ax+b| = e^t, \quad t = \ln|ax+b|.$$

Будемо для простоти вважати, що $ax+b > 0$, а рівняння однорідне і має другий порядок:

$$(ax+b)^2 y'' + a_1(ax+b)y' + a_2 y = 0. \quad (10.127)$$

Після заміни незалежної змінної одержимо

$$ax+b = e^t, \quad t = \ln(ax+b), \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot a e^{-t};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} a e^{-t} - \frac{dy}{dt} a e^{-t} \right) a e^{-t}. \quad (10.128)$$

Підставимо ці результати в рівняння (10.127):

$$a^2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + a_1 a \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0.$$

Це — рівняння з сталими коефіцієнтами, яке треба розв'язувати по методах п.17, тобто покласти

$$y = e^{pt}, \quad (10.129)$$

розв'язати характеристичне рівняння і т.д., після чого повернутися від t до x .

Можна не робити заміни (10.128), помітивши, що з (10.128) і (10.129) випливає

$$y = (ax+b)^p. \quad (10.130)$$

Тому можна шляхом безпосередньої підстановки в (10.127) шукати часткові розв'язання вигляду (10.130), причому для знаходження p вийде характеристичне рівняння, степінь якого дорівнює порядковій рівняння (10.127). Треба тільки мати на увазі, що при наявності кратних коренів характеристичного рівняння, крім розв'язок вигляду (10.130), рівняння (11.127) буде мати розв'язок вигляду

$$y = t e^{pt} = (ax+b)^p \ln(ax+b)$$

і т.д., у залежності від кратності кореня (п. 17, випадок 3).

20. Оператори й операторне розв'язання рівнянь.

У модулі 9 п.26 було визначено поняття оператора і були приведені приклади операторів, у тому числі оператор диференціювання D ; у п. 14 був уведений *диференціальний оператор* L . Іншими розповсюдженими операторами є: *оператор зрушення* T і *оператор утворення різниці* Δ , які діють по формулах

$$Tf(x) = f(x+h); \quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \quad (10.131)$$

при заданому кроці h ; оператор C множення на задане число C , у тому числі *одиничний оператор* 1 , що залишає функції без зміни, і *нульовий оператор* 0 , що переводить усі функції в тотожно нульову функцію; оператор множення на яку-небудь задану функцію і т.п.

Оператори можна складати один з одним і множити на числа за природним правилом: якщо A і B - оператори, α — число, то по визначенню

$$(A+B)f \equiv Af + Bf, \quad (\alpha A)f = \alpha(Af).$$

Наприклад, з рівностей (10.131) видно, що

$$\Delta = T - 1, \quad T = 1 + \Delta.$$

При цьому виконуються всі аксіоми лінійних дій.

Оператори можна множити один на одного, що дає новий оператор, який діє за наступним правилом:

$$(AB)f = A(Bf),$$

тобто на функцію f діє спочатку оператор B , а потім на результат — оператор A . Неважко перевірити правила

$$A(BC) = (AB)C, \quad (\alpha A + \beta B)C = \alpha AC + \beta BC \quad (\alpha, \beta = \text{const}). \quad (10.132)$$

Однак далеко не завжди $AB = BA$, тобто результат виконання двох операцій може залежати від порядку дій. Якщо все-таки $AB = BA$, то оператори A і B називаються *перестановочними*

(комутуючими) один з одним. Наприклад, усі приведені вище оператори D, T, Δ, C перестановочні один з одним, тому що $DTf(x) = D(Tf(x)) = D(f(x+h)) = f'(x+h)$, $T Df(x) = T(f'(x)) = f'(x+h)$ і т.п.

З іншого боку, оператори диференціювання і множення на функцію неперестановочні.

Перша властивість (10.132) дає можливість замість написаних там виразів писати просто ABC ; виходить оператор, який складається в послідовному застосуванні дій C, B і A . Аналогічно визначається оператор $ABCD$ і т.д. Якщо взяти множники рівними, то вийдуть *степеневі оператори*: A^2, A^3, A^4 і т.д., що означають результат повторення оператора A . Наприклад, $D^2f = f''$; Δ^2f — це друга різниця і т.п.

Оператор A називається *лінійним*, якщо

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A f_1 + \beta A f_2 \text{ і } A(\alpha f) = \alpha A f. (\alpha = \text{const}). (10.133)$$

Першу властивість можна витлумачити як принцип суперпозиції, а другу можна вивести з першої (модуль 9, п. 26). Тому навіть якщо явний вигляд оператора невідомий, то при виконанні принципу суперпозиції можна бути упевненим про лінійність цього оператора, що дає можливість зробити деякі корисні висновки, наприклад побудувати функцію впливу (див. модуль 9, п. 26).

Обидві властивості (10.133) можна написати разом так:

$$A(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha A f_1 + \beta A f_2 \quad (\alpha, \beta = \text{const}).$$

Для лінійного оператора A неважко перевірити властивість

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC; (10.134)$$

для цього треба обидві частини застосувати до будь-якої функції f і показати, що вийде те ж саме, а саме,

$$\alpha A(Bf) + \beta A(Cf).$$

Всі оператори, які приведені вище як приклади, лінійні, так як похідна суми дорівнює сумі похідних і т.п. Нелінійними є, наприклад, оператори піднесення функції до квадрату або утворення абсолютної величини і т.п. Для лінійних операторів у силу (10.132) і (10.134) при лінійних діях і множенні можна користуватися звичайними правилами шкільної алгебри, стежачи за порядком множників; наприклад,

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \text{ і т.п.}$$

Якщо до того ж оператори перестановочні, то і порядок множників несуттєвий, тобто

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \text{ і т.п.}$$

Можна розглядати і степеневі ряди від операторів; наприклад,

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots (10.135)$$

і т.п. Застосовувати такий ряд можна, як і будь-який оператор, узагалі говорячи, не до усіх функцій, а тільки до тих, для яких він має сенс. У прикладі (10.135) це значить, що чим більше взяти членів, тим точніше повинний вийти результат; зовсім точний результат теоретично виходить лише в границі, а практично — при досить великому числі членів ряду.

Ряд Тейлора

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \dots$$

можна записати у вигляді

$$Tf = \left(1 + \frac{D}{1!}h + \frac{D^2}{2!}h^2 + \dots\right)f = e^{hD}f,$$

звідки ми бачимо зв'язок між операторами T, Δ і D :

$$T = e^{hD}, \Delta = e^{hD} - 1.$$

Обернена формула

$$D = \frac{1}{h} \ln T = \frac{1}{h} \ln(1 + \Delta) = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots \right)$$

— це не що інше, як формула для числового диференціювання.

Можна розглядати *операторне рівняння*

$$Ay = f, (10.136)$$

де функція f задана, а функція y шукається. Якщо розв'язання є, то його природно позначити $y = A^{-1}f$. Якщо оператор A лінійний, то і рівняння (10.136) називається лінійним. На лінійні рівняння негайно поширюються властивості 1—3 п. 14 і властивість 1 п. 15; однак треба мати на увазі, що бувають випадки, коли однорідне рівняння має нескінченну кількість лінійно незалежних розв'язань, а також випадки, коли неоднорідне рівняння не має жодного розв'язання.

Покажемо застосування оператора диференціювання до розв'язання (*операторний метод розв'язання*) лінійного

диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами (10.117). Рівняння перепишемо у вигляді

$$(D^3 + a_1 D^2 + a_2 D + a_3) y = f(x).$$

У лівій частині в дужках стоїть лінійний диференціальний оператор третього порядку з сталими коефіцієнтами. За правилами алгебри розкладаємо його на множники:

$$(D - p_1)(D - p_2)(D - p_3) y = f(x), \quad (10.137)$$

де p_1, p_2, p_3 — корені характеристичного рівняння (п. 17). Помітивши, що

$$D(e^{-p x} y) = (e^{-p x} y)' = -p e^{-p x} + e^{-p x} y' = e^{-p x} (y' - p y) = e^{-p x} (D - p) y$$

і тому

$$(D - p) y = e^{p x} D(e^{-p x} y),$$

перепишемо рівняння (10.137) у вигляді

$$e^{p_1 x} D(e^{-p_1 x} e^{p_2 x} D(e^{-p_2 x} e^{p_3 x} D(e^{-p_3 x} y))) = f(x).$$

Переносячи множники з лівої частини в праву і користуючись тим, що рівність $Dy = z$ рівносильна

$$y = \int z dx,$$

одержимо загальне розв'язання вихідного рівняння

$$y = e^{p_3 x} \int e^{(p_2 - p_3)x} \left(\int e^{(p_1 - p_2)x} \left(\int e^{-p_1 x} f(x) dx \right) dx \right) dx.$$

Звичайно, результат вийде той же, що в пп. 15 і 18, хоча підхід тут трохи інший; у більш складних задачах застосування операторів може принести істотну користь. Відзначимо, що для лінійних диференціальних операторів із змінними коефіцієнтами і тим більше для нелінійних операторів таке просте розкладання (факторизацію) оператора на добуток декількох операторів більш низького порядку ефективно вдається здійснити лише в дуже рідких випадках.

Приведемо ще один простий приклад. Нехай треба знайти розв'язання рівняння

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

причому усі величини вважаються дійсними. Пишемо

$$(D + \omega^2) y = f(x), \quad (D - i\omega)(D + i\omega) y = f(x), \quad e^{i\omega x} D(e^{-i\omega x} (D + i\omega) y) = f(x);$$

$$(D + i\omega) y = e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x) dx, \quad \omega y = \text{Im}(e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x) dx)$$

(Im означає уявну частину). Остаточо,

$$y = (1/\omega) \text{Im}(e^{i\omega x} \int e^{-i\omega x} f(x) dx)$$

10.6. Системи лінійних рівнянь

21. Системи лінійних рівнянь. Розглянемо для визначеності лінійну однорідну систему трьох рівнянь першого порядку з трьома

шуканими функціями $y(x), z(x)$ і $u(x)$, які розв'язанні відносно похідних від цих функцій :

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_1(x)y + b_1(x)z + c_1(x)u, \\ z' &= a_2(x)y + b_2(x)z + c_2(x)u, \\ u' &= a_3(x)y + b_3(x)z + c_3(x)u. \end{aligned} \right\} \quad (10.138)$$

Нагадаємо, що систему рівнянь будь-якого порядку легко перетворити в систему першого порядку (див. п. 11), а розв'язання системи відносно похідних здійснюється алгебраїчно, без розв'язання самих диференціальних рівнянь.

Так як від системи (10.138) легко перейти до рівносильного рівняння третього порядку (п. 11), що також виходить лінійним й однорідним, то усі властивості лінійних однорідних рівнянь (п. 14) поширюються на систему (10.138). При цьому сумою двох розв'язань $y=y_1, z=z_1, u=u_1$ і $y=y_2, z=z_2, u=u_2$ вважається розв'язання $y=y_1+y_2, z=z_1+z_2, u=u_1+u_2$, а добутком розв'язання $y=y_1, z=z_1, u=u_1$ на число C вважається розв'язання $y=Cy_1, z=Cz_1, u=Cu_1$, тобто лінійні дії над розв'язаннями здійснюються так само, як над векторами. Зокрема, загальне розв'язання системи (10.138) має вигляд

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3, \\ u &= C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3, \end{aligned} \right\} \quad (10.139)$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі, а $(y_1, z_1, u_1), (y_2, z_2, u_2)$ і (y_3, z_3, u_3) - три лінійно незалежних розв'язання системи (10.138), тобто таких, що жодне з них не є лінійною комбінацією інших.

Зупинимося на властивості 4, п. 14. Якщо відомо ненульове розв'язання (y_1, z_1, u_1) системи (10.138), то, зробивши підстановку

$$y = y_1 \bar{y}, \quad z = z_1 \bar{z}, \quad u = u_1 \bar{u},$$

а потім

$$\bar{y} = \bar{u} + v, \quad \bar{z} = \bar{u} + w,$$

неважко одержати систему двох рівнянь першого порядку з двома невідомими функціями, $v(x)$ і $w(x)$, з якої \bar{u} знаходиться за допомогою одного інтегрування.

На лінійні неоднорідні системи вигляду

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_1(x)y + b_1(x)z + c_1(x)u + f_1(x), \\ z' &= a_2(x)y + b_2(x)z + c_2(x)u + f_2(x), \\ u' &= a_3(x)y + b_3(x)z + c_3(x)u + f_3(x) \end{aligned} \right\} \quad (10.140)$$

також поширюються усі властивості, які зазначені в п. 15. Зокрема, метод варіації довільних сталих (властивість 3) виглядає так. Нехай відомо загальне розв'язання (10.139) відповідної однорідної системи (10.138). Тоді розв'язання системи (10.140) шукається у вигляді

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2 + \varphi_3(x)y_3, \\ z &= \varphi_1(x)z_1 + \varphi_2(x)z_2 + \varphi_3(x)z_3, \\ u &= \varphi_1(x)u_1 + \varphi_2(x)u_2 + \varphi_3(x)u_3. \end{aligned} \right\}$$

Після підстановки в (10.140) виходить система

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1'y_1 + \varphi_2'y_2 + \varphi_3'y_3 &= f_1(x), \\ \varphi_1'z_1 + \varphi_2'z_2 + \varphi_3'z_3 &= f_2(x), \\ \varphi_1'u_1 + \varphi_2'u_2 + \varphi_3'u_3 &= f_3(x), \end{aligned} \right\}$$

з якої алгебраїчним способом знаходимо $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$, а потім, інтегруючи, знаходимо $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Особливе значення мають лінійні однорідні системи з сталими коефіцієнтами. Розглянемо, наприклад, систему

$$\left. \begin{aligned} y' &= a_1y + b_1z + c_1u, \\ z' &= a_2y + b_2z + c_2u, \\ u' &= a_3y + b_3z + c_3u, \end{aligned} \right\} \quad (10.141)$$

у якій усі коефіцієнти a_1, b_1, \dots, c_3 сталі. Вона розв'язується подібно п. 17. А саме, ненульові часткові розв'язання шукають у вигляді

$$y = \lambda e^{px}, \quad z = \mu e^{px}, \quad u = \nu e^{px}, \quad (10.142)$$

де λ, μ, ν, p — поки невідомі сталі. Підстановка в (10.141) дає після скорочення на e^{px} і переносу всіх членів в одну сторону:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 - p)\lambda + b_1\mu + c_1\nu &= 0, \\ a_2\lambda + (b_2 - p)\mu + c_2\nu &= 0, \\ a_3\lambda + b_3\mu + (c_3 - p)\nu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.143)$$

Ці рівності можна розглядати як систему трьох алгебраїчних однорідних рівнянь першого степеня з трьома невідомими λ, μ, ν . Щоб вона мала ненульове розв'язання, а тільки таке розв'язання в силу (10.142) нас і цікавить, необхідно і досить, щоб визначник системи дорівнював би нулеві:

$$\begin{vmatrix} a_1 - p & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - p & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (10.144)$$

Це — характеристичне рівняння для системи (10.141), з якого ми знаходимо можливі значення p .

Так як рівняння (10.144) має третій степінь відносно p , то воно має три корені, p_1, p_2, p_3 . Якщо всі ці корені прості, то можна кожний з них підставити в систему (10.143), знайти яке-небудь ненульове розв'язання λ, μ, ν , і по формулі (10.142) одержати відповідне розв'язання $y(x), z(x), u(x)$. З побудованих у такий спосіб трьох часткових розв'язань (при $p=p_1, p_2$ і p_3) відповідно до формули (10.139) одержуємо загальне розв'язання системи (10.141):

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1\lambda_1 e^{p_1x} + C_2\lambda_2 e^{p_2x} + C_3\lambda_3 e^{p_3x}, \\ z &= C_1\mu_1 e^{p_1x} + C_2\mu_2 e^{p_2x} + C_3\mu_3 e^{p_3x}, \\ u &= C_1\nu_1 e^{p_1x} + C_2\nu_2 e^{p_2x} + C_3\nu_3 e^{p_3x}, \end{aligned} \right\} \quad (10.145)$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Якщо рівняння (10.144) має уявні корені, то розв'язання можна або залишити у формі (10.145), або записати в дійсній формі подібно п. 17 (випадок 2).

Випадок, коли рівняння (10.144) має кратні корені, більш складний, і ми не будемо його тут розглядати. У конкретних прикладах можна робити так. Якщо, наприклад, корінь p_1 подвійний, то часткові розв'язання системи (10.141) треба при $p=p_1$, замість (10.142), шукати у формі

$$y = (\lambda x + \bar{\lambda})e^{p_1x}, \quad z = (\mu x + \bar{\mu})e^{p_1x}, \quad u = (\nu x + \bar{\nu})e^{p_1x}, \quad (10.146)$$

після підстановки в (10.141) прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x і з отриманої системи рівнянь знайти два незалежних варіанта значень $\lambda, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\nu}$ і тим самим два незалежних розв'язання вигляду (10.146). Якщо корінь характеристичного рівняння має вищу кратність, то відповідно ускладниться і форма часткового розв'язання системи (10.141).

У теорії систем лінійних диференціальних рівнянь широко застосовується матричний запис. Для цього систему (10.138), зазвичай, переписують у вигляді

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + a_{13}(x)y_3, \\ y'_2 &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + a_{23}(x)y_3, \\ y'_3 &= a_{31}(x)y_1 + a_{32}(x)y_2 + a_{33}(x)y_3, \end{aligned} \right\} \quad (10.147)$$

і вводять *матрицю коефіцієнтів* і *векторне розв'язання* (тобто стовбцеву матрицю)

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Помітимо для подальшого, що якщо дано деяку матрицю $\mathbf{B}(x) = (b_{ij}(x))$, то з правил лінійних дій з матрицями впливає, що

$$\Delta \mathbf{B} / \Delta x = \left(\frac{\Delta b_{ij}}{\Delta x} \right)$$

і тим самим

$$\mathbf{B}'(x) = (b'_{ij}(x)),$$

тобто *щоб продиференціювати матрицю, треба продиференціювати усі її елементи*. При цьому легко перевірити, що основні правила диференціювання, такі як формули для похідної суми або добутку і т.п., залишаються в силі. Звідси

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix}$$

і тому систему (10.147) можна записати в *матричній формі*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}, \quad (10.148)$$

а лінійну неоднорідну систему (10.140) — в аналогічній формі

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x).$$

Розв'язання (10.139) можна переписати у векторному вигляді

$$\mathbf{y} = C_1 \mathbf{y}^1 + C_2 \mathbf{y}^2 + C_3 \mathbf{y}^3,$$

де індекси зверху означають номера лінійно незалежних часткових векторних розв'язань рівняння (10.148). Система (10.141) здобуває вигляд

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad (10.149)$$

а розв'язання (10.142) - вигляд

$$\mathbf{y} = e^{px} \mathbf{a} \quad (10.150)$$

де

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

— деякий сталий вектор. Підставляючи (10.150) у (10.149), одержуємо

$$pe^{px} \mathbf{a} = \mathbf{A}e^{px} \mathbf{a}, \text{ тобто } \mathbf{A}\mathbf{a} = p\mathbf{a}.$$

Ми бачимо, що \mathbf{a} і p повинні бути власним вектором і відповідним власним значенням матриці \mathbf{A} ; останнє знаходиться з рівняння

$$\det(\mathbf{A} - p\mathbf{1}) = 0,$$

яке є не що інше, як рівняння (10.144).

При розв'язанні систем вигляду (10.141) з сталими коефіцієнтами, а також відповідних неоднорідних систем можна застосовувати операторний метод (п. 20). Для цього записуємо $y' = Dy$, $z' = Dz$, $u' = Du$, потім розв'язуємо отриману систему рівнянь як алгебраїчну відносно y , z , u , однак розв'язання доводимо лише до вигляду $P(D)y = f(x)$, після чого застосовуємо методи п. 20. Власне кажучи, це зводиться до вказівки правила переходу від системи рівнянь першого порядку до одного рівняння вищого порядку.

22. Додаток до з'ясування стійкості по Ляпунову стану рівноваги. Поняття стійкості як здатності того або іншого об'єкта, стану або процесу пручатися зовнішнім впливам, що не враховуються заздалегідь, з'явилося ще в античній науці і зараз займає одне з центральних місць у фізиці і техніці. Існують різні конкретні реалізації цього загального поняття в залежності від типу розглядаемого об'єкта, характеру зовнішніх впливів і т.д.

Одна з таких реалізацій з'являлася в нас у п. 16. Зараз ми розглянемо поняття *стійкості по Ляпунову*.

Нехай стан деякого об'єкта описується кінцевим числом параметрів, для визначеності трьома параметрами, x, y, z , так що зміна цього об'єкта в часі задається трьома функціями $x=x(t), y=y(t), z=z(t)$ (t -час). Нехай закон цієї зміни має вигляд системи диференціальних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= R(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (10.151)$$

із заданими правими частинами, що не містять явно незалежної змінної t . Остання умова означає, що диференціальний закон розвитку процесу не міняється з часом.

Нехай стан *рівноваги* розглядаємого об'єкта, коли він не змінюється з часом, описується сталими значеннями $x=x_0, y=y_0, z=z_0$; тоді ця система сталих, розглянутих як функції часу, також повинна задовольняти системі (10.151). З безпосередньої підстановки в (10.151) випливає, що для цього необхідно і досить, щоб одночасно

$$P(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad R(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad (10.152)$$

Нехай у деякий момент t_0 об'єкт під впливом якихось причин вийшов зі стану рівноваги, тобто параметри x, y, z стали рівними

$$x = x_0 + \Delta x_0, \quad y = y_0 + \Delta y_0, \quad z = z_0 + \Delta z_0.$$

Щоб з'ясувати подальшу зміну розглядаємого об'єкта, треба розв'язати систему рівнянь (10.151) при початкових умовах

$$x(t_0) = x_0 + \Delta x_0, \quad y(t_0) = y_0 + \Delta y_0, \quad z(t_0) = z_0 + \Delta z_0. \quad (10.153)$$

Досліджуваний стан рівноваги називається стійким по Ляпунову, якщо після нескінченно малого виходу з цього стану об'єкт продовжує залишатися в нескінченній близькості від нього протягом усього подальшого часу. Іншими словами, при нескінченно малих $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ для розв'язання системи (10.151) при початкових умовах (10.153) різниці

$$\Delta x = x(t) - x_0, \quad \Delta y = y(t) - y_0, \quad \Delta z = z(t) - z_0$$

повинні бути нескінченно малими на всьому інтервалі часу

$$t_0 \leq t < \infty.$$

На перший погляд може показатися дивним розгляд нескінченно малих відхилень параметрів і нескінченно великого проміжку часу, так як на практиці всі ці величини кінцеві. Однак корисно згадати розходження практичної і математичної нескінченностей. Практичною нескінченно малою є просто мала в масштабах розглянутого процесу реальна величина, а практично нескінченним проміжком часу є час *перехідного процесу*, тобто переходу від досліджуваного стану до стану іншого типу (наприклад, від одного стану рівноваги до іншого або від стану рівноваги до руйнування об'єкта і т.п.). Таким чином, реально стійкість по Ляпунову означає, що малий вихід зі стану рівноваги практично не порушує цього стану.

Для з'ясування того, чи буде мати місце стійкість, підставимо в систему (10.151)

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z,$$

що дасть

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= P(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = \\ &= (P'_x)_0 \Delta x + (P'_y)_0 \Delta y + (P'_z)_0 \Delta z + \dots, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= (Q'_x)_0 \Delta x + (Q'_y)_0 \Delta y + (Q'_z)_0 \Delta z + \dots, \\ \frac{d(\Delta z)}{dt} &= (R'_x)_0 \Delta x + (R'_y)_0 \Delta y + (R'_z)_0 \Delta z + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (10.154)$$

де позначено

$$(P'_x)_0 = P'_x(x_0, y_0, z_0)$$

і т.п. Тут при перетворенні правих частин ми скористалися формулою Тейлора і формулами (10.152). Багаточками позначені члени вище першого порядку малості.

Так як при з'ясуванні стійкості розглядаються лише малі $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, то в правих частинах системи (10.151) основну роль грають виписані лінійні члени. Тому замінимо систему (10.151) на *укорочену систему (систему першого наближення)*, відкинувши члени вищого порядку малості;

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(\Delta x)}{dt} &= (P'_x)_0 \Delta x + (P'_y)_0 \Delta y + (P'_z)_0 \Delta z, \\ \frac{d(\Delta y)}{dt} &= (Q'_x)_0 \Delta x + (Q'_y)_0 \Delta y + (Q'_z)_0 \Delta z, \\ \frac{d(\Delta z)}{dt} &= (R'_x)_0 \Delta x + (R'_y)_0 \Delta y + (R'_z)_0 \Delta z. \end{aligned} \right\} \quad (10.155)$$

Система (10.155) — це лінійна система з сталими коефіцієнтами, що розв'язується по методу п. 21. Відповідно до формули (10.145) (де, щоправда, були застосовані інші позначення) розв'язання системи (10.155) виходить як комбінація функцій вигляду e^{pt} , де p задовольняє характеристичному рівнянню

$$\begin{vmatrix} (P'_x)_0 - p & (P'_y)_0 & (P'_z)_0 \\ (Q'_x)_0 & (Q'_y)_0 - p & (Q'_z)_0 \\ (R'_x)_0 & (R'_y)_0 & (R'_z)_0 - p \end{vmatrix} = 0. \quad (10.156)$$

При цьому малим $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ відповідають малі значення довільних сталих C_1, C_2, C_3 , і тому вся справа в поведженні функції e^{pt} при зростанні t . Так як при $p=r+is$ (випадок $s=0$ не виключений) буде $|e^{pt}| = e^{rt}$, то

$$|e^{pt}|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (\text{при } r < 0), \quad |e^{pt}|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty \quad (\text{при } r > 0), \quad (10.157)$$

і ми приходимо до наступних висновків.

Якщо всі корені характеристичного рівняння (10.156) мають від'ємну дійсну частину (зокрема, вони можуть бути дійсними від'ємними), то розглянутий стан рівноваги x_0, y_0, z_0 стійкий по Ляпунову. Крім того, у цьому випадку при малих $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ буде $x(t) \rightarrow x_0, y(t) \rightarrow y_0, z(t) \rightarrow z_0$ при $t \rightarrow \infty$; така стійкість називається асимптотичною. Якщо ж серед коренів рівняння (10.156) є принаймні один з додатною дійсною частиною, то розглянутий стан рівноваги нестійкий по Ляпунову.

Ці результати ми вивели для системи (10.155), але відповідно до сказаного вище ті ж твердження справедливі для повної системи (10.154). Відзначимо, що наявність кратних коренів у рівнянні (10.156) не порушує наших тверджень, незважаючи на те, що при цьому в розв'язанні можуть з'явитися степені t як множники, так як експонента (10.157) при $r < 0$ прагне до нуля швидше будь-якого степеня t .

Обидва отриманих висновки не охоплюють випадку, коли серед коренів рівняння (10.156) немає коренів з додатною дійсною частиною, але є принаймні один з нульовою дійсною частиною. Тоді в загальному розв'язанні системи (10.155) з'являються функції вигляду

$$e^{ist} = \cos st + i \sin st, \quad |e^{ist}| = 1,$$

тобто виходить, ніби-то розглянутий об'єкт коливається або залишається нерухомим біля стану рівноваги, не прагнучи до нього. Але тоді через необмеженість часу починають впливати відкинуті члени вищого порядку малості, що можуть порушити стійкість. Отже, у розглянутому особливому випадку по коренях рівняння (10.156) не можна зробити заключення про стійкість або нестійкість стану рівноваги; щоб це зробити, треба залучити які-небудь додаткові міркування, наприклад залучити подальші члени розкладань (10.154).

Отримані результати здобувають особливо простий вигляд для випадку, коли зміна об'єкта описується одною функцією $x(t)$, яка задовольняє диференціальному рівнянню

$$dx/dt = f(x). \quad (10.158)$$

Ми одержуємо, що якщо $f(x_0) = 0, f'(x_0) < 0$, то значенню $x = x_0$ відповідає стійкий стан рівноваги, а якщо $f(x_0) = 0, f'(x_0) > 0$, той цей стан нестійкий.

Мікромодуль 25

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Розв'язання. Покладаємо

$$y = uv;$$

тоді

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Підставляючи вираз dy/dx в вихідне рівняння, будемо мати:

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1} uv = (x+1)^3,$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v \right) + \frac{du}{dx} = (x+1)^3. \quad (*)$$

Для визначення v отримаємо рівняння

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1} v = 0,$$

тобто

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1},$$

звідки

$$\ln v = 2 \ln(x+1),$$

або

$$v = (x+1)^2.$$

Підставляючи вираз функції v в рівняння (*) отримуємо для визначення u рівняння

$$(x+1)^2 \frac{du}{dx} = (x+1)^3,$$

або

$$\frac{du}{dx} = (1+x),$$

звідки

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$\frac{du}{dx} + xy = x^3 y^3. \quad (*)$$

Розв'язання. Розділивши всі члени на y^2 , одержимо:

$$y^{-3} y' + xy^{-2} = x^3. \quad (**)$$

Уведемо нову функцію

$$z = y^{-2}$$

тоді

$$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}.$$

Підставляючи в рівняння (**), одержимо лінійне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - 2xz = -2x^3. \quad (***)$$

Знайдемо його загальний інтеграл:

$$z = uv; \quad \frac{dz}{dx} = u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v.$$

Підставляємо в рівняння (***) вираз z і dz/dx :

$$u \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} v - 2xuv = -2x^3,$$

або

$$u \left(\frac{dv}{dx} - 2xv \right) + v \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Прирівнюємо нулевий вираз, що стоїть в дужках:

$$\frac{dv}{dx} - 2xv = 0; \quad \frac{dv}{v} = 2x dx; \quad \ln v = x^2; \quad v = e^{x^2}.$$

Для визначення u одержуємо рівняння

$$e^{x^2} \frac{du}{dx} = -2x^3.$$

Розділяємо змінні:

$$du = -2e^{-x^2} x^3 dx, \quad u = -2 \int e^{-x^2} x^3 dx + C.$$

Інтегруючи вроздріб, знайдемо:

$$u = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + C; \quad z = uv = x^2 + 1 + C e^{-x^2}.$$

Отже, загальний інтеграл даного рівняння є

$$y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{-x^2}, \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1 + C e^{-x^2}}}.$$

Приклад 3. Дано рівняння

$$\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіряємо, чи не є це рівняння в повних диференціалах.

Позначимо

$$M = \frac{2x}{y^3}; \quad N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

тоді

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{6x}{y^4}.$$

Умова $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ при $y \neq 0$ виконується. Виходить, ліва частина даного рівняння є повний диференціал деякої невідомої функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію.

Так як

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y^3},$$

то, отже

$$u = \int \frac{2x}{y^3} dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{y^3} + \varphi(y),$$

де $\varphi(y)$ - невизначена поки функція від y .

Диференціюючи це співвідношення по y і з огляду на те, що

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4},$$

знаходимо:

$$-\frac{3x^2}{y^4} + \varphi'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4};$$

отже,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y^2}, \quad \varphi(y) = -\frac{1}{y} + C_1, \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} + C_1.$$

Таким чином, загальний інтеграл, приведеного в умові рівняння, є

$$\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y} = C.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння

$$(y + xy^2)dx - xdy = 0.$$

Розв'язання. Тут $M = y + xy^2$; $N = -x$;

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, ліва частина рівняння не є повний диференціал. Подивимося, чи не допускає це рівняння інтегруючого множника, що залежить тільки від y . Помітивши, що

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = -\frac{2}{y},$$

робимо заключення, що рівняння допускає інтегруючий множник, що залежить тільки від y . Знаходимо його:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{2}{y};$$

звідси

$$\ln \mu = -\ln y, \quad \text{тобто} \quad \mu = \frac{1}{y^2}.$$

Після множення всіх членів даного рівняння на знайдений інтегруючий множник μ отримуємо рівняння

$$\left(\frac{1}{y} + x\right)dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

в повних диференціалах

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2}\right).$$

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо його загальний інтеграл

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + C = 0,$$

або

$$y = -\frac{2x}{x^2 + 2C},$$

Приклад 5. Знайти загальне розв'язання рівняння $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Розв'язання. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що це рівняння має часткове розв'язання $y_1 = x$. Знайдемо друге часткове розв'язання y_2 так, щоб y_1 і y_2 , були лінійно незалежні.

Помітивши, що в нашому випадку

$$a_1 = -\frac{2x}{1-x^2},$$

на підставі формули

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{y_1^2} dx,$$

отримуємо

$$y = x \int \frac{e^{\int \frac{2x dx}{1-x^2}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} = x \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx =$$

$$= x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right].$$

Отже, загальне розв'язання має вигляд

$$y = C_1 x + C_2 \left(\frac{1}{2} x \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| - 1 \right).$$

П р и к л а д 6. Дано рівняння
 $y'' + y' - 2y = 0$.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$k_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}; \quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2.$$

Загальний інтеграл є

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

П р и к л а д 7. Дано рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Знайти загальний інтеграл і часткове розв'язання, що задовольняє початковим вимогам $y_{x=0} = 0, y'_{x=0} = 1$.

П о б у д у в а т и г р а ф і к .

Розв'язання. 1) Напишемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 2k + 5 = 0$$

і знайдемо його корені:

$$k_1 = -1 + i2, \quad k_2 = -1 - i2.$$

Отже, загальний інтеграл є

$$y = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

2) Знайдемо часткове розв'язання, яке задовольняє даним початковим умовам, і визначимо відповідні значення A і B . На підставі першої умови знаходимо:

$$0 = e^{-0}(A \cos 2 \cdot 0 + B \sin 2 \cdot 0),$$

звідки $A = 0$.

Помітивши, що

$$y' = e^{-x} 2B \cos 2x - e^{-x} B \sin 2x,$$

з другої умови одержуємо:

$$1 = 2B, \text{ тобто } B = 1/2.$$

Таким чином, шукане часткове розв'язання є

$$y = (1/2)e^{-x} \sin 2x.$$

Графік його показано на рис. 10.24.

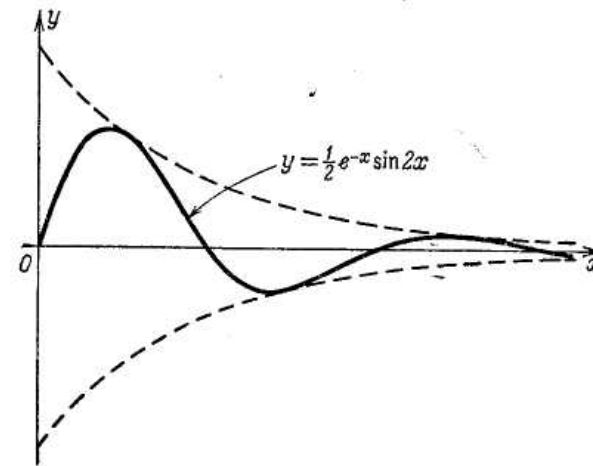


Рис. 10.24.

П р и к л а д 8. Дано рівняння

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Пишемо характеристичне рівняння

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Знаходимо його корні: $k_1 = k_2 = 2$. Загальним інтегралом буде:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

П р и к л а д 9. Функції $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = 3e^x$ лінійно залежні,

тому що при $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = -(1/3)$ має місце тотожність

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 3e^x = 0.$$

П р и к л а д 10. Функції $y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = x^2$ лінійно незалежні, тому що ні при яких C_1, C_2, C_3 , одночасно не рівних нулеві, вираз

$$C_1 \cdot 1 + C_2 x + C_3 x^2$$

не буде тотожно дорівнювати нулеві.

П р и к л а д 11. Функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}, \quad \dots, \quad y_n = e^{k_n x}, \quad \dots,$$

де $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ - різні числа, що лінійно незалежні.

Приклад 12. Знайти загальне розв'язання рівняння $y^{IV}-y=0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння $k^4-1=0$.

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$k_1=1, k_2=-1, k_3=i, k_4=-i.$$

Пишемо загальний інтеграл:

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+A\cos x+B\sin x,$$

де C_1, C_2, A, B - довільні сталі.

Приклад 13. Знайти загальне розв'язання рівняння

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Розв'язання. Знайдемо загальне розв'язання однорідного рівняння

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

Так як

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \text{ то } \ln y' = \ln x + \ln c; \quad y' = cx;$$

отже,

$$y=C_1x^2+C_2.$$

Щоб останній вираз був розв'язанням даного рівняння, треба визначити C_1 і C_2 як функції від x із системи

$$C_1'x^2+C_2' \cdot 1=0, \quad 2C_1'x+C_2' \cdot 0=x.$$

Розв'язуючи цю систему, знайдемо:

$$C_1'=1/2, \quad C_2'=- (1/2)x^2,$$

звідки в результаті інтегрування одержуємо:

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2.$$

Підставляючи знайдені функції у формулу $y=C_1x^2+C_2$, отримуємо загальне розв'язання неоднорідного рівняння:

$$y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}$$

або

$$y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

де \bar{C}_1 і \bar{C}_2 - довільні сталі.

Приклад 14. Знайти розв'язання рівняння $y''+4y'+3y=x$.

Розв'язання. Загальне розв'язання відповідного однорідного рівняння є

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}.$$

Так як права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд xe^{0x} [тобто вигляд $P_1(x)e^{0x}$], причому 0 не є коренем характеристичного рівняння $k^2+4k+3=0$, то часткове розв'язання будемо шукати у формі

$$y^*=Q_1(x)e^{0x},$$

тобто покладемо

$$y^*=A_0x+A_1.$$

Підставляючи цей вираз в задане рівняння, будемо мати:

$$4A_0+3(A_0x+A_1)=x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо:

$$3A_0=1, \quad 4A_0+3A_1=0$$

звідки

$$A_0=1/3; \quad A_1=-(4/9).$$

Отже

$$y^*=(1/3)x-(4/9).$$

Загальне розв'язання $y = \bar{y} + y^*$ буде

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + (1/3)x - (4/9).$$

Приклад 15. Знайти загальне розв'язання рівняння $y''+9y = (x^2+1)e^{3x}$.

Розв'язання. Загальне розв'язання однорідного рівняння знайдемо легко

$$\bar{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x.$$

Права частина заданого рівняння $(x^2+1)e^{3x}$

має вигляд

$$P_2(x)e^{3x}.$$

Так як коефіцієнт 3 у показнику степеня не є коренем характеристичного рівняння, то часткове розв'язання рівняння шукаємо у вигляді

$$y^*=Q_2(x)e^{3x} \text{ або } y^*=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}.$$

Підставляючи цей вираз в диференціальне рівняння, будемо мати:

$$[9(Ax^2+Bx+C)+6(2Ax+B)+2A+9(Ax^2+Bx+C)]e^{3x}=(x^2+1)e^{3x}.$$

Скорочуючи на e^{3x} і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо:

$$18A=1, \quad 12A+18B=0, \quad 2A+6B+18C=1.$$

Звідки

$$A=1/18; \quad B=-(1/27); \quad C=5/81.$$

Отже, часткове розв'язання

$$y^*=[(1/18)x^2-(1/27)x+5/81] e^{3x},$$

а загальне розв'язання

$$y= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + [(1/18)x^2-(1/27)x+5/81] e^{3x}.$$

П р и к л а д 16. Розв'язати рівняння

$$y''-7y'+6y=(x-2)e^x.$$

Розв'язання. Тут права частина має вигляд

$$P_1(x)e^{l \cdot x},$$

причому коефіцієнт у показнику степеня є простим коренем характеристичного многочлена. Отже, часткове розв'язання шукаємо у вигляді

$$y^*=xQ_1(x)e^x \quad \text{або} \quad y^*=x(Ax+B)e^x;$$

підставляючи цей вираз в рівняння, будемо мати:

$$[(Ax^2+Bx)+(4Ax+2B)+2A-7(Ax^2+Bx)-7(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx)]e^x=(x-2)e^x,$$

або

$$(-10Ax-5B+2A)e^x=(x-2)e^x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо:

$$-10A=1, \quad -5B+2A=-2,$$

звідки

$$A=-(1/10), \quad B=9/25.$$

Отже, частковим розв'язанням є

$$y^*=x[-(1/10)x+9/25] e^x,$$

а загальним

$$y= C_1 e^{6x} + C_2 e^x + x[-(1/10)x+9/25] e^x.$$

П р и к л а д 17. Знайти загальний інтеграл лінійного неоднорідного рівняння

$$y''+2y'+5y=2\cos x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+2k+5=0$ має корні

$$k_1=-1+i2; \quad k_2=-1-i2.$$

Тому загальний інтеграл відповідного однорідного рівняння є

$$\bar{y}=e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Часткове розв'язання неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y^*=A \cos x + B \sin x,$$

де A і B — сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню. Підставляючи y^* у задане рівняння, будемо мати:

$$A \cos x + B \sin x + 2(A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ одержимо два рівняння для визначення A і B :

$$-A+2B+5A=2; \quad -B-2A+5B=0.$$

Звідки

$$A=2/5; \quad B=1/5.$$

Загальне розв'язання даного рівняння:

$$y= y^* + \bar{y},$$

тобто

$$y=e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + (1/5) \cos x + (1/10) \sin x.$$

П р и к л а д 18. Розв'язати рівняння

$$y''+4y=\cos 2x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має корені $k_1=i2$,

$k_2=-i2$, тому загальне розв'язання однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y}=C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

часткове розв'язання неоднорідного рівняння шукаємо у формі

$$y^*=x(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

тоді

$$y^{*'}=2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''}=-4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Підставляючи ці вирази похідних у дане рівняння і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ і $\sin 2x$, одержуємо систему рівнянь для визначення A і B :

$$4B=1; \quad -4A=0,$$

звідки

$$A=0; \quad B=1/4.$$

Таким чином, загальний інтеграл даного рівняння:

$$y=C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + (1/4)x \sin 2x.$$

П р и к л а д 19. Розв'язати рівняння

$$y''-y=3e^{2x} \cos x.$$

Розв'язання. Права частина рівняння має вигляд

$$f(x)=e^{2x}(M \cos x + N \sin x),$$

причому $M=3$, $N=0$. Характеристичне рівняння $k^2-1=0$ має корені $k_1=1$, $k_2=-1$. Загальне розв'язання однорідного рівняння

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Так як число $\alpha + i\beta = 2 + i \cdot 1$ не є коренем характеристичного рівняння, то часткове розв'язання шукаємо у вигляді

$$f(x) = e^{2x} (M \cos x + N \sin x).$$

Підставляючи цей вираз в рівняння, одержимо після приведення подібних членів:

$$(2A + 4B)e^{2x} \cos x + (-4A + 2B)e^{2x} \sin x = 3e^{2x} \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо:

$$2A + 4B = 3, \quad -4A + 2B = 0.$$

Звідси

$$A = 3/10; \quad B = 3/5.$$

Отже, часткове розв'язання

$$y^* = e^{2x} [(3/10) \cos x + (3/5) \sin x],$$

а загальне

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{2x} [(3/10) \cos x + (3/5) \sin x].$$

Приклад 2.0. Знайти загальне розв'язання рівняння

$$y^{IV} - y = x^3 + 1.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 - 1 = 0$ має корні:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Знаходимо загальне розв'язання однорідного рівняння

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Часткове розв'язання неоднорідного рівняння шукаємо у формі

$$y^* = A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3.$$

Диференціюючи y^* чотири рази і підставляючи отримані вирази в задане рівняння, одержимо

$$-A_0 x^3 - A_1 x^2 - A_2 x - A_3 = x^3 + 1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$-A_0 = 1; \quad -A_1 = 0; \quad -A_2 = 0; \quad -A_3 = 1.$$

Отже,

$$y^* = -x^3 - 1.$$

Загальний інтеграл неоднорідного рівняння знаходиться по формулі

$$y = \bar{y} + y^*,$$

тобто

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x^3 - 1.$$

Приклад 2.1. Знайти загальне розв'язання рівняння $y^* = -(5/4)x \sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^4 - 1 = 0$ має корні:

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -1, \quad k_3 = i, \quad k_4 = -i.$$

Отже, загальним розв'язанням відповідного однорідного рівняння є:

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Далі, права частина даного неоднорідного рівняння має вигляд

$$f(x) = M \cos x + N \sin x,$$

де $M = 5, N = 0$.

Так як i є простим коренем характеристичного рівняння, то часткове розв'язання шукаємо у вигляді

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

Підставляючи цей вираз в рівняння, знайдемо:

$$4A \sin x - 4B \cos x = 5 \cos x,$$

або

$$A = 0, \quad B = -(5/4).$$

Отже, частковим розв'язанням диференціального рівняння є:

$$y^* = -(5/4)x \sin x,$$

а загальним розв'язанням

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - (5/4)x \sin x.$$

Мікромодуль 25

Індивідуальні тестові завдання

Проінтегрувати наступні лінійні диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами:

1. $y'' = 9y$. 2. $y'' + y = 0$. 3. $y'' - y' = 0$. 4. $y'' + 12y = 7y'$. 5. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

6. $y'' + 2y' + 10y = 0$. 7. $y'' + 3y' - 2y = 0$. 8. $4y'' - 12y' + 9y = 0$. 9. $y'' + y' + y = 0$.

10. Два однакових вантажі підвішені до кінця пружини. Знайти рух, що одержить один вантаж, якщо інший обірветься.

Примітка. Прийняти що a є приріст довжини пружини під дією одного вантажу в стані спокою.

11. Матеріальна точка маси m притягається кожним із двох центрів із силою, пропорційною відстані. Множник пропорційності дорівнює k . Відстань між центрами дорівнює $2c$. У початковий момент точка знаходиться на лінії з'єднання центрів, на відстані a від її середини. Початкова швидкість дорівнює нулеві. Знайти закон руху точки.

12. $y^{IV}-5y''+4y=0$. 13. $y'''-2y''-y'+2y=0$ 14. $y'''-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$.
 15. $y^{IV}+2y''+9y=0$. 16. $y^V-4y'''=0$. 17. $y^{IV}-8y''+16y=0$. 18. $y^{IV}+y=0$.

19. $y^{IV}-a^4y=0$. Знайти загальне розв'язання і виділити часткове розв'язання, що задовольняє початковим умовам при $x_0=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=-a^2$, $y'''=0$.

Проінтегрувати наступні неоднорідні лінійні диференціальні рівняння (знайти загальне розв'язання):

20. $y''-7y'+12y=x$. 21. $s''-a^2s=t+1$. 22. $y''+y'-2y=8 \sin 2x$.
 23. $y''-y=5x+2$. 24. $s''-2as'+a^2s=e^t$ ($a \neq 1$). 25. $y''+6y'+5y=e^{2x}$.
 26. $y''+9y'=6e^{3x}$. 27. $y''-3y'=2-6x$. 28. $y''-2y'+3y=e^x \cos x$.
 29. $y''+4y=2 \sin x$. 30. $y'''-4y''+5y'-2y=2x+3$. 31. $y^{IV}-a^4y=5a^4 e^{ax} \sin ax$.
 32. $y^{IV}+2a^2y''+a^4y=8 \cos ax$.

33. Знайти інтегральну криву рівняння $y''+k^2y=0$, яка проходить через точку $M(x_0, y_0)$ і, яка дотикається в точці прямої $y=ax$.

34. Знайти розв'язання рівняння $y''+2hy'+n^2y=0$, що задовольняє умовам $y=a$, $y'=C$ при $x=0$.

35. Знайти розв'язання рівняння $y''+n^2y=h \sin px$ ($h \neq n$), яке задовольняє умовам: $y=a$, $y'=C$ при $x=0$.

36. Вантаж вагою 4 кг підвішений до пружини і збільшує її довжину на 1 см. Знайти закон руху цього вантажу, покладаючи, що верхній кінець пружини робить гармонійне коливання, закон якого

$$y = \sin \sqrt{100gt},$$

де y вимірюється по вертикалі.

Розв'язання. Позначаючи через x вертикальну координату вантажу, яку будемо рахувати від положення спокою, маємо:

$$\frac{4}{g} \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-y-l),$$

де l — довжина пружини у вільному стані і $k=400$, як легко бачити з початкових умов. Звідси

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 100gx = 100g \sin \sqrt{100gt} + 100l g.$$

Частковий інтеграл цього рівняння ми повинні шукати у вигляді

$$t(C_1 \cos \sqrt{100gt} + C_2 \sin \sqrt{100gt}) + g,$$

тому що перший член правої частини рівняння входить у розв'язання однорідного рівняння.

37. В умовах задачі 11 початкова швидкість дорівнює v_0 і напрямлення перпендикулярно до прямої, що з'єднує центри. Знайти траєкторії.

Розв'язання. Якщо початок координат взяти в середині відстані між центрами, то диференціальні рівняння руху будуть мати такий вигляд:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = k(C-x) - k(C+x) - 2kx, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -2ky.$$

Початкові дані при $t=0$:

$$x=a, \quad dx/dt=0, \quad y=0, \quad dy/dt=v_0$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$x = a \cos \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right), \quad x = v_0 \sqrt{\frac{m}{2k}} \sin \left(\sqrt{\frac{2k}{m}} t \right).$$

Звідси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 2k}{mv_0^2} = 1 \quad (\text{еліпс}).$$

38. Горизонтальна трубка обертається біля вертикальної осі з сталою кутовою швидкістю ω . Куля, яка поміщена у середині трубки, ковзає по ній без тертя. Знайти закон руху кулі, якщо в початковий момент вона знаходиться на осі обертання і має швидкість v_0 (уздовж трубки).

Указівка. Диференціальне рівняння руху є

$$d^2r/dt^2 = \omega^2 r$$

Початкові дані: $r=0$, $dr/dt=v_0$ при $t=0$.

Інтегруючи, знаходимо

$$r = \frac{v_0}{2\omega} [e^{\omega t} + e^{-\omega t}].$$

Застосовуючи метод варіації довільних сталих, проінтегрувати наступні диференціальні рівняння:

39. $y''-7y'+6y=\sin x$. 40. $y''+y=sc x$. 41. $y''+y = \frac{1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$.

Проінтегрувати наступні рівняння різних типів :

42. $yy''=y^2+1$. 43. $\frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x-y)^2} = 0$. 44. $y=xy'^2+y'^2$. 45. $y''+y=sc x$.

46. $(1+x^2)y'-xy-a=0$. 47. $x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$. 48. $y''-4y=e^{2x} \sin x$.

49. $xy'+y-y^2 \ln x=0$. 50. $(2x+2y-1)dx+(x+y-2)dy=0$.

Мікромодуль 26

Наближене і числове розв'язання рівнянь

Часто буває неможливо здійснити точне інтегрування диференціального рівняння в квадратурах. Тоді для побудови розв'язання приходиться застосовувати інші методи. У п. 3 був описаний найпростіший графічний метод розв'язання рівнянь першого порядку. Тут ми вкажемо деякі *методи побудови наближених формул* для розв'язання, які аналогічні описаним раніше методам розв'язання кінцевих рівнянь, а також *методи числового розв'язання*, у яких шукане часткове розв'язання будується в табличному вигляді. Ми будемо для простоти розглядати рівняння першого порядку, але ті ж методи природно переносяться на рівняння будь-якого порядку і на системи рівнянь.

23. Метод ітерацій. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку з заданою початковою умовою

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (10.159)$$

Якщо взяти інтеграли від обох частин рівняння, одержимо

$$\int_{x_0}^x y' dx = y - y_0 = \int_{x_0}^x f(x, y) dx = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx.$$

змінюючи позначення змінної інтегрування, напишемо

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (10.160)$$

Рівняння (10.160) рівносильно відразу обом рівностям (10.159), так як після його диференціювання вийде перша рівність, а після підстановки $x=x_0$ — друга. Рівняння (10.160) є *інтегральним рівнянням*, тому що в ньому невідома функція стоїть під знаком інтеграла. Вигляд рівняння (10.160) зручний для застосування методу ітерацій.

Вибравши деяку функцію $y_0(x)$ як нульове наближення (бажано, щоб вона була по можливості ближче до шуканого розв'язання; якщо про останній нічого не відомо, то можна

покласти хоча б $y_0(x) \equiv y_0$), знаходимо перше наближення по формулі

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_0(s)) ds.$$

Підставляючи результат у праву частину (10.160), знаходимо друге наближення і т.д.; узагалі

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds \quad (n=0,1,\dots). \quad (10.161)$$

Якщо процес ітерацій сходиться, тобто якщо послідовні наближення прагнуть з ростом n до деякої граничної функції, то вона задовольняє рівнянню (10.160); для перевірки цього треба в рівності (10.161) перейти до границі при $n \rightarrow \infty$.

Метод ітерацій для рівняння (10.160), як правило, сходиться для всіх x , досить близьких до x_0 ; так буде, у всякому разі, якщо виконано умови теореми Коші з п. 3. Це зв'язано з тим, що при обчисленні наступних наближень треба інтегрувати попередні, а при послідовному інтегруванні функції в цілому «згладжуються» і всякі неправильності, що відбуваються через вибір нульового наближення, похибок округлення і т.п., поступово усуваються. На відміну від цього при послідовному диференціюванні функції, як правило, погіршуються, первісні неправильності розростаються і тому ітераційний метод, який заснований на послідовному диференціюванні, не дав би збіжності.

Розходження між інтегруванням і диференціюванням показане на рис. 10.25. Намальований «горбик», доданий до якої-небудь функції, значно псує її похідну, не говорячи вже про наступні похідні і майже не позначається на інтегралі.

Розглянемо, наприклад, частковий вигляд рівняння Риккати (див. кінець п. 4)

$$y' = x^2 + y^2$$

при початковій умові $y(0)=0$. Після інтегрування одержимо

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x y^2(s) ds.$$

Виберемо як нульове наближення для шуканого розв'язання, про яке ми поки нічого не знаємо, нульову

функцію $y_0(x)=0$, так як вона задовольняє хоча б початковій умові.

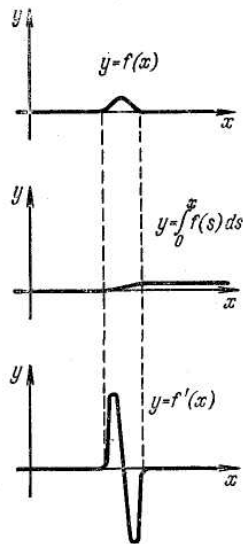


Рис. 10.25.

Тоді одержимо

$$y_1(x) = \frac{x^3}{3}, \quad y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \int_0^x \left(\frac{s^3}{3}\right)^2 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$$

і т.д. Видно, що при невеликих x , наприклад при $|x| < 1$, процес добре сходиться; так, з точністю до 0,001 при $|x| < 1$ можна покласти $y = (x^3/3) + (x^7/63)$, а при $|x| < 1/2$ навіть просто $y = x^3/3$. Як зазвичай, на практиці питання про те, на якому наближенні потрібно зупинитися, вирішується за допомогою порівняння наступних наближень з попередніми.

24. Застосування ряду Тейлора. З рівняння і початкової умови (10.159) можна за допомогою диференціювання знайти значення $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ і т.д., після чого скласти розкладання розв'язання в степеневий ряд Тейлора. Необхідна кількість членів визначається за допомогою їхнього послідовного обчислення і порівняння з обраним степенем точності.

Розглянемо, наприклад, задачу

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1.$$

Підстановкою в праву частину рівняння знаходимо, що

$$y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1.$$

Якщо продиференціювати обидві частини рівняння, одержимо

$$y'' = 2x + 2y'$$

і, підставивши $x=0$, знайдемо

$$y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Аналогічно знаходимо

$$y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''; \quad y'''(0) = 8; \quad y^{IV} = 6y'y'' + 2yy'''; \quad y^{IV}(0) = 28;$$

і т.д. Підставляючи це у формулу Маклорена, одержимо

$$y = y(0) \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{7}{6} x^4 + \dots$$

Цією формулою можна користуватися для невеликих $|x|$.

25. Застосування степеневих рядів з невизначеними коефіцієнтами. Цей метод тісно зв'язаний з п. 24 і полягає в тому, що розв'язання рівняння шукається у формі ряду з невідомими коефіцієнтами

$$y = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3 + \dots, \quad (10.162)$$

які знаходяться за допомогою підстановки в рівняння і наступне прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x (і застосування початкової умови, якщо вона задана).

Розглянемо, наприклад, рівняння другого порядку

$$y'' + xy = 0. \quad (10.163)$$

Будемо шукати розв'язання розкладеним по степенях x :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \quad (10.164)$$

Після диференціювання і підстановки в рівняння одержимо

$$(1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3 x + 3 \cdot 4a_4 x^2 + \dots) + x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = 0.$$

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x дає $1 \cdot 2a_2 = 0$; $2 \cdot 3a_3 + a_0 = 0$; $3 \cdot 4a_4 + a_1 = 0$; $4 \cdot 5a_5 + a_2 = 0$; $5 \cdot 6a_6 + a_3 = 0, \dots$, звідки послідовно знаходимо

$$a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{a_0}{2 \cdot 3}; \quad a_4 = -\frac{a_1}{3 \cdot 4}; \quad a_5 = -\frac{a_2}{4 \cdot 5} = 0; \quad a_6 = -\frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6};$$

$$a_7 = -\frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}; \quad a_8 = -\frac{a_5}{7 \cdot 8} = 0; \quad a_9 = -\frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \text{ і т.д.}$$

Підстановка цих результатів у формулу (10.164) дає загальне розв'язання рівняння (10.163):

$$y = a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2 \cdot 3}x^3 - \frac{a_1}{3 \cdot 4}x^4 + \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}x^6 + \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 - \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}x^9 - \dots =$$

$$= a_0 \left(1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{x^9}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \dots \right) +$$

$$+ a_1 \left(x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} + \dots \right).$$

Константи a_0 і a_1 залишаються в якості довільних сталих (у властивості 5 п. 14 вони були позначені через C_1 і C_2). Ряди, що стоять у дужках, представляють два лінійно незалежні часткові розв'язання рівняння (10.163).

Описаний прийом можна завжди застосовувати, зокрема, до лінійних рівнянь

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x), \quad (10.165)$$

якщо усі функції $a_0(x), a_1(x), \dots, f(x)$ являють собою многочлени відносно x або, у більш загальному випадку, суми рядів по степенях $x - x_0$, причому $a_0(x_0) \neq 0$.

Якщо $a_0(x_0) = 0$, то значення x_0 називається *особливою точкою* для рівняння (10.165); тоді знайти розв'язання у формі (10.162) можливо не завжди. У цьому випадку іноді вдається знайти розв'язання у формі

$$y = (x-x_0)^p [a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(x-x_0)^3 + \dots], \quad (10.166)$$

де стала p також підбирається. При цьому можна вважати, що $a \neq 0$, так як в протилежному випадку можна винести за дужку деякий степінь $x - x_0$, так що справа приведе до зміни p .

26. Функції Бесселя. Розглянемо важливий приклад рівняння Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (p = \text{const} \geq 0; 0 < x < \infty). \quad (10.167)$$

Розв'язання цього рівняння називаються *функціями Бесселя*. Ці функції називаються також *циліндричними* функціями, так як вони широко застосовуються при розв'язанні рівнянь математичної фізики в круглому циліндрі.

Значення $x=0$ є для рівняння (10.167) особливою точкою, тому в силу формули (10.166), у якій треба покласти $x_0=0$, його розв'язання можна шукати у вигляді

$$y = ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \dots \quad (10.168)$$

Диференціювання і підстановка в рівняння (10.167) дають

$$x^2 [a\rho(\rho-1)x^{\rho-2} + b(\rho+1)\rho x^{\rho-1} + c(\rho+2)(\rho+1)x^\rho + \dots] +$$

$$+ x [a\rho x^{\rho-1} + b(\rho+1)\rho x^\rho + c(\rho+2)x^{\rho+1} + \dots] +$$

$$+ x^2 (ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \dots) - p^2 (ax^\rho + bx^{\rho+1} + cx^{\rho+2} + \dots) = 0.$$

Після прирівнювання нулеві коефіцієнтів при однакових степенях x одержимо ланцюжки рівностей:

$$a\rho(\rho-1) + a\rho - a\rho^2 = 0, \text{ тобто } a(\rho^2 - p^2) = 0;$$

$$b(\rho+1)\rho + b(\rho+1) - b\rho^2 = 0, \text{ тобто } b(\rho^2 + 2\rho + 1 - p^2) = 0;$$

$$c(\rho+2)(\rho+1) + c(\rho+2) + a - c\rho^2 = 0, \text{ тобто } c(\rho^2 + 4\rho + 4 - p^2) + a = 0;$$

$$d(\rho+3)(\rho+2) + d(\rho+3) + b - d\rho^2 = 0, \text{ тобто } d(\rho^2 + 6\rho + 9 - p^2) + b = 0;$$

$$e(\rho+4)(\rho+3) + e(\rho+4) + c - e\rho^2 = 0, \text{ тобто } e(\rho^2 + 8\rho + 16 - p^2) + c = 0 \text{ і}$$

т.д.

З першої рівності, оскільки $a \neq 0$, ми бачимо, що $\rho^2 = p^2$, тобто $\rho = \pm p$. Підставляючи цей результат в інші рівності, одержимо послідовно

$$b = 0, c = \frac{-a}{4\rho + 4} = -\frac{a}{2^2(\rho + 1)}, d = 0, e = \frac{-c}{8\rho + 16} = \frac{a}{2^4 \cdot 2(\rho + 1)(\rho + 2)}, f = 0,$$

$$g = \frac{a}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(\rho + 1)(\rho + 2)(\rho + 3)}, i = 0, f = \frac{a}{2^8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(\rho + 1)(\rho + 2)(\rho + 3)(\rho + 4)} \text{ і т.д.}$$

Звідси в силу формули (10.168) знаходимо розв'язання

$$y = ax^\rho - \frac{a}{2^2(\rho + 1)}x^{\rho+2} + \frac{a}{2^4 \cdot 2!(\rho + 1)(\rho + 2)}x^{\rho+4} - \quad (10.169)$$

$$- \frac{a}{2^6 \cdot 2!(\rho + 1)(\rho + 2)(\rho + 3)}x^{\rho+6} + \dots,$$

де a — довільна стала. Зручно вибрати

$$a = \frac{1}{2^\rho \Gamma(\rho + 1)}.$$

Якщо врахувати, що в силу формули (9.89)

$$\Gamma(\rho + 1)(\rho + 1) = \Gamma(\rho + 2); \Gamma(\rho + 1)(\rho + 1)(\rho + 2) = \Gamma(\rho + 2)(\rho + 2) = \Gamma(\rho + 3) \text{ і т.д.}$$

то формула (10.169) при такому a дасть

$$y = \frac{1}{\Gamma(\rho + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^\rho - \frac{1}{1! \Gamma(\rho + 2)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\rho+2} + \frac{1}{2! \Gamma(\rho + 3)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\rho+4} - \quad (10.170)$$

$$- \frac{1}{3! \Gamma(\rho + 4)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\rho+6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\rho + n + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\rho+2n}.$$

Ця сума називається *функцією Бесселя 1-го роду порядку ρ* і позначається $J_\rho(x)$. Так як $\rho = \pm p$, то загальне розв'язання рівняння (10.167) (п. 14, властивість 5) можна записати у вигляді

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x). \quad (10.171)$$

Розв'язання (10.171) не придатне при цілому $p=0, 1, 2, 3, \dots$. Дійсно, для таких p при $p = -p$ буде

$$\Gamma(-p+1) = \Gamma(-p+2) = \dots = \Gamma(-p+p) = \pm\infty,$$

і тому формула (10.170) дасть

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(-p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2n} |n-p=n'| =$$

$$\sum_{n'=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^{n'}}{(p+n')!(n')!} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2n} = (-1)^p J_p(x) \quad (p=0,1,2,\dots).$$

Виходить, у цьому випадку розв'язання $J_p(x)$ і $J_{-p}(x)$ лінійно залежні (п. 14), а тому формула (10.171) не дає загального розв'язання.

Щоб одержати загальне розв'язання рівняння (10.167), яке придатне для всіх p , роблять аналогічно випадкові 3 п. 17. А саме, спочатку вважають, що p не ціле, і утворюють функцію

$$Y(x) = \operatorname{ctg} p\pi J_p(x) - \frac{1}{\sin p\pi} J_{-p}(x) = \frac{\cos p\pi J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin p\pi}.$$

Як лінійна комбінація розв'язань вона також є розв'язанням рівняння (10.167) і називається *функцією Бесселя 2-го роду порядку p* ; вона іноді позначається також через $N_p(x)$. Якщо p стає цілим, то в правій частині виходить невизначеність. Її можна розкрити за правилом Лопітала. Відзначимо, що в підсумку вийде сума, для якої при $x \rightarrow \infty$ старшим членом буде

$$-\frac{(p-1)!2^p}{\pi x^p} \quad (p=1,2,3,\dots); \quad \frac{2}{\pi} \ln x \quad (p=0).$$

Отже, формула

$$y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x). \quad (10.172)$$

дає загальне розв'язання рівняння (10.167) для всіх $p \geq 0$, нецілих або цілих, при $0 < x < \infty$. При цьому $J_p(+0)$ кінцеве, тоді як $Y_p(+0) = -\infty$. Тому якщо $y(+0)$ за умовами задачі повинне бути кінцевим, то в правій частині формули (10.172) треба залишити лише перший доданок. Найбільше значення для доданків мають

$$\left. \begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{1!^2 2^2} + \frac{x^4}{2!^2 2^4} - \frac{x^6}{3!^2 2^6} + \dots \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{1!2 \cdot 2^3} + \frac{x^5}{2!3!2^5} - \frac{x^7}{3!4!2^7} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.173)$$

Зразкові графіки цих функцій показані на рис. 10.26. Ці функції, як і усі функції Бесселя 1-го і 2-го роду, при зростанні x нескінченне число раз змінюють знак і прагнуть до нуля. З формул (10.173) легко вивести, що $J'_0(x) = -J_1(x)$. Є й інші співвідношення між функціями Бесселя.

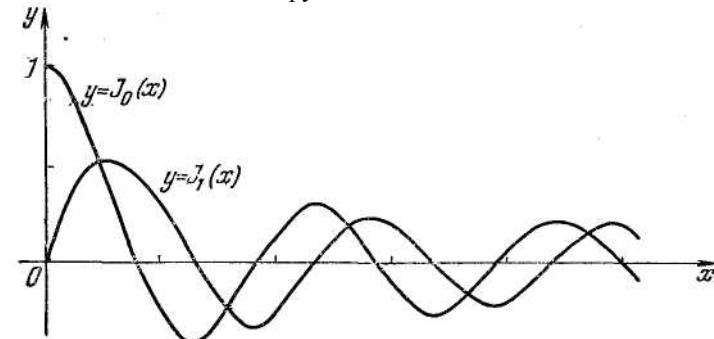


Рис. 10.26.

27. Метод малого параметра. Цей метод застосовується і при розв'язанні диференціальних рівнянь. Приведемо прості приклади.

Задача

$$y' = \frac{x}{1 + \alpha xy}, \quad y(0) = 0 \quad (10.174)$$

не містить параметрів. Однак можна розглянути більш загальну задачу

$$y' = \frac{x}{1 + \alpha xy}, \quad y(0) = 0 \quad (10.175)$$

з якої (10.174) виходить при $\alpha=0,1$. Задача (10.175) легко розв'язується при $\alpha=0$: тоді виходить $y=x^2/2$. Тому шукаємо розв'язання задачі розкладеним у ряд по степенях α , тобто

$$y = \frac{x^2}{2} + \alpha u + \alpha^2 v + \alpha^3 w + \dots, \quad (10.176)$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$ і т.д.- поки невідомі функції x .

Підстановка (10.176) у (10.175) дає після множення на знаменник

$$(x + \alpha u' + \alpha^2 v' + \alpha^3 w' + \dots) \left(1 + \frac{\alpha}{2} x^3 + \alpha^2 x u + \alpha^3 x v + \dots \right) = x; \quad (10.177)$$

$$\alpha u(0) + \alpha^2 v(0) + \dots = 0, \text{ тобто } u(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \dots \quad (10.178)$$

Розкриваючи дужки в (10.177) і прирівнюючи нулеві коефіцієнти при степенях α , одержимо послідовно

$$u' + \frac{1}{2} x^4 = 0, \quad v' + \frac{x^3}{2} u' + x^2 u = 0, \quad w' + \frac{x^3}{2} v' + x u u' + x^2 v = 0 \quad \text{і т.д.},$$

звідки з урахуванням рівностей (10.178) знайдемо

$$u = -\frac{x^5}{10}, \quad v = \frac{7}{160} x^8, \quad w = \frac{71}{1760} x^{11} \quad \text{і т.д.}$$

Тому формула (10.176) дасть

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha}{10} x^5 + \frac{7\alpha^2}{160} x^8 - \frac{71\alpha^3}{1760} x^{11} + \dots$$

Зокрема, для рівняння (10.174) одержимо

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{100} + \frac{7x^8}{16000} - \frac{71x^{11}}{1760000} + \dots$$

Цей ряд прекрасно сходиться при $|x| < 1$ і непогано при $1 < |x| < 2$.

Розглянемо як інший приклад задачу

$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = \alpha. \quad (10.179)$$

На відміну від попереднього приклада тут параметр входить у початкову умову. При $\alpha=0$ задача (10.179) має, мабуть, розв'язання $y \equiv 0$. Тому при малих $|\alpha|$ шукаємо розв'язання у формі

$$y = \alpha u + \alpha^2 v + \alpha^3 w + \dots, \quad (u = u(x), \quad v = v(x), \dots). \quad (10.180)$$

Підстановка значення $x=0$ дає

$$u(0) = 1, \quad v(0) = 0, \quad w(0) = 0, \dots \quad (10.181)$$

З іншого боку, підставивши (10.180) у диференціальне рівняння (10.179), одержимо з урахуванням степеневого ряду для синуса :

$$\alpha u' + \alpha^2 v' + \alpha^3 w' + \dots = \frac{(\alpha x u + \alpha^2 x v + \alpha^3 x w + \dots)}{1!} - \frac{(\alpha x u + \alpha^2 x v + \alpha^3 x w + \dots)^3}{3!} + \dots$$

Прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях α дає

$$u' = x u, \quad v' = x v, \quad w' = x w - \frac{x^3 u^3}{3!}, \dots$$

Інтегруючи ці вже лінійні рівняння з урахуванням початкових умов (10.181), знайдемо

$$u = e^{\frac{x^2}{2}}, \quad v = 0, \quad w = \frac{1}{12} (1-x)^2 e^{\frac{3}{2}x^2} - \frac{1}{2} e^{\frac{x^2}{2}}$$

Підстановка цих виразів у (10.180) дає розкладання шуканого розв'язання, яке придатне для невеликих $|x|$ і $|\alpha|$.

У більш складних випадках при застосуванні методу малого параметра часто буває корисно знайти хоча б перший утримуючий параметр член розкладання.

28. Загальні зауваження про залежності розв'язання від параметра. У зв'язку з попереднім пунктом висловимо кілька загальних міркувань. Часто буває, що досліджуване диференціальне рівняння або система таких рівнянь містять один або кілька параметрів, що можуть приймати різні сталі значення. Розглянемо для простоти рівняння першого порядку

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y; \lambda) \quad (10.182)$$

(λ — параметр) при визначених початкових умовах $x=x_0, y=y_0$.

Будемо вважати, що точка $(x_0; y_0)$ —неособа (п. 7), тобто при заданих умовах існує єдиний розв'язок рівняння (10.182). Тоді з геометричного змісту рівняння (10.182) (п. 3) випливає, що якщо його права частина залежить від λ безперервно, то при малій зміні λ поле напрямлень буде мінятися мало, а тому і розв'язання $y(x; \lambda)$ буде залежати від λ безперервно. Аналогічний висновок виходить, якщо від λ залежить не тільки рівняння, але і початкова умова, тобто якщо $x_0=x_0(\lambda), y_0=y_0(\lambda)$.

Нехай розв'язання $y(x; \lambda)$ рівняння (10.182) відомо при якомусь, як говорять, «необуреному» значенні λ ; нехай, далі, значення параметра змінилося і стало рівним $\lambda + \Delta\lambda$, де $|\Delta\lambda|$ мале. Тоді й y зміниться й одержить приріст $\Delta_\lambda y$, головну лінійну частину, тобто диференціал якого ми позначимо через δy і назвемо *варіацією* розв'язання.

Таким чином, варіація - це частковий диференціал, узятий по параметру; нова назва і нове позначення застосовуються, щоб відрізнити диференціал по незалежній змінній від диференціала по параметру. У тих випадках, коли малими вищого порядку

можна зневажити, можна сказати просто, що варіація розв'язань - це нескінченно мала його зміна, яка отримана за рахунок зміни параметра. При обраному значенні λ величина δy , як і y , залежить від x , тобто $\delta y = \delta y(x)$ і прямо пропорційна $\Delta \lambda$.

Щоб скласти диференціальне рівняння для δy , треба прирівняти диференціали обох частин рівності (10.182) по λ :

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta(f(x, y; \lambda)) = \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \lambda} \delta \lambda \quad (\delta \lambda = \Delta \lambda) \quad ,$$

тобто

$$\frac{d(\delta y)}{dx} = f'_y(x, y; \lambda) \delta y + f'_\lambda(x, y; \lambda) \delta \lambda. \quad (10.183)$$

При цьому в лівій частині ми переставили знаки d і δ , як знаки диференціалів по різним змінним, а в правій частині скористалися формулою для похідної складеної функції. Рівняння (10.183) називається *рівнянням у варіаціях* для вихідного рівняння (10.182). Так як в правій частині замість y треба підставити «необурене розв'язання» $y(x; \lambda)$, то рівняння (10.183) лінійне і тому легко інтегрується (п. 4). Для рівнянь вищих порядків і для систем рівнянь відповідні рівняння у варіаціях у загальному випадку не інтегруються в квадратурах, але вони завжди є лінійними. Виведемо початкову умову для δy . У загальному випадку, коли $x_0 = x_0(\lambda)$, $y_0 = y_0(\lambda)$, одержуємо при значенні параметра $\lambda + \delta \lambda$, відкидаючи малі вищого порядку, що при

$$x = x_0(\lambda + \delta \lambda) = x_0 + x_0' \delta \lambda$$

буде

$$y_0 = y_0(\lambda + \delta \lambda) = y_0 + y_0' \delta \lambda,$$

де

$$x_0' = x_0'(\lambda), \quad y_0' = y_0'(\lambda).$$

Звідси при значенні параметра $\lambda + \delta \lambda$ і при $x = x_0$ буде

$$y|_{x=x_0} = y|_{x=x_0+x_0'\delta\lambda} - \partial_x y|_{x=x_0'\delta\lambda} = y_0 + y_0'\delta\lambda - \frac{dy}{dx} x_0'\delta\lambda = y_0 + y_0'\delta\lambda - f_0 x_0'\delta\lambda,$$

де

$$f_0 = f(x_0, y_0; \lambda).$$

Але те ж значення y дорівнює

$$(y|_{\lambda} + \delta y)|_{x=x_0} = y_0 + (\delta y)|_{x=x_0}.$$

Виходить, початкова умова для δy така:

$$(\delta y)|_{x=x_0} = (y_0' - f_0 x_0') \delta \lambda.$$

У тому частковому випадку, коли x_0 і y_0 не залежать від λ , буде $x_0' = y_0' = 0$ і тому початкова умова має вигляд $(\delta y)|_{x=x_0} = 0$.

Іноді параметр входить у диференціальне рівняння таким чином, що при деяких значеннях цього параметра рівняння знижує свій порядок, тобто вироджується, при цьому виникають нові обставини, які ми пояснимо на прикладі.

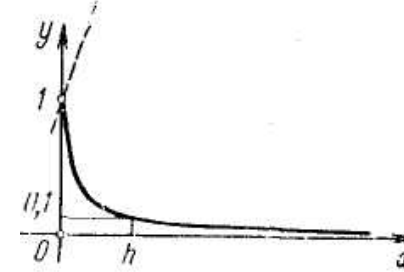


Рис. 10.27.

Розглянемо задачу

$$\lambda y' + y = 0, \quad y|_{x=0} = 1 \quad (10.184)$$

з розв'язанням

$$y = e^{-\frac{x}{\lambda}}.$$

При $\lambda = 0$ виходить виродження. Нехай розв'язання розглядається при $x \geq 0$ і $\lambda \rightarrow +0$; це розв'язання показано на рис. 10.27. Рівняння (10.184) у границі переходить у рівність $y = 0$, але ми бачимо, що при малому λ розв'язання близьке до нуля не відразу від $x = 0$, а тільки від деякого $x = h$. Проміжок $0 < x < h$, який називають *прикордонним прошарком*, потрібен розв'язанню для того, щоб від одиничного початкового значення (10.184) перейти до значення, близького до нуля.

Ширина прикордонного прошарку умовна, тому що теоретично розв'язання ніде не стає точно рівним нулеві. Якщо, наприклад, прийняти за ширину прикордонного прошарку значення $x = h$, при якому розв'язання зменшується в 10 разів у порівнянні з вихідним значенням, то для задачі (10.184) ми одержимо

$$e^{-\frac{h}{\lambda}} = 0,1; \quad h = \ln 10 \cdot \lambda,$$

тобто ширина прикордонного прошарку прямо пропорційна значенню λ . Якщо $\lambda \rightarrow 0$, то розв'язання, яке виходить і яке зображене на рис. 10.27 пунктиром, прагне до нескінченності при будь-якому $x > 0$.

У більш складних випадках часто спостерігається аналогічне явище. Нехай, наприклад, розглядається розв'язання рівняння другого порядку, що задовольняє двом початковим або крайовим (п. 16) умовам, причому при деякому значенні параметра $\lambda = \lambda_0$ порядок рівняння знижується до першого. Тоді буває, що якщо розв'язання $y_0(x)$ при $\lambda = \lambda_0$ залишається кінцевим, то воно, як розв'язання рівняння першого порядку, задовольняє тільки одній умові, а іншому не обов'язково. При λ , близькому до λ_0 , для розв'язання $y(x)$ є «прикордонний прошарок» (ширина якого пропорційна $|\lambda - \lambda_0|$), протягом якого $y(x)$ переходить від цієї іншої умови до $y_0(x)$. Подібна ситуація може виникнути і для систем диференціальних рівнянь.

29. Методи поліпшення нев'язки. Ці методи засновані на тому, що невідома функція шукається у вигляді, яка включає кілька параметрів, тобто у вигляді

$$y = \varphi(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m). \quad (10.185)$$

При цьому права частина, зазвичай, вибирається так, щоб для будь-яких значень цих параметрів задовольнялися поставлені початкові або граничні умови. Після підстановки виразу (10.185) у задане диференціальне рівняння нев'язки h , тобто різниця між лівою і правою частинами, буде містити ці параметри:

$$h = h(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

Якби розв'язання (10.185) було точним, то нев'язка h тотожно дорівнювала б нулеві. Тому для знаходження параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ на нев'язки накладають m умов, що свідомо виконуються для тотожно нульової функції. Наприклад, можна прирівняти $h=0$ при m значеннях x — це *метод коллокації*. Можна мінімізувати інтеграл $\int h^2 dx$ на тому інтервалі $a \leq x \leq b$, на якому будується розв'язання, - це метод *найменших квадратів*. Можна прирівнювати нулеві інтеграли

$$\int_a^b h \psi_1(x) dx, \quad \int_a^b h \psi_2(x) dx, \dots, \int_a^b h \psi_m(x) dx,$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ - яка-небудь обрана система функцій, — це *метод моментів*, тому що подібні інтеграли називаються *моментами*. Чим більше введено параметрів λ_i , тим більш «гнучкою» є формула (10.185), тобто тим точніше можна представити цією формулою шукане розв'язання, але тим складніше виходять обчислення. Велике мистецтво полягає в тому, щоб правильно угадати вигляд шуканого розв'язання за допомогою формули, що містить невелике число параметрів. Про правильність результату можна судити, порівнюючи результати повторних обчислень по різних методах або з різним числом параметрів і т.п. Якщо права частина формули (10.185) задовольняє не всім поставленим початковим або граничним умовам, то вимога, щоб ці умови задовольнялися, відповідно зменшує число умов, що накладаються на нев'язки.

Розглянемо простий приклад, у якому можливе порівняння з точним розв'язанням. Нехай треба розв'язати крайову задачу

$$y' + y = 0 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Будемо шукати розв'язання у вигляді

$$y = \lambda x + \mu x^2. \quad (10.186)$$

При цьому перша гранична умова задовольняється автоматично, а друга дає

$$\lambda + \mu = 1,$$

звідки

$$y = \lambda x + (1 - \lambda)x^2,$$

і в нас залишається всього одна степінь свободи, тобто можливість поставити лише одну умову для поліпшення нев'язки, яка дорівнює

$$h = y'' + y = 2(1 - \lambda) + \lambda x + (1 - \lambda)x^2.$$

Коллокація при $x = 1/2$ дає значення $\lambda = 9/7$; метод найменших квадратів для інтервалу $0 \leq x \leq 1$ дає значення $\lambda = 257/202$; метод моментів з функцією $\psi(x) = 1$ дає значення $\lambda = 14/11$. Підстановка цих значень у формулу (10.186) дає наближені розв'язання, що непогано апроксимують точне $y = (\sin x) / (\sin 1)$: наприклад, при $x = 0,5$ воно дорівнює 0,5699, тоді як наближені розв'язання рівні відповідно 0,5714, 0,5681 і 0,5682, похибка $\pm 0,3\%$.

30. Метод спрощення. Цей метод широко застосовується на практиці, особливо при грубих прикидочних розрахунках. Він

полягає в тому, що саме вихідне рівняння спрощується шляхом відкидання порівняно малих членів, заміни повільно мінливих коефіцієнтів сталими і т.п. Після такого спрощення може вийти рівняння одного з типів, які інтегруються, і, інтегруючи, ми одержимо функцію, яка може вважатися наближеним розв'язанням вихідного, повного рівняння; у всякому разі, вона часто правильно передає характер поведінки точного розв'язання. Знайшовши це «нульове наближення», іноді вдається з його допомогою внести виправлення, що враховують спрощення, і тим самим знайти «перше наближення» і т.д.

Якщо рівняння містить параметри (наприклад, маси, лінійні розміри досліджуваних об'єктів і т.п.), то потрібно мати на увазі, що при одних значеннях цих параметрів відносно малими можуть бути одні члени рівняння, а при інших значеннях — інші, так що спрощення буде при різних значеннях параметрів вироблятися по різному. Крім того, іноді приходиться розбивати інтервал зміни незалежної змінної на частини, у кожній з яких спрощення проводиться по-своєму.

Особливо корисне таке спрощення рівняння у випадках, коли при самому виведенні (написанні) диференціального рівняння робилися істотні спрощуючі припущення або коли точність, з якою відомі розглянуті величини, невелика. Так, члени рівняння, які менші допустимої похибки в інших його членах, треба безумовно відкинути. Розглянемо, наприклад, задачу

$$y'' + \frac{1}{1+0,1x}y + 0,2y^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 2. \quad (10.187)$$

Так як коефіцієнт при y змінюється повільно, замінимо цей коефіцієнт його середнім значенням:

$$\frac{1}{2-0} \int_0^2 \frac{1}{1+0,1x} dx = \frac{1}{2} \left. \frac{\ln(1+0,1x)}{0,1} \right|_0^2 = \frac{\ln 1,2}{0,2} = 0,911.$$

Крім того, порівняно малий третій доданок відкинемо.

Одержимо рівняння $y'' + 0,911y = 0$ з розв'язанням при даних початкових умовах

$$y = \cos 0,954x. \quad (10.188)$$

Вигляд цього наближеного розв'язання підтверджує правомірність відкидання останнього доданка в рівнянні, оскільки відношення третього члена до другого порядку $0,2y^2 < 0,2$, і тому перший член повинний «майже взаємно знищитися» із другим. Внесемо виправлення на останній

доданок, для чого підставимо в нього наближене розв'язання (10.188), залишивши коефіцієнт осередненим:

$$y'' + 0,911y = -0,2 \cos^3 0,954x = -0,05 \cos 2,86x - 0,15 \cos 0,954x.$$

По методах п. 18 одержуємо при заданій початковій умові

$$y = 0,993 \cos 0,954x - 0,079 \sin 0,954x + 0,007 \cos 2,86x.$$

Різниця в порівнянні з нульовим наближенням (10.188) невелика, так що висновок про значення окремих доданків у рівнянні (10.187) залишається в силі; у той же час третій член рівняння (10.187) вніс свій внесок у розв'язання.

Подібні міркування найчастіше не відзначаються строгістю й іноді приводять до помилок; однак якщо вони проводяться у відповідності зі здоровим глуздом, то все-таки, і притому досить часто, дають розв'язання, яким можна користуватися на практиці.

31. Метод Ейлера. Ми переходимо до викладу деяких методів числового інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи застосовуються, якщо жоден з описаних вище методів «наближеного інтегрування», тобто одержання наближених формул для розв'язання, не є досить ефективним, зокрема, якщо розв'язання потрібне з великою точністю на великому інтервалі зміни аргументу. Крім того, ці методи застосовуються в роботі електронних обчислювальних машин.

Часто доцільно комбінувати методи наближеного і числового інтегрування. Наприклад, для рівняння

$$y'' + (1 + e^{-x})y = 0$$

при якій-небудь заданій початковій умові можна для малих x застосувати формулу Тейлора (п. 24), при середніх x у залежності від необхідної точності — один з методів числового інтегрування, а при великих x — просто відкинути член e^{-x} .

Ми викладемо чотири найбільш відомі методи числового інтегрування рівнянь першого порядку; ці методи дуже просто переносяться на системи рівнянь першого порядку, до яких приводяться і рівняння вищих порядків.

Метод Ейлера простий і наочний, хоча і недостатньо практично ефективний. Однак його треба добре зрозуміти, тому що багато ефективних методів у різних розділах математики є його розвитком. Метод Ейлера складається в безпосередній заміні похідної в диференціальному рівнянні різницеvim відношенням. Нехай розглядається початкова задача

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (10.189)$$

Будемо вважати для простоти крок h по x сталим і позначимо

$$x_0+h=x_1, x_0+2h=x_2, x_0+3h=x_3, \dots,$$

а наближені значення $y(x_k)$ позначимо y_k . Щоб знайти ці значення, замінимо в рівнянні похідну відношенням

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x} = f(x_k, y_k), \text{ тобто } \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k)$$

$$i \quad y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h. \quad (10.190)$$

По останній формулі можна, починаючи від y_0 і покладаючи послідовно $k = 0, 1, 2, \dots$ знайти значення

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h, \quad y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h, \dots$$

Метод Ейлера має простий геометричний зміст, показаний на рис. 10.28, де зображені також інтегральні лінії. Він полягає в тому, що через задану точку M_0 ми проводимо не шукану інтегральну лінію, що нам не відома, а відрізок M_0M_1 дотичної до цієї лінії, керуючись напрямленням поля в точці M_0 .

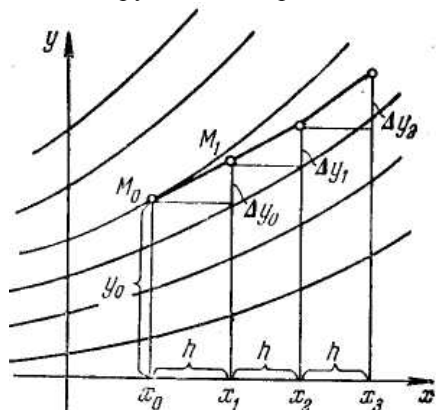


Рис. 10.28.

Через M_1 ми проводимо відрізок, керуючись напрямленням поля в M_1 , і т.д. Отримана ламана Ейлера приблизно зображує необхідну інтегральну лінію, яка вийшла б, якби крок h був нескінченно малим, тобто якби ми безперервно підправляли напрямлення ламаної. Легко оцінити порядок помилки в методі Ейлера. Користуючись формулою (10.190) ми замінюємо приріст розв'язання його диференціалом

$$y_k' \Delta x = f(x_k, y_k)h.$$

При цьому робиться похибка порядку h^2 . Якщо ми будемо

розв'язання на деякому інтервалі x_0, x і розбиваємо його на n частин, то

$$h = \frac{x - x_0}{n},$$

і сумарна похибка буде мати порядок

$$nh^2 = \frac{(x - x_0)^2}{n}.$$

Виходить, для підвищення точності в 10 разів, тобто для обчислення одного додаткового десяткового знака, потрібно збільшити число точок ділення також у 10 разів, що значно збільшить обсяг обчислювальної роботи. У цьому недолік методу. Відзначимо ще одну особливість методу Ейлера. Ми уже відзначали в п. 7, що розв'язання такого рівняння може, при своєму продовженні, обернутися в нескінченність при кінцевому значенні x . У той же час ясно, що розв'язання, яке побудоване по методу Ейлера, залишається кінцевим при всіх значеннях x . Щоб правильно передати поведінку розв'язання в таких випадках, можна виконати це в такий спосіб: якщо в результаті числового інтегрування буде виявлене значне зростання розв'язання $y(x)$ по абсолютній величині, треба зробити в диференціальному рівнянні заміну вигляду $y=1/z$. Якщо тоді при подальшому інтегруванні виявиться, що z переходить через нульове значення при деякому $x=\alpha$, це і буде означати, що $|y(\alpha)| = \infty$.

32. Метод Рунге — Кутта. Покажемо спочатку цей метод, який уточнює метод Ейлера в більш простому варіанті. Нехай y_k , тобто наближене значення розв'язання при $x=x_k$, уже побудовано; тоді y_{k+1} можна знайти за допомогою наступного обчислення:

$$f_k = f(x_k, y_k), \quad \alpha_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{f_k h}{2}\right), \quad y_{k+1} = y_k + \alpha_k h. \quad (10.191)$$

Геометричний зміст цього обчислення показано на рис. 10.29. А саме, кожна чергова ланка $M_k M_{k+1}$ ламаної, апроксимуючої інтегральної лінії, будується так. Спочатку проводимо відрізок $M_k M'_{k+1}$, керуючись напрямленням f_k поля в точці M_k . Не обмежуючись цим (як у методі Ейлера), визначаємо напрямлення α_k поля в середині N_k цього відрізка і проводимо відрізок $M_k M_{k+1}$ саме під цим новим напрямленням. Таким чином,

ми робимо *перерахування*, уточнення кутового коефіцієнта ланок ламаної, яка апроксимує інтегральну криву.

Уже з геометричного змісту ясно, що даний метод точніше методу Ейлера, так як тут враховується поворот поля на інтервалі $x_k \leq x \leq x_{k+1}$.

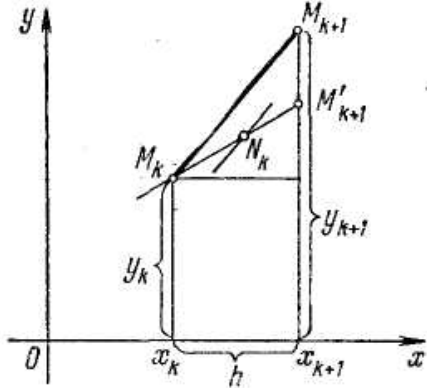


Рис. 10.29.

Це можна підтвердити й обчисленням. По формулі Тейлора

$$\alpha_k = f(x_k, y_k) + f'(x_k, y_k) \frac{h}{2} + f''(x_k, y_k) \frac{f_k h}{2} + O(h^2)$$

(під $O(h^2)$ розуміється величина, яка обмежена в порівнянні з h^2). Подібно п. 24 знаходимо

$$y'_k = f(x_k, y_k) = f_k; \quad y''_k = f'_x(x_k, y_k) + f'_y(x_k, y_k) y'_k; \quad y_{k+1} = y_k + \alpha_k h = y_k + f(x_k, y_k) h + f'_x(x_k, y_k) \frac{h^2}{2} + f'_y(x_k, y_k) f_k \frac{h^2}{2} + O(h^3) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + O(h^3). \quad (10.192)$$

Але точне значення розв'язання за умови $y(x_k) = y_k$ дорівнює

$$y(x_k + h) = y_k + y'_k h + \frac{y''_k}{2} h^2 + O(h^3). \quad (10.193)$$

Порівнюючи формули (10.192) і (10.193), бачимо, що значення $y(x_k + h)$ і y_{k+1} можуть розрізнитися тільки у величинах порядку не менш h^3 . Звідси, як наприкінці п. 31, легко заключити, що сумарна похибка методу має порядок $1/n^2$ або, що те ж саме, порядок h^2 . Виходить, якщо число точок ділення збільшити в 10 разів, то точність підвищиться в 100 разів. Ще більш точний результат вийде, якщо обчислювати за схемою:

$$f_k = f(x_k, y_k), \quad \alpha_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{f_k h}{2}\right), \quad \beta_k = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{\alpha_k h}{2}\right), \\ \gamma_k = f(x_k + h, y_k + \beta_k h), \quad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(f_k + 2\alpha_k + 2\beta_k + \gamma_k)h.$$

Обчислення, які подібні (10.192), показують, що похибка на кожному кроці тут має порядок h^5 , а тому сумарна похибка — порядок h^4 . Виходить, якщо число точок ділення збільшиться в 10 разів, то точність підвищиться в 10 000 разів.

33. Метод Адамса. Цей метод заснований на другій інтерполяційній формулі Ньютона, який ми застосуємо для похідної $y'(x)$ від розв'язання, починаючи від деякого значення $x_k = x_0 + kh$:

$$y'(x) = y' + \Delta y_{k-1} \frac{x - x_k}{h} + \frac{\Delta^2 y'_{k-2}}{2!} \frac{x - x_k}{h} \left(\frac{x - x_k}{h} + 1\right) + \frac{\Delta^3 y'_{k-3}}{3!} \frac{x - x_k}{h} \left(\frac{x - x_k}{h} + 1\right) \left(\frac{x - x_k}{h} + 2\right) \quad (10.194)$$

При цьому в зазначеній формулі ми замість $t = x_{k+1} - x$ підставили $x_k - x = -(x - x_k)$ і відповідно замість y_{k+1} — значення y'_k ; крім того, ми замінили знак наближеної рівності знаком точної рівності, хоча, зазвичай, формула (10.194) наближена і її похибка має порядок $\Delta^4 y'$, тобто h^4 . Інтегрування формули (10.194) від x_k до $x_{k+1} = x_k + h$ дає після підстановки $\frac{x - x_k}{h} = s$

$$y_{k+1} = y_k + \left(y'_k + \frac{1}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{k-3} \right) h. \quad (10.195)$$

Похибка формули (10.195) виходить у результаті інтегрування похибки формули (10.194), тобто має порядок h^5 .

Застосовується формула (10.195) у такий спосіб. Спочатку яким-небудь способом, наприклад за допомогою формули Тейлора, п. 24, або за допомогою методу Рунге—Кутта, п. 32, знаходимо значення

$$y_1 = y(x_0 + h), \quad y_2 = y(x_0 + 2h) \quad \text{і} \quad y_3 = y(x_0 + 3h),$$

Потім обчислюємо відповідні значення

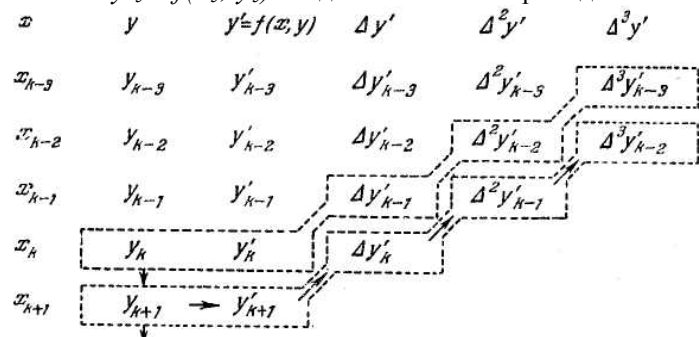
$$y'_0 = f(x_0, y_0), \quad y'_1 = f(x_1, y_1), \quad y'_2 = f(x_2, y_2), \quad y'_3 = f(x_3, y_3),$$

за допомогою яких знаходимо

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0, \quad \Delta y'_1, \quad \Delta y'_2, \quad \Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0, \quad \Delta^2 y'_1, \quad \Delta^3 y'_0 = \Delta^2 y'_1 - \Delta^2 y'_0.$$

Далі, покладаючи у формулі (10.195) $k=3$, обчислюємо y_4 , а з його допомогою $y'_4 = f(x_4, y_4)$, $\Delta y'_3 = y'_4 - y'_3$, $\Delta^2 y'_2$, $\Delta^3 y'_1$.

Покладаючи у формулі (10.195) $k=4$, обчислюємо y_5 , далі з його допомогою $y'_5 = f(x_5, y_5)$ і т.д. Обчислення проходять за схемою



34. Метод Милна. За допомогою першої інтерполяційної формули Ньютона можна одержати ще один метод, що є одним з найбільш ефективних. Ми приведемо лише остаточний результат. Обчислення в методі Милна проходять по формулах

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_{k+1} &= y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2y'_{k-2} - y'_{k-1} + 2y'_k) \\ &\quad (де \ y'_i = f(x_i, y_i)), \\ \bar{y}'_{k+1} &= f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}), \\ \bar{y}_{k+1} &= y_{k-1} + \frac{h}{3}(y'_{k-1} + 4y'_k + y'_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad (k = 3, 4, 5, \dots) \quad (10.196)$$

При цьому, як і в методі Адамса, значення y, y_1, y_2, y_3 повинні бути знайдені яким-небудь іншим способом. Після цього, покладаючи у формулах (10.196) $k=3$, знаходимо послідовно y'_4, \bar{y}'_4, y_4 . Потім, покладаючи $k=4$, знаходимо y'_5, \bar{y}'_5, y_5 і т.д. Знайдені значення y_4, y_5, y_6, \dots і є наближеними значеннями розв'язання $y(x)$ при $x=x_4, x_5, x_6, \dots$, де $x_i = x_0 + ih$.

Виявляється, що абсолютна похибка, яка виходить при обчисленні y_{k+1} по даному методу, приблизно дорівнює

$$\frac{|y_{k+1} - \bar{y}_{k+1}|}{29}$$

Тому при обчисленнях можна попутно перевіряти, чи не виходить ця похибка за рамки прийнятого степеня точності обчислень. Якщо це де-небудь відбудеться, то, починаючи з відповідного значення x , треба зменшити крок, маючи на увазі, що сумарна похибка даного методу має порядок h^4 .

Модуль 11 Кратні інтеграли

Мікромодуль 27 Основи кратних інтегралів

11.1. Означення й основні властивості кратних інтегралів

1. Приклади, що приводять до поняття кратного інтеграла. Розглянемо тіло (Ω) , щільність ρ якого відома, але ця щільність змінна, тобто в різних точках різна, і припустимо, що нам потрібно підрахувати масу m цього тіла. Аналогічна задача для лінійного розподілу маси була розв'язана в мікромодулі 22 пп. 1—2, які ми радимо зараз переглянути. Випадок в просторі досліджується зовсім аналогічно лінійному. Для цього розіб'ємо подумки (Ω) на шматочки—об'ємчики $(\Delta\Omega)_1, (\Delta\Omega)_2, \dots, (\Delta\Omega)_n$ і виберемо в кожному по точці відповідно M_1, M_2, \dots, M_n (див. рис. 11.1, де картину треба уявляти собі в просторі; нумерація шматочків проводиться в довільному порядку).

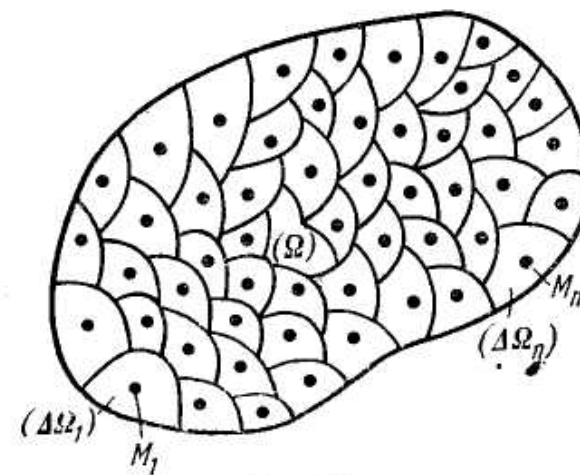


Рис. 11.1.

Якщо шматочки досить малі, то в кожному з них щільність можна без великої помилки вважати сталою. Тоді масу першого шматочка $m_{(\Delta\Omega_1)}$ можна підрахувати як добуток щільності на об'єм, тобто $\rho(M_1)\Delta\Omega_1$, маса другого шматочка знаходиться аналогічно і т.д. У цілому одержуємо

$$m_{(\Omega)} \approx \rho(M_1)\Delta\Omega_1 + \rho(M_2)\Delta\Omega_2 + \dots + \rho(M_n)\Delta\Omega_n = \sum_{k=1}^n \rho(M_k)\Delta\Omega_k,$$

де під $\Delta\Omega_k$ розуміється об'єм шматочка $(\Delta\Omega_k)$.

Ця рівність приблизна, так як щільність шматочків усе-таки нестала; однак вона тим точніше, чим дрібніша розбивка, і в границі одержуємо точну рівність

$$m_{(\Omega)} = \lim \sum_{k=1}^n \rho(M_k)\Delta\Omega_k. \quad (11.1)$$

Тут границя береться в процесі безмежного подрібнення розглянутої розбивки, коли лінійні розміри всіх шматочків (не просто їхні об'єми) прагнуть до нуля.

Розмірковуючи аналогічним чином, можна зробити висновок, що якщо в тілі (Ω) розподілено заряд із щільністю σ , то сам заряд q можна підрахувати по формулі

$$q = \lim \sum_{k=1}^n \sigma(M_k)\Delta\Omega_k \quad (11.2)$$

при такому ж змісті позначень.

Маса або заряд можуть бути розподілені не по об'єму, а по поверхні або по лінії. Звичайно, реальний розподіл по поверхні означає, що один з вимірів частини простору, зайнятий масою або зарядом, значно менше двох інших; аналогічно розшифровується розподіл по лінії. У цьому випадку формули (11.1) і (11.2) залишаються в силі, якщо під щільністю розуміти поверхневу (тобто віднесену до одиниці площі) або лінійну (тобто віднесену до одиниці довжини) щільність, а під $\Delta\Omega_k$ розуміти відповідно площу або довжину шматочка $(\Delta\Omega_k)$. У загальному випадку говорять, що $\Delta\Omega_k$ є *міра області* $(\Delta\Omega_k)$, розуміючи під цим об'єм, площу або довжину в залежності від того, розглядаються об'ємні, поверхневі або лінійні області.

2. Означення кратних інтегралів. Однаковість формул (11.1) і (11.2) дає підставу для загального означення поняття кратного

інтеграла. Розглянемо для визначеності об'ємні інтеграли, тобто під областями будемо розуміти об'ємні частини простору, а як міру такої області будемо брати її об'єм.

Нехай у просторі задана *кінцева* область (Ω) і на ній, тобто в кожній її точці M , задана функції $u=f(M)$, яка приймає *кінцеві* значення. Тоді для складання інтегральної суми область (Ω) розбивається на шматочки $(\Delta\Omega_1), (\Delta\Omega_2), \dots, (\Delta\Omega_n)$ і в кожному довільно вибирається точка, відповідно M_1, M_2, \dots, M_n . Потім складається сума

$$\sum_{k=1}^n u_k \Delta\Omega_k = \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad (11.3)$$

де під $\Delta\Omega_k$ розуміється об'єм шматочка $(\Delta\Omega_k)$.

Границя цієї інтегральної суми в процесі, коли розбивка області (Ω) нескінченно подрібнюється, називається інтегралом (об'ємним) від функції f по області (Ω) :

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_{(\Omega)} f(M) \, d\Omega = \lim \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k. \quad (11.4)$$

Таким чином, формули (11.1) і (11.2) можна записати

$$m = \int_{(\Omega)} \rho \, d\Omega, \quad q = \int_{(\Omega)} \sigma \, d\Omega.$$

Інтегрувати можна як безперервні, так і розривні функції. При цьому існування границі (11.4) для кінцевої функції, яка задана на кінцевій області, може бути доведено математично, без посилання на фізичний зміст інтеграла. Істотна навіть не кінцівка області, а кінцівка її міри, так як неважко уявити собі область кінцевої міри, яка простирається в нескінченність, рис. 9.11)

Зовсім аналогічно дається визначення інтеграла по поверхні, плоскій або кривій, а також інтеграла по лінії; звичайно, при цьому замість об'єму шматочка треба взяти його площу або довжину. Зокрема, інтеграл по лінії — це той самий криволінійний інтеграл по довжині дуги.

Об'ємні і поверхневі інтеграли називаються *кратними* з причин, які будуть ясні з 11.10, причому поверхневі інтеграли називаються *подвійними*, а об'ємні — *потрійними*.

3. Основні властивості інтегралів. Оскільки основні властивості визначеного інтеграла можна вивести з визначення інтеграла як границі інтегральної суми, то ці властивості

поширюються і на кратні інтеграли. Перелічимо ці основні властивості.

1. Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_{(\Omega)} (u_1 \pm u_2) d\Omega = \int_{(\Omega)} u_1 d\Omega \pm \int_{(\Omega)} u_2 d\Omega.$$

2. Сталий множник можна винести за знак інтеграла:

$$\int_{(\Omega)} C u d\Omega = C \int_{(\Omega)} u d\Omega \quad (C = \text{const}).$$

3. Теорема про розбивку області інтегрування: при будь-якій розбивці області (Ω) на частини, скажемо, (Ω_1) і (Ω_2) , буде

$$\int_{(\Omega)} u d\Omega = \int_{(\Omega_1)} u d\Omega + \int_{(\Omega_2)} u d\Omega.$$

4. Інтеграл від одиниці дорівнює мірі області інтегрування:

$$\int_{(\Omega)} d\Omega = \Omega.$$

5. Якщо область інтегрування вироджується, так що її міра стає рівною нулеві, то й інтеграл стає рівним нулеві.

У властивостях 4 і 5 ми говоримо про міру області (п. 1), розуміючи під мірою об'єм, площу або довжину в залежності від того, розглядаються об'ємні, поверхневі або лінійні інтеграли.

6. Якщо розглянуті змінні розмірні, то

$$\left[\int_{(\Omega)} u d\Omega \right] = [u] \cdot [\Omega].$$

7. Випадок симетрії. Якщо область інтегрування можна розбити на дві рівні частини і якщо підінтегральна функція в однаково розташованих точках цих частин приймає рівні значення, то інтеграл по всій області дорівнює подвоєному інтегралові по кожній з цих частин; якщо ж при переході з однієї частини в іншу підінтегральна функція множиться на -1 , то інтеграл по всій області дорівнює нулеві.

Іноді буває можливо зробити аналогічну розбивку області інтегрування на більше число рівних частин, щоб звести заданий інтеграл до інтеграла по області більш простого вигляду, чим вихідна.

8. Нерівності можна інтегрувати: якщо $u_1 \leq u_2$, то

$$\int_{(\Omega)} u_1 d\Omega \leq \int_{(\Omega)} u_2 d\Omega. \quad (11.5)$$

При цьому остання нерівність може обернутися в рівність, тільки якщо $u_1 \equiv u_2$. Утім, якщо ця тотожність порушена в точках виродженої області, яка має нульову міру, то інтеграли (11.5) усе одно співпадають, так як таке порушення не впливає на значення інтеграла (порівняйте властивість 5)

9. Сама груба оцінка інтеграла:

$$u_{\min} \Omega \leq \int_{(\Omega)} u d\Omega \leq u_{\max} \Omega. \quad (11.6)$$

10. У зв'язку з оцінкою (11.6) знаходиться поняття *середнього* («середнього інтегрального», «середнього арифметичного») значення функції і по області (Ω) , що вводиться подібно формулі

$$\int_{(\Omega)} \bar{u} d\Omega = \int_{(\Omega)} u d\Omega \quad (\bar{u} = \text{const}),$$

тобто

$$\bar{u} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} u d\Omega, \quad \int_{(\Omega)} u d\Omega = \bar{u} \Omega.$$

З формули (11.6) випливає, що

$$u_{\min} \leq \bar{u} \leq u_{\max}.$$

Усі ці властивості легко ілюструвати, якщо під u розуміти щільність розподіленої маси, а під інтегралом — саму масу.

11. Має місце нерівність

$$\left| \int_{(\Omega)} u d\Omega \right| \leq \int_{(\Omega)} |u| d\Omega.$$

4. Основні методи застосування кратних інтегралів. Є дві основні схеми застосування кратних інтегралів. Перша заснована на наближеному представленні розглянутої величини у вигляді інтегральної суми (11.3) з наступним переходом до границі, як ми це зробили в п. 1. Друга схема заснована на складанні «елемента» (диференціала) розглянутої величини. Зупинимося коротко на другій схемі, відклавши її більш докладне обґрунтування до 11.9.

Нехай нас цікавить значення деякої величини q , яка відповідає (для визначеності, об'ємній) області (Ω) , подібно тому як у п. 1

області (Ω) відповідало значення маси або заряду. Тоді ми складаємо вираз $dq = \varphi(M)d\Omega$, який відповідає нескінченно малому об'ємові $d\Omega$, розташованому в довільній точці M , який 1) прямо пропорційний об'ємові $d\Omega$ і 2) відрізняється від дійсного значення Δq на величину вищого порядку малості. Далі, підсумовуючи значення dq по всіх «елементах об'єму» $d\Omega$ у границях області (Ω) одержуємо

$$q = q_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \varphi(M) d\Omega \quad (11.7)$$

Розглянемо, наприклад, вираз для *статичного моменту* матеріального тіла щодо деякої площини (P) .

З механіки відомо, що для кінцевої системи матеріальних точок статичний момент підраховується по формулі

$$S_{(P)} = \sum_k m_k z_k \quad ,$$

де m_k — маса k -ї точки, а z_k — її координата, яка відлічується по осі, перпендикулярній до площини (P) (рис. 11.2).

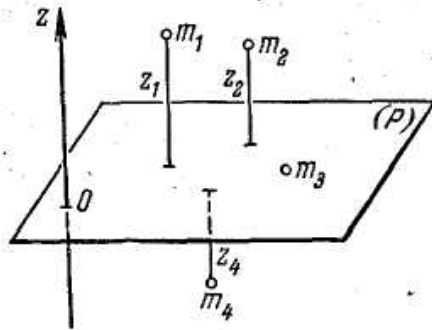


Рис. 11.2.

Якщо маса розподілена по об'єму (Ω) , то, розбивши його на шматочки

$$(\Delta\Omega)_1, (\Delta\Omega)_2, \dots, (\Delta\Omega)_n \quad ,$$

можна приблизно прийняти, що маса кожного зосереджена в одній з його точок. Звідси одержуємо наближений вираз

$$S_{(P)} \approx \sum_{k=1}^n \rho_k z_k \Delta\Omega_k \quad \left(\text{збільшою подробицею} \sum_{k=1}^n \rho(M_k) z(M_k) \Delta\Omega_k \right) \quad ;$$

переходячи до границі, одержимо

$$S_{(P)} = \int_{(\Omega)} \rho z d\Omega \quad (11.8)$$

По другому методу треба було б написати вираз елементарного статичного моменту

$$dS_{(P)} = \rho z d\Omega \quad ,$$

звідки, підсумовуючи, ми одержали б ту ж формулу (11.8).

Знаючи статичний момент, легко знайти координату z центра ваги розглянутого тіла:

$$z_{ц.в.} = \frac{S_{(P)}}{m} = \frac{\int_{(\Omega)} \rho z d\Omega}{\int_{(\Omega)} \rho d\Omega} \quad .$$

Вираз спрощується, якщо тіло однорідне, тобто $\rho = \text{const}$; тоді центр ваги називається *геометричним*:

$$z_{ц.в.} = \frac{\rho \int_{(\Omega)} z d\Omega}{\rho \int_{(\Omega)} d\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{(\Omega)} z d\Omega \quad (11.9)$$

Аналогічно знаходяться інші координати центра ваги тіла (Ω) , а також статичні моменти і координати центра ваги плоских фігур відносно прямих ліній.

5. Геометричний зміст інтеграла, узятого по плоскій фігурі. Такий інтеграл, на відміну від інших інтегралів має безпосередній геометричний зміст, подібний до змісту простого визначеного інтеграла. Нехай дано інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u d\Omega \quad , \quad (11.10)$$

де (Ω) — область у деякій площині (P) (рис. 11.3).

Виберемо вісь u перпендикулярно до площини (P) і відкладемо в кожній точці M області (Ω) значення $u(M)$ подібно тому, як будується графік функції двох змінних, причому для простоти

будемо вважати спочатку, що $u > 0$. Тоді в просторі вийде поверхня (S) (графік підінтегральної функції), що разом з областю інтегрування (Ω) і циліндричною поверхнею, проведеною через контур області (Ω) паралельно осі u , обмежує деяке *циліндричне тіло*

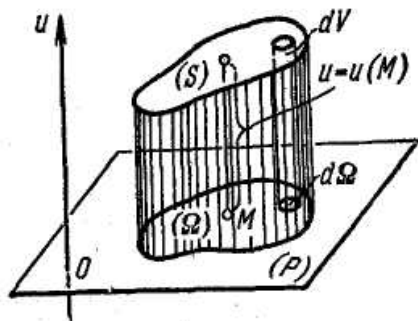


Рис. 11.3.

Геометричний зміст інтеграла (11.10) полягає в тому, що він дорівнює об'ємові зазначеного циліндричного тіла. Дійсно, елементові $d\Omega$ області (Ω) відповідає об'єм, який з точністю до малих вищого порядку можна вважати циліндром (рис. 11.3), тобто

$$dV = u d\Omega$$

Підсумовуючи ці елементарні об'єми, тобто роблячи інтегрування, одержимо, що

$$V = \int_{(\Omega)} u d\Omega = I$$

що і стверджувалося.

Якщо u може приймати і від'ємні значення, то, об'єми, що лежать нижче площини (P) , ввійдуть у підсумок зі знаком мінус.

Аналогічно формулі (9.138), від об'ємів циліндричних тіл можна перейти до об'єму тіла довільної форми

$$V = \int_{(\Omega)} h d\Omega$$

де (Ω) — проекція тіла, яке ми розглядаємо, на деяку площину (P) , а

$h = h(M)$ — висота січення цього тіла прямою, яка перпендикулярна до (P) і проходить через поточну точку M області (Ω) .

11.2. Два типи фізичних величин

6. Основний приклад. Маса і щільність. Розглянемо матеріальне тіло, узагалі говорячи, змінної щільності. Причому поки не будемо брати до уваги молекулярну будівлю, а будемо вважати масу безперервно розподіленою в просторі. Таке тіло має в кожній своїй точці M визначену щільність ρ , що є, таким чином, функцією, точки $\rho = \rho(M)$. На відміну від цього *маса не є функцією точки*, тому що маса кожної окремо узятій точки дорівнює нулеві. Маса є величиною, *розподіленою по простору*; іншими словами, кожній подумки виділеній області (Ω) відповідає значення маси $m_{(\Omega)}$, при цьому під (Ω) розуміється сама область, тобто частина простору, а не просто її об'єм.

Зв'язок між масою і щільністю наступна. Нехай для кожної області (Ω) відомо відповідне значення маси $m_{(\Omega)}$. Тоді відношення $m_{(\Omega)}/\Omega$ називається *середньою щільністю в (Ω)* ; тут під Ω , як і в п. 1, розуміється об'єм області (Ω) , тобто відповідна розмірна величина (можна слово «об'єм» вживати і для (Ω) і для Ω , якщо твердо пам'ятати, про що мова йде).

Щоб одержати *щільність у деякій точці M* , треба перейти до границі, змусивши (Ω) стягуватися до точки M :

$$\rho(M) = \lim_{(\Omega) \rightarrow M} \rho_{cp} = \lim_{(\Omega) \rightarrow M} \frac{m_{(\Omega)}}{\Omega}; \quad (11.11)$$

цей процес аналогічний обчисленню похідної. Тут під $\Omega \rightarrow M$ розуміється процес безмежного стягування (Ω) до точки M ; звичайно, при цьому $\Omega \rightarrow 0$, але вимога $(\Omega) \rightarrow M$ більш сильна, чим вимога $\Omega \rightarrow 0$. Отже, щільність у точці - це маса в нескінченно малому об'єму, віднесена до одиниці цього об'єму.

Якщо, зворотно, у кожній точці M відомо відповідне значення щільності $\rho(M)$, то масу $m_{(\Omega)}$, яка відповідає будь-якій частині (Ω) простору, можна на основі пп. 1—2 знайти як інтеграл

$$m_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \rho d\Omega$$

Якщо враховувати дискретну, молекулярну будівлю речовини, то у формулі (11.11) об'єм (Ω) не можна навіть подумки «безмежно» стягати в точку. Замість формули (11.11) треба написати

$$\rho(M) = \frac{m_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega},$$

де ($\Delta\Omega$) — практично нескінченно малий об'єм, який містить точку M . Таким чином, щільність реального тіла в точці - це середня щільність по об'єму, досить малому в порівнянні з розмірами цього тіла й у той же час досить великому в порівнянні з молекулярними розмірами. Тут ми як би переходимо від дискретної картини матеріального тіла до його безперервної моделі, щільність якої виходить у результаті *осереднення*, тобто обчислення середньої щільності вихідної картини по об'ємах зазначених розмірів.

Надалі при розгляді суцільного середовища ми будемо розглядати саме цю безперервну модель, відволікаючись від дискретної будівлі матерії.

7. Величини, які розподілені по простору. Є ряд фізичних величин, багато в чому аналогічних розібраному прикладові маси: заряд у діелектрику, кількість тепла, енергія електромагнітного поля і т.п. Їх поєднує те, що ці величини *розподілені по простору*. У загальному випадку ми будемо говорити, що *деяка величина q розподілена по простору, якщо кожній подумки виділеній частини (Ω) простору відповідає значення $q_{(\Omega)}$ цієї величини*. При цьому потрібно лише виконання *закону додавання (закону адитивності)*: при будь-якій розбивці (Ω) на шматки, скажемо, (Ω_1) і (Ω_2) повинно бути $q_{(\Omega)} = q_{(\Omega_1)} + q_{(\Omega_2)}$, тобто *ціле повинно дорівнювати сумі частин*.

Величина, яка розподілена по простору, має в кожній точці визначену щільність: щільність заряду, щільність енергії поля і т.д. У загальному випадку ця *щільність φ* виводиться аналогічно формулі (11.11):

$$\varphi(M) = \lim_{(\Omega) \rightarrow M} \frac{q_{(\Omega)}}{\Omega}; \quad (11.12)$$

відношення, що стоїть за знаком границі, є *середньою щільністю* величини q в об'єму (Ω). Щільність $\varphi = \varphi(M)$ є уже *функцією точки*. Щільність величини q дорівнює значенню q , яке відповідає

нескінченно малій області, «яка розташована в точці M », і віднесеному до одиниці об'єму. Зворотно, якщо відома щільність $\varphi(M)$ величини q , то сама величина q знаходиться по методах пп. 1—2:

$$q_{(\Omega)} = \lim \sum \varphi(M_k) \Delta\Omega_k = \int_{(\Omega)} \varphi(M) d\Omega, \quad (11.13)$$

де границя береться в процесі безмежного здрібнювання розбивки області Ω . У загальному випадку q і φ можуть приймати значення будь-якого знака.

Перепишемо формулу (11.12), написавши ($\Delta\Omega$) замість Ω , щоб підкреслити малість цього об'єму:

$$\frac{q_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega} \rightarrow \varphi(M), \quad \frac{q_{(\Delta\Omega)}}{\Delta\Omega} = \varphi(M) + \alpha,$$

де α нескінченно мале при $\Delta\Omega \rightarrow M$.

Звідси одержуємо

$$q_{(\Delta\Omega)} = \varphi(M) \Delta\Omega + \alpha \Delta\Omega.$$

Таким чином, значення q , що відповідає малому об'ємові ($\Delta\Omega$), розбито на дві частини: одна прямо пропорційна об'ємові $\Delta\Omega$, а інша має вищий порядок малості. Тому перший доданок називається *диференціалом* або *елементом* величини q :

$$dq = \varphi(M) \Delta\Omega. \quad (11.14)$$

Звідси видно фізичний зміст dq : це - значення q , яке відповідало би об'ємові ($\Delta\Omega$), якби в ньому щільність була сталою, рівною щільності в точці M . Насправді dq , тобто $q_{(\Delta\Omega)}$, не дорівнює dq , а відрізняється від нього на нескінченно малу вищого порядку, тобто Δq і dq — еквівалентні нескінченно малі. Якщо такими малими вищого порядку можна зневажити, то говорять просто, що dq — це значення q , яке відповідає нескінченно малому об'ємові ($\Delta\Omega$), або, просто, нескінченно мала маса, нескінченно малий заряд і т.п.

Якщо в якості q розглянути саму величину об'єму, тобто $q_{(\Omega)} = \Omega$, то відповідна щільність («об'єм, віднесений до одиниці об'єму») дорівнює одиниці, а тому по формулі (11.14)

$$d\Omega = \Delta\Omega.$$

Тому формулу (11.14) можна записати у вигляді

$$dq = \varphi(M)d\Omega. \quad (11.15)$$

що більш переважно.

Отже, основні формули, які зв'язують величину $q=q_{(\Omega)}$, яка розподілена в просторі, і відповідну функцію точки $\varphi=\varphi(M)$, такі:

$$\varphi(M) = \frac{dq}{d\Omega} \Big|_M, \quad q_{(\Omega)} = \int_{(\Omega)} \varphi(M) d\Omega.$$

По цих формулах завжди можна переходити від однієї функції до іншої.

За допомогою диференціювання ми знаходимо щільність, за допомогою інтегрування знаходимо розподілену величину по її щільності.

Відзначимо, що для того щоб деяку величину можна було вважати розподіленою по простору, або по поверхні, або по лінії, не потрібно, щоб ця величина була «розмазана» на зразок маси або заряду. Наприклад, статичний момент або момент інерції матеріального тіла задовольняють визначенню, приведеному на початку п. 7, і тому можуть вважатися величинами, розподіленими по об'єму, хоча вони не є безпосередньо «розмазаними», а залежать від вибору площини або осі відліку. Тому на практиці, зазвичай, взагалі не розмірковують на цю тему, а складають вираз для dq , керуючись міркуваннями, приведеними в п. 4, а потім, спираючись на закон додавання, проводять підсумовування (інтегрування) елементів і одержують вираз (11.7).

Величина може бути розподілена не по об'єму, а по поверхні (плоскій або кривій) або по лінії. У цьому випадку всі результати цього пункту залишаються в силі, якщо під (Ω) розуміти не об'ємну частину простору, а частину поверхні (тобто область на поверхні) або частину лінії, а під Ω розуміти відповідно площу або довжину цієї частини тобто її міру (п. 1).

11.3. Обчислення кратних інтегралів у декартових координатах.

8. Інтеграл по прямокутнику. Нехай розглядається інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u d\Omega, \quad (11.16)$$

де (Ω) —«координатний» прямокутник, який у декартовій системі координат описується нерівностями $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ (рис. 11.4). При

складанні інтегральної суми S для інтеграла (11.16) у декартовій системі координат найбільше природно розбити (Ω) прямими, паралельними осям координат, після чого застосувати подвійну нумерацію, так що u_{ik} буде значенням функції $u=u(x,y)$ у деякій точці прямокутника, яке стоїть в i -му стовпці і k -му рядкові. (Звертаємо увагу на те, що ця нумерація не збігається з тією, котра була застосована в теорії матриць)

Тоді можна написати, що

$$I \approx S = \sum_{i,k} u_{ik} \Delta x_i \Delta y_k, \quad (11.17)$$

де сума поширена по всім прямокутничкам, тобто за всіма значеннями i і k , наприклад $i=1, 2, \dots, m$, а $k=1, 2, \dots, n$.

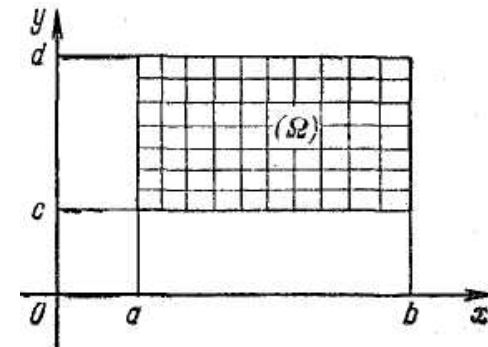


Рис. 11.4.

Сума вигляду (11.17) із двома індексами підсумовування називається *подвійною сумою*. Для її обчислення можна спочатку зробити підсумовування по k при зафіксованому i , тобто скласти доданки, що відповідають одному (будь - якому) стовпцеві, а потім результати підсумувати по i . Тоді вийде

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n (u_{ik} \Delta x_i \Delta y_k) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n u_{ik} \Delta y_k \right) \Delta x_i; \quad (11.18)$$

тут ми з *внутрішньої суми* винесли загальний множник Δx_i за дужки. Звичайно, такий *перехід від подвійної суми до повторної, дворазової*, тобто від (11.17) до (11.18), можна було здійснити і іншим способом: перше, внутрішнє підсумовування зробити по i , а друге, зовнішнє, — по k .

Якщо розглянута розбивка достатньо дрібна, то остання дужка в (11.18) близька до інтеграла

$$\sum_{k=1}^n u_{ik} \Delta y_k \approx \left(\int_c^d u \, dy \right), \quad (11.19)$$

де значок i вказує на те, що значення x береться для i -го стовпця.

Звідси

$$S \approx \sum_{i=1}^m \left(\int_c^d u \, dy \right) \Delta x_i.$$

Але ця сума — також інтегральна сума, тобто вона близька до інтеграла

$$S \approx \int_a^b \left(\int_c^d u(x, y) \, dy \right) dx. \quad (11.20)$$

Зі здрібнюванням розбивки рівності (11.17) і (11.20) стають усе точнішими і точнішими й у границі переходять у точні, так що

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_a^b \left(\int_c^d u(x, y) \, dy \right) dx. \quad (11.21)$$

Отже, для обчислення інтеграла по координатному прямокутнику треба спочатку зробити інтегрування по y при фіксованому x у границях прямокутника («внутрішнє інтегрування»), а потім результат, який залежить тільки від x , проінтегрувати по x у границях його зміни («зовнішнє інтегрування»).

При другому способі переходу від подвійної суми (11.17) до повторної (див. вище) після переходу до границі ми одержали б

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_c^d \left(\int_a^b u(x, y) \, dx \right) dy. \quad (11.22)$$

Отже, у декартових координатах, так само як і в будь-яких інших (див. 11.4), від подвійного інтеграла можна двома способами перейти до повторного, двократного. Про це варто пам'ятати, тому що іноді один спосіб виявляється більш важким для практичного обчислення, а інший - більш легкий. Перехід від одного способу до іншого називається *перестановкою порядку інтегрування*.

Формула (11.21) має простий геометричний зміст, який показано на рис. 11.5.

Так як інтеграл (11.16) у силу п. 5 дорівнює об'ємові тіла, яке зображено на цьому рисунку, а об'єм можна підрахувати, інтегруючи площу поперечного переріза, заштрихованого на малюнку, то ми одержуємо

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = V = \int_a^b S(x) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^d u \, dy \right) dx.$$

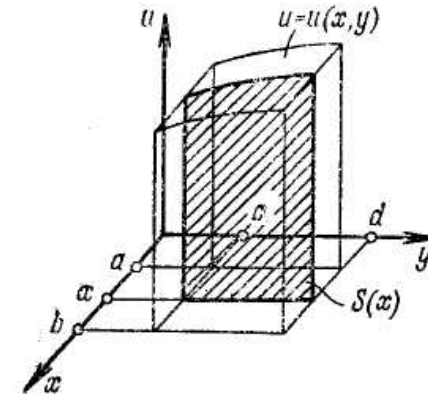


Рис. 11.5.

Аналогічний зміст має формула (11.22). Ми привели більш складний висновок цих формул, так як він автоматично поширюється на інтеграли будь-якої кратності.

Завдяки формулам (11.21) і (11.22) іноді вихідний інтеграл (11.16) позначають так:

$$I = \iint_{(\Omega)} u \, d\Omega, \quad I = \iint_{(\Omega)} u \, dx dy,$$

маючи на увазі, що при нескінченно густій розбивці по способу, який зазначено на рис. 11.4, буде $d\Omega = dx dy$.

Особливо просто обчислити повторний інтеграл вигляду (11.21) з сталими границями інтегрування, якщо підінтегральна функція являє собою добуток множників, кожний з яких залежить тільки від одної змінної інтегрування: а саме, якщо $u(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, то

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d f_1(x) f_2(y) dy \right) dx = \int_a^b f_1(x) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right) dx = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

Ми одержуємо добуток однократних інтегралів.

9. Інтеграл по довільній плоскій фігурі. Нехай (Ω) в інтегралі (11.16) - довільна фігура в площині x, y , наприклад, яка зображена на рис. 11.6. Тоді висновок п. 8 переноситься з невеликою зміною: а саме, замість інтеграла (11.19) вийде інтеграл

$$\int_{y_1}^{y_2} u(x, y) dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u(x, y) dy$$

(рис. 11.6); тут $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ — рівняння нижньої і верхньої частин контуру області (Ω) , на які він поділяється точками A і B .

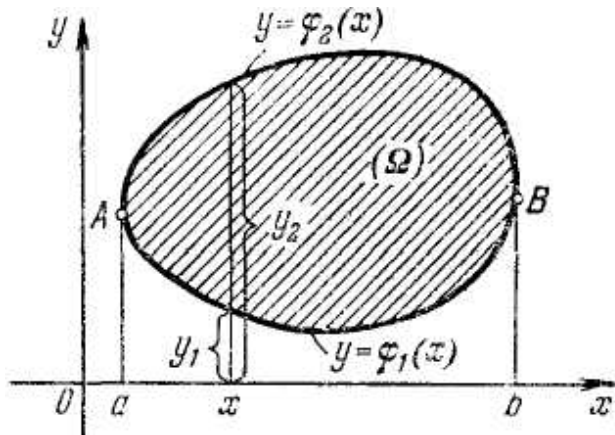


Рис. 11.6.

Відповідно і остаточний результат замість (11.21) запишеться у вигляді

$$I = \int_{(\Omega)} u d\Omega = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u(x, y) dy \right) dx. \quad (11.23)$$

Таким чином, границі інтегрування у внутрішньому інтегралі в загальному випадку змінні: вони залежать від зовнішньої змінної інтегрування (у даному випадку x), причому ця залежність

визначається формою контуру. Границі ж у зовнішнього інтеграла стали: вони визначаються загальним діапазоном зміни x . Правило, яке зазначено після формули (11.21), залишається в силі, як бачимо, і для області (Ω) загального вигляду.

Можна інтегрувати й в іншому порядку, спочатку по x , а потім по y . Тоді замість (11.22) виходить формула вигляду

$$\int_{(\Omega)} u d\Omega = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} u(x, y) dx \right) dy. \quad (11.24)$$

Іноді перед розміщенням границь приходится розбити область інтегрування на частини.

Нехай, наприклад, треба переставити порядок інтегрування в інтегралі

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy,$$

тобто

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{2x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (11.25)$$

Для цього потрібно відновити область інтегрування. У даному випадку вона обмежена лініями $x=0, x=1, y=x^2$ і $y=2x$ (рис.11.7), причому перше, внутрішнє, інтегрування здійснюється по відрізках, паралельних осі y і показаних на рис.11.7 суцільними лініями.

Після перестановки порядку інтегрування внутрішнє інтегрування буде проводитися по відрізках, паралельних осі x і показаних на рис.11.7 пунктиром. Видно, що при $y < 1$ інтегрування походить від прямої до параболи, а при $y > 1$ - від прямої до прямої; критичне значення $y=1$ виходить з перетинання параболи $y=x^2$ із прямою $x=1$. Тому після перестановки порядку інтегрування замість (11.25) одержимо

$$I = \int_0^1 dy \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_1^1 f(x, y) dx.$$

У більш складних випадках приходится розбивати область інтегрування на більше число частин. Наприклад, для області,

яку зображено на рис. 11.8, при розміщенні границь у декартових координатах її довелося б розбити на п'ять частин.

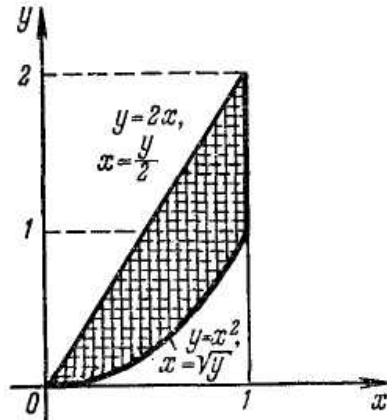


Рис.11.7.

Приведемо простий придатак дворазового інтегрування. На зразок формули (11.9) легко вивести формули для координат геометричного центра ваги плоскої фігури (σ):

$$x_{з.ц.в.} = \frac{\iint_{(\sigma)} x \, dx \, dy}{\sigma}; \quad y_{з.ц.в.} = \frac{\iint_{(\sigma)} y \, dx \, dy}{\sigma}, \quad (11.26)$$

де під σ розуміється площа фігури (σ). Нехай фігура (σ) розташована по одну сторону від осі x (рис. 11.9). Тоді другу формулу (11.26) можна переписати у вигляді

$$\sigma \cdot y_{з.ц.в.} = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} y \, dy = \int_a^b dx \left(\frac{y^2_2}{2} - \frac{y^2_1}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_a^b y^2_2 - \frac{1}{2} \int_a^b y^2_1 dx.$$

Помноживши обидві частини на 2π і згадавши формулу (9.151) для об'єму тіла обертання, прийдемо до *другої теореми Гюльдена*: якщо плоска фігура обертається навколо осі, яка лежить у площині цієї фігури і не перетинає її, то об'єм отриманого тіла обертання дорівнює добуткові площі цієї фігури на шлях, пройдений її геометричним центром ваги.

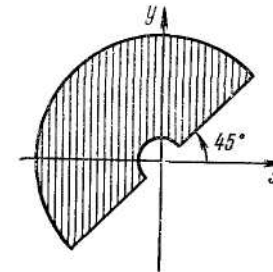


Рис. 11.8.

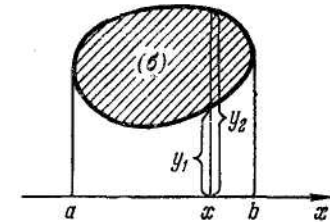


Рис. 11.9

На основі цієї теореми легко знайти, наприклад, геометричний центр ваги півкола (рис. 11.10):

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi R^2}{2} \cdot 2\pi y_{з.ц.в.},$$

тобто

$$y_{з.ц.в.} = \frac{4}{3\pi} R = 0,425R.$$

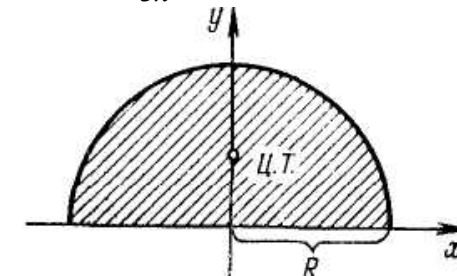


Рис. 11.10.

10. Інтеграл по довільній поверхні. Розглянемо інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega, \quad (11.27)$$

розповсюджений по довільній (узагалі говорячи, кривій) поверхні (Ω) (рис. 11.11). Для його обчислення в декартових координатах треба перейти від фігури (Ω) до її проекції на одну з координатних площин, наприклад до проекції (Ω') на площині x, y .

Так як елемент (нескінченно мала ділянка) кривої поверхні можна з точністю до малих вищого порядку вважати плоским, то

$$d\Omega' = d\Omega \cos \alpha = d\Omega \cos(\mathbf{n}, \hat{z}),$$

де \mathbf{n} -вектор, нормальний до поверхні. Звідси

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_{(\Omega')} u \left(\frac{d\Omega'}{\cos(\mathbf{n}, \hat{z})} \right). \quad (11.28)$$

Останній інтеграл, розповсюджений по плоскій фігурі (Ω') , обчислюється по методах п. 9.

Нехай розглянута поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$. Тоді вектор

$$\mathbf{n} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

спрямований по нормалі до поверхні в будь-якій її точці $x; y; z$.

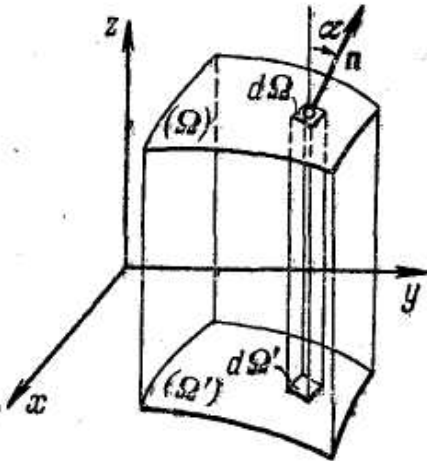


Рис. 11.11.

Виходить, $\cos(\mathbf{n}, \hat{z}) = \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k})}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$.

Так як інтеграл (11.27) задано у формі

$$I = \int_{(\Omega)} u(x, y, z) \, d\Omega,$$

то на основі формули (11.28) одержуємо

$$I = \iint_{(\Omega')} u(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} \, dx \, dy.$$

Зокрема, на основі властивості 4 п. 3 одержуємо формулу для площі Ω довільної поверхні (Ω) :

$$\Omega = \iint_{(\Omega)} d\Omega = \iint_{(\Omega')} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy,$$

де, як і вище, (Ω') — це проекція поверхні (Ω) на площину x, y .

Іноді при проектуванні поверхню (Ω) приходиться розбивати на частини. Аналогічно здійснюється проектування на площині y, z і x, z , якщо це виявиться зручніше.

11. Інтеграл по об'єму. Розглянемо тепер інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega,$$

де (Ω) — деяке тіло, тобто область у просторі. Він перетворюється зовсім аналогічно тому, як у пп. 8 і 9 перетворювалися інтеграли по плоских фігурах. Інтегральну суму, яка виявляється тепер *потрійною*, ми представляємо у вигляді *трикратної*. У найпростішому випадку, коли (Ω) являє собою прямокутний паралелепіпед, який визначено нерівностями $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$, після переходу в інтегральній сумі до границі одержимо

$$I = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f u(x, y, z) \, dz,$$

тобто

$$I = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f u(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Утім, можливо зробити інтегрування в п'ятьох інших порядках, так як послідовність диференціалів dx, du, dz допускає шість перестановок. Якщо область (Ω) інтегрування має більш загальний вигляд, то і границі інтегрування будуть більш складними. Нехай ми хочемо розставити границі в такому порядку:

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int dx \int dy \int u(x, y, z) \, dz, \quad (11.29)$$

причому область інтегрування має вигляд, який зображено на рис.11.12. Оскільки *внутрішнє* інтегрування

$$\int u(x, y, z) \, dz,$$

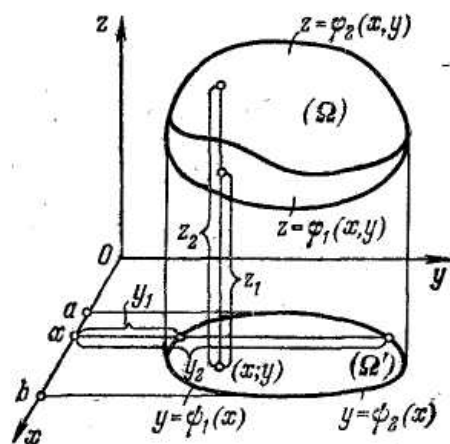


Рис. 11.12.

яке здійснюється першим, виконується по z у границях області (Ω) при зафіксованих x і y , то границями для нього служать z_1 і z_2 (рис. 11.12), тобто $\phi_1(x, y)$ і $\phi_2(x, y)$, де $z = \phi_1(x, y)$ і $z = \phi_2(x, y)$ — рівняння нижньої і верхньої частин поверхні тіла (Ω) .

Після інтегрування по z і підстановки границь результат буде залежати тільки від x, y і ми переходимо від тіла (Ω) до його проекції (Ω') на площину x, y . Тепер треба зробити інтегрування по y (це — *середнє* інтегрування) при зафіксованому x у границях цієї проекції, тобто від $y_1 = \psi_1(x)$ до $y_2 = \psi_2(x)$, як це описано в п. 9. Нарешті, результат цього другого інтегрування, який залежить уже тільки від x , треба проінтегрувати у границях зміни x , тобто від a до b ; це — *зовнішнє*, останнє інтегрування. Отже, інтеграл (11.29) після розміщення границь здобуває вигляд

$$\int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} u(x, y, z) \, dz.$$

Зверніть увагу на те, що в кожного з інтегралів границі можуть залежати тільки від тих змінних, по яких ще не зроблене інтегрування. Зокрема, границі зовнішнього інтеграла взагалі не можуть залежати від змінних інтегрування.

Подібним чином розставляються границі і при інтегруванні в інших порядках. Як і в п. 9, при розміщенні границь для тіла (Ω)

більш складної форми його іноді приходиться розбити на частини, щоб розставити для кожної з них границі за своїм законом.

11.4. Заміна змінних у кратних інтегралах

12. Перехід до полярних координат на площині. Як і для однократних інтегралів, при обчисленні подвійних інтегралів можна вводити різні змінні інтегрування. Ми розберемо тут типовий приклад обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. Нехай розглядається інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega,$$

де (Ω) — область на площині, яку зображено на рис. 11.13.

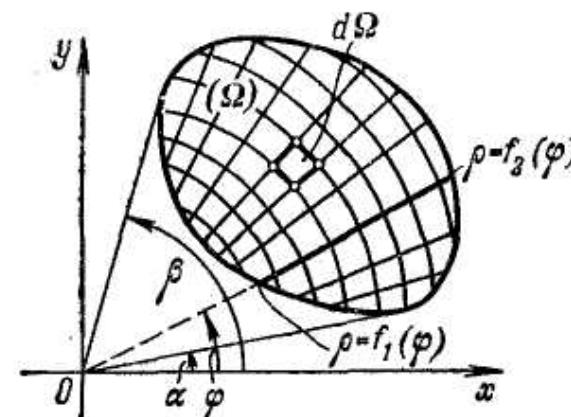


Рис. 11.13.

Якщо потрібно зробити інтегрування за допомогою полярних координат, то розбивку області треба здійснити за допомогою координатних ліній полярної системи, тобто ліній $\rho = \text{const}$ і $\phi = \text{const}$, як на рис. 11.13. Тоді кожен елементарний прямокутник з точністю до малих вищого порядку можна вважати прямокутником зі сторонами $d\rho$ і $\rho d\phi$, тобто

$$d\Omega = \rho \, d\rho \, d\phi.$$

Зробивши підсумовування по всіх площадках, одержимо

$$I = \iint_{(\Omega)} u \rho \, d\rho \, d\phi,$$

причому, зазвичай, підінтегральна функція u повинна бути виражена через ρ і ϕ .

Розставляючи границі подібно п. 9, одержимо

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{f_1(\varphi)}^{f_2(\varphi)} u \rho \, d\rho; \quad (11.30)$$

зміст границь інтегрування показано на рис. 11.13.

Розміщення границь у полярних координатах особливо зручне для областей, обмежених координатними лініями полярної системи, так як тоді границі не тільки зовнішнього, але і внутрішнього інтеграла будуть сталими. Наприклад, для області, яку зображено на рис. 11.8, після розставлення границь інтеграл придбає вигляд

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} u \rho \, d\rho.$$

13. Перехід до циліндричних і сферичних координат у просторі.

Нехай розглядається інтеграл

$$I = \int_{(\Omega)} u \, d\Omega, \quad (11.31)$$

де (Ω) —область у просторі. Якщо потрібно зробити інтегрування за допомогою циліндричних координат, то розбивку області треба здійснити за допомогою координатних поверхонь циліндричної системи, тобто поверхонь $\rho = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ і $z = \text{const}$. Тоді кожен елементарний об'ємчик, який зображено на рис. 11.14, з точністю до малих вищого порядку можна вважати прямокутним паралелепіпедом з об'ємом

$$d\Omega = d\rho \cdot \rho \, d\varphi \cdot dz = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz.$$

Тому інтеграл (11.31) прийме вигляд

$$I = \iiint_{(\Omega)} u \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

де ще треба розставити границі подібно тому, як у п. 11 ми розставили границі в декартових координатах.

Якщо застосовуються сферичні координати, то елементарний об'ємчик, який зображено на рис. 11.15, і тут з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за прямокутний паралелепіпед з об'ємом

$$d\Omega = dr \cdot r \, dv \cdot r \sin v \, d\varphi = r^2 \sin v \, dr \, dv \, d\varphi.$$

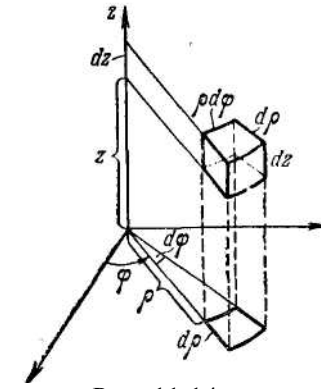


Рис. 11.14.

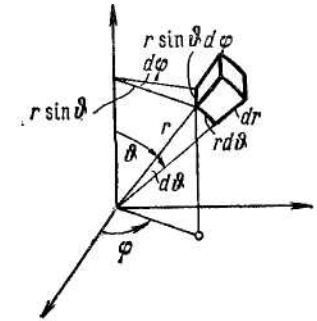


Рис. 11.15.

Тому інтеграл (11.31) прийме вигляд

$$I = \iiint_{(\Omega)} u r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (11.32)$$

Для цих систем координат, як і для будь-яких інших, найбільше просто розставляти границі, якщо область (Ω) обмежена координатними поверхнями, так як в цьому випадку границі внутрішнього і середнього інтегралів будуть сталими.

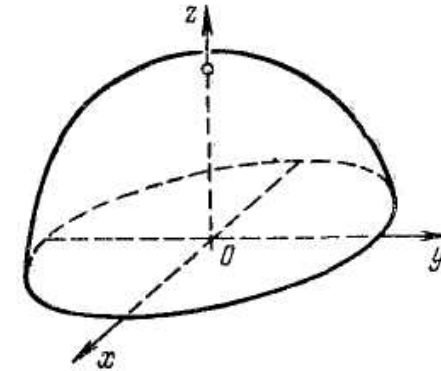


Рис. 11.16.

Знайдемо для прикладу розташування геометричного центра ваги напівкулі радіуса R . Для цього розташуємо напівкулю, як показано на рис. 11.16; тоді із симетрії тіла ясно, що центр ваги буде розташовано на осі z . Скористаємося формулою (11.9) і

перейдемо до сферичних координат по формулі (11.32), помітивши, що $z=r \cos \vartheta$:

$$z_{ч.в.} = \frac{1}{2/3\pi R^3} \times \iiint_{(\Omega)} r \cos \vartheta \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R r^3 \sin \vartheta \times \cos \vartheta \, dr = \frac{3}{8} R.$$

14. Загальні криволінійні координати на площині. Крім декартових і полярних, на площині можна ввести багато інших систем координат. Їхньою загальною рисою є те, що *точка на площині завжди характеризується двома координатами*.

Розглянемо якусь загальну систему координат λ, μ , для якої координатні лінії $\lambda=\text{const}$ і $\mu=\text{const}$ зображено на рис. 11.17. Якщо ця сітка нанесена досить густо, то площина розіб'ється на фігурки, які з точністю до малих вищого порядку можна вважати паралелограмами.

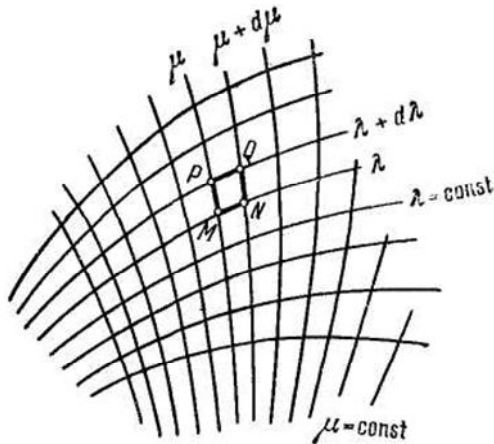


Рис. 11.17.

Нехай лінії $\lambda=\text{const}$ проведені через інтервал $d\lambda$, а лінії $\mu=\text{const}$ — через інтервал $d\mu$. Тоді якщо зневажати малими вищого порядку і позначити сторони якого-небудь з «координатних паралелограмчиків» через $ds_\lambda=MP$ і $ds_\mu=MN$ (рис. 11.17), то ці сторони будуть пропорційні $d\lambda$ і $d\mu$, тобто

$$ds_\lambda = l_\lambda d\lambda, ds_\mu = l_\mu d\mu. \tag{11.33}$$

Коефіцієнти l_λ і l_μ називаються *масштабними коефіцієнтами* або *коефіцієнтами Ламе* по імені французького математика й інженера Г. Ламе; вони дають можливість перейти від координат до лінійних розмірів. Коефіцієнти Ламе для заданої системи координат мають у різних точках площини, узагалі говорячи, різні значення: наприклад, на рис. 11.17 вони внизу менші, ніж вгорі. Якщо потрібно знайти довжину кінцевої дуги координатної лінії, то відповідну рівність (11.33) потрібно проінтегрувати.

Якщо ввести на площині радіус-вектор

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OM},$$

який відлічується від деякої фіксованої точки O , то сторони \overrightarrow{MP} і \overrightarrow{MN} елементарного паралелограма на рис. 11.17 з точністю до малих вищого порядку дорівнюють

$$\partial_\lambda \mathbf{r} = \mathbf{r}'_\lambda d\lambda \text{ і } \partial_\mu \mathbf{r} = \mathbf{r}'_\mu d\mu$$

так як ці прирости радіуса-вектора виходять за рахунок зміни лише однієї координати. Звідси $|\partial_\lambda \mathbf{r}| = |\mathbf{r}'_\lambda| d\lambda$; але так як $|d\mathbf{r}| = ds$ і тому $|\partial_\lambda \mathbf{r}| = ds_\lambda$, то за допомогою (11.33) одержуємо

$$l_\lambda = |\mathbf{r}'_\lambda|, l_\mu = |\mathbf{r}'_\mu|.$$

Якщо на площині, крім криволінійних координат λ, μ , розглядаються декартові координати x, y , то $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ і тому

$$l_\lambda = \left| \frac{\partial x}{\partial \lambda} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \lambda} \mathbf{j} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2},$$

$$l_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu} \right)^2},$$

Площа $d\sigma$ кожного з елементарних паралелограмів, які зображено на рис. 11.17, пропорційна як $d\lambda$, так і $d\mu$, тобто $d\sigma = k d\lambda d\mu$, (11.34)

де k - *площинний коефіцієнт*, також, узагалі говорячи, різний у різних точках площини. Застосовуючи формулу для площі паралелограма, одержимо

$$k = \frac{d\sigma}{d\lambda d\mu} = \frac{ds_\lambda ds_\mu \sin \alpha}{d\lambda d\mu} = l_\lambda l_\mu \sin \alpha, \tag{11.35}$$

де α — кут між координатними лініями.

Зокрема, для ортогональних систем координат, тобто

для систем координат, у яких координатні лінії перетинаються під прямим кутом,

$$k = l_\lambda \cdot l_\mu. \quad (11.36)$$

У загальному випадку з (11.34) можна також вивести, що

$$k = \left| \begin{vmatrix} \frac{dx}{\partial \lambda} & \frac{dy}{\partial \lambda} \\ \frac{dx}{\partial \mu} & \frac{dy}{\partial \mu} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} \right|. \quad (11.37)$$

При цьому ми використовували можливість транспонування визначників. Той же результат можна одержати, якщо помітити, що k у формулі (11.34) — це коефіцієнт зміни площ при переході від площини змінних λ, μ до площини змінних x, y , обумовлених формулами $x=x(\lambda, \mu), y=y(\lambda, \mu)$. А цей коефіцієнт саме дорівнює абсолютній величині відповідного якобіана, тобто (11.37).

Якщо розглядається інтеграл вигляду $I = \int_{(\sigma)} u d\sigma$, узятий по

деякій плоскій області (σ) , то на основі формули (11.34) одержуємо

$$I = \iint_{(\sigma)} uk d\lambda d\mu,$$

де границі треба розставити на зразок того, як це було зроблено для інтегралів (11.23), (11.24) і (11.30). Найбільше просто розставляти границі для області, яка обмежена координатними лініями.

15. Загальні криволінійні координати в просторі. Розгляд загальних криволінійних координат λ, μ, v у просторі проходить зовсім аналогічно. Поверхні $\lambda=\text{const}, \mu=\text{const}$ і $v=\text{const}$ утворюють три сімейства координатних поверхонь, попарні перетинання яких дають три сімейства координатних ліній. Координатні поверхні, які відповідають значенням координат

$$\lambda, \lambda+d\lambda; \mu, \mu+d\mu; v, v+dv$$

обмежують у просторі об'ємчик, який з точністю до малих вищого порядку можна прийняти за паралелепіпед, у загальному випадку косокутний; для конкретних систем координат його показано на рис. 11.14 і 11.15. Одне з ребер цього нескінченно малого паралелепіпеда дорівнює $ds_\lambda = |\partial_\lambda r| = |r'_\lambda| d\lambda = l_\lambda d\lambda$, де

$$l_\lambda = |r'_\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2},$$

називається *масштабним коефіцієнтом* або *коефіцієнтом Ламе*. Аналогічно виражаються два інших ребра паралелепіпеда. Його об'єм виражається по формулі $\Omega = kd\lambda d\mu dv$, де k - *об'ємний коефіцієнт*. Тому заміна змінних у потрійному інтегралі відбувається по формулі

$$\int_{(\Omega)} u d\Omega = \iiint_{\Omega} uk d\lambda d\mu dv. \quad (11.39)$$

Для ортогональної системи координат $k=l_\lambda l_\mu l_\nu$, тоді як у загальному випадку обчислення k засновано на геометричному змісті векторно-скалярного добутку:

$$k = \frac{d\Omega}{d\lambda d\mu dv} = \frac{|\partial_\lambda r \times \partial_\mu r \cdot \partial_\nu r|}{d\lambda d\mu dv} = \frac{|(r'_\lambda d\lambda \times r'_\mu d\mu) \cdot r'_\nu dv|}{d\lambda d\mu dv} =$$

$$= |(r'_\lambda \times r'_\mu) \cdot r'_\nu| = \left| \begin{vmatrix} \frac{dx}{\partial \lambda} & \frac{dy}{\partial \lambda} & \frac{dz}{\partial \lambda} \\ \frac{dx}{\partial \mu} & \frac{dy}{\partial \mu} & \frac{dz}{\partial \mu} \\ \frac{dx}{\partial \nu} & \frac{dy}{\partial \nu} & \frac{dz}{\partial \nu} \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{D(x, y, z)}{D(\lambda, \mu, \nu)} \right|.$$

16. Координати на поверхні. На довільній поверхні можна ввести систему координат. Будемо позначати ці координати буквами λ, μ . Тоді подібно п. 14 сторони і площа нескінченно малого координатного паралелограма з точністю до малих вищого порядку обчислюються по формулах:

$$ds_\lambda = |\partial_\lambda r| = l_\lambda d\lambda,$$

де

$$l_\lambda = |r'_\lambda| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)^2};$$

$$ds_\mu = (\text{аналогічно});$$

$$d\sigma = kd\lambda d\mu,$$

де $k=l_\lambda l_\mu$ для ортогональної системи координат і

$$k = |r'_\lambda \times r'_\mu| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{vmatrix} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial z}{\partial \mu} - \frac{\partial z}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \mu} - \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2}$$

у загальному випадку. Перехід в інтегралі по поверхні до змінних λ, μ здійснюється по формулі (11.38).

Наприклад, на сфері (тобто поверхні кулі) фіксованого радіуса R можна ввести сферичні координати φ, ν ; виходять як би звичайні сферичні координати в просторі з зафіксованим значенням $r=R$. Ця система координат ортогональна, і з рис. 11.15 легко вивести, що

$$ds_\varphi = R \sin \nu \, d\varphi, \quad ds_\nu = R \, d\nu,$$

тобто

$$l_\varphi = R \sin \nu, \quad l_\nu = R,$$

і площинний коефіцієнт k дорівнює $k = l_\varphi l_\nu = R^2 \sin \nu$.

Тому інтеграл по фігурі (σ) , яку розташовано на сфері, можна обчислювати по формулі

$$\int_{\Omega} u \, d\sigma = R^2 \iint_{(\sigma)} u \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta. \quad (11.40)$$

Підрахуємо, наприклад, силу притягання матеріальної точки маси m матеріальною сферою (σ) сталої поверхневої щільності ρ . У силу симетрії задачі можна обмежитися розташуванням, яке показано на рис. 11.18. Кожна елементарна площадка $d\sigma$ притягує масу m із силою $d\mathbf{F}$, яку можна підрахувати за законом Ньютона:

$$|d\mathbf{F}| = \kappa \frac{m\rho \, d\sigma}{l^2} = \kappa \frac{m\rho}{R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta} \, d\sigma, \quad (11.41)$$

де κ - гравітаційна стала.

При підсумовуванні цих елементарних сил треба підсумовувати не їхні модулі, так як сили спрямовані в різні сторони, а проекції цих сил на визначену вісь. З міркувань

симетрії ясно, що результуюча сила піде по осі z , а тому треба підсумувати проекції всіх елементарних сил на вісь z :

$$F = \int_{(\sigma)} (d\mathbf{F})_z = \int_{(\sigma)} |d\mathbf{F}| \cos \alpha = \int_{(\sigma)} \kappa \frac{m\rho}{R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta} \, d\sigma \frac{l^2 + h^2 - R^2}{2hl};$$

вираз для $\cos \alpha$ ми знайшли по теоремі косинусів:

$$R^2 = l^2 + h^2 - 2Rh \cos \alpha.$$

Підставляючи в останньому інтегралі

$$l = \sqrt{R^2 + h^2 - 2Rh \cos \alpha}.$$

і переходячи до сферичних координат по формулі (11.40), одержимо

$$\begin{aligned} F &= \kappa m \rho \int_{(\sigma)} \frac{h - R \cos \vartheta}{(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta)^{3/2}} \, d\sigma = \\ &= \kappa m \rho \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} \frac{h - R \cos \vartheta}{(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta)^{3/2}} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi = \\ &= R^2 \kappa m \rho \int_0^\pi \frac{h - R \cos \vartheta}{(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta)^{3/2}} \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= -2\pi R^2 \kappa m \rho \int_0^\pi \frac{h - R \cos \vartheta}{(R^2 + h^2 - 2Rh \cos \vartheta)^{3/2}} \, d \cos \vartheta = \\ &= 2\pi R^2 \kappa m \rho \int_{-1}^1 \frac{h - Rt}{(R^2 + h^2 - 2Rht)^{3/2}} \, dt \left| \begin{array}{l} R^2 + h^2 - 2Rht = l^2 \\ l > 0 \\ -2Rhdt = 2ldl \end{array} \right| = \\ &= 2\pi R^2 \kappa m \rho \int_{R+h}^{|R-h|} \frac{h + \frac{l^2 - R^2 - h^2}{2h}}{l^3} \left(-\frac{2ldl}{2Rh} \right) = \frac{\pi R \kappa m \rho}{h^2} \int_{|R-h|}^{R+h} \left(1 + \frac{h^2 - R^2}{l^2} \right) dl = \\ &= \frac{\pi R \kappa m \rho}{h^2} \left[(R+h) - |R-h| + (h^2 - R^2) \left(\frac{1}{|R-h|} - \frac{1}{R+h} \right) \right]. \quad (11.42) \end{aligned}$$

Якщо $h > R$, то $|R-h| = h-R$, і після підстановки цього виразу в (11.42) і перетворень одержуємо

$$F = \kappa \frac{m4\pi R^2 \rho}{h^2} = \kappa \frac{mM}{h^2} \quad (h > R),$$

де M – загальна маса сфери. Якщо ж $h < R$, то $|R-h|=R-h$, і аналогічно одержуємо

$$F=0 \quad (h < R).$$

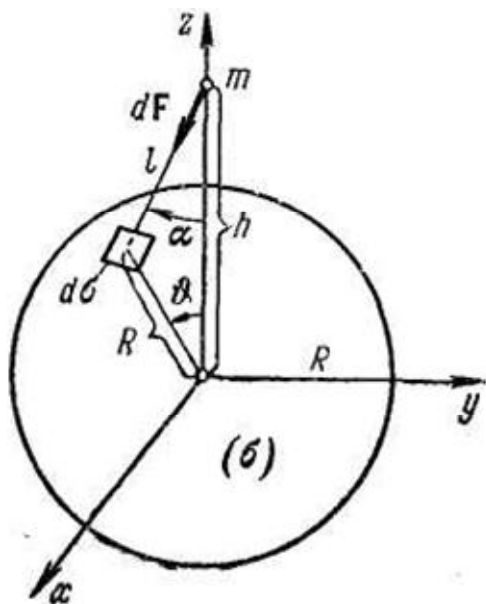


Рис.11.18.

Отже, однорідна сфера притягає точки, які розташовані поза нею, з такою силою, начебто вся маса сфери зосереджена в її центрі, і зовсім не притягає точки, які розташовані усередині неї. Нехай тепер дана матеріальна куля (об'ємне тіло), у якому маса розподілена *сферично симетрично*, тобто щільність залежить лише від відстані до центра кулі. Таку кулю можна уявити собі як суму концентричних нескінченно тонких «міхурів» і для кожного з них застосувати тільки що доведений результат. Тоді ми одержимо, що ця куля притягає точку, яка знаходиться поза нею, з такою силою, начебто вся маса кулі зосереджена в його центрі; точка ж, яка знаходиться усередині кулі, притягається тільки його частиною, яка розташована від центра ближче, чим ця точка.

Мікромодуль 27

Приклади розв'язання типових задач

Обчислення подвійного інтеграла

1. Знайдемо подвійний інтеграл від функції

$$z = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y$$

по прямокутній області $D(-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2)$

$$I = \iint_D \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dx dy.$$

Геометрично I виражає об'єм чотирикутної призми (рис. 11.19), основою якої служить прямокутник D , яка усічена площиною

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + z = 1.$$

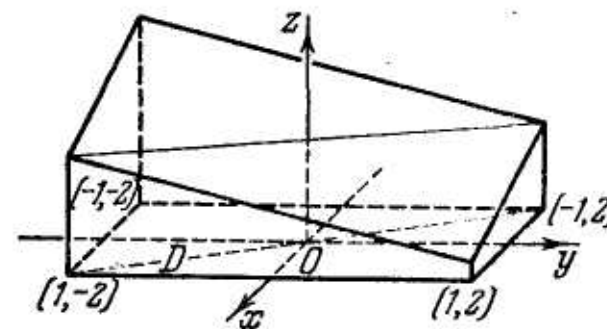


Рис. 11.19.

Візьмемо повторний інтеграл спочатку по y , потім по x :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dx \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dy = \int_{-1}^1 \left(y - \frac{1}{3}xy - \frac{1}{4}y^2\right) \Big|_{-2}^2 dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(4 - \frac{4}{3}x\right) dx = \left(4x - \frac{2}{3}x^2\right) \Big|_{-1}^1 = 8. \end{aligned}$$

Те ж саме одержимо, інтегруючи спочатку по x , а потім по y :

$$I = \int_{-2}^2 dy \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y\right) dx = \int_{-2}^2 \left(x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}xy\right) \Big|_{-1}^1 dy =$$

$$= \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{1}{2}y\right) dy = \left(2y - \frac{1}{4}y^2\right) \Big|_{-2}^2 = 8.$$

2. Обчислимо подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+y) dx dy.$$

по області D , обмеженої лініями $y=x$ і $y=x^2$. Область D зображена на рис. 11.20.

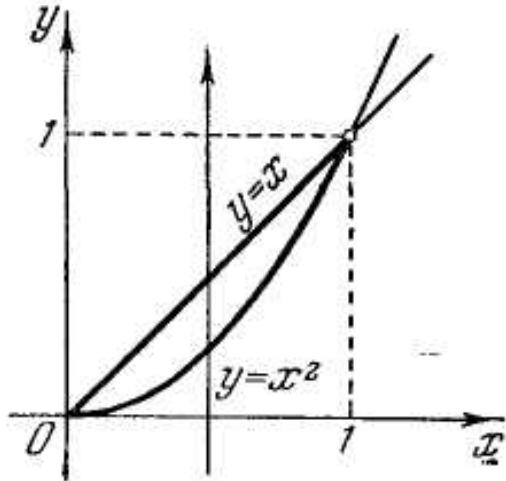


Рис. 11.20.

Інтегруючи спочатку по y , а потім по x , одержуємо

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x+y) dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Правильність результату можна перевірити, змінивши порядок інтегрування:

$$\iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (x+y) dx = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right] \Big|_y^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{y^2}{2} - y^2\right) dy = \left(\frac{y^2}{4} + \frac{2y^{5/2}}{5} - \frac{y^3}{2}\right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

3. Обчислимо об'єм тіла, обмеженого циліндричними поверхнями $z=4-y^2$, $y=x^2/2$ і площиною $z=0$ (рис. 11.21, а).

Поверхня, що обмежує тіло зверху, має рівняння $z=4-y^2$. Область інтегрування D виходить у результаті перетинання параболи $y=x^2/2$ з лінією перетинання циліндра $z=4-y^2$ і площини $z=0$, тобто з прямою $y=2$ (рис. 11.21, б). В силу симетрії тіла відносно площини Oyz обчислюємо половину шуканого об'єму:

$$\frac{1}{2}V = \int_0^2 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^2 (4-y^2) dy = \int_0^2 \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_{\frac{x^2}{2}}^2 dx =$$

$$= \int_0^2 \left(8 - \frac{8}{3} - 2x^2 + \frac{x^6}{24}\right) dx = \left(\frac{16}{3}x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^7}{168}\right) \Big|_0^2 = \frac{128}{21}.$$

Отже $V = \frac{256}{21} \approx 12,2$ куб. од.

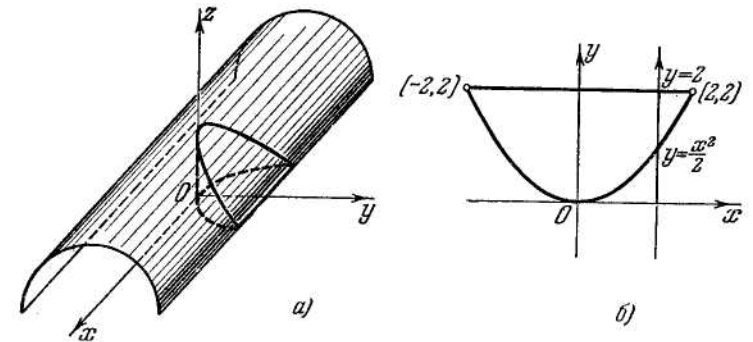


Рис. 11.21

4. Обчислимо об'єм V тіла, обмеженого поверхнею $z=1-4x^2-y^2$

і площиною Oxy .

Задане тіло являє собою сегмент еліптичного параболоїда, який розташовано над площиною Oxy (рис. 11.22).

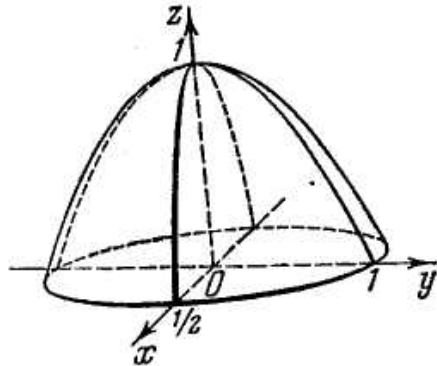


Рис.11.22.

Параболоїд перетинається з площиною Oxy по еліпсу $4x^2-y^2=1$.

Отже, завдання полягає у відшуванні об'єму циліндричного тіла, яке має своєю основою внутрішність зазначеного еліпса й обмеженого параболоїдом

$$z=1-4x^2-y^2.$$

У силу симетрії тіла відносно площин Oxz і Oyz можна обчислити об'єм четвертої його частини, заключеної в першому координатному куті. Цей об'єм дорівнює подвійному інтегралові, розповсюдженому по області, заданій умовами

$$4x^2-y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

тобто по чверті еліпса.

Інтегруючи спочатку по y , потім по x , одержимо

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1-4x^2-y^2) dy = \frac{2}{3} \int_0^{1/2} (1-4x^2)^{3/2} dx.$$

Підстановка

$$2x = \sin t$$

дає

$$\frac{1}{4}V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t dt = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16} \pi,$$

звідки

$$V = \pi/4.$$

5. Розставити границі інтегрування в полярних координатах, якщо область D — коло $x^2+y^2 \leq ax$ (рис. 11.23). Переходячи до полярних координат, одержимо рівняння кола у вигляді

$$r = a \cos \varphi.$$

Тут

$$r_1(\varphi) = 0 \text{ і } r_2(\varphi) = a \cos \varphi.$$

Границі зміни по φ від $-\pi/2$ до $\pi/2$.

Тому

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

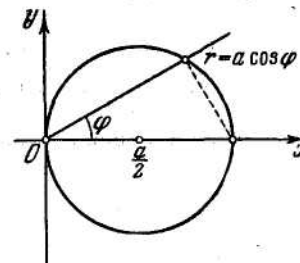


Рис. 11.23.

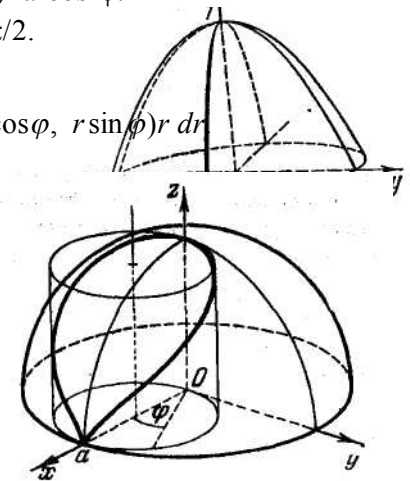


Рис. 11.24.

6. Обчислимо об'єм V загальної частини кулі радіуса a і кругового циліндра радіуса $a/2$ за умови, що центр кулі лежить на поверхні циліндра. Систему координат розташуємо, як показано на рис. 11.24. У силу симетрії вимірюваного тіла щодо площин Oxy і Oxz ми можемо обчислити четверту частину об'єму, заключену в першому координатному куті. Маємо

$$\frac{1}{4}V = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

де D — півколо, що є половиною основи циліндра.

Тут дуже зручно перетворити подвійний інтеграл до полярних координат. Відповідно до правила перетворення маємо

$$\frac{1}{4}V = \iint_D \sqrt{a^2 - r^2} r dr d\varphi.$$

Так як полярне рівняння півкола, що обмежує область D , є $r = a \cos \varphi$ (див. приклад 5), то, інтегруючи спочатку по r , а потім по φ , знайдемо

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \sqrt{a^2 - r^2} r dr.$$

Знаходячи внутрішній інтеграл, одержуємо

$$\frac{1}{4}V = \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^{a \cos \varphi} \right] d\varphi = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \varphi) d\varphi = \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

Звідси

$$V = \frac{4}{3} a^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

7. Обчислимо за допомогою перетворення подвійного інтеграла до полярних координат один невластний інтеграл - інтеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

(Цей інтеграл відіграє важливу роль у теорії ймовірностей.) Для обчислення розглянемо подвійний інтеграл

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy,$$

де D -чверть кола радіуса R , яка розташована в першому квадранті. Перетворимо цей інтеграл до полярних координат:

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_0^R \right] = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Припустимо, що радіус R необмежено збільшується. Тоді область D , розширюючись, буде прагнути заповнити весь перший квадрант. За

аналогією з невластним інтегралом від функції однієї змінної запишемо це так:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}. (*)$$

Прийmemo тепер як область інтегрування D квадрат $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$.

Тоді

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^a dx \int_0^a e^{-x^2 - y^2} dy = \int_0^a e^{-x^2} dx \int_0^a e^{-y^2} dy.$$

Так як величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, то отриманий вираз дорівнює

$$\left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Якщо a прагне до нескінченності, то квадрат D прагне заповнити весь перший квадрант.

Залишаючи без доведення той факт, що при кожному розширенні області D до повного квадранта інтеграл

$$\iint_D e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

буде прагнути до однієї і тої же самої границі, запишемо

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. (**)$$

Порівнюючи вирази (*) і (**), одержуємо

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \frac{\pi}{4},$$

тобто $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Так як підінтегральна функція парна, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Обчислення потрійного інтеграла

8. Обчислимо потрійний інтеграл

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz,$$

де Ω — область, яка обмежена координатними площинами

$$x=0, y=0, z=0$$

і площиною $x+y+z=1$ (піраміда, яка зображена на рис. 11.25). Інтегрування по z відбувається від $z=0$ до $z=1-x-y$. Тому, позначаючи проекцію області Ω на площину Oxy через D , одержимо

$$I = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z) dz = \iint_D \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} dx dy = \iint_D \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dx dy.$$

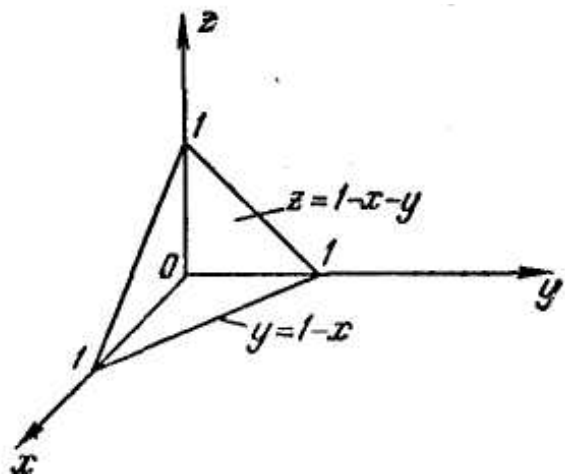


Рис. 11.25.

Розставимо тепер межі інтегрування по області D —трикутнику, рівняння сторін якого $x=0, y=0, x+y=1$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[(x + y) - (x + y)^2 + \frac{(1 - x - y)^2}{2} \right] dy = \int_0^1 dx \left[\frac{(x + y)^2}{2} - \frac{(x + y)^3}{3} - \frac{(1 - x - y)^3}{6} \right]_0^{1-x} = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1 - x)^3}{6} \right] dx = \frac{1}{8}.$$

9. Обчислити інтеграл (в декартових координатах)

$$I = \int_V (y^2 + z^2) dV,$$

де V — об'єм піраміди, яка обмежена координатними площинами і площиною $x+y+z=1$

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[dy \int_0^{1-x-y} (x^2 + y^2) dz \right] = \frac{1}{30}.$$

10. Обчислити інтеграл (в циліндричних координатах)

$$I = \int_V dV,$$

(рис.11.26), розповсюджений на об'єм, обмежений площинами xOy і xOz , циліндром $x^2+y^2=ax$ і сферою $x^2+y^2+z^2=a^2$ (так як тут $f=1$, інтеграл чисельно дорівнює об'єму даного тіла).

$z_1=0, z_2=\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - \rho^2}, \rho_1=0, \rho_2=a \cos \varphi, \varphi_1=0, \varphi_2=\pi/2.$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{a \cos \varphi} \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\varphi d\rho dz = \int_0^{\pi/2} \left\{ d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \left[\rho d\rho \int_0^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} dz \right] \right\} = \frac{a^2}{18} (3\pi - 4).$$

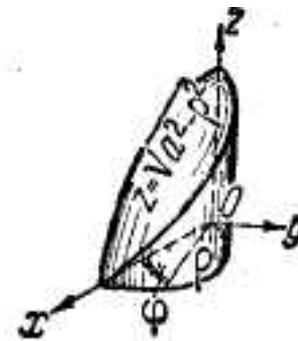


Рис. 11.26.

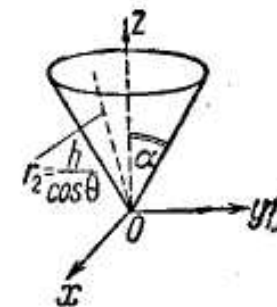


Рис. 11.27.

11. Обчислити інтеграл (в сферичних координатах)

$$I = \int_V \frac{\cos \theta}{r^2} dV,$$

розповсюджений на об'єм конуса, висота якого дорівнює h , кут при вершині дорівнює 2α і який розташовано відносно системи координат згідно з рис. 11.27.

$$r_1=0, \quad r_2=h/\cos \theta, \quad \theta_1=0, \quad \theta_2=\alpha, \quad \varphi_1=0, \quad \varphi_2=2\pi.$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\alpha} \int_0^{h/\cos \theta} \frac{\cos \theta}{r^2} r^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta dr = \int_0^{2\pi} \left\{ d\varphi \int_0^{\alpha} \cos \theta \sin \theta d\theta \left[\int_0^{h/\cos \theta} dr \right] \right\} 2\pi h(1 - \cos \alpha).$$

12. Знайдемо центр ваги однорідної напівкулі Ω

$$x^2+y^2+z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0.$$

Дві координати центра ваги (ξ і η) дорівнюють нулеві, тому що напівкуля симетрична щодо осі Oz (тіло обертання з віссю Oz). Інтеграл

$$\iiint_{\Omega} z \, dv$$

зручно обчислити, перейшовши до сферичних координат:

$$\iiint_{\Omega} z \, dv = \iiint_{\Omega} r \cos \theta \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 \, dr =$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{1}{4} \pi R^4.$$

Так як об'єм напівкулі дорівнює

$$\frac{2}{3} \pi R^3,$$

то

$$\xi = \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

Перейдемо до обчислення моментів інерції тіла відносно координатних осей. Так як квадрати відстаней від точки $P(x, y, z)$ до осей Ox ,

Oy , Oz відповідно дорівнюють y^2+z^2 , x^2+z^2 , x^2+y^2 , то покладаючи для простоти $\delta \equiv 1$, одержимо наступні формули:

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \, dv, \quad I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \, dv, \quad I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dv,$$

Аналогічно плоскому випадкові інтеграли

$$I_{xy} = \iiint_{\Omega} xy \, dv, \quad I_{yz} = \iiint_{\Omega} yz \, dv, \quad I_{zx} = \iiint_{\Omega} zx \, dv$$

називаються відцентровими моментами інерції. Для полярного моменту інерції формула має вигляд

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dv.$$

13. Обчислимо полярний момент інерції однорідної кулі радіуса R . У цьому випадку дуже зручно перейти до сферичних координат. Будемо мати

$$I_0 = \delta \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 r^2 \, dr = \frac{4\pi \delta R^5}{5} = \frac{3}{5} MR^2,$$

де M – маса кулі.

Так як для сфери моменти інерції відносно осей координат, вочевидь, рівні між собою, то, з огляду на те, що

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0, \text{ отримаємо } I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2,$$

Обчислення криволінійного інтеграла

14. Обчислимо інтеграл

$$I = \int_L xy \, dx + (x + y) \, dy,$$

приймаючи за лінію L (рис. 11.28):

- а) відрізок прямої, що з'єднує точки $O(0, 0)$ і $A(1, 1)$;
- б) дугу параболи $y=x^2$, що з'єднує ці ж точки;
- в) ламану OBA .

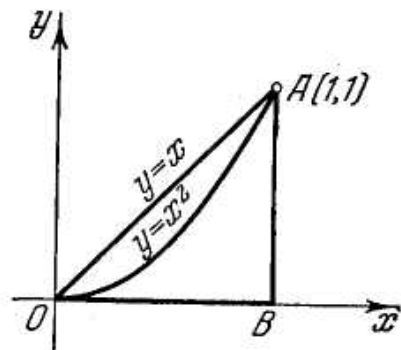


Рис. 11.28.

У випадку а) рівняння лінії інтегрування $y=x$. Отже, $dv=dx$ і

$$I = \int_0^1 (x^2 + 2x) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

У випадку б) $y=x^2$, $dy=2x dx$
і

$$I = \int_0^1 [x^3 + (x+x^2)2x] dx = \frac{17}{12}.$$

У випадку в) контур інтегрування розбиваємо на два. На ділянці OB $y=0$ і $dy=0$, а на ділянці BA $x=1$ і $dx=0$. Тому

$$I = \int_0^1 (1+y) dy = \frac{(1+y)^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Як бачимо, у всіх трьох випадках ми одержали різні значення інтеграла, незважаючи на те що початкова і кінцева точки контуру інтегрування були ті самі. Це показує, що криволінійний інтеграл залежить не тільки від початкової і кінцевої точок інтегрування, але і від лінії, яка їх з'єднує.

15. Обчислимо інтеграл $I = \int_L xy dx$,

де L — дуга параболи $x=y^2$ від її точки $A(1, -1)$ до точки $B(1,1)$ (рис. 11.29). Так як в рівнянні контуру x є однозначною функцією від y , то, підставивши в інтеграл $x=y^2$, $dx=2ydy$, отримуємо

$$I = \int_{-1}^1 y^2 y \cdot 2y dy = \frac{2y^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{5}.$$

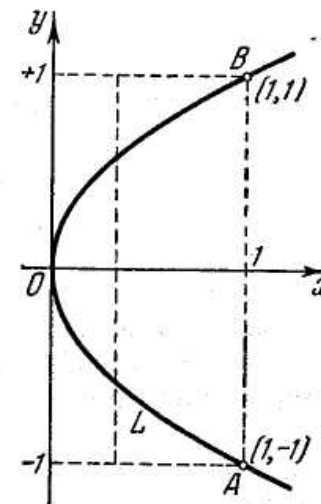


Рис. 11.29.

Якби ми захотіли рівняння контуру записати у формі, розв'язаній відносно y : $y=\pm\sqrt{x}$, то для обчислення інтеграла нам довелося б розбити контур L на дві частин: AO і OB , рівняння яких суть

$$y = -\sqrt{x} \text{ і } y = +\sqrt{x}.$$

Тоді

$$I = \int_{AO} xy dx + \int_{OB} xy dx = -\int_1^0 x\sqrt{x} dx + \int_0^1 x\sqrt{x} dx = 2 \int_0^1 x^{3/2} dx = \frac{4}{5}.$$

де L — дуга циклоїди $x=2(t - \sin t)$, $y=2(1 - \cos t)$ від точки $O(0,0)$ до точки $A(4\pi, 0)$. Користуючись загальним правилом, приходимо до інтеграла (точці O відповідає значення $t=0$, а точці A — значення $t=2\pi$)

$$I = \int_0^{2\pi} [4(1 - \cos t)^2 - 4(t - \sin t) \sin t] dt = 4 \int_0^{2\pi} (2 - 2 \cos t - t \sin t) dt =$$

$$= 4 \left[2t \Big|_0^{2\pi} - 2 \sin t \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} t \sin t dt \right].$$

Інтегруючи останній інтеграл по частинам, остаточно одержимо

$$I = 16\pi - 4(-t \cos t + \sin t) \Big|_0^{2\pi} = 24\pi.$$

Мікромодуль 27

Індивідуальні тестові завдання

Обчислення подвійного інтеграла

1. Обчислити інтеграл, розповсюджений на прямокутник $(P) = [3, 4; 1, 2]$:

$$\iint_{(P)} \frac{dx dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_3^4 \frac{dx dy}{(x+y)^2}.$$

2. Обчислити інтеграли

а) $I_1 = \int_1^3 \int_2^5 (5x^2 y - 2y^3) dx dy,$ б) $I_2 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dx dy}{1+y^2},$

в) $I_3 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y dx dy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$

3. Знайти об'єм тіла, обмеженого знизу площиною $xu,$ з боків площинами $x=0, x=a, y=0, y=b,$ а зверху еліптичним параболоїдом

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}.$$

4. Те ж для тіла, обмеженого площиною $xu,$ поверхнею $x^2+z^2=R^2 (z>0)$ і площинами $y=0$ і $y=H.$

5. Те ж для тіла, обмеженого площинами $z=0, x=a, x=b, y=c, y=d (b>a>0, d>c>0)$ і гіперболічним параболоїдом $z=xu/m (m>0).$

6. Обчислити подвійний інтеграл

$$I = \iint_{(P)} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dP,$$

де (P) є коло радіуса R з центром на початку координат (рис. 11.30).

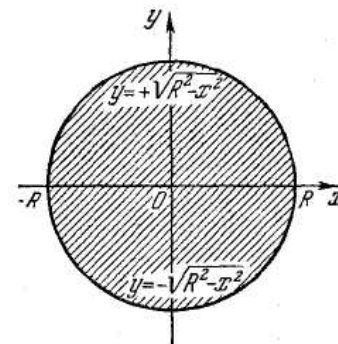


Рис. 11.30.

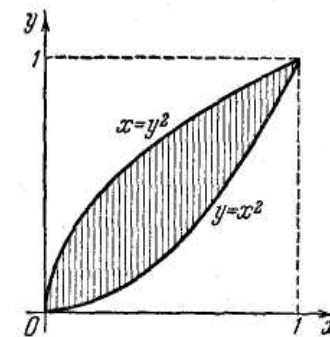


Рис. 11.31.

7. Обчислити

$$K = \iiint_{(A)} (x^2 + y) dx dy,$$

якщо область (A) обмежена двома параболою: $y=x^2$ і $y^2=x.$ (рис. 11.31)

8. Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{(D)} xy dx dy,$$

де (D) є область, обмежена осями координат і параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (рис. 11.32).

9. Обчислити інтеграл

$$I = \iint_{(C)} \frac{x^2}{y^2} dx dy,$$

де (C) є область, обмежена прямими $x=2, y=x$ і гіперболою $xu=1$ (рис. 11.33)

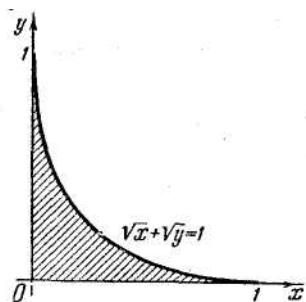


Рис. 11.32.

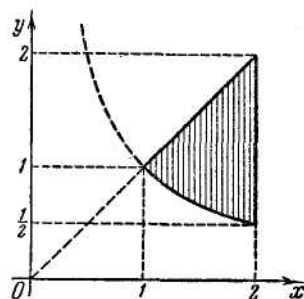


Рис. 11.33.

10. Обчислити інтеграл

(а) $I_1 = \iint_{(Q_1)} \cos(x+y) dx dy$, (б) $I_2 = \iint_{(Q_2)} (2x+y) dx dy$,

(в) $I_3 = \iint_{(Q_3)} (x+6y) dx dy$,

де (Q_1) є трикутник, обмежений прямими $x=0, y=x, y=\pi$,
 (Q_2) — трикутник, обмежений осями координат і прямою $x+y=C$, (Q_3) — трикутник, обмежений прямими $y=x, y=5x, x=1$.

11. Обчислити інтеграл

$$I = \iint \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$$

розповсюджений на трикутник, що утворений прямими $y=0, x=1, y=x$.

12. Перемінити порядок інтегруванні в повторному інтегралі

а) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x,y) dy$, б) $\int_{-7}^1 dy \int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}} f(x,y) dx$,

в) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y) dy$, г) $\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y) dx$,

вважаючи $f(x, y)$ безперервною функцією.

13. Знайти об'єм тіла, обмеженого

(а) площинами $x=0, y=0, z=0$, циліндром $x^2+y^2=R^2$ і гіперболічним параболоїдом $z=xy$ (у першому октанті);

(б) площинами $x=0, y=0, z=0, x+2y=1$ і поверхнею $z=x^2+y+1$;
 (в) площинами $y=1, z=0$, параболічним циліндром $y=x^2$ і параболоїдом $z=x^2+y^2$.

(г) площинами $y=0, z=0, y=(b/a)x$ і еліптичним циліндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

14. Те ж для тіла, обмеженого:

(а) еліптичним циліндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

і площинами $z=0$ і $z=\lambda x + \mu y + h, (h>0)$;

(б) циліндрами $az=y^2, x^2+y^2=r^2$ і площиною $z=0$;

15. Знайти об'єм V тіла, вирізаного циліндром $x^2+y^2=2ax$ з параболоїда обертання $y^2+z^2=4ax$.

16. Знайти об'єм V тіла, вирізаного циліндром $x^2+y^2=Rx$ зі сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 11.34).

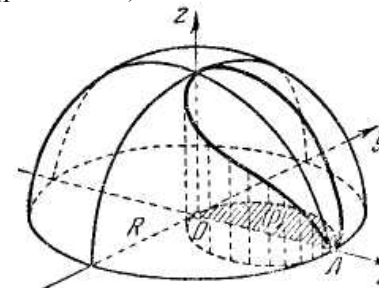


Рис. 11.34.

17. Обчислити інтеграли

$$I_1 = \iint_{(A)} y dx dy, \quad I_2 = \iint_{(A)} x dx dy,$$

де (A) є область, обмежена аркою циклоїди $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

і віссю x .

18. Обчислити інтеграл

$$K = \iint_{(B)} xy dx dy,$$

де область (B) обмежена осями координат і частиною астроїди $x=a \cos^3 t, y=a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$

19. Нехай фігура (P) являє собою криволінійну трапецію, обмежену кривою $y=f(x)$, відрізком осі x і двома ординатами $x=a$ і $x=b$, і нехай щільність розподілена по цій фігурі мас буде 1. Визначити статичні моменти M_x і M_y .
20. Циліндричний брус (V) має в основі плоску фігуру (P) , а зверху обмежений довільною площиною (K) . Довести, що об'єм V тіла дорівнює добуткові площі P основи на довжину k перпендикуляра до основи, що проходить через центр ваги тіла до перетинання з площиною (K) . (Рис. 11.35)

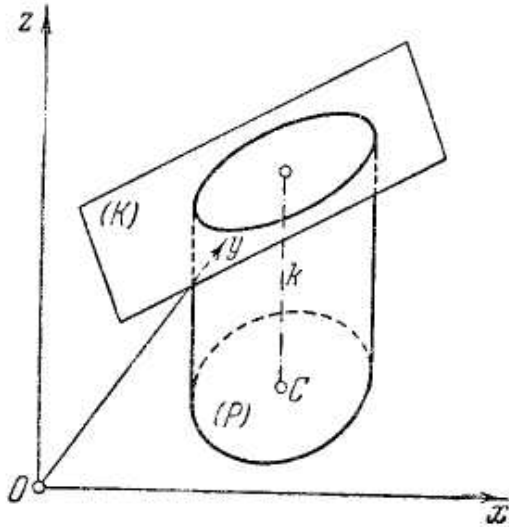


Рис. 11.35

21. Довести, що якщо в площині фігури (P) узято дві паралельні осі x і x' на відстані h , причому перша з них проходить через центр ваги фігури, то моменти інерції фігури щодо цих осей зв'язані співвідношенням

$$I_{x'} = I_x + h^2 m,$$

де m — маса фігури.

22. Нехай плоска фігура (P) (рис. 11.36), по якій безперервним чином розташовані маси, обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі y . Визначити загальну величину відцентрової сили \mathbf{F} , яка при цьому розвивається, і її момент \mathbf{M} щодо осі z . (Моменти щодо інших осей рівні 0).

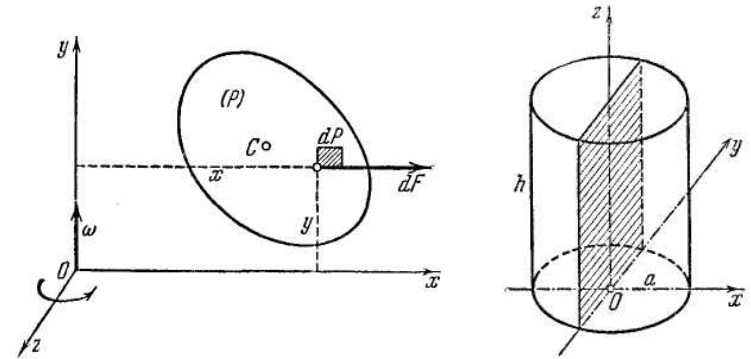


Рис. 11.36.

Рис. 11.37.

23. Для кругового циліндра висотою h і радіусом a знайти момент інерції щодо будь-якої площини, яка проходить через його вісь (рис. 11.37).

24. Знайти момент інерції L для еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

25. Обчислити площі фігур у полярних координатах, обмежених кривими:

(а) $(a^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ (лемніска), (рис. 11.38)

(б) $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$, (рис. 11.39)

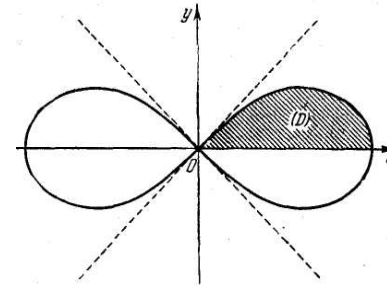


Рис. 11.38.

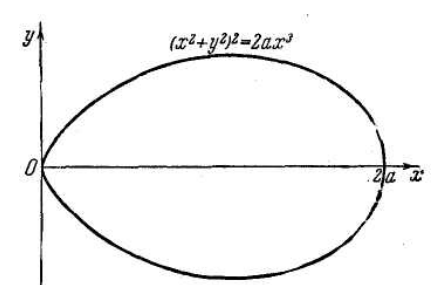


Рис. 11.39.

Мікромодуль 28

Варіанти кратних інтегралів і векторне поле

11.5. Варіанти кратних інтегралів

17. Невласні інтеграли. Теорія невластних кратних інтегралів будується подібно тому, як це робилося для однократних інтегралів. Розглянемо спочатку інтеграл

$$I = \iint_{(\Omega)} u \, d\Omega, \tag{11.43}$$

у якому функція u кінцева, а область інтегрування нескінченна (необмежена). Він визначається як границя

$$\iint_{(\Omega)} u \, d\Omega = \lim_{(\Omega') \rightarrow (\Omega)} \iint_{(\Omega')} u \, d\Omega', \tag{11.44}$$

причому в правій частині область (Ω') уже кінцева і, розширюючись, прагне вичерпати всю область (Ω) (рис.11.40). Якщо границя (11.44) існує і кінцева, незалежно від способу розширення області (Ω') , то інтеграл (11.43) називається збіжним, у протилежному випадку — розбіжним. Якщо границя (11.44) дорівнює нескінченності, то й інтеграл (11.43) розходиться до нескінченності.

Якщо $u \geq 0$, то інтеграл (11.43) або сходиться, або розходиться до $+\infty$. У цьому випадку для його обчислення можна розставити границі в будь-якій зручній системі координат за правилами 11.10—11.11, причому результат обчислення сам покаже, чи буде інтеграл збіжним (якщо цей результат кінцевий) або розбіжним (якщо він дорівнює нескінченності). Ознаки порівняння (9.72) і (9.73) зберігають силу. При цьому для порівняння застосовуються як інтеграли (9.74), так і інші інтеграли. Наприклад, якщо (Ω) — повна площина, то часто застосовується порівняння з функцією r^{-p} , де

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ — довжина радіуса-вектора.}$$

Так як для збіжності істотно поведження підінтегральної функції лише для великих r , то треба досліджувати інтеграл

$$\iint_{(r>r_0)} r^{-p} \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_0}^{\infty} r^{-p} r \, dr = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^{p-1}} \, dr \quad (r_0 > 0).$$

Згідно формулі (9.74) цей інтеграл кінцевий при $p > 2$ і нескінченний при $p \leq 2$. Аналогічно в тривимірному просторі інтеграл від r^{-p} на нескінченності сходиться тільки при $p > 3$.

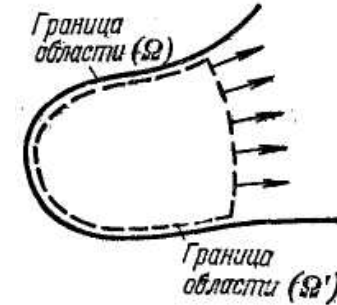


Рис. 11.40.

Як приклад застосування невластних кратних інтегралів виведемо формулу. Для цього треба виходити з інтеграла

$$I = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(x+y)y} \, dx \, dy \quad (p > 0, q > 0),$$

який розповсюджено по першому квадранті площини x, y . Так як підінтегральна функція додатна, то інтегрування можна виконувати в будь-якому порядку, що дасть

1)

$$I = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} x^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(x+y)y} \, dx = \left| x = \frac{s}{y} \right| = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} \left(\frac{s}{y} \right)^{p-1} y^{p+q-1} e^{-\left(\frac{s}{y}+1\right)y} \frac{ds}{y} = \int_0^{\infty} s^{p-1} e^{-s} \, ds \cdot \int_0^{\infty} y^{q-1} e^{-y} \, dy = \Gamma(p)\Gamma(q);$$

2)

$$I = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} x^{p-1} y^{p+q-1} e^{-(x+y)y} \, dy = \left| y = \frac{t}{x+1} \right| = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} x^{p-1} \left(\frac{t}{x+1} \right)^{p+q-1} e^{-t} \frac{dt}{x+1} = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} e^{-x} \, dx \cdot \int_0^{\infty} t^{p+q-1} e^{-t} \, dt = B(p, q)B(p+q)$$

Порівнюючи результати, виводимо необхідну формулу.

Якщо $u \geq 0$ і

$$\int_{\Omega} |u| d\Omega < \infty, \tag{11.45}$$

то інтеграл (11.43) називається *абсолютно збіжним* і для його обчислення можна розставити границі в будь-якій зручній системі координат. Якщо ж умова (11.45) порушена, то можна перевірити, що і інтеграл (11.43) буде розбіжним. Тоді може вийти, що границя (11.44) буде залежати від способу розширення області (Ω'), а при розміщенні границь може виявитися, що в одній системі координат результат інтегрування вийде кінцевий, в іншій - нескінченний, у третій — кінцевий, але відмінний від першого, у четвертій вийде розбіжність коливального типу і т.д. У цьому випадку можливість заміни змінних і перестановки порядку інтегрування вимагає спеціального дослідження. Ніяких цих проблем не виникає для абсолютно збіжних інтегралів. Розгляд невластних інтегралів інших виглядів проводиться аналогічно. А саме, якщо в області інтегрування є точка, або лінія і т.д., у якій підінтегральна функція обертається в нескінченність, то ця особливість (точка, лінія і т.д.) вирізається з області, після чого виріз довільним чином стягується до особливості. Для додатної підінтегральної функції або для функції, додатної усюди поблизу своїх особливостей, можна проводити інтегрування в будь-якій системі координат; для функції довільного знака це можна робити у випадку абсолютної збіжності інтеграла. При дослідженні *ізолюваної особливості*, тобто точки, у якій підінтегральна функція обертається в нескінченність, часто виконується порівняння з інтегралами

$$\iint_{(r \leq r_0)} r^{-p} dx dy$$

на площині і

$$\iiint_{(r \leq r_0)} r^{-p} dx dy dz$$

у просторі. Легко перевірити, що перший сходиться тільки при $p < 2$, а другий — при $p < 3$. Якщо особливість не ізолювана, то умову збіжності можна одержати, вибираючи систему координат так, щоб координатні лінії йшли уздовж особливості.

18. Інтегралі, які залежать від параметра. Теорія інтегралів вигляду

$$I(\lambda) = \int_{(\Omega)} f(M; \lambda) d\Omega,$$

де M - точка області (Ω), по якій проводиться інтегрування, а λ у процесі інтегрування стала, розвивається так, як в модулі 9 п.5; всі основні твердження, які доведені раніше, залишаються справедливими і тут. Деяке утруднення викликає випадок, коли від параметра залежить також область інтегрування. Тоді часто роблять попередню заміну змінних в інтегралі, після якої область уже залишається сталою; утім, можна такі інтегралі вивчати і безпосередньо.

Нехай, наприклад, розглядається об'ємний інтеграл вигляду

$$I(\lambda) = \int_{(\varphi_\lambda \leq 0)} f(M) d\Omega, \bar{A}$$

де задана функція $\varphi_\lambda(x, y, z)$ залежить від параметра λ , а інтеграл розповсюджений по області, у якій $\varphi_\lambda \leq 0$, і потрібно обчислити $dI/d\lambda$. Тут

$$dI = I(\lambda + d\lambda) - I(\lambda)$$

(з точністю до малих вищого порядку) являє собою інтеграл, узятий по тонкій «плівці», яку обмежено поверхнею (S_λ) з рівнянням $\varphi_\lambda = 0$ і поверхнею ($S_{\lambda+d\lambda}$) з рівнянням $\varphi_{\lambda+d\lambda} = 0$. Виберемо яку-небудь точку A на (S_λ), проведемо в A нормаль до (S_λ) і будемо уздовж цієї нормалі відраховувати від A відстань, вважаючи її додатною у бік $\varphi_\lambda > 0$, тобто назовні від області інтегрування. Крім того, позначимо через \bar{A} точку перетинання зазначеної нормалі з ($S_{\lambda+d\lambda}$) і $dn = A\bar{A}$; dn дорівнює ширині «плівки» у точці A . Тоді $\varphi_\lambda(A) = 0$ і $\varphi_{\lambda+d\lambda}(\bar{A}) = 0$. Але з точністю до малих вищого порядку

$$\varphi_{\lambda+d\lambda}(A) = \varphi_\lambda(A) + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda = \varphi_\lambda(A) + |\text{grad } \varphi_\lambda| \cdot dn + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda,$$

звідки $|\text{grad } \varphi_\lambda| \cdot dn + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} d\lambda = 0$

тобто $dn = - \frac{\partial \varphi / \partial \lambda}{|\text{grad } \varphi_\lambda|} d\lambda$.

Однак для зазначеної плівки

$$d\Omega = dS \, dn = -\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\text{grad } \varphi|} dS \, d\lambda;$$

знак dn враховує, додається ця плівка до вихідної області інтегрування або віднімається з неї. Звідси

$$dI = \int f \cdot \left(-\frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\text{grad } \varphi|} dS \, d\lambda \right)$$

тобто
$$\frac{dI}{d\lambda} = - \int_{(\varphi_\lambda=0)} f(M) \frac{\partial\varphi/\partial\lambda}{|\text{grad } \varphi|} dS.$$

Інтеграл може залежати і від декількох параметрів. Як параметр може фігурувати деяка точка, яка міняється в границях якої-небудь області. Тоді виходять інтеграли вигляду

$$I(N) = \int_{(\Omega)} f(M; N) d\Omega_M,$$

де букви $d\Omega_M$ означають, що при інтегруванні точка M є змінною (п. 2), а точка N - сталою. На такі інтеграли поширюються основні властивості інтегралів, розглянутих у модулі 9.

При інтегруванні інтегралів по параметру виходять інтеграли вищої кратності. Розглянемо, наприклад, задачу про обчислення сили \mathbf{F} взаємного притягання двох матеріальних тіл: (Ω_1) з, узагалі говорячи, змінною щільністю ρ_1 і (Ω_2) з щільністю ρ_2 . Для цього напишемо спочатку на основі закону Ньютона силу, з яким елемент $d\Omega_1$, що розташований у точці M_1 притягає елемент $d\Omega_2$, що розташований у точці M_2 :

$$d d\mathbf{F} = \kappa \frac{d\Omega_1 \cdot d\Omega_2}{M_1 M_2^2} \frac{\overrightarrow{M_2 M_1}}{M_2 M_1^0} = \kappa \frac{\rho_1 \rho_2 \overrightarrow{M_2 M_1}}{M_1 M_2^3} d\Omega_1 d\Omega_2.$$

Інтегруючи по (Ω_1) , одержуємо силу, з яким усе тіло (Ω_1) притягає елемент $d\Omega_2$:

$$d\mathbf{F} = \kappa \left(\int_{(\Omega_1)} \frac{\rho_1 \overrightarrow{M_2 M_1}}{M_1 M_2^3} d\Omega_1 \right) \rho_2 d\Omega_2,$$

У виписаному інтегралі інтегрування виконується по M_1 у границях (Ω_1) , фіксована точка M_2 відіграє роль параметра. Щоб одержати повну силу притягання, треба ще проінтегрувати по M_2 :

$$\mathbf{F} = \kappa \int_{(\Omega_2)} \rho_2 d\Omega_2 \int_{(\Omega_1)} \frac{\rho_1 \overrightarrow{M_2 M_1}}{M_1 M_2^3} d\Omega_1.$$

Якщо тут розставити границі, то вийде шестикратний інтеграл. Наприклад, у декартових координатах

$$F = \kappa \iiint_{(\Omega_2)} \rho_2(x_2, y_2, z_2) dx_2 dy_2 dz_2 \times \iiint_{(\Omega_1)} \frac{\rho_1(x_1, y_1, z_1)[(x_1 - x_2)i + (y_1 - y_2)j + (z_1 - z_2)k]}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{3/2}} dx_1 dy_1 dz_1;$$

тут ще треба розставити границі, керуючись формою областей (Ω_1) і (Ω_2)

19. Інтеграл по загальній мірі й узагальнені функції. Розглянемо для визначеності об'ємні інтеграли. У п. 1 ми назвали мірою області в просторі її об'єм; однак це - лише найпростіший приклад міри, який називають іноді мірою Лебега по імені французького математика А. Лебега, що досліджував її найбільше повно. Можливі й інші міри, по яких також можна проводити інтегрування.

Розглянемо спочатку приклад. Нехай у просторі розподілена маса m (п. 6). Подібно п. 18 легко вивести, що сила, з якою ця маса діє на точкову масу m_0 , яка розташована в точці N , дорівнює

$$\mathbf{F} = \kappa m_0 \int \frac{\overrightarrow{NM}}{NM^3} dm, \tag{11.46}$$

де M — змінна точка інтегрування, а інтегрування поширюється по всій частині простору, зайнятою масою m .

Якщо маса m розподілена «об'ємно», тобто маса кожної поверхні, лінії, точки дорівнює нулеві, то можна ввести щільність (п. 6) і від інтеграла (11.46) перейти до звичайного об'ємного інтеграла

$$\int \frac{\overrightarrow{NM}}{NM^3} \rho d\Omega. \tag{11.47}$$

Однак іноді маса концентрується на окремих поверхнях, лініях, точках. Тоді при звичайному розумінні об'ємної щільності перейти до інтеграла (11.47) не можна й інтеграл (11.46) треба розглядати як інтеграл «по мірі m ».

У загальному випадку визначення міри (загальної міри) μ у просторі аналогічне основному визначенню п. 7: кожній подумки виділеній частині простору (тобто кожному тілу, поверхні, лінії, точці) (Ω) повинно відповідати значення $\mu_{(\Omega)}$, причому потрібно виконання закону додавання. При цьому міра поверхні, лінії, точки вже не обов'язково дорівнює нулеві. Зазвичай дають перевагу мірі $\mu \geq 0$, але іноді приходиться від цього відмовитися; тоді міру краще уявляти собі не як «масу», а як «електричний заряд». Міра може бути визначена не тільки в просторі, але також і на поверхні або лінії.

Означення інтеграла по мірі (він також називається інтегралом Стилтеса) також аналогічне звичайному (п. 2). Якщо в області (Ω) задана міра μ , а також функція $u(M)$ (M - довільна точка (Ω)), то по визначенню

$$\int_{(\Omega)} u d\mu = \lim \sum_{k=1}^n u(M_k) \mu_{(\Delta\Omega_k)} \quad (11.48)$$

при природному змісті позначень. Такий інтеграл завжди існує, якщо функція u кінцева в (Ω) і міра області (Ω) кінцева (якщо $\mu \geq 0$, треба вимагати, щоб були кінцевими додатні і від'ємні складові міри (Ω) , тобто щоб

$$\int_{(\Omega)} |d\mu| < \infty .$$

Утім, якщо функція u розривна, то приходиться уточнити вигляд застосовуваних у (11.48) інтегральних сум. Невласні інтеграли по мірі визначаються, як у п. 17. Властивості інтеграла (11.48) аналогічні властивостям, які розібрані у п. 3; у властивостях, зв'язаних з інтегруванням нерівностей, треба вимагати, щоб $\mu \geq 0$.

Якщо міра кожної поверхні, лінії, точки дорівнює нулеві, то від інтеграла (11.48) можна перейти до інтеграла по об'єму

$$\int_{(\Omega)} u d\mu = \int_{(\Omega)} u \frac{d\mu}{d\Omega} d\Omega = \int_{(\Omega)} u \rho d\Omega \quad \left(\rho = \frac{d\mu}{d\Omega} \right). \quad (11.49)$$

Такий перехід можна зробити і при будь-якій мірі, але тоді ρ буде, узагалі говорячи, узагальненою функцією.

Найпростішою узагальненою функцією в просторі є дельта-функція

$$\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c), \quad (11.50)$$

яка описує щільність одиничної маси, розташованої в точці $(a; b; c)$. Функція $\delta(y-b)\delta(z-c)$ описує щільність лінійної маси, розташованої на прямій $y=b, z=c$ з одиничною лінійною щільністю. Функція $\delta(z-c)$ описує щільність маси, розташованої в площині $z=c$ з одиничною поверхневою щільністю. За допомогою цих і аналогічних функцій, зокрема, дельта-функцій у криволінійних системах координат, можливо здійснити перехід (11.49) у загальному випадку.

Властивості узагальнених функцій від декількох змінних аналогічні властивостям узагальнених функцій від однієї змінної. Узагальнену функцію (11.50) можна застосувати для побудови функції впливу, яка має вигляд

$$G(M; N) = \mathbf{G}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta),$$

де (x, y, z) — координати точки спостереження M , а (ξ, η, ζ) — координати джерела впливу N . При розгляді процесів, які розвиваються в часі, застосовується також дельта-функція

$$\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c)\delta(t-\tau),$$

яка приводить до функції впливу вигляду $G(M, t; N, \tau)$.

20. Багатомірні інтеграли. Міру можна задати і в узагальненому k -мірному просторі або, як говорять інакше, у k -мірному різноманітті. Визначення інтеграла (11.48) і його основних властивостей цілком зберігаються. Щоб перейти до повторного інтеграла, потрібно ввести в просторі узагальнені координати t_1, \dots, t_k , після чого виразити підінтегральну функцію у вигляді $u = u(t_1, \dots, t_k)$ і елемент міри

$$d\mu = \rho(t_1, \dots, t_k) dt_1, \dots, dt_k$$

який відповідає нескінченно малому узагальненому координатному паралелепипедові зі сторонами dt_1, \dots, dt_k , який розташовано в точці (t_1, \dots, t_k) . Тоді інтеграл (11.48) прийме вигляд

$$\int_{(\Omega)} u d\mu = \underbrace{\int \dots \int}_{k \text{ раз}} u(t_1, t_2, \dots, t_k) \rho(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1, dt_2, \dots, dt_k, \quad (11.51)$$

де в правій частині треба розставити границі, керуючись зміною координат t в області (Ω) .

У формулі (11.51) ρ , тобто «щільність міри», розуміється як звичайна функція, якщо міра μ кожного різноманіття розмірності, меншої k (визначеного одним або декількома рівняннями, які зв'язують координати t), дорівнює нулеві; так буде, зокрема,

якщо щільність міри усюди кінцева. У протилежному випадку ρ треба розуміти як узагальнену функцію .

Якщо в розглянутому просторі введено поняття об'єму, то можливе і інтегрування по об'єму, який є частковим поняттям міри. Тоді повинний бути відомий об'єм нескінченно малого узагальненого координатного паралелепіпеда

$$d\Omega = h(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1, dt_2, \dots, dt_k, \quad (11.52)$$

після чого інтеграл

$$\int_{(\Omega)} u d\Omega$$

перетвориться подібно (11.51).

Аналогічно вводиться поняття інтеграла (по мірі або по об'єму) по будь-якому різноманіттю розмірності менше k в основному k -мірному просторі. Якщо в звичайному тривимірному просторі можливі криволінійні, поверхневі й об'ємні інтеграли, то в k -мірному просторі є k типів інтегралів .

У k -мірному числовому просторі E_k у формулі (11.52) покладають $h \equiv 1$, тобто за одиниця об'єму приймають об'єм «одиничного k -мірного куба» зі сторонами, рівними 1. Інтеграли нижчої кратності в цьому просторі визначають, виходячи з того, що p -мірний об'єм ($1 \leq p < k$) p -мірного прямокутного паралелепіпеда, кінцевого або нескінченно малого, дорівнює добуткові його сторін (це — *міра Лебега*). Можна розглядати *інтеграли по координатах*, які розповсюджені по p -мірному ($1 < p < k$) різноманіттю (S) у E_k . При цьому (S) повинне бути *орієнтованим*. Це поняття при $p > 1$ не зовсім наочне і вимагає уточнення, яке ми зараз зробимо.

Уведемо спочатку поняття *p -мірного тетраедра*. По визначенню одномірним тетраедром вважається відрізок, двовимірним - трикутник, тривимірним — трикутна піраміда; щоб одержати чотиримірний тетраедр, вибирають точку поза тривимірним простором, у якому розташовано тривимірний тетраедр, і з'єднують її відрізками з усіма точками останнього і т.д. Розглянемо тепер який-небудь p -мірний тетраедр з вершинами A_1, A_2, \dots, A_{p+1} . Орієнтація його задається перерахуванням цих вершин у визначеному порядку; при цьому вважається, що перестановка порядку двох вершин змінює орієнтацію на протилежну. Наприклад, для тривимірного тетраедра з вершинами

A, B, C, D порядки $ABCD$ і $DBAC$ визначають ту саму орієнтацію, а порядок $CBAD$ — протилежну. Кожен тетраедр можна орієнтувати двома способами.

Якщо на різноманітті (S) довільно вибрати малий p -мірний тетраедр, довільно орієнтувати його, а потім переміщувати по (S) , не змінюючи його орієнтації, то вихідна орієнтація індуцирує орієнтацію усіх малих p -мірних тетраедрів на (S) , тобто (S) буде орієнтовано. При $p=1$ різноманіття (S) є лінією і зазначений спосіб рівносильний заданню на ній визначеного напрямлення; при $p=2$ різноманіття (S) є двовимірною поверхнею й орієнтація рівносильна показу напрямлення обходу контуру будь-якої малої фігури на (S) . Якщо (S) складається з декількох шматків, то їхню орієнтацію можна проводити незалежно один від одного.

Варто мати на увазі, що при $p \geq 2$ деякі різноманіття орієнтувати неможливо. Найпростішою неорієнтованою поверхнею є *лист Мьобиуса* (рис. 11.41).

p -мірний інтеграл по координатах, узятий по p -мірному орієнтованому різноманіттю (S) у E_k , визначається так:

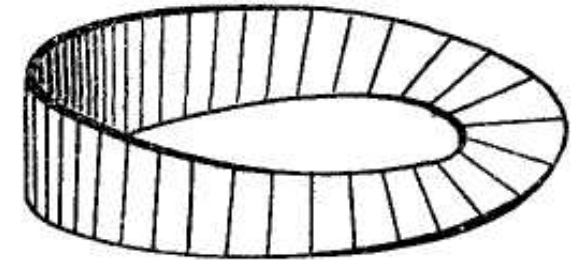


Рис. 11.41.

$$\underbrace{\int \dots \int}_{(S)} u(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_{m_1}, dt_{m_2}, \dots, dt_{m_p} = \lim \sum_{k=1}^n u(M)_k \Delta S'_k, \quad (11.53)$$

де в правій частині (S) вважається розбитим на малі тетраедри (ΔS_k) , орієнтовані відповідно до орієнтації (S) , а під $\Delta S'_k$ розуміється p -мірний об'єм проєкції (ΔS_k) на площину координат $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_p}$, узятий зі знаком + або - у залежності від того, чи збігається чи ні орієнтація цього спроектованого тетраедра з орієнтацією тетраедра $dx dy$, де C_m — одинична точка на осі t_m .

При цьому всі індекси m_1, m_2, \dots, m_p повинні бути різними, так як в протилежному випадку інтеграл (11.53) вважається рівним нулеві.

Властивості інтеграла (11.53) аналогічні властивостям інтегралів, описаним у п. 3, за винятком властивостей, зв'язаних з інтегруванням нерівностей. При зміні орієнтації (S) або при перестановці двох диференціалів під знаком інтеграла він множиться на -1 . Розглядають також суми інтегралів вигляду

$$\underbrace{\int \dots \int}_{(S)} \sum_{m_1, \dots, m_p=1}^k u_{m_1, m_2, \dots, m_p}(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_{m_1} dt_{m_2} \dots dt_{m_p}. \quad (11.54)$$

Частковим випадком такого інтеграла є інтеграл по координатах, узятий по звичайній орієнтованій двовимірній поверхні в звичайному тривимірному просторі x, y, z ;

$$\iint_{(S)} P(x, y, z) dx dy + Q(x, y, z) dy dz + R(x, y, z) dx dz.$$

При розстановці границь в інтегралі (11.53) можна виразити в підінтегральній функції через $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_p}$ значення інших координат t для точок різноманіття (S); потім розбити (S) на частки, проєкції яких на площину $t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_p}$ орієнтовані однаково, після чого розставити границі по кожній з цих проєкцій, як у звичайному p -мірному інтегралі по об'єму (одні з цих інтегралів ввійдуть у підсумок зі знаком $+$, а інші зі знаком $-$). Можна також перейти на (S) до яких-небудь підходящих криволінійних координат s_1, \dots, s_p , замінивши під інтегралом $dt_{m_1}, dt_{m_2}, \dots, dt_{m_p}$ на

$$\frac{D(t_{m_1}, t_{m_2}, \dots, t_{m_p})}{D(s_1, \dots, s_p)} ds_1 \dots ds_p.$$

11.6. Векторне поле

Кратні інтеграли безпосередньо застосовуються в теорії векторного поля. Ми дамо представлення про ці застосування в цьому розділі, перед читанням якого варто згадати визначення поля.

21. Векторні лінії. Ми говоримо, що задано *векторне поле* \mathbf{A} (або *поле вектора* \mathbf{A}), якщо в кожній точці M простору або деякої його області визначено значення векторної величини \mathbf{A} , тобто $\mathbf{A}=\mathbf{A}(M)$. Ми будемо вважати поле стаціонарним, тобто таким, яке не

змінюється з часом; якщо така зміна має місце, то наші міркування будуть відноситися до стану поля в будь-який зафіксований момент часу. Характерними фізичними прикладами векторних полів є поле швидкостей \mathbf{v} або поле *масових швидкостей* $\rho \mathbf{v}$ (ρ — щільність) для потоку рідини або газу, поле сил \mathbf{F} , поле електричної напруженості \mathbf{E} і т. д.

Векторною лінією поля \mathbf{A} називається лінія (L), у кожній точці якої вектор \mathbf{A} , який відповідає цій точці, дотикається (L); іншими словами, це — лінія, яка іде в кожній своїй точці уздовж поля. У залежності від фізичного змісту поля векторна лінія може називатися *лінією струму* для поля швидкостей, *силовою лінією* для силового поля і т. д.

Задача про побудову векторних ліній заданого векторного поля геометрично рівносильна задачі про побудову інтегральних ліній для заданого поля напрямлень. Тому ця задача зводиться до інтегрування системи диференціальних рівнянь; для цього треба увести в простір яку-небудь систему координат. Якщо, наприклад, увести декартові координати x, y, z , то вектор \mathbf{A} можна розкласти:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x, y, z)=A_x(x, y, z)\mathbf{i}+A_y(x, y, z)\mathbf{j}+A_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (11.55)$$

Систему диференціальних рівнянь векторних ліній поля \mathbf{A} можна записати в симетричній формі

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)} = \frac{dz}{A_z(x, y, z)}.$$

Для плоских полів ця система перетворюється в рівняння

$$\frac{dx}{A_x(x, y, z)} = \frac{dy}{A_y(x, y, z)}.$$

Як докладно розбиралося в теорії диференціальних рівнянь, через кожен неособливу точку проходить рівно одна векторна лінія. Таким чином, вся область, у якій задане поле, виявляється заповнена векторними лініями. При цьому в достатній близькості від будь-якої *звичайної*, тобто неособливої точки ці лінії нагадують сукупність паралельних відрізків, але трохи скривлених. Поблизу особливих точок поля сімейство векторних ліній може мати дуже складний вигляд (див., наприклад, рис. 10.9).

22. Потік вектора через поверхню. Нехай у просторі, у якому задано поле вектора \mathbf{A} , обрано орієнтовану замкнуту або

незамкнуту поверхню (σ); нагадаємо, що орієнтованість означає вказівку зовнішньої і внутрішньої сторін у поверхні.

Потоком вектора \mathbf{A} через поверхню (σ) називається інтеграл по поверхні

$$Q = \int_{(\sigma)} A_n d\sigma,$$

де A_n — проекція вектора \mathbf{A} на зовнішню нормаль до (σ). Застосовуючи вектор площадки і скалярний добуток векторів, можна переписати вираз для потоку у вигляді (рис. 11.42)

$$Q = \int_{(\sigma)} A_n \cos \alpha d\sigma = \int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}.$$

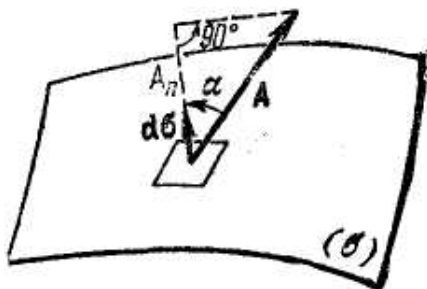


Рис. 11.42.

При обчисленні потоку, якщо вектор \mathbf{A} заданий у вигляді (11.55), можна скористатися перетворенням

$$\mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma = (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (\cos(\mathbf{n}, \hat{x}) \mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, \hat{y}) \mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, \hat{z}) \mathbf{k}) d\sigma = A_x \cos(\mathbf{n}, \hat{x}) d\sigma + A_y \cos(\mathbf{n}, \hat{y}) d\sigma + A_z \cos(\mathbf{n}, \hat{z}) d\sigma.$$

Інтеграл

$$\int_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

розбивається на суму трьох інтегралів, які обчислюються аналогічно. Наприклад, перший інтеграл

$$\int_{(\sigma)} A_x \cos(\mathbf{n}, \hat{x}) d\sigma$$

можна обчислити, якщо помітити, що

$$\cos(\mathbf{n}, \hat{x}) d\sigma = \pm d\sigma_x,$$

де справа стоїть елемент площі проекції (σ_x) поверхні (σ) на площину y, z , а знак у правій частині визначається знаком $\cos(\mathbf{n}, \hat{x})$. Якщо цей знак усюди $+$, то можемо написати

$$\int_{(\sigma)} A_x \cos(\mathbf{n}, \hat{x}) d\sigma = \int_{(\sigma_x)} A_x d\sigma_x = \iint_{(\sigma_x)} A_x(x, y, z) dy dz,$$

причому в підінтегральну функцію треба підставити вираз $x=x(y, z)$ для поверхні (σ). Аналогічно розглядається випадок, коли цей знак усюди $-$. Якщо $\cos(\mathbf{n}, \hat{x})$ на (σ) змінює знак, то (σ) треба попередньо розбити на шматки, на яких цей знак сталий, після чого перетворювати інтеграли по кожному з цих шматків окремо.

Потік, очевидно, є величина скалярна. Будучи частковим випадком інтеграла по поверхні, він має усі властивості таких інтегралів (п. 3). Відзначимо властивість, яка характерна для потоку: при зміні орієнтації поверхні потік множиться на -1 , так як A_n змінює знак. Потік істотно залежить від «напрявлення» поверхні (σ): якщо поверхня розташована так, що поле перетинає її усюди з середини назовні, то $Q > 0$, а якщо усюди з зовні усередину, то $Q < 0$; якщо ж поле частково перетинає (σ) з середини назовні, а частково з зовні у середину, то потік дорівнює сумі додатної і від'ємної величин і може виявитися додатним, від'ємним або рівним нулеві. Завжди дорівнює нулеві потік через поверхню, цілком заповнену дугами векторних ліній, так як для неї поле \mathbf{A} торкається поверхні і тому

$$A_n = 0.$$

Фізичний зміст потоку залежить від вигляду поля. Нехай, наприклад, розглядається поле \mathbf{v} швидкостей при протіканні газу. Тоді $dQ = \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$ дорівнює об'ємові елементарного стовпа газу, який проходить через площадку ($d\sigma$) за одиницю часу. Тому весь потік у цьому випадку дорівнює об'ємові газу, що проноситься через уявлювану поверхню (σ) за одиницю часу з середини назовні. Аналогічно легко перевірити, що для поля $\mathbf{A} = \rho \mathbf{v}$ масових швидкостей потік дорівнює масі газу, що проноситься через (σ) за одиницю часу з середини назовні.

Потік вектора \mathbf{A} через поверхню (σ) інакше називається кількістю векторних ліній поля \mathbf{A} , які перетинають (σ) з середини назовні. Ця назва трохи умовна, так як зазначена кількість, як правило, має розмірність і виходить дробовою, але через свою

наочність широко застосовується. Треба мати на увазі, що ця «кількість» розуміється в алгебраїчному змісті. Так, якщо одна частина поверхні (σ) перетинається лініями з середини назовні, а інша частина — з зовні у середину, то кількість ліній може бути будь-якого знака або рівним нулеві в залежності від того, яку частину перетинає більше ліній.

23. Дивергенція. Уявимо собі в просторі, де задано поле вектора \mathbf{A} , деякий об'єм (Ω), який обмежено поверхнею (σ), яку ми будемо вважати орієнтованою так, що (Ω) прилягає до її внутрішньої сторони. Якщо потік

$$Q = \oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

додатний (кружок у знака інтеграла вписувати не обов'язково; він підкреслює, що інтеграл береться по замкнутій поверхні), то це значить, що через (σ) назовні проходить більше векторних ліній, чим у середину. Тоді говорять, що в (Ω) є *джерело* векторних ліній, а Q називається *рясністю* цього джерела. Якщо $Q < 0$, то говорять, що в (Ω) є *стік* або, що те ж само, джерело від'ємної рясності, для простоти ми будемо завжди вважати стік частковим випадком джерела. Якщо $Q = 0$, то або в (Ω) немає ні джерел, ні стоків, або ж вони взаємно компенсуються. Утім, і при $Q \neq 0$ у (Ω) можуть бути як джерела, так і стоки, що, однак, у цьому випадку компенсуються не цілком. Представлення про лінії, які починаються в об'ємі (Ω), виправдується наступним простим фактом: якщо тіло (Ω) за допомогою якихось поверхонь подумки розбито на кілька тіл (Ω_1), (Ω_2), ..., (Ω_k), то потік поля \mathbf{A} через поверхню тіла (Ω) з середини назовні дорівнює сумі аналогічних потоків, узятих для кожного з тіл (Ω_1), (Ω_2), ..., (Ω_k)...

Джерела векторного поля можуть бути зосередженими в окремих точках або бути розподілені по лініях, поверхнях і, нарешті, по простору (загальне поняття про величини, які розподілені по простору, див. у 10.9). Розглянемо спочатку останній випадок. Тут можна говорити не тільки про середню щільність джерела Q/Ω (під Ω розуміється чисельне значення об'єму (Ω)), але і про щільність джерела в будь-якій точці M простору, яка дорівнює

$$\lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \frac{\Delta Q}{\Delta\Omega} = \lim_{(\Delta\Omega) \rightarrow M} \left(\int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} / \Delta\Omega \right), \quad (11.56)$$

де під ($\Delta\Omega$) розуміється малий об'єм, який містить точку M , а під ($\Delta\sigma$) - його поверхня. Ця щільність джерела називається також *дивергенцією* (розбіжністю) векторного поля \mathbf{A} і позначається через $\text{div } \mathbf{A}$. Таким чином, можна сказати, що *дивергенція векторного поля - це кількість векторних ліній, які починаються в нескінченно малому об'ємі* (або, що те ж, потік поля \mathbf{A} через поверхню цього об'єму), *у розрахунку на одиницю цього об'єму*. Відзначимо, що дивергенція векторного поля є величина скалярна, більш точно, утворює скалярне поле, так як вона приймає в кожній точці простору своє значення.

Формулу (11.56) можна переписати у вигляді

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{dQ}{d\Omega} \quad \text{тобто} \quad dQ = \text{div } \mathbf{A} \, d\Omega.$$

Вийшов вираз для кількості векторних ліній, які починаються в елементарному об'єму ($d\Omega$). Виконуючи підсумовування (п. 4), одержуємо вираз для кількості векторних ліній, які починаються в кінцевому об'ємі (Ω), тобто для потоку вектора \mathbf{A} ,

$$\oint_{(\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_{(\Omega)} \text{div } \mathbf{A} \, d\Omega, \quad (11.57)$$

де (Ω) — кінцевий об'єм, а (σ) — його поверхня. Ця важлива формула називається *формулою Остроградського*. Вона справедлива завжди, якщо в (Ω) поле \mathbf{A} і його дивергенція не обертаються в нескінченність або якщо дивергенція обертається в нескінченність, але так, щоб інтеграл у правій частині (11.57) сходився.

Фізичний зміст дивергенції поля залежить від фізичного змісту вектора \mathbf{A} . Так, якщо розглядається поле швидкостей \mathbf{v} при плінні газу, то $\text{div } \mathbf{v}$ у силу п. 22 дорівнює швидкості відносного приросту нескінченно малого об'єму, а $\text{div } (p\mathbf{v})$ дорівнює щільності джерела мас. Наприклад, якщо в процесі плину газу його маса не змінюється (така зміна може вийти в результаті хімічної або якої-небудь подібної реакції), то $\text{div } (p\mathbf{v}) = 0$; у той же час $\text{div } \mathbf{v} > 0$, < 0 або $= 0$ у залежності від того, чи буде газ у процесі плину розширюватися, стискуватися або не змінювати своєї щільності. Для електричного поля \mathbf{E} дивергенція, тобто $\text{div } \mathbf{E}$, пропорційна щільності заряду, розподіленого в просторі, і т.д.

Якщо поле має джерела, розподілені по лініям або поверхням (так може бути, тільки якщо воно має розриви), то можна говорити

про щільність їхнього розподілення. У цьому випадку в правій частині формули (11.57) повинно бути додано криволінійні або поверхневі інтеграли по лініям і поверхням, які несуть джерела і розташованих у (Ω) , а також окремі доданки, які відповідають точковим джерелам, розташованих у (Ω) , якщо такі є. Якщо користуватися узагальненими функціями, то формула (11.57) справедлива завжди.

У випадку плоского поля формула (11.56) для дивергенції спрощується: а саме, у цьому випадку

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{(\Delta\sigma) \rightarrow M} \left(\oint_{(\Delta l)} A_n dl / \Delta\sigma \right), \quad (11.58)$$

де $(\Delta\sigma)$ - мала фігура в площині поля, яка містить точку M , а (Δl) — контур цієї фігури. Як відомо, плоске поле може мати двоякий фізичний зміст. Якщо поле задано тільки в площині, то чисельник у правій частині (11.58) по визначенню дорівнює потокові вектора \mathbf{A} через лінію (Δl) . Якщо ж поле задано в просторі, але не залежить від однієї з декартових координат, наприклад z , то чисельник дорівнює потокові вектора \mathbf{A} через поверхню циліндра, побудованого на $(\Delta\sigma)$, з одиничною висотою, паралельною осі z , а знаменник дорівнює об'ємові цього циліндра. Формула Остроградського для плоского поля має вигляд

$$\oint_{(l)} A_n dl = \int_{(\sigma)} \operatorname{div} \mathbf{A} d\sigma,$$

де (σ) — кінцева фігура, а (l) — її контур.

Іноді виявляється можливим підрахувати дивергенцію безпосередньо на основі її визначення (11.56). Розглянемо, наприклад, центрально-симетричне поле в просторі, яке визначено формулою

$$\mathbf{A} = f(r) \mathbf{r}^0 = (f(r)/r) \mathbf{r},$$

де \mathbf{r} — радіус-вектор поточної точки, а $f(r)$ — деяка задана безперервна функція його модуля (рис. 11.43).

Тоді потік поля через сферу радіуса r дорівнює

$$Q(r) = \int A_n d\sigma = \int A_n d\sigma = \int f(r) d\sigma = f(r) 4\pi r^2,$$

а тому кількість векторних ліній, які починаються в тонкому сферичному шарі ширини dr , дорівнює

$$dQ = 4\pi d[r^2 f(r)] = 4\pi [2rf(r) + r^2 f'(r)] dr.$$

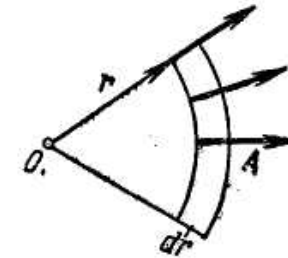


Рис. 11.43.

Виходить, на одиницю об'єма цього шару приходиться $\operatorname{div} \mathbf{A} = dQ / 4\pi r^2 dr = (2/r)f(r) + f'(r)$.

24. Вираз дивергенції в декартових координатах. Нехай у просторі задана система декартових координат, так що поле \mathbf{A} можна задати у формі (11.55). Тоді можна одержати зручну формулу для обчислення $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Для цього скористаємося тим, що у формулі (11.56) для дивергенції форма елементарного об'єму $(\Delta\Omega)$ несуттєва, і виберемо в якості цього об'єму малий прямокутний паралелепіпед з ребрами, паралельними осям координат (рис. 11.44). Тоді потік вектора \mathbf{A} через поверхню паралелепіпеда, тобто чисельник дробу, який стоїть у виразі (11.56), можна представити у вигляді шести доданків, які відповідають шести граням паралелепіпеда. Розглянемо суму двох з цих доданків, які відповідають задній і передній граням, які ми позначимо відповідно цифрами I і II. Тоді (див. рис. 11.44)

$$(A_n)_I = -(A_n)_{II},$$

а на основі формули Тейлора

$$(A_n)_{II} = (A_x)_{II} = (A_x)_I + (\partial_x A_x)_I + \dots,$$

де

$$\partial_x A_x = (\partial A_x / \partial x) \Delta x$$

означає частковий диференціал по x , який виходить через те, що точки передньої грані відрізняються від відповідних точок задньої грані значенням координати x , а многоточками позначені члени вищого порядку малості.

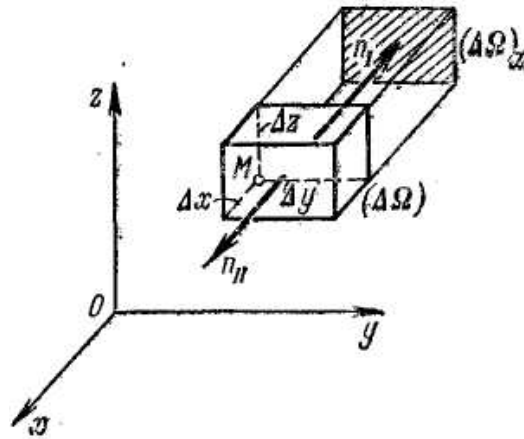


Рис. 11.44.

Так як інтегрування по зазначених гранях зводиться до інтегрування по їхній проекції на площину yz , тобто по $(\Delta\Omega)_x$, то

$$\begin{aligned} \int_{(I)} A_n d\sigma + \int_{(II)} A_n d\sigma &= \iint_{(\Delta\Omega)_x} (A_n)_I dy dz + \iint_{(\Delta\Omega)_x} (A_n)_{II} dy dz = \\ &= \iint_{(\Delta\Omega)_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_I \Delta x dy dz + \dots = \left(\iint_{(\Delta\Omega)_x} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_I dy dz \right) \Delta x + \dots = \\ &= \left(\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{cp} \Delta y \Delta z \right) \Delta x + \dots = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z + \dots \end{aligned}$$

Тут многоточками увесь час позначаються члени вищого порядку, чим виписані; у передостанньому переході застосована формула середнього значення (п. 3, властивість 10), а в останньому переході – формула

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_{cp} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right)_M + \text{нескінченно мала.}$$

Виконуючи аналогічні обчислення для двох інших пар граней, одержимо вираз для потоку через усю поверхню паралелепіпеда

$$\int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M \Delta x \Delta y \Delta z + \dots,$$

і так як в даному випадку

$$\Delta\Omega = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

то

$$\frac{1}{\Delta\Omega} \int_{(\Delta\sigma)} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)_M + \dots,$$

Переходячи до границі, одержуємо остаточно

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (11.59)$$

ми не пишемо індекс M , тому що ця формула справедлива в будь-якій точці поля. Для плоского поля в правій частині формули (11.59) відсутній третій доданок.

25. Лінійний інтеграл і циркуляція. Нехай у просторі, у якому задане поле вектора \mathbf{A} , обрана орієнтована лінія (L) , тобто лінія, для якої зазначено напрямлення її обходу. Тоді *лінійним інтегралом вектора \mathbf{A} по лінії (L)* називається криволінійний інтеграл

$$I = \int_{(L)} A_\tau dL, \quad (11.60)$$

де A_τ - проекція вектора \mathbf{A} на дотичну до (L) , яка проведена в напрямленню обходу (рис. 11.45).

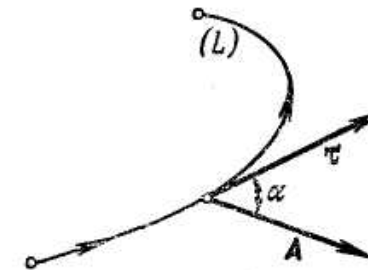


Рис. 11.45.

Так як вектор $d\mathbf{r}$ іде по $\boldsymbol{\tau}$, а $|d\mathbf{r}|=d$, то вираз для лінійного інтеграла можна переписати так:

$$I = \int_{(L)} A \cos \alpha |dr| = \int_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(L)} (A_x dx + A_y dy + A_z dz). \quad (11.61)$$

Лінійний інтеграл є величина скалярна і має звичайні властивості криволінійних інтегралів. При зміні орієнтації лінії (L) він множиться на -1 . Якщо кут α (рис. 11.45) у всіх точках лінії (L) гострий, то $I > 0$, а якщо він тупий, то $I < 0$. Інтеграл

дорівнює нулеві ($I=0$), якщо кут α увесь час прямиий або, що буває частіше, якщо інтеграли по частинам (L), у яких α гострий і α тупий, взаємно знищуються. Фізичний зміст лінійного інтеграла особливо простий, якщо \mathbf{A} — поле сил; у цьому випадку інтеграл (11.60) дорівнює роботі, яку виконує поле, коли точка, на яку діє сила, проходить лінію (L). Якщо (L) — замкнута лінія, то лінійний інтеграл називається *циркуляцією*.

26. Ротор. Нам знадобиться вираз для циркуляції по нескінченно малому контурі (ΔL). Для цього припустимо, що вектор \mathbf{A} розкладено по ортах декартових осей, тобто має вигляд (11.55), а контур (ΔL) розташовано поблизу деякої точки M_0 , і обчислимо інтеграл від першого доданка в правій частині формули (11.61):

$$\oint_{(\Delta L)} A_x(x, y, z) dx = \oint_{(\Delta L)} \left[(A_x)_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) (y - y_0) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) (z - z_0) + \dots \right] dx \quad (11.62)$$

Тут ми скористалися формулою Тейлора, причому індекс «нуль» говорить про те, що зазначені величини беруться в точці M_0 , а многоточками позначені члени вищого порядку малості. Раніше були доведені формули

$$\begin{aligned} \oint_{(\Delta L)} \left[(A_x)_0 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) (x - x_0) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) (y - y_0) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right) (z - z_0) + \dots \right] dx = \\ = \oint_{(\Delta L)} [C_1 + C_2 x] dx = 0 \\ \oint_{(\Delta L)} y dx = -\Delta S \cos(n, \hat{z}), \quad \oint_{(\Delta L)} z dx = \Delta S \cos(n, \hat{y}), \end{aligned}$$

де ΔS — площа фігури, яка обмежена лінією (ΔL) (з точністю до малих вищого порядку цю фігуру можна вважати плоскою), а \mathbf{n} - нормаль до (ΔS), причому напрямлення цієї нормалі погоджено з напрямленням обходу (ΔL) за правилом гвинта. Підставляючи ці результати в (11.62), одержимо

$$\oint_{(\Delta L)} A_x dx = \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 \cos(n, \hat{y}) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \cos(n, \hat{z}) \right] \Delta S + \dots, \quad (11.63)$$

Обчислюючи аналогічно два інших інтеграли в правій частині формули (11.61), для чого досить у формулі (11.63) провести два рази циклічну перестановку координат, і підсумовуючи результати, одержимо

$$\begin{aligned} \oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = & \left\{ \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 \cos(n, \hat{y}) - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \cos(n, \hat{z}) \right] + \right. \\ & + \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right)_0 \cos(n, \hat{z}) - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_0 \cos(n, \hat{x}) \right] + \\ & + \left. \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_0 \cos(n, \hat{x}) - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_0 \cos(n, \hat{y}) \right] \right\} \Delta S + \dots = \quad (11.64) \\ = & \left\{ \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_0 \right] \cos(n, \hat{x}) + \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_0 \right] \cos(n, \hat{y}) + \right. \\ & + \left. \left[\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \right] \cos(n, \hat{z}) \right\} \Delta S + \dots \end{aligned}$$

Отриманий результат стає більш доступним для огляду, якщо увести вектор, який називають *ротором* (вихором, вихровим вектором) поля \mathbf{A} і позначають буквами $\text{rot } \mathbf{A}$, по формулі

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right)_0 \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)_0 \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right)_0 - \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_0 \mathbf{k}. \quad (11.65)$$

Так як цей вектор у кожній точці простору має, узагалі кажучи, інше значення, то *ротор векторного поля утворює нове векторне поле*.

Якщо помітити додатково, що \mathbf{n} , як і кожен одиничний вектор, має розкладання

$$\mathbf{n} = \cos(n, \hat{x}) \mathbf{i} + \cos(n, \hat{y}) \mathbf{j} + \cos(n, \hat{z}) \mathbf{k},$$

то можна переписати формулу (11.64) у більш простому вигляді

$$\oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = (\text{rot } \mathbf{A})_0 \cdot \mathbf{n} \Delta S + \dots = (\text{rot}_n \mathbf{A})_0 \Delta S + \dots; \quad (11.66)$$

в останньому виразі індекс n указує на те, що береться проекція ротора на нормаль \mathbf{n} , а многоточками, як і вище, позначені члени вищого порядку малості. Формула (11.66) і дає вираз для циркуляції по нескінченно малому контурі.

Якщо обидві частини формули (11.66) розділити на ΔS , а потім перейти до границі, то ми одержимо, при природних позначеннях,

$$(\text{rot}_n \mathbf{A})_M = \lim_{(\Delta L) \rightarrow M} \left(\oint_{(\Delta L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} / \Delta S \right). \quad (11.67)$$

Отже, у будь-якій точці M проекція ротора поля на будь-яке напрямлення \mathbf{n} дорівнює відношенню циркуляції поля по нескінченно малому контуру, перпендикулярному до \mathbf{n} , до площі, яка охоплюється цим контуром. Звідси, зокрема, видно, що ротор, визначення (11.65) якого прив'язано до обраної системи координат, насправді зв'язаний з полем інваріантно, тобто не залежить від вибору системи координат, тому що права частина формули (11.67) не залежить від такого вибору, а знання проекції вектора на будь-яке напрямлення визначає цей вектор однозначно.

У той же час формула (11.67) показує, що ротор є псевдовектором, тому що при зміні правила гвинта напрямлення обходу (ΔL) треба змінити, що приведе до зміни знака правої частини.

На рис. 11.46 показано кілька простих прикладів векторних полів і зазначено їхній ротор, який можна підрахувати по формулі (11.65) або ж по формулі (11.67); для цього (ΔL) треба вибрати відповідним чином.

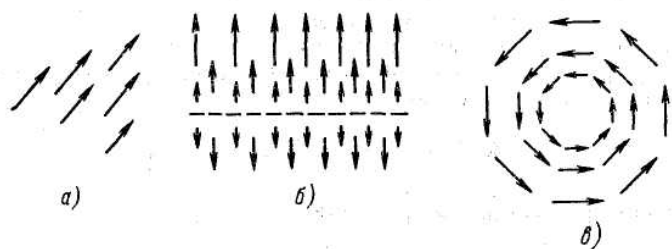


Рис. 11.46.

- а) $\mathbf{A} = \text{const}$, $\text{rot } \mathbf{A} = 0$,
- б) $\mathbf{A} = \lambda y \mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{A} = 0$;
- в) $\mathbf{A} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{A} = 2\omega \mathbf{k}$.

Третій приклад зображує поле швидкостей при обертанні абсолютно твердого тіла навколо осі z з кутовою швидкістю ω ; з рис. 11.46,в випливає, що при такому обертанні поле лінійних

швидкостей має сталий ротор, який дорівнює подвоєному векторові кутової швидкості.

Коші показав, що при довільному русі суцільного середовища — газу, рідини або твердого тіла — кожен малий об'єм бере участь одночасно в декількох рухах, для яких поля швидкостей мають вигляд, який зображено на рис. 11.46 (поступальний, деформаційний і обертальний рухи).

Так як ненульовий ротор виходить лише для обертального руху, то ми бачимо, що при довільному русі середовища ротор поля лінійних швидкостей часток дорівнює в кожній точці подвоєному векторові кутової швидкості відповідної частки. Зазвичай, у загальному випадку ротор виходить у різних точках різним. Таким чином, при плинні рідини або газу відмінність ротора поля лінійних швидкостей від нуля вказує на наявність завихрванності, чим і пояснюється назва «ротор».

Особливо простий вигляд має ротор плоского поля

$$\mathbf{A} = A_x(x, y) \mathbf{i} + A_y(x, y) \mathbf{j};$$

дійсно, у силу формули (11.65) одержуємо в цьому випадку

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

27. Формули Гріна і Стокса. Формули Гріна і Стокса здійснюють перетворення циркуляції вектора по замкнутому контуру в подвійний інтеграл по поверхні, яка обмежена цим контуром, причому формула Гріна відноситься до плоского поля, а формула Стокса — до просторового. Хоча перша формула безпосередньо впливає з другої, ми приведемо спочатку незалежний висновок формули Гріна через його простоту.

Розглянемо циркуляцію плоского поля

$$\mathbf{A} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$$

по замкнутому контуру (L) , який будемо проходити в додатному напрямленні і обрямляючому плоску кінцеву область (S) (рис. 11.47). В силу формули (11.61) розглянуту циркуляцію можна записати у вигляді

$$\Gamma = \oint_{(L)} P(x, y) dx + \oint_{(L)} Q(x, y) dy. \quad (11.68)$$

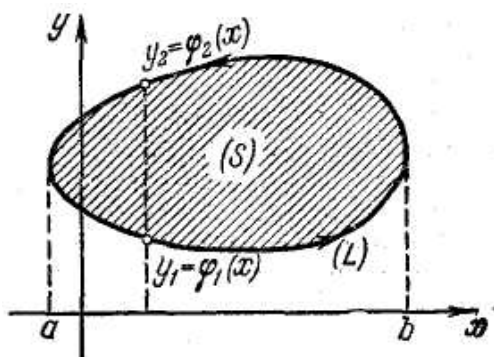


Рис. 11.47.

Перший інтеграл дорівнює (див. рис. 11.47)

$$\int_a^b P(x, y_1) dx + \int_b^a P(x, y_2) dx = - \int_a^b [P(x, y_2) - P(x, y_1)] dx \quad (11.69)$$

Під знаком інтеграла стоїть частковий приріст функції P по y , який можна представити у вигляді інтеграла від похідної

$$P(x, y_2) - P(x, y_1) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$$

Підставляючи в (11.69), одержуємо

$$- \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = - \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Аналогічне перетворення другого інтеграла (11.68) і додавання результатів приводять до формули Гріна

$$\int_{(L)} (P dx + Q dy) = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS \quad (11.270)$$

Цією формулою можна користуватися, якщо усі функції $P, Q, \partial Q/\partial x, \partial P/\partial y$ кінцеві усюди в (S) . З неї випливає, зокрема, твердження про те, що якщо в однозв'язній області (G) задовольняється умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то в цій області вираз

$$P dx + Q dy$$

буде повним диференціалом. Справді, тоді в силу формули (11.70) для будь-якого замкнутого контуру (L) у (G) буде

$$\oint (P dx + Q dy) = 0.$$

Умова однозв'язності потрібна тому, щоб для будь-якого такого (L) уся частина площини, яка розташована усередині (L) , також належала (G) , що не завжди може бути здійснено для багатозв'язної області.

Перейдемо тепер до аналогічної формули в просторі. Ця формула, знайдена в 1864 р. англійським фізиком і математиком Дж. Стоксом (1819—1903), широко застосовується в теорії векторного поля. Нехай задано кінцевий орієнтований контур (L) , який обмежує орієнтовану поверхню (S) , причому орієнтації (L) і (S) погоджені (рис. 11.48). Розіб'ємо (S) на малі площадки $(\Delta S_1), \dots, (\Delta S_m)$ з контурами $(\Delta L_1), \dots, (\Delta L_m)$, які орієтуємо відповідно до орієнтації (L) і (S) . Тоді легко бачити, що

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m \oint_{(\Delta L_i)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}, \quad (11.71)$$

так як в правій частині інтеграли по всіх дугах, які лежать усередині (L) , взаємно знищуються, а інтеграли, що залишилися, саме дають ліву частину формули (11.71).

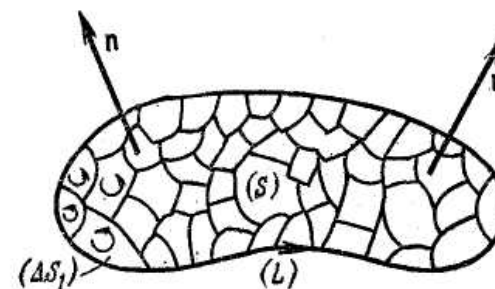


Рис. 11.48.

До окремих доданків у правій частині формули (11.71) можна застосувати представлення (11.66), що дасть

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^m (\text{rot}_n \mathbf{A})_i \Delta S_i + \dots,$$

де індекс i показує, що відповідні значення відносяться до i -ї площадки. Сума в правій частині — це інтегральна сума (п. 2), і

тому, переходячи до границі при нескінченному здрібнюванні розбивки, одержимо

$$\oint_{(L)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(S)} \text{rot}_n \mathbf{A} \, dS (= \int_{(S)} \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}). \quad (11.72)$$

Отже, циркуляція поля по замкнутому контуру дорівнює потокові ротора цього поля через поверхню, яка обмежена зазначеним контуром. Це і є формула Стокса. Вона справедлива, якщо на поверхні (S) поле \mathbf{A} і його ротор кінцеві, а якщо ротор і обертається в нескінченність, то так, щоб інтеграл у правій частині (11.72) схилювався.

Відзначимо, що у формулі Стокса контур (L) може складатися з декількох шматків; тоді вони повинні бути орієнтовані відповідним чином (рис.11.49). Це ж зауваження відноситься і до формули Остроградського (п. 23).

З формули Стокса випливає, зокрема, достатність умов для незалежності інтеграла від контуру інтегрування. Для цього треба розглянути поле

$$\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k},$$

для якого буде $\text{rot} \mathbf{A} = 0$, а потім, натягнувши на будь-який замкнутий контур (L) «плівку» (S) , одержати в силу формули Стокса рівність (9.117). При цьому однозв'язність області, у якій здійснюються всі побудови, потрібна, щоб гарантувати можливість такого натягування плівки: справді, при стягуванні контуру (L) у точку в границях області він сам опише необхідну поверхню (S) (рис. 11.50).

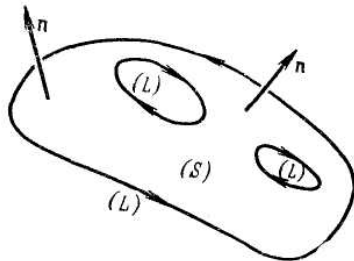


Рис.11.49.

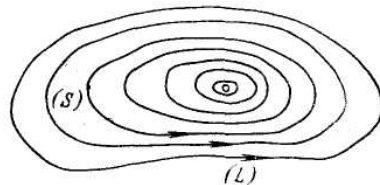


Рис.11.50.

28. Вираз векторних операцій у криволінійній ортогональній системі координат. Розглянемо (рис. 11.51.) яку-небудь криволінійну ортогональну систему координат λ, μ, ν у просторі.

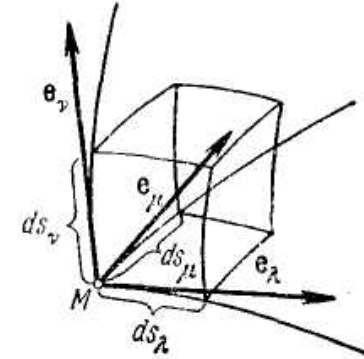


Рис. 11.51.

Тут доречно векторні поля, які природно беруть участь, розкласти в будь-якій точці по системі одиничних векторів, дотичних до координатних ліній:

$$\mathbf{A} = A_\lambda \mathbf{e}_\lambda + A_\mu \mathbf{e}_\mu + A_\nu \mathbf{e}_\nu.$$

Для виразу градієнта скалярного поля u у будь-якій точці M нагадаємо, що при підрахунку градієнта за допомогою формули

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}$$

систему декартових координат можна розташовувати довільно, зокрема, можна прийняти

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{j} = \mathbf{e}_\mu, \mathbf{k} = \mathbf{e}_\nu.$$

Тоді одержимо

$$\text{grad } u = \frac{\partial_\lambda u}{\partial s_\lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{\partial_\mu u}{\partial s_\mu} \mathbf{e}_\mu + \frac{\partial_\nu u}{\partial s_\nu} \mathbf{e}_\nu = \frac{1}{l_\lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda + \frac{1}{l_\mu} \frac{\partial u}{\partial \mu} \mathbf{e}_\mu + \frac{1}{l_\nu} \frac{\partial u}{\partial \nu} \mathbf{e}_\nu,$$

де l_λ, l_μ, l_ν - коефіцієнти Ламе (п. 15).

При підрахунку дивергенції векторного поля не можна безпосередньо скористатися формулою (11.59), так як якщо прийняти, як у попередньому абзаці, $\mathbf{i} = \mathbf{e}_\lambda$ і т.д., то рівність $A_x = A_\lambda$ буде дотримуватися лише в точці M і тому рівність $\partial A_x / \partial x = \partial_\lambda / l_\lambda \partial l_\lambda$, узагалі говорячи, несправедлива. Тут можна

скористатися доведенням, приведеним на початку п. 24, розглянувши потік поля через поверхню нескінченно малого прямокутного паралелепіпеда, обмеженого координатними лініями (рис. 11.51). Розглядаючи суму потоків через грані, які перпендикулярні до лінії λ , одержимо, що ця сума з точністю до малих вищого порядку дорівнює

$$\partial_\lambda(A_\lambda ds_\mu ds_\nu) = \partial_\lambda(l_\mu l_\nu A_\lambda) d\mu d\nu = [\partial(l_\mu l_\nu A_\lambda) / \partial \lambda] d\lambda d\mu d\nu$$

Підсумовуючи потоки через дві інші пари граней і розділивши на елементарний об'єм

$$d\Omega = l_\lambda l_\mu l_\nu d\lambda d\mu d\nu,$$

одержимо

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{l_\lambda l_\mu l_\nu} \left[\frac{\partial(l_\mu l_\nu A_\lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial(l_\lambda l_\nu A_\mu)}{\partial \mu} + \frac{\partial(l_\lambda l_\mu A_\nu)}{\partial \nu} \right].$$

Щоб одержати вираз для ротора, можна виходити з його визначення (11.67). Циркуляція вектора \mathbf{A} по нескінченно малому прямокутнику, перпендикулярному до вектора \mathbf{e}_λ , з точністю до малих вищого порядку, дорівнює (рис. 11.52)

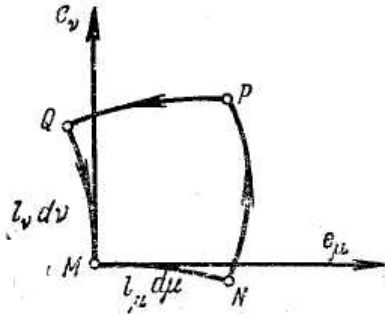


Рис. 11.52.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \left(\int_{NP} - \int_{MQ} \right) - \left(\int_{QP} - \int_{MN} \right) = \partial_\mu(A_\nu ds_\nu) - \partial_\nu(A_\mu ds_\mu) = \partial_\mu(l_\nu A_\nu) d\nu -$$

$$\partial_\nu(l_\mu A_\mu) d\mu = \left[\frac{\partial(l_\nu A_\nu)}{\partial \mu} - \frac{\partial(l_\mu A_\mu)}{\partial \nu} \right] d\mu d\nu.$$

Виконуючи ділення на елементарну площадку

$$dS = l_\mu l_\nu d\mu d\nu,$$

а потім циклічну перестановку індексів, одержимо

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\lambda = \frac{1}{l_\mu l_\nu} \left[\frac{\partial(l_\nu A_\nu)}{\partial \mu} - \frac{\partial(l_\mu A_\mu)}{\partial \nu} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\mu = \frac{1}{l_\lambda l_\nu} \left[\frac{\partial(l_\lambda A_\lambda)}{\partial \nu} - \frac{\partial(l_\nu A_\nu)}{\partial \lambda} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\nu = \frac{1}{l_\lambda l_\mu} \left[\frac{\partial(l_\mu A_\mu)}{\partial \lambda} - \frac{\partial(l_\lambda A_\lambda)}{\partial \mu} \right].$$

Для плоских полів усі зазначені формули природно спрощуються: треба покласти $A_\nu=0$, $l_\nu=1$ і вважати усі величини, які беруть участь, такими, що не залежать від ν .

29. Загальна формула для перетворення інтегралів. Виявляється, що формули Стокса, Остроградського й аналогічні формули в багатомірному просторі можна записати у вигляді єдиної формули. Для цього припустимо, що в k -мірному просторі E_k з мірою Лебега (п. 20) дано орієнтоване $(p+1)$ -мірне ($p=1, 2, \dots, k-1$) різноманіття (Ω) з p -мірною границею (Ω') . Орієнтація (Ω) породжує відповідну орієнтацію (Ω') за наступним правилом: якщо деякий малий $(p+1)$ -мірний тетраедр $A_1 A_2 A_3 \dots A_{p+1} A_{p+2}$, вершини якого перераховані відповідно до орієнтації (Ω) , розташовано так, що його грань $A_1 A_2 A_3 \dots A_{p+1}$ належить (Ω') , то цей порядок вершин повинний відповідати орієнтації (Ω') . (Якщо (Ω) — поверхня в тривимірному просторі, то це правило збігається зі звичайним правилом узгодження орієнтації поверхні і її контуру).

Нехай розглядається інтеграл вигляду (11.54), де $(S)=(\Omega')$. Підінтегральний вираз

$$\omega = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_p=1}^k u_{m_1 m_2 \dots m_p}(t_1, \dots, t_k) dt_{m_1} \dots dt_{m_p}, \quad (11.73)$$

однорідний, виміру p відносно dt_1, \dots, dt_k , називається диференціальною формою виміру p .

Над диференціальними формами можна робити деякі дії. Так, форми однакового виміру можна складати; власне кажучи, і вираз (11.73) являє собою суму найпростіших форм-одночленів. Форми можна перемножувати, причому відповідно до визначення інтеграла (11.53) прийнято вважати, що при перестановці двох диференціалів в одночленній формі вона множить на -1 , а при

наявності двох однакових диференціалів вона дорівнює нулеві. Форму можна множити на константу або на функцію від t_1, t_2, \dots, t_k ; утім, останню можна розглядати як форму нульового виміру. При цьому дотримуються звичайні правила додавання і множення, однак множення, узагалі говорячи, не перестановочне.

Диференціальну форму можна диференціювати за правилом

$$d\omega = d\left(\sum u_{m_1, m_2, \dots, m_p} dt_{m_1} \dots dt_{m_p}\right) = \sum du_{m_1, m_2, \dots, m_p} dt_{m_1} \dots dt_{m_p} =$$

$$= \sum \left(\frac{\partial u_{m_1, m_2, \dots, m_p}}{\partial t_1} dt_1 + \dots + \frac{\partial u_{m_1, m_2, \dots, m_p}}{\partial t_k} dt_k \right) dt_{m_1} \dots dt_{m_p}, \quad (11.73)$$

де треба ще розкрити дужки і привести подібні члени. Як бачимо, при диференціюванні форми її вимір підвищується на одиницю.

Виявляється, що при таких визначеннях має місце наступна загальна формула перетворення інтеграла (11.54):

$$\int_{(\Omega')} \dots \int \omega = \int_{(\Omega)} \dots \int \omega. \quad (11.74)$$

Розглянемо, наприклад, випадок $k=2, p=1$. Якщо писати x, y замість t_1, t_2 і позначити $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, то

$$d\omega = dPdx + Qdy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

звідки формула (11.74), з точністю до позначень, здобуває вигляд формули Гріна (11.70).

Мікромодуль 28

Приклади розв'язання типових задач

Розглянемо приклади застосування криволінійних інтегралів до задач механіки та термодинаміки.

1. Розглянемо задачу про роботу силового поля, заданого силою

$$\mathbf{F} = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Якщо проекції P, Q, R сили \mathbf{F} на осі координат задовольняють умовам

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (*)$$

то робота в цьому силовому полі, яка виражається криволінійним інтегралом

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

не залежить від форми шляху. Таке силове поле називається *потенційним* або *консервативним*. Функції $u(x, y, z)$, для якої вираз

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

є повним диференціалом, називається *потенціалом* силового поля. Можна сказати, що *робота в потенційному силовому полі дорівнює різниці потенціалів наприкінці і на початку шляху*.

Розглянемо два приклади.

2. Поле тяжіння. Виберемо в площині руху матеріальної точки маси m координатні осі, причому вісь Oy направимо вертикально вниз (рис. 11.43).

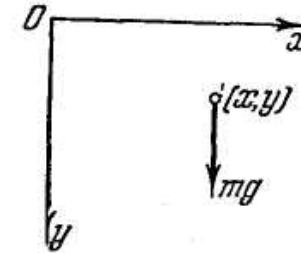


Рис. 11.43.

Проекції сили тяжіння на осі координат будуть дорівнювати відповідно

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = mg,$$

де g — прискорення сили тяжіння. Так як функції P і Q сталі, то вони, мабуть, задовольняють умові (*) (і ліва і права частини його обертаються в нуль), і отже, робота при переміщенні матеріальної точки з точки $M_0(x_0, y_0)$ у точку $M(x, y)$ виразиться інтегралом

$$A = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} mg dy = mg \int_{y_0}^y dy = mgy - mgy_0.$$

Ця робота додатна, якщо $y > y_0$, тобто якщо матеріальна точка падає, і від'ємна, якщо точка піднімається. Потенційна функція $u(x, y)$ має вигляд

$$u(x, y) = mgy + C.$$

Зазвичай довільну сталу C вибирають так, щоб $u(x, y) = 0$ при $y = 0$. Тоді потенціалом поля тяжіння буде функція mgy .

3. Електричне поле, яке створюється точковим зарядом. Помістимо заряд $+q_1$ в початку координат. Тоді сила \mathbf{E} , з яким цей заряд діє на одиничний додатний заряд, поміщений у точку $M(x, y, z)$, визначиться за законом Кулона:

$$|\mathbf{E}| = \frac{q_1}{r^2},$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ - відстань точки від початку координат (закон Кулона записаний в системі одиниць CGSE для вакууму). Напрявлення сили \mathbf{E} збігається з напрямленням радіуса-вектора \overline{OM} . Тому (рис. 11.44)

$$P = |\mathbf{E}| \cdot \cos \alpha = \frac{q_1}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{q_1 x}{r^3},$$

$$Q = |\mathbf{E}| \cdot \cos \beta = \frac{q_1}{r^2} \frac{y}{r} = \frac{q_1 y}{r^3},$$

$$R = |\mathbf{E}| \cdot \cos \gamma = \frac{q_1}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{q_1 z}{r^3}.$$

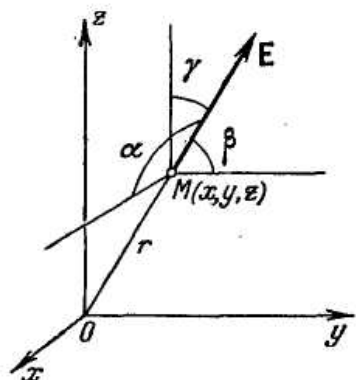


Рис. 11.44.

З огляду на те, що

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

легко знайдемо за правилом диференціювання складеної функції всі часткові похідні функцій P, Q і R :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3q_1 x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{3q_1 xy}{r^5}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3q_1 y}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{3q_1 xy}{r^5} \quad \text{і т.д.}$$

Ми бачимо, що

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Можна переконатися, що виконуються й інші дві умови (*). Отже, розглянуте поле потенційне. Знайдемо його потенціал $u(x, y, z)$. Щоб уникнути стомлюючого інтегрування, помітимо, що

$$\begin{aligned} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= q_1 \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3} = \\ &= q_1 \frac{\frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz}{r^2} = q_1 \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{q_1}{r}\right). \end{aligned}$$

Тому функція

$$-\frac{q_1}{r} + C$$

і є потенціалом. Вибираючи C так, щоб потенціал на нескінченності дорівнював нулеві, одержимо

$$u(x, y, z) = -\frac{q_1}{r} = -\frac{q_1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Отже, робота сил електричного поля при переміщенні одиничного заряду з точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ у точку $M(x, y, z)$ буде дорівнювати

$$A = -\frac{q_1}{r} + \frac{q_1}{r_0},$$

де r_0 і r — довжини радіусів-векторів точок M_0 і M . Так як заряди одноіменні, то робота додатна при їхньому віддаленні один від одного ($r > r_0$) і від'ємна при їхньому зближенні ($r < r_0$).

4. Розглянемо тепер додаток криволінійних інтегралів до задач термодинаміки.

Будемо під станом речовини розуміти сукупність величин, які характеризують її фізичний стан. У термодинаміці зазвичай цими величинами служать: тиск p , об'єм v і абсолютна температура T . Отже, стан задається трьома величинами: p , v , T . Але вони зв'язані між собою одним рівнянням — рівнянням, яке називається рівнянням стану. Тому стан фактично визначається двома величинами, наприклад p і v (третя, T , є функція p і v).

Геометрично кожному стану відповідає точка $M(p, v)$ у площині Opv , а кожному процесові (що складається в послідовній зміні стану тіла) — лінія. Вона називається *діаграмою процесу*. У тому випадку, коли відбувається повернення до вихідного стану, процес називають *круговим* або *циклічним*; його діаграмою буде замкнута лінія.

Нехай дано ідеальний газ, тобто газ, який підкоряється рівнянню стану Менделєєва — Клапейрона:

$$pv = RT \quad (R = \text{const}).$$

Поставимо перед собою задачу — знайти кількість тепла Q , поглиненого (або виділеного) газом при процесі, зображеному даною діаграмою L . На лінії L виділимо довільний відрізок від точки $M(p, v)$ до точки $M_1(p+dp, v+dv)$, що представляє «нескінченно малий процес»; відповідну йому кількість тепла позначимо через ΔQ . Це тепло йде на збільшення механічної енергії часток газу, тобто в кінцевому рахунку на збільшення dT температури, і на роботу, вироблену при зміні об'єму dv . Ми знайдемо елемент dQ (головну частину ΔQ , лінійну відносно dT і dv), якщо припустимо, що тепло яке поглинається є сума двох кількостей тепла:

1) затрачуваного на збільшення температури dT при сталому об'ємі v ,

2) затрачуваного на роботу розширення dv при сталій температурі T .

Перше дорівнює $c_v dT$, де c_v — теплоємність газу при сталому об'ємі, а друге $p dv$.

Отже, при відповідному виборі одиниць виміру

$$dQ = c_v dT + p dv.$$

Відповідно до рівняння Менделєєва — Клапейрона

$$dT = (v/R) dp + (p/R) dv;$$

вносячи це у вираз для dQ , одержимо

$$dQ = (c_v/R) v dp + [(c_v + R)/R] p dv.$$

З'ясуємо зміст виразу $c_v + R$. З двох останніх формул при сталому тиску p , $dp = 0$ знаходимо

$$dT = (p/R) dv, \quad dQ = (c_v + R) (p/R) dv,$$

тобто

$$dQ = (c_v + R) dT,$$

звідки видно, що коефіцієнт при dT є просто теплоємність c_p при сталому тиску:

$$c_v + R = c_p \quad (*)$$

(c_p і c_v вважаємо сталими). Отже, остаточно:

$$dQ = (c_v/R) v dp + (c_p/R) p dv.$$

Для того щоб знайти кількість тепла Q , залишається проінтегрувати вираз для dQ по діаграмі процесу L :

$$Q = \int_L (c_v/R) v dp + (c_p/R) p dv.$$

Тут умови незалежності інтеграла від шляху інтегрування не виконуються. Дійсно,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{R} v \right) = \frac{c_v}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{R} p \right) = \frac{c_p}{R},$$

але $c_p \neq c_v$, як це впливає зі співвідношення (*). Таким чином, величина Q істотно залежить від контуру L , тобто Q не є функцією p і v . Наше міркування показує, що кількість яка поглинається (виділяється) тепла не є функція стану газу, вона залежить не тільки від кінцевого стану, але і від того, яким чином газ прийшов до цього стану, іншими словами, від сукупності всіх проміжних станів. Зокрема, круговий процес (*цикл*) може привести до поглинання або виділення тепла.

У термодинаміці уводиться величина S , яка характеризує процес,— так називана *ентропія*. Визначається ентропія інтегралом

$$S = \int_L \frac{dQ}{T},$$

де L — діаграма процесу.

Для ідеального газу знаходимо

$$S = \int_L \frac{dQ}{T} = \int_L \frac{c_v}{RT} v dp + \frac{c_p}{RT} p dv,$$

і так як $RT=pv$, то

$$S = \int_L \frac{c_v}{p} dp + \frac{c_p}{v} dv$$

Підінтегральний вираз є повній диференціал, тому що

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{c_v}{p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{c_p}{v} \right) = 0,$$

і таким чином, ентропія є функцією стану газу. Її величина не залежить від того, як газ змінюється від початкового стану до кінцевого.

Інтегруючи, отримуємо

$$S = \ln C p^{c_v} v^{c_p}.$$

Якщо процес адиабатичний ($Q=\text{const}$, $dQ=0$, виходить, і $dS=0$, тобто $S=\text{const}$), то

$$p^{c_v} v^{c_p} = \text{const},$$

звідки

$$pv^k = \text{const},$$

де

$$k = \frac{c_p}{c_v} > 1.$$

Це — рівняння діаграми адиабатичного процесу (так називаної адиабати) в ідеальному газі.

5. Обчислити криволінійний інтеграл по довжині

$$\int_L y ds,$$

де L — дуга параболи $y^2=2x$ від точки $(0, 0)$ до точки $(4, \sqrt{8})$. Тут лінію зручно задати у формі, розв'язанної відносно x : $x=y^2/2$. Тоді $x'=y$ і інтеграл перетворюється до вигляду

$$\int_L y ds = \int_0^{\sqrt{8}} y \sqrt{1+y^2} dy = \frac{(1+y^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{26}{3}.$$

За допомогою криволінійних інтегралів по довжині особливо зручно розв'язувати задачу про відшукування маси матеріальної лінії, якщо лінійна щільність δ задана не як функція довжини лінії, а як функція координат x і y точки M лінії L :

$$\delta = \delta(x, y).$$

Тоді маса лінії дорівнює

$$\int_L \delta(x, y) ds.$$

Укажемо одну геометричну задачу, яка просто розв'язується за допомогою криволінійного інтеграла по довжині. Нехай дано циліндричну поверхню G , напрямленням якої служить лінія L у площині Oxy і твірні якої перпендикулярні до цієї площини (рис. 11.45). Обчислимо площу Q частини поверхні, заключеної між лінією L і якою-небудь лінією L_1 на тій же поверхні, яка лежить вище L . Апліката точки M лінії L_1 є функцією координат точки P лінії L :

$$z = f(x, y).$$

У довільній точці P основи візьмемо нескінченно малий елемент дуги ds . Йому відповідає площа поверхні Δq , головною частиною якої, пропорційної ds , буде площа прямокутника з основою ds і висотою, яка дорівнює висоті поверхні в точці P .

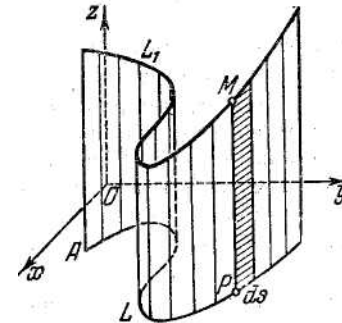


Рис. 11.45.

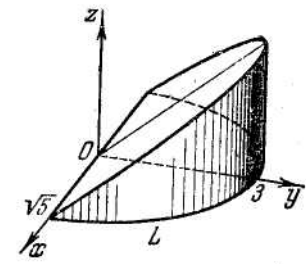


Рис. 11.46.

Отже, диференціал dq шуканої величини дорівнює
 $dq=f(x,y) ds$.

Інтегруючи цей вираз по лінії L , одержимо

$$Q = \int_L f(x,y) ds.$$

6. Знайдемо площу Q бічної поверхні половини еліптичного циліндра

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

усіченого площиною $z=y$ (рис. 11.46).

Маємо

$$Q = \int_L z ds = \int_L y ds,$$

де L — дуга еліпса $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9}, y \geq 0$.

Обчислимо інтеграл. Параметричні рівняння контуру інтегрування:

$$x = \sqrt{5} \cos t, \quad y = 3 \sin t.$$

Отже

$$Q = \int_0^\pi 3 \sin t \sqrt{9 \cos^2 t + 5 \sin^2 t} dt = 3 \int_0^\pi \sin t \sqrt{4 \cos^2 t + 5} dt.$$

Покладаючи $\cos t = u$, знаходимо

$$Q = \int_{-1}^1 \sqrt{4u^2 + 5} du = 6 \int_0^1 \sqrt{4u^2 + 5} du.$$

Скориставшись табличним інтегралом ($a=2, b=\sqrt{5}$) отримаємо

$$Q = 3 \left[u \sqrt{4u^2 + 5} + \frac{5}{2} \ln |2u + \sqrt{4u^2 + 5}| \right]_0^1 = 3 \left(3 + \frac{5}{4} \ln 5 \right).$$

Обчислення інтеграла по поверхні.

7. Знайдемо площу частини поверхні параболоїда обертання

$$2z = x^2 + y^2,$$

заключеної усередині циліндра $x^2 + y^2 = R^2$.

Тут $z'_x = x, z'_y = y$, тому

$$S = \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy,$$

де область D — проекція цікавлячої нас частини поверхні на площину Oxy — є круг радіуса R з центром на початку координат. Переходячи до полярних координат, одержимо

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{1 + r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} [(1 + R^2)^{3/2} - 1].$$

8. Обчислимо інтеграл

$$\iint_S x dy dz + dx dz + xz^2 dx dy,$$

де S — зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, заключеної у першому октанті.

Позначимо проекції поверхні інтегрування на координатні площини відповідно через D_1, D_2 і D_3 . (рис. 11.47).

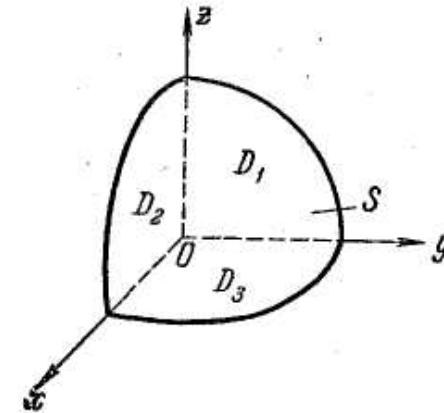


Рис. 11.47.

Це будуть чверті кругів радіуса 1. Тоді

$$I_1 = \iint_S x dy dz = \iint_{D_1} \sqrt{1 - y^2 - z^2} dy dz,$$

$$I_2 = \iint_S dx dz = \iint_{D_2} dx dz,$$

$$I_3 = \iint_S xz^2 dx dy = \iint_{D_3} x(1 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Другий інтеграл дорівнює просто площі області D_2 , тобто $\pi/4$. Перший і третій інтеграли обчислимо, перейшовши до полярних координат:

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{6},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^1 r(1-r^2) r dr = 1 \cdot \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{15}.$$

Таким чином

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{2}{15} = \frac{5\pi}{12} + \frac{2}{15}.$$

9. Обчислимо інтеграл

$$I = \iiint_S z \cos \gamma d\sigma,$$

де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Тут аплікату z не можна виразити однозначною функцією від x і y для всієї поверхні інтегрування S . Розіб'ємо поверхню на дві частини: S_1 , яка лежить над площиною Oxy , і S_2 , яка лежить під нею.

Їхніми рівняннями відповідно будуть

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{і} \quad z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

маємо

$$I = \iint_S z \cos \gamma d\sigma = \iint_{S_1} z \cos \gamma d\sigma + \iint_{S_2} z \cos \gamma d\sigma.$$

Перейдемо до подвійних інтегралів: S_1 — зовнішня сторона частини сфери, яка розташована над площиною Oxy , — є верхньою стороною напівсфери, і тому

$$\iint_{S_1} z \cos \gamma d\sigma = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

де D - круг $x^2 + y^2 \leq 1$;

S_2 - зовнішня сторона напівсфери, яка розташована під площиною Oxy , — є, навпаки, її нижньою стороною, виходить,

$$\iint_{S_2} z \cos \gamma d\sigma = - \iint_D -\sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

де D - той же ж круг.

У результаті одержуємо

$$I = \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy + \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = 2 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy.$$

Так як інтеграл

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy$$

виражає об'єм полусфери радіуса 1, то він дорівнює $2/3\pi$. Тому $I=4/3\pi$.

Розглянемо тепер зв'язок між інтегралом по замкнутій поверхні і деяким потрійним інтегралом по об'єму, який обмежений цією поверхнею:

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] d\sigma,$$

де S — границя області Ω і інтегрування по S виконується по її зовнішній стороні.

Ця формула називається *формулою Остроградського*.

Розглянемо приклад обчислення інтегралу по формулі Остроградського

10. Обчислимо інтеграл

$$I = \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) d\sigma,$$

де S - зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

По формулі Остроградського

$$I = \iiint_{\Omega} (1+1+1) dx dy dz = 3V = 4\pi R^3,$$

так як об'єм кулі $V = (4/3)\pi R^3$.

Векторне поле і векторні лінії

11. Нехай тверде тіло обертається із сталою кутовою швидкістю ω .

Знайдемо поле лінійних швидкостей точок цього тіла.

Як відомо з кінематики, лінійна швидкість \mathbf{v} дорівнює векторному добуткові

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r},$$

де ω - вектор кутової швидкості (тобто вектор, відкладений на осі обертання і чисельно дорівнює величині кутової швидкості; цей

вектор спрямований так, що якщо дивитися з його кінця, обертання здається таким, яке виконується проти годинної стрілки), а \mathbf{r} — радіус-вектор точки M тіла яке обертається щодо якої-небудь точки осі обертання. Вибравши цю нерухому точку за початок координат і направивши вісь обертання по осі Oz (рис. 11.48), знайдемо проєкції вектора \mathbf{v} .

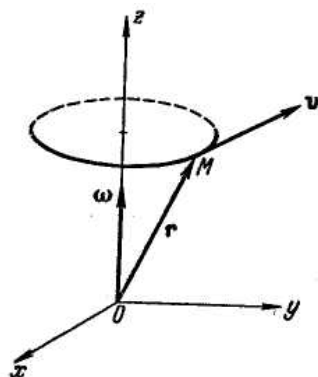


Рис. 11.48.

Маємо

$$\omega = \omega \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

тоді

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

Таким чином, $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$, тобто поле є плоским.

12. Знайдемо векторні лінії поля лінійних швидкостей тіла, яке обертається з сталою кутовою швидкістю ω навколо осі Oz . Це поле визначене функцією (див. приклад 11)

$$\mathbf{A}(P) = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}.$$

На рис. 11.48 видно, що векторними лініями такого поля служать кола, які лежать у площинах, які паралельні площині Oxy з центром на осі Oz . Рівняння таких кіл мають вигляд

$$x^2 + y^2 = R, \quad z = z_0 = \text{const}.$$

Легко перевірити, що рівність

$$\frac{dx}{-\omega y} = \frac{dy}{\omega x}$$

дотримується. Продиференціювавши рівняння кола, отримаємо

$$2x dx + 2y dy = 0,$$

тобто

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}.$$

Помноживши знаменники цієї рівності на ω , ми і прийдемо до рівності, яку доводимо.

Потік вектора. Дивергенція

13. Знайдемо потік радіуса-вектора \mathbf{r} через бічну поверхню (S_1), верхню основу (S_2) і нижню основу (S_3) прямого циліндра радіуса R і висотою H , якщо початок координат лежить у центрі нижньої основи циліндра, а вісь циліндра збігається з віссю Oz (рис. 11.49).

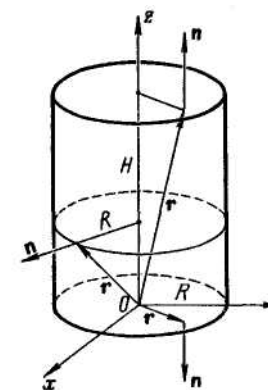


Рис. 11.49.

На всіх поверхнях \mathbf{n} має напрямлення зовнішньої нормалі. На бічній поверхні S_1 зовнішня нормаль \mathbf{n} паралельна площині Oxy і проєкція r_n дорівнює R . Тому

$$K_1 = \iint_{S_1} R d\sigma = R \cdot 2\pi R H = 2\pi R^2 H.$$

На верхній основі S_2 нормаль \mathbf{n} спрямована паралельно осі Oz і $r_n = H$.

Отже

$$K_2 = \iint_{S_2} H d\sigma = \pi R^2 H.$$

Нарешті, на нижній основі S_3 проекція $r_n=0$ і $K_3=0$.

14. Коли векторне поле $\mathbf{A}(P)$ представляє поле швидкостей рідини, величина потоку K дає різницю між кількістю рідини, яка витікає з області Ω , і кількістю рідини, яка втікає в цю область.

Якщо $K=0$, то в область Ω рідини втікає стільки ж, скільки і витікає. Так, наприклад, буде для будь-якої області, розташованої в потоці води, яка тече в річці.

Якщо ж величина K відмінна від нуля, наприклад, додатна, то з області Ω є джерела, які живлять потік рідини. Навпаки, якщо величина K від'ємна, те це вказує на наявність стоків — місць, де рідина убуває з потоку.

15. Нехай дано однорідне поле

$$\mathbf{A}(P) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

де a, b і c — сталі. Ясно, що дивергенція цього поля дорівнює нулеві:

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(P) = 0.$$

Якщо всі частки рідини мають ту саму швидкість, тобто рідина рухається поступально, як тверде тіло, то в такому потоці не повинно бути ні джерел, ні стоків. Потік такої рідини через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює нулеві.

16. Обчислимо дивергенцію поля лінійних швидкостей тіла, яке обертається (див. приклад 11)

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}.$$

Тут

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial(-\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0.$$

Якщо уявити собі рідину, яка обертається, як тверде тіло, то ясно, що в такому потоці немає ні джерел, ні стоків.

17. Обчислимо дивергенцію поля радіуса-вектора \mathbf{r} . Маємо

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Тому

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Кожна точка поля є як би джерелом сталої потужності. Користуючись векторною формою теореми Остроградського, відразу одержуємо, що потік радіуса-вектора через будь-яку замкнуту поверхню дорівнює потроєному об'ємові, обмеженому цією поверхнею:

$$K = \iiint_{\Omega} 3 dV = 3V.$$

Циркуляція і ротор векторного поля

18. Обчислимо циркуляцію вектора поля лінійних швидкостей тіла, яке обертається

$$\mathbf{v} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$$

уздовж контуру L , який лежить цілком у площині Π (рис. 11.50), нормаль \mathbf{n} до якої утворить з осями координат кути α, β, γ . Напрявлення обходу контуру L і напрямлення нормалі \mathbf{n} погоджені між собою так само, як у теоремі Стокса. Відповідно до визначення циркуляція дорівнює

$$\oint_L -\omega y dx + \omega x dy.$$

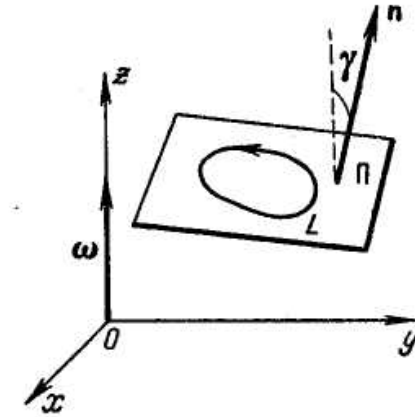


Рис. 11.50.

Застосуємо для обчислення цього інтеграла теорему Стокса

$$\omega \oint_L -y dx + x dy = \omega \iint_D 2 dx dy,$$

де D - область, яка обмежена контуром L . Інтегрування ведеться по верхній стороні площини Π , і тому

$$dx dy = \cos \gamma d\sigma$$

Так як $\cos \gamma = \text{const}$, то циркуляція дорівнює

$$2\omega \cos \gamma \iint_D d\sigma = 2\omega \cos \gamma S,$$

де S — площа області, обмеженої контуром L . Помітимо ще, що $\omega \cos \gamma = \omega_n$ — проекція вектора ω на напрямлення вектора n . Тому остаточно вираз для циркуляції прийме вигляд

$$\oint_L -\omega y dx + \omega x dy = 2\omega_n S.$$

(Якщо L — коло радіуса R , то циркуляція дорівнює $2\omega_n \pi R^2$.) З цієї формули випливає, що якщо площину Π повертати, тобто змінювати кут γ , то величина циркуляції буде змінюватися. Найбільшою вона буде, коли $\gamma = 0$, тобто коли площина Π паралельна площині Oxy і нормаль n до неї паралельна векторові кутової швидкості ω . Якщо ж $\gamma = \pi/2$, тобто нормаль до площини перпендикулярна до вектора ω , то циркуляція дорівнює нулеві.

Ясно також, що якщо змінити сторону площини Π , то вектор n змінить напрямлення і проекція ω_n стане від'ємною. Тому і циркуляція також буде величиною від'ємною.

Установимо тепер фізичний зміст циркуляції вектора у випадку, коли $A(P)$ — поле швидкостей рідини, яка тече. Прийmemo для простоти, що контур L — коло, яке розташоване в деякій площині. Припустимо, що коло є периферією коліщати з радіальними лопатками, що може обертатися навколо осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до його площини. Якщо циркуляція буде дорівнювати нулеві, то коліща буде залишатися нерухомим: сили, що діють на лопатки, врівноважують одна одну. Якщо циркуляція не дорівнює нулеві, то коліща буде обертатися, причому тим швидше, чим більше величина циркуляції. Якщо, наприклад, рідина обертається, як тверде тіло, навколо осі Oz і якщо вісь коліщати збігається з напрямленням цієї осі, то, як ми тільки що бачили, циркуляція дорівнює $2\omega S$, де S — площа коліщати. Таким чином, відношення циркуляції до площі коліщати дорівнює подвоєній кутовій швидкості і не залежить від розмірів коліщати.

Якщо вісь коліщати нахилити до осі Oz , то зазначене відношення зменшиться і стане рівним $2\omega_n$, де ω_n — проекція вектора ω на напрямлення осі коліщати. Нарешті, якщо вісь коліщати стане перпендикулярною до осі обертання рідини, то, мабуть, коліща буде нерухомим.

Електромагнітне поле.

Одним з найважливіших додатків понять векторного аналізу є вивчення електромагнітних полів. Ми розглянемо кілька простих прикладів.

19. Електричне поле. Нехай E — поле напруженості точкового заряду q , поміщеного в початок координат. Відповідно до приклада 3, який розглядався в мікромодулі 28, напруженість поля в точці $P(x, y, r)$ дорівнює

$$E = \frac{qx}{r^3} i + \frac{qy}{r^3} j + \frac{qz}{r^3} k,$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ відстань від точки P до початку координат.

Векторними лініями такого поля служать промені, що виходять з початку координат, тобто з заряду.

Поле напруженості E є полем потенційним (див. мікромодуль 28, приклад 3). Зазвичай за потенціал ϕ поля E беруть функцію $u = -q/r$, узятую з протилежним знаком: $\phi = q/r$.

Таким чином, різниця потенціалів між двома точками поля дорівнює узятій з протилежним знаком роботі, яка виконується силами поля при переміщенні одиничного додатного заряду з першої точки в другу. Легко перевірити, що

$$E = \text{grad}(-q/r) = -\text{grad } \phi.$$

Це означає також, що $\text{rot } E = -\text{rot grad } \phi = 0$.

Знайдемо дивергенцію поля напруженості. Маємо

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{qx}{r^3} \right) = q \frac{r - 3x \frac{\partial r}{\partial x}}{r^4} = q \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{qy}{r^3} \right) = q \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{qz}{r^3} \right) = q \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

Звідси

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q}{r^5} [3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0.$$

Отже, потік вектора \mathbf{E} через будь-яку замкнуту поверхню, яка не містить усередині себе початку координат, дорівнює нулеві.

Якщо ж початок координат, тобто заряд, утримується усередині поверхні, то такого висновку зробити вже не можна, тому що на початку координат поле не визначене.

Обчислимо потік вектора \mathbf{E} через сферу радіуса R з центром на початку координат. На поверхні цієї сфери напрямлення вектора \mathbf{E} збігається з напрямленням нормалі, тобто радіуса-вектора. Тому

$$E_n = |\mathbf{E}| = \frac{q}{R^2}.$$

Звідси потік K дорівнює

$$K = \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = 4\pi q.$$

Ми бачимо, що величина потоку не залежить від радіуса сфери R . Легко показати, що величина потоку залишається незмінною для будь-якої замкнутої поверхні, яка оточує початок координат.

Візьмемо таку довільну поверхню і помістимо усередину неї яку-небудь сферу з центром на початку координат (рис. 11.51).

Розіб'ємо тепер тіло, яке обмежене поверхнею, на кілька конусів з вершиною на початку координат. Кожен такий конус має вигляд, який показано на рис. 11.52

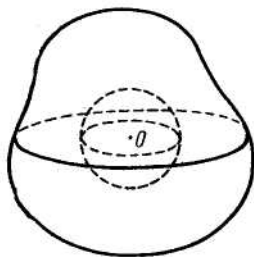


Рис. 11.51

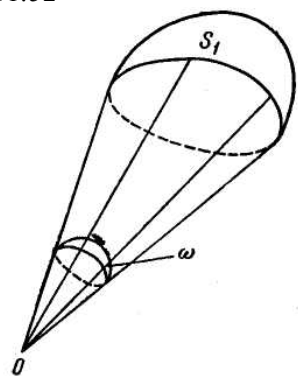


Рис. 11.52.

Так як частина конуса, яка заключена між ділянкою сфери і даною поверхнею, є векторною трубкою, а дивергенція поля дорівнює нулеві, то потоки через ділянки сфери і поверхні рівні між собою. Складаючи потоки через усі такі ділянки поверхні, ми й одержуємо, що потік вектора \mathbf{E} через будь-яку поверхню, яка оточує початок координат, дорівнює потокові через сферу, тобто $4\pi q$. Будемо вважати, що внутрішня сфера має радіус, який дорівнює одиниці. Тоді потік через ділянку поверхні S_i (рис. 11.52) буде дорівнювати $q\omega$, де ω — площа поверхні сфери одиничного радіуса, у яку проектується ділянка поверхні. Величину ω називають *тілесним кутом*, під яким поверхня S_i видна з початку координат.

Нехай тепер поле створене системою електричних зарядів q_1, q_2, \dots, q_m . Позначимо через \mathbf{E}_i напруженість поля, створюваного зарядом q_i , а через \mathbf{E} — результуючу напруженість. Тоді

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^m \mathbf{E}_i.$$

Проекція вектора \mathbf{E} на напрямлення нормалі \mathbf{n} до будь-якої поверхні дорівнює

$$E_n = \sum_{i=1}^m E_{in}.$$

Тобто, потік через поверхню дорівнює

$$K = \iint_S E_n dS = \sum_{i=1}^m \iint_S E_{in} dS = 4\pi \sum q_i,$$

причому остання сума поширена тільки на ті заряди q_i , які лежать усередині розглянутої поверхні.

Ця формула, яка грає важливу роль у вивченні електричних полів, називається *електростатичною теоремою Гаусса*.

Нехай, нарешті, ми маємо справу з безперервним розподілом заряду. Позначимо через ρ щільність розподілу заряду. Якщо щільність заряду не стала, то ρ є функцією точки поля P , тобто її координат. Сумарний заряд в даному об'ємі Ω буде дорівнювати

$$\iiint_{\Omega} \rho dv.$$

Застосувавши до цього заряду теорему Гаусса, ми одержимо

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dv,$$

де S -границя області Ω .

Перетворимо перший інтеграл, уводячи $\text{div } \mathbf{E}$:

$$\iiint_{\Omega} \text{div } \mathbf{E} dv = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho dv.$$

Звідси

$$\iiint_{\Omega} (\text{div } \mathbf{E} - 4\pi\rho) d\Omega = 0.$$

Оскільки інтеграл дорівнює нулеві для будь-якої області інтегрування Ω , то одержимо

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho. (*)$$

Приємо без доведення про те, що властивість електричного поля бути потенційним зберігається при безперервному розподілі зарядів.

Позначимо його потенціал через ϕ ; тоді $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. Відповідно до формули

$$\text{div grad } u = (\partial^2 u / \partial x^2) + (\partial^2 u / \partial y^2) + (\partial^2 u / \partial z^2)$$

одержуємо

$$\text{div } \mathbf{E} = -\text{div grad } \phi = -\Delta\phi. (**)$$

З рівностей (*) і (**) одержимо

$$\Delta\phi = (\partial^2 \phi / \partial x^2) + (\partial^2 \phi / \partial y^2) + (\partial^2 \phi / \partial z^2) = -4\pi\rho.$$

Отримане співвідношення називається *рівнянням Пуассона*. У тих точках поля, де щільність заряду ρ дорівнює нулеві, воно перетворюється в *рівняння Лапласа*: $\Delta\phi = 0$.

20. Магнітне поле прямолінійного струму. Нехай магнітне поле створено сталим струмом I , який протікає по нескінченному прямолінійному провіднику. Знайдемо вектор напруженості магнітного поля, створюваного цим струмом. Відповідно до закону Біо—Савара елемент струму створює в даній точці напруженість магнітного поля, яка рівна по величині

$$k \frac{I \sin \alpha ds}{r^2},$$

де I — струм, ds — елемент довжини провідника, r - відстань від елемента струму до розглядаємої точки, α — кут між напрямленням струму і прямою, яка з'єднує точку, у якій шукається поле, і

елемент струму, k — коефіцієнт пропорційності, який залежить від вибраної системи одиниць. Вектор напруженості спрямований по нормалі до площини, яка містить елемент струму і точку спостереження; напрямлення напруженості встановлюється правилом Ампера (правило «буравчика»). У векторній формі закон Біо—Савара записується так:

$$d\mathbf{H} = k \frac{I}{r^3} (ds \times \mathbf{r}),$$

де $d\mathbf{H}$ — вектор напруженості поля, створюваного елементом струму, ds — вектор, спрямований по провіднику, а \mathbf{r} — вектор, проведений з елемента струму в точку M , у якій шукається напруженість. Нехай струм тече по дроту, який збігається з віссю Oz , у напрямленню знизу нагору (рис. 11.53).

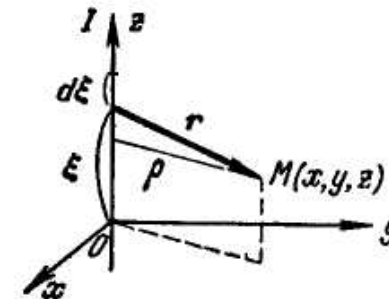


Рис. 11.53.

Позначимо змінну відстань від елемента струму до початку координат через ξ , а координати точки M через x , y і z . Тоді

$$ds = d\xi \mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - \xi)\mathbf{k},$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \xi)^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2},$$

де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ - відстань від точки M до дроту. Обчислюючи векторний добуток, знаходимо $d\mathbf{H}$:

$$d\mathbf{H} = \frac{kI}{r^3} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & d\xi \\ x & y & z - \xi \end{vmatrix} = \frac{kI}{r^3} (-y d\xi \mathbf{i} + x d\xi \mathbf{j}).$$

Звідси

$$dH_x = \frac{kly d\xi}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2})^3}, \quad dH_y = -\frac{kIx d\xi}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2})^3}, \quad dH_z = 0$$

Щоб знайти H_x і H_y , проінтегруємо вираз для їхніх диференціалів у границях від $-\infty$ до ∞ . Для цього обчислимо невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2})^3}.$$

Підстановка $\xi - z = \rho \operatorname{tg} t$, $d\xi = \frac{\rho}{\cos^2 t} dt$ приводить до інтегралу

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho dt}{\cos^2 t (\sqrt{\rho^2 + (z - \xi)^2})^3} = \frac{1}{\rho^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \frac{2}{\rho^2}.$$

Тому

$$H_x = -\frac{2kly}{\rho^2} = -\frac{2kly}{x^2 + y^2}, \quad H_y = \frac{2kIx}{\rho^2} = \frac{2kIx}{x^2 + y^2}, \quad H_z = 0.$$

У точках осі Oz поле не визначено. Таким чином, вектор напруженості \mathbf{H} має те ж напрямлення, що і вектор лінійної швидкості при обертанні тіла навколо осі Oz , якщо напрямлення струму збігається з напрямленням вектора кутової швидкості. Модуль вектора \mathbf{H} дорівнює

$$|\mathbf{H}| = \sqrt{H_x^2 + H_y^2} = \frac{2kI}{\rho}.$$

Легко перевірити, що дивергенція поля дорівнює нулю. Маємо

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = \frac{4Ixy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial y} = -\frac{4Ixy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0.$$

Отже

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0.$$

Ротор цього поля також в усіх точках дорівнює нулеві.

Для цього треба тільки перевірити рівність

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} = 0.$$

Маємо

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 2kI \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = 2kI \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Отже, циркуляція поля в будь-якому контурові, який не оточує вісь Oz , дорівнює нулеві. Якщо ж контур оточує вісь Oz (рис. 11.54), то такого висновку зробити не можна, оскільки такий контур неможливо заключити в однозв'язну область, яка не містить точок осі Oz , у яких поле не визначене.

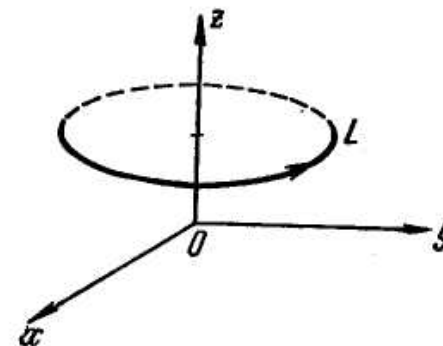


Рис. 11.54.

Обчислимо циркуляцію по колу радіуса R , який лежить у площині Oxy , з центром на початку координат

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t.$$

тоді

$$2kI \int_L \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 2kI \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2} dt = 4k\pi I.$$

Величина циркуляції не залежить від радіуса кола R . Можна довести, що вона залишається однієї і тієї ж для будь-якого контуру, що оточує вісь Oz .

Мікромодуль 28

Індивідуальні тестові завдання

1. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3},$$

розповсюджений на тетраедр (V) , що обмежується площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $x+y+z=1$ (рис. 11.63).

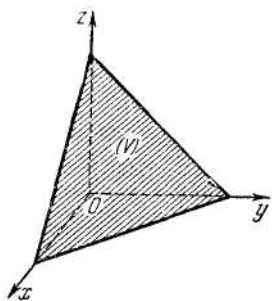


Рис. 11.63.

2) Обчислити інтеграл

$$K = \iiint_{(V)} z \, dx \, dy \, dz,$$

де (V) є верхня половина еліпсоїда $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

3) Обчислити інтеграл

$$L = \iiint_{(T)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx \, dy \, dz,$$

де (T) є весь еліпсоїд $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1$.

4) Обчислити інтеграл

$$I = \iiint_{(A)} z \, dx \, dy \, dz,$$

де тіло (A) обмежено конусною поверхнею

$$z^2 = \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)$$

і площиною $z=h$ (рис. 11.64).

5) Обчислити інтеграл

$$K = \iiint_{(V)} x \, dx \, dy \, dz,$$

де (V) є призма, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=h$ і $x+z=a$.

6. Знайти значення інтеграла

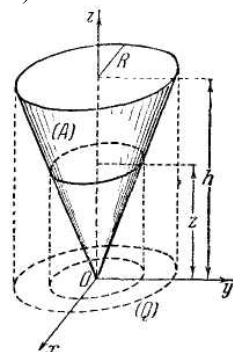


Рис. 11.64.

$$J = \iiint_{(T)} z^2 \, dx \, dy \, dz,$$

де (T) є загальна частина двох сфер (рис. 11.65):

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ і } x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz.$$

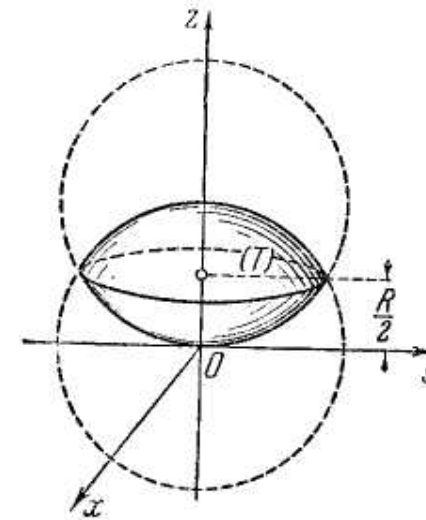


Рис. 11.65.

7. Обчислити інтеграл

$$S = \iiint_{(V)} (x + y + z)^2 \, dx \, dy \, dz,$$

де (V) є загальна частина параболоїда $x^2 + y^2 \leq 2az$ і сфери $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$.

8. Обчислити інтеграл

$$I = \iiint_{(T)} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

де (T) є загальна частина конуса $b^2 + z^2 \leq x^2$ і сфери $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ($x \geq 0$).

9. Обчислити інтеграл

$$H = \iiint_{\substack{x, y, z \geq 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2}} \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2}} \quad (\alpha > \beta > \gamma > 0).$$

10. Показати, що уживані формули для обчислення (а) об'єму циліндричного бруса, обмеженого поверхнею $z=z(x, y)$,

$$V = \iint_P z \, dx \, dy$$

і (б) об'єму тіла по поперечним перерізам: $V = \int_a^b Q(x) \, dx$

суть наслідку основної формули: $V = \iiint_{(V)} dV = \iiint_{(V)} dx \, dy \, dz.$

11. Знайти центр ваги тіла, обмеженого поверхнями параболоїда

$$x^2 + y^2 = 2az \quad \text{і сфери} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$$

12. Знайти масу і визначити положення центра ваги сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az,$$

якщо щільність у точках сфери зворотно пропорційна відстані цих точок від початку координат:

$$\rho = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

13. Знайти притяжіння центра основи циліндра всією масою циліндра (рис. 11.66).

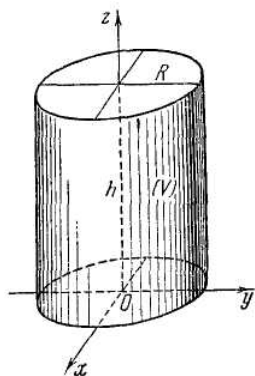


Рис. 11.66.

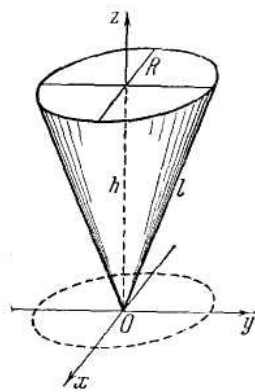


Рис. 11.67.

14. Знайти притяжіння конусом його вершини (рис. 11.67).

15. Знайти притяжіння, яке випробовує будь-яка точка A (маси 1) з боку сфери (рис. 11.68).

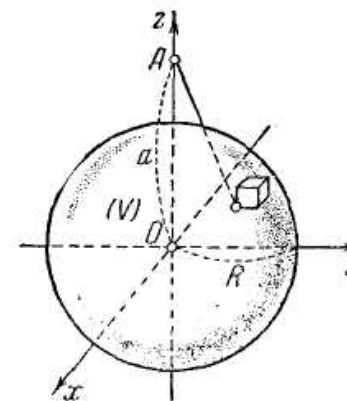


Рис. 11.68.

16. Обчислити об'єм тіла в криволінійних (сферичних) координатах, обмеженого поверхнею

(а) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$

(б) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^3 xyz$

(в) $(x^2 + y^2 + z^2)^n = a^{2n-1}$

17. Обчислити об'єм тіла в криволінійних (сферичних) координатах, обмеженого поверхнею

(а) $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$

(б) $(x^2 + y^2)^3 + z^6 = 3z^3$

18. Обчислити інтеграл у сферичних координатах, заміною змінних у потрійному інтегралі

$$I = \iiint_{(V)} \frac{xyz}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz,$$

де (V) є тіло, обмежене зверху поверхнею

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy,$$

а знизу площиною $z = 0$

19. Обчислити інтеграл

$$K = \iiint_{(V)} \frac{xyz \, dx \, dy \, dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

де (V) є тривісний еліпсоїд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

20. Перетворити по формулі Остроградського інтеграли

$$I_1 = \iiint_{(S)} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

$$I_2 = \iiint_{(S)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} (\cos \lambda + \cos \mu + \cos \nu) dS,$$

$$I_3 = \iiint_{(S)} x dy dz + y dz dx + z dx dy,$$

вважаючи, що поверхня (S) обрамляє тіло (V)

Модуль 12 Ряди

Мікромодуль 29

Числові, функціональні і степеневі ряди

Ми вже зустрічалися з рядами в модулі 4, що ми радимо переглянути перед читанням цього мікромодуля. Зокрема, були приведені основні визначення *збіжності* і *суми* числового ряду. Тепер ми переходимо до систематичного викладу теорії рядів.

12.1. Числові ряди

1. Ряди з додатними членами. Розглянемо ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \text{ усі } a_n \geq 0; \quad (12.1)$$

позначимо часткові суми цього ряду через $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$. У даному випадку $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$, і, згадавши два способи зміни зростаючої величини, ми дійдемо висновку, що для ряду (12.1) може бути один із двох випадків: він або сходиться, або розходиться до нескінченності. Це можна записати так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \text{ або } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

Підкреслимо, що перша нерівність як позначення збіжності пишуть тільки для рядів з додатними членами.

Якщо, крім ряду (12.1), розглядається ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (12.2)$$

причому

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (12.3)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Дійсно, це відразу випливає з аналогічної нерівності для часткових сум. Звідси випливає *ознака порівняння*: при виконанні умови (12.3), якщо ряд (12.2) сходиться, то і ряд (12.1) сходиться, а якщо ряд (12.1) розходиться, то і ряд (12.2) розходиться.

Наприклад, ряд

$$\frac{1}{3^2 \ln 2} + \frac{1}{3^3 \ln 3} + \frac{1}{3^4 \ln 4} + \dots$$

сходиться, що випливає з порівняння його з рядом:

$$\frac{1}{3^n \ln n} < \frac{1}{3^n} \quad (n=3, 4, \dots);$$

правда, перші члени рядів не підкоряються цій оцінці, але, як нам відомо, це на факт збіжності не впливає.

З першою ознакою порівняння зв'язана інша ознака: якщо

$$a_k > 0, \quad b_k > 0 \quad (k=1, 2, 3, 4, \dots),$$

$$\frac{a_k}{b_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{const} \neq 0, \neq \infty,$$

то ряди (12.1) і (12.2) сходяться або розходяться одночасно. Дійсно, із зазначеної умови випливає, що відношення a_k/b_k для всіх k укладено між деякими *додатними* сталими m і M :

$$m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M, \text{ тобто } mb_k \leq a_k \leq Mb_k.$$

Звідси, підсумовуючи по k від 1 до n , а потім переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, одержуємо

$$m \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq M \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

звідки і випливає це твердження.

Широко застосовується наступна достатня ознака Даламбера: якщо для ряду (12.1) існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1})/a_n = l$$

то у випадку $l < 1$ ряд (12.1) сходиться, а у випадку $l > 1$ розходиться. Друге виходить зовсім просто, так як при $l > 1$ відношення $(a_{n+1})/a_n$, яке наближається зі зростанням n до l , стає, починаючи з деякого номера, більшим за одиницю, тобто члени ряду для великих n зростають, тобто виходить, що не виконана необхідна ознака збіжності. Нехай тепер $l < 1$; виберемо яке-небудь стале число l' між l і 1. Так як відношення a_{n+1}/a_n безмежно наближається до l , то воно обов'язково, починаючи з деякого номера N , стане менше l' . Але тоді

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < l', \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < l', \quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < l', \dots,$$

звідки

$$a_{N+1} < a_N l', \quad a_{N+2} < a_{N+1} l' < a_N l'^2, \quad a_{N+3} < a_{N+2} l' < a_N l'^3, \dots, \quad \text{і т.д.},$$

тобто члени ряду (12.1), починаючи з номера N , менші членів ряду

$$a_N + a_N l' + a_N l'^2 + a_N l'^3 + \dots$$

Так як $0 < l' < 1$, то члени останнього ряду утворять нескінченну убутну геометричну прогресію і тому він сходиться, а звідси по ознаці порівняння сходиться і ряд (12.1).

Розглянемо, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p} \quad (a > 0, p > 0). \quad (12.4)$$

Для застосування ознаки Даламбера треба знайти границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} : \frac{a^n}{n^p} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = a.$$

Виходить, ряд (12.4) сходиться при $a < 1$ і розходиться при $a > 1$; при $a = 1$ ознака Даламбера відповіді не дає.

Коли ознака Даламбера відмовляє, часто буває можливо застосувати більш сильну достатню інтегральну ознаку Коші: якщо вираз для a_n має сенс не тільки для цілих $n = 1, 2, 3, \dots$, але і для всіх дійсних $n \geq 1$ і убуває з ростом n , то

$$\int_1^{\infty} a_n dn \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} a_n dn + a_1; \quad (12.5)$$

тобто, ряд (12.1) сходиться або розходиться одночасно з вписаним інтегралом.

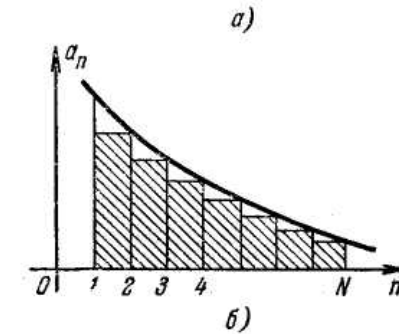
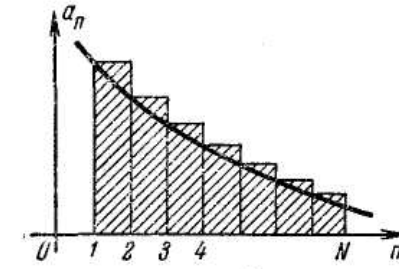


Рис. 12.1.

Для доведення помітимо, що на підставі рис. 12.1,а буде

$$\int_1^N a_n dn \leq a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_N \cdot 1, \quad (12.6)$$

а на підставі рис.12.1,б

$$\int_1^N a_n dn \geq a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_N \cdot 1,$$

звідки

$$a_1 + a_2 + \dots + a_N \leq \int_1^N a_n dn + a_1. \quad (12.7)$$

Якщо в нерівностях (12.6) і (12.7) перейти до границі при $N \rightarrow \infty$, то одержимо (12.5).

Розглянемо, наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (12.8)$$

який виходить з ряду (12.4) при $a=1$, коли ознака Даламбера не діє. Так як $a_n=n-p$ при $p>0$ задовольняє умовам ознаки Коші, то ряд (12.8) сходиться або розходиться одночасно з інтегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p} dn.$$

Але безпосереднє обчислення останнього інтеграла показує, що він сходиться тільки при $p>1$ (див. обчислення інтеграла (9.74)). Виходить, і ряд (12.8) сходиться тільки при $p>1$. Зокрема, при $p=1$ одержуємо так називаний *гармонійний ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty.$$

Формули (12.6) і (12.7) можна застосувати для двосторонньої оцінки часткової суми розбіжного ряду, звідки можна одержати асимптотичну формулу для такої суми в залежності від номера. Аналогічно проводиться оцінка будь-якої суми великого числа доданків, що монотонно залежать від номера. Для уточнення результату можна декілька найбільших доданків підсумувати безпосередньо, а оцінювати лише ті що залишилися, так як тоді різниця між оцінками зверху і знизу зблизиться.

Більш точні наближення, хоча і без двосторонніх оцінок, виходять за допомогою формул числового інтегрування. Покажемо, наприклад, застосування формули Симпсона до наближеного обчислення суми

$$S_{m,N} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{N} \quad (m=1, 2, \dots; N \geq m+2).$$

Для цього пишемо на основі формули (11.62) при $h=1$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx + \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx = \int_k^{k+2} \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

Підсумовуючи ці формули при $k=m, m+1, \dots, N-1$, після нескладних перетворень і інтегрування одержуємо

$$\ln N - \ln m + \ln(N+1) - \ln(m+1) \approx \frac{1}{3} \left(6S_{m,N} - \frac{5}{m} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+2} \right).$$

звідки

$$S_{m,N} \approx \ln N + \frac{6m+5}{6m(m+1)} - \frac{1}{2} \ln(m^2+m) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{6N(N+1)}. \quad (12.9)$$

Розглядаючи рис. 12.1, а для функції $a_n=1/n$, легко перевірити, що існує кінцева додатна границя

$$\mathcal{E} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \int_1^N \frac{1}{n} dn \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{1,N} - \ln N);$$

вона називається *сталою Ейлера*. З рівності (12.9) і формули

$$S_{m,N} = S_{1,N} - (1/1) - (1/2) - \dots - 1/(m-1)$$

впливає наближене значення сталої Ейлера

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{6m+5}{6m(m+1)} - \frac{1}{2} \ln(m^2+m),$$

тим більше точне, чим більше m . Так, при $m=1$ і $m=2$ одержуємо відповідно значення 0,570 і 0,576, тоді як $\mathcal{E}=0,577$, з точністю до 0,001.

2. Ряди з членами будь-якого знака. Перейдемо тепер до рядів з членами довільного знака. Тут, насамперед, має місце твердження: *якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty, \quad (12.11)$$

то і ряд (12.10) *сходиться*; у цьому випадку він називається *абсолютно збіжним*. Доведення цього цілком аналогічне доведенню подібної властивості в модулі 9. п.15. Якщо ряд (12.11) розходиться, то ряд (12.10) може все-таки сходиться; це — *неабсолютна збіжність*.

Найчастіше, застосовуючи ознаки п. 1, перевіряють саме абсолютну збіжність ряду (12.10). Наприклад, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

то по ознаці Даламбера ряд (12.11) сходиться, а тому ряд (12.10) абсолютно сходиться (якщо ця границя більше одиниці, то не виконана необхідна ознака збіжності і ряд розходиться) і т.п. Наступну *достатню ознаку Лейбніца* гарантує збіжність, але не обов'язково абсолютну: якщо для ряду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \quad (12.12)$$

буде

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots \rightarrow 0,$$

то він сходиться. Для доведення помітимо, що якщо зображувати часткові суми ряду (12.12) на деякій осі S (рис. 12.2), то кожний з наступних переходів від 0 до S_1 , від S_1 до S_2 , від S_2 до S_3 і т.д. буде відбуватися в напрямленню, протилежному попередньому, причому на меншу відстань; іншими словами, у даному випадку $0 < S < S_2 < S_1, S_2 < S_3 < S_1, S_2 < S_4 < S_3, \dots$ (рис. 12,2).

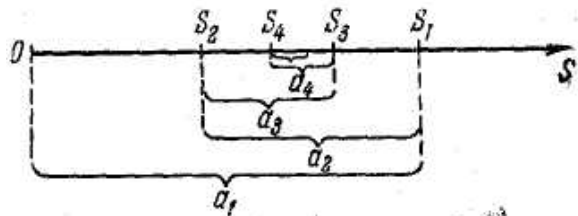


Рис. 12.2.

Виходить, парні часткові суми (тобто часткові суми з парними номерами) утворюють зростаючу обмежену послідовність і тому мають границю S' , а непарні часткові суми утворюють убутну обмежену послідовність і тому мають границю S'' . Переходячи в рівності $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ до границі при $n \rightarrow \infty$, одержимо, що $S'' = S'$, тобто всі часткові суми мають єдину границю і тим самим ряд (12.12) сходиться. Заодно ми бачимо, що сума ряду (12.12) заключена між будь-якою парною і будь-якою непарною частковою сумами, що дає можливість зробити оцінку суми ряду.

Наприклад, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p},$$

при $p > 0$ задовольняє умовам ознаки Лейбніца і тому сходиться. У той же час ця збіжність буде абсолютною тільки при $p > 1$ (див. п. 1).

Відзначимо на закінчення, що з нерівності

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

після переходу до границі при $n \rightarrow \infty$ для ряду, що сходиться, (12.10) виходить нерівність

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

3. Дії з рядами. 1. Ряди, що сходяться, можна почлено складати, тобто якщо

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = T,$$

то

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots = S \pm T$$

Для доведення треба помітити, що часткова сума останнього ряду $P_n = S_n \pm T_n$, а потім перейти до границі при $n \rightarrow \infty$.

На основі цієї властивості іноді виконується наступне перетворення: ряд із членами будь-якого знака, наприклад

$$a - b - c + d + e + f - g + \dots = S \tag{12.13}$$

(де всі a, b, c, \dots вважаються > 0), представляється у вигляді різниці рядів з невід'ємними членами

$$\left. \begin{aligned} a + 0 + 0 + d + e + f + 0 + \dots &= S_1 \\ 0 + b + c + 0 + 0 + 0 + g + \dots &= S_2 \end{aligned} \right\} \tag{12.14}$$

тобто підсумовуються всі додатні і всі від'ємні члени, а результати віднімаються один з іншого. Так можна робити тільки з абсолютно збіжним рядом (12.13), так як для неабсолютно збіжного ряду (12.13) обидва ряди (12.14) мають нескінченну суму. В останньому випадку збіжність ряду (12.13) виходить за рахунок «балансу» між цими нескінченностями, у результаті якого часткові суми обох рядів (12.14) наростають з однаковою швидкістю.

Аналогічно першій властивості перевіряється властивість

2. Ряд, який сходиться, можна почлено множити на загальний множник: якщо $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$,

$$ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n + \dots = kS.$$

3. У ряді, який сходиться, можна довільно групувати члени: наприклад, якщо

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots = S, \tag{12.15}$$

то

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \dots = S. \tag{12.16}$$

Дійсно, якщо часткові суми першого ряду $S_1, S_2, S_3, \dots \rightarrow S$, то часткові суми другого ряду, які рівні $S_2, S_3, S_6, S_8, \dots$, також прагнуть до S .

Якщо ряд (12.15) розходиться до нескінченності, то аналогічно одержуємо, що і ряд (12.16) розходиться до нескінченності. Якщо ж ряд (12.15) розходиться коливальним чином, то ряд (12.16) може

розходиться, а може і сходиться, причому сума тоді буде залежати від способу угруповання, тобто розміщення дужок. Наприклад, для ряду маємо

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0,$$

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1,$$

Поки не була усвідомлена різниця між рядами що сходяться і розходяться, цей факт сприймався як парадокс, який не можна пояснити. Сучасне визначення поняття суми ряду, що сходиться, стало можливим тільки на базі розвитої теорії границь і було приведене Коші в 1821 р., хоча ряди широко застосовувалися і у XVII—XVIII вв.

4. У ряді з невід'ємними членами можна довільно переставляти порядок членів (доданків), від чого сума не зміниться.

Справа в тім, що якщо скласти послідовні часткові суми для ряду з переставленими (без пропусків) членами, то будь-який член вихідного ряду буде входити в ці суми, починаючи з якоїсь. Тому і будь-яка часткова сума вихідного ряду складе частину часткової суми з досить великим номером переставленого ряду і тому не перевершує суми переставленого ряду. А так як перший ряд виходить із другого також перестановкою членів, тобто і сума другого ряду не може перевершувати суми першого, то обидві суми рівні.

В абсолютно збіжному ряді також можна довільно перевершує всієї суми переставленого ряду. Але тоді і границя переставляти порядок членів.

Дійсно, як було зазначено у властивості 1, такий ряд можна представити як різницю двох рядів, що сходяться, з невід'ємними членами, так що перестановка членів у вихідного ряду зводиться до перестановки членів у цих двох рядів, що, як ми тільки що бачили, не змінює їхніх сум.

Перестановка членів у неабсолютно збіжному ряді може змінити суму або навіть зробити ряд розбіжним. Справа в тому, що в результаті такої перестановки можна змінити відносну швидкість наростання рядів (12.14), що і приводить до цього на перший погляд парадоксального результату, який можна продемонструвати на наступному прикладі.

Сума S ряду

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots = S \quad (12.17)$$

згідно п. 2 укладена між $S_1=1$ і $S_2 = 0,5$. Звідси в силу властивості 2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \dots = \frac{S}{2},$$

а тому і

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 - \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots = \frac{S}{2}.$$

Зробивши почленне додавання цього ряду з рядом (12.17), одержимо

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}S,$$

тобто

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}S,$$

Однак останній ряд виходить з ряду (12.17) перестановкою членів, а сума, як бачимо, змінилася.

Таким чином, у процесах, які так чи інакше зв'язані з перестановкою членів ряду, тільки з абсолютно збіжними рядами можна виконувати такі само дії, як з кінцевими сумами; при діях же з неабсолютно збіжними рядами треба дотримувати визначеної обережності.

4. Швидкість збіжності ряду. Для практичного підрахунку суми ряду зазвичай обчислюють часткову суму декількох його перших членів, а інші просто відкидають, якщо є підстави думати, що вони не вплинуть істотно на значення суми. При цьому потрібно, щоб ряд не просто сходився, але швидко сходився, тобто щоб, узявши невелике число членів, ми майже вичерпали б повну суму, одержавши її з гарною точністю. Якщо ж ряд сходиться повільно, погано, то для безпосередніх практичних обчислень він буває часто непридатний, хоча з нього буває можливо одержати інші, що швидко сходяться ряди; утім, іноді залишок такого ряду вдається приблизно виразити за допомогою інтегралів, на зразок п. 1. Дуже повільно сходяться неабсолютно збіжні ряди (п. 2); але й абсолютно збіжні ряди часто сходяться повільно.

Швидкість збіжності ряду визначається в основному швидкістю прагнення його загального члена до нуля зі зростанням номера. Часто порівняно погано сходяться ряди, для яких загальний член

a_n має порядок n^{-p} (тобто $a_n = O(n^{-p})$) при $p > 1$, причому збіжність тим краще, чим більше p . Краще сходяться ряди, для яких a_n має порядок q^n при $0 < q < 1$, це швидкість геометричної прогресії, причому збіжність тим краще, чим менше q . Ще краще сходяться ряди, для яких a_n має порядок $1/n!$ і т.д.

Утім, це лише самі загальні установки, так як при будь-якому порядку загального члена для $n \rightarrow \infty$ у даному питанні може виявитися істотним поведіння перших членів ряду.

Якщо ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (12.18)$$

сходиться повільно, то часто прагнуть перейти до ряду, який більш швидко сходиться. Один зі способів цього такий. Підбирають ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sigma$$

з відомою сумою так, щоб $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді

$$a_n = b_n + \gamma_n, \text{ де } |\gamma_n| \ll |a_n|,$$

і тому ряд (12.18) можна представити у вигляді

$$(b_1 + \gamma_1) + (b_2 + \gamma_2) + \dots = (b_1 + b_2 + \dots) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots) = \sigma + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n + \dots,$$

а в цього ряду загальний член прагне до нуля швидше.

Для застосування цього способу виділення особливості треба мати набір рядів з відомими сумами. Зазвичай користуються геометричною прогресією, іншими рядами і їх комбінаціями, а також рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad (p > 1). \quad (12.19)$$

Остання сума, що залежить від p , називається *дзета-функцією Римана*.

Розглянемо, наприклад, ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}}. \quad (12.20)$$

Його члени еквівалентні при $n \rightarrow \infty$ членам ряду (12.19) при $p = 3/2$, тобто ряд (12.20), хоча і сходиться, але дуже повільно. З допомогою оцінки (12.5) легко перевірити, що залишок ряду (12.19) еквівалентний

$$\frac{1}{(p-1)n^{p-1}},$$

тобто залишок ряду (12.20) має порядок $2n^{-1/2}$, і щоб одержати S з точністю до 0,01, треба взяти близько 40000 членів! Але якщо скористатися методом виділення особливості, одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}} + \gamma_n,$$

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{n^3} - \sqrt{n^3 + 1}}{\sqrt{n^3 + 1}\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}\sqrt{n^3 + 1}(\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1})},$$

а тому ряд (12.20) можна представити у вигляді

$$S = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}\sqrt{n^3 + 1}(\sqrt{n^3} + \sqrt{n^3 + 1})}. \quad (12.21)$$

По таблиці перший доданок дорівнює 2,612, а загальний член останнього ряду еквівалентний $(2n^{9/2})^{-1}$, а тому його залишок еквівалентний $(7n^{7/2})^{-1}$, тобто для точності до 0,01 треба взяти три члени! Якщо S потрібно з більшою точністю, то з ряду (12.21) треба знову виділити особливість, що дасть

$$S = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{9}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24n^9 + 7n^6 - 2n^3 - 1}{2\sqrt{n^9}A(\sqrt{n^3} + A)(3n^3 + 1 + \sqrt{n^3}A)(2\sqrt{n^3}A^3 + 2n^6 - 3n^3 - 1)},$$

де для стислості поклали

$$\sqrt{n^3 + 1} = A.$$

Виділена частина по таблиці дорівнює 2,085, а залишок останнього ряду асимптотично дорівнює (тобто еквівалентний) $(3/52)n^{-13/2}$.

Виходить, для обчислення S з точністю до 0,001 досить взяти усього два-три члена. Це послідовне виділення особливостей можна удосконалити, якщо скористатися рядом Тейлора для бінома:

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} = (n^3 + 1)^{-1/2} = n^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{-1/2} = n^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{8n^6} - \frac{5}{16n^9} + \dots\right) \quad (12.22)$$

Обриваючи цей ряд на будь-якому члені, наприклад на третьому, одержимо

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} = n^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{8n^6} \right) - \gamma_n, \quad (12.23)$$

звідки

$$S = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{3}{8}\zeta\left(\frac{15}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 2,462 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

причому γ_n , які можна виразити точно за допомогою (12.23), асимптотично рівні $(5/16)n^{-21/2}$, на основі (12.22).

Аналогічно перетворюються й інші ряди, причому наряду з (12.19) застосовуються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^p} = \zeta(p) \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right), \quad (12.24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots \right] = \frac{1}{4} \quad i \ m. \ d.$$

Формула (12.24) справедлива і при $0 < p < 1$, причому $\zeta(p)$ для таких p визначена не по формулі (12.19), так як ряд розходиться, а іншим способом, про який ми тут не будемо говорити. При $p=1$ ліва частина ряду (12.24) дорівнює $\ln 2$.

Для знакочергуючих рядів (п. 2) є велика небезпека *втрати точності*. Розглянемо для прикладу степеневий ряд для косинуса при $x=100$:

$$\cos 100 = 1 - \frac{100^2}{2!} + \frac{100^4}{4!} - \frac{100^6}{6!} + \frac{100^8}{8!} - \dots \quad (12.25)$$

Ряд, що стоїть в правій частині, сходиться і навіть абсолютно, але практичне його використання неможливе. Дійсно, хоча члени, починаючи з 51-го, убувають, причому, зрештою, досить швидко, що істотно для теоретичної збіжності, але до цього вони встигають досить сильно зрости. А так як вся сума повинна вийти по абсолютній величині менше одиниці, то всі ці члени «майже» взаємно знищуються. Як відомо, така ситуація дуже небезпечна, так як всі обчислення довелося б проводити з величезним числом значущих цифр і обсяг обчислювальної роботи був би

невиправдано великий. Тому рядів типу (12.25) треба уникати, а якщо вони з'являються, треба перетворювати їх в інші ряди, що піддаються практичному обчисленню; так, у даному прикладі можна скористатися періодичністю косинуса і перейти до значно меншого аргументу.

5. Ряди з комплексними, векторними і матричними членами.

Визначення збіжності і суми ряду з комплексними членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad z_n = x_n + iy_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (12.26)$$

проводиться в точності так, як для ряду з дійсними членами. При цьому іноді розбивають ряд (12.26) на два:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (12.27)$$

Якщо обидва ряди (12.27) сходяться і мають суму відповідно x і y , то і ряд (12.26) сходиться і має суму $z=x+iy$. Якщо хоч один з рядів (12.27) розходиться, то і ряд (12.26) розходиться. Так як ряди (12.27) дійсні, то до них можна застосовувати методи п. 2.

Застосовується також наступна проста ознака: якщо

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty, \quad (12.28)$$

то обидва ряди (12.27) абсолютно сходяться, а тому ряд (12.26) також сходиться; у цьому випадку ряд (12.26) називається *абсолютно збіжним*. До ряду (12.28) можна застосовувати методи п. 1.

Аналогічно розглядаються ряди з векторними членами

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_n + \dots \quad (12.29)$$

Якщо всі \mathbf{u}_n —вектори в тривимірному просторі x, y, z , то для переходу до скалярних рядів треба зробити проектування ряду (12.29) на всі три осі x, y, z .

Розглядаються також ряди вигляду

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{A}_n + \dots \quad (12.30)$$

членами якого служать матриці того самого розміру. Для збіжності ряду (12.30) необхідно і досить, щоб сходився кожний з рядів, що складаються з відповідних, тобто однаково розташованих елементів цих матриць. Властивості рядів (12.26), (12.29) і (12.30) ті ж, що і дійсних рядів (п. 3).

6. Кратні ряди. Кінцеві суми можуть мати не тільки один, але і два і більш індекси підсумовування.

Наприклад,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23},$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^j} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} \quad i \text{ т.п.}$$

Нескінченні ряди також можуть мати більш одного індексу підсумовування; такі ряди називаються *подвійними, потрійними* і т.д., узагалі *кратними*. Ми розглянемо тільки подвійний ряд найпростішого вигляду

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}; \tag{12.31}$$

розгляд рядів вищої кратності, а також рядів, у яких границі підсумовування у внутрішній сумі змінні, як у приведеному вище прикладі, проводиться аналогічно.

Нехай спочатку всі $a_{ij} \geq 0$. Розташуємо всі члени ряду (12.31) у простий, однократний ряд у якому-небудь порядку, наприклад

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{13} + a_{22} + a_{31} + a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} + \dots \tag{12.32}$$

Сума цього ряду, що не залежить від порядку що складаються (властивість 4 п. 3), і називається сумою ряду (12.31). При цьому можуть бути два випадки, збіжності і розбіжності, тобто

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \infty.$$

Таким чином, при $a_{ij} \geq 0$ сума ряду (12.31) не залежить від способу підсумовування, аби при цьому жоден член не був забутий. Зокрема, можна підсумовувати так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right). \tag{12.33}$$

Якщо члени a_{ij} будь-якого знака або навіть комплексні, то найбільше просто розглядається випадок *абсолютної збіжності*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty. \tag{12.34}$$

Тоді і ряд (12.31) сходиться, і для підрахунку його суми можна скористатися кожною з формул вигляду (12.32) або (12.33), формулою

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

і т.п. Якщо умову (12.34) порушено, то при підсумовуванні ряду (12.31) може відігравати роль порядок підсумовування (п.3) і положення значно ускладнюється.

Подвійний ряд виходить, зокрема, при *перемноженні двох абсолютно збіжних рядів*

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{і} \quad S_2 = \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{j=1}^{\infty} b_j;$$

перед множенням ми змінили позначення індексу підсумовування в одному з рядів. Множення виконується так:

$$S_1 S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j;$$

при цьому абсолютна збіжність використана в останній рівності, так як застосовано формулу (12.33). Отже, множення таких рядів виконується по тому ж правилу, що і множення кінцевих сум (кожен член першого ряду збільшується на кожен член другого ряду), після чого виходить абсолютно збіжний подвійний ряд. Аналогічний результат вийде, якщо множників більше.

12.2. Загальні функціональні ряди

7. Ухилення функцій. Якщо членами ряду є не числа, як у 12.1, а функції, то виникає питання, у якому змісті часткові суми, що є функціями, сходяться (наближаються) до повної суми, що також є функцією, тобто як оцінити відмінність двох функцій одну від одної? Виявляється, це можна робити різними, нерівносильними способами, тоді як відмінність двох чисел a і b одне від одного завжди оцінюється величиною $|a - b|$.

Нехай дві функції, $f(x)$ і $\varphi(x)$, задані на одному і тому ж кінцевому інтервалі $a \leq x \leq b$. Рівномірним або Чебишевським ухиленням їх одного від одного називається величина

$$p\text{-у. } \{f, \varphi\} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|, \tag{12.35}$$

геометричний зміст якої показано на рис. 12.3.

Це ухилення застосовується тільки для обмежених функцій, причому, як правило, для безперервних. Якщо рівномірне ухилення двох функцій одного від одного мале, то в кожній точці інтервалу $a \leq x \leq b$ значення $f(x)$ і $\varphi(x)$ мало відрізняються одне від одного, і навпаки.

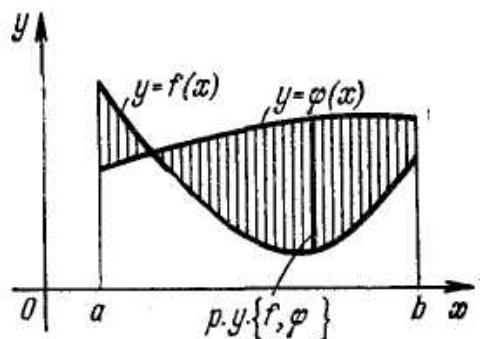


Рис. 12.3.

Середнім інтегральним ухиленням функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ одного від одного називається величина

$$\text{с.і.у. } \{f, \varphi\} = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx; \quad (12.36)$$

її геометричним зміст — це площа, яка заштрихована на рис. 12.3, без урахування знаків. Для обчислень більш зручно використовувати *середнє квадратичне ухилення*

$$\text{с.к.у. } \{f, \varphi\} = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}, \quad (12.37)$$

яке багато в чому аналогічне с. і. у. Ці ухилення застосовуються не тільки для безперервних, але і для розривних функцій, і навіть для необмежених функцій, якщо інтеграл, котрий тоді буде невласним, сходиться. Є й інші види ухилень.

Якщо у формулах (12.36) і (12.37) замінити підінтегральну функцію її максимальним значенням (12.35), то від цього інтеграл може тільки збільшитися, і ми одержимо

$$\text{с.і.у. } \{f, \varphi\} \leq (b-a) \cdot \text{р.у. } \{f, \varphi\}; \quad \text{с.к.у. } \{f, \varphi\} \leq \sqrt{b-a} \cdot \text{р.у. } (f, \varphi). \quad (12.38)$$

Виходить, якщо рівномірне ухилення двох функцій одне від одного мале, то і середнє інтегральне і середнє квадратичне ухилення теж малі.

Однак може так вийти, що рівномірне ухилення двох функцій велике, тоді як середнє - мале (рис. 12.4).

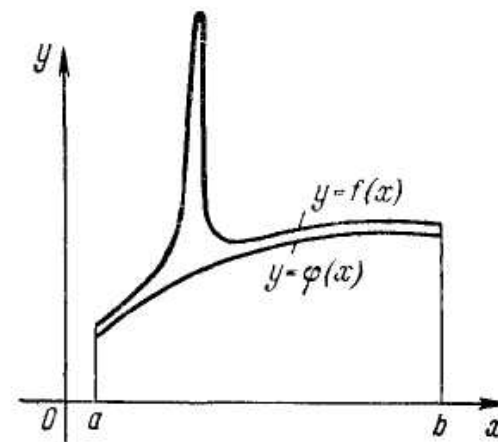


Рис. 12.4.

8. Збіжність функціонального ряду.

Розглянемо ряд $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$, (12.39) членами якого є функції, які задані на тому самому кінцевому інтервалі $a \leq x \leq b$. Говорять, що цей ряд сходиться на даному інтервалі до функції $S(x)$ — сумі ряду, якщо ухилення часткової суми

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad \text{від } S(x)$$

прагне до нуля при зростанні n . У залежності від вигляду ухилення (п.7) отримується вигляд збіжності ряду (12.39). Так, ряд (12.39) сходиться до суми $S(x)$ *рівномірно*, якщо

$$\max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Подібним чином цей ряд сходиться до $S(x)$ у *середньому* або у *середньому квадратичному* в залежності від того, чи буде

$$\int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

або

$$\sqrt{\int_a^b [S(x) - S_n(x)]^2 dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З оцінок (12.38) видно, що якщо ряд (12.30) сходиться рівномірно, то він сходиться й у середньому й у середньому квадратичному і притому до тієї ж суми. Зворотнє не обов'язково.

Якщо ряд (12.39) на інтервалі $a \leq x \leq b$ рівномірно сходиться до суми $S(x)$, то для будь-якого числа c з цього інтервалу буде

$$f_1(c) + f_2(c) + \dots + f_n(c) + \dots = S(c);$$

справді, відмінність n -ї часткової суми цього ряду від $S(c)$ не перевершує рівномірного ухилення $S_n(x)$ і $S(x)$ і тим самим прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$. Ця властивість дає можливість одержати з функціонального ряду з відомою сумою числові ряди з відомими сумами.

Для перевірки рівномірної збіжності найчастіше застосовується наступна достатня ознака, яка запропонована Вейерштрассом:

якщо всі $|f_n(x)| \leq a_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$; $a \leq x \leq b$), причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \tag{12.40}$$

то ряд (12.39) рівномірно сходиться.

Для доведення помітимо, що в даних умовах по ознаці порівняння (п. 1) ряд (12.39) при кожнім зафіксованому x абсолютно сходиться до суми $S(x)$. При цьому

$$\max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k,$$

а остання сума, як залишок ряду, що сходиться, прагне до нуля зі зростанням номера.

Умову (12.40) інакше можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x)| < \infty,$$

так як члени цього ряду можна позначити через a_n . Аналогічний вигляд мають достатні ознаки для збіжності ряду (12.39) у середньому й у середньому квадратичному:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)| dx < \infty$$

і відповідно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b |f_n(x)|^2 dx} < \infty.$$

Буває, що ряд (12.39) на інтервалі $a \leq x \leq b$ є розбіжним, але цей ряд сходиться на деякому внутрішньому інтервалі $a_1 \leq x \leq b_1$, де $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. Тоді $a_1 \leq x \leq b_1$ називається інтервалом збіжності ряду (12.39).

Помітимо, що, як і для числових рядів, довільна зміна кінцевого числа членів ряду (12.39) не може змінити характеру його збіжності.

9. Властивості функціональних рядів. 1. Сума рівномірно збіжного ряду з безперервних функцій також не може мати розривів.

Дійсно, якщо

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = S(x) \quad (a \leq x \leq b), \tag{12.41}$$

то

$$S(x) = [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] + [f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots] = S_n(x) + R_n(x). \tag{12.42}$$

Якщо члени ряду — безперервні функції, то $S_n(x)$, як сума кінцевого числа безперервних функцій, також безперервна. З іншого боку, якщо ряд (12.41) сходиться рівномірно, то для досить великого n залишок $R_n(x)$ буде як завгодно малий на всьому інтервалі $a \leq x \leq b$. Тому при малій зміні x як $S_n(x)$, так і $R_n(x)$, а тому і вся сума (12.42) змінюються мало, тобто ця сума не може мати розривів.

Іноді розглядаються ряди вигляду (12.41) на кінцевому або нескінченному інтервалі $a < x < b$, які рівномірно сходяться не на всьому цьому інтервалі, а на кожнім «строого внутрішньому» інтервалі $a_1 \leq x \leq b_1$, де $a < a_1 < b_1 < b$. Тоді доведену властивість можна застосувати до інтервалу $a_1 \leq x \leq b_1$, а потім, наближаючи a_1 до a , а b_1 до b , заключити, що сума ряду не має розривів і на всьому інтервалі $a < x < b$. Аналогічне зауваження справедливе і для подальших властивостей. Якщо члени ряду (12.41) мають розриви, то, розмірковуючи подібним чином, одержимо, що якщо ряд (12.41) сходиться рівномірно, то його сума може мати розриви тільки в тих точках, у яких мали розриви доданки. На відміну від цього, якщо ряд сходиться в середньому, його сума може мати нові розриви; вона може мати розриви, навіть якщо всі члени ряду були безперервними. Це зв'язано з тим, що безперервні функції $S_n(x)$

можуть сходитися в змісті середнього інтегрального до розривної функції (рис. 9.17).

2. Ряд, що сходиться рівномірно, можна почленно інтегрувати, тобто з (12.41) випливає, що

$$\int_{x_0}^x f_1(t) dt + \int_{x_0}^x f_2(t) dt + \dots + \int_{x_0}^x f_n(t) dt + \dots = \int_{x_0}^x S(t) dt,$$

причому отриманий ряд сходиться рівномірно на інтервалі $a \leq x \leq b$. Дійсно,

$$\left| \int_{x_0}^x S(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt \right| = \left| \int_{x_0}^x \left[S(t) - \sum_{k=1}^n f_k(t) \right] dt \right| = \left| \int_{x_0}^x [S(t) - S_n(t)] dt \right| \leq \int_{x_0}^x |S(t) - S_n(t)| dt \leq \int_{x_0}^x |S(t) - S_n(t)| dt \leq (b - a) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |S(t) - S_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Те ж доведення, з відкинутим останнім членом у ланцюзі нерівностей, показує, що і ряд, що сходиться в середньому, можна почленно інтегрувати, причому отриманий після інтегрування ряд сходиться рівномірно на інтервалі $a \leq x \leq b$.

3. Ряд з безперервних функцій, що сходиться рівномірно, можна почленно диференціювати, якщо після цього вийде ряд, що сходиться рівномірно, тобто з (12.41) випливає, що $f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots = S'(x)$.

Для доведення треба позначити суму останнього ряду через $Q(x)$ і зробити його почленне інтегрування по властивості 2; вийде рівність

$$S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^x Q(t) dt,$$

диференціюючи яку, знайдемо, що $Q(x) = S'(x)$.

Якщо уточнити поняття збіжності функціонального ряду, скориставшись узагальненими функціями, то всі застереження про характер збіжності відповідають. Будь-які ряди, що сходяться, буде можливо почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число раз.

12.3. Степеневі ряди

10. Інтервал збіжності. Степеневий ряд має вигляд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \tag{12.43}$$

Такі ряди вже зустрічалися в нашому курсі. Викладаючи загальну теорію цих рядів, ми для простоти припустимо, що існує кінцева або нескінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R, \tag{12.44}$$

хоча остаточні результати справедливі в самому загальному випадку. Легко з'ясувати, для яких числових значень x ряд (12.43) сходиться.

Так як

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|a_n / a_{n+1}|} = \frac{|x|}{|R|}, \tag{12.45}$$

то по ознаці Даламбера (п. 2) при $|x| < R$, тобто при

$$-R < |x| < R, \tag{12.46}$$

ряд (12.43) абсолютно сходиться; інтервал (12.46) служить інтервалом збіжності степеневому ряду (12.43), а R називається радіусом збіжності. При $|x| > R$, тобто при $-\infty < x < -R$ або $R < x < \infty$, поза інтервалом збіжності, границя (12.45) більше одиниці - ряд (12.43) розходиться. При $x = \pm R$, на кінцях інтервалу збіжності, границя (12.45) дорівнює 1 і ознака Даламбера не може бути застосована. У різних прикладах тут може вийти збіжність або розбіжність. Якщо границі (12.44) не існує, то і тоді інтервал збіжності іноді можна з'ясувати по ознаці Даламбера.

Наприклад, для збіжного ряду

$$1 - \frac{x^3}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 2^4} - \frac{x^9}{4 \cdot 2^6} + \frac{x^{12}}{5 \cdot 2^8} - \dots,$$

де границі (12.44) не існує, повинно бути

$$\lim \left\{ \frac{|x^{3(n+1)}|}{(n+2)2^{2(n+1)}} : \frac{|x^{3n}|}{(n+1)2^{2n}} \right\} = \frac{|x|^3}{2^2} < 1.$$

Виходить, ряд сходиться при $|x^3| < 2^2 = 4$, тобто інтервал збіжності його такий: $-\sqrt[3]{4} < x < \sqrt[3]{4}$. На кінцях цього інтервалу при $x = -\sqrt[3]{4}$ ряд розходиться, а при $x = \sqrt[3]{4}$ неабсолютно сходиться. Якщо ознаку Даламбера застосувати не можна, то тоді доводять, що ряд (12.43) сходиться на деякому інтервалі вигляду (12.46), хоча R знайти важче. Якщо $R \rightarrow \infty$, то ряд (12.43) сходиться при всіх x , тобто на всій осі, хоча при великих $|x|$ збіжність буде дуже поганою (див. п. 4). Можливий також випадок $R=0$, але тоді ряд

(12.43) сходиться тільки для $x=0$, і тому ми такі ряди тут не будемо розглядати. Розглядаються також степеневі ряди вигляду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (12.47)$$

Якщо позначити $x-a=x_1$, то видно, що ряд сходиться при $-R < x-a < R$, тобто $a-R < x < a+R$.

11. Властивості степеневих рядів.

1. Ряд $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (12.48)$

сходиться рівномірно (п. 8) на будь-якому інтервалі $-R_1 \leq x \leq R_1$, де $0 < R_1 < R$; R -радіус збіжності ряду (12.48). Дійсно, на такому інтервалі можна написати

$$|a_0| = |a_0|, \quad |a_1x| \leq |a_1R_1|, \quad |a_2x^2| \leq |a_2R_1^2|, \quad |a_3x^3| \leq |a_3R_1^3|, \dots,$$

тобто члени ряду (12.48) по абсолютній величині не перевершують відповідних членів числового ряду

$$|a_0| + |a_1R_1| + |a_2R_1^2| + |a_3R_1^3| + \dots$$

Останній ряд сходиться, так як R_1 лежить усередині інтервалу збіжності. Виходить, по ознаці Вейерштрасса (п.8) ряд (12.48) рівномірно сходиться на зазначеному інтервалі.

Рівномірної збіжності відразу на всьому інтервалі $-R < x < R$ у загальному випадку не буде. Однак Абель довів, що якщо ряд (12.48) сходиться на якому-небудь з кінців інтервалу збіжності, то інтервал, на якому гарантується рівномірна збіжність, можна вважати продовженим до цього кінця.

2. Сума ряду (12.48) безперервна усередині його інтервалу збіжності. Дійсно, це впливає з властивості 1 п.9. Крім того, із зазначеної тільки що теореми Абеля впливає, що якщо ряд (12.48) сходиться на якому-небудь з кінців інтервалу збіжності, то сума буде безперервною й у цьому кінці.

3. При почленному інтегруванні або диференціюванні ряду (12.48) його радіус збіжності не міняється. Наприклад, при почленному інтегруванні вийде ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Обчислимо його радіус збіжності по формулі (12.44):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|/n}{|a_n|/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|a_{n-1}|}{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = 1 \cdot R, \quad (12.45)$$

тобто виходить те ж значення (12.44).

4. Формулу $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = S(x) \quad (-R < x < R)$

можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число раз на інтервалі збіжності. Це впливає з тільки що доведених властивостей 1 і 3 і з властивостей 2 і 3 п. 9, так як якщо при однократному диференціюванні або інтегруванні радіус збіжності не змінюється, то він не змінюється і при повторенні цих дій. З властивостей 4 і 2 впливає, зокрема, що сума степеневого ряду має усередині свого інтервалу збіжності безперервні похідні всіх порядків. Розглянемо, наприклад, ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots \quad (-1 < x < 1);$$

його можна одержати з ряду $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ для суми нескінченної убутної геометричної прогресії. Почленно інтегруючи, одержимо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (12.49)$$

Так як ряд у правій частині сходиться і при $x=1$, то в силу теореми Абеля формула (12.49) справедлива і при $x=1$, тобто ми знаходимо суму цікавого числового ряду

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

За допомогою почленних інтегрувань і диференціювань іноді вдається звести заданий ряд до відомих рядів і тим самим знайти його суму. Наприклад, знайдемо суму ряду

$$2 + \frac{3}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \dots = S(x).$$

На підставі ознаки Даламбера легко перевірити, що ряд сходиться на всій осі, тобто $R=\infty$. Помножимо обидві частин на x і проінтегруємо результат від нуля до деякого x :

$$\int_0^x xS(x) dx = x^2 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \dots = x^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = x^2 e^x.$$

Звідси, диференціюючи, одержимо $xS(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x$, тобто остаточно $S(x) = (2+x)e^x$.

Приведемо приклад іншого характеру. Знайдемо суму ряду

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots = \sigma(x). \quad (12.50)$$

Для цього продиференціюємо його почленно:

$$\sigma'(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\ln(1-x).$$

Звідси

$$\sigma(x) = \int -\ln(1-x) dx = -x \ln(1-x) - \int \frac{x}{1-x} dx = x + (1-x) \ln(1-x) + C \quad (12.51)$$

Щоб з'ясувати, чому дорівнює в даному випадку C , покладемо у формулах (12.50) і (12.51) $x=0$; одержимо, що $0 = \sigma(0) = C$. Остаточно, $\sigma(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$.

В інших прикладах часто виходять інтеграли, що не виражаються через елементарні функції. Іноді в результаті аналогічних дій ми одержуємо диференціальне рівняння для суми ряду, розв'язавши яке, ми і знаходимо суму. Знайдемо, наприклад, суму ряду

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots = p(x). \quad (12.52)$$

Для цього тричі продиференціюємо формулу (12.52):

$$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots = p'(x). \quad (12.53)$$

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots = p''(x), \quad (12.54)$$

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots = p'''(x).$$

Ми бачимо, що вийшов вихідний ряд, тобто $p'''(x) - p(x) = 0$.

Розв'язуючи це рівняння, знайдемо

$$p(x) = C_1 e^x + e^{\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right). \quad (12.55)$$

Для обчислення C_1 , C_2 і C_3 підставляємо $x=0$ у формули (12.52), (12.53) і (12.54), одержимо, що $p(0)=0$, $p'(0)=1$, $p''(0)=0$; це - початкова умова для $p(x)$. У силу (12.55) виводимо, що

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 - \frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{3}x}{2}C_3 = 1, \quad C_1 - \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}x}{2}C_3 = 0,$$

звідки $C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},$

і остаточно знаходимо суму ряду (12.52):

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots = \frac{1}{3}e^x + e^{\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

У деяких випадках аналогічними способами вдається «згорнути» суму заданого числового ряду в інтеграл або навіть у просту комбінацію математичних констант (цілих чисел, π , e і т. п.) і функцій від них. Проробимо це, наприклад, із сумою

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = S. \quad (12.56)$$

Для цього розглянемо допоміжний ряд

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots = q(x) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

За допомогою диференціювання знайдемо

$$q(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

Звідси, підставляючи $x=1$, одержимо суму ряду (12.56)

$$S = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx. \quad (12.57)$$

Відповідний невизначений інтеграл не є елементарною функцією, однак все-таки іноді більш вагомо мати відповідь у «згорнутому» вигляді, а не у вигляді ряду. У п. 25 буде зовсім іншим методом знайдено, що сума ряду (12.56) дорівнює $\pi^2/6$; звідси, зокрема, виходить значення інтеграла (12.57).

12. Кінцеві дії над степеневими рядами. Так як степеневі ряди усередині своїх інтервалів збіжності абсолютно сходяться, то їх можна, зокрема, *почленно складати, множити на загальний множник (п.3) і множити один на одного* за правилом множення багаточленів. Розглянемо, як відбувається множення рядів:

$$e^x \ln(1+x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) = x + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2}\right)x^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 1!} - \frac{1}{4}\right)x^4 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{3 \cdot 2!} - \frac{1}{4 \cdot 1!} + \frac{1}{5}\right)x^5 + \dots$$

$$\dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \dots,$$

причому тут можна підрахувати стільки коефіцієнтів, скільки знадобиться. У першого ряду радіус збіжності дорівнює ∞ , у другого дорівнює 1, тобто отриманий результат справедливий при $-1 < x < 1$, де абсолютно сходяться обидва ряди.

Аналогічно здійснюється ділення ряду на ряд, що ми покажемо на прикладі

$$tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots};$$

$$\frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots} \left| \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{35}x^7 + \dots} \right.$$

$$\frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + \dots}{-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72} + \dots\right)}$$

$$\frac{\frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{15} + \dots}{-\left(\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{15} + \dots\right)}$$

$$\frac{17x^7}{315} + \dots$$

$$-\left(\frac{17x^7}{315} + \dots\right)$$

Отже, розкладання тангенса в степеневий ряд починається з членів

$$tgx = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \tag{12.58}$$

Для обчислення подальших членів треба було продовжити розкладання $\sin x$ і $\cos x$. Можна довести, що формула (12.58) справедлива при $|x| < \pi/2$. Розкладання (12.58) можна одержати також за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Для цього помітимо, що $tg x$ як непарна функція повинна розкладатися в ряд по непарних степенях $tgx = a_1 + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots$

Але так як $\cos x \cdot tg x = \sin x$, то

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Розкриваючи дужки і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , одержимо

$$a_1 = \frac{1}{1!}; \quad a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!}; \quad a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!}; \quad a_7 - \frac{a_5}{2!} + \frac{a_3}{4!} - \frac{a_1}{6!} = -\frac{1}{7!}, \dots$$

звідки послідовно знайдемо коефіцієнти a_1, a_3, a_5, \dots

Нарешті, застосовується підстановка ряду

$$y = f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

у ряд

$$\varphi(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \dots \tag{12.59}$$

або, у більш загальному випадку, у ряд

$$\psi(y) = c_0 + c_1(y-a) + c_2(y-a)^2 + \dots$$

Наприклад, для ряду (12.59) це дасть

$$\varphi(f(x)) = b_0 + b_1(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + b_2(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 + \dots,$$

причому в правій частині треба розкрити дужки і привести подібні члени. Щоб результат мав сенс при $x=0$, потрібно, щоб ряд (12.59) сходився при $y=a_0$, тобто щоб a_0 потрапило на інтервал збіжності

ряду (12.59); утім, якщо ця умова не виконана, то обчислення самі покажуть помилку. Приведемо приклад:

$$\ln(1 + \sin x) = \frac{\sin x}{1} - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} - \dots = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^3}{3} - \dots =$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \dots}{2} + \frac{x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 + \dots}{3} - \frac{x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \dots}{4} +$$

$$+ \frac{x^5 - \frac{5}{6}x^7 + \dots}{5} - \frac{x^6 + \dots}{6} + \frac{x^7 + \dots}{7} + \dots;$$

тут при обчисленні послідовних степенів ряду ми множили черговий степінь на основний ряд для $\sin x$ за правилом множення многочленів, причому занадто високі степені x — в даному прикладі починаючи з x^8 — просто відкидали. Приводячи подібні члени, одержимо остаточно

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^6}{45} + \frac{61x^7}{5040} + \dots$$

За допомогою методів пп. 11-12 виявляється можливим, виходячи з найпростіших рядів, одержати розкладання багатьох інших функцій. Часто виявляється утруднено написати вираз для загального члена, однак завжди можна обчислити будь-яке число перших членів, чого зазвичай буває досить.

13. Степеневий ряд як ряд Тейлора. Розглянемо суму ряду

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (-R < x < R). \quad (12.60)$$

Коефіцієнти цього ряду легко виразити через його суму. Для цього будемо послідовно диференціювати формулу (12.60) і підставляти $x=0$; вийде

$$f(0) = a_0;$$

$$f'(x) = 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots, \quad f'(0) = 1a_1;$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots, \quad f''(0) = 1 \cdot 2a_2;$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \dots, \quad f'''(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \text{ і т.д.}$$

Знаходячи звідси a_0, a_1, a_2, \dots і підставляючи їх у (12.60), одержимо

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (-R < x < R), \quad (12.61)$$

тобто уже знайомий нам ряд Тейлора. Отже, *степеневий ряд є ряд Тейлора для своєї суми.*

Так як коефіцієнти ряду (12.61) однозначно виражаються через його суму, то одержуємо, зокрема, що *якщо суми двох степеневих рядів тотожно збігаються, то їхні коефіцієнти при однакових степенях x також рівні; якщо сума степеневого ряду тотожно дорівнює нулеві, то і всі його коефіцієнти дорівнюють нулеві.*

Вище ми вважали, що степеневий ряд задано. На практиці часто ставиться протилежна задача про розкладання заданої функції $f(x)$ у степеневий ряд. При цьому виникає питання, на якому інтервалі буде справедлива формула (12.61). Це рівносильно питанню про те, при яких x залишковий член кінцевої формули Тейлора прагне до нуля при зростанні номера.

Безпосередньо дослідити цей залишковий член удається лише в рідких випадках. На щастя, таке дослідження є зайвим: можна довести, що, наприклад, для елементарної функції $f(x)$ формула (12.61) має місце на всякому інтервалі, на якому ряд сходиться, якщо всі значення $f(0), f'(0), f''(0), \dots$ виходять безпосередньою підстановкою значення $x=0$ у вираз для $f(x), f'(x), f''(x), \dots$

У той же час далеко не кожен функцію можна розкласти в степеневий ряд (ряд Тейлора). Наприклад, степеневий ряд не може представляти функцію на інтервалі, на якому вона або похідна від неї якого-небудь порядку мають розриви, а також якщо вона на різних частинах цього інтервалу задається різними формулами (п.1.13).

Усе сказане безпосередньо переноситься на ряди по степенях x -а вигляду (12.47) і на відповідні ряди Тейлора.

14. Степеневі ряди з комплексними членами. Ці ряди мають вигляд

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad z = x + iy, \quad (12.62)$$

де коефіцієнти a_n і незалежна змінна z приймають будь-як комплексні значення. Теорія таких рядів зовсім аналогічна теорії дійсних степеневих рядів, однак нерівність $|z| < R$, що виділяє ті z , для яких ряд (12.62) сходиться, визначає на площині z коло збіжності ряду (12.62) (рис. 12.5). Подібним чином, для ряду по степенях $z - a$, де a — яке-небудь комплексне число, нерівність $|z - a| < R$ визначає коло радіуса R з центром у точці a . Якщо $R = \infty$, то ряд сходиться на всій комплексній площині. Властивості, які зазначені в п. 11 п. 12, без істотних змін переносяться на ряди вигляду (12.62); при цьому сума $S(z)$ буде комплексною функцією від комплексної змінної; інтеграл розуміється як невизначений (первісна).

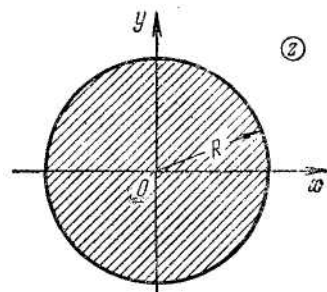


Рис. 12.5.

Раніше ми говорили, що при цьому тотожності, які справедливі для дійсних значень аргументу, зберігають силу і для комплексних його значень.

Покажемо це на прикладі рівності

$$e^{\ln(1+x)} = 1+x. \quad (12.63)$$

Для дійсних x вона справедлива в силу визначення логарифма. Виходить, якщо в ряд для e^y підставити ряд для $y = \ln(1+x)$ (п. 12), то після тотожних перетворень вийде $1+x$. Якщо провести ці ж перетворення, але вважати x комплексною, тобто писати z замість x , то вийде

$$e^{\ln(1+z)} = 1+z, \quad (12.64)$$

що і потрібно було довести.

15. Поняття про числа Бернуллі. У теорії рядів, зокрема степеневих, а також в інших розділах математики застосовуються так названі числа Бернуллі, відкриті Я. Бернуллі. Ці числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ визначаються за допомогою символічного рекурентного співвідношення

$$(\beta+1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

де в лівій частині після розкриття дужок треба в кожному члені замінити β^k на β_k .

Покажемо, як це робиться, на перших номерах:

$$n=1; \quad \beta_2 + 2\beta_1 + 1 - \beta_2 = 0, \quad \text{тобто } \beta_1 = -\frac{1}{2};$$

$$n=2; \quad \beta_3 + 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 - \beta_3 = 0, \quad \text{тобто } \beta_2 = -\frac{3\beta_1 + 1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$n=3; \quad \beta_4 + 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 - \beta_4 = 0, \quad \text{тобто } \beta_3 = -\frac{6\beta_2 + 4\beta_1 + 1}{4} = 0.$$

Подальші обчислення дають

$$\beta_4 = -\frac{1}{30}, \quad \beta_5 = 0, \quad \beta_6 = \frac{1}{42}, \quad \beta_7 = 0, \quad \beta_8 = -\frac{1}{30}, \quad \beta_9 = 0,$$

$$\beta_{10} = \frac{5}{66}, \quad \beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \beta_{13} = 0, \quad \beta_{14} = -\frac{7}{6}, \dots$$

Можна довести, що β_n з непарними $n \geq 3$ дорівнюють нулеві. Позначивши

$$B_n = (-1)^{n-1} \beta_{2n} \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

одержимо

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{6}, \quad B_7 = \frac{691}{2730}, \dots$$

Ці числа також називаються числами Бернуллі.

Приведемо деякі формули, що містять числа Бернуллі:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k) \quad (\text{див п. 4}) = \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \quad (k=1, 2, 3, \dots); \quad (12.65)$$

зокрема,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{B_1 (2\pi)^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{B_2 (2\pi)^4}{2 \cdot 4!} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \text{і т.д.}$$

З формули (12.65) випливає, що всі числа B_n додатні. Далі,

$$tgx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}$$

(зр. с формулою (12.58)) і т.д.

16. Застосування рядів до розв'язання різницевих рівнянь.

Різницеве рівняння зв'язує невідому величину і її різницевості. Розглянемо спочатку випадок, коли шуканою є послідовність

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тоді різницеве рівняння, скажемо, *другого порядку* в загальному випадку має вигляд

$$f(n, a_n, \Delta a_n, \Delta^2 a_n) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (12.66)$$

де

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n.$$

Якщо підставити

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2\Delta a_{n+1} + \Delta a_n,$$

то замість (12.66) вийде рівняння вигляду

$$f(n, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots), \quad (12.67)$$

Звичайно, в окремих випадках у ліві частини рівнянь (12.66) і (12.67) можуть входити не усі вписані там аргументи.

Щоб розв'язати рівняння (12.67), можна, наприклад, довільно задати a_0 і a_1 ; потім, поклавши $n=0$ у (12.67), знайти a_2 ; далі, поклавши $n=1$ у (12.67) і підставивши знайдене значення a_2 , знайти a_3 і т.д. Таким *методом кроків* можна знайти скільки завгодно членів послідовності a_n .

Якщо рівняння (12.67) є лінійним однорідним з сталими коефіцієнтами, тобто має вигляд

$$\alpha a_n + \beta a_{n+1} + \gamma a_{n+2} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots; \alpha, \beta, \gamma = \text{const}), \quad (12.68)$$

то розв'язання можна знайти в загальному вигляді, як ми зараз покажемо; аналогічний метод застосуємо для рівнянь будь-якого порядку.

Розглянемо *виробляючий* степеневий ряд для шуканої послідовності, тобто ряд

$$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

коефіцієнти якого рівні її членам. Ми будемо цікавитися тільки коефіцієнтами цього ряду і не будемо придавати x ніяких числових значень; тоді степеневий ряд називається *формальним*. Легко знайти добуток

$$(\gamma + \beta x + \alpha x^2)Q = \gamma a_0 + (\beta a_0 + \gamma a_1)x + (\alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2)x^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3)x^3 + \dots$$

У правій частині всі коефіцієнти, починаючи з коефіцієнта при x^2 , дорівнюють нулеві в силу рівняння (12.68). Виконуючи ділення, одержимо

$$Q = \frac{\gamma a_0 + (\beta a_0 + \gamma a_1)x}{\gamma + \beta x + \alpha x^2}. \quad (12.69)$$

Так як a_0 і a_1 задані, то в правій частині виходить відношення двох багаточленів із заданими коефіцієнтами. Його можна розкласти на суму елементарних дробів першого типу. Кожна з них має вигляд

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{A}{(-a)^\alpha \left(1 - \frac{x}{a}\right)^\alpha} = \frac{B}{(1-\gamma x)^\alpha} \quad \left(B = \frac{A}{(-a)^\alpha}; \gamma = \frac{1}{a} \right);$$

для дроби (12.69) $\alpha=1$ або 2 , але для різницевих рівнянь вищого порядку α може вийти великим. Ці дроби розкладаємо в степеневі ряди по формулах, що виходить із суми геометричної прогресії за допомогою диференціювання:

$$\frac{B}{1-\gamma x} = B + B\gamma x + B\gamma^2 x^2 + \dots + B\gamma^n x^n + \dots,$$

$$\frac{B}{(1-\gamma x)^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{B}{1-\gamma x} \right)' = B + 2B\gamma x + 3B\gamma^2 x^2 + \dots + (n+1)B\gamma^n x^n + \dots,$$

і т.д.

Підсумовуючи коефіцієнти при x^n у всіх отриманих рядів, ми тим самим знаходимо коефіцієнт a_n ряду Q , тобто розв'язання рівняння (12.68) у загальному вигляді.

Як приклад ми пропонуємо читачеві вивести загальну формулу для чисел *Фібоначчі* $a_0=0, a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, \dots$, кожне з яких, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх:

$$a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}.$$

Розглядаються також різницеві рівняння, у яких шуканою є функція $y(x)$, тобто коли замість (12.66) і (12.67) рівняння має одну з форм

$$f(x, y, \Delta_h y, \Delta^2_h y) = 0, \quad \phi(x, y(x), y(x+h), y(x+2h)) = 0. \quad (12.70)$$

Цей випадок зводиться до попереднього в якому шуканою є послідовність. Нехай, наприклад, $0 \leq x < \infty$. Тоді треба позначити

$a_n = y(\xi + nh)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), де ξ — яке-небудь стале число, $0 \leq \xi < h$. Якщо в рівнянні (12.70) покласти $x = \xi + nh$, то воно перепишеться у вигляді

$$\varphi(\xi + nh, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0,$$

тобто при сталому ξ буде мати форму (12.67). Знайшовши a_n і користуючись вільністю у виборі ξ , ми й одержуємо шукане розв'язання $y(x)$. Зокрема, звідси випливає, що для рівняння (12.70) значення $y(x)$ при $0 \leq x < 2h$ можна задавати довільно.

17. Кратні степеневі ряди. Кратні степеневі ряди грають для функцій декількох змінних таку ж роль, як прості степеневі ряди для функцій однієї змінної. Розглянемо для простоти подвійні степеневі ряди; розгляд степеневих рядів вищої кратності проходить аналогічно

При записі подвійного степеневого ряду, як і при записі подвійного числового ряду (п. 6), зручно користуватися подвійними індексами:

$$S(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots, \quad (12.71)$$

Від такого ряду потрібна абсолютна збіжність, так що порядок його підсумовування несуттєвий.

Область збіжності ряду (12.71) - це деяка область на площині x, y (нею може виявитися, зокрема, уся ця площина); ця область може мати вигляд, який зображено на рис. 12.6.

При кожному зафіксованому y виходить ряд по степенях x , радіус збіжності якого R може залежати від y , тобто $R = R(y) \leq \infty$. Виходить, область збіжності симетрична щодо осі y ; аналогічно перевіряємо симетрію щодо осі x . Так як розглядається абсолютна збіжність ряду (12.71), то $R(y)$ при $y \geq 0$ є незростаючою функцією y .

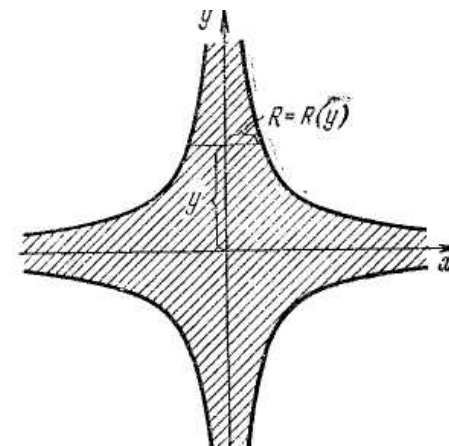


Рис. 12.6.

Аналогічно розглядаються ряди вигляду

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (x-a)^m (y-b)^n. \quad (12.72)$$

Тут виходить область збіжності з центром симетрії в точці $(a; b)$.

Властивості кратних степеневих рядів подібні властивостям простих степеневих рядів (п.11—12). Кратні ряди виходять, зокрема, при розкладанні функції декількох змінних у ряд Тейлора :

$$f(x, y) = f(0,0) + \frac{f'_x(0,0)}{1!} x + \frac{f'_y(0,0)}{1!} y + \frac{f''_{xx}(0,0)}{2!} x^2 + \frac{f''_{xy}(0,0)}{2!} xy + \frac{f''_{yy}(0,0)}{2!} y^2 + \dots;$$

аналогічно виходять ряди (12.72). Вони розглядаються також при застосуванні методу малого параметра, якщо рівняння містить кілька параметрів, і в інших питаннях.

18. Функції від матриць. Нехай A — квадратна матриця, для визначеності, третього порядку; результати, що ми одержимо, справедливі для матриць будь-якого порядку. Раніше ми вивчали, що таке A^2 і A^{-1} . Але що треба розуміти, наприклад, під e^A ? Значення експонентної функції в математиці підказує, що це питання далеко не просте.

Виявляється, що розумну відповідь на поставлене питання можна дати за допомогою степеневих рядів, на зразок того як раніше були

визначені функції від комплексної змінної. Нехай деяка функція $f(x)$ допускає розкладання в ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (12.73)$$

Тоді по визначенню

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \dots + a_n\mathbf{A}^n + \dots, \quad (12.74)$$

де \mathbf{I} - одинична матриця того ж порядку, що й \mathbf{A} . Наприклад,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + (\mathbf{A}/1!) + (\mathbf{A}^2/2!) + (\mathbf{A}^3/3!) + \dots + (\mathbf{A}^n/n!) + \dots \quad (12.75)$$

Приведене визначення має сенс, якщо ряд (12.74) сходиться. Можна вказати просту умову для цієї збіжності. Для цього допустимо, що ряд (12.73) має радіус збіжності R , і припустимо для простоти, що усі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, матриці \mathbf{A} різні. Тоді матрицю \mathbf{A} можна привести до діагонального вигляду, тобто існує невироджена матриця \mathbf{H} , для якої

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Але тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{A}^2 = (\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^{-1}) \cdot (\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^{-1}) = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2\mathbf{A} = (\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{H}^{-1})(\mathbf{H}\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^{-1}) = \mathbf{H}\mathbf{\Lambda}^3\mathbf{H}^{-1} \text{ і т.д.} \end{aligned}$$

і ряд (12.74) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{H}a_0\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}a_1\mathbf{\Lambda}\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}a_2\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{H}^{-1} + \dots = \mathbf{H}(a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{\Lambda} + a_2\mathbf{\Lambda}^2 + \dots)\mathbf{H}^{-1}. \quad (12.76)$$

Однак діагональну матрицю дуже просто підносити до степеня:

$$\mathbf{\Lambda}^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2), \quad \mathbf{\Lambda}^3 = \text{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3) \text{ і т.д.} \quad (12.77)$$

(узагалі при перемножуванні діагональних матриць виходить діагональна матриця, елементи якої дорівнюють добуткові відповідних елементів матриць-множників). Тому

$$\begin{aligned} &a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{\Lambda} + a_2\mathbf{\Lambda}^2 + \dots = \\ &= \text{diag}(a_0 + a_1\lambda_1 + a_2\lambda_1^2 + \dots, a_0 + a_1\lambda_2 + a_2\lambda_2^2 + \dots, a_0 + a_1\lambda_3 + a_2\lambda_3^2 + \dots). \end{aligned} \quad (12.78)$$

Якщо ряди, що розташовані на діагоналі, сходяться, то сходиться і ряд (12.76), а з ним і ряд (12.74). Звідси ми дійдемо висновку: якщо усі власні значення матриці \mathbf{A} по модулю менші R (радіуса збіжності ряду (12.73)), то ряд (12.74) сходиться і притому абсолютно; якщо хоча б одне з цих власних значень по модулю більше R , то ряд (12.74) розходиться.

Можна довести, що цей результат вірний і в тому випадку, коли матриця \mathbf{A} має кратні власні значення. З (12.76) і (12.78) випливає також формула, яка справедлива для матриці \mathbf{A} , що приводиться до діагонального вигляду за допомогою матриці \mathbf{H} :

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{H} \text{diag}(f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)) \mathbf{H}^{-1}.$$

З доведеного випливає, наприклад, що ряд (12.75) сходиться для будь-якої матриці \mathbf{A} , так як відповідний ряд має нескінченний радіус збіжності. Інший важливий ряд

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n + \dots \quad (12.79)$$

сходиться, якщо усі власні значення матриці \mathbf{A} по модулю менші одиниці.

На функції від матриць поширюються багато властивостей звичайних функцій; ці властивості можна доводити за допомогою дій над рядами, на зразок того як виводилась формула (12.64) з формули (12.63). Наприклад, з тотожності

$$(1+x+x^2+\dots)(1-x) = \frac{1}{1-x}(1-x) = 1$$

випливає, що

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

тобто сума ряду (12.79) у випадку його збіжності дорівнює $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. У той же час треба мати на увазі, що при доведенні ряду властивостей за допомогою рядів застосовується перестановка співмножників, скажемо, рівності вигляду $ab + ba = 2ab$, що для матриць не завжди можлива. Наприклад, це робиться при доведенні формули

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}},$$

яка, таким чином, справедлива для перестановочних матриць \mathbf{A} і \mathbf{B} .

Як приклад застосування введених понять знайдемо умову збіжності методу послідовних наближень при розв'язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Систему можна у векторно-матричній формі переписати у вигляді

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{\delta}, \quad (12.80)$$

де $\mathbf{\delta}$ - заданий вектор, \mathbf{A} - матриця коефіцієнтів, а \mathbf{x} - шуканий вектор. Метод ітерацій дасть, починаючи з деякого $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}(\mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{x}_0) = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{\delta} + \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0;$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{\delta} + \mathbf{A}\mathbf{\delta} + \mathbf{A}^2\mathbf{\delta} + \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0$$

і т.д., узагалі

$$\mathbf{x}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1})\mathbf{\delta} + \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0. \quad (12.81)$$

Для збіжності процесу потрібно, щоб вплив нульового наближення в границі зійшов на ніць, тобто щоб $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{0}$ для $n \rightarrow \infty$. А для цього, в силу формул (12.77), потрібно, щоб усі власні значення

матриці \mathbf{A} були по модулю менші одиниці. Це і є умова збіжності методу ітерацій. Якщо вона виконана, то, переходячи у формулі (12.81) до границі при $n \rightarrow \infty$, одержимо

$$\bar{\mathbf{x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n + \dots) \delta = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \delta$$

Легко перевірити за допомогою безпосередньої підстановки, що отриманий вектор $\bar{\mathbf{x}}$ задовольняє рівнянню (12.80).

Подібно векторним функціям від скалярного аргументу можна розглядати *матричні функції від скалярного аргументу*, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x)$, на які легко поширюються багато звичайних властивостей. Наприклад, часто застосовується функція

$$\mathbf{V} = e^{\mathbf{A}x} \quad (-\infty < x < \infty; \mathbf{A}x = x\mathbf{A}),$$

де \mathbf{A} — деяка стала матриця. За допомогою рядів легко довести властивість

$$(e^{\mathbf{A}x})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x},$$

з якої, зокрема, випливає, що для будь-якого сталого вектора \mathbf{c} буде

$$(e^{\mathbf{A}x}\mathbf{c})' = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}x}\mathbf{c}.$$

Але це значить, що векторна функція від x ,

$$\mathbf{y} = e^{\mathbf{A}x}\mathbf{c}, \quad (12.82)$$

є розв'язанням матричного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (12.83)$$

Якщо дано початкову умову

$$\mathbf{y}|_{x=x_0} = \mathbf{y}_0,$$

то з (12.82) одержуємо

$$\mathbf{y}_0 = e^{\mathbf{A}x_0}\mathbf{c}, \quad \text{тобто } \mathbf{c} = e^{-\mathbf{A}x_0}\mathbf{y}_0,$$

і ми одержуємо явну формулу для розв'язання

$$\mathbf{y} = e^{\mathbf{A}x} e^{-\mathbf{A}x_0} \mathbf{y}_0 = e^{(\mathbf{A}(x-x_0))} \mathbf{y}_0.$$

Так як ми змогли задовольнити будь-якій початковій умові, то формула (12.82) дає загальне розв'язання рівняння (12.83).

19. Асимптотичні розкладання. Асимптотичні розкладання, які вивчені великим французьким математиком А. Пуанкаре (1854—1912), широко застосовуються в даний час. Ми будемо розглядати більш розповсюджені ряди по степенях $1/x$, а не x , що не принципово, так як заміна $1/x = x_1$ переводить розкладання на нескінченності в розкладання в нулі. Наприклад, з ряду для e^x відразу одержуємо

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} + \dots + \frac{1}{n!x^n} + \dots \quad (12.84)$$

Почнемо з приклада. Розглянемо функцію

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-s}}{s} ds \quad (0 < x < \infty)$$

при $x \rightarrow \infty$. За допомогою правила Лопітала легко перевірити що $f(x) \sim x^{-1}$, тобто

$$f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (12.85)$$

Щоб уточнити це розкладання, зробимо інтегрування вроздріб:

$$\int_x^\infty \frac{e^{x-s}}{s} ds = \left(-e^{x-s} \frac{1}{s} \right) \Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{x-s}}{s^2} ds = \frac{1}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{x-s}}{s^2} ds.$$

Аналогічно перевіряємо, що останній інтеграл еквівалентний x^{-2} , тобто одержуємо

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (12.86)$$

Це більш точний асимптотичний вираз, ніж (12.85), так як при $x \rightarrow \infty$ невизначений доданок у (12.86), тобто $o(1/x^2)$, швидше прагне до нуля, чим невизначений доданок у (12.85). Подальші інтегрування вроздріб дають все більш точні асимптотичні вирази:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right); \quad (12.87)$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ і т.д.} \quad (12.88)$$

Здавалося б, ми повинні одержати в границі розкладання функції $f(x)$ у ряд

$$\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \frac{4!}{x^5} - \dots \quad (12.89)$$

Однак за допомогою ознаки Даламбера легко перевірити, що цей ряд має нульовий радіус збіжності, тобто *розходиться при всіх x* . Тому рядом (12.89) «цілком» користуватися не можна; але формули (12.85)—(12.88) показують, що можна користуватися

його частковими сумами. Такі ряди називаються асимптотично збіжними.

Загальне визначення таке. Говорять, що функція $f(x)$ допускає при $x \rightarrow \infty$ асимптотичне розкладання

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots \quad (12.90)$$

якщо для будь-якого $n = 0, 1, 2, \dots$ має місце представлення

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (\text{при } x \rightarrow \infty).$$

Для звичайних розкладань у степеневі ряди вигляду (12.84) ця властивість задовольняється автоматично. Однак вона може виконуватися й у тому випадку, якщо ряд (12.90) усюди розходиться (тоді він називається *асимптотично збіжним* або просто *асимптотичним рядом*) або ж сходиться, але не до $f(x)$.

При практичному застосуванні ряду (12.90) його обривають на деякому члені, а потім, оцінюючи величину останніх членів, роблять висновок, починаючи з якого x можна користуватися обраною частковою сумою.

Мікромодуль 29

Приклади розв'язання задач

Приклади розкладання кінцевих числових рядів:

$$1. 1+2+3+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. p+(p+1)+(p+2)+\dots+(q-1)+q = \frac{(q+p)(q-p+1)}{2}$$

$$3. 1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1) = n^2$$

$$4. 2+4+6+\dots+(2n-2)+2n = n(n+1)$$

$$5. 1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$6. 1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$7. 1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

$$8. 1^3+3^3+5^3+\dots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$

Приклади розкладання нескінчених числових рядів:

$$9. 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots = e.$$

$$10. 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \mp \dots = \frac{1}{e}.$$

$$11. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots = \ln 2.$$

$$12. 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

$$13. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2.$$

$$14. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \pm \frac{1}{2^n} \mp \dots = \frac{2}{3}.$$

$$15. 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

$$16. 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \pm \frac{1}{n^2} \mp \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

$$17. 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}.$$

$$18. 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \dots \pm \frac{1}{n^4} \mp \dots = \frac{7\pi^4}{720}.$$

Приклади розкладання в ряди функцій:

$$1. (a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \dots$$

область збіжності $|x| < a$

$$2. e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

область сходимості $-\infty < x < \infty$

$$3. a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \dots$$

область збіжності $-\infty < x < \infty$

$$4. \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

область збіжності $-\infty < x < \infty$

$$5. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

область збіжності $-\infty < x < \infty$

$$6. \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots$$

область збіжності $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$7. \operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \left\{ \frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$$

область збіжності $|x| < \pi$, окрім значення $x=0$

$$8. \arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{3x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots$$

область збіжності $|x| < 1$

$$9. \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

область збіжності $|x| < 1$

$$10. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

область збіжності $|x| < 1$

$$11. \operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

область збіжності $-\infty < x < \infty$

$$12. \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

область збіжності $-\infty < x < \infty$

$$13. \operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

область збіжності $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$14. \operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \left\{ \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \frac{x^7}{4725} + \dots \right\}$$

область збіжності $|x| < \pi$, окрім значення $x=0$

$$15. \operatorname{arth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

область збіжності $|x| < 1$

$$16. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots$$

область збіжності $-1 < x \leq 1$

$$17. \ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]$$

область збіжності $x > 0$

$$18. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \right]$$

область збіжності $|x| < 1$

$$19. \ln \frac{x+1}{x-1} = 2 \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x} \right)^5 + \dots + \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1}{x} \right)^{2n+1} + \dots \right]$$

область збіжності $x < -1, x > 1$

Мікромодуль 29

Індивідуальні тестові завдання

Числові ряди

1. Довести, що приведений нижче ряд сходиться

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^n} + \dots$$

2. Довести, що приведений нижче ряд сходиться

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

3. Довести, що приведений нижче ряд сходиться

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

4. Довести, що приведений нижче ряд розходиться

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

5. Довести, що приведений нижче ряд розходиться

$$\frac{1}{101} + \frac{2}{201} + \frac{3}{301} + \dots + \frac{n}{100n+1} + \dots$$

6. Довести, що приведений нижче ряд сходиться (використовувати ознаку Даламбера)

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

7. Довести, що приведений нижче ряд сходиться (використовувати ознаку Коші)

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^9 + \dots + \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} + \dots$$

8. Довести, що приведений нижче ряд сходиться (використовувати теорему Лейбніца)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \pm \frac{1}{n} \mp \dots$$

9. Довести, що приведений нижче ряд сходиться абсолютно

$$\frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{2^n} + \dots$$

Функціональні ряди

10. Довести, що приведений нижче ряд сходиться для всіх значень x

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

11. Довести, що приведений нижче ряд сходиться на інтервалі $(-1,1)$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

12. Довести, що приведений нижче ряд правильно сходиться в будь-якому інтервалі осі Ox

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

13. Довести, що приведений нижче ряд правильно сходиться

$$\sin x + \frac{\sin 2^3 x}{2^3} + \dots + \frac{\sin n^3 x}{n^2} + \dots$$

14. Довести, що приведений нижче ряд розходиться

$$\cos x + 2\cos 2^3 x + \dots + n\cos n^3 x + \dots$$

Степеневі ряди

15. Розкласти в ряд степеневі ряди

а) e^x , ax і $(a+x)^m$

б) $\frac{1}{(1-q)^2}$ і $\frac{1}{(1-q)^3}$.

16. Довести, що введеному нижче ряді область збіжності складається тільки з однієї точки

$$1 + x + 2^2 x^2 + \dots + n^n x^n + \dots$$

17. Довести, що введеному нижче ряді область збіжності складається тільки з усіх точок осі Ox

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^n} + \dots$$

18. Довести, що введеному нижче ряді область збіжності складається більше чим з однієї точки осі Ox

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

19. Знайти радіус збіжності ряду

$$1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots$$

20. Визначити при яких умовах приведений нижче ряд розходиться, а при яких – сходиться неабсолютно

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n}+\dots$$

21. Дано ряд

$$x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\dots$$

Визначити:

- а) радіус збіжності ряду,
 б) при яких умовах ряд сходиться, а при яких розходиться.

22. Знайти інтервал збіжності ряду

$$\frac{x-1}{1 \cdot 2} + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(x-1)^3}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n} + \dots$$

23. Розкласти в ряд експоненти

$$e^{\frac{i}{\sqrt{n}}\sqrt{q}} \quad i \quad e^{-\frac{i}{\sqrt{n}}\sqrt{q}}$$

Розкладання функцій у степеневі ряди

24. Розкласти многочлен по степенях різниці $x-1$

$$f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$$

25. Розкласти многочлен по степенях x , тобто по степенях різниці $x-0$

$$f(x) = (1+x)^n$$

26. Розкласти функції в біноміальний ряд (у ряд Маклорена)

$$а) \frac{1}{1+x}, \quad б) \sqrt{1+x}, \quad в) \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

27. Розкласти в ряд Маклорена гіперболічні функції $\operatorname{ch} x$ і $\operatorname{sh} x$

28. Розкласти в ряд Маклорена функцію

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$$

29. Розкласти в ряд Маклорена функції

а) $\arcsin x$

б) $e^x \sin x$

30. Розв'язати за допомогою рядів наступні диференціальні рівняння

а) $y'' - xy = 0$ (при початкових умовах $y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1$.)

б) $y' = xy^2 + 1$ (при $y|_{x=1}=0$)

31. Розкласти в ряд Тейлора функцію $e^x \sin y$ в околиці точки $(0,0)$.

32. Розкласти в ряд функцію x^y в околиці точки $(1,1)$.

Мікромодуль 30

Тригонометричні ряди і ряди Фур'є

12.4. Тригонометричні ряди

20. Властивість ортогональності. Дві дійсні функції $g(x)$ і $h(x)$, які задані на кінцевому або нескінченному інтервалі $a < x < b$, називаються *ортогональними* одна одній на цьому інтервалі, якщо

$$\int_a^b g(x)h(x) dx = 0. \quad (12.91)$$

При цьому функції передбачаються кінцевими або нескінченними, але обов'язково з абсолютно збіжним інтегралом (12.91). Назва «ортогональні» пояснюється тим, що формула (12.91) багато в чому аналогічна умові перпендикулярності двох векторів, заданих своїми декартовими проєкціями.

Система функцій називається *ортогональною* на деякому інтервалі, якщо кожні дві функції з цієї системи ортогональні одна одній на цьому інтервалі. Історично першим і найбільш важливим прикладом ортогональної системи функцій з'явилася система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (12.92)$$

на інтервалі

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

Легко переконатися в тім, що вона дійсно ортогональна:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx = \quad (12.93)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (npri \quad m \neq n)$$

і аналогічно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad (npri \quad m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \quad (\text{при любых } m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Система (12.92) ортогональна також на інтервалі $0 \leq x \leq 2\pi$ і взагалі на будь-якому інтервалі довжини 2π . Це впливає з властивості 10 п.4 модуля 9, якщо взяти в якості $f(x)$ добуток двох функцій (12.92), а $A=2\pi$. Якщо скористатися властивістю інтеграла від парної функції, то з (12.93) одержимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 2 \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots; m \neq n),$$

тобто система функцій

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (12.94)$$

ортогональна на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$. Аналогічно перевіряється, що на тім же інтервалі система функцій

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (12.95)$$

також ортогональна. (У той же час система функцій (12.92) на інтервалі $0 \leq x \leq \pi$ не ортогональна.) Якщо «розтягти» уздовж осі x кожну з функцій (12.92) у l/π раз, ми одержимо систему функцій

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots \quad (12.96)$$

ортогональну на інтервалі $-l \leq x \leq l$. Подібним чином можна рівномірно «розтягти» системи функцій (12.94) і (12.95) і взагалі будь-яку ортогональну систему функцій. Застосовується також зміщення ортогональної системи функцій уздовж осі абсцис, від чого вона не перестає бути ортогональною (на зміщеному інтервалі).

Властивістю ортогональності можуть володіти не тільки тригонометричні функції. Наприклад, зараз ми побудуємо систему ортогональних поліномів на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$.

Будемо виходити із системи функцій

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (12.97)$$

Перші дві функції ортогональні одна одній:

$$\int_{-1}^1 1 \cdot x \, dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^1 = 0,$$

тому покладемо $P_0(x) \equiv 1, P_1(x) \equiv x$. У той же час третя функція не ортогональна першій. Тому в якості $P_2(x)$ візьмемо лінійну комбінацію перших трьох функцій (12.97), тобто $P_2(x) = ax^2 + bx + c$,

причому коефіцієнти a, b, c підберемо так, щоб $P_2(x)$ був ортогональним до вже побудованих поліномів $P_0(x)$ і $P_1(x)$, тобто

$$\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) \cdot 1 \cdot dx = 0, \quad \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) \cdot x \cdot dx = 0,$$

Звідси знайдемо $b=0, a=-3c$, тобто $P_2(x) = c(-3x^2 + 1)$.

Тут c - довільна стала. Зазвичай вона вибирається так, щоб $P_2(1) = 1$.

(Такий вибір з рівноправних об'єктів якого-небудь одного називається *нормировкою*.) Одержимо $c = -1/2$, тобто остаточно

$$P_2(x) = (3/2)x^2 - 1/2.$$

Для побудови $P_3(x)$ беремо комбінацію перших чотирьох функцій (12.88), тобто

$$P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

причому коефіцієнти a, b, c, d підбираємо так, щоб $P_3(x)$ був ортогональним до вже побудованих поліномів $P_0(x), P_1(x)$ і $P_2(x)$. Звідси при додатковій умові $P_3(1) = 1$ знайдемо подібно попередньому

$$P_3(x) = (5/2)x^3 - (3/2)x.$$

Аналогічно будують

$$P_4(x) = (1/8)(35x^4 - 30x^2 + 3), P_5(x) = (1/8)(63x^5 - 70x^3 + 15x) \text{ і т.д.}$$

Ці многочлени ортогональні один одному на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$. Вони були досліджені Лежандром у 1783—1785 р. і їх називають

тепер *многочленами Лежандра*. Вони відіграють важливу роль у різних областях математики і фізики. Подібний процес *ортогоналізації*, що ми проробили над системою функцій (12.97) на інтервалі $-1 \leq x \leq 1$, можна проробити над будь-якою лінійно незалежною системою функцій на *будь-якому* інтервалі, якщо інтеграл від квадратів цих функцій по розглянутому інтервалі сходяться.

21. Ряди по ортогональних функціях. Нехай задана система функцій.

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (12.98)$$

ортогональна на деякому інтервалі $a < x < b$. Може виникнути задача про розкладання довільної функції $f(x)$ на цьому інтервалі в ряд по функціях (12.98), тобто в ряд вигляду

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x), \quad (12.99)$$

де a_n — числові коефіцієнти. При цьому виникають питання: чи можливе розкладання для будь-якої функції $f(x)$? Як знайти коефіцієнти a_n ? Як сходиться ряд (12.99)? Будемо вважати для простоти всі розглянуті функції, а також інтервал $a < x < b$ кінцевими. Відповідь на перше питання залежить від вибору системи (12.98). Якщо розкладання (12.99) можливе для будь-якої функції $f(x)$, то система функцій (12.98) називається *повною*. Можна довести, що *всі приведені в п. 20 ортогональні системи функцій є повними* на зазначених там інтервалах. Перейдемо тепер до знаходження коефіцієнтів a_n розкладання (12.99), причому будемо вважати, що жодна з функцій (12.98) не дорівнює тотожно нулеві. Для цього помножимо обидві частини (12.99) на $g_n(x)$ і проінтегруємо результат по інтервалу $a \leq x \leq b$:

$$\int_a^b f(x)g_n(x) dx = a_1 \int_a^b g_1(x)g_n(x) dx + a_2 \int_a^b g_2(x)g_n(x) dx + \dots + a_n \int_a^b g_n^2(x) dx + \dots$$

У силу ортогональності системи (12.98), у правій частині останньої рівності всі інтеграли дорівнюють нулеві, за винятком інтеграла від $g_n^2(x)$, і ми одержуємо формулу для коефіцієнтів

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (12.100)$$

Так як коефіцієнти знаходяться однозначно, то ми робимо висновок, зокрема, що *якщо суми двох рядів (12.99) тотожно рівні, то і коефіцієнти при однакових функціях $g_n(x)$ у цих рядах також однакові; якщо сума ряду (12.99) тотожно дорівнює нулеві, той і всі коефіцієнти дорівнюють нулеві*.

22. Ряди Фур'є. Ці загальні результати можна застосувати до конкретних ортогональних систем функцій. Так, для системи (12.92) одержуємо, що будь-яку кінцеву функцію, яка задана при $-\pi \leq x \leq \pi$, можна розкласти в ряд вигляду

$$f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos 2x + a_5 \sin 2x + \dots$$

Тут зручніше позначити коефіцієнти по-іншому і написати

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned} \quad (12.101)$$

Коефіцієнти цього ряду знаходяться по формулах (12.100):

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (12.102)$$

Аналогічно виходять ряди по системах функцій (12.94) або (12.95)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 1); \quad (12.103)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (12.104)$$

Часто застосовуються ряди по функціях (12.96) і по подібним же чином розтягнутим системам функцій (12.94) або (12.95):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right) \quad (-l \leq x \leq l),$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} dx \quad (n \geq 1); \quad (12.105)$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n \geq 1); \quad (12.106)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n \geq 1). \quad (12.107)$$

Ряди (12.101), (12.103) і (12.104) є окремими випадками рядів (12.105), (12.106) і (12.107), а саме, перші виходять із других при $l=\pi$. Усі вони називаються *рядами Фур'є* по імені видатного французького математика Ж. Фур'є (1768—1830).

Приведемо приклади розкладання в ряд Фур'є. Нехай функцію $y=x$ потрібно розкласти при $0 \leq x \leq l$ у ряд (12.106); для цього підраховуємо коефіцієнти:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{l}{2}; \\ a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} x \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{2}{l} \int_0^l \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{\pi n} \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l = \frac{2l}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - 1) = -\frac{2l}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] \quad (n \geq 1). \end{aligned}$$

Звідси одержуємо

$$a_1 = -\frac{4l}{\pi^2 1^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4l}{\pi^2 3^2}, \quad a_4 = 0, \dots$$

і остаточно

$$x = l \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \right] \quad (0 \leq x \leq l). \quad (12.108)$$

Як другий приклад візьмемо функцію, задану декількома формулами (графік її складає середню частину рис. 12.7, б):

$f(x)=1$ ($-l < x < -l+\alpha$), $=0$ ($-l+\alpha < x < 0$), $=1$ ($0 < x < \alpha$), $=0$ ($\alpha < x < l$), де α — деяке число, ($0 < \alpha < l$), і розкладемо її в ряд (12.105):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} 1 dx + \int_{-l+\alpha}^0 0 dx + \int_0^{\alpha} 1 dx + \int_{\alpha}^l 0 dx \right) = \\ &= \frac{1}{2l} (\alpha + 0 + \alpha + 0) = \frac{\alpha}{l}. \end{aligned}$$

(Аналогічним чином знаходять інтеграл від будь-якої функції, заданої декількома формулами.)

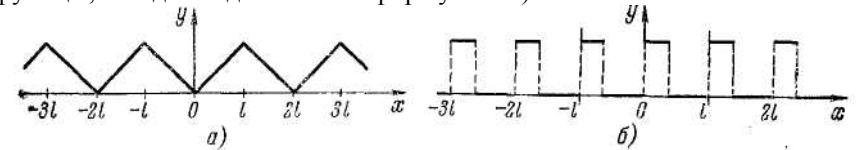


Рис. 12.7.

Далі,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} \cos \frac{\pi n x}{l} dx + \int_0^{\alpha} \cos \frac{\pi n x}{l} dx \right) = \frac{1}{\pi n} \left[\sin \frac{\pi n (-l+\alpha)}{l} + \sin \frac{\pi n \alpha}{l} \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(-\sin \frac{\pi n l}{l} \cos \frac{\pi n \alpha}{l} + \cos \frac{\pi n l}{l} \sin \frac{\pi n \alpha}{l} + \sin \frac{\pi n \alpha}{l} \right) = \frac{1}{\pi n} [(-1)^n + 1] \sin \frac{\pi n \alpha}{l}, \\ b_n &= \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \int_0^{\alpha} \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) = -\frac{1}{\pi n} \left[\cos \frac{\pi n (-l+\alpha)}{l} - \cos(-\pi n) + \cos \frac{\pi n \alpha}{l} - 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \left[\cos \frac{\pi n l}{l} \cos \frac{\pi n \alpha}{l} + \sin \frac{\pi n l}{l} \sin \frac{\pi n \alpha}{l} - (-1)^n + \cos \frac{\pi n \alpha}{l} - 1 \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \left\{ [(-1)^n + 1] \cos \frac{\pi n \alpha}{l} - (-1)^n - 1 \right\} = \frac{1}{\pi n} [(-1)^n + 1] \left(1 - \cos \frac{\pi n \alpha}{l} \right). \end{aligned}$$

Особливо простий результат виходить, якщо $\alpha = l/2$; тоді

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi = 0, \quad b_{2k} = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k]$$

і ряд приймає вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi x}{l} + \dots \right). \quad (12.109)$$

Таким чином, функцію, яка задана декількома формулами, виявляється можливим представити у вигляді єдиного ряду. Відкриття Фур'є цього факту зіграло в історії математики велику роль, так як привело до значного розширення змісту поняття функції.

При практичному розкладанні функції (особливо, заданої таблично або графічно) у ряд Фур'є зазвичай для підрахунку коефіцієнтів користуються формулами числового інтегрування. Нехай, наприклад, розглядається розкладання в ряд (12.107) і ми хочемо скористатися формулою трапецій, розбивши відрізок інтегрування на 24 частини. Тоді, позначивши

$$x_k = \frac{kl}{24}, \quad f_k = f(x_k) \quad (k=0,1,\dots,24),$$

одержимо

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \approx \frac{2}{l} \frac{l}{24} \left(\frac{f_0}{2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} + f_1 \sin \frac{n\pi x_1}{l} + \dots + \frac{f_{24}}{2} \sin \frac{n\pi x_{24}}{l} \right) =$$

$$= \frac{1}{12} \left(\frac{f_0}{2} \sin 0^\circ n + f_1 \sin 7,5^\circ n + f_2 \sin 15^\circ n + \dots + \frac{f_{24}}{2} \sin 80n^\circ \right). \quad (12.110)$$

Неважко бачити, що тут при будь-якому n потрібні тільки наступні значення синуса:

$$\sin 0^\circ = 0,0000, \sin 7,5^\circ = 0,1305, \sin 15^\circ = 0,2588, \sin 22,5^\circ = 0,3827, \\ \sin 30^\circ = 0,5000, \sin 37,5^\circ = 0,6588, \sin 45^\circ = 0,7071, \sin 52,5^\circ = 0,7934, \sin 60^\circ = 0,8660,$$

$$\sin 67,5^\circ = 0,9239, \sin 75^\circ = 0,9659, \sin 82,5^\circ = 0,9914, \sin 90^\circ = 1,0000.$$

При застосуванні формули (12.110) для даного n потрібно підставити значення синуса з цієї таблиці, користуючись тригонометричними формулами приведення; потім згрупувати члени з однаковими другими множниками, скласти в цих членах значення f_k і, після множення, підрахувати повну суму.

23. Розкладання періодичної функції. Ряди Фур'є застосовуються не тільки для розкладання функції, заданої на кінцевому інтервалі, але і для розкладання періодичної функції, заданої на всій осі. Припустимо спочатку, що функція $f(x)$ задана при $-\pi \leq x \leq \pi$, і розкладемо її в ряд (12.101). Його члени мають сенс і поза даним інтервалом, причому їхній період дорівнює 2π , так як

$$\cos n(x+2\pi) \equiv \cos (nx+2\pi n) \equiv \cos nx; \\ \sin n(x+2\pi) \equiv \sin nx \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Виходить, і вся сума періодична з періодом 2π . Але так як на інтервалі $-\pi \leq x \leq \pi$ вона дорівнює $f(x)$, то сума ряду (12.101) дає

періодичне продовження функції $f(x)$ з інтервалу $-\pi \leq x \leq \pi$ на усю вісь x з періодом 2π .

Аналогічно, так як всі члени ряду (12.103) - парні функції, то його сума дає парне періодичне продовження функції $f(x)$ з інтервалу $0 \leq x \leq \pi$ на усю вісь з періодом 2π ; сума ж ряду (12.104) дасть непарне продовження з тим же періодом. Аналогічний результат виходить для рядів (12.105)–(12.107), де, однак, період дорівнює $2l$.

Так, на рис. 12.7 зображено розглянуті на всій осі x суми рядів, розібраних у прикладах п. 22; відзначимо, що в другому прикладі, хоча $2l$ і є періодом, найменший період дорівнює l .

Нехай тепер функція $f(x)$ із самого початку задана на всій осі x як періодична функція з періодом 2π . Якщо тоді скласти ряд (12.101), де коефіцієнти обчислені по формулах (12.102), то він, як ми показали, дає періодичне продовження $f(x)$ з відрізка $-\pi \leq x \leq \pi$ на усю вісь з періодом 2π , тобто збігається з $f(x)$ на всій осі x .

При цьому коефіцієнти можна обчислювати також і по формулах

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (\alpha \text{ будь-яке}); \quad \text{в частковості,} \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

і аналогічно для коефіцієнтів a_n, b_n ; це впливає з періодичності підінтегральної функції.

Подібним чином парна (непарна) періодична функція з періодом 2π розкладається в ряд (12.103) (відповідно (12.104)); для періоду $2l$ виходять ряди (12.105)–(12.107).

Розкладання (12.105) часто перетворюють за допомогою формули

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \equiv M \sin (\omega t + \alpha).$$

Вийде

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} + \alpha_n \right). \quad (12.111)$$

Стала a_0 дорівнює середньому значенню функції $f(x)$ на всій осі, так як середні значення інших доданків дорівнюють нулеві. Перший несталий доданок називається *основною гармонікою*; він має період саме $2l$. Подальші доданки називаються *верхніми гармоніками*; їхні найменші періоди дорівнюють послідовно $2l/2, 2l/3, 2l/4$ і т.д. Тому саме розкладання періодичної функції в

ряд Фур'є, тобто в суму гармонік, називається також *гармонійним аналізом*.

Якщо незалежна змінна витлумачується як час, то краще період позначити через T , а формулу (12.111) переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin(n\omega t + \alpha_n) \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Таким чином, ряд Фур'є здійснює представлення довільного періодичного коливання у вигляді суми гармонійних коливань з кратними частотами. Це розкладання, зокрема, добре відоме в акустиці, де основний доданок $M_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ визначає висоту звуку, *основний тон*, а подальшим доданкам відповідають *обертони*, від яких залежить *тембр* звуку. У розкладанні (12.112) усі періоди доданків *порівнянні* між собою, тобто їхні відношення дорівнюють раціональним числам. Це зв'язано з тим загальним фактом, що, як можна довести, *сума періодичних функцій з різними періодами буде періодичною в тому і тільки в тому випадку, якщо періоди в доданках порівнянні*. Суми періодичних функцій з непорівнянними періодами належать до більш широкого класу *майже періодичних функцій*, що широко застосовуються, зокрема, при розгляді результату накладення несинхронізованих коливань.

24. Приклад. Функції Бесселя як коефіцієнти Фур'є. У теоретичній радіотехніці розглядається функція

$$e^{ix \cos t} = \cos(x \cos t) + i \sin(x \cos t). \quad (12.112)$$

При фіксованому x вона періодична по t з періодом 2π і парна, а тому розкладається в ряд Фур'є вигляду (12.103). Щоб одержати це розкладання, можна перемножити ряди

$$e^{\frac{ix}{2}e^{it}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) e^{it} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 e^{i2t} + \frac{1}{3!} \left(\frac{ix}{2}\right)^3 e^{i3t} + \dots,$$

$$e^{\frac{ix}{2}e^{-it}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) e^{-it} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 e^{-i2t} + \frac{1}{3!} \left(\frac{ix}{2}\right)^3 e^{-i3t} + \dots,$$

Після множення зліва вийде функція (12.112), а справа об'єднаємо члени з однаковими експонентами.

А саме, при e^{ikt} і при e^{-ikt} вийде коефіцієнт

$$1 \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{ix}{2}\right)^k + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 \frac{1}{(k+2)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{k+2} + \dots =$$

$$= i^k \left(\frac{1}{0!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{1!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2} + \frac{1}{2!(k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+4} - \dots \right) = i^k J_k(x).$$

Отже,

$$e^{ix \cos t} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(x) (e^{ikt} + e^{-ikt}) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(x) \cos kt. \quad (12.113)$$

Це і є необхідне розкладання в ряд Фур'є. Відокремлюючи в ньому дійсну частину від уявної, одержимо також розкладання

$$\cos(x \cos t) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2t + 2J_4(x) \cos 4t - \dots,$$

$$\sin(x \cos t) = 2J_1(x) \cos t - 2J_3(x) \cos 3t + 2J_5(x) \cos 5t - \dots$$

3 формули (12.113) впливає, зокрема, *інтегральне представлення функцій Бесселя цілого порядку*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_0^{\pi} e^{ix \cos t} \cos nt \, dt.$$

25. Характер збіжності ряду Фур'є. Нехай обмежена періодична функція $f(x)$ періоду $2l$ розкладена в ряд Фур'є (12.105). Легко перевірити, що *всі коефіцієнти Фур'є обмежені*; наприклад, оцінимо коефіцієнти a_n :

$$|a_n| = \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx \right| \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{l} \right| \, dx \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| \, dx.$$

Той же результат вийде, якщо функція $f(x)$ не обмежена, але абсолютно інтегрована на своєму періоді, тобто якщо

$$\int_{-l}^l |f(x)| \, dx < \infty.$$

Нехай функція $f(x)$ обмежена і розривна. Тоді її коефіцієнти Фур'є *убувають зі швидкістю* $1/n$, як у другому прикладі п. 22.

Справді, припустимо для визначеності, що $f(x)$ має на своєму періоді два розриви, при $x = x_1$ і $x = x_2$, причому $l < x_1 < x_2 < l$. Тоді

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx = \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{l} \int_{x_2}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Кожний з цих інтегралів проінтегруємо по частинам:

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[f(x_1-0) \sin \frac{n\pi x_1}{l} - f(-l) \sin \frac{n\pi(-l)}{l} - \int_{-l}^{x_1} f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] + \dots =$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [f(x_1+0) - f(x_1-0)] \sin \frac{n\pi x_1}{l} - \frac{1}{n\pi} [f(x_2+0) -$$

$$- f(x_2-0)] \sin \frac{n\pi x_2}{l} - \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (12.114)$$

Останній інтеграл відрізняється від коефіцієнта Фур'є для $f'(x)$ лише сталим множником l . Однак

$$\int_{-l}^l |f'(x)| dx < \infty,$$

так як на кожному інтервалі (α, β) монотонності і безперервності функції $f(x)$ похідна $f'(x)$ зберігає знак і тому

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \right| = |f(\beta-0) - f(\alpha+0)| < \infty.$$

(При цьому ми виключаємо функції, які мають нескінченне число інтервалів монотонності на кінцевому інтервалі зміни x , як надзвичайно рідкі.) Відповідно до попереднього останній інтеграл у формулі (12.114) обмежений, звідки і випливає твердження про швидкість збукання коефіцієнтів Фур'є.

Нехай тепер сама функція $f(x)$ безперервна, але її похідна має розриви й обмежена, як у першому прикладі п.22. Тоді коефіцієнти Фур'є *убувають зі швидкістю $1/n^2$* .

Справді, інтегруючи по частинам вираз для коефіцієнта Фур'є, одержимо

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Застосовуючи до інтеграла, який стоїть в правій частині, міркування щодо останніх абзаців, одержимо, що при $n \rightarrow \infty$ він убуває зі швидкістю $1/n$, а значить, a_n і аналогічно b_n убувають зі швидкістю $1/n^2$. За допомогою дворазового інтегрування вроздріб доводиться, що якщо $f(x)$ і $f'(x)$ безперервні, а $f''(x)$ має розриви,

то коефіцієнти убувають як $1/n^2$ і т.д. Отже, *чим функція «гладкіша», тобто чим більше вона має безперервних похідних, тим швидше убувають коефіцієнти, тобто тим швидше сходиться її ряд Фур'є.*

Ряд Фур'є для розривної функції $f(x)$ сходиться дуже повільно й обчислення з його допомогою практично важкі. Тому іноді роблять так: підбирають яку-небудь по можливості більш просту функцію $\varphi(x)$, що має розриви в тих же точках, що і $f(x)$, причому з такими ж стрибками (рис. 12.8). Тоді різниця $f(x) - \varphi(x)$ уже не має розривів і тому розкладається в ряд Фур'є, який сходиться краще, ніж ряд для $f(x)$. Тому $f(x)$ дорівнює сумі простої функції $\varphi(x)$ і тригонометричного ряду, який має порівняно непогану збіжність. Аналогічно можна усунути розриви в першій похідній і т.д. (Порівн. метод виділення особливостей у п. 4.)

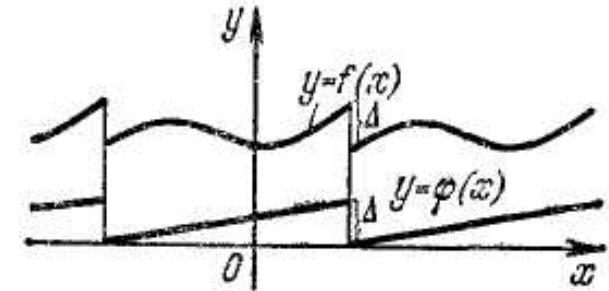


Рис. 12.8.

Отже, якщо функція $f(x)$ безперервна, а її похідна обмежена, то коефіцієнти Фур'є убувають зі швидкістю не менш $1/n^2$. Але так як

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

(п. 1), то в силу ознаки Вейерштрасса (п. 8) ряд Фур'є сходиться рівномірно на всій осі x . Більш детальне дослідження показує, що при цьому умова, накладена нами на $f'(x)$, є надлишковою, так як для застосування ознаки Вейерштрасса коефіцієнти можуть прагнути до нуля з ще меншою швидкістю. У даному випадку при підстановці в ряд числових значень x ми одержимо $f(x)$ тотожно.

Якщо функція $f(x)$ розривна, то її ряд Фур'є не може сходитися рівномірно, так як його члени — безперервні функції (п. 9, властивість 1). Можна показати, що в цьому випадку при підстановці в ряд числових значенні x виходить $f(x)$ у всіх точках безперервності функції f і

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}.$$

у її точках розриву. Так, ряд (12.109) при $x=0$ має суму $1/2$, так як в даному випадку $f(-0)=0, f(+0)=1$.

Якщо функцію розкласти в ряд Фур'є на кінцевому інтервалі (п. 22), то швидкість збіжності ряду визначається розривами цієї функції і її похідних після її продовження на усю вісь x , який описано в п. 23. Так, у першому прикладі п. 22 коефіцієнти мали порядок $1/n^2$, так як після продовження (рис.12.7, а) вийшла функція з розривами в першій похідній. Якщо ту ж функцію $y=x$ розкласти в ряд по синусах (ряд (12.107)), то коефіцієнти мали би порядок $1/n$, так як тоді після продовження мала би розриви сама функція.

За допомогою рядів Фур'є можна знайти суми багатьох цікавих числових рядів. Так, якщо в ряд (12.109) підставити $x=l/4$, то вийде

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right).$$

звідки

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Якщо в ряд (12.108) підставити $x=0$, то вийде

$$0 = l \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \right],$$

тобто
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Звідси у свою чергу можна знайти значення $\zeta(2)$ (формула (12.19)):

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\zeta(2)}{4},$$

звідки $\zeta(2) = (\pi^2/6) = 1,645$.

26. Комплексна форма ряду Фур'є. У ряді Фур'є можна за допомогою формули Ейлера перейти від тригонометричних функцій до показникових, що іноді буває переважніше. Наприклад, якщо проробити таке перетворення над рядом (12.105), то треба скористатися формулами

$$\cos \frac{\pi n x}{l} = \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2},$$

$$\sin \frac{\pi n x}{2} = \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} - e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{i2}.$$

Після підстановки і приведення подібних членів у правій частині вийде сума ряду по всіх цих експонентах, іншими словами, по експонентах $e^{\frac{i\pi n x}{l}}$, де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отже,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}. \tag{12.115}$$

Щоб знайти коефіцієнти c_n , помножимо обидві частин на $e^{-\frac{i\pi n x}{l}}$ при якому-небудь фіксованому n і проінтегруємо результат від $-l$ до l . Для членів, номер яких не дорівнює обраному n , інтеграл дорівнює

$$\int_{-l}^l c_m e^{\frac{i\pi m x}{l}} e^{-\frac{i\pi n x}{l}} dx = c_m \frac{e^{\frac{i\pi(m-n)x}{l}}}{i\pi(m-n)} \Big|_{-l}^l = \frac{c_m l}{i\pi(m-n)} [e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}] = \frac{2c_m l}{\pi(m-n)} \sin \pi(m-n) = 0,$$

тоді як для члена з номером n інтеграл дорівнює $2lc_n$. Отже, коефіцієнти ряду (12.115) обчислюються по формулі

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-inx} dx. \quad (12.116)$$

У загальному випадку розкладання по комплексних ортогональних функціях відбувається так. Дві комплексні функції $g(x)$ і $h(x)$ називаються ортогональними одна одній на відрізку $a \leq x \leq b$, якщо

$$\int_a^b g(x) h^*(x) dx = 0, \quad (12.117)$$

де зірочкою позначена спряжена функція. В окремому випадку, коли g і h дійсні, це визначення переходить у визначення (12.91). Відзначимо, що якщо узяти від обох частин (12.117) спряжені величини, то ми одержимо

$$\left(\int_a^b g(x) h^*(x) dx \right)^* = \int_a^b (g(x) h^*(x))^* dx = \int_a^b h(x) g^*(x) dx = 0,$$

тобто умова ортогональності є взаємною: якщо g ортогональна h , то h ортогональна g . Якщо є система комплексних функцій

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (12.118)$$

ортогональних на відрізку $a \leq x \leq b$, і якщо яку-небудь комплексну функцію $f(x)$ можна розкласти в ряд по цих функціях (так буде завжди, якщо система (12.108) повна), то

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x). \quad (12.119)$$

Щоб знайти коефіцієнти розкладання, треба обидві частини помножити на $g_n^*(x)$ при якому-небудь фіксованому n і проінтегрувати результат від a до b . У силу умови ортогональності в правій частині залишиться тільки один член і ми одержимо формулу

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n^*(x) dx}{\int_a^b g_n(x) g_n^*(x) dx} = \frac{\int_a^b f(x) g_n^*(x) dx}{\int_a^b |g_n(x)|^2 dx}.$$

Зокрема, розкладання (12.115) - це розкладання по ортогональній системі функцій

$$\dots, e^{-ilx}, e^{-i\pi x/l}, 1, e^{i\pi x/l}, e^{ilx}, \dots,$$

повної на відрізку $-l \leq x \leq l$. Воно придатне для будь-якої обмеженої або навіть необмеженої, але комплексної функції $f(x)$, яка інтегрується абсолютно.

27. Рівність Парсеваля. Будемо знову вважати функції дійсними. Нехай система функцій

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots \quad (12.120)$$

ортогональна і повна на інтервалі $a \leq x \leq b$. Розглянемо розкладання (12.99) довільної функції $f(x)$ у ряд по цих функціях. Підносячи обидві частини цього розкладання до квадрату і інтегруючи результат від a до b , одержимо в лівій частині

$$\int_a^b f^2(x) dx;$$

будемо припускати, що цей інтеграл має кінцеве значення. У правій частині після піднесення до квадрату вийде сума квадратів окремих членів і їхніх попарних добутків. Інтеграли від цих добутків дорівнюють нулеві в силу ортогональності функцій (12.120), а інтервали від квадратів залишаться, тобто

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx. \quad (12.121)$$

Ця формула називається *рівністю Парсеваля*. Зокрема, для ряду Фур'є (12.101) одержуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

а для ряду (12.105)

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx = 2la^2_0 + l \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

З них випливає, що при $n \rightarrow \infty$ буде $a_n \rightarrow 0$ і $b_n \rightarrow 0$.

Якщо система (12.120) не повна, то, як можна довести, її можна розширити до повної. Так як після такого розширення справедлива рівність вигляду (12.121), а всі члени в правій частині ≥ 0 , то до розширення мало місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx;$$

при цьому знак рівності тут має місце тільки для тих функцій $f(x)$, які можна розкласти по системі функцій (12.120).

Рівність Парсеваля (12.121) дасть можливість по-новому підійти до побудови ряду по ортогональних функціях. Нехай дано кінцеве число функцій

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (12.122)$$

ортогональних на відрізку $a \leq x \leq b$. Поставимо задачу: для даної функції $f(x)$ скласти лінійну комбінацію функцій (12.122) так, щоб її середнє квадратичне відхилення (п. 7) від $f(x)$ було мінімальним.

Для розв'язання цієї задачі будемо розглядати функції (12.122) як частину повної ортогональної системи (12.120). Тоді

$$f(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x) = \sum_{k=1}^n (a_k - C_k) g_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k g_k(x)$$

де a_k - коефіцієнти розкладання $f(x)$ по функціях (12.110), а C_k - довільні сталі. У силу рівності (12.121)

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^n (a_k - C_k)^2 \int_a^b g_k^2(x) dx + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \int_a^b g_k^2(x) dx$$

Якщо довільно змінювати коефіцієнти C_1, C_2, \dots, C_n , то з останньої формули видно, що мінімальне значення правої частини виходить, коли

$$C_1 = a_1, C_2 = a_2, \dots, C_n = a_n.$$

Отже, мінімальне середнє квадратичне відхилення лінійної комбінації функцій (12.122) від $f(x)$ здійснює відрізок розкладання функції $f(x)$ у ряд по системі ортогональних функцій, тобто лінійна комбінація, коефіцієнти якої визначені по формулах (12.100).

Аналогічне дослідження повної системи комплексних ортогональних функцій (12.118) і ряду (12.119) по них приводить з урахуванням рівності $aa^* = |a|^2$ до формули

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \int_a^b |g_n(x)|^2 dx. \quad (12.123)$$

28. Простір Гільберта. Повернемося до дійсних функцій, заданих на інтервалі $a \leq x \leq b$. Виявляється, що аналогія таких функцій з векторами, яка згадана в п. 20, є досить далекою. Так як

над зазначеними функціями можна здійснювати лінійні дії за звичайними правилами, то ці функції утворюють лінійний простір. Більш того, якщо ввести поняття скалярного добутку двох функцій по формулі

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx, \quad (12.124)$$

то неважко перевірити, що всі аксіоми евклідова простору виконані, так що тут виходить не тільки лінійний, але навіть евклідовий простір. До нього зараховуються не тільки обмежені, але також і необмежені *квадратично підсумовуючі* функції, тобто такі функції $f(x)$, що

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx < \infty. \quad (12.125)$$

Для таких функцій із простої нерівності $2|f(x)g(x)| \leq f^2(x) + g^2(x)$ випливає, що інтеграл (12.124), якщо невластний, то такий що сходиться. Сукупність функцій, які задовольняють умові (12.125), зі скалярним добутком (12.124) називається *простором Гільберта* L^2 по імені німецького математика Д. Гільберта. Умова (12.91) у силу (12.124) і є умова ортогональності векторів у цьому просторі. Повна ортогональна система функцій — це ортогональний базис у просторі L^2 ; відзначимо, що при визначенні повноти (п. 21) збіжність ряду (12.99) треба було розуміти в змісті L_2 , тобто в змісті середнього квадратичного (п. 8). Рівність Парсеваля (12.121) - це аналог теореми Піфагора в просторі Гільберта, квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів усіх його вимірів.

Характерною рисою простору Гільберта є його *нескінченномірність*. Це, зокрема, значно утруднює перевірку повноти ортогональної системи функцій. Система з k попарно ортогональних ненульових векторів у n -мірному евклідовому просторі є повною, якщо $k=n$, і неповною, якщо $k < n$. На відміну від цього в *нескінченномірному* просторі ортогональна система, яка складається з нескінченного числа функцій, не зобов'язана бути повною, так що тут тільки по кількості функцій у системі питання про її повноту вирішити не можна; це питання складне, і ми не будемо його розглядати. Можна довести, що всяка ортогональна неповна система являє собою частину деякої ортогональної повної системи. Тому в ряд по першій системі можна розкласти ті і тільки

ті функції, для яких при розкладанні по другій системі коефіцієнти при дописаних функціях дорівнюють нулеві.

В евклідових просторах має місце важлива нерівність, що приймає вигляд, після піднесення до квадрату,

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

Якщо в нього замість f і g підставити $|f|$ і 1, ми одержимо

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

Звідси видно, що усі функції з L^2 є підсумовуючими, а також що зі збіжності в середньому квадратичному випливає збіжність у середньому (п. 8); зворотне не обов'язково. Утім, можна довести, що ряд Фур'є будь-якої підсумовуючої функції сходиться до неї в середньому.

29. Ортогональність з вагою. При звичайному інтегруванні функції $f(x)$ по інтервалу $a \leq x \leq b$ усі значення x з цього інтервалу виступають як рівноправні. Якщо хочуть підкреслити велику роль «внеску» одних значень у порівнянні з іншими, то розглядають інтегрування з вагою

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx,$$

де $\rho(x) \geq 0$ - задана вагова функція, яка приймає більш великі значення для тих x , які повинні зіграти більшу роль. Функції $g(x)$ і $h(x)$ називаються ортогональними з вагою ρ на інтервалі (a, b) ,

$$\text{якщо } \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx = 0$$

Уся загальна теорія рядів по ортогональних функціях (п. 20, 21, 26, 27) безпосередньо переноситься на функції, які є ортогональні з вагою; при цьому у всіх інтегралах, які беруть участь, треба під знаком інтеграла дописати ваговий множник $\rho(x)$.

Інтеграл з вагою ρ легко перетворити в інтеграл без ваги (тобто з вагою 1) за допомогою заміни незалежної змінної

$$\rho(x) dx = d\bar{x}, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^x \rho(x)dx = \bar{x}(x), \quad \bar{x}(a) = \bar{a}, \quad \bar{x}(b) = \bar{b}, \quad (2.126)$$

так як, якщо позначити

$$f(x) = f(x(\bar{x})) = f(\bar{x}),$$

то одержимо

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} f(\bar{x})d\bar{x}.$$

При такому перетворенні будь-яка система функцій, ортогональних з вагою ρ , переходить у систему функцій, ортогональних у звичайному змісті (п. 20). Проте іноді зручніше такої заміни не робити, а розглядати всі інтегрування з вагою.

Зворотно, за допомогою заміни (2.126) можна з будь-якої ортогональної системи функцій одержати систему, ортогональну з вагою ρ . Так як при такому перетворенні розкладання в ряди також відповідно перетворюються, то повна система після цієї заміни залишається повною. Наприклад, виходячи з повної ортогональної системи функцій

$$1, \cos \bar{x}, \cos 2\bar{x}, \dots, \cos n\bar{x}, \dots \quad (0 \leq \bar{x} \leq \pi)$$

(див. систему (12.94)) і виконуючи перетворення

$$\bar{x} = \pi - \arccos x \quad (-1 \leq \bar{x} \leq 1), \quad d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

одержимо після несуттєвої зміни знаків

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = \cos \arccos x = x, \quad T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x, \dots, T_n(x) = \cos(n \arccos x), \dots$$

Ці многочлени були введені Чебишевим у 1857 р., вони і називаються *многочленами Чебишева*. Ми бачимо, що вони утворюють повну систему функцій, ортогональних з вагою

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на відрізку $-1 \leq x \leq 1$. Їх можна одержати також із системи функцій (12.97) за допомогою процесу ортогоналізації з даною вагою.

Позбутися від вагової функції можна також за допомогою наступного простого зауваження: якщо система функцій

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (12.127)$$

ортогональна на інтервалі $a < x < b$ з вагою $\rho(x)$, то система функцій

$$g_1 \sqrt{\rho(x)}, g_2 \sqrt{\rho(x)}, \dots, g_n \sqrt{\rho(x)}, \dots \quad (12.128)$$

ортогональна на тім же інтервалі без ваги; щоб розкласти функцію $f(x)$ у ряд по системі (12.127), досить розкласти функцію

$$f(x)\sqrt{\rho(x)}$$

у ряд по системі (12.128), а потім скоротити результат на $\sqrt{\rho(x)}$.

30. Кратні ряди Фур'є. При розкладанні в ряди функцій від декількох аргументів зазвичай застосовуються системи функцій, що залежать від декількох індексів, число яких дорівнює числу аргументів. Тоді ряди виходять кратними, як у п. 17.

Теорія кратних рядів по ортогональних функціях розвивається зовсім аналогічно теорії простих рядів. Розглянемо для простоти випадок двох аргументів. Тоді ортогональні в деякій області D функції, що утворюють повну систему, повинні залежати від двох індексів, тобто мати вигляд $\varphi_{mn}(x,y)$, де m і n приймають деякі дискретні значення. Ряд по такій системі функцій має вигляд

$$f(x,y) = \sum_{m,n} a_{mn} \varphi_{mn}(x,y);$$

тут маємо на увазі подвійну суму. Коефіцієнти обчислюємо, як у п.21:

$$a_{mn} = \frac{\iint_D f(x,y) \varphi_{m,n}(x,y) dx dy}{\iint_D \varphi_{m,n}^2(x,y) dx dy} \quad (12.129)$$

Зазвичай приклади систем ортогональних функцій від декількох аргументів будуються по наступному принципу. Нехай дано дві повні ортогональні системи функцій одної змінної $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ ($a \leq x \leq b$) і $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x), \dots$ ($c \leq x \leq d$) Тоді система функцій

$$\varphi_{mn}(x,y) = g_m(x)h_n(y) \quad (m, n=1, 2, \dots) \quad (12.130)$$

буде ортогональною і повною в прямокутнику Π :

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

Ортогональність цієї системи впливає з того, що

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} \varphi_{m,n}(x,y) \varphi_{\bar{m},\bar{n}}(x,y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d g_m(x)h_n(y)g_{\bar{m}}(x)h_{\bar{n}}(y) dy = \\ &= \int_a^b g_m(x)g_{\bar{m}}(x) dx \int_c^d h_n(y)h_{\bar{n}}(y) dy, \end{aligned}$$

тобто виходить нуль, за винятком випадку, коли $m = \bar{m}$ і одночасно $n = \bar{n}$. Повнота впливає з того, що довільну функцію $f(x,y)$, яка задана в Π , можна при будь-якому фіксованому x розкласти по функціях $h_n(y)$:

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)h_n(y),$$

де коефіцієнти розкладання залежать від x . Якщо ці коефіцієнти $A_n(x)$ розкласти по функціях $g_m(x)$, то і вийде розкладання функції $f(x,y)$ у подвійний ряд по функціях (12.130):

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} g_m(x)h_n(y),$$

яке, таким чином, можливе.

Так, виходячи з розтягнутої системи функцій (12.95), можна побудувати таку повну ортогональну систему функцій на прямокутнику $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$:

$$\varphi_{mn}(x,y) = \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (m, n=1, 2, 3, \dots).$$

Розкладання по цій системі має вигляд

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2).$$

Коефіцієнти цього ряду в силу формули (12.129) дорівнюють

$$a_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} dy f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2}.$$

31. Додаток до рівняння коливань кінцевої струни. Ряди Фур'є мають численні застосування до розв'язання рівнянь математичної фізики. Ми тут покажемо тільки один приклад такого застосування до розв'язання рівняння малих вільних поперечних коливань натягнутої струни.

Будемо зневажати вагою струни і направимо вісь x уздовж положення рівноваги струни так, щоб кінці струни мали абсциси $x=0$ і $x=l$; будемо вважати коливання такими, які проходять в площині і позначимо через $u=u(x, t)$ поперечне відхилення точки з абсцисою x у момент t . Тоді в курсах рівнянь математичної фізики доводиться, що функція $u(x, t)$ повинна задовольняти рівнянню з частковими похідними

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (12.131)$$

тут a -стала, $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, де T —сила натягу струни, а ρ — її лінійна

щільність. Умову закріплення кінців струни можна записати у вигляді

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad (\text{при всіх } t); \quad (12.132)$$

крім того, будемо вважати, що відомо відхилення і швидкості точок струни в початковий момент часу:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \quad (12.133)$$

Таким чином, виходить наступна математична задача: потрібно розв'язати рівняння (12.131) при *граничних умовах* (12.132) і *початкових умовах* (12.133).

Для розв'язання цієї задачі розкладемо шукане розв'язання при кожнім фіксованому $t \geq 0$ у ряд вигляду (12.107); тоді коефіцієнти будуть залежати від t , тобто ми одержуємо

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (12.134)$$

Щоб знайти коефіцієнти $b_n(t)$, підставимо цей вираз в рівняння (12.131). Ми одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n''(t) \sin \frac{\pi n x}{l} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

тобто

$$b_n''(t) = -\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} b_n(t).$$

Розв'язавши це звичайне лінійне рівняння з сталими коефіцієнтами, одержимо

$$b_n(t) = A_n \cos \frac{a \pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a \pi n}{l} t.$$

тобто у силу (12.134)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a \pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a \pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (12.135)$$

Щоб знайти коефіцієнти A_n, B_n скористаємося початковими умовами (12.133); одержимо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a \pi n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (0 \leq x \leq l).$$

Вийшло знову розкладання в ряд Фур'є вигляду (12.107), з якого знаходимо

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{a \pi n} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Підстановка цих величин у (12.135) і дасть шукане розв'язання. При цьому граничні умови (12.132) задовольняються автоматично.

12.5. Перетворення Фур'є

32. Формули перетворення Фур'є. Будемо виходити з формули (12.115), що дає представлення будь-якої кінцевої функції $f(x)$ на інтервалі $-l < x < l$. У цьому представленні беруть участь *гармоніки*, тобто функції вигляду e^{ikx} із *хвильовими числами* k , які дорівнюють

$$k = k_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots) \quad (12.136)$$

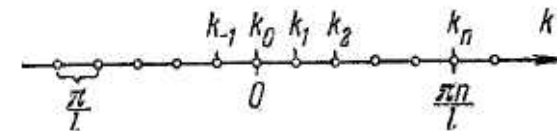


Рис. 12.9.

Набір цих значень, який зображено на рис. 12.9, називається *спектром* хвильових чисел; він *дискретний*, тобто складається з окремих точок, кожній з яких у розкладанні (12.115) відповідає гармоніка $e^{ik_n x}$ с *комплексною амплітудою* c_n яка визначається по формулі (12.116):

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik_n x} dx. \quad (12.137)$$

Припустимо спочатку для простоти, що функція $f(x)$ поза деяким кінцевим інтервалом $a \leq x \leq b$ тотожно дорівнює нулеві, і позначимо

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad (12.138)$$

фактично цей інтеграл береться лише по інтервалу $a \leq x \leq b$. Тоді при досить великих l формулу (12.137) для коефіцієнтів Фур'є можна переписати у вигляді

$$c_n = \frac{\pi}{l} \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(x) e^{-ik_n x} dx = \mathcal{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (12.139)$$

де $\Delta k = \frac{\pi}{l}$ — відстань між сусідніми хвильовими числами в спектрі (див. формулу (12.136) або рис. 12.9). Тому формулу (12.115) для представлення $l(x)$ можна переписати у вигляді

$$f(x) = \sum_n c_n e^{ik_n x} = \sum_n \mathcal{F}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k \quad (-l < x < l). \quad (12.140)$$

Припустимо тепер, що l досить велике. Тоді спектр (рис.12.9) стає дуже густим, тобто Δ дуже малим. У границі при $l \rightarrow \infty$ сума (12.140), що є інтегральною сумою, переходить в інтеграл, тобто ми одержуємо

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(k) e^{ikx} dk \quad (-\infty < x < \infty). \quad (12.141)$$

У цьому представленні хвильове число k приймає всі значення від $-\infty$ до ∞ , тобто в границі при $l \rightarrow \infty$ дискретний спектр хвильових чисел переходить у безперервний спектр.

З першої рівності (12.139) видно, що при $l \rightarrow \infty$ амплітуди $c_n \rightarrow 0$, тобто в границі кожна окремо узятая гармоніка присутня з нульовою амплітудою. Формула (12.141) означає, що в границі амплітуда виявляється «розмазаною» по всьому безперервному спектру хвильових чисел, так що на кожен нескінченно малий інтервал від k до $k+dk$ приходиться нескінченно мала амплітуда

$$dc = \mathcal{F}(k) dk. \quad (12.142)$$

Ситуація тут трохи нагадує ту, котра виходить при переході від дискретної моделі матеріального тіла до його безперервної моделі, коли приймається, що маса кожної окремо узятій точки дорівнює нулеві, а маса виявляється «розмазаною» по всіх точках з визначеною щільністю. Подібно цьому формула (12.142) означає, що $\mathcal{F}(k)$ - це щільність амплітуди гармонік на нескінченно малому інтервалі хвильових чисел, причому щільність береться в розрахунку на одиницю довжини цього інтервалу; тому функція $\mathcal{F}(k)$ називається також *спектральною щільністю* функції $f(x)$.

Формули (12.138) і (12.141) називаються формулами *перетворення Фур'є*, причому (12.138) - прямою формулою, а (12.141) - оберненою. При їхньому доведенні ми припускали, що функція f поза деяким кінцевим інтервалом тотожно дорівнює нулеві; такі функції називаються *фінітними*. Більш детальне дослідження показує, що формули справедливі й у тому випадку, якщо інтеграл (12.138) розуміється як невласним, але для його збіжності треба зажадати, щоб

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (12.143)$$

Таким чином, кожній функції $f(x)$, що задовольняє умові (12.143), відповідає її «фур'є-образ» $\mathcal{F}(k)$ (тобто результат перетворення Фур'є), що визначається формулою (12.138); зворотно, функція $f(x)$ виражається через свій фур'є-образ по формулі (12.141).

Якщо функція $f(x)$ парна, то при обчисленні інтеграла (12.138) можна скористатися властивістю 9 п. 4 модуля 9, і ми одержуємо

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx.$$

Звідси функція $\mathcal{F}(k)$ також парна, і з (12.141) ми одержуємо

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \mathcal{F}(k) \cos kx dk;$$

це - формули *косинуса-перетворення Фур'є*. Якщо функція $f(x)$ непарна, то ми подібним чином одержуємо формули *синус-перетворення Фур'є*:

$$i\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx \, dx, \quad f(x) = 2 \int_0^{\infty} i\mathcal{F}(k) \sin kx \, dk;$$

у цьому випадку Фур'є-образом від $f(x)$ зазвичай називається не $\mathcal{F}(k)$, а $i\mathcal{F}(k)$.

Якщо функція $f(x)$ розглядається на інтервалі $0 < x < \infty$, то її можна продовжити на інтервал $-\infty < x < 0$ як парним, так і непарним чином. Тому якщо вважати як x , так і k додатними, то можна користуватися як косинус-, так і синус-перетвореннями Фур'є; однак образи, отримані при цих перетвореннях, будуть, узагалі говорячи, різними.

Розглянемо приклад. Нехай $f(x)$ — парна функція, яка дорівнює 1 на інтервалі $-1 < x < 1$ і нулеві поза ним. По формулі косинуса-перетворення Фур'є

$$\mathcal{F}(k) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 1 \cdot \cos kx \, dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos kx \, dx \right) = \frac{\sin k}{\pi k}.$$

Застосовуючи обернену формулу, одержуємо

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{\pi k} \cos kx \, dk. \quad (12.144)$$

Подібно рядові Фур'є (п. 25), якщо підставляти у формулу для оберненого перетворення числові значення x , ми одержимо значення $f(x)$ у всіх точках безперервності цієї функції і значення $[f(x-0) + f(x+0)]/2$

у всіх точках, де вона має кінцевий стрибок. Зокрема, підставляючи в (12.144) значення $x=0$, при якому функція f безперервна, ми одержимо

$$1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{\pi k} \, dk \quad \text{звідки} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} \, dk = \frac{\pi}{2}.$$

33. Властивості перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є володіє рядом корисних властивостей; деякі з них ми тут перелічимо.

Насамперед, ясно, що перетворення Фур'є є оператором, для якого функція $f(x)$ є прообразом, а функція $\mathcal{F}(k)$ — образом.

1. Оператор Фур'є є лінійним, тобто

$$(f_1 \mathcal{F} f_2) = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \quad \alpha \mathcal{F} f = \alpha \mathcal{F} \quad (\alpha = \text{const}). \quad (12.145)$$

Це відразу випливає з формули (12.138) і з того, що інтегрування є лінійною операцією.

З формули (12.145) випливає, зокрема, що якщо функція f залежить не тільки від x , але і від деякого параметра t і тому \mathcal{F} таки залежить від цього параметра, то

$$\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t} = \frac{\mathcal{F}_{t+\Delta t} - \mathcal{F}_t}{\Delta t}.$$

Переходячи до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, одержуємо, що

$$\frac{\partial \mathcal{F} f}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} f$$

тобто похідна по параметру від прообразу перетвориться в похідну по параметру від образу. Доведення показує, що ця властивість справедлива для будь-якого лінійного оператора.

2. Якщо функцію f про диференціювати по x , то її образ \mathcal{F} збільшиться на ik . Справді, образом функції $f'(x)$ служить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} \, dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \, df(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} f(x) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ik) e^{-ikx} \, dx \end{aligned}$$

(ми зробили інтегрування по частинам). Однак з умови (12.143) випливає, що $f(\pm\infty) = 0$, і тому перший доданок у правій частині пропадає. Але другий дорівнює

$$\frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx = ik \mathcal{F}(k),$$

що і потрібно було довести.

Перетворюючи подібним чином обернену формулу (12.141), можна довести, що якщо функцію \mathcal{F} про диференціювати, то її прообраз f збільшиться на $-ik$.

3. Якщо функція $f(x)$ перетвориться в $\mathcal{F}(k)$, то функція $\alpha(x)$ ($\alpha = \text{const} > 0$) перетвориться в

$$\frac{1}{\alpha} \mathcal{F}\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

Справді,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ikx} dx \Big|_{\alpha x = s} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(sx) e^{-\frac{k}{\alpha} s} ds = \frac{1}{\alpha} \mathcal{F}\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

Таким чином, при розтягуванні прообразу в кілька разів уздовж осі незалежної змінної образ стискується в стільки ж разів. Це значить, що неможливо одночасно *локалізувати*, тобто зосередити на осі незалежної змінної, як функцію-прообраз, так і її спектральну щільність. Цей *принцип невизначеності* має застосування у фізиці.

4. Якщо функцію $f(x)$ зрушити на $\beta = \text{const}$, то її образ збільшиться на $e^{-i\beta x}$. Справді,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \beta) e^{-ikx} dx \Big|_{x - \beta = s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iks} e^{-ik\beta} ds = e^{-ik\beta} \mathcal{F}(k).$$

Зворотно, якщо образ зрушити на β , то прообраз збільшиться на $e^{i\beta k}$.

5. Рівність Парсеваля. Якщо формулу (12.123) застосувати до ряду (12.115), ми одержимо

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Користуючись формулою (12.139), одержуємо звідси

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(k_n)|^2 (\Delta k)^2 = 2\pi \sum_n |\mathcal{F}(k_n)|^2 \Delta k.$$

Переходячи до границі при $l \rightarrow \infty$, ми подібно п. 32 одержуємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(k)|^2 dk.$$

Це і є *рівність Парсеваля для перетворення Фур'є*.

34. Додаток до рівняння коливань нескінченної струни. Інтегральне перетворення Фур'є застосовується для розв'язання задач математичної фізики для нескінченних середовищ. Покажемо це на прикладі рівняння (12.131), але тепер будемо струну вважати нескінченною, тобто $-\infty < x < \infty$, так що граничні умови відпадають; у початкових умовах (12.133) ми для простоти будемо вважати $\psi(x) \equiv 0$. Позначимо через $\mathcal{F}(k, t)$ фур'є-образ розв'язання при будь-якому фіксованому $t \geq 0$. Виконуючи перетворення по Фур'є обидві частини рівняння (12.131), на основі властивостей 1 і 2 п. 33 одержимо

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = a^2 (ik)^2 \mathcal{F} = -a^2 k^2 \mathcal{F}.$$

При будь-якому фіксованому k - це звичайне лінійне диференціальне рівняння з сталими коефіцієнтами, звідки стандартним методом одержуємо

$$\mathcal{F} = C_1(k) e^{-iakt} + C_2(k) e^{iakt} \quad (12.146)$$

Тепер перетворимо по Фур'є початкові умови (12.133):

$$\mathcal{F}|_{t=0} = \mathcal{F}(k), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Тому формули (12.146) дають

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}(k) e^{-iakt} + \frac{1}{2} \mathcal{F}(k) e^{iakt}.$$

На основі властивостей 1 і 4 п. 33 повертаємося до прообразу —

$$u = \frac{1}{2} \varphi(x - at) + \frac{1}{2} \varphi(x + at).$$

Це і є шукане розв'язання. Воно має досить простий зміст: початкове відхилення поділяється навпіл і одна половина в момент t зрушується на відстань at у додатному напрямленню осі x , а інша — на ту ж відстань у від'ємному напрямленню. Іншими словами, по струні біжать дві хвилі зі швидкістю a , у додатному й у від'ємному напрямленнях, без зміни своєї форми, причому спостерігається увесь час результат додавання цих хвиль. Тим самим з'ясовано фізичний зміст сталої a в рівнянні (12.131): вона дорівнює швидкості поширення збурювань по струні.

Мікромодуль 30

Приклади розв'язання задач

1. Задача про поширення тепла в кінцевому стрижні. Нехай маємо тонкий однорідний стрижень довжини l , розташований між точками $x=0$ і $x=l$ по осі x . Перетин стрижня, площі σ , ми вважаємо настільки малим, що всім точкам перетину в кожен момент можна приписати ту саму температуру. Бічна поверхня стрижня передбачається ізольованою від навколишнього середовища. (Замість стрижня можна було б уявити собі нескінченну стіну між

площинами $x=0$ і $x=l$, у припущенні, що в кожній перпендикулярній до осі x площині зберігається той самий тепловий режим.)

У початковий момент $t=0$ дано розподіл температури u вздовж стрижня, який характеризується функцією $f(x)$ ($0 \leq x \leq l$); крім того, вказано тепловий режим, який підтримується на кінцях стрижня. Ставиться задача визначити температуру точок стрижня, як функції від абсциси точки x і часу t :

$$u = u(x, t).$$

Розглянемо елемент стрижня між перетинами x і $x+dx$. Кількість тепла, яка за нескінченно малий проміжок часу dt пройде через лівий перетин усередину елемента, виразиться так :

$$-k\sigma \frac{\partial u}{\partial x} dt,$$

де k є «коефіцієнт внутрішньої теплопровідності» стрижня; знак мінус пояснюється тим, що тепло переходить від більш нагрітих місць до менш нагрітих. Аналогічно пому через правий перетин зовні проходить за той же проміжок часу кількість тепла

$$-k\sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \right) dt;$$

змінивши тут знак, ми одержимо кількість тепла, яке пройшло через згаданий перетин справа наліво, тобто усередину елемента. Таким чином, загальна кількість тепла, яка нагромадилася у виділеному елементі за проміжок часу dt , буде:

$$k\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dt.$$

Цю кількість можна підрахувати й інакше, виходячи з того, що їм обумовлене підвищення температури на $(\partial u / \partial t) dt$. Якщо через c і ρ позначити, відповідно, теплоємність і щільність речовини стрижня, то витрачене на це тепло виразиться так:

$$c\rho\sigma dx \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

Прирівнюючи обидва вирази, прийдемо до основного диференціального рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

де для стислості покладемо

$$a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}.$$

(а). Припустимо спочатку, що на обох кінцях стрижня підтримується стала температура 0. Це приводить до таких граничних умов :

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0).$$

Вище ми згадували вже про початкову умову :

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (2)$$

причому в зв'язку з граничними умовами необхідно припустити $f(0) = f(l) = 0$. Для пошуку функції $u(x, t)$, яка задовольняє рівнянню (1) і всім поставленим умовам, застосуємо метод Фур'є.

Нехай, як і вище, $u = XT$, так що рівняння приймає вигляд:

$$XT' = a^2 X''T$$

або

$$T'/T = a^2 (X''/X),$$

Якщо сталі значення цих відношень покласти рівним $-a^2\lambda^2$ ($\lambda > 0$), то рівняння розіб'ється на два:

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0,$$

звідки

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t} \quad (3)$$

і

$$X'' + \lambda^2 x + 0 \quad \text{звідки} \quad X = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (4)$$

Для того щоб функція XT задовольняла граничним умовам, необхідно, щоб було

$$A = 0, \quad \lambda l = n\pi, \quad (\text{де } n = 1, 2, 3, \dots),$$

так що λ може приймати лише значення

$$\lambda_1 = \pi/l, \quad \lambda_2 = 2\pi/l, \dots, \quad \lambda_n = n(\pi/l), \dots$$

Покладаючи $BC = b_n$, одержимо такий ряд часткових розв'язань :

$$u_n = b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x \quad (\text{де } n=1, 2, 3, \dots),$$

Загальне розв'язання візьмемо у формі ряду

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \sin \lambda_n x \quad . \quad (5)$$

Бажаючи задовольнити початкові умови, ми повинні покласти:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = f(x) \quad (0 \leq x \leq l) \quad .$$

Якщо функція $f(x)$ безперервна і має обмежену змінну, то для здійснення цього розкладання досить узяти:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad .$$

Цього разу встановлення того факту, що формальне розв'язання (5) є і дійсним розв'язанням, не представляє утруднень.

Множник $e^{-a^2 \lambda_n^2 t} = e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} t}$

дозволяє диференціювати ряд (5) почленно — по t і двічі по x , тому що ряди, які ми отримуємо, сходяться рівномірно відносно x ($0 \leq x \leq l$) і відносно t ($t \geq \alpha > 0$).

б) Нехай тепер на кінці $x=l$ підтримується стала температура u_0 , а другий кінець $x=0$ ізольований, так що через нього ніякого руху тепла не відбувається. Цим положенням відповідають граничні умови:

$$u(l, t) = u_0, \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0 \quad . \quad (6)$$

Початкову умову зберігаємо в колишньому вигляді.

Зручніше, утім, увести замість u нову невідому функцію v , поклавши $u = u_0 + v$. Для v маємо, вочевидь, таке ж рівняння:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} .$$

Граничні умови заміняться більш простими:

$$v(l, t) = 0, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0 \quad .$$

Нарешті, початкова умова перетвориться так:

$$v(x, 0) = f(x) - u_0 .$$

Покладаючи, як зазвичай, $v = XT$, одержимо для T і X колишні вирази (5) і (6). Так як

$$\frac{dX}{dx} = -\lambda A \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x \quad ,$$

то друга гранична умова дасть $B=0$, а з першого одержимо:

$$\cos \lambda l,$$

так що цього разу λ може приймати значення

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2l}, \lambda_2 = 3 \frac{\pi}{2l}, \dots, \lambda_n = (2n-1) \frac{\pi}{2l}, \dots$$

Остаточно приходимо до таких часткових розв'язань:

$$v_n = a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \quad (\text{де } n=1, 2, 3, \dots),$$

з яких і складаємо загальне розв'язання

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x \quad .$$

Початкова умова в цьому випадку приводить до розкладання

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2l} = f(x) - u_0$$

нестандартного вигляду. Легко, однак, показати, що при дотриманні звичайних вимог щодо функції $f(x)$ це розкладання в дійсності має

місце при $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos(2n-1) \frac{\pi x}{2l} dx - \frac{4}{\pi} u_0 \cdot \frac{1}{2n-1}$

Отже, остаточно

$$u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

при тільки що указаних значеннях коефіцієнтів. Якщо $f(x)=0$, маємо розкладання:

$$u = u_0 - \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} t^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x$$

По цій формулі, при $u_0=300$ й $a^2=0,139$ (мається на увазі чавунний стрижень довжиною 5 см; для цього випадку $\rho=0,0072$ (кг/см³), $c=0,13$ (Кал/кг·°C), $k=0,00013$ (Кал/см·°C·сек), так що $a^2 = 0,139$), і були обчислені значення u для різних t і x , і по них побудовані графіки, які приведені на рис. 12.10, розподілу температур у стрижні в різні моменти часу.

2. Випадок нескінченного стрижня. Розв'яжемо тепер ту ж задачу про поширення тепла для випадку стрижня, нескінченного в обидва боки, розташованого уздовж осі x (або для всього простору, якщо тільки у всіх точках кожної перпендикулярної до осі x площини температура та сама).

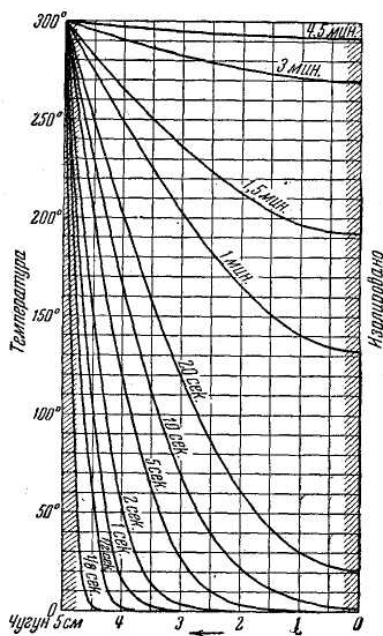


Рис. 12.10.

Диференціальне рівняння залишається тим же; початкова умова $u(x, 0)=f(x)$ цього разу повинна виконуватися на всьому проміжку $(-\infty, +\infty)$, а граничних умов, природно, ніяких немає.

Як і в попередніх випадках виходить часткове розв'язання рівняння у вигляді

$$u = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

але тут немає підстав із усіх додатних значень параметра λ вибирати які-небудь. Тому, вважаючи сталі a і b залежними від λ :

$$a=a(\lambda), \quad b=b(\lambda),$$

природно для одержання загального розв'язання замість суми удатися до інтеграла:

$$u = \int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \quad (7)$$

Для того щоб це — формальне — розв'язання задовольняло початковій умові, функції $a(\lambda)$ і $b(\lambda)$ повинні бути підібрані так, щоб для всіх x було

$$\int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x)$$

Припустимо тепер, що функція $f(x)$ задовольняє умовам формули Фур'є, яку напишемо у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz \right\} d\lambda$$

Звідси ясно, що функції $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ можна визначити формулами:

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda z dz, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \sin \lambda z dz.$$

У такому випадку розв'язання (7) прийме вигляд:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cos \lambda(z-x) \cdot dz.$$

Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегрована в проміжку $[-\infty, +\infty]$, то тут можна переставити інтегрування по λ і по z :

$$u = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz \int_0^{\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(z-x) d\lambda.$$

Обчислюючи внутрішній інтеграл, отримаємо

$$\frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}}.$$

Таким чином, остаточне розв'язання задачі представляється у вигляді простого інтеграла

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} dz. \quad (8)$$

Диференціюванням по t і по x (двічі) під знаком інтеграла легко переконатися, що це — д і й с н о розв'язання.

Розглянемо ще випадок «напівнескінченного», тобто нескінченного в одну сторону стрижня, який, наприклад, лежить уздовж додатної частини осі x (або, півпростору $x \geq 0$). Нехай на кінці $x=0$ підтримується температура 0 . Для цього випадку може бути використане розв'язання (8), якщо тільки продовжити функцію $f(x)$ (тут задану лише для значень x між 0 і $+\infty$) на від'ємні значення x так, щоб було

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} dz = 0.$$

Через парність показникового множника, вочевидь, досить продовжити функцію $f(x)$ н е п а р н и м чином. Тоді розв'язання нової задачі запишеться так:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(z) \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2 t}} \right] dz.$$

Якщо зажадати, щоб при $x=0$ було $u=u_0$, то, уводячи нову невідому функцію $v = u - u_0$, легко одержати:

$$u = u_0 + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} [f(z) - u_0] \cdot \left[e^{-\frac{(z-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(z+x)^2}{4a^2 t}} \right] dz.$$

Відзначимо окремий випадок, коли при цьому $f(x)=0$; розв'язання прийме вигляд:

$$u = u_0 \left\{ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right\}.$$

Для $u_0=300$ і $a^2=0,139$ (що відповідає стрижню з чавуна) по цій формулі при різних x і t були обчислені значення u , і по них побудовані графіки розподілу температури в стрижні в різні моменти часу. Ці графіки, які зображено на рис. 12.11, цікаво зіставити з графіками на рис.12.10.

3. Видозміна граничних умов. Повернемося до задачі 1 про поширення тепла в кінцевому стрижні, але видозмінимо граничні умови. А саме, припускаючи як і раніше, що на кінці $x=0$ підтримується температура 0 , будемо вважати, що на кінці $x=l$ має місце вільне випромінювання в навколишнє середовище температури 0 .

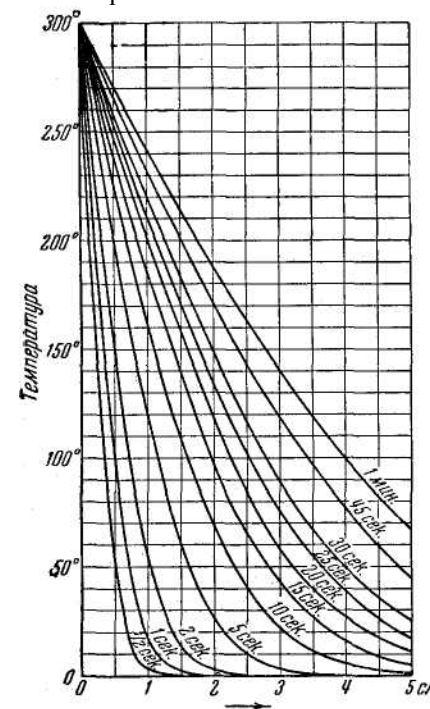


Рис. 12.11.

Кількість тепла, яке підводиться за проміжок часу dt до цього кінця, буде [див. приклад1]:

$$-k\sigma \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} dt,$$

а кількість випромінюваного тепла за законом Ньютона дорівнює:

$$h\sigma u(l,t) dt,$$

де h є «коефіцієнт зовнішньої теплопровідності». Отже, на кінці $x=l$ повинна виконуватися така умова:

$$-k \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = hu(l,t).$$

Якщо розглядати тепер часткове розв'язання вигляду $u=XT$, то одержимо:

$$T = Ce^{-a^2\lambda^2 t}, \quad X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Гранична умова на кінці $x=0$ дасть $A=0$; гранична ж умова на кінці $x=l$ приведе до рівності

$$-k\lambda \cos\lambda l = h\sin\lambda l,$$

або
$$tg\lambda l = -\frac{k}{hl} \lambda l.$$

Таким чином, для λ виходить ряд значень

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{l},$$

де ξ_n ($n=1, 2, 3, \dots$) суть додатні корені трансцендентного рівняння

$$tg\xi = -\frac{k}{hl} \xi.$$

Загальне розв'язання виходить у вигляді:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-a^2\lambda_n^2 t} \sin\lambda_n x,$$

подібному з (5), однак (і це важливо підкреслити) числа λ_n тут мають набагато більш складну природу.

Початкова умова приводить до розкладання:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\xi_n x}{l} = f(x); \quad (9)$$

його можна розглядати як узагальнений ряд Фур'є функції $f(x)$ у проміжку $[0, l]$ і, користуючись ортогональністю функцій

$$\sin \frac{\xi_n x}{l}$$

звичайним чином визначити коефіцієнти b_n :

$$b_n = \frac{\int_0^l f(x) \sin \frac{\xi_n x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{\xi_n x}{l} dx}.$$

4. Поширення тепла в круглій пластині. Ми розглянемо теплову задачу ще для одного випадку — круглій пластині радіуса R з центром на початку координат. Припустимо, що пластина настільки тонка, що по висоті її температура не міняється, а верхню і нижню її поверхні будемо вважати ізольованими. Більш того, ми обмежимося вивченням випадку, коли температура u буде залежати тільки від полярного радіуса-вектора r (але не від полярного кута θ): для цього досить припустити, що такі ж початкові і граничні данні. [Можна було б і тут замість пластини з ізольованими поверхнями розглядати круговий циліндр, нескінченний вниз і вгору.]

Узявши загальне диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$$

ми насамперед, через незалежність u від z , перепишемо його в вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

Переходячи на площині xu до полярних координат, ми повинні замінити вираз в дужках наступним:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

Нарешті, з огляду на те, що u не залежить від θ , приходимо до такого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (10)$$

Нехай початковий розподіл температури буде задано у вигляді $u(r, 0) = \varphi(r)$ ($0 \leq r \leq R$), а гранична умова зводиться до

$$u(R, t) = 0.$$

Удамося і тут до методу Фур'є. Станемо шукати часткове розв'язання рівняння (10) у вигляді

$$u = R(r) T(t);$$

тоді для визначення цих функцій вийдуть рівняння

$$T' + a^2 \lambda^2 T = 0 \quad \text{і} \quad R'' + (1/r)R' + \lambda^2 R = 0.$$

Із першого з них

$$T = C e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Друге ж, якщо покласти $r = (1/\lambda)z$ і $R[(1/\lambda)z] = J(z)$, перейдемо до рівняння Беселя:

$$J'' + (1/z)J' + J = 0$$

Покладемо $R(r) = J_0(\lambda r)$. Гранична умова дасть

$$J_0(\lambda R) = 0.$$

З теорії беселевих функцій відомо, що функція $J_0(x)$ має незліченну безліч додатних коренів $\xi_n (n=1, 2, 3, \dots)$; таким чином, для λ можливий ряд значень

$$\lambda_n = \frac{\xi_n}{R} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Їм відповідають часткові розв'язання вигляду

$$u_n = c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r),$$

з яких, як зазвичай, складається загальне розв'язання :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r).$$

Залишається визначити коефіцієнти c_n . Початкова умова, яка ще нами не використана, дає у цьому випадку

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0 \left(\frac{\xi_n r}{R} \right) = \varphi(r) \quad (0 \leq r \leq R).$$

З теорії беселевих функцій відомо, що система функцій $\{J_0(\xi_n x)\}$ ортогональна у загальному розумінні – з „вагою” x^* у проміжку $[0, 1]$;

очевидно, система $\left\{ J_0 \left(\frac{\xi_n r}{R} \right) \right\}$ буде ортогональною в проміжку

$[0, 1]$ з «вагою» R . Звичайним чином визначаючи коефіцієнти цього узагальненого ряду Фур'є, знайдемо

$$c_n = \frac{\int_0^R r \varphi(r) J_0 \left(\frac{\xi_n r}{R} \right) dr}{\int_0^R r J_0^2 \left(\frac{\xi_n r}{R} \right) dr}.$$

І тут ми задовольняємося отриманим формальним розв'язанням.

Як видно, останні два приклади уже виходять за межі звичайних рядів Фур'є. Ми привели їх, маючи бажання створити правильну орієнтацію в питанні про додаток рядів Фур'є в математичній фізиці. Вони там відіграють важливу роль, але, звичайно, далеко не вичерпують потреб математичної фізики: досить невеликої зміни умов задачі, щоб виявилось необхідним удатися до розкладань вже іншого роду. Ця обставина анітрошки не применшує значення рядів Фур'є і розвитку для них теорії, тому що ряди Фур'є назавжди залишаться найпростішим і найважливішим прикладом «ортогонального розкладання»; за зразком його будуються всі інші подібні розкладання, теорія яких найтіснішим чином переплітається з теорією рядів Фур'є.

5. Практичний гармонійний аналіз. Схема для дванадцяти ординат.

Розкладання функції в ряд Фур'є, або гармонійний аналіз, виявляється потрібним у багатьох чисто практичних питаннях машинознавства, електротехніки й ін. Але в цих випадках дуже рідко приходиться безпосередньо користуватися формулами Ейлера-Фур'є (ми повертаємося тут до позначень у формулі зі значком (*) вільного члена в тригонометричному розкладі через a_0 (а не $a_0/2$)):

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx^*, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ & & b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \end{aligned} \right\} (n=1, 2, 3, \dots) \quad (11)$$

для обчислення коефіцієнтів розкладання. Справа в тому, що функції, які потрібно піддати гармонійному аналізу, зазвичай задаються таблицею своїх значень або графіком. Таким чином, аналітичного виразу функції в нашому розпорядженні немає; іноді до самого гармонійного аналізу прибігають саме для того, щоб таким шляхом одержати хоча б наближений аналітичний вираз для функції. У цих умовах для обчислення коефіцієнтів Фур'є потрібно звернутися до наближених методів. Зрозуміло, на практиці приходиться користуватися лише деякими першими членами тригонометричного розкладання. Коефіцієнти ряду Фур'є в більшості випадків швидко убувають, а з ними швидко падає і вплив далеких гармонік. Зазвичай приводиться (або знімається з графіка) ряд рівновіддалених ординат, тобто ряд значень функції y , що відповідають рівновіддаленим значенням аргументу x . По цих ординатах величини (11) можна приблизно обчислити, користуючись методами, викладеними в теоретичній частині модуля. Але обчислення тут виявляються досить громіздкими, і для того щоб спростити, і, так би мовити, автоматизувати їх, придумано багато різних прийомів, один із яких ми і викладемо.

Нехай проміжок від 0 до 2π розділено на k рівних частин і нехай відомі ординати $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_k=y_0$, які відповідають точкам ділення

$$0, \frac{2\pi}{k}, 2 \cdot \frac{2\pi}{k}, \dots, (k-1) \frac{2\pi}{k}, 2\pi.$$

Тоді по формулі трапецій маємо (звичайно, лише приблизно!):

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1} + \frac{1}{2} y_k \right]$$

Маючи на увазі, що періодичність нашої функції $y_k=y_0$, і значення a_0 можна написати і так:

$$ka_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{k-1}. \quad (12)$$

Аналогічно, застосовуючи формулу трапецій до других інтегралів (11), найдемо:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{k} \left[y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k} \right]$$

або

$$\frac{k}{2} a_m = y_0 + y_1 \cos m \frac{2\pi}{k} + y_2 \cos m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \cos m \frac{2(k-1)\pi}{k}, \quad (13)$$

а також

$$\frac{k}{2} b_m = y_1 \sin m \frac{2\pi}{k} + y_2 \sin m \frac{4\pi}{k} + \dots + y_{k-1} \sin m \frac{2(k-1)\pi}{k}. \quad (14)$$

Покладемо спочатку $k=12$ і будемо виходити з дванадцяти ординат

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11},$$

які відповідають дванадцятьом рівновіддаленим значенням аргументу:

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6},$$

або в градусах

$$0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ, 330^\circ.$$

Усі множники, на які прийдеться множити ці ординати, по формулах приведення зведуться до наступних:

$$\pm 1; \pm \sin 30^\circ = \pm 0,5; \pm \sin 60^\circ = \pm 0,866$$

Легко перевірити, що

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11} \\ 6a_1 &= (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin 30^\circ + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7) \sin 60^\circ + (y_0 - y_6) \\ 6a_2 &= (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 30^\circ + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9) \\ 6a_3 &= y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10} \\ 6b_1 &= (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin 30^\circ + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin 60^\circ + (y_2 - y_9) \\ 6b_2 &= (y_1 + y_2 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin 60^\circ \\ 6b_3 &= y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11} \quad i \ m. \ d. \end{aligned} \right\} (15)$$

Наприклад

$$\begin{aligned} 6a_1 &= y_0 + y_1 \cos 30^\circ + y_2 \cos 60^\circ + y_3 \cos 90^\circ + y_4 \cos 120^\circ + y_5 \cos 150^\circ + y_6 \cos 180^\circ + \\ &+ y_7 \cos 210^\circ + y_8 \cos 240^\circ + y_9 \cos 270^\circ + y_{10} \cos 300^\circ + y_{11} \cos 330^\circ = y_0 + y_1 \sin 60^\circ + \\ &+ y_2 \sin 30^\circ - y_4 \sin 30^\circ - y_5 \sin 60^\circ - y_6 - y_7 \sin 60^\circ - y_8 \sin 30^\circ + y_{10} \sin 30^\circ + y_{11} \sin 60^\circ, \end{aligned}$$

що збігається з написаним вище виразом.

Для того щоб звести викладки (особливо — множення) до мінімуму, їх роблять за визначеною схемою, запропонованою Рунге. Спочатку виписують ординати, у порядку що вказується нижче, і над кожній парі підписаних одна під одною ординат роблять додавання і віднімання:

	ординати							
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
								y_{11} y_{10} y_9 y_8 y_7
суми	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5			
різності								

Потім аналогічно виписують ці суми і різниці і знову піддають їх додаванню і відніманню:

	суми			
	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4	
суми	s_0	s_1	s_2	s_3
різності	d_0	d_1	d_2	
	різності			
	v_1	v_2	v_3	
	v_5	v_4		
суми	σ_1	σ_2	σ_3	
різності	δ_1	δ_2		

Тепер, одержавши після всіх цих додавань і віднімань ряд величин s, d, σ, δ , ми можемо в такий спосіб виразити через них шукані коефіцієнти:

$$\left. \begin{aligned} 12a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \\ 6a_1 &= d_0 + 0,866d_1 + 0,5d_2, \\ 6a_2 &= (s_0 - s_2) + 0,5(s_1 - s_2), \\ 6a_3 &= d_0 - d_2, \\ 6b_1 &= 0,5\sigma_1 + 0,866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6b_2 &= 0,866(\delta_1 + \delta_2), \\ 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3 \quad i \text{ т. д.} \end{aligned} \right\} (16)$$

переконаємося, що ці формули в точності відповідають формулам (15). Розглянемо ще декілька прикладів.

6. На рис. 12.12 зображена діаграма дотичних зусиль (на пальці кривошипа) для парової машини. (Подібні діаграми будуються на основі індикаторних діаграм з урахуванням сил інерції). У зв'язку з питанням про крутильні коливання вала становить інтерес виділити гармонійні складові дотичного зусилля T , як функції від кута φ повороту кривошипа. Знявши з графіка дванадцять рівновіддалених ординат, зробимо гармонійний аналіз по зазначеній схемі:

T	{	-7200	-300	7000	4300	0	-5200	-7400
			250	4500	7600	3850	-2250	
u		-7200	-50	11500	11900	3850	-7450	-7400
v			-550	2500	-3300	-3850	-2950	
u	{	-7200	-50	11500	11900			
		-7400	-7450	3850				
s		-14600	-7500	15350	11900			
d		200	7400	7650				
v	{	-550	2500	-3300	11900			
		-2950	-3850					
α		-3500	-1350	-3300	11900			
δ		2400	6350					

Тепер по формулах (16):

$$\begin{aligned} 12a_0 &= -14600 - 7500 + 15350 + 11900 = 5150; & a_0 &= 429, \\ 6a_1 &= 200 + 7400 \cdot 0,866 + 7650 \cdot 0,5 = 10433; & a_1 &= 1739, \\ 6a_2 &= (-14600 - 11900) + (-7500 - 15350) \cdot 0,5 = -37925; & a_2 &= -6321, \\ 6a_3 &= 200 - 7650 = -7450; & a_3 &= -1242, \\ 6b_1 &= -3500 \cdot 0,5 - 1350 \cdot 0,866 - 3300 = -6219; & b_1 &= -1037, \\ 6b_2 &= (2400 + 6350) \cdot 0,866 = 7578; & b_2 &= 1263, \\ 6b_3 &= -3500 + 3300 = -200; & b_3 &= -33. \end{aligned}$$

Таким чином

$$T = 429 + 1739 \cos \varphi - 1037 \sin \varphi - 6321 \cos 2\varphi + 1263 \sin 2\varphi - 1242 \cos 3\varphi - 3 \sin 3\varphi + \dots$$

Об'єднаємо члени, що містять косинус і синус одного і того ж кута:

$$T = 430 + 2020 \sin(\varphi + 121^\circ) + 6440 \sin(2\varphi + 281^\circ) + 1240 \sin(3\varphi + 268^\circ) + \dots$$

Ми бачимо, що найбільш сильний вплив тут робить друга гармоніка.

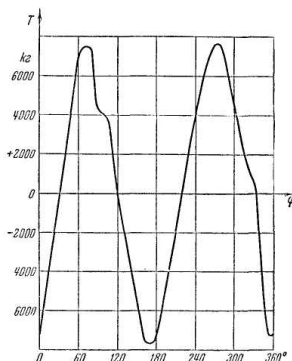


Рис. 12.12.

7. Для того щоб усвідомити з якою, приблизно, точністю одержують коефіцієнти Фур'є функції по дванадцятьох ординатах її графіка, ми прикладемо викладений метод до деяких аналітично заданих функціям і порівняємо наближені результати з точними.

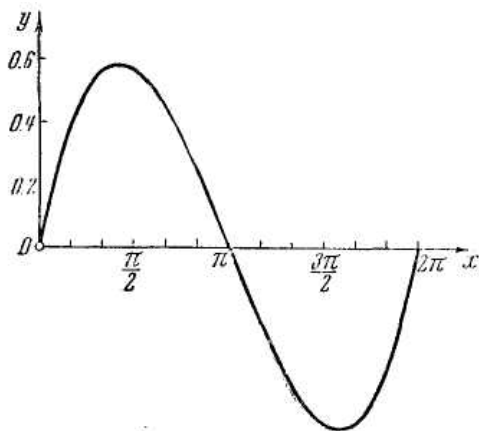


Рис. 12.13.

Спочатку розглянемо функцію $f(x)$, яка у проміжку $[0, 2\pi]$ задається формулою

$$y=f(x) = (1/2\pi^2)(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x),$$

а для інших значень x визначається по закону періодичності

$$f(x+2\pi) = f(x).$$

Графік функції представлений на рис.12.13. Зіставимо таблицю:

$x=$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	$2\pi/6$
$y=$	0	0,400	0,582	0,465	0,255	0	-0,255	-0,465	-0,582	0

При цьому можна використовувати тотожність, яка легко перевіряється:

$$f(2\pi-x) = -f(x).$$

За схемою Рунге за цими значеннями y знайдемо:

$$b_1=0,608, b_2=0,076, b_3=0,022;$$

усі числа u_i , а з ними і всі коефіцієнти a_n виявляються нулями. У той же час формули (11) безпосередньо дають (за допомогою триразового інтегрування по частинам):

$$b_m = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \sin mx dx = \frac{6}{m^2 \pi^2},$$

так що $b_1=6/\pi^2=0,6079$, $b_2=3/4\pi^2=0,0760$, $b_3=2/9\pi^2=0,0225$.

8. Однак далеко не завжди виходить настільки точний результат, як у вищенаведеному прикладі. У вигляді другого приклада ми візьмемо функцію з періодом 2π , яка у проміжку $[0, 2\pi]$ визначається так:

$$y=f(x) = (1/\pi^2)(x-\pi)^2.$$

Її графік даний на рис. 12.14

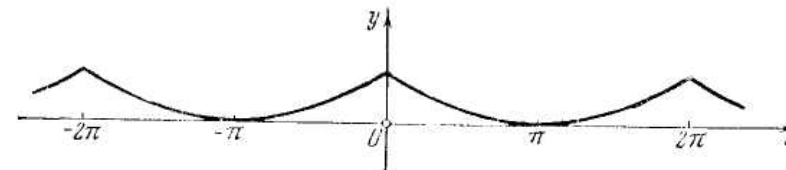


Рис. 12.14.

Користуючись очевидною тотожністю:

$$f(2\pi-x) = f(x),$$

складемо таблицю:

$x=$	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
$y=$	1	0,694	0,444	0,111	0,028	0	0,028	0,111	0,444	1

Тоді за схемою Рунне

$$a_0=0,338, a_1=0,414, a_2=0,111, a_3=0,056;$$

числа ж v_i і коефіцієнти b_m — цього разу нулі. Точні значення коефіцієнтів будуть:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \frac{1}{3} = 0,333,$$

$$a_m = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos mx dx = \frac{4}{m^2 n^2} \quad (m \geq 1),$$

зокрема,

$$a_1 = \frac{4}{\pi^2} = 0,405; \quad a_2 = \frac{1}{\pi^2} = 0,101; \quad a_3 = \frac{4}{9\pi^2} = 0,045.$$

Таким чином, якщо для перших двох коефіцієнтів відносна похибка не перевершує 1,5—2%, то для наступних вона досягає 10% (a_2) і навіть 20% (a_3)! Для підвищення цієї точності потрібно брати більше ординат.

9. Розглянемо приклад за схемою з двадцяти чотирьох координат. Покладемо тепер, що дано або знято з графіка двадцять чотири координати:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{23},$$

які відповідають значенням аргументу:

$$0, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \dots, \frac{23\pi}{12},$$

або в градусах

$$0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, \dots, 345^\circ.$$

Цього разу усі множники, на які при наближеному обчисленні коефіцієнтів Фур'є приходиться множити ординати, зведуться до таких:

$$\pm 1; \pm \sin 30^\circ; \pm \sin 45^\circ; \pm \sin 60^\circ; \pm \sin 75^\circ.$$

Не вдаючись у подробиці (через повну аналогію з попереднім), приведемо відразу схему обчислень, яка також запропонована Р у н г е. Схема, яка приведена нижче, зрозуміла без пояснень:

	<i>ординати</i>												
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
		y_{23}	y_{22}	y_{21}	y_{20}	y_{19}	y_{18}	y_{17}	y_{16}	y_{15}	y_{14}	y_{13}	
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}

	<i>суми різності</i>													$v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8 v_9 v_{10} v_{11}$											
	<i>суми</i>							<i>суми</i>																	
	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}						
	u_{12}	u_{11}	u_{10}	u_9	u_8	u_7		v_{11}	v_{10}	v_9	v_8	v_7	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1							
<i>суми</i>	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	<i>суми</i>	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6											
<i>різності</i>	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	<i>різності</i>	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5													
	<i>суми</i>							<i>суми</i>																	
	p_0	p_1	p_2	p_3		p_6	p_5	p_4		s_1	s_2	s_3		s_5	s_4										
<i>суми</i>	k_0	k_1	k_2	k_3	<i>суми</i>	m_1	m_2	m_3	<i>суми</i>	m_1	m_2	m_3	<i>суми</i>	m_1	m_2	m_3									
<i>різності</i>	l_0	l_1	l_2	<i>різності</i>	n_1	n_2			<i>різності</i>	n_1	n_2														

Відзначимо, що з величинами q і r немає потреби проробляти операції додавання і віднімання. Тепер через отриманні вказаним методом величини r, l, m, n, q і r коефіцієнти Фур'є будуть виражені так:

$$\left. \begin{aligned} 24a_0 &= k_0 + k_1 + k_2 + k_3, \\ 12a_1 &= [q_0 + 0,5q_4 + 0,6124(q_1 + q_5)] + [0,8660q_2 + 0,7071q_3 + 0,3536 \dots (q_1 - q_5)], \\ 12a_2 &= l_0 + 0,8660l_1 + 0,5l_2, \\ 12a_3 &= (q_0 - q_4) + 0,7071(q_1 - q_3 - q_5), \\ 12a_4 &= (k_0 - k_3) + 0,5(k_1 - k_2), \\ 12a_5 &= [q_0 + 0,5q_4 + 0,6124(q_1 + q_5)] - [0,8660q_2 + 0,7071q_3 + 0,3536(q_1 - q_5)], \\ 12a_6 &= l_0 - l_2, \\ 12b_1 &= [0,5r_2 + r_6 + 0,6124(r_1 + r_5)] + [0,8660r_4 + 0,7071r_3 - 0,3536(r_1 - r_5)], \\ 12b_2 &= 0,5m_1 + 0,8660m_2 + m_3, \\ 12b_3 &= (r_2 + r_6) + 0,7071(r_1 + r_3 - r_5), \\ 12b_4 &= 0,8660(n_1 + n_2), \\ 12b_5 &= [0,5r_2 + r_6 + 0,6124(r_1 + r_5)] - [0,8660r_4 + 0,7071r_3 - 0,3536(r_1 - r_5)], \\ 12b_6 &= m_1 - m_3, \quad i \text{ м.д.} \end{aligned} \right\} (17)$$

Подальші коефіцієнти по двадцятьох чотирьох ординатах виходять з усе меншою і меншою точністю.

Звертаємо увагу на одну подробицю. Для одержання коефіцієнтів a_1 і a_5 потрібно окремо обчислити ті вирази, які поставлені в квадратні дужки, а потім скласти їх (для знаходження a_1) і відняти (для знаходження a_5). Аналогічне зауваження — щодо обчислення коефіцієнтів b_1 і b_5 .

10. Повертаючись до діаграми дотичних зусиль, представленої на рис.12.12, знімемо з неї двадцять чотири ординати і заново проведемо гармонійний аналіз, користуючись новою схемою:

$T\{$	-7200	-4150	-300	32500	7000	7450	4300	2750	0	-2650
	-5200	-7700	-7400	-5150	250	2300	4500	6800	7600	6400
	650	-2250	-4850							
u	-7200	-9300	-50	5550	11500	14230	11900	9150	3850	
	-2000	-7450								
v	-12550	-7400	1000	-550	950	2500	650	-3300	-3650	-3850
	-2950	-2850								
$u\{$	-7200	-9300	5550	-50	11500	14250	11900			
	-7400	-12550	-7450	-2000	3850	9150				
p	-14600	-21850	-7500	3550	15350	11900				
q	200	3250	7400	7550	7650	5100				
$v\{$	1000	-550	950	2500	650	-3300				
	-2850	-2950	-3300	-3850	-3650					
r	-1850	-3500	-2350	-1350	-3000	-3300				
s	3850	2400	4250	6350	4300					
$p\{$	-14600	-21850	-7500	3550						
	11900	23400	15350							
k	-2700	1550	7850	3550						
l	-26500	-45250	-22850							
$s\{$	3850	2400	4250							
	4300	6350								
m	8150	8750	4250							
n	450	3950								

Звідси по формулам (17):

$$a_0=427, a_1=1685, a_2=-6426, a_3=-1175, a_4=-783, a_5=-163, a_6=-304, \\ b_1=-938, b_2=1325, b_3=-87, b_4=-318, b_5=-398, b_6=325.$$

Отже, виходить розкладання:

$$T=427+1685\cos\varphi-938\sin\varphi-6426\cos2\varphi+1325\sin2\varphi-1175\cos3\varphi- \\ 87\sin3\varphi- \\ -783\cos4\varphi-318\sin4\varphi-163\cos5\varphi-398\sin5\varphi-304\cos6\varphi+325\sin6\varphi+\dots$$

або, об'єднуючи і округляючи:

$$T=430+1930\sin(\varphi+119^\circ)+6560\sin(2\varphi+282^\circ)+1180\sin(3\varphi+266^\circ)+ \\ +845\sin(4\varphi+248^\circ)+430\sin(5\varphi+202^\circ)+445\sin(6\varphi+317^\circ)+\dots$$

Порівнюючи це розкладання з розкладанням тої ж величини T , яка приведена в прикладі 6, бачимо, що в перших трьох гармоніках виходить більш-менш задовільний збіг.

Мікромодуль 30

Індивідуальні тестові завдання

Розкласти в ряд Фур'є наступні функції.

- $y=x$ для $0 < x < 2\pi$.
- $y=x$ для $0 \leq x \leq \pi$.
- $y=x$ для $-\pi < x < \pi$.
- $y=x$ для $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$.
- $y=a$ для $0 < x < \pi$.
- а) $y=0$ для $0 \leq x < a$ і для $\pi - a < x \leq \pi$; б) $y=a$ для $a < x < \pi - a$.
- а) $y=(ax/a)$ для $0 \leq x \leq a$, б) $y=a$ для $a \leq x \leq \pi - a$,
в) $y=[a(\pi-x)]/a$ для $\pi - a \leq x \leq \pi$.
- $y=x^2$ для $-\pi \leq x \leq \pi$.
- $y=x(\pi-x)$ для $0 \leq x \leq \pi$.
- $y=\sin x$ для $0 \leq x \leq \pi$.
- $y=\cos x$ для $0 < x < \pi$.
- $y=\cos ux$ для $-\pi \leq x < \pi$ (u - довільне ціле число).

13. $y = \sin ux$ для $-\pi < x < \pi$. (u - довільне ціле число).
 14. $y = x \cos x$ для $-\pi < x < \pi$.
 15. $y = -\ln[2\sin(x/2)]$ для $0 < x \leq \pi$.
 16. $y = \ln[2\cos(x/2)]$ для $0 \leq x < \pi$.
 17. Обчислити двадцять чотири ординати кривої

$$y = (1/\pi^2)(x-\pi)^2,$$

про яку була мова вище (див. приклад 8), серед прикладів розв'язаних задач, і, користуючись зазначеною схемою, знайти наближені значення коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$.

Відповідь. $a_0=0,334; a_1=0,407; a_2=0,104; a_3=0,047; a_4=0,028; a_5=0,019; a_6=0,014,$ у той час як вірні знаки будуть:
 $a_0=0,333; a_1=0,405; a_2=0,101; a_3=0,045; a_4=0,025; a_5=0,016; a_6=0,011.$

Модуль 13

Теорія ймовірностей

Мікромодуль 31

Елементи теорії ймовірностей

13.1. Випадкові події і їхні ймовірності

1. Випадкові події. *Теорія ймовірностей* — це наука про випадкові події. Поняття події належить до числа основних і тому важко піддаються визначенню. На першому етапі *подією можна вважати все те, що може відбутися або не відбутися при здійсненні визначеного комплексу умов*; кожне таке здійснення називається *іспитом*. Наприклад, подія може складатися у випаданні герба при киданні монети; у цьому випадку іспитом буде служити кидання монети. Подія може полягати в тому, що деякий виріб, обраний з партії готових виробів, виявиться бракованим; у цьому випадку іспитом буде служити акт *вибірки* виробу з партії. Однак не обов'язково «іспит» у тому змісті, як це розуміється тут, треба зв'язувати з людською діяльністю.

Наприклад, подія може полягати в тому, що в який-небудь день над містом пройде дощ; тоді іспит буде складатися просто в настанні дня.

Характерною рисою *випадкової* події є те, що в результаті іспиту вона відбувається не обов'язково; це відрізняє випадкову подію від *детермінованої*, котра відбувається обов'язково. Випадковість події зв'язана з тим, що багато факторів, які супроводжують іспитові і істотні для його результату, не задаються. Ця неповнота інформації в одних випадках є принциповою (наприклад, в азартних іграх або у воєнних діях) або недоступною сучасному рівневі розвитку науки (наприклад, при прогнозуванні погоди). Припущення про принципову непередбачуваність результатів окремих іспитів лежить в основі ряду наук, таких як квантова механіка, генетика, соціологія і т.д. В інших випадках точне пророкування результату іспитів є принципово можливим, але недоцільним практично, так як воно зажадало б невиправданих витрат на додаткові точні і надточні виміри і т.п.

Закономірності випадкових подій виявляються при багаторазовому повторенні іспитів. Наприклад, не можна пророчити результат одиничного кидання монети: може випасти як герб, так і цифра. Нікого особливо не здивує, якщо при десятикратному киданні герб випаде всього два рази. Але якщо при 1000-кратному киданні герб випаде всього 200 разів, то всякий з підставою скаже, що щось не в порядку або з монетою, або з киданням: адже при симетричних умовах ні герб, ні цифра не мають переваги один перед іншим, тобто вони повинні випадати приблизно однаково часто. Звичайно, після 1000 кидань герб не обов'язково випаде рівно 500 разів, він може випасти і 490, і 525 разів, але не 200! Подібним чином результат одноточкової вибірки з партії виробів не дозволяє зробити висновок про якість партії, це можна зробити тільки при багаторазовій вибірці, як говорять, при великому *обсязі вибірки*, і т.п. Тому, уточнюючи першу фразу цього пункту, часто говорять не взагалі про випадкові події, а про *масові* випадкові події, розуміючи під масовістю багаторазову повторюваність.

Відзначимо, що повторення іспиту можна розуміти подвійно. Наприклад, можна 1000 разів підкинути ту саму монету, але можна і різночасно або навіть одночасно підкинути незалежно один від одного 1000 однакових монет, — це зовсім рівноцінно. Ми не будемо робити розходження між цими видами повторень.

2. Відносна частота і ймовірність. Відносною частотою випадкової події назвемо відношення кількості (m) випадків появи цієї події до загального числа (n) зроблених іспитів. Досвід показує, що при багаторазовому повторенні іспиту відносна частота (m/n) випадкової події має визначену стійкість: якщо, наприклад, при великому числі n іспитів відносна частота виявилася рівною $m/n=0,2$, то й у будь-якій іншій серії з досить великого числа n' іспитів відносна частота m'/n' буде близька до $0,2$. Таким чином, у різних досить довгих серіях іспитів відносні частоти випадкової події як би групуються біля деякого сталого числа (зрозуміло, свого для кожної випадкової події). Наприклад, якщо гральна кістка являє собою точний куб, зроблений з однорідного матеріалу («правильна» гральна кістка), то відносна частота випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок коливається біля того самого числа $1/6$.

Стійкість відносної частоти може бути пояснена тільки як прояв деякої об'єктивної властивості випадкової події, що полягає в існуванні визначеного степеня його можливості. Наприклад, приблизна рівність відносних частот випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок при киданні правильної гральної кістки пояснюється її симетрією, що робить однаково можливим випадання кожного числа очок від 1 до 6.

Таким чином, *ступінь об'єктивної можливості випадкової події можна вимірювати числом. Це число називається ймовірністю випадкової події. Саме біля цього числа групуються відносні частоти даної випадкової події.* Як і відносна частота випадкової події, її ймовірність повинна бути безрозмірною величиною, укладеної між 0 і 1. Але в той час як відносна частота залежить ще і від зроблених іспитів, ймовірність випадкової події зв'язана тільки з самою випадковою подією (при даному комплексі умов).

Поняття ймовірності є первинним, основним поняттям, і в загальному випадку його не можна визначити через більш прості поняття. Тільки в деяких найпростіших схемах ймовірність може бути підрахована безпосередньо, як буде показано в наступному пункті; аналіз таких найпростіших схем дозволяє установити основні властивості ймовірності, які необхідні для подальшої побудови курсу.

3. Класичне визначення ймовірності. Навіть у повсякденному житті ми часто називаємо одну подію дуже ймовірною, а іншу

малоймовірною; при можливості багаторазового повторення іспитів це означає, звичайно, що перша подія буде відбуватися часто, а друга — рідко. Найважливішою рисою теорії ймовірностей є те, що в ній говориться не просто про велику або малу ймовірність події, а про точне чисельне значення цієї ймовірності, тобто *ймовірність вважається величиною, що характеризує частоту настання події при багаторазовому повторенні іспитів.*

Насамперед, умовимося про вживання деяких термінів. *Випадкові події називаються несумісними, якщо вони не можуть з'явитися одночасно.*

Випадкові події утворюють повну групу попарно несумісних подій, якщо при кожнім іспиті повинна з'явитися одна і тільки одна з них, тобто якщо кожні дві з них несумісні і хоча б одна з них обов'язково повинна відбутися.

У цьому пункті ми обмежимося розглядом іспитів з *рівноможливими випадками*; прикладом може служити випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок на верхній грані правильної гральної кістки.

Точніше, ми будемо тут вважати, що *випадки іспиту можна представити у вигляді повної групи попарно несумісних і рівноможливих випадкових подій*; ці випадкові події будемо коротко називати «випадками».

Якщо повна група складається з N рівноможливих попарно несумісних випадків, то кожному випадкові приписують ймовірність, рівну $1/N$. Це знаходиться в згоді з тим, що при великому числі іспитів рівноможливі випадки відбуваються приблизно однаково часто, тобто мають відносну частоту, близьку до $1/N$. Наприклад, при киданні правильної кістки випадки випадання 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок утворюють повну групу; кожен випадок буде мати ймовірність, рівну $1/6$.

Розглянемо тепер складну подію A , що полягає в появі якого-небудь з M фіксованих випадків. Ймовірність випадкової події A покладають по визначенню рівною відношенню M/N . Наприклад, ймовірність появи парного числа очок на верхній грані кістки дорівнює $3/6$, тому що із шести зазначених вище рівноможливих випадків тільки в трьох випадках з'являється парне число очок (2, 4, 6).

Ймовірність події A позначають символом $P\{A\}$.

Формула

$$P\{A\} = M/N \quad (13.1)$$

виражає так назване класичне визначення ймовірності: якщо результати іспиту можна представити у вигляді повної групи N рівноможливих попарно несумісних випадків і якщо випадкова подія A з'являється тільки в M випадках, то ймовірність події A дорівнює M/N , тобто дорівнює відношенню числа випадків, «благоприятючих» події, до загального числа усіх випадків.

Приклад. При киданні двох монет герб може випасти 2 рази, 1 раз або 0 разів (не випасти жодного разу); визначити ймовірності всіх цих трьох випадкових подій (передбачається, що для кожної окремої монети випадання або невинпадання герба рівноможливі).

Перераховані події утворюють повну групу і, мабуть, попарно несумісні. Але вони не є рівноможливими. Для того щоб застосувати класичне визначення ймовірності, треба представити всі можливі випадки іспиту у вигляді повної групи рівноможливих подій. По розуміннях симетрії це можна зробити в такий спосіб:

Перша монета	Друга монета
Герб	Герб
Герб	Не герб
Не герб	Герб
Не герб	Не герб

Перераховані тут чотири результати іспиту природно вважати рівноможливими, причому вони знову складають повну групу попарно несумісних подій. Тому тепер уже можна застосувати класичне визначення ймовірності, що дає:

- ймовірність випадання двох гербів дорівнює $1/4$,
- ймовірність випадання одного герба дорівнює $2/4=1/2$,
- ймовірність не випадання герба на жодній монеті дорівнює $1/4$.

Підкреслимо ще раз, що класичне визначення ймовірності істотно спирається на припущення про рівну можливість випадків іспиту. Усі задачі, до яких може бути застосовано класичне визначення, укладаються в наступну просту схему — схему випадкової вибірки: із сукупності N елементів (передцілів, явищ і т.п.) вибирається на удачу один елемент, причому кожному елементу забезпечується однакова з іншими можливість бути обраним; подія A полягає у виборі елемента, який має визначену

ознаку, причому цю ознаку мають точно M з N елементів розглянутої сукупності.

Найпростіше представити собі здійснення цієї схеми в такий спосіб: в урні знаходиться N однакових навпомацки куль, з них M куль білих і $N - M$ не білих; іспит полягає у вийманні навмання однієї кулі з урни, випадкова подія — у вийманні білої кулі. При цих умовах ймовірність вийняти білу кулю дорівнює M/N .

4. Основні властивості ймовірностей. Правило додавання ймовірностей. Аналіз даного в п.3 класичного визначення ймовірності дозволяє виявити наступні основні властивості ймовірностей.

1. Ймовірність випадкової події є число невід'ємне ;

$$P\{A\} \geq 0. \quad (13.2)$$

2. Достовірна подія, тобто подія, яка при даному комплексі умов неодмінно повинна відбутися, має ймовірність, рівну одиниці:

$$P\{\text{достовірна подія}\} = 1. \quad (13.3)$$

3. Ймовірності випадкових подій підкоряються правилу додавання ймовірностей: якщо подія C складається в здійсненні однієї з двох несумісних подій A або B (байдуже, якої саме), то ймовірність події C дорівнює сумі ймовірностей подій A і B .

Ми будемо це правило записувати так:

$$P\{A \text{ або } B\} = P\{A\} + P\{B\} \quad (13.4)$$

(при несумісності A і B).

Останню властивість називають також властивістю адитивності ймовірностей.

Перші дві властивості безпосередньо впливають з формули (13.1), так як в ній $M \geq 0$, $N > 0$ і для достовірної події $M=N$ (усі результати іспиту сприяють достовірній події). Третя властивість доводиться для схеми випадкової вибірки в такий спосіб. Нехай в урні знаходиться N куль, з них K червоних, L синіх, інші — білі; іспит полягає у вийманні з урни однієї кулі; подія A складається в появі червоної кулі, подія B — у появі синьої кулі. Тоді подія (A або B) складається в появі кольорової кулі (байдуже, червоної або синьої). Безпосередній підрахунок ймовірностей по формулі (13.1) дає:

$$P\{A\} = K/N; \quad P\{B\} = L/N; \\ P\{A \text{ або } B\} = (K+L)/N$$

що і доводить формулу (13.4).

Для всіх додатків теорії ймовірностей надзвичайно важливо те, що відзначені властивості ймовірностей справедливі не тільки для схеми випадкової вибірки, але і для будь-якої системи випадкових подій. Це твердження можна обґрунтувати в такий спосіб. Нагадаємо, що загальне поняття ймовірності ми установили, виходячи з факту стійкості відносних частот випадкових подій. Природно тому вважати, що основні властивості ймовірностей випадкових подій збігаються з основними властивостями відносних частот. Але для відносних частот зазначені властивості легко перевірити.

1. Відносна частота m/n не може бути від'ємною, так як $m \geq 0$, $n > 0$.

2. Достовірна подія відбувається при кожному повторенні іспиту, і тому його відносна частота дорівнює $n/n=1$

3. Якщо події A і B несумісні, то подія (A або B) відбувається стільки разів, скільки разів відбувається хоча б одна з них (кількість вийнятих кольорових куль з описаної вище урни дорівнює сумі кількостей вийнятих червоних і синіх куль). Тому відносна частота події (A або B) дорівнює сумі відносних частот подій A і B .

Виходячи з приведених вище міркувань, ми приймаємо три зазначених вище властивості ймовірностей як основні властивості ймовірностей для будь-якої системи випадкових подій.

Зауваження про предмет теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей вивчає не фізичну сутність різних випадкових подій, а лише кількісні співвідношення між їх ймовірностями. Важливу роль тут грають основні властивості ймовірностей і одержувані з них правила розрахунку. Справа в тому, що типовою для теорії ймовірностей і її додатків є наступна постановка задачі: є деяка сукупність простих випадкових подій, ймовірності яких відомі (задані); потрібно знайти ймовірності інших випадкових подій, зв'язаних з даними подіями певним чином. Наприклад, при кожному киданні монети ймовірність випадання герба приймається рівною $1/2$; знайти ймовірність того, що при ста киданнях монети герб випаде не менш 50 разів. Розв'язання таких задач виконується за визначеними правилами розрахунку ймовірностей (одне з таких правил — правило додавання — установлено вище). Для всіх додатків зовсім несуттєво, як саме визначаються ймовірності вихідної сукупності випадкових подій; важливо лише, що якщо

при досить великому числі іспитів відносні частоти вихідних подій будуть близькі до їхніх ймовірностей, то це ж буде вірно і для відносної частоти цікавлячої нас складової події, ймовірність якої розрахована за прийнятими нами правилами. Правила розрахунку, які прийняті в теорії ймовірностей, саме відповідають цій основній вимозі.

Слідства з основних властивостей ймовірностей

Слідство 1. Якщо випадкові події A_1, A_2, \dots, A_n попарно несумісні, то

$$\mathbf{P}\{A_1 \text{ або } A_2 \text{ або } \dots \text{ або } A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \dots + \mathbf{P}\{A_n\}. \quad (13.5)$$

Формула (13.5) може бути легко отримана з формули (13.4) методом повної індукції.

Слідство 2. Якщо попарно несумісні випадкові події A_1, A_2, \dots, A_n утворюють повну групу, то сума їхніх ймовірностей дорівнює одиниці.

Дійсно, для повної групи подій A_1, A_2, \dots, A_n подія (A_1 або A_2 або \dots або A_n) є достовірна, і тому

$$\mathbf{P}\{A_1 \text{ або } A_2 \text{ або } \dots \text{ або } A_n\} = 1.$$

Застосовуючи до лівої частини цієї рівності формулу (13.5), одержуємо:

$$\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \dots + \mathbf{P}\{A_n\} = 1. \quad (13.6)$$

Особливий інтерес представляє окремий випадок, коли повна група складається тільки з двох несумісних подій. При цьому настання однієї з них рівнозначно ненастанню іншої. Такі випадкові події називаються взаємно протилежними. Якщо одна з пари взаємно протилежних подій позначена через A , то іншу позначають через \bar{A} (читають «не A »). Ймовірності двох взаємно протилежних подій у сумі дають одиницю:

$$\mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{\bar{A}\} = 1; \quad (13.7)$$

це впливає безпосередньо з формули (13.6).

Таким чином, якщо відомо ймовірність якої-небудь випадкової події A , то ймовірність протилежної їй події \bar{A} обчислюється по формулі

$$\mathbf{P}\{\bar{A}\} = 1 - \mathbf{P}\{A\}.$$

Прикладом взаємно протилежних подій може служити випадання герба і решітки при киданні монети; якщо ці події рівноможливі, то кожна з них має ймовірність, рівну $1/2$.

Неможливі події

Назвемо неможливою подією таку подію, яка не може відбутися ні при якому повторенні іспиту. Прикладом може послугувати виймання білої кулі з урни, де зовсім немає білих куль, або одержання від'ємного результату при зважуванні тіла. Неможливою подією можна вважати протилежну будь-якій достовірній події (при тому ж комплексі умов); тому ймовірність неможливої події дорівнює нулеві. Це погоджується з тим, що неможлива подія завжди має відносну частоту, яка дорівнює нулеві.

Помітимо, що при класичному визначенні ймовірність дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли подія неможлива, тобто жоден можливий результат іспиту не благодіє цій події ($M=0$). Надалі (при вивченні безперервних випадкових величин) ми побачимо, що з рівності нулеві ймовірності випадкової події ще не впливає її неможливість.

Зв'язок класичного визначення з основними властивостями ймовірностей. Як підкреслювалося вище, класичне визначення ймовірностей відноситься до такого випадку, коли результати іспиту можна представити у вигляді повної групи рівноможливих подій. Цікаво відзначити, що в цьому випадку класична формула (13.1) є єдиною, котра погоджується з основними трьома властивостями ймовірностей.

А саме, має місце наступне визначення:

Якщо елементарні результати іспиту утворюють повну групу рівноможливих попарно несумісних подій, то ймовірність будь-якої складеної події може бути виражена класичною формулою (13.1).

Для доведення позначимо елементарні результати іспиту через E_1, E_2, \dots, E_N і підрахуємо спочатку їхню загальну ймовірність $p = \mathbf{P}\{E_k\}$ ($k=1, 2, \dots, N$). На основі слідства 2 маємо:

$$\mathbf{P}\{E_1\} + \mathbf{P}\{E_2\} + \dots + \mathbf{P}\{E_N\} = Np = 1,$$

звідки $p = 1/N$. Позначимо, далі, через A складену подію, якій благодіють M фіксованих елементарних випадків іспиту, наприклад, E_1, E_2, \dots, E_M .

Тоді подія A є складена подія (E_1 , або E_2 або ... або E_M) і за правилом додавання ймовірностей

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{E_1\} + \mathbf{P}\{E_2\} + \dots + \mathbf{P}\{E_M\},$$

тобто

$$\mathbf{P}\{A\} = Mp = M/N.$$

5. Сумісництво випадкових подій. Незалежні випадкові події

Під сумісництвом випадкових подій A і B розуміють випадкову подію, яка полягає в тому, що в результаті іспиту відбудеться і подія A і подія B . Сумісництво випадкових подій A і B ми будемо позначати через $(A \text{ і } B)$.

Приклад. З першої сотні чисел 1, 2, ..., 100 навмання вибирається одне число; подія A полягає в тому, що обране число ділиться на 3, подія B тому, що воно ділиться на 4; тоді подія (A і B) полягає в тому, що обране число ділиться і на 3 і на 4, тобто ділиться на 12. Легко підрахувати, що

$$\mathbf{P}\{A\} = 33/100; \quad \mathbf{P}\{B\} = 25/100; \quad \mathbf{P}\{A \text{ і } B\} = 8/100,$$

так як серед перших 100 чисел є 33 числа, які діляться на 3, 25 чисел, які діляться на 4, і 8 чисел, які діляться на 12.

Найбільш просте співвідношення між ймовірностями випадкових подій A і B і ймовірністю їхнього сумісництва (A і B) має місце тоді, коли випадкові події A і B незалежні. Поняття незалежності ми пояснимо спочатку на схемі випадкової вибірки. Нехай із двох урн із кулями виймається навмання по одній кулі. Подія A полягає в тому, що куля, яка вийнята з першої урни, виявиться білою, подія B – у тому, що куля, вийнята з другої урни, виявиться білою. Ці випадкові події незалежні власне кажучи в тому змісті, що колір кулі, вийнятої з однієї урни, не може впливати на колір кулі, вийнятої з іншої урни. Підрахуємо ймовірність сумісництва подій A і B , тобто ймовірність того, що обидві вийняті кулі виявляться білими. Позначимо кількість куль у першій і другій урнах відповідно через N_1 і N_2 , а кількість білих куль у них відповідно через M_1 і M_2 , так що

$$\mathbf{P}\{A\} = M_1/N_1; \quad \mathbf{P}\{B\} = M_2/N_2.$$

Так як кожний з N_1 випадків виймання кулі з першої урни може комбінуватися з кожним з N_2 випадків виймання кулі з другої урни, то число всіх випадків дорівнює N_1N_2 ; з них тільки в M_1M_2 випадках виймаються дві білих кулі; отже, шукана ймовірність сумісництва дорівнює

$$\mathbf{P}\{A \text{ і } B\} = M_1M_2 / N_1N_2,$$

Тобто

$$\mathbf{P}\{A \text{ і } B\} = \mathbf{P}\{A\}\mathbf{P}\{B\}. \quad (13.8)$$

Формула (13.8) виражає правило множення ймовірностей для незалежних випадкових подій.

Нагадаємо, що ця формула доведена нами тільки для часткового випадку. У загальному випадку саме поняття незалежності випадкових подій має потребу у означенні. Це може бути зроблено за допомогою формули (13.8), простота якої робить її важливим інструментом у розрахунках.

Означення. Дві випадкові події A і B називаються незалежними, якщо для них має місце правило множення ймовірностей у формі (13.8), тобто якщо ймовірність їхнього суміщення дорівнює добуткові їхніх ймовірностей.

Помітимо, що з незалежності випадкових подій A і B випливає попарна незалежність подій \bar{A} і B , A і \bar{B} , \bar{A} і \bar{B} .

Приведене вище визначення незалежності двох випадкових подій можна розширити і на більше число подій: події A_1, A_2, \dots, A_n називаються незалежними в сукупності, якщо ймовірність суміщення будь-яких 2, 3, ... n з них дорівнює добуткові відповідних ймовірностей.

Наприклад, три події A, B, C незалежні в сукупності, якщо мають місце чотири рівності:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A \text{ і } B\} &= \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B\}; \quad \mathbf{P}\{A \text{ і } C\} = \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{C\}; \quad \mathbf{P}\{B \text{ і } C\} = \mathbf{P}\{B\} \mathbf{P}\{C\}; \\ \mathbf{P}\{A \text{ і } B \text{ і } C\} &= \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B\} \mathbf{P}\{C\}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Корисно мати на увазі, що випадкові події можуть бути попарно незалежні і все-таки не бути незалежні в сукупності. Наприклад, нехай іспит полягає у вийманні навмання однієї кулі з урни, у якій лежать 4 кулі з номерами 1, 2, 3 і 123, і нехай подія $A(B, C)$ полягає в тому, що на вийнятій кулі виявиться цифра 1 (відповідно, 2 і 3). Події A, B і C попарно незалежні, так як

$$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = 2/4 = 1/2;$$

$$\mathbf{P}\{A \text{ і } B\} = \mathbf{P}\{B \text{ і } C\} = \mathbf{P}\{C \text{ і } A\} = 1/4 = (1/2) \cdot (1/2).$$

Але події A, B і C не будуть незалежні в сукупності, так як

$$\mathbf{P}\{A \text{ і } B \text{ і } C\} = 1/4 \neq (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2).$$

Відзначимо також, що наявність одного тільки співвідношення (13.9) ще не забезпечує незалежності випадкових подій A, B, C в сукупності.

Наприклад, якщо в урні лежить 8 куль з номерами 1, 2, 3, 12, 13, 20, 30, 123 і якщо події A, B, C мають той же зміст, що й у попередньому прикладі, то

$\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{C\} = 4/8 = 1/2$; $\mathbf{P}\{A \text{ і } B \text{ і } C\} = 1/8 = (1/2) \cdot (1/2) \cdot (1/2)$;
і навіть

$$\mathbf{P}\{A \text{ і } B\} = 2/8 = (1/2) \cdot (1/2), \quad \mathbf{P}\{A \text{ і } C\} = 2/8 = (1/2) \cdot (1/2);$$

Але

$$\mathbf{P}\{B \text{ і } C\} = 1/8 \neq \mathbf{P}\{B\} \cdot \mathbf{P}\{C\}.$$

Узагальнення правила додавання ймовірностей.

Якщо випадкові події A і B незалежні, то

$$\mathbf{P}\{A \text{ або } B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B\}. \quad (13.10)$$

Для доведення формули (13.10) помітимо, насамперед, що події $(A \text{ або } B)$ і $(\bar{A} \text{ і } \bar{B})$ взаємно протилежні (якщо відбувається хоча б одна з двох подій A або B , то не відбувається відповідна протилежна подія, виходить, не може відбутися і суміщення протилежних подій $\bar{A} \text{ і } \bar{B}$). Застосовуючи формулу (13.7) і правило множення, одержуємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A \text{ або } B\} &= 1 - \mathbf{P}\{\bar{A} \text{ і } \bar{B}\} = 1 - \mathbf{P}\{\bar{A}\} \mathbf{P}\{\bar{B}\} = 1 - (1 - \mathbf{P}\{A\})(1 - \mathbf{P}\{B\}) = \\ &= \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A\} \mathbf{P}\{B\}, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Приведемо ще без доведення загальне правило додавання ймовірностей:

$$\mathbf{P}\{A \text{ або } B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{A \text{ і } B\}. \quad (13.11)$$

(Тут події A і B не обов'язково незалежні.)

Приклад 1. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по одній і тій же цілі; ймовірність попадання для першого стрільця дорівнює $\mathbf{P}\{A\} = 0,9$, для другого $\mathbf{P}\{B\} = 0,8$.

Потрібно визначити ймовірність уразити ціль, тобто ймовірність того, що хоча б один стрілець потрапить у ціль.

По формулі (13.10) знаходимо

$$\mathbf{P}\{A \text{ або } B\} = 0,9 + 0,8 - 0,9 \cdot 0,8 = 0,98.$$

6. Умовні ймовірності. Загальне правило множення ймовірностей. Формула повної ймовірності

Метою цього пункту є узагальнення правила множення ймовірностей (13.8) на залежні випадкові події. Для цього звернемося спочатку, як і в п. 5, до класичної схеми випадкової вибірки. Нехай іспит полягає у вийманні навмання однієї кулі з урни, що містить N куль, які однакові напам'яць, але розрізняються по двох ознаках: по кольору і по малюнку.

Уведемо позначення:

K - кількість кольорових куль ($N-K$ - білих),
 L — кількість куль з малюнком ($N-L$ -без малюнка),
 M — кількість кольорових куль з малюнком.
 Нехай подія A полягає в появі кольорової кулі, подія B — у появі кулі з малюнком. Сумісництво подій A і B означає появу кольорової кулі з малюнком. Ймовірності цих випадкових подій відповідно рівні

$$P\{A\}=K/N ; P\{B\}=L/N; P\{A \text{ і } B\}= M/N.$$

Спробуємо, за аналогією з формулою (13.8), зв'язати ймовірність події (A і B) з ймовірністю події A ; ми одержимо:

$$M/N=(K/N)(M/K) \quad (13.12)$$

Відношення M/K кількості кольорових куль з малюнком до кількості всіх кольорових куль також має характер ймовірності, а саме, воно дає ймовірність вибрати кулю з малюнком за умови, що вибір виконується тільки з числа кольорових куль (так як з усіх K кольорових куль тільки M куль мають малюнок). Таку ймовірність називають умовною ймовірністю події B за умови здійснення події A ; позначають цю умовну ймовірність через $P\{B|A\}$, так що в нашому прикладі

$$P\{B|A\}=M/K .$$

Тепер ми можемо записати співвідношення (13.12) у вигляді

$$P\{A \text{ і } B\}= P\{A\}P\{B|A\}. \quad (13.13)$$

Це співвідношення виражає загальне правило множення ймовірностей: *ймовірність суміщення двох випадкових подій дорівнює добуткові ймовірності одного з них на умовну ймовірність іншого.* Формула (13.13) виведена нами для класичної схеми.

Звернемося тепер до загального випадку яких завгодно випадкових подій A і B . Тут формула (13.13) служить для визначення умовної ймовірності. А саме, *умовна ймовірність події B за умови здійснення події A визначається за допомогою формули*

$$P\{B|A\}=(P\{A \text{ і } B\})/(P\{A\}) \quad (\text{при } P\{A\} \neq 0). \quad (13.14)$$

Точно так само вводиться умовна ймовірність події A за умови здійснення події B :

$$P\{A|B\}=(P\{A \text{ і } B\})/(P\{B\}) \quad (\text{при } P\{B\} \neq 0). \quad (13.15)$$

Умовні ймовірності, як легко перевірити, володіють всіма основними властивостями ймовірностей. Формула (13.13) може бути узагальнена і на більше число випадкових подій. Наприклад, для трьох випадкових подій A, B, C

$P\{A \text{ і } B \text{ і } C\}=P\{A \text{ і } B\}P\{C|A \text{ і } B\}= P\{A\}P\{B|A\}P\{C|A \text{ і } B\}$.
 Уведення поняття умовної ймовірності дозволяє дати нове тлумачення незалежності випадкових подій. Якщо випадкові події A і B незалежні, то з формул (13.8), (13.14) і (13.15) випливає:

$$P\{B|A\}=(P\{A\}P\{B\})/(P\{A\})= P\{B\} ,$$

$$P\{A|B\}=(P\{A\}P\{B\})/(P\{B\})= P\{A\}$$

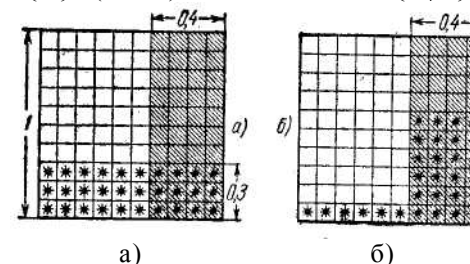
тобто впливає рівність умовних і безумовних ймовірностей цих подій. Очевидно також, що і зворотно, при

$$P\{B|A\}= P\{B\}$$

формула (13.13) перетворюється у формулу (13.8).

Таким чином, незалежність випадкових подій A і B означає, що ймовірність події B (або A) не змінюється при введенні додаткової умови здійснення події A (або відповідно B). (Нагадаємо, що ймовірність випадкової події (B) завжди зв'язана з визначеним комплексом умов. Якщо до цього комплексу додати додаткову умову здійснення деякої іншої події (A), то ймовірність розглянутої події (B) може змінитися). З цього тлумачення безпосередньо випливає, наприклад, що достовірна подія і будь-яка випадкова подія A незалежні. У розглянутому вище прикладі незалежність випадкових подій A і B зводиться до виконання рівності $M/K=L/N$, тобто до умови, що частка куль з малюнком серед кольорових куль дорівнює частці куль з малюнком серед усіх куль в урні. Такий пропорційний розподіл куль по двох ознаках представлено схематично на рис.13.1,а, де $P\{A\}=0,4$; $P\{B\}=P\{B|A\}=0,3$.

Для порівняння на рис. 13.1, б) приведено приклад непропорційного розподілу куль по двох ознаках, де $P\{A\}=0,4$; $P\{B\}=(24+6)/100=0,3$; але $P\{B|A\}=24/40=0,6$.



Умовні позначення: ■ - кулі кольорові; * - кулі з рисунком;

- - кулі кольорові з рисунком;
- - кулі кольорові без рисунка.

Рис.13.1.

Формула повної ймовірності

Теорема. Якщо випадкові події H_1, H_2, \dots, H_n попарно несумісні і якщо подія A може здійснитися тільки з якою-небудь однією з цих подій, то

$$P\{A\} = P\{H_1\}P\{A|H_1\} + P\{H_2\}P\{A|H_2\} + \dots + P\{H_n\}P\{A|H_n\}. \quad (13.16)$$

Доведення. При висловлених умовах подія A рівносильна сумісництву подій

$$(H_1 \text{ або } H_2 \text{ або } \dots \text{ або } H_n) \text{ і } A.$$

Але це сумісництво відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається одне зі сполучень

$$(H_1 \text{ і } A), \text{ або } (H_2 \text{ і } A), \text{ або } \dots, \text{ або } (H_n \text{ і } A).$$

Застосовуючи правило додавання ймовірностей, одержуємо:

$$P\{A\} = P\{(H_1 \text{ і } A), \text{ або } (H_2 \text{ і } A), \text{ або } \dots, \text{ або } (H_n \text{ і } A)\} = P\{(H_1 \text{ і } A) + (H_2 \text{ і } A) + \dots + (H_n \text{ і } A)\}; \quad (13.17)$$

залишається лише застосувати загальне правило множення ймовірностей:

$$P\{H_1 \text{ і } A\} = P\{H_1\}P\{A|H_1\}; \dots$$

Зокрема, завжди має місце формула

$$P\{B\} = P\{A\}P\{B|A\} + P\{\bar{A}\}P\{B|\bar{A}\}, \quad (13.18)$$

так як протилежні події A і \bar{A} несумісні й утворюють повну групу.

Приклад 1. В урні знаходиться N куль, з них M білих; іспит полягає в тому, що з урни послідовно виймаються дві кулі; подія A полягає в тому, що перша вийнята куля виявиться білою, подія B — у тому, що друга вийнята куля виявиться білою. Очевидно.

$$P\{A\} = M/N; \quad P\{\bar{A}\} = (N-M)/N;$$

$$P\{B|A\} = (M-1)/(N-1); \quad P\{B|\bar{A}\} = M/N-1.$$

Підрахуємо $P\{B\}$. По формулі (13.18):

$$P\{B\} = (M/N)[(M-1)/(N-1)] + [(N-M)/N](M/N-1) = M/N.$$

Таким чином, ймовірність того, що друга вийнята куля буде білою, дорівнює ймовірності того, що буде білою перша вийнята куля.

13.2. Випадкові величини і розподіл ймовірностей

7. Дискретні випадкові величини. У цьому пункті предметом вивчення є величини, значення яких залежать від випадку, як, наприклад, число очок, що випадає на верхній грані гральної кістки, або число викликів на телефонній станції за даний проміжок часу. Ті значення, які у результаті іспиту може прийняти досліджувана величина, будемо називати її можливими значеннями.

Означення. Величина ξ називається дискретною випадковою величиною, якщо всі її можливі значення утворюють кінцеву або нескінченну послідовність чисел $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ і якщо прийняття нею кожного з зазначених значень є випадкова подія з визначеною ймовірністю.

Ймовірність випадкової події ($\xi=x_k$) позначимо через p_k і будемо говорити, що p_k є ймовірність значення x_k . Ймовірність p_k є функція від x_k . Ця функція називається **законом розподілу ймовірностей величини ξ** .

Усяке правило, яке дозволяє знаходити ймовірності всіх можливих значень величини ξ , визначає закон розподілу її ймовірностей. Зазвичай цей закон записують у вигляді таблиці, у якій перелічуються всі можливі (різні) значення величини ξ і їхньої ймовірності:

Можливе значення ξ	x_1	x_2	...	x_k	...
Ймовірність (p)	p_1	p_2	...	p_k	...

Така таблиця називається **таблицею розподілу ймовірностей** дискретної випадкової величини ξ .

Якщо випадкова величина ξ може приймати лише кінцеве число різних значень x_1, x_2, \dots, x_n , то випадкові події

$$(\xi=x_1), (\xi=x_2), \dots, (\xi=x_n)$$

утворюють повну групу попарно несумісних подій; отже, сума їхніх ймовірностей повинна дорівнюватися 1:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1.$$

Якщо таблиця розподілу ймовірностей містить нескінченно багато значень, то умова (13.19) замінюється наступною: нескінченний ряд $p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots$ повинний бути збіжним і його сума повинна дорівнювати 1.

Приклад 1. Число очок, що випадає на верхній грані правильної гральної кістки, є дискретна випадкова величина з наступною таблицею розподілу ймовірностей (див. п.3):

Число очок	1	2	3	4	5	6
------------	---	---	---	---	---	---

Ймовірність	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
-------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----

(13.20)

Помітимо, що для неправильної гральної кістки можливі значення числа очок залишаються тими ж, але ймовірності їхні можуть бути відмінні від 1/6 .

Приклад 2. Мисливець, який має три патрони, стріляє в ціль до першого попадання (або поки не витратить усі три патрони). Число витрачених патронів буде випадковою величиною (ξ) із трьома можливими значеннями (1, 2, 3). Знайдемо розподіл ймовірностей цієї величини за умови, що ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює 0,8.

Подія ($\xi=1$) означає попадання з першого пострілу, тому її ймовірність дорівнює

$$P\{\xi = 1\} = 0,8.$$

Подія ($\xi=2$) означає попадання лише з другого пострілу (і, виходить, непопадання при першому пострілі), її ймовірність дорівнює

$$P\{\xi = 2\} = (1-0,8) \cdot 0,8 = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16.$$

Нарешті, три постріли виконуються, якщо не було попадання при перших двох пострілах, тому

$$P\{\xi = 3\} = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

Цю ж ймовірність можна було б підрахувати і по формулі (13.19):

$$P\{\xi = 3\} = 1 - P\{\xi = 1\} - P\{\xi = 2\} = 1 - 0,8 - 0,16 = 0,04.$$

Отже, таблиця розподілу ймовірностей величини ξ є

ξ	1	2	3
p	0,8	0,16	0,04

(13.21)

Приклад 3. Виконується стрільба по деякій цілі до першого попадання, без обмеження числа пострілів. Ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює p . Число зроблених пострілів є випадкова величина ξ с нескінченною таблицею розподілу ймовірностей:

ξ	1	2	3	...	n	...
p	p	$(1-p)p$	$(1-p)^2 p$...	$(1-p)^{n-1} p$...

(13.22)

Ряд ймовірностей являє собою нескінченно убутну геометричну прогресію зі знаменником $(1-p)$; він сходиться, і його сума дорівнює

$$p + (1-p)p + (1-p)^2 p + \dots + (1-p)^{n-1} p + \dots = p/[1-(1-p)] = 1.$$

Приклад 4. У деяких задачах фізики і техніки зустрічаються випадкові величини, які підлягають законові розподілу Пуассона

ξ	0	1	2	...	m	...
	e^{-a}	$a e^{-a}$	$(a^2/2!) e^{-a}$...	$(a^m/m!) e^{-a}$...

(13.23)

де a — деяке додатне число, що характеризує випадкову величину ξ .

Законові розподілу Пуассона підкоряються, наприклад:

а) кількість викликів на автоматичній телефонній станції за даний проміжок часу;

б) кількість електронів, які вилітають з напруженого катода за даний проміжок часу.

Що являє собою число a в цих прикладах, буде ясно з подальшого. Тут же ми відзначимо тільки те, що ряд ймовірностей

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

сходиться і його сума дорівнює 1:

$$e^{-a} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^m}{m!} + \dots \right) = e^{-a} e^a = 1.$$

Лінійні дії над випадковими величинами

До лінійних дій ми будемо відносити множення випадкової величини ξ на число і додавання випадкових величин.

Добутком $C\xi$ дискретної випадкової величини

ξ	x_1	x_2	...
	p_1	p_2	

на число C називається дискретна випадкова величина з розподілом ймовірностей

$C\xi$	Cx_1	Cx_2	...
	p_1	p_2	

(13.24)

Інакше кажучи, множення дискретної випадкової величини на число зводиться тільки до множення всіх її значень на це число (без зміни ймовірностей).

Наприклад, якщо мисливець у прикладі 2 платить 2 грн. за кожен витрачений патрон, то витрачена їм сума (у грн.) буде випадковою величиною з наступним розподілом ймовірностей:

2ξ	2	4	6
p	0,8	0,16	0,04

Трохи складніше визначається розподіл ймовірностей суми $\xi+\eta$ двох дискретних величин

$$\xi \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \\ \hline \end{array}$$

$$\eta \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots \\ \hline q_1 & q_2 & \\ \hline \end{array}$$

Позначимо через p_{ki} ймовірність сумісництва випадкових подій ($\xi=x_k$) і ($\eta=y_i$). Якщо відбувається зазначене сумісництво, то сума $\xi+\eta$ приймає значення x_k+y_i . Однак ймовірність, наприклад, події ($\xi+\eta=x_1+y_1$) може виявитися більшою, ніж p_{11} , якщо серед сум x_k+y_i зустрінуться числа, рівні x_1+y_1 . А саме, за правилом додавання ймовірностей ми повинні вважати ймовірність події ($\xi+\eta=x_1+y_1$) рівній сумі всіх тих ймовірностей p_{ki} для яких число x_k+y_i дорівнює x_1+y_1 . Таким чином, значеннями суми $\xi+\eta$ служать суми всіх можливих значень величин ξ і η , а ймовірність кожного із зазначених значень суми дорівнює сумі ймовірностей тих сполучень ($\xi=x_k$) і ($\eta=y_i$), при яких досягається дане значення суми.

На практиці для побудови таблиці розподілу суми $\xi+\eta$ зазвичай будують спочатку допоміжну таблицю

x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2	...
p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}	...

$$(13.25)$$

а потім об'єднують у ній рівні значення x_k+y_i складаючи відповідні ймовірності p_{ki} . Помітимо, що якщо всі значення x_k+y_i різні, то таблиця (13.25) буде готовою таблицею розподілу суми $\xi+\eta$.

Приклад. Нехай іспит полягає в одночасному киданні двох правильних гральних кісток:

ξ — число очок, що випадає на першій кістці;

η — число очок, що випадає на другій кістці;

$\xi+\eta$ — сума чисел очок, що випадають на двох кістках.

Обидві випадкові величини ξ і η мають однакові таблиці розподілу ймовірностей (13.20). Знайдемо розподіл ймовірностей їхньої суми $\xi+\eta$. Так як випадання будь-якого числа очок на першій кістці не залежить від випадання будь-якого числа очок на другій кістці, то ймовірність кожного сумісництва буде дорівнювати $1/36$. За правилом (13.25) побудуємо спочатку допоміжну таблицю

1+1	1+2	2+1	1+3	2+2	3+1	...	6+6
1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	...	1/36

Поєднуючи рівні числа в першому рядку — рядку можливих значень, одержуємо таблицю розподілу ймовірностей величини $\xi+\eta$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Відзначимо наступну особливість додавання випадкових величин; порівнюючи таблицю розподілу для суми $\xi+\eta$ з таблицею розподілу для 2ξ :

2	4	6	8	10	12
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

ми дійдемо висновку, що додавання випадкових величин з однаковими розподілами ймовірностей не зводиться, взагалі говорячи, до множення однієї з них на ціле число. Уведені вище дії додавання випадкових величин і множення їх на число зберігають відомі властивості додавання і множення чисел. Зокрема, мають місце наступні легкі формули, що перевіряються:

$$\xi + \eta = \eta + \xi ; (\xi + \eta) + \xi = \xi + (\eta + \xi) ; C(\xi + \eta) = C\xi + C\eta.$$

Незалежність випадкових величин

Дискретні випадкові величини ξ , η називаються *незалежними*, якщо незалежні випадкові події ($\xi=x_k$) і ($\eta=y_l$) при всіх k і l , тобто якщо ймовірності сумісництва цих подій знаходяться за правилом множення ймовірностей:

$$p_{kl} = p_k q_l \quad (k=1, 2, \dots ; l=1, 2, \dots). \quad (13.26)$$

Наприклад, при киданні двох гральних кісток числа очок, що випадають на першій і другій кістках, є незалежними випадковими

величинами; це спростило знаходження їхньої суми в розглянутому вище прикладі.

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, називаються *взаємно незалежними*, якщо незалежні в сукупності всі випадкові події

$$\left(\xi_1 = x_{k_1}^{(1)}\right), \left(\xi_2 = x_{k_2}^{(2)}\right), \dots, \left(\xi_n = x_{k_n}^{(n)}\right)$$

(тут через $x_{k_1}^{(1)}, x_{k_2}^{(2)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}$... позначені значення випадкової величини ξ_i).

Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ взаємно незалежні, то по розподілах їхніх ймовірностей легко знайти розподіл ймовірностей будь-якої їхньої лінійної комбінації

$$C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + \dots + C_n\xi_n$$

з сталими коефіцієнтами C_1, C_2, \dots, C_n .

Цією обставиною часто користуються в розрахунках, представляючи досліджувану випадкову величину у вигляді лінійної комбінації незалежних випадкових величин з відомими розподілами ймовірностей.

8. Розподіл ймовірностей відносної частоти випадкової події.

Розглянемо відносну частоту ω_n випадкової події A при n -кратному повторенні іспиту. Будемо вважати, що поява події A в кожнім іспиті не залежить від її появи в інших іспитах і що ймовірність події A в кожнім іспиті та сама. Позначимо її через p . (Схематично це повторення іспитів можна представити в такий спосіб. В урну розміщують визначену кількість однакових на дотик куль, частина з яких позначена міткою «А» (наприклад, білим кольором); частка мічених куль повинна дорівнювати p , так що ймовірність вийняти мічену кулю дорівнює ймовірності події A . Вийнявши з урни навмання одну кулю, ми записуємо, чи є на ній мітка чи ні, повертаємо кулю в урну, ретельно перемішуємо кулі і потім знову виймаємо одну кулю. Цей процес повторюється до одержання n записів. Така послідовність іспитів називається *послідовністю незалежних іспитів за схемою Бернуллі або за схемою повернутої кулі*. Її називають також *схемою повторної вибірки* (на відміну від безповторної вибірки, при якій вийняту кулю не повертають в урну).

Так як за n іспитів подія A може відбутися $0, 1, 2, \dots, n$ раз, то ω_n буде дискретною випадковою величиною з можливими значеннями $0, 1/n, 2/n, \dots, 1$. Знайдемо розподіл її ймовірностей. З цією метою представимо величину ω_n у вигляді лінійної комбінації більш простих випадкових величин. Уведемо так названу *характеристичну випадкову величину* λ_k -число появ події A при k -му іспиті. Величина λ_k може приймати тільки два значення: 1 , якщо подія A відбудеться при k -му іспиті, і 0 , якщо подія A не відбудеться при k -у іспиті. Так як ймовірність події A дорівнює p у кожнім іспиті, то величини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ мають однакові таблиці розподілу ймовірностей:

$$\lambda_1 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline p & q \\ \hline \end{array}, \lambda_2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline p & q \\ \hline \end{array}, \dots, \lambda_n \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline p & q \\ \hline \end{array} \quad (13.27)$$

де $q=1-p$. Усі величини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ взаємно незалежні в силу прийнятої нами умови.

Розглянемо тепер суму характеристичних величин

$$\mu_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n. \quad (13.28)$$

Ця сума складається з одиниць і нулів, причому одиниць у ній рівно стільки, скільки разів відбудеться подія A за n іспитів; отже, величина μ_n дорівнює кількості повторень події A за n іспитів, а відношення μ_n до загального числа іспитів (n) дорівнює відносній частоті ω_n :

$$\omega_n = \mu_n/n = (1/n)(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n). \quad (13.29)$$

Отримане представлення випадкової величини ω_n у вигляді лінійної комбінації взаємно незалежних випадкових величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ з відомими розподілами ймовірностей (13.27) дозволяє знайти розподіл ймовірностей для ω_n за допомогою формул попереднього пункту.

Будемо складати величини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ послідовно. Насамперед, по формулах (13.25) і (13.26) маємо:

$$\lambda_1 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline p & q \\ \hline \end{array} + \lambda_2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline p & q \\ \hline \end{array} = \mu_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline pp & pq+qp & qq \\ \hline \end{array}$$

тобто

$$\mu_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline p^2 & 2pq & q^2 \\ \hline \end{array}$$

Далі знаходимо тим же способом

$$\mu_2 + \lambda_3 = \mu_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline p^2 p & p^2 q + 2 p q p & 2 p q q + q^2 p & q^2 q \\ \hline \end{array}$$

Тобто

$$\mu_3 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline p^3 & 3 p^2 q & 3 p q^2 & q^3 \\ \hline \end{array}$$

Ми помічаємо, що ймовірності в таблицях розподілу величин μ_2 і μ_3 збігаються з відповідними членами розкладання біномів

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2;$$

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$$

(звідки, до речі, відразу видно, що суми ймовірностей у цих таблицях рівні одиниці, так як $p+q=1$).

Методом математичної індукції можна довести наступне загальне твердження: ймовірність того, що μ_n прийме деяке значення m , дорівнює членові, який містить p^m , у розкладанні бінома $(p+q)^n$ по степеням p :

$$\mathbf{P}\{\mu_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}. \quad (13.30)$$

Справедливість формули (13.30) при $n=2$ (а також і при $n=3$) була уже встановлена раніше. Доведемо, що зі справедливості цієї формули при деякому числі n іспитів впливає її справедливість і при $n+1$ іспитах. Дійсно, величина $\mu_{n+1} = \mu_n + \lambda_{n+1}$ може прийняти значення m тільки в двох випадках: або при $\mu_n = m$ і $\lambda_{n+1} = 0$, або при $\mu_n = m-1$ і $\lambda_{n+1} = 1$; тому за правилами додавання і множення ймовірностей

$$\mathbf{P}\{\mu_{n+1} = m\} = \mathbf{P}\{\mu_n = m\} \mathbf{P}\{\lambda_{n+1} = 0\} + \mathbf{P}\{\mu_n = m-1\} \mathbf{P}\{\lambda_{n+1} = 1\}.$$

По формулам (13.30) і (13.27) одержуємо:

$$\mathbf{P}\{\mu_{n+1} = m\} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} q + \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} p^{m-1} q^{n-m+1} p,$$

$$\mathbf{P}\{\mu_{n+1} = m\} = \frac{n!}{(m)!(n+1-m)!} p^m q^{n+1-m},$$

що і потрібно було довести.

Формулу (13.30) можна пояснити і не прибігаючи до представлення величини μ_n у вигляді (13.28). Ймовірність того, що подія A наступить у перших m іспитах і не наступить в інших $n-m$

m іспитах, може бути підрахована за правилом множення ймовірностей для незалежних подій, що дає:

$$p^m q^{n-m}. \quad (13.31)$$

Ця ймовірність не залежить від того, у яких саме m іспитах наступить подія A . Але з n послідовних іспитів можна C_n^m різними способами вибрати m іспитів, у яких буде мати місце подія A . Тому, за правилом додавання ймовірностей, шукана ймовірність події ($\mu_n = m$) дорівнює ймовірності (13.31), помноженої на C_n^m , що знову приводить до формули (13.30).

Формула (13.30) дає ймовірність того, що при n -кратному повторенні іспиту випадкова подія A відбудеться точно m раз. Таким чином, ми одержуємо наступні таблиці розподілу ймовірностей для випадкових величин μ_n і ω_n :

$$\mu_n \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline n & n-1 & \dots & m & \dots & 1 & 0 \\ \hline p^n & n p^{n-1} q & \dots & C_n^m p^m q^{n-m} & \dots & n p q^{n-1} & q^n \\ \hline \end{array} \quad (13.32)$$

$$\omega_n \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline n & (n-1)/n & \dots & m/n & \dots & 1/n & 0 \\ \hline p^n & n p^{n-1} q & \dots & C_n^m p^m q^{n-m} & \dots & n p q^{n-1} & q^n \\ \hline \end{array} \quad (13.33)$$

Розподіл ймовірностей, обумовлений таблицею (13.32), називається *біноміальним розподілом ймовірностей*.

П р и к л а д. З великої партії виробів беруть на пробу 10 штук. Відомо, що частка нестандартних виробів у всій партії складає 25%; потрібно знайти ймовірність того, що більше п'яти відібраних виробів виявляться нестандартними.

Добір кожного виробу будемо вважати іспитом, а виявлення нестандартності у відібраного виробу — випадковою подією A . Ймовірність p події A дорівнює, мабуть, частці нестандартних виробів у всій партії, тобто $p = 0,25$.

Кількість нестандартних виробів серед десяти відібраних є випадкова величина μ_{10} - частота повторення події A при десятих іспитах. Задача зводиться до обчислення ймовірності того, що $\mu_{10} > 5$; за правилом додавання ймовірностей

$$\mathbf{P}\{\mu_{10} > 5\} = \mathbf{P}\{\mu_{10} = 6\} + \mathbf{P}\{\mu_{10} = 7\} + \dots + \mathbf{P}\{\mu_{10} = 10\}.$$

Підрахунок ймовірностей по біноміальній формулі (13.30) при $p=0,25$, $q=0,75$ і $n=10$ приводить до наступної таблиці

Кількість нестандартних виробів m	Ймовірність $P=\{μ_{10}=m\}$
0	0,0563
1	0,1877
2	0,2816
3	0,2503
4	0,1460
5	0,0584
6	0,0162
7	0,0031
8	0,0004
9	0,0000
10	0,0000

розподілу (ймовірності округлені до 0,0001):

Звідси видно, що $P\{μ_{10}>5\} \approx 0,020$. Ця ймовірність досить мала, так що якби у відібраному десятку виробів виявилось шість (або більш) нестандартних, то ми могли б засумніватися в тому, чи дійсно частка нестандартних виробів у всій партії складає тільки 25%.

Примітка. Наше розв'язання, яке спирається на біноміальний розподіл ймовірностей величини $μ_{10}$, буде точним лише в тому випадку, коли добір виробів для проби виконується по *схемі випадкової повторної вибірки*. Для пояснення різниці між повторною і безповторною вибірками розглянемо приклад. Нехай в урні лежить $N=100$ куль, з них $M=25$ білих, так що $p=0,25$, і нехай з урни послідовно виймаються 2 кулі. Порівняємо розподіл ймовірностей числа вийнятих білих куль при повторній і безповторній вибірках. І в тому і в іншому випадку число вийнятих білих куль дорівнює сумі двох характеристичних випадкових величин $λ_1$ і $λ_2$, де $λ_k$ — число білих куль, що з'являються при вийманні k -ї кулі; $λ_1$, і $λ_2$ мають один і той же розподіл ймовірностей:

$$λ_1 \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 25/100 & 75/100 \end{matrix} \end{matrix}, \quad λ_2 \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 25/100 & 75/100 \end{matrix} \end{matrix}$$

Але при повторній вибірці величини $λ_1$ і $λ_2$ будуть незалежні, а при безповторній вибірці вони вже будуть залежні. Тому розподіл

ймовірностей їхньої суми для повторної вибірки дається таблицею

$$μ_2 \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ (25/100)^2 & 2 \cdot (25/100) \cdot (75/100) & (75/100)^2 \end{matrix} \end{matrix}$$

а для безповторної вибірки — таблицею

$$μ_2^* \begin{matrix} \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ (25/100) \cdot (24/99) & (25/100) \cdot (75/99) + (75/100) \cdot (25/99) & (75/100) \cdot (74/99) \end{matrix} \end{matrix}$$

Порівнюючи таблиці розподілу величин $μ_2$ і $μ_2^*$, ми помічаємо, що відповідні ймовірності в них мало відрізняються одна від одної. Очевидно, ця відмінність була б ще менше, якби ми взяли, наприклад, $N=1000$, $M=250$.

Подібні міркування дозволяють зробити висновок, що приведене вище розв'язання задачі, яке засноване на біноміальному розподілі, буде тим більше точним, чим менший обсяг вибірки в порівнянні з числами M і N .

9. Безперервні випадкові величини. Дискретні випадкові величини не вичерпують усіх типів випадкових величин. У теорії ймовірностей часто приходиться вести розрахунок з такими випадковими величинами, можливі значення яких суцільно заповнюють деякий інтервал, як, наприклад, згадані у вступі відхилення розмірів деталей від номіналу. Такі випадкові величини одержали назву безперервних.

Закон розподілу ймовірностей для безперервної випадкової величини $ξ$ повинний дозволяти знаходити ймовірність попадання її значення в будь-який інтервал $(x_1; x_2)$; ми будемо позначати цю ймовірність через

$$P\{x_1 < ξ < x_2\}.$$

Приклад. Рівномірний розподіл ймовірностей.

У найпростішому випадку всі можливі значення випадкової величини $ξ$ заповнюють деякий кінцевий інтервал $(α_1; α_2)$ і ймовірність

$$P\{x_1 < ξ < x_2\}$$

для будь-якого інтервалу $(x_1; x_2)$, який лежить усередині $(α_1; α_2)$, пропорційна довжині цього інтервалу:

$$P\{x_1 < ξ < x_2\} = λ(x_2 - x_1) \quad (α_1 \leq x_1 < x_2 \leq α_2). \quad (13.34)$$

Коефіцієнт λ повинний бути обрано таким чином, щоб мала місце друга основна властивість ймовірностей (перша основна властивість забезпечується тим, що коефіцієнт λ є додатним, а третя властивість випливає з того, що при об'єднанні інтервалів їхні довжини складаються.); оскільки всі можливі значенні величини ξ лежать у інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, то попадання значення ξ у цей інтервал є достовірною подією і тому його ймовірність повинна дорівнювати 1:

$$P\{\alpha_1 < \xi < \alpha_2\} = \lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = 1.$$

Звідси однозначно визначається значення λ :

$$\lambda = 1/(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Якщо розподіл ймовірностей величини ξ задається формулою (13.34), то говорять, що *випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$* або що величина ξ підкоряється *законові рівномірного розподілу ймовірностей*.

Щільність розподілу ймовірностей

Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, то для будь-яких точок x_1, x_2 цього інтервалу відношення

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} / (x_2 - x_1) \tag{13.35}$$

ймовірності

$$P\{x_1 < \xi < x_2\}$$

до довжини інтервалу $(x_1; x_2)$ є величина стала (вона дорівнює $\lambda = 1/(\alpha_2 - \alpha_1)$).

Це відношення називається *щільністю розподілу ймовірностей при рівномірному розподілі випадкової величини ξ* .

Для будь-якої безперервної випадкової величини ξ відношення (13.35) уже може не бути сталим. За аналогією з тим, як це робиться в механіці (при вивченні розподілу мас), ми вводимо тут поняття щільності розподілу ймовірностей у точці.

Щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини ξ у точці x називається границя відношення

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [P\{x < \xi < x + \Delta x\}] / \Delta x = \varphi(x). \tag{13.36}$$

Ми будемо розглядати лише такі випадкові величини, для яких ця границя існує в кожній точці x . Для таких величин ймовірність попадання значення ξ в інтервал $(x; x + dx)$ допускає виділення головної частини, яка пропорційна dx :

$$P\{x < \xi < x + dx\} \approx \varphi(x) dx$$

(з точністю до малих вищого порядку відносно dx). Ця головна частина називається *диференціалом ймовірності* і позначається через dP_x :

$$dP_x = \varphi(x) dx \tag{13.37}$$

Знаючи диференціал ймовірності, ми можемо за допомогою інтегрування знайти ймовірність попадання значення ξ у будь-який інтервал $(x_1; x_2)$:

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx \tag{13.38}$$

Таким чином, для *завдання закону розподілу безперервної випадкової величини досить задати щільність розподілу її ймовірностей, тобто функцію $\varphi(x)$* . (Строго кажучи, безперервна випадкова величина ξ саме і характеризується тим, що ймовірність попадання її значення в будь-який інтервал $(x_1; x_2)$ може бути представлена у вигляді інтегралу (13.38) від деякої функції $\varphi(x)$).

При всіх розрахунках з безперервними випадковими величинами диференціал ймовірності $\varphi(x) dx$ грає ту ж роль, яку грають ймовірності p_k при розрахунках з дискретними випадковими величинами: у багатьох формулах досить буде замінити p_k на $\varphi(x) dx$ і суму — відповідним інтегралом, щоб від формули для дискретних величин перейти до формули для безперервних величин.

Зауваження. Підкреслимо, що для безперервної випадкової величини ξ реальний зміст має тільки така випадкова подія, як попадання в інтервал, а не попадання в окрему точку. Оскільки ймовірність попадання в малий інтервал по визначенню повинна бути приблизно пропорційна довжині інтервалу, остільки *ймовірність попадання в будь-яку окрему точку варто вважати рівною нулеві*. Іншими словами, якщо прийняття безперервною величиною ξ визначеного значення розглядати як випадкову подію, то ймовірність будь-якої такої події повинна дорівнювати нулеві (хоча таку подію не можна вважати неможливою). На практиці висловлене вище твердження не приводить до непорозуміння, так як значення будь-якої фізичної величини можна виміряти лише з деякою точністю (*абсолютно точно значення фізичної величини є лише математична абстракція*).

Основні властивості щільності розподілу ймовірностей.

а) Щільність розподілу $\varphi(x)$ невід’ємна для всіх x . Це безпосередньо випливає з визначення (13.36),

$$\Delta x > 0 \text{ і } P\{x < \xi < x + \Delta x\} \geq 0.$$

б) Інтеграл від щільності розподілу $\varphi(x)$, узятий по всьому інтервалу можливих значень випадкової величини ξ , дорівнює 1. Це випливає з того, що зазначений інтеграл дає ймовірність достовірної випадкової події — прийняття випадковою величиною ξ якого-небудь зі своїх значень. У залежності від того, чи заповнюють можливі значення величини ξ кінцевий інтервал $(\alpha_1; \alpha_2)$ або всю числову вісь, властивість, яка розглядається записується у вигляді

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x) dx = 1 \text{ або } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Поєднуючи обидві ці записи, пишуть

$$\int \varphi(x) dx = 1, \tag{13.39}$$

не вказуючи границь інтегрування; при цьому мається на увазі, що інтеграл береться по всьому інтервалові можливих значень випадкової величини ξ .

Помітимо ще, що кожна невід’ємна функція $\varphi(x)$, яка задовольняє умові (13.39), може служити щільністю розподілу ймовірностей деякої випадкової величини ξ .

Крива розподілу ймовірностей. Кривою розподілу ймовірностей випадкової величини називається графік функції $y = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — щільність розподілу ймовірностей (рис. 13.2).

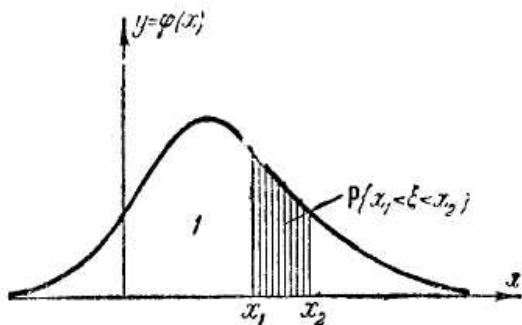


Рис. 13.2.

Крива розподілу може служити для графічного розрахунку ймовірностей, так як ймовірність

$$P\{x_1 < \xi < x_2\}$$

і площа, яка заштрихована на рис. 13.2, криволінійної трапеції виражаються тим самим інтегралом (13.38). Площа заштрихованої криволінійної трапеції буде дорівнювати ймовірності $P\{x_1 < \xi < x_2\}$, якщо площа усієї фігури, яка обмежена кривою розподілу і віссю абсцис, буде дорівнювати одиниці. Іншими словами, ймовірність $P\{x_1 < \xi < x_2\}$ дорівнює відношенню заштрихованої площі до площі усієї фігури (прийнятої за одиницю). Якщо ж потрібно виразити площу відразу в безрозмірних одиницях, як і ймовірність, то варто враховувати, що розмірність $\varphi(x)$ дорівнює $1/(\text{розмірність } x)$.

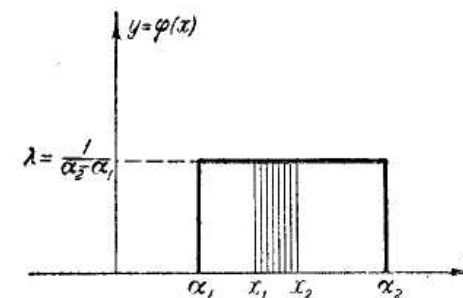


Рис. 13.3.

Для прикладу на рис. 13.3 зображена крива рівномірного розподілу ймовірностей в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$.

Приклади безперервних розподілів ймовірностей.

1) Найпростіший нормальний розподіл ймовірностей.

Говорять, що випадкова величина ξ_0 має найпростіший нормальний розподіл ймовірностей або що величина ξ_0 діє за нормальним законом розподілу, якщо її щільність на всій числовій осі визначена формулою

$$\varphi_0(x) = C e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ де } C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{13.40}$$

Значення коефіцієнта C обрано так, щоб виконувалася умова (13.39). Крива розподілу ймовірностей дана на рис. 13.4.

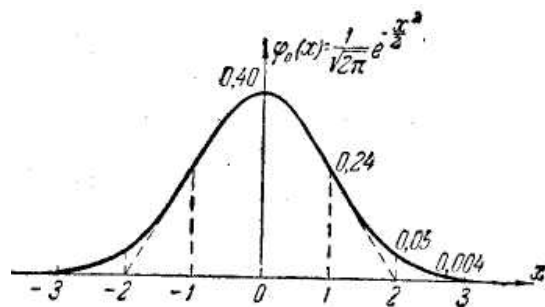


Рис. 13.4.

Вона симетрична щодо осі ординат, при $x=0$ має максимум, рівний $1/\sqrt{2\pi} \approx 0,4$, і має дві точки перегину при $x=\pm 1$. При $x \rightarrow \pm \infty$ крива розподілу асимптотично наближається до осі абсцис, причому наближається досить швидко (наприклад, уже $\varphi_0(3)=0,0044$; $\varphi_0(4)= 0,00013$).

Нормальний розподіл відіграє велику роль у багатьох додатках теорії ймовірностей, зокрема при обробці результатів вимірів. Так як інтеграл від щільності $\varphi_0(x)$ не виражається в кінцевому вигляді через елементарні функції, то для розрахунку ймовірностей складено досить докладні і досить точні таблиці спеціальної функції

$$\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \tag{13.41}$$

яку називають інтегралом ймовірностей. Функція $\Phi(t)$ є непарною:

$$\Phi(-t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\Phi(t);$$

тому в таблицях даються значення $\Phi(t)$ тільки для додатних значень t . При зміні t від 0 до $+\infty$ функція $\Phi(t)$ зростає від 0 до 1, причому зростає дуже швидко: уже $\Phi(3)=0,9973$;

$\Phi(4)= 0,999937$. Графік функції $\Phi(t)$ приведено на рис. 13.5.

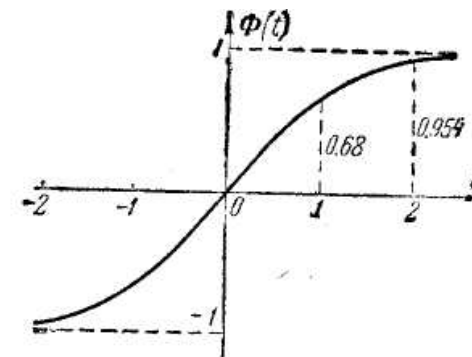


Рис. 13.5.

За допомогою функції $\Phi(t)$ можна обчислити ймовірність попадання випадкової величини ξ_0 у будь-який інтервал $(x_1; x_2)$ у такий спосіб:

$$\mathbf{P}\{x_1 < \xi_0 < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} \varphi_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx ,$$

Звідки

$$\mathbf{P}\{x_1 < \xi_0 < x_2\} = (1/2)\Phi(x_2) - (1/2)\Phi(x_1). \tag{13.42}$$

Зокрема, для симетричного інтервалу $(-t; +t)$ одержуємо:

$$\mathbf{P}\{-t < \xi_0 < +t\} = (1/2)\Phi(t) - (1/2)\Phi(-t) = \Phi(t). \tag{13.43}$$

Таким чином, при $t > 0$ функція $\Phi(t)$ дає ймовірність попадання випадкової величини ξ_0 у симетричний інтервал $(-t; +t)$.

2) Загальний нормальний розподіл ймовірностей.

Так називається розподіл із щільністю

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{13.44}$$

де $\sigma > 0$. При $a=0$ і $\sigma=1$ щільність $\varphi(x)$ перетворюється в щільність $\varphi_0(x)$ найпростішого нормального розподілу, розглянутого в попередньому прикладі. Криві загального нормального розподілу ймовірностей при різних значеннях σ ($a=0$) приведено на рис. 13.6. Вони відрізняються від кривої найпростішого нормального розподілу (13.40) тільки зміною масштабу уздовж осей. Зі збільшенням σ криві розподілу стають більш пологими. Крива розподілу при будь-якому a відрізняється ще і зрушенням уздовж

осі x (рис. 13.7); ця крива розподілу симетрична відносно прямої $x=a$. Розрахунок ймовірностей у загальному нормальному розподілі виконується за допомогою інтеграла ймовірностей $\Phi(t)$, як буде показано в наступному пункті.

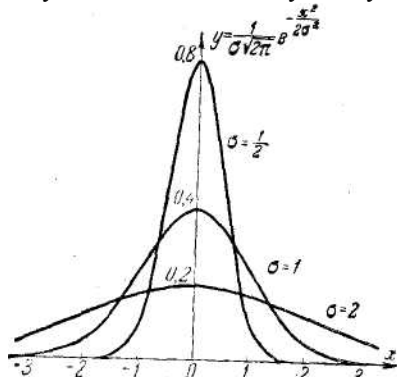


Рис. 13.6

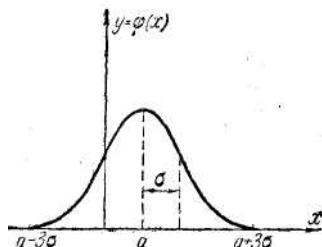


Рис. 13.7

3) Прикладом несиметричного розподілу ймовірностей може служити розподіл із щільністю

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ C_1 x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при } x > 0 \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \end{cases} \quad (13.45)$$

Коефіцієнт C_1 вибирається так, щоб виконувалася умова (13.39)

$$C_1 = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

де

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

є гамма-функція Ейлера. Розподіл (13.45) належить до так званих розподілів Пірсона; він зустрічається в багатьох задачах гідроенергетики. На рис. 13.8 приведені крива розподілу, яка відповідає формулі (13.45) з $\alpha=\beta=4$. Розрахунок ймовірностей і тут виконується по спеціальним таблицям.

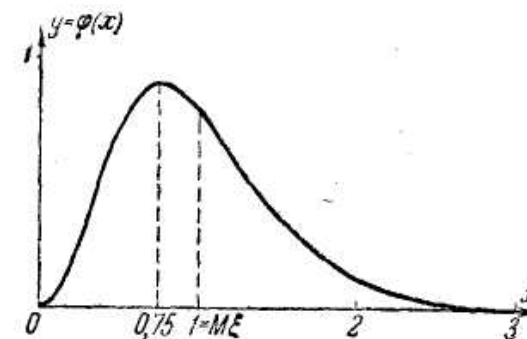


Рис. 13.8.

Функція розподілу ймовірностей. Функцією розподілу ймовірностей випадкової величини ξ називається ймовірність того, що величина ξ прийме значення, менше деякого числа x ; цю функцію позначимо через

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}.$$

Для дискретної випадкової величини функція розподілу дорівнює сумі ймовірностей тих її значень x_k , які менші x

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Наприклад, для випадкової величини з таблицею розподілу (13.21)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,8 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,96 & \text{при } 2 < x \leq 3, \\ 1 & \text{при } 3 < x. \end{cases}$$

Для безперервної випадкової величини відповідно до формули (13.38) функція розподілу дорівнює інтегралові від щільності розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

Наприклад, для найпростішого нормального розподілу (13.40) функція розподілу виражається через інтеграл ймовірностей

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt = \frac{1}{2} \Phi(x) - \frac{1}{2} \Phi(-\infty) = \frac{1}{2} \Phi(x) + \frac{1}{2}.$$

З визначення $F(x)$ і основних властивостей ймовірності випливає, що функція розподілу ймовірностей є зростаюча функція, яка змінюється від 0 до 1.

Її графік називають інтегральною кривою розподілу ймовірностей (рис. 13.9).

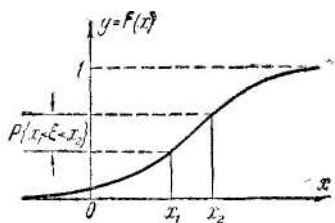


Рис. 13.9.

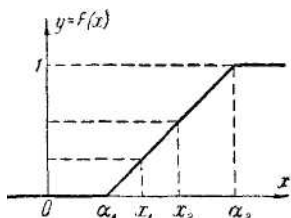


Рис. 13.10.

На рис. 13.10 приведена, для прикладу, інтегральна крива рівномірного розподілу ймовірностей в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$. Так як за правилом додавання ймовірностей при $x_1 < x_2$

$$P\{\xi < x_2\} = P\{\xi < x_1\} + P\{x_1 \leq \xi < x_2\},$$

то ймовірність попадання значення ξ в інтервал $(x_1; x_2)$ дорівнює приросту функції розподілу ймовірностей

$$P\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F(x_2) - F(x_1).$$

Це дозволяє графічно знаходити ймовірності по інтегральній кривій розподілу (див. рис.13.9), якщо за одиницю масштабу осі ординат прийняти $F(+\infty) = 1$.

Функція розподілу ймовірностей придатна для завдання закону розподілу як дискретних, так і безперервних випадкових величин (а також і для завдання випадкових величин більш складної природи). Однак її застосування в загальному випадку вимагає спеціального математичного апарата (інтеграла Стільтьєса), що виходить за рамки даного курсу.

13.3. Функції від випадкових величин

Нехай $f(x)$ — однозначна функція, яка визначена на сукупності всіх можливих значень x величини ξ . Під функцією $f(\xi)$ випадкової величини ξ розуміють таку випадкову величину η , яка приймає значення $y=f(x)$ щораз, коли величина ξ приймає значення x . Наприклад, якщо випадкова величина ξ є діаметр

валика, який обточується на верстаті, то площа поперечного перерізу валика є випадкова величина

$$\eta = \frac{\pi}{4} \xi^2.$$

Нашою задачею є встановлення зв'язку між законами розподілу ймовірностей випадкових величин ξ і $\eta=f(\xi)$. Почнемо з функції від дискретної випадкової величини

ξ	x_1	x_2	...
	p_1	p_2	...

Якщо в результаті іспиту величина ξ прийме деяке значення x_k , то випадкова величина $\eta=f(\xi)$ прийме значення $f(x_k)$. Але ймовірність, наприклад, події $\eta=f(x_1)$ може бути більшою ймовірності p_1 події $\xi=x_1$, якщо серед значень $f(x_k)$ зустрінуться числа, які рівні $f(x_1)$. А саме, за правилом додавання ймовірностей ми повинні вважати ймовірність випадкової події $\eta=f(x_1)$ такою, що рівна сумі всіх тих ймовірностей p_k , для яких числа $f(x_k)$ рівні $f(x_1)$.

На практиці для побудови таблиці розподілу функції $f(\xi)$ зазвичай будують спочатку допоміжну таблицю

$f(x_1)$	$f(x_2)$...
p_1	p_2	...

(13.46)

а потім об'єднують у ній рівні значення $f(x_k)$, складаючи відповідні ймовірності. Помітимо, що якщо всі значення $f(x_k)$ різні, то таблиця (13.46) буде готовою таблицею розподілу функції $f(\xi)$

Приклади.

1) Розглянемо степені $\lambda^n (n=1, 2, 3, \dots)$ від характеристичної випадкової величини λ с розподілом ймовірностей (13.27). Усі ці степені мають той же розподіл, що і λ , так як $1^n=1, 0^n=0$.

2) Розглянемо функцію

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \xi\right)$$

від випадкової величини

ξ	1	2	3	...	n	...
	1/2	1/2 ²	1/2 ³	...	1/2 ⁿ	...

так як

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right) = \begin{cases} 0 & \text{при парному } n, \\ 1 & \text{при } n=4k+1, \\ -1 & \text{при } n=4k+3 \end{cases}$$

то таблицею розподілу для

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$$

буде:

$\sin[(\pi/2)\xi]$	0	1	-1
	p_0	p_1	p_{-1}

де

$$p_0 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots = \frac{1}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{3},$$

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{16}\right)} = \frac{8}{15},$$

$$p_{-1} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \dots = \frac{1}{8\left(1-\frac{1}{16}\right)} = \frac{2}{15}.$$

3) Розглянемо квадрат випадкової величини

ξ	-b	b
	p	1-p

Так як $(-b)^2=b^2$, то одержуємо

ξ^2	b^2
	1

З останньої таблиці розподілу видно, що величина ξ^2 приймає єдине значення з ймовірністю 1 і, виходить, може розглядатися як не випадкова величина.

Функція від безперервної випадкової величини ξ . Будемо вважати, що функція $f(x)$ безперервна разом з першою похідною в інтервалі можливих значень x величини ξ . Нашою задачею є встановлення залежності між щільностями розподілу ймовірностей $\varphi(x)$ і $\psi(y)$ випадкових величин ξ і $\eta=f(\xi)$. Простіше всього ця залежність знаходиться тоді, коли функція $f(x)$ *строго зростає*. При цьому кожен інтервал $(x_1; x_2)$ відображається взаємно однозначно на відповідний інтервал $(y_1; y_2)$ (рис. 13.11) і тому ймовірності попадання випадкових величин ξ і η , у відповідні інтервали повинні бути рівні.

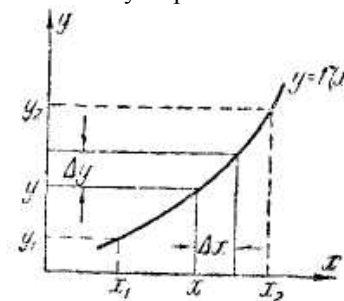


Рис. 13.11.

У застосуванні до малих відповідних інтервалів $(x; x+\Delta x)$ і $(y; y+\Delta y)$ це означає рівність диференціалів ймовірностей:

$$\varphi(x)dx = \psi(y)dy, \quad (132.47)$$

звідки і знаходять шукану залежність:

$$\psi(y) = [\varphi(x)(dx/dy)] = \varphi[g(y)]g'(y), \quad (13.48)$$

де $x=g(y)$ є функція, яка обернена функції $y=f(x)$.

Якщо функція $y=f(x)$ *строго убыває*, то додатному значенню dx відповідає від'ємне значення dy . Тому у формулі (13.47) треба замінити dy на $-dy=|dy|$, що приводить до більш загальної залежності

$$\psi(y) = [\varphi(x)|(dx/dy)|] = \varphi[g(y)]|g'(y)|, \quad (13.49)$$

Приклад. Лінійна функція.

Для лінійної функції

$$\eta = a + b\xi$$

маємо: $y=f(x) = a + bx; \quad x=g(y) = (y-a)/b; \quad g'(y) = 1/b.$

Тому залежність між щільностями розподілу ймовірностей величин ξ і η буде:

$$\psi(y) = (1/|b|)\varphi[(y-a)/b]. \quad (13.50)$$

Наприклад, якщо випадкова величина ξ має рівномірний розподіл в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, то випадкова величина $\eta = a + b\xi$ буде мати також рівномірний розподіл в інтервалі $(a + b\alpha_1; a + b\alpha_2)$.

Якщо випадкова величина ξ_0 має найпростіший нормальний розподіл з щільністю (13.40), то величина $\eta = a + b\xi$ буде мати загальний нормальний розподіл з щільністю

$$\psi(x) = \frac{1}{|b|\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a)^2}{2b^2}}$$

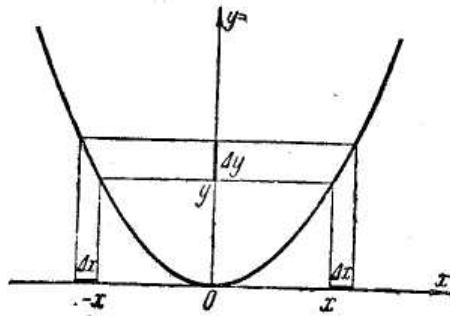


Рис. 13.12.

Це дозволяє робити розрахунок ймовірностей для загального нормального розподілу (13.44) за допомогою інтеграла ймовірностей (13.41). Дійсно, нехай випадкова величина ξ має загальний нормальний розподіл ймовірностей з щільністю (13.44). Тоді випадкова величина $\xi_0 = (\xi - a)/\sigma$ буде мати найпростіший нормальний розподіл (13.40). При цьому нерівність $x_1 < \xi < x_2$ рівносильна нерівності

$$(x_1 - a)/\sigma < \xi_0 < (x_2 - a)/\sigma,$$

що і приводить до шуканої формули:

$$\mathbf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = \mathbf{P}\{(x_1 - a)/\sigma < \xi_0 < (x_2 - a)/\sigma\} = (1/2)\Phi(t_2) - (1/2)\Phi(t_1), \quad (13.51)$$

де

$$t_1 = (x_1 - a)/\sigma; \quad t_2 = (x_2 - a)/\sigma.$$

Знаходження щільності розподілу ймовірностей для немонотонної функції ми покажемо лише на прикладі квадратичної функції $\eta = \xi^2$, причому будемо вважати, що величина ξ

розподілена на всій осі. Тут $y = f(x) = x^2 \geq 0$ обернена функція має дві однозначні гілки:

$$x = g_1(y) = +\sqrt{y}; \quad x = g_2(y) = -\sqrt{y}$$

(рис. 13.12). Застосовуючи до кожної з цих гілок формулу (13.49) і об'єднуючи однакові значення y , одержуємо при $y > 0$:

$$\psi(y) = \varphi(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \varphi(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = [\varphi(\sqrt{y}) + \varphi(-\sqrt{y})] \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

При $y < 0$ треба покласти $\psi(y) = 0$.

Поняття про двовимірні випадкові величини і функції від двох випадкових величин. Для вивчення функцій від декількох випадкових величин, а також для розв'язання багатьох практичних задач виявляється необхідним розгляд багатомірних випадкових величин, тобто величин, значення яких розподілені в просторі двох, трьох і більш вимірів. Прикладом двовимірної випадкової величини може служити точка попадання в мішень. Якщо координати цієї точки в площині мішені позначити через ξ і η то ми одержимо двовимірну випадкову величину $(\xi; \eta)$.

У даному посібнику немає можливості докладно розглянути багатомірні випадкові величини. Ми вкажемо лише деякі формули, які відносяться до безперервних двовимірних випадкових величин (відповідні формули для дискретних двовимірних величин мають аналогічний вигляд).

Значення величини $(\xi; \eta)$ є точка $(x; y)$; розподіл ймовірностей задається *диференціалом ймовірності*

$$dP_{xy} = \varphi(x; y) dx dy, \quad (13.52)$$

який дає головну частину ймовірності попадання точки $(\xi; \eta)$ у прямокутник (див. рис. 13.13.)

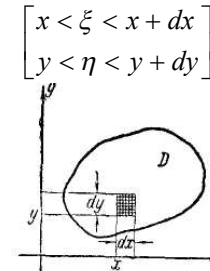


Рис. 13.13.

Функція $\varphi(x, y)$ називається двовимірною щільністю розподілу ймовірностей. Ймовірність попадання точки $(\xi; \eta)$ у деяку область (D) визначається подвійним інтегралом:

$$\mathbf{P}\{(\xi; \eta) \in (D)\} = \iint_{(D)} \varphi(x; y) dx dy \quad (13.53)$$

Щільність $\varphi(x; y)$ може бути будь-якою неневід'ємною функцією, яка задовольняє умові

$$\iint \varphi(x; y) dx dy = 1,$$

де інтеграл береться по всій області можливих значень випадкової величини $(\xi; \eta)$.

Найпростішим прикладом безперервної двовимірної випадкової величини є *випадкова величина* $(\xi; \eta)$ з *рівномірним розподілом* у деякій *кінцевій області* (D_0) . Для такої величини ймовірність попадання в будь-яку область (D) , яка лежить усередині (D_0) , пропорційна площі S_D цієї області. При цьому

$$dP_{xy} = \lambda dx dy \quad \text{для точок усередині } (D_0),$$

$$dP_{xy} = 0 \quad \text{для точок поза } (D_0).$$

Коефіцієнт пропорційності λ знаходиться з умови

$$\mathbf{P}\{(\xi; \eta) \in (D_0)\} = \lambda S_{D_0} = 1,$$

звідки
$$\lambda = \frac{1}{S_{D_0}}.$$

Таким чином, ймовірність попадання в область (D) , яка лежить усередині (D_0) , дорівнює відношенню площ S_D і S_{D_0} .

Двовимірною щільністю тут дорівнює

$$\varphi(x; y) = \frac{1}{S_{D_0}}.$$

Координати ξ і η двовимірної безперервної випадкової величини будуть одномірними безперервними випадковими величинами.

Щільності $\psi_1(x)$ і $\psi_2(y)$ випадкових величин ξ і η зв'язані з двовимірною щільністю $\varphi(x; y)$ наступними формулами:

$$\psi_1(x) = \int \varphi(x; y) dy, \quad (13.54)$$

$$\psi_2(y) = \int \varphi(x; y) dx. \quad (13.55)$$

Для доведення, наприклад, формули (13.54) досить помітити, що диференціал ймовірності $\psi_1(x)dx$ можна

розглядати як ймовірність попадання точки $(\xi; \eta)$ у заштриховану на рис. 13.14 смугу і тому
$$\psi_1(x) dx = \left[\int \varphi(x; y) dy \right] dx.$$

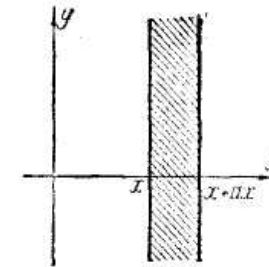


Рис. 13.14

Для дискретної величини з розподілом приведеним в таблиці:

$x \backslash y$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

аналогічною формулою є формула:

$$P_k = p_{k1} + p_{k2} + \dots + p_{km} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (13.56)$$

Випадкові величини ξ і η називаються *незалежними*, якщо диференціал ймовірності dP_{xy} дорівнює добуткові диференціалів ймовірностей $\psi_1(x)dx$ і $\psi_2(y)dy$, тобто якщо двовимірною щільністю $\varphi(x; y)$ дорівнює добуткові щільностей розподілів величин ξ і η

$$\varphi(x; y) = \psi_1(x)\psi_2(y). \quad (13.57)$$

Для дискретної величини з розподілом (13.56) аналогічною формулою є формула (13.26).

Для функції $\zeta = f(\xi; \eta)$ від двох випадкових величин $\xi; \eta$ розподіл ймовірностей визначається формулою

$$\mathbf{P}\{z < \zeta < z + \Delta z\} = \iint_{(D_{z, \Delta z})} \varphi(x; y) dx dy, \quad (13.58)$$

де $(D_{z, \Delta z})$ є така область площини (x, y) , у якій $z < f(x; y) < z + \Delta z$, а $\varphi(x; y)$ — щільність розподілу двовимірної величини $(\xi; \eta)$. Виділяючи в інтегралі (13.58) головну частину, яка є лінійною

відносно Δz , знаходять диференціал ймовірності dP_z , і щільність розподілу ймовірностей функції $\zeta=f(\xi; \eta)$.

Приклад. Розподіл суми випадкових величин.

Для суми $\zeta=\xi+\eta$ область $(D_{z,\Delta z})$ являє собою смужку, яку укладено між прямими $x+y=z$ і $x+y=z+\Delta z$ (рис. 13.15).

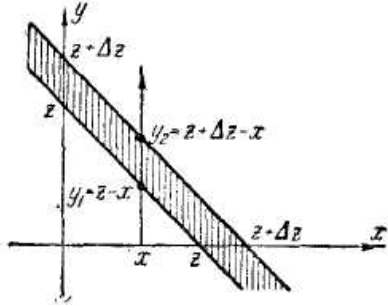


Рис. 13.15.

Тому

$$P\{z < \zeta < z + \Delta z\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{z-x}^{z+\Delta z-x} \varphi(x; y) dy.$$

Виділяючи головну частину внутрішнього інтеграла:

$$\int_{(z-x)}^{(z-x)+\Delta z} \varphi(x; y) dy \approx \varphi(x; z-x)\Delta z,$$

одержуємо диференціал ймовірності величини C :

$$dP_z = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; z-x) dx \Delta z,$$

звідки знаходимо щільність $\chi(z)$ розподілу суми $\zeta=\xi+\eta$:

$$\chi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x; z-x) dx. \tag{13.59}$$

Особливий інтерес представляє додавання незалежних випадкових величин ξ і η . У цьому випадку з формули (13.57) випливає, що щільність розподілу суми $\zeta=\xi+\eta$ виражається через щільності розподілу доданків ξ і η по формулі

$$\chi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(z-x) dx. \tag{13.60}$$

Інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\psi_2(z-x) dx.$$

називається згорткою функцій ψ_1 і ψ_2 , і позначається $\psi_1*\psi_2$.

Мікромодуль 31

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Учасник лотереї з 49 найменувань видів найменувань об'єктів (позначених просто цифрами) називає шість. Виграш визначається тим, скільки найменувань він угадав із шести інших найменувань, що у момент розіграшу лотереї визначаються за допомогою спеціального механічного пристрою, реалізуючий випадковий вибір. Запитується, яка ймовірність того, що учасник угадає всі шість найменувань; п'ять найменувань і т.д.?

Неважко бачити, що в генеральній сукупності, що складається з 49 предметів, власником лотерейного квитка виділено шість «білих». Тому ймовірність того, що з випадково обраних 6 предметів k_1 предметів виявляться «білими» (збіжаться з відзначеними власником квитка), дорівнює $P_{6,49}(k_1, k)$, де обсяг вибірки k дорівнює 6. Наприклад, імовірність угадати всі шість найменувань дорівнює

$$P_{6,49}(6, 6) = \binom{49}{6}^{-1} \approx 7,2 \cdot 10^{-8}.$$

Приклад 2. Розглянемо такий експеримент. На площину кидається тетраедр, три грані якого пофарбовані відповідно в червоний, синій і зелений кольори, а на четверту нанесені всі три кольори. Подія $Ч$ означає, що при киданні тетраедра на площину випала грань, що містить червоний колір, подія $С$ — грань, що містить синій колір, і подія $З$ - грань, що містить зелений колір. Так як кожен із трьох кольорів розміщується на двох гранях, то $P(Ч)=P(С)=P(З)=1/2$. Ймовірність перетинання кожної пари введених подій дорівнює $1/4=1/2 \cdot 1/2$, так як будь-яка пара кольорів знаходиться тільки на одній грані. Це означає попарну незалежність всіх трьох подій. Але

$$P(ЧЗС)=1/4 \neq P(Ч)P(С)P(З)=1/8.$$

Приклад 3. Нехай подія A означає випадання герба в першому з двох кидань симетричної монети, а подія B — випадання решітки у другому киданні. Ймовірність кожної з цих подій дорівнює $1/2$.

Ймовірність перетинання AB буде дорівнювати $P(AB) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2 = P(A)P(B)$.

Таким чином, події A і B незалежні.

Приклад 4. Нехай подія A полягає в тому, що випадково кинута точка потрапила в область, яка розташована праворуч абсциси a , подія B — у тім, що точка потрапила в область, розташовану вище ординати b .

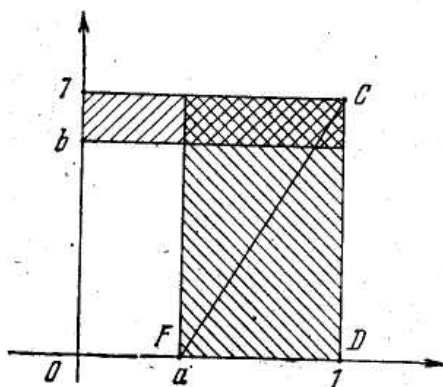


Рис. 13.16.

На рис. 13.16 обидві області заштриховані. Подію AB на рисунку заштриховано в клітинку. Вочевидь, $P(AB) = P(A)P(B)$ і, виходить, події A і B незалежні.

Легко перевірити також, що якщо подія B означає, що кинута точка потрапила в трикутник FCD (див. рис. 13.16), то події A і B будуть уже залежними.

Приклад 5. Деяка кількість n стрільців незалежно один від одного стріляють по одній і тій же цілі; ймовірність попадання для кожного стрільця дорівнює p . Визначити кількість стрільців, які потрібно для враження цілі з ймовірністю не меншою, чим P .

Для цього знайдемо залежність між p і P . Ймовірність непопадання у ціль одним $n \geq$ дорівнює $1-p$; ймовірність того, що жоден стрілець не потрапить у ціль, дорівнює $(1-p)^n$; події «жоден стрілець не потрапить у ціль» і «хоча б один стрілець потрапить у

ціль» (тобто «ціль буде уражена» взаємно протилежні, тому ймовірність враження цілі є $1-(1-p)^n$.

За умовою

$$1-(1-p)^n \geq P.$$

Звідси знаходимо n — ціле число, яке задовольняє нерівності

$$n \geq \frac{\lg(1-P)}{\lg(1-p)}.$$

Наприклад, якщо при стрілянині по літаку ймовірність попадання дорівнює $p=0,004$, то для забезпечення враження літака з ймовірністю не меншою $P=0,98$ потрібно

$$n \geq \frac{\lg 0,02}{\lg 0,996}, \text{ або } n \geq 976 \text{ стрільців.}$$

Приклад 6. У дошці є отвори (лунки) з координатами $(x_k; y_l)$ ($k=1, 2, \dots, n; l=1, 2, \dots, m$). На дошку кинута кулька, яка може потрапити в одну з лунок. Ймовірності попадання кульки в кожну з лунок приведено в таблиці:

$x \backslash y$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	...	p_{n2}
...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{nm}

Тут p_{kl} є ймовірність попадання кульки в лунку з координатами $(x_k; y_l)$. Обчислимо ймовірність P_k попадання кульки в лунку з абсцисою x_k .

Так як лунка з абсцисою x_k може мати одну і тільки одну з ординат y_1, y_2, \dots, y_m , то по формулі (13.17) одержуємо:

$$P_k = p_{k1} + p_{k2} + \dots + p_{km} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Приклад 7. Деякий виріб випускається двома заводами. При цьому обсяг продукції другого заводу в k раз перевершує обсяг продукції першого. Частка браку у 1-го заводу P_1 , у 2-го — P_2 . Припустимо тепер що вироби, які випущені заводами за однаковий проміжок часу, перемішали й у такому виді пустили в продаж. Яка ймовірність того, що ви придбали виріб із другого заводу, якщо він виявився зіпсованим?

Нехай подія B_1 означає, що вибраний вами виріб належить першому заводу, а B_2 —другому. Легко бачити, що

$$P(B_1) = \frac{1}{1+k}, \quad P(B_2) = \frac{k}{1+k}.$$

Це так називані *априорні* ймовірності подій B_1, B_2 . Нехай подія A означає, що вибрано бракований виріб. Нам дані умовні ймовірності $P(A/B_1)=P_1$ і $P(A/B_2)=P_2$. Тепер, скориставшись формулою Байеса, можна відповісти на поставлене запитання. А саме

$$P(B_2/A) = \frac{\frac{k}{1+k} P_2}{\frac{1}{1+k} P_1 + \frac{k}{1+k} P_2} = \frac{k P_2}{P_1 + k P_2}.$$

Аналогічно

$$P(B_1/A) = \frac{P_1}{P_1 + k P_2}.$$

Ймовірності $P(A/B_1)=P_1$ і $P(A/B_2)=P_2$ називають іноді *апостеріорними* ймовірностями відповідно подій B_1, B_2 , після того як відбулася подія A

8. Задача про зустріч. Дві особи, A і B , умовилися зустрітися у визначеному місці між 0 і 1 годинами. Той що прийшов першим чекає іншого протягом 20 хвилин, після чого іде. Визначити ймовірність p зустрічі осіб A і B , якщо моменти їхнього приходу незалежні і рівномірно розподілені в інтервалі $(0; 1)$.

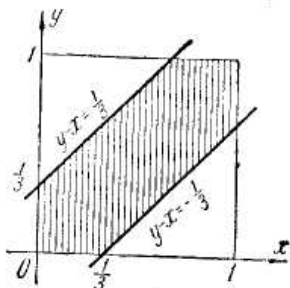


Рис. 13.24.

Розв’язання . Позначимо моменти приходу осіб A і B відповідно через ξ і η . За умовою ξ і η незалежні і рівномірно розподілені в інтервалі $(0; 1)$; тому випадкова точка (ξ, η) рівномірно розподілена в квадраті зі стороною 1 (рис. 13.24). Задача полягає в знаходженні ймовірності нерівності $|\eta - \xi| \leq 1/3$, тобто ймовірності попадання точки $(\xi; \eta)$ у заштриховану на рис. 13.24 смугу між прямими

$$y - x = 1/3 \text{ і } y - x = -1/3.$$

Ця ймовірність дорівнює відношенню заштрихованої площі до площі всього квадрата, тобто

$$p = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{1} = \frac{5}{9}.$$

Мікромодуль 31 Індивідуальні тестові завдання

- 3 колоди карт (52 карти) береться 3 карти. Обчислити ймовірність того, що серед узятих карт буде хоча б один туз.
- Робітник обслуговує три верстати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години верстату не буде потрібна увага робітника, дорівнює для першого верстата 0,9, для другого 0,8 і для третього 0,7. Обчислити ймовірність того, що принаймні один із трьох верстатів не буде потребувати уваги робітника протягом години.
- В урні знаходиться 5 білих і 20 чорних куль. З урни послідовно виймаються кулі доти, поки не буде вийнята біла куля. Обчислити ймовірність того, що при цих умовах буде зроблено три виймання, тобто що до першої білої кулі буде вийнято 2 чорних кулі.
- На двох верстатах обробляються однотипні деталі; ймовірність браку для верстата № 1 складає 0,03, а для верстата № 2 — 0,02. Оброблені деталі складаються в одному місці, причому деталей з верстата № 1 складається вдвічі більше, ніж з верстата № 2. Обчислити ймовірність того, що узята навмання деталь не буде бракованою.

5. За допомогою формули (13.18) довести, що з незалежності випадкових подій A і B випливає незалежність випадкових подій \bar{A} і \bar{B} .
6. Знайти розподіл ймовірностей суми очок, що випадають на трьох правильних гральних кістках. Перевірити, що на трьох кістках ймовірніше викинути 11 очок, чим 12, хоча і 11 і 12 очок виходять при шести комбінаціях:
 11 очок при комбінаціях $(6 + 4 + 1)$, $(6 + 3 + 2)$, $(5 + 5 + 1)$, $(5 + 4 + 2)$, $(5 + 3 + 3)$, $(4 + 4 + 3)$;
 12 очок при комбінаціях $(6 + 5 + 1)$, $(6 + 4 + 2)$, $(6 + 3 + 3)$, $(5 + 5 + 2)$, $(5 + 4 + 3)$, $(4 + 4 + 4)$.
7. 3 урни, у якій лежить 20 чорних і 4 білих кулі, виймаються 5 куль. Знайти розподіл ймовірностей числа 5 вийнятих білих куль.
8. 3 урни, у якій лежить 20 чорних і 4 білих кулі, послідовно виймаються кулі доти, поки не з'явиться чорна куля. Знайти розподіл числа ξ вийнятих при цьому білих куль, тобто числа білих куль, вийнятих до першої чорної кулі.
9. Знайти суму двох незалежних величин з рівномірним розподілом ймовірностей в інтервалі $(-1; +1)$.
10. Точка випадково попадає на коло з рівномірним розподілом ймовірностей по довжині дуги. Знайти розподіл ймовірностей проекції цієї точки на діаметр.
11. Кубики виготовляються з деякою похибкою. Вважаючи, що лінійні розміри кубиків мають нормальний розподіл ймовірностей (13.44), знайти розподіл ймовірностей їхніх об'ємів (v) .

Мікромодуль 32

Числові характеристики випадкових величин

13.4. Числові характеристики розподілу ймовірностей

При виконанні обчислень з дискретними або безперервними випадковими величинами не завжди доцільно користуватися таблицями або щільностями розподілу ймовірностей. Не кажучи вже про те, що таблиці або щільності розподілу не завжди бувають точно відомі, обчислення з ними часто бувають складні або громіздкі. Виявляється, що ряд практично важливих задач можна розв'язати за допомогою деяких усереднених характеристик розподілу. Вивчимо спочатку саму операцію усереднення, яка дозволяє одержувати подібні характеристики

11. Математичне очікування випадкової величини. Почнемо з найбільш простого поняття середнього арифметичного значення. Нехай є сукупність N елементів, які розрізняються величиною деякої ознаки x (наприклад, партія приладів, які розрізняються терміном служби; або сукупність дощових днів у році, які розрізняються величиною опадів у даному місці).

Середнім арифметичним значенням ознаки x у сукупності називається відношення суми значень ознаки x у всіх елементів сукупності до загального числа цих елементів.

Позначимо через x_1, x_2, \dots, x_v різні значення ознаки, яку розглядаємо, у елементів сукупності; через M_k — кількість елементів, у яких значення ознаки дорівнює x_k ($k=1, 2, \dots, v$); через $N=M_1+M_2+\dots+M_v$ — загальне число елементів сукупності. Тоді середнє арифметичне значення \bar{x} представиться виразом

$$\bar{x} = \frac{x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_v M_v}{N}$$

Запишемо цю формулу у вигляді

$$\bar{x} = x_1 \frac{M_1}{N} + x_2 \frac{M_2}{N} + \dots + x_v \frac{M_v}{N}. \quad (13.61)$$

З останньої формули видно, що середнє арифметичне значення залежить не від абсолютних кількостей M_1, M_2, \dots, M_v , а тільки від відносних кількостей

$$\frac{M_1}{N}, \frac{M_2}{N}, \dots, \frac{M_v}{N}.$$

Переходячи тепер до випадкових величин, розглянемо спочатку дискретну величину спеціального вигляду. Нехай із зазначеної вище сукупності вибирається навмання один елемент. (Так само, як і в п.3, найпростіше представити собі цей іспит як виймання навмання кулі з урни, де знаходиться N однакових на дотик куль, з яких M_1 куль мають мітку « x_1 », M_2 куль мають мітку « x_2 », і т.д., причому перед вийманням усі кулі ретельно перемішують.)

Величина ознаки в елемента, який вибирається, є дискретна випадкова величина ξ з наступною таблицею розподілу ймовірностей:

ξ	x_1	x_2	...	x_k	...	x_v
-------	-------	-------	-----	-------	-----	-------

$$\frac{M_1/N}{M_2/N} \dots \frac{M_k/N}{M_v/N} \quad (13.62)$$

(так як величина ξ може приймати тільки ті значення x_1, x_2, \dots, x_v , які є в елементів сукупності, а ймовірність вибору елемента зі значенням ознаки x_k , очевидно, дорівнює M_k/N). Середнє арифметичне значення ознаки в сукупності грає тут роль середнього «очікуваного» значення випадкової величини ξ . Це середнє значення називається «математичним очікуванням» випадкової величини ξ і позначається через $M\xi$. Таким чином, математичне очікування випадкової величини (13.62) дорівнює

$$M\xi = x_1 \frac{M_1}{N} + x_2 \frac{M_2}{N} + \dots + x_v \frac{M_v}{N};$$

але тут уже цю суму треба тлумачити як суму добутків значень величини ξ на їх ймовірності. Це дозволяє відразу ж поширити поняття математичного очікування на будь-яку дискретну випадкову величину

ξ	x_1	x_2	...
	p_1	p_2	...

Означення 1. Математичним очікуванням $M\xi$ дискретної випадкової величини ξ називається сума добутків усіх її можливих значень (x_k) на їх ймовірності (p_k):

$$M\xi = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots,$$

або, коротше,

$$M\xi = \sum x_k p_k, \quad (13.63)$$

де сума береться по всіх можливих значеннях випадкової величини ξ . Якщо безліч цих можливих значень нескінченна, то ми будемо припускати ще, що нескінченний ряд (13.63) сходиться абсолютно (у протилежному випадку говорять, що математичне очікування $M\xi$ не існує; таких випадкових величин ми не будемо розглядати).

Тепер ми можемо поширити поняття математичного очікування на безперервні випадкові величини, з огляду на те, що для них роль ймовірності p_k грає диференціал ймовірності $dP_x = \varphi(x) dx$.

Означення 2. Математичним очікуванням $M\xi$ безперервної випадкової величини ξ називається інтеграл від добутку її значень x на щільність розподілу ймовірностей $\varphi(x)$:

$$M\xi = \int x \varphi(x) dx, \quad (13.64)$$

причому інтеграл (13.64) береться по всьому інтервалу можливих значень величини ξ . Цей інтеграл часто записують у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$$

навіть у тому випадку, коли можливі значення величини ξ заповнюють кінцевий інтервал; у цьому випадку покладають $\varphi(x)=0$ поза зазначеного інтервалу. Якщо ж можливі значення величини ξ заповнюють нескінченний інтервал, то ми будемо припускати, що невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$$

сходиться абсолютно (у протилежному випадку говорять, що математичне очікування $M\xi$ не існує; таких величин ми не будемо розглядати). Важливо відзначити, що усі властивості математичного очікування (або, точніше, властивості самої операції усереднення) зовсім однакові як для дискретних, так і для безперервних випадкових величин.

Властивості математичного очікування.

Найважливішою властивістю операції осереднення є лінійність: математичне очікування лінійної комбінації випадкових величин дорівнює лінійній комбінації їхніх математичних очікувань:

$$M(C_1 \xi_1 + C_2 \xi_2 + \dots + C_n \xi_n) = C_1 M\xi_1 + C_2 M\xi_2 + \dots + C_n M\xi_n, \quad (13.65)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n — сталі.

Для доведення властивості лінійності досить довести наступні теореми.

1. Сталий множник C можна виносити за знак математичного очікування:

$$MC\xi = CM\xi. \quad (13.66)$$

2. Математичне очікування суми двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних очікувань (теорема додавання математичних очікувань):

$$M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta. \quad (13.67)$$

Формула (13.66) особливо просто доводиться для дискретної величини ξ , множення якої на сталу C визначено таблицею (13.24):

$$MC\xi = \sum (Cx_k) p_k = C \sum x_k p_k = CM\xi.$$

Для безперервних величин доведення приведено нижче .

Теорему додавання (13.67) доведемо для безперервних випадкових величин ξ, η . Позначимо через $\varphi(x;y)$ щільність спільного розподілу, а через $\chi(z)$ - щільність розподілу їхньої суми $\zeta=\xi+\eta$. Тоді по формулах (13.64) і (13.59) маємо:

$$\mathbf{M}\zeta = \int z\chi(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z dz \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x;z-x)dx.$$

Змінивши порядок інтегрування, замінимо z на $x+y$:

$$\mathbf{M}(\xi+\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} z\varphi(x;z-x)dz = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\varphi(x;y)dy. \quad (13.68)$$

Скористаємося тепер лінійністю інтеграла і формулами (13.54) і (13.55):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi+\eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x;y)dy + \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x;y)dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\psi_2(y)dy = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta. \end{aligned}$$

Для дискретних величин доведення проводиться тим же способом. Насамперед, за допомогою допоміжної таблиці (13.25) легко переконалися в тому, що математичне очікування суми $\xi+\eta$ може бути підраховане по формулі

$$\mathbf{M}(\xi+\eta) = \sum_{k,l} (x_k + y_l)p_{kl},$$

де сума береться за всіма значеннями x_k і y_l . Далі, розкладаючи цю суму на дві:

$$\sum_{k,l} (x_k + y_l)p_{kl} = \sum_{k,l} x_k p_{kl} + \sum_{k,l} y_l p_{kl}$$

і перетворивши першу з них за допомогою формули (13.56), одержуємо:

$$\sum_{k,l} x_k p_{kl} = \sum_k x_k (p_{k1} + p_{k2} + \dots) = \sum_k x_k p_k,$$

де

$$p_k = \mathbf{P}\{\xi=x_k\}.$$

Таким чином,

$$\sum_{k,l} x_k p_{kl} = \mathbf{M}\xi,$$

і аналогічно

$$\sum_{k,l} y_l p_{kl} = \mathbf{M}\eta,$$

що і доводить формулу (13.67).

Відзначимо ще дві властивості математичного очікування.

3. Математичне очікування сталої (невипадкової) величини C дорівнює самій цій величині C .

Дійсно, сталу C можна розглядати як випадкову величину з єдиним можливим значенням C , ймовірність якого дорівнює 1. Тому

$$\mathbf{M}C = C \cdot 1 = C.$$

4. Математичне очікування добутку незалежних випадкових величин дорівнює добуткові їхніх математичних очікувань (теорема множення математичних очікувань):

$$\mathbf{M}\xi\eta = \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta \quad (13.69)$$

для незалежних ξ, η .

Проведемо доведення для дискретних величин. У силу незалежності величин ξ і η розподіл ймовірностей їхнього добутку ($\xi\eta$) визначається за допомогою таблиці

$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$...
$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$...

у якій при необхідності варто об'єднати рівні числа в першому рядку, склавши відповідні ймовірності (порівняйте визначення суми дискретних величин). Тому математичне очікування добутку $\xi\eta$ можна записати у вигляді

$$\mathbf{M}\xi\eta = \sum_{k,l} (x_k y_l)(p_k q_l),$$

де сума береться по всіх можливих значеннях x_k і y_l величин ξ і η відповідно. Зробивши тут внутрішнє підсумовування по l , можна винести за знак внутрішньої суми множник $(x_k p_k)$, який не залежить від l :

$$\mathbf{M}\xi\eta = \sum_k \sum_l x_k y_l p_k q_l = \sum_k x_k p_k \sum_l y_l q_l,$$

що і приводить до формули (13.69).

Доведення цієї формули для безперервних випадкових величин легко проводиться за допомогою формули, яка приводиться далі (13.73).

Формула (13.69) без труднощів узагальнюється на будь-яке число взаємно незалежних співмножників.

Правила обчислення математичного очікування від функції

1. Нехай ξ — дискретна випадкова величина, яка приймає значення x_k з ймовірністю p_k . Функція $f(\xi)$ є знову дискретна величина, і її математичне очікування визначається формулою

$$Mf(\xi) = \sum f(x_k) P\{f(\xi) = f(x_k)\}, \quad (13.70)$$

де сума береться по всіх різних значеннях $f(x_k)$.

Виявляється, що математичне очікування функції $f(\xi)$ може бути обчислене без знаходження розподілу ймовірностей цієї функції безпосередньо по розподілу самої величини ξ . А саме, має місце формула

$$Mf(\xi) = \sum f(x_k) p_k, \quad (13.71)$$

де сума береться за всіма значеннями x_k величини ξ .

Перш ніж доводити формулу (13.71) у загальному випадку, помітимо, що якщо всі значення $f(x_k)$ різні, то функція $f(\xi)$ має таблицю розподілу (13.46), і в цьому випадку формула (13.71) цілком збігається з формулою (13.70). У загальному випадку серед значень $f(x_k)$ можуть зустрітися рівні числа; нехай, для визначеності, рівні тільки два значення: $f(x_1) = f(x_2)$. Тоді ймовірність події $f(\xi) = f(x_1)$ дорівнює $p_1 + p_2$, і тому відповідний доданок у формулі (13.70) можна перетворити так:

$$f(x_1) P\{f(\xi) = f(x_1)\} = f(x_1)(p_1 + p_2) = f(x_1)p_1 + f(x_2)p_2,$$

що знову приводить до формули (13.71).

2. Математичне очікування функції $f(\xi)$ від безперервної величини ξ теж може бути обчислене безпосередньо по щільності $\varphi(x)$ розподілу самої величини ξ за допомогою формули

$$Mf(\xi) = \int f(x) \varphi(x) dx. \quad (13.72)$$

Ми обмежимося доведенням цієї формули тільки для випадку зростаючої функції $f(x)$. Позначимо щільність розподілу величини $\eta = f(\xi)$ через $\psi(y)$ і у формулі математичного очікування

$$M\eta = \int y \psi(y) dy$$

зробимо заміну змінної інтегрування $y = f(x)$; при цьому по формулі (13.47) ми будемо мати

$$\psi(y) dy = \varphi(x) dx,$$

що відразу приводить до формули (13.72). Наприклад, для функції $C\xi$ формула (13.72) дає:

$$MC\xi = \int Cx\varphi(x) dx = C \int x\varphi(x) dx = CM\xi,$$

що доводить формулу (13.66) для безперервних величин.

3. Приведемо вже без доведення відповідні правила обчислення математичного очікування від функції двох змінних. Для дискретних величин

$$M(\xi; \eta) = \sum_{k,l} f(x_k; y_l) p_{kl},$$

де сума береться за всіма значеннями x_k і y_l величин ξ і η , а p_{kl} є ймовірність сумісництва випадкових подій ($\xi = x_k$) і ($\eta = y_l$).

Для безперервних величин

$$Mf(\xi; \eta) = \iint f(x; y) \varphi(x; y) dx dy, \quad (13.73)$$

де $\varphi(x; y)$ — щільність розподілу випадкової точки $(\xi; \eta)$.

Відзначимо, що часткові випадки цих формул при $f(x; y) = x + y$ і $f(x; y) = xy$ ми вже розглянули раніше (див., наприклад, формулу (13.68)).

12. Центр розподілу випадкової величини.

Математичне очікування випадкової величини дає зручну числову характеристику її розташування. Маючи ту ж розмірність, що і значення випадкової величини, математичне очікування знаходиться усередині інтервалу можливих її значень; наприклад, якщо всі значення випадкової величини ξ лежать в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, то

$$P\{\alpha_1 < \xi < \alpha_2\} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi(x) dx = 1$$

і з нерівності

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha_1 \varphi(x) dx < \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x \varphi(x) dx < \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \alpha_2 \varphi(x) dx$$

впливає, що

$$\alpha_1 < M\xi < \alpha_2$$

(Зокрема, якщо всі значення $\xi > 0$, то і $M\xi > 0$.)

Щоб підкреслити роль математичного очікування як основну характеристику розташування випадкової величини (на відміну від самої операції осереднення), ми дамо наступне означення:

Центром розподілу ймовірностей випадкової величини ξ називається її математичне очікування $M\xi$.

(Для пояснення терміну «центр розподілу ймовірностей» укажемо на механічну аналогію його з поняттям центра розподілу мас (центра ваги): якщо, наприклад, у точках x_1, x_2, \dots, x_v осі x зосереджені маси p_1, p_2, \dots, p_v , то центр ваги x_c цієї системи знаходиться по формулі

$$x_c = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_v p_v}{p_1 + p_2 + \dots + p_v}.$$

За умови $p_1 + p_2 + \dots + p_v = 1$ ця формула збігається з формулою (13.63).

Пояснимо на прикладах поняття центра розподілу як числової характеристики розташування.

1. Нехай ξ — число витрачених патронів при виконаних пострілах за схемою приклада 2 п.3. По таблиці розподілу (13.21) знаходимо математичне очікування числа витрачених патронів:

$$M\xi = 1 \cdot 0,8 + 2 \cdot 0,16 + 3 \cdot 0,04 = 1,24.$$

Воно виявляється нецілим. Для того щоб пояснити, яка практична користь може бути від нашого підрахунку, уявимо собі, що виконується 100 пострілів за зазначеною схемою. Нехай ξ_k — число витрачених патронів при k -у пострілі; тоді

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{100}$$

є загальне число витрачених патронів при ста пострілах. Підрахуємо його математичне очікування, користуючись властивістю лінійності і з огляду на те, що $M\xi_k = 1,24$ ($k=1,2, \dots, 100$):

$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \dots + M\xi_{100} = 100 \cdot 1,24 = 124.$$

Практично це означає, що на 100 подібних постріли буде витрачено в середньому 124 патрона.

2. **Центр розподілу Пуассона** (13.23):

$$M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} a \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} + \dots \right) = a.$$

Таким чином, з'ясується зміст сталої a в розподілі Пуассона: число a є математичне очікування випадкової величини ξ , яке підкоряється законові розподілу Пуассона (13.23).

3. **Центр розподілу частоти** μ_n і відносної частоти ω_n випадкової події.

Безпосередній підрахунок математичного очікування по таблиці розподілу (13.32) приводить до формули

$$M\mu_n = \sum_{m=0}^{\infty} m C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Для більш швидкого підрахунку ми скористаємося властивістю лінійності математичного очікування і представленнями (13.28) і (13.29) випадкових величин μ_n і ω_n через характеристичні випадкові величини $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Насамперед, безпосередній підрахунок по таблицях розподілу (13.27) дає:

$$M\lambda_k = 1p + 0q = p \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (13.74)$$

Це значить, що **центром розподілу характеристичної випадкової величини служить ймовірність випадкової події**. Далі знаходимо:

$$M\mu_n = M\lambda_1 + M\lambda_2 + \dots + M\lambda_n = np; \quad (13.75)$$

$$M\omega_n = (1/n)M\mu_n = p. \quad (13.76)$$

Таким чином, **центром розподілу відносної частоти** (ω_n) **випадкової події є ймовірність цієї події при одиничному іспиті, а центр розподілу частоти** (μ_n) **більше ймовірності в n раз**. Помітимо, що це цілком погоджується з нашим інтуїтивним представленням про математичне очікування. Якщо, наприклад, ймовірність випадкової події дорівнює $p=0,2$ і іспит повторюється $n=100$ разів, то ми очікуємо, що випадкова подія з'явиться $np=20$ разів. Точно так само, якщо нам говорять, що ймовірність браку у великій партії виробів складає $p=\% = 0,01$, то, перевіряючи на вибірку $n=1000$ виробів, ми схильні очікувати, що знайдемо $np=10$ бракованих виробів (звичайно, ми допускаємо можливість і деяких відхилень, але тут мова йде саме про середній очікуваний результат). Помітимо ще, що лінійність математичного очікування дозволяє нам з формули (13.74) одержати більш загальний результат, ніж (13.76). Якщо випадкова подія A в кожному k -м іспиті має свою ймовірність p_k , то центр розподілу відносної частоти ω_n події A при n іспитах буде дорівнювати

$$M\omega_n = (1/n)(M\lambda_1 + M\lambda_2 + \dots + M\lambda_n) = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n},$$

тобто він буде дорівнювати середньому арифметичному з ймовірностей події A у всіх n іспитах.

4. Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, то центр її розподілу збігається із серединою

цього інтервалу. Дійсно, щільність рівномірного розподілу стала і дорівнює $1/(\alpha_2-\alpha_1)$ в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$, так що

$$M\xi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} dx = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

5. *Центр нормального розподілу.* Для найпростішого нормального розподілу (13.40) центр розподілу дорівнює нулеві, так як щільність $\varphi_0(x)$ є парна функція

$$M\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

Випадкова величина ξ із загальним нормальним розподілом (13.44) може бути виражена через випадкову величину ξ_0 , як було показано раніше: $\xi = a + \sigma\xi_0$.

Тому

$$M\xi = a + \sigma M\xi_0 = a.$$

Таким чином, *центр загального нормального розподілу дорівнює його параметрові a* (що дозволяє з'ясувати зміст цього параметра і цілком погодиться із симетрією кривої нормального розподілу відносно прямої $x=a$).

Зауваження. Якщо крива розподілу ймовірностей симетрична щодо деякої прямої $x=a$, то центр розподілу завжди збігається з точкою a .

13. Характеристики розсіювання випадкової величини. Поняття про моменти розподілу

Розсіювання випадкової величини ξ зв'язано з відхиленням $\xi - a$ цієї величини від її центру розподілу $a = M\xi$. Безпосереднє осереднення цього відхилення не може дати числової характеристики розсіювання, так як

$$M(\xi - a) = M\xi - a = 0,$$

тобто відхилення протилежних знаків у середньому взаємно гасяться.

Основною числовою характеристикою розсіювання випадкової величини ξ є середнє квадратичне відхилення σ , яке визначається по формулі

$$\sigma = \sigma(\xi) = \sqrt{M(\xi - a)^2}, \quad \text{де } a = M\xi. \quad (13.77)$$

Середнє значення квадрата відхилення, яке стоїть під коренем $M(\xi - a)^2$ носить спеціальну назву *дисперсії випадкової величини ξ* і позначається через $D\xi$:

$$D\xi = M(\xi - a)^2 = \sigma^2(\xi).$$

Користуючись формулами (13.71) і (13.72), запишемо формули для дисперсій дискретних і безперервних випадкових величин у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma^2(\xi) &= \sum (x_k - a)^2 p_k; \\ \sigma^2(\xi) &= \int (x - a)^2 \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

(Тут доречно продовжити механічну аналогію, зазначену раніше. Якщо тлумачити p_1, p_2, \dots, p_v , як маси, які зосереджені в точках x_1, x_2, \dots, x_v осі x , то дисперсію

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^v (x_k - a)^2 p_k$$

можна розглядати як центральний момент інерції цієї системи матеріальних точок (щодо центра ваги a)).

З написаних формул видно, що середнє квадратичне відхилення має ту ж розмірність, що і значення випадкової величини.

Основні правила обчислень середніх квадратичних відхилень і дисперсій

1) Якщо ξ - випадкова величина, а C - стала, то

$$\sigma(C\xi) = |C| \sigma(\xi); \quad (13.78)$$

$$\sigma(\xi + C) = \sigma(\xi). \quad (13.79)$$

Ці формули доводяться безпосереднім підрахунком дисперсій: $\sigma^2(C\xi) = M(C\xi - MC\xi)^2 = M(C\xi - Ca)^2 = C^2 M(\xi - a)^2 = C^2 \sigma^2(\xi)$; $\sigma^2(\xi + C) = M[(\xi + C) - M(\xi + C)]^2 = M[(\xi + C) - M(a + C)]^2 = M(\xi - a)^2 = \sigma^2(\xi)$.

2) Якщо ξ і η — незалежні випадкові величини, то дисперсія їхньої суми дорівнює сумі їхніх дисперсій

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) \quad (13.80)$$

(теорема додавання дисперсій) і, отже,

$$\sigma(\xi + \eta) = \sqrt{\sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta)}.$$

Доведення формули (13.80). Позначимо

$$M(\xi) = a; \quad M(\eta) = b;$$

тоді

$$M(\xi + \eta) = a + b,$$

і тому

$$\sigma^2(\xi + \eta) = M[(\xi + \eta) - M(a + b)]^2 = M[(\xi - a)^2 + 2(\xi - a)(\eta - b) + (\eta - b)^2].$$

У силу лінійності математичного очікування маємо:

$$\sigma^2(\xi + \eta) = M(\xi - a)^2 + 2M(\xi - a)(\eta - b) + M(\eta - b)^2.$$

Так як за умовою випадкові величини ξ і η незалежні, то можна застосувати теорему множення математичних очікувань:

$$\mathbf{M}(\xi-a)(\eta-b) = \mathbf{M}(\xi-a)\mathbf{M}(\eta-b).$$

Але, як було показано вище,

$$\mathbf{M}(\xi-a) = 0,$$

і тому

$$\mathbf{M}(\xi-a)(\eta-b) = 0,$$

що і приводить до формули (13.80).

Теорема додавання дисперсій без труднощів узагальнюється на будь-яке число попарно незалежних випадкових величин.

Слідство. Дисперсія лінійної комбінації попарно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ може бути обчислена по формулі $\sigma^2 = (C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + \dots + C_n\xi_n) = C_1^2\sigma^2(\xi_1) + C_2^2\sigma^2(\xi_2) + \dots + C_n^2\sigma^2(\xi_n)$. Це безпосередньо випливає з формул (13.80) і (13.78).

Зокрема, якщо усі величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ мають ту саму дисперсію

$$\sigma^2(\xi_k) = \sigma^2 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

то дисперсія їх середньої арифметичної дорівнює

$$\sigma^2\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}[\sigma^2(\xi_1) + \sigma^2(\xi_2) + \dots + \sigma^2(\xi_n)] = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Отже, середнє квадратичне відхилення її дорівнює

$$\sigma\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (13.81)$$

Остання формула відіграє велику роль при обробці результатів вимірів.

Приклади.

1. *Середнє квадратичне відхилення відносної частоти.* Як показує формула (13.29), відносна частота ω_n є середнє арифметичне з взаємно незалежних характеристичних випадкових величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ з однаковими таблицями розподілу (13.27):

$$\omega_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n},$$

де

λ_n	1	0
	p	q

$$p+q=1 \quad (k=1, 2, \dots,)$$

Підрахуємо безпосередньо дисперсію величини λ_k , з огляду на те, що центр розподілу її ймовірностей дорівнює p :

$$\sigma^2(\lambda_k) = \mathbf{M}(\lambda_k p)^2 = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq.$$

Звідси знаходимо середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(\lambda_k) = \sqrt{pq} \quad (k=1, 2, \dots,)$$

За допомогою формули (13.81) тепер одержуємо:

$$\sigma(\omega_n) = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}. \quad (13.82)$$

Звідси за допомогою формули (13.78) можна знайти також

$$\sigma(\mu_n) = \sigma(n\omega_n) = n\sigma(\omega_n) = \sqrt{npq}.$$

2. *Середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ , яка рівномірно розподілена в інтервалі $(\alpha_1; \alpha_2)$.* Центр розподілу ми вже знайшли раніше:

$$a = \mathbf{M}\xi = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}.$$

Підрахуємо тепер дисперсію безпосередньо:

$$\sigma^2(\xi) = \mathbf{M}\left(\xi - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(x - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right)^2 \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} dx = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{12}$$

Звідси знаходимо, що середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(\xi) = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2\sqrt{3}}$$

пропорційне довжині інтервалу $(\alpha_1; \alpha_2)$ (і складає біля третини цієї довжини).

3. *Дисперсія нормального розподілу.* Для випадкової величини ξ_0 з найпростішим нормальним розподілом ймовірностей (13.40) центр $\mathbf{M}\xi_0 = 0$, і тому дисперсія дорівнює

$$\mathbf{D}\xi_0 = \mathbf{M}\xi_0^2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1. \quad (13.83)$$

(Інтеграл цей зручно обчислювати методом інтегрування по частинам:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[-x e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1).$$

Для випадкової величини $\xi_0 = a + \sigma \xi_0$ із загальним нормальним розподілом (13.44) дисперсія дорівнює

$$D\xi = D(a + \sigma \xi_0) = \sigma^2 D\xi_0 = \sigma^2.$$

Звідси випливає, що $\sigma(\xi) = \sigma$. Разом з раніше установленою формулою $M\xi = a$ це дозволяє цілком з'ясувати зміст параметрів a і σ загального нормального розподілу (13.44): a є центр розподілу, σ^2 — дисперсія. Рис. 13.6 наочно ілюструє роль параметра σ як характеристики розсіювання випадкової величини із загальним нормальним розподілом імовірностей (при $a=0$).

Мінімальна властивість центра

Середній квадрат відхилення випадкової величини ξ від центра розподілу $a = M\xi$ менше, ніж середній квадрат її відхилення від будь-якого іншого числа:

$$M(\xi - a)^2 < M(\xi - C)^2 \quad (C \neq a).$$

Доведення. Так як

$$M(\xi - a) = 0,$$

то

$$M(\xi - C)^2 = M[(\xi - a) + (a - C)]^2 = M(\xi - a)^2 + 2(a - C)M(\xi - a) + (a - C)^2 = M(\xi - a)^2 + (a - C)^2 \quad (13.84)$$

і, виходить,

$$M(\xi - C)^2 \geq M(\xi - a)^2,$$

причому знак рівності досягається тільки при $(a - C)^2 = 0$, тобто при $C = a$. Доведена властивість указує на важливий зв'язок між центром розподілу і дисперсією: центр розподілу мінімізує середній квадрат відхилення $M(\xi - C)^2$ причому мінімум цього середнього квадрата відхилення дорівнює самій дисперсії $\sigma^2(\xi)$.

Отримана нами формула (13.84) часто застосовується для обчислення дисперсій. Зокрема, при $C=0$ ця формула дає:

$$\sigma^2 \xi = M(\xi - a)^2 = M\xi^2 - a^2. \quad (13.85)$$

Для прикладу обчислимо дисперсію розподілу Пуассона (13.23). Тут простіше спочатку підрахувати $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = M\xi(\xi - 1) + M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) \frac{a^m}{m!} e^{-a} + a = a^2 e^{-a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^{m-2}}{(m-2)!} + a = a^2 + a$$

а потім знайти дисперсію

$$\sigma^2(\xi) = M(\xi)^2 - a^2 = (a^2 + a) - a^2 = a.$$

Корисно помітити, що в розподілі Пуассона і центр розподілу і дисперсія збігаються зі значеннями параметра a .

Поняття про моменти розподілу.

Розглянуті вище дві основні характеристики розподілу — центр розподілу $M\xi = a$ і дисперсія $M(\xi - a)^2 = \sigma^2$ — являють собою окремі випадки моментів розподілу, уведених відомим російським математиком П. Л. Чебишевим для дослідження законів розподілу ймовірностей.

Початковим моментом порядку k називається математичне очікування k -го степеня випадкової величини, тобто $M\xi^k$.

Центральним моментом порядку k називається математичне очікування k -го степеня відхилення випадкової величини від її центра розподілу, тобто $M(\xi - a)^k$.

Між початковими і центральними моментами існують прості залежності, які легко встановлюються за допомогою бінома Ньютона. Наприклад:

$$M(\xi - a)^2 = M\xi^2 - 2aM\xi + a^2 = M\xi^2 - a^2;$$

$$M(\xi - a)^3 = M\xi^3 - 3aM\xi^2 + 3a^2M\xi - a^3 = M\xi^3 - 3aM\xi^2 + 2a^2$$

і т.д. Перша з цих формул збігається з формулою (13.85). Вище було відзначено, що моменти першого і другого порядків $M\xi$ і $M(\xi - a)^2$ характеризують центр розташування і розсіювання випадкової величини ξ . Центральний момент третього порядку $M(\xi - a)^3$ застосовується для характеристики *асиметрії розподілу*. Якщо крива розподілу симетрична відносно прямої $x = a$, то центральний момент третього порядку (як і узагалі всі центральні моменти непарних порядків) буде дорівнювати нулеві. (Це впливає з того, що при зазначеній умові щільність розподілу $\psi(y)$ випадкової величини $\eta = \xi - a$ (відхилення) буде парною функцією і, виходить, усі добутки $y^{2k+1}\psi(y)$ будуть непарними функціями). Тому, якщо центральний момент третього порядку відмінний від нуля, то розподіл не може бути симетричним. Величину асиметрії характеризують, зазвичай, безрозмірним *коєфіцієнтом асиметрії*

$$C_s = \frac{M(\xi - a)^3}{\sigma^3(\xi)}.$$

Знак коєфіцієнта асиметрії вказує на правосторонню або лівосторонню асиметрію (рис. 13.17).

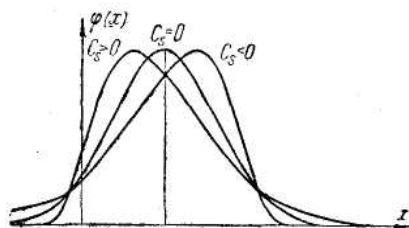


Рис. 13.17.

13.5. Граничні теореми і оцінки середніх

Для оцінки відносних частот і деяких інших середніх величин вирішальне значення має та обставина, що розподіл ймовірностей цих величин прагне до нормального розподілу. Для доведення відповідних граничних теорем відомий російський математик А. М. Ляпунов розробив досить могутній метод характеристичних функцій, який дозволив йому довести так звану центральну граничну теорему. Перш ніж приводити граничні теореми, повідомимо тут необхідні відомості про характеристичні функції.

14. Поняття про характеристичні функції

Характеристичною функцією $f(u)$ випадкової величини ξ називається математичне очікування величини $e^{iu\xi}$;

$$f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi}, \tag{13.86}$$

де u — дійсний параметр.

Для дискретної випадкової величини

$$f(u) = \sum e^{iux} k \bar{p}_k \tag{13.87}$$

де p_k є ймовірність значення x_k і сума береться за всіма значеннями x_k величини ξ . Для безперервної випадкової величини

$$f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} \varphi(x) dx \tag{13.88}$$

де $\varphi(x)$ — щільність розподілу величини ξ . Інтеграл (13.88) завжди сходиться, і притому абсолютно, так як

$$|e^{iux} \varphi(x)| = \varphi(x),$$

а інтеграл від $\varphi(x)$ сходиться; при цьому

$$|f(u)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Основні властивості характеристичних функцій

1. Характеристична функція однозначно визначає розподіл ймовірностей випадкової величини. Іншими словами, якщо дві

випадкові величини мають однакові характеристичні функції, то вони мають також і однакові розподіли ймовірностей.

2. Якщо характеристична функція $f(u)$ безперервної випадкової величини ξ є границею послідовності характеристичних функцій $f_n(u)$ яких завгодно випадкових величин $\xi_n (n=1, 2, 3, \dots)$, то функція розподілу $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$ є границею послідовності функцій розподілу

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\};$$

таким чином, з

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u)$$

випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

для всіх x .

Ця властивість важлива тим, що в багатьох випадках граничний перехід у послідовності характеристичних функцій здійснюється простіше, ніж у послідовності функцій розподілу. Тому доведення граничних теорем за допомогою характеристичних функцій виявляється в цих випадках більш коротким і простим.

Зазначені вище властивості ми приймемо без доведення.

3. Характеристична функція суми незалежних випадкових величин дорівнює добуткові характеристичних функцій доданків.

Доведемо цю властивість для двох незалежних випадкових величин ξ і η с характеристичними функціями $f_\xi(u)$ і $f_\eta(u)$.

Так як випадкові величини $e^{iu\xi}$ і $e^{iu\eta}$ також будуть незалежними, то для обчислення характеристичної функції $f_{\xi+\eta}(u)$ для суми $\xi+\eta$ можна застосувати теорему множення математичних очікувань

$$f_{\xi+\eta}(u) = \mathbf{M}e^{iu(\xi+\eta)} = \mathbf{M}e^{iu\xi} e^{iu\eta} = \mathbf{M}e^{iu\xi} \mathbf{M}e^{iu\eta},$$

тобто

$$f_{\xi+\eta}(u) = f_\xi(u) f_\eta(u). \tag{13.89}$$

Таким чином, знаходження характеристичної функції суми незалежних випадкових величин простіше, ніж знаходження відповідного розподілу ймовірностей (яке зводиться до згортки щільностей розподілу доданків).

4. При лінійному перетворенні випадкової величини, тобто при переході від випадкової величини ξ до випадкової величини $\eta = A + B\xi$, характеристична функція перетвориться по формулі

$$f_\eta(u) = e^{iAu} f_\xi(Bu). \tag{13.90}$$

Ця формула перевіряється безпосередньо:

$$\mathbf{M}e^{iu\eta} = \mathbf{M}e^{iu(A+B\xi)} = e^{iAu} \mathbf{M}e^{i(Bu)\xi}$$

Приклади характеристичних функцій:

1) Для випадкової величини λ

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ p & q \end{matrix}$$

характеристична функція легко підраховується по формулі (13.87):

$$f_\lambda(u) = e^{iu^1}p + e^{iu^0}q = pe^{iu} + q.$$

2) Частота випадкової події є сума

$$\mu_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n,$$

де всі λ_k незалежні і мають той самий розподіл

$$\lambda_k \begin{matrix} 1 & 0 \\ p & q \end{matrix}$$

($k=1, 2, \dots, n$). Характеристичну функцію частоти μ_n підраховуємо по властивості 3:

$$f_{\mu_n}(u) = f_{\lambda_1}(u)f_{\lambda_2}(u)\dots f_{\lambda_n}(u) = (pe^{iu} + q)^n. \quad (13.91)$$

3) Відносна частота випадкової події є

$$\omega_n = \frac{\mu_n}{n};$$

характеристичну функцію її підраховуємо по формулах (13.90) і (13.91):

$$f_{\omega_n}(u) = f_{\mu_n}\left(\frac{u}{n}\right) = (pe^{i\frac{u}{n}} + q)^n.$$

4) Випадкова величина, яка рівномірно розподілена в інтервалі $(-a; a)$, має щільність

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (-a < x < a), \\ 0 & (|x| > a). \end{cases}$$

Її характеристичну функцію підраховуємо по формулі (13.88)

$$f(u) = \int_{-a}^a e^{iux} \frac{1}{2a} dx = \frac{e^{iua} - e^{-iua}}{2aiu} = \frac{\sin au}{au}. \quad (13.92)$$

5) Випадкова величина ξ_0 з найпростішим нормальним розподілом (13.40) має характеристичну функцію

$$f_0(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (13.93)$$

(Обчислення інтеграла (13.93) ми пропускаємо.)

Випадкова величина ξ с загальним нормальним розподілом (13.44) зв'язана з випадковою величиною ξ_0 лінійною залежністю $\xi = a + \sigma\xi_0$. Її характеристичну функцію підраховуємо по формулах (13.93) і (13.90):

$$f(u) = e^{ia u} f_0(\sigma u) = e^{ia u} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}. \quad (13.94)$$

Звідси випливає, зокрема, що якщо взаємно незалежні випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ мають загальні нормальні розподіли з центрами a_1, a_2, \dots, a_n і дисперсіями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$, то їх сума має нормальний розподіл з центром $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ і дисперсією

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2;$$

дійсно, з

$$f_k(u) = e^{ia_k u} e^{-\frac{\sigma_k^2 u^2}{2}}$$

($k = 1, 2, \dots, n$) впливає

$$f(u) = f_1(u)f_2(u)\dots f_n(u) = e^{ia u} e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

Зв'язок між характеристичною функцією і моментами розподілу

Так як характеристична функція $f(u)$ однозначно визначає розподіл ймовірностей випадкової величини ξ , то всі моменти розподілу можуть бути виражені через характеристичну функцію. Для одержання цих виражень ми продиференціюємо рівність

$$f(u) = \mathbf{M}e^{iu\xi}$$

формально по u (під знаком математичного очікування, тобто під знаком суми або інтеграла). Ми одержимо послідовно

$$f'(u) = \mathbf{M}i\xi e^{iu\xi},$$

$$f''(u) = \mathbf{M}(i\xi)^2 e^{iu\xi},$$

$$\dots$$

$$f^{(k)}(u) = \mathbf{M}(i\xi)^k e^{iu\xi}.$$

Можна довести, що таке диференціювання законне, якщо випадкова величина ξ має моменти до k -го порядку включно. Покладаючи в отриманих формулах $u=0$, знаходимо зв'язок між похідними характеристичної функції в нулі і початковими моментами:

$$f(0) = \mathbf{M}1 = 1,$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= i\mathbf{M}\xi, \\ f''(0) &= -\mathbf{M}\xi^2, \\ \dots\dots\dots \\ f^{(k)}(0) &= i^k \mathbf{M}\xi^k. \end{aligned}$$

У додатках зустрічаються також похідні від логарифма характеристичної функції: $\psi(u) = \ln f(u)$.

Число $i^k \psi^{(k)}(0)$ називається *семиінваріантом* k -го порядку випадкової величини ξ .

Легко перевірити, що

$$i\psi'(0) = -\mathbf{M}\xi; \quad i^2\psi''(0) = \sigma^2(\xi).$$

Семиінваріанти відіграють велику роль при розгляді сум незалежних випадкових величин, так як при додаванні незалежних випадкових величин їх семиінваріанти теж складаються.

15. Гранична теорема Муавра — Лапласа; оцінка відносних частот

У цьому пункті ми розглянемо граничний розподіл відносної частоти випадкової події при необмеженому збільшенні числа іспитів. Як відомо з п.8, розподіл відносної частоти ω_n для повторної вибірки є біноміальним, тобто

$$\mathbf{P}\{\omega_n = m/n\} = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m=0, 1, 2, \dots, n), \quad (13.95)$$

де n — число (незалежних) іспитів, p — ймовірність розглянутої події в кожному іспиті. Якщо число іспитів велике, то розрахунок ймовірностей по формулі (13.95) стає досить важким. Характер утруднень стане ще більш ясним, якщо врахувати, що в практичних додатках нас цікавить не ймовірність окремої рівності

$$\omega_n = m/n,$$

а ймовірність нерівності

$$|\omega_n - p| < \varepsilon,$$

яка оцінює відхилення відносної частоти ω_n від її ймовірної границі. Ймовірність зазначеної нерівності дорівнює сумі

$$\sum C_n^m p^m q^{n-m},$$

розповсюдженої на ті значення m , для яких

$$|(m/n) - p| < \varepsilon,$$

тобто на значення m , які заключені між $np - n\varepsilon$ і $np + n\varepsilon$. Виникаючі тут обчислювальні труднощі пояснимо прикладом. Нехай нас цікавить ймовірність того, що при 10 000 іспитів відхилення відносної частоти події від його ймовірності $p=0,2$ не перевершить $\varepsilon=0,01$. Тут $n=10000$, $np=2000$, $q=0,8$, і для точного

підрахунку цікавлячої нас ймовірності нам доведеться обчислити суму більш двохсот доданків вигляду

$$\frac{10000!}{m!(10000 - m)!} (0,2)^m (0,8)^{10000 - m}$$

для m від $np - n\varepsilon = 1900$ до $np + n\varepsilon = 2100$. Безпосереднє обчислення суми зі скільки-небудь задовільною точністю вимагає застосування обчислювальної техніки. Тому виникла задача наближеного підрахунку ймовірностей за допомогою заміни точного біноміального розподілу величини ω_n , деяким граничним безперервним розподілом. (Обчислення ймовірностей нерівностей у безперервному розподілі зводиться до обчислення інтеграла, що зазвичай значно простіше, ніж обчислення сум для дискретного розподілу.)

Зазначена задача була успішно розв'язана Муавром для часткового випадку $p=q=1/2$, а потім Лапласом для загального випадку будь-якого p , $0 < p < 1$. Виявляється, що для біноміального розподілу існує граничний (при $n \rightarrow \infty$) розподіл і цей граничний розподіл є нормальним.

Для зручності формулювання відповідної теореми попередньо пронормуємо відносну частоту ω_n .

Нормуванням випадкової величини ξ називається лінійне перетворення її в нову величину

$$\xi_0 = (\xi - \mathbf{M}\xi) / \sigma(\xi).$$

Це перетворення зводиться до переносу початку відліку в центр розподілу ($\mathbf{M}\xi$) і вибору в якості одиниці масштабу середнього квадратичного відхилення $\sigma(\xi)$.

Нормовану відносну частоту позначимо через τ_n

$$\tau_n = (\omega_n - \mathbf{M}\omega_n) / \sigma(\omega_n) = \frac{\omega_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}. \quad (13.96)$$

Теорема Муавра - Лапласа

При необмеженому збільшенні числа іспитів граничним розподілом ймовірностей нормованої відносної частоти випадкової події є найпростіший нормальний розподіл, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\tau_n| < t\} = \Phi(t), \quad (13.97)$$

де $\Phi(t)$ є інтеграл ймовірностей (13.41).

Ця теорема є частковим випадком більш загальної теореми, яку ми доведемо далі. Тут же ми вкажемо лише характер застосувань теореми Муавра — Лапласа.

Застосування теореми Муавра — Лапласа до оцінки відносних частот

Теорема Муавра — Лапласа дозволяє оцінити ймовірність нерівності $|(\omega_n - p)| < \varepsilon$ при досить великих n (і при значеннях p , не занадто близьких до 0 або 1). Візьмемо настільки велике n , щоб з задовольняючою нас точністю можна було вважати, що

$$\mathbf{P}\{|\tau_n| < t\} \approx \Phi(t), \tag{13.98}$$

Тоді з рівносильності нерівностей

$$|(\omega_n - p)| < \varepsilon \quad \text{і} \quad |\tau_n| = \left| \frac{\omega_n - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \right| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{pq}}$$

впливає, що ймовірність цікавлячих нас нерівності $|(\omega_n - p)| < \varepsilon$ приблизно дорівнює інтегралові ймовірностей

$$\mathbf{P}\{|\omega_n - p| < \varepsilon\} \approx \Phi(t),$$

де
$$t = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \tag{13.99}$$

Приклади. Поняття про довірчі оцінки.

Для числового приклада, який приведено на початку цього пункту, $p=0,2$; $q=0,8$; $n=10\,000$ і $\varepsilon=0,01$. Ймовірність цікавлячої нас нерівності $|(\omega_n - 0,2)| < 0,01$ обчислюємо приблизно по формулі (13.99):

$$t = \frac{0,01 \sqrt{10000}}{\sqrt{0,2 \cdot 0,8}} = 2,5;$$

$$\mathbf{P}\{|\omega_n - 0,2| < 0,01\} \approx \Phi(2,5) = 0,988.$$

Тут наближена формула вірна до третього знака, що пояснюється досить великим значенням n (10 000).

Помітимо, що якщо число n має порядок лише декількох сотень (причому np і nq все ж значно більше 1), то замість

формули (13.99) рекомендується застосовувати трохи більш точну формулу

$$\mathbf{P}\{|\omega_n - p| \leq (k/n)\} \approx \Phi\left(\frac{k + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) \quad (k - \text{ціле}).$$

Яка точність цієї останньої формули, покажемо на прикладах.

1) $p=1/2$; $n=200$; $k=5$; $\mathbf{P}\{|\omega_n - (1/2)| \leq (5/200)\} = 0,56331$;

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0,14142; \quad \Phi\left(\frac{5,5}{\sqrt{npq}}\right) = 0,56331.$$

2) Для несиметричного інтервалу точність менше; наприклад при $p=0,1$; $n=500$; $k=5$; $\mathbf{P}\{0,1 \leq \omega_n \leq 0,11\} = 0,3176$;

$$\frac{1}{\sqrt{npq}} = \frac{1}{\sqrt{45}} = 0,1491; \quad \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{5,5}{\sqrt{npq}}\right) - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{-0,5}{\sqrt{npq}}\right) = 0,3235.$$

Тут розрахунок ведемо по формулі типу (13.42).

Якщо вважати ймовірність $P=0,988$ близькою до одиниці, то можна бути практично упевненим у тому, що $|(\omega_n - 0,2)| < 0,01$, тобто що при десятих тисячах іспитів за схемою повторної вибірки відносна частота випадкової події відхилиться від його імовірності $p=0,2$ менше чим на 0,01. Ймовірність 0,988 у цьому випадку називається «надійністю» оцінки

$$|\omega_n - 0,2| < 0,01$$

а сама ця оцінка називається довірчою оцінкою відносної частоти ω_n з надійністю 0,988. На практиці надійність оцінки задається заздалегідь відповідно до призначеної границі «дуже малих ймовірностей». Наприклад, якщо ми вирішили зневажити можливість появи події з імовірністю 0,001, то призначаємо надійність

$$P = 1 - 0,001 = 0,999.$$

По заданій надійності P знаходимо відповідне значення $t=t(P)$ з рівняння $\Phi(t)=P$ за допомогою таблиць інтеграла ймовірностей; наприклад, для $P=0,999$ знаходимо $t=3,29$.

Тоді довірча оцінка з заданою надійністю P приймає вигляд

$$|\omega_n - p| < \varepsilon, \quad \text{де} \quad \varepsilon = t(P) \sqrt{\frac{pq}{n}}. \tag{13.100}$$

Нерівність (13.100) означає, що відносна частота ω_n із заданою надійністю P повинна лежати в інтервалі

$$(p-\varepsilon, p+\varepsilon), \text{ де } \varepsilon=t(P)\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Такий інтервал називається «довірчим інтервалом».

Для розглянутого вище прикладу довірна оцінка відносної частоти з надійністю $P=0,999$ буде:

$$|\omega_n-0,20|<3,29 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{10000}} = 0,0132$$

Це значить, що з надійністю $P=0,999$ ми можемо очікувати, що відносна частота ω_n буде лежати в довірчому інтервалі (0,1868; 0,2132). Для частоти $\mu_n=n\omega_n$ довірчий інтервал буде відповідно в n раз більше: $1868<\mu_n<2132$ (при $n=10\,000$).

Практична цінність довірчих інтервалів полягає не тільки в можливості заздалегідь прогнозувати границі частот (або границі відносних частот). Якщо іспити зроблені в дійсності і при цьому виявилось, що фактична частота вийшла за довірчі границі, то це змушує нас узяти під сумнів правильність обчислення ймовірності цікавлячої нас випадкової події. Така постановка питання виявляється корисною, наприклад, у справі регулювання масового виробничого процесу. Пояснимо це наступним схематичним прикладом. Нехай автоматична обробка деякої деталі відрегульована так, що частка нестандартних деталей не перевищує 1%. Для того щоб перевірити, чи не відбувається збільшення цієї частки, тобто чи не відбувається порушення встановленого процесу, можна зробити вибірку перевірку. При вибірці в n деталей (Вибірка повинна бути випадковою і повторною. Але якщо обсяг вибірки дуже малий у порівнянні з обсягом усієї партії деталей, то і для неповторної вибірки зазначені формули дають досить гарну точність.) частота $\mu_n=n\omega_n$ нестандартних деталей повинна лежати в довірчому інтервалі

$$n(p-\varepsilon)<\mu_n<n(p+\varepsilon),$$

тобто не повинна перевищувати числа $np+n\varepsilon$, де

$$\varepsilon=t(P)\sqrt{\frac{pq}{n}},$$

P —задана надійність, p —передбачувана ймовірність одержання нестандартної деталі.

Якщо, наприклад, $p=0,01$ ($=1\%$), $n=1000$ і $P=0,999$, то $np=10$; $t=3,29$; $n\varepsilon=3,29\sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = 10,4$; $np+n\varepsilon=20,4$ і, виходить, кількість нестандартних деталей у вибірці не повинна перевищувати двадцяти. Якщо ж у зробленій вибірці кількість нестандартних деталей виявиться більше двадцяти, то треба зробити висновок, що виробничий процес порушено і частка нестандартних деталей перевищила допуск у 1%.

16. Довірчі оцінки середніх. Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова

Нормальність граничного розподілу в теоремі Муавра — Лапласа зв'язана не з якими-небудь специфічними властивостями біноміального розподілу, а лише з тією обставиною, що відносна частота ω_n є середня арифметична для незалежних випадкових величин $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ця теорема допускає безпосереднє узагальнення на середні арифметичні для будь-якої послідовності незалежних випадкових величин з однаковими розподілами ймовірностей (у припущенні кінцевості їхнього центра і дисперсії). Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — послідовність взаємно незалежних випадкових величин, кожна з яких має один і той же розподіл ймовірностей з центром $M\xi_{до} = a$ і дисперсією

$$M(\xi_k - a)^2 = \sigma^2 \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Утворимо середні арифметичні для перших n величин:

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n};$$

для зручності формулювання відповідної теореми введемо ще нормовані середні (або нормовані суми):

$$\tau_n = \frac{\bar{\xi}_n - M\bar{\xi}_n}{\sigma(\bar{\xi}_n)} = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) - M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}{\sigma(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)}. \quad (13.101)$$

У силу незалежності випадкових величин ξ_k маємо

$$M\bar{\xi}_n = a; \quad \sigma(\bar{\xi}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тому

$$\tau_n = \frac{\bar{\xi}_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) - na}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Теорема. Граничним (при $n \rightarrow \infty$) розподілом нормованих середніх (13.101) є нормальний розподіл, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\tau_n| < t\} = \Phi(t), \quad (13.102)$$

де $\Phi(t)$ — інтеграл ймовірностей (13.41).

Доведення цієї теореми проведемо методом характеристичних функцій, причому обмежимося безперервними випадковими величинами. Позначимо через $\varphi(x)$ щільність розподілу для нормованої випадкової величини

$$\xi_k^{(0)} = \frac{\xi_k - a}{\sigma}$$

(ця щільність за умовою одна і та ж для усіх величин ξ_k). При цьому

$$\int \varphi(x) dx = 1, \\ \int x \varphi(x) dx = \mathbf{M} \xi_k^{(0)} = \frac{M(\xi_k - a)}{\sigma} = 0, \\ \int x^2 \varphi(x) dx = \mathbf{M} [\xi_k^{(0)}]^2 = \frac{M(\xi_k - a)^2}{\sigma^2} = 1.$$

Позначимо, далі, через $f(u)$ характеристичну функцію загальну для всіх нормованих величин $\xi_k^{(0)}$

$$f(u) = \int e^{iux} \varphi(x) dx.$$

Розглянемо тепер послідовність характеристичних функцій $f_n(u)$ для випадкових величин τ_n . Виразимо $f_n(u)$ через $f(u)$ для чого спочатку виразимо величину τ_n через $\xi_k^{(0)}$

$$\tau_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(\xi_1 - a) + (\xi_2 - a) + \dots + (\xi_n - a)}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\xi^{(0)}_1 + \xi^{(0)}_2 + \dots + \xi^{(0)}_n) \quad (13.101)$$

Користуючись властивостями 3 і 4 характеристичних функцій і незалежністю випадкових величин $\xi_k^{(0)}$ знаходимо:

$$f_n(u) = \left[f\left(\sqrt{n} \frac{u}{\sigma}\right) \right]^n$$

тобто,

$$f_n(u) = \left[\int e^{i \frac{u}{\sqrt{n}} x} \varphi(x) dx \right]^n.$$

Розкладаючи, далі, підінтегральну функцію в ряд по степенях $1/\sqrt{n}$ і обмежуючись членами порядку $1/n$, одержуємо:

$$\int e^{i \frac{u}{\sqrt{n}} x} \varphi(x) dx = \int \left(1 + i \frac{u}{\sqrt{n}} x - \frac{u^2}{2n} x^2 + \dots \right) \varphi(x) dx =$$

$$\int \varphi(x) dx + i \frac{u}{\sqrt{n}} \int x \varphi(x) dx - \frac{u^2}{2n} \int x^2 \varphi(x) dx + \dots,$$

тобто

$$\int e^{i \frac{u}{\sqrt{n}} x} \varphi(x) dx = 1 - \frac{u^2}{2n} + \frac{\alpha_n}{n},$$

де $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Тепер легко знайти границю послідовності

$$f_n(u) = \left(1 - \frac{u^2}{2n} + \frac{\alpha_n}{n} \right)^2.$$

За відомими правилами математичного аналізу знаходимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Таким чином, послідовність характеристичних функцій $f_n(u)$ сходиться до характеристичної функції

$$f_0(u) = e^{-\frac{u^2}{2}}$$

найпростішого нормального розподілу. Звідси випливає, що послідовність функцій розподілу для нормованих середніх τ_n сходиться до функції розподілу найпростішого нормального закону, а це рівносильно твердженню (13.102).

Доведена теорема дозволяє одержати довірчі оцінки середніх, тобто знайти точність (ε) для нерівності

$$|\bar{\xi}_n - a| < \varepsilon$$

з заданою надійністю P . З цією метою ми заміняємо нерівність

$$|\bar{\xi}_n - a| < \varepsilon$$

рівносильною, а значить, і рівноймовірною йому нерівністю

$$\left| \frac{\bar{\xi}_n - a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \right| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma},$$

тобто

$$|\tau_n| < t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

Так як по доведеному

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\tau_n| < t\} = \Phi(t),$$

то при досить великому n ймовірність нерівності $|\tau_n| < t$ буде приблизно дорівнювати $\Phi(t)$.

Отже, ймовірність цікавлячих нас нерівностей

$$|\bar{\xi}_n - a| < \varepsilon$$

буде також приблизно дорівнювати $\Phi(t)$, де

$$t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$$

Задаючись тепер визначеною ймовірністю P , яку ми вважаємо досить близькою до 1, ми знаходимо по таблицях інтеграла ймовірностей значення $t=t(P)$, яке задовольняє рівнянню $\Phi(t)=P$, і одержуємо довірчу оцінку середньої $\bar{\xi}_n$:

$$|\bar{\xi}_n - a| < \varepsilon = t(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{13.103}$$

з надійністю P .

Відхилення дослідної середньої від математичного очікування.

Нехай нас цікавить одна випадкова величина ξ с центром a і дисперсією σ^2 і нехай для визначення її часткових значень виконується досить велике число n незалежних іспитів. Які б не були отримані при цьому дослідженні значення $x_1, x_2 \dots, x_n$ ми можемо з ймовірністю P стверджувати, що їхня середня арифметична

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

буде задовольняти нерівності

$$|\bar{x}_n - a| < t(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tag{13.104}$$

тобто буде лежати в довірчому інтервалі

$$(a-\varepsilon; a+\varepsilon),$$

де

$$\varepsilon = t(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Це твердження впливає з оцінки (13.103), якщо зв'язати з кожним k -м іспитом випадкову величину ξ_k з тим же розподілом ймовірностей, що й у ξ ; при цьому частковим значенням ξ_k буде x_k , а частковим значенням $\bar{\xi}_n$ буде \bar{x} (незалежність же випадкових величин ξ_k впливає з припущеної незалежності іспитів).

Відхилення вибіркової середньої від генеральної.

Якщо розглядати можливі значення ознаки у кожного елемента вибірки як випадкову величину з розподілом (13.62), то вибіркова середня \bar{x} буде значенням середньої арифметичної з зазначених величин. Тому вона буде задовольняти нерівності (13.104), де a є генеральна середня (як центр розподілу (13.62)), а

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - a)^2 \frac{M_1}{N} + (x_2 - a)^2 \frac{M_2}{N} + \dots + (x_v - a)^2 \frac{M_v}{N}}$$

Іншими словами, з ймовірністю P можна очікувати, що вибіркова середня \bar{x} відхилиться від генеральної середньої a не більше ніж на

$$t(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Довірча оцінка середньої може бути використана при контролі і регулюванні виробничого процесу, у якому потрібно підтримувати значення деякого параметра, наприклад розміру деталі, у визначених твердих границях допуску; якщо при вибірковій перевірці середніх яке-небудь середнє значення вийде за границі довірчого інтервалу

$$(a-\varepsilon; a+\varepsilon),$$

де

$$\varepsilon = t(P) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

то треба буде перевірити, чи не порушено установлений режим. Більш точна розробка подібних принципів призвела до створення спеціальних методів так названого «статистичного контролю якості».

Поняття про центральну граничну теорему Ляпунова

Вище ми установили, що нормальний розподіл ймовірностей є граничним для нормованих середніх або, що теж саме, для нормованих сум однаково розподілених доданків.

Центральна гранична теорема встановлює загальні умови, при яких граничним розподілом нормованих сум взаємно незалежних випадкових доданків буде нормальний розподіл. Ця проблема в загальній формі вперше була поставлена в дослідженнях П. Л. Чебишева, але отримані їм умови були досить обмежені. При досить загальних умовах центральна гранична теорема була доведена в 1900 р. А. М. Ляпуновим, у зв'язку з чим ця теорема і має його ім'я. Ляпунов довів достатність наступних двох умов:

а) усі випадкові доданки мають кінцеві абсолютні центральні моменти третього порядку

$$M|\xi_k - a_k|^3 \quad (a_k = M\xi_k; \quad k=1, 2, \dots);$$

б) відношення

$$\frac{\sum_{k=1}^n M|\xi_k - a_k|^3}{\left[\sum_{k=1}^n \sigma^2(\xi_k)\right]^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (13.105)$$

Помітимо, що для однаково розподілених доданків умова б) виконується автоматично, так як при цьому відношення (13.105) приймає вигляд

$$\frac{nM|\xi - a_k|^3}{[n\sigma^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{M|\xi - a_k|^3}{\sigma^3}.$$

Зміст умов Ляпунова укладається в «граничному нехтуванні» окремими доданками при утворенні суми, у рівномірному малому впливі на суму кожного окремого доданка.

Це ще виразніше видно в трохи більш загальних умовах Ліндеберга, у яких потребується рівномірна малість ймовірностей великих відхилень $|\xi_k - a_k|$ у порівнянні з дисперсією суми

$$\sigma^2(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

Грубо говорячи, серед доданків не повинно бути таких, можливі відхилення яких домінували б над можливими відхиленнями всіх інших.

Центральна гранична теорема Ляпунова дозволила пояснити широке поширення нормального закону розподілу в природі й у техніці тим, що розсіювання досліджуваних величин викликається дуже великою кількістю випадкових причин, вплив кожної з яких мізерно малий. З іншого боку, установлення точних умов

центральної граничної теореми дозволяє строго обмежити область застосовності нормального закону розподілу.

13.6. Лінійна кореляція

17. Про різні типи залежностей

Найбільш простим видом зв'язку між величинами є функціональна залежність, коли кожному значенню однієї величини відповідає цілком визначене значення іншої величини. Такий, наприклад, зв'язок між тиском і обсягом газу в судині при незмінній температурі. Якщо в задачі треба врахувати зміну тиску при одночасній зміні і обсягу і температури, то користуються поняттям функції декількох змінних; при цьому знову передбачається, що кожній сукупності значень незалежних змінних відповідає цілком визначене значення функції. Функціональні залежності вивчаються в математичному аналізі.

Але існують і такі зв'язки між фізичними величинами, які не можна віднести до типу функціональних залежностей. Такий, наприклад, зв'язок між опадами і врожаєм або зв'язок між товщиною снігового покриву узимку й обсягом стоку наступної поводи. Тут **кожному значенню однієї величини відповідає безліч можливих значень іншої величини**. Розсіювання цих можливих значень пояснюється впливом досить великої кількості додаткових факторів, від яких ми відволікаємося, вивчаючи зв'язок між даними величинами. При цьому на практиці найчастіше обмежуються вивченням зміни середніх характеристик однієї величини при зміні іншої. Пояснимо це наступним схематичним прикладом. Нехай 20 дослідів над величинами x і y дали результати, які представлені на рис. 13.18 кружечками.

Зміну величини y при зміні величини x можна характеризувати ламаною, яка з'єднує середні значення величини y для кожного значення величини x (наприклад, при $x=1$ маємо три значення $y=1; 2; 4$; середнє значення

$$\frac{1+2+3}{3} = 2\frac{1}{3}).$$

Залежність отриманих середніх від величини x є уже функціональною — **кожному значенню x відповідає цілком визначене середнє значення величини y** . (Корисно звернути увагу на те, що середня залежність величини x від величини y приводить уже до іншої функціональної залежності. Так, на рис. 13.19 для

того ж приклада, що і на рис. 13.18, ламана з'єднує середні значення величини x для кожного значення величини y (наприклад, при $y=5$ маємо чотири значення $x=4;5;6;7$; середнє значення

$$\frac{4+5+6+7}{4} = 5,5);$$

при цьому дві ламані (на рис. 13.18 і на рис. 13.19) помітно відрізняються одна від одної.)

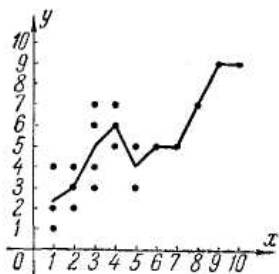


Рис. 13.18.

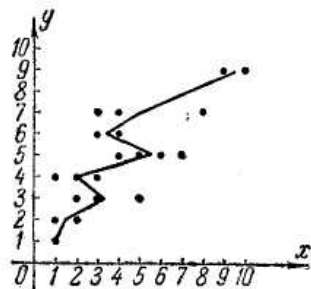


Рис. 13.19.

У застосуванні до випадкових величин описаний вище тип залежності приводить до поняття кореляції.

Визначення. Дві випадкові величини ξ і η знаходяться в кореляційній залежності, якщо кожному значенню кожної з цих величин відповідає визначений розподіл ймовірностей іншої величини. Зазначені розподіли ймовірностей називаються умовними.

У цьому розділі ми обмежимося вивченням різних середніх значень для умовних розподілів ймовірностей; зокрема, ми докладно розглянемо центри умовних розподілів.

18. Умовні математичні очікування і їхні властивості

Центр умовного розподілу величини η при значенні $\xi=x$ або умовне математичне очікування величини η при $\xi=x$ визначається як сума добутків можливих значень величини η на їхні умовні ймовірності:

$$M_x \eta = \sum_y y P\{\eta=y|\xi=x\}, \tag{13.106}$$

Де $P\{\eta=y|\xi=x\}$ є умовна ймовірність рівності $\eta=y$ за умови, що $\xi=x$, а сума

\sum_y береться за всіма значеннями величини η . Для безперервних розподілів ця сума замінюється відповідно інтегралом

$$M_x \eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi_x(y) dy, \tag{13.107}$$

де $\varphi_x(y)$ — щільність умовного розподілу ймовірностей величини η за умови, що $\xi=x$.

Умовне математичне очікування $M_x \eta$ є функція від x . Ця функція називається *функцією регресії величини η на величину ξ* ; позначимо її через $f(x)$:

$$f(x) = M_x \eta.$$

Рівняння $y=f(x)$ називається рівнянням регресії η на ξ , а відповідна лінія — лінією регресії η на ξ .

Находження і вивчення функції регресії є однією з основних задач аналізу кореляційної залежності. При розв'язанні цієї задачі для розглянутого далі випадку лінійної кореляції важливу роль грають формули

$$M \eta = M f(\xi), \tag{13.108}$$

$$M \xi \eta = M \xi f(\xi). \tag{13.109}$$

Останню формулу можна розглядати як узагальнення теореми множення математичних очікувань на залежні випадкові величини. Дійсно, застосовуючи загальне правило множення ймовірностей (13.113), одержуємо:

$$M \xi \eta = \sum_{x,y} (xy) P \left\{ \begin{matrix} \xi = x \\ i \\ \eta = y \end{matrix} \right\} = \sum_x \sum_y xy P\{\xi=x\} P\{\eta=y|\xi=x\},$$

де суми беруться по всіх можливих значеннях x і y величин ξ і η відповідно. Виконуючи внутрішнє підсумовування по y , ми можемо винести за знак суми \sum_y множник $x P\{\xi=x\}$ який не

залежний від y . Це дає

$$M \xi \eta = \sum_x x P\{\xi=x\} \sum_y y P\{\eta=y|\xi=x\},$$

Тобто

$$\mathbf{M}\xi\eta = \sum_x x \mathbf{P}\{\xi=x\} \mathbf{M}_x\eta = \sum_x x f(x) \mathbf{P}\{\xi=x\}, \quad (13.110)$$

що збігається з $\mathbf{M}\xi f(\xi)$.

Помітимо, що якщо величини ξ і η незалежні, то для всіх x тотожно виконується рівність

$$\mathbf{P}\{\eta=y|\xi=x\} = \mathbf{P}\{\eta=y\},$$

$$\mathbf{M}_x\eta = \mathbf{M}\eta.$$

і, виходить,

Тому для незалежних величин формула (13.109) переходить у більш просту формулу (13.69). Це ж положення буде мати місце й у більш загальному випадку, коли функція $f(x)$ стала. Дійсно, якщо $f(x)=0$, то по формулі (13.108)

$$\mathbf{M}\eta = \mathbf{M}b = b.$$

і по формулі (13.110):

$$\mathbf{M}\xi\eta = \sum_x x b \mathbf{P}\{\xi=x\} = b \mathbf{M}\xi = \mathbf{M}\xi \mathbf{M}\eta.$$

Формули (13.108) і (13.108) є окремими випадками більш загальної формули

$$\mathbf{M}u(\xi)\eta = \mathbf{M}u(\xi)f(\xi), \quad (13.111)$$

де $u(\xi)$ — будь-яка функція, для якої існує $\mathbf{M}u(\xi)\eta$.

Приведемо доведення формули (13.111) для того випадку, коли задано щільність $p(x; y)$ двовимірного розподілу величини $(\xi; \eta)$. Насамперед, ймовірність попадання в прямокутник

$$\begin{bmatrix} x < \xi < x + dx \\ y < \eta < y + dy \end{bmatrix}$$

може бути представлена як ймовірність сумісництва випадкових подій

$$(x < \xi < x + dx) \text{ і } (y < \eta < y + dy)$$

Загальне правило множення ймовірностей приводить тут до співвідношення між диференціалами:

$$p(x; y) dx dy = \psi_1(x) dx \varphi_x(y) dy, \quad (13.112)$$

де

$$\psi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x; y) dy$$

є щільність розподілу величини ξ , а $\varphi_x(y)dy$ є диференціал умовної ймовірності попадання величини η в інтервал $(y, y+dy)$ за

умови, що $\xi=x$. З формули (13.112) видно, що щільність умовного розподілу ймовірностей $\varphi_x(y)$ може бути виражена через щільності $p(x; y)$ і $\psi_1(x)$ так:

$$\varphi_x(y) = \frac{p(x; y)}{\psi_1(x)}.$$

Підставляючи цей вираз у формулу (13.107), одержуємо:

$$f(x) = \mathbf{M}_x\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{p(x; y)}{\psi_1(x)} dy.$$

Тепер простий розрахунок приводить до формули (13.111):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}u(\xi)f(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(x)f(x)]\psi_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\psi_1(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y \frac{p(x; y)}{\psi_1(x)} dy \right] dx = \\ &= \iint [u(x)y]p(x; y) dx dy = \mathbf{M}u(\xi)\eta. \end{aligned}$$

Формула (13.111) показує, що середнє значення будь-якої функції $u(\xi)\eta + v(\xi)$, лінійної відносно η , не змінюється при заміні величини η на функцію регресії f від ξ .

Звідси випливає ще одна важлива властивість функції регресії: середнє квадратичне відхилення величини η від функції $f(\xi)$ менше, ніж середнє квадратичне відхилення її від будь-якої іншої функції $h(\xi)$:

$$\sqrt{M[\eta - f(\xi)]^2} \leq \sqrt{M[\eta - h(\xi)]^2}. \quad (13.113)$$

Для доведення цього твердження позначимо

$$h(\xi) - f(\xi) = u(\xi)$$

і скористаємося властивістю лінійності математичного очікування: $\mathbf{M}[\eta - h(\xi)]^2 = \mathbf{M}[\eta - f(\xi) - u(\xi)]^2 = \mathbf{M}[\eta - f(\xi)]^2 + \mathbf{M}[u(\xi)]^2 - 2\mathbf{M}[\eta - f(\xi)]u(\xi)$. А так як в силу формули (13.111) останній доданок дорівнює нулеві

$$\mathbf{M}[\eta - f(\xi)]u(\xi) = \mathbf{M}\eta u(\xi) - \mathbf{M}f(\xi)u(\xi) = 0,$$

то

$$\mathbf{M}[\eta - h(\xi)]^2 = \mathbf{M}[\eta - f(\xi)]^2 + \mathbf{M}[\eta(\xi) - f(\xi)]^2. \quad (13.114)$$

звідки і випливає нерівність (13.113).

Підкреслимо, що властивість (13.111) відноситься тільки до лінійних відносно η функціям; середні значення нелінійних функцій можуть змінитися при заміні η на $f(\xi)$; наприклад, для дисперсій має місце нерівність

$$\sigma^2(\eta) = \mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta)^2 \geq \sigma^2[f(\xi)]. \quad (13.115)$$

Цю нерівність легко одержати зі співвідношення (13.114), покладаючи в ньому

$$h(\xi) = b = M\eta = Mf(\xi).$$

При цьому

$$M(\eta - b)^2 = M[\eta - f(\xi)]^2 - M[f(\xi) - b]^2 \geq \sigma^2[f(\xi)].$$

Вище ми визначили функцію регресії η на ξ . Зовсім аналогічно визначається функція регресії ξ на η :

$$M_y \xi = \sum_x x P\{\xi = x | \eta = y\} = g(y).$$

Варто мати на увазі, що якщо зв'язок між ξ і η не є строго функціональним, то функції $f(x)$ і $g(y)$ не є взаємно оберненими і, виходить, лінії регресії η на ξ і ξ на η не збігаються.

19. Лінійна кореляція

Означення. Кореляційна залежність між випадковими величинами ξ і η називається лінійною кореляцією, якщо обидві функції регресії $f(x)$ і $g(y)$ є лінійними. У цьому випадку обидві лінії регресії є прямими; вони називаються *прямими регресіями*.

Виведемо рівняння прямої регресії η на ξ , тобто знайдемо коефіцієнти лінійної функції

$$f(x) = Ax + B.$$

Позначимо

$$M\xi = a; M\eta = b; M(\xi - a)^2 = \sigma^2_1; M(\eta - b)^2 = \sigma^2_2.$$

Насамперед, за допомогою формули (13.108) знаходимо;

$$M\eta = Mf(\xi) = M(A\xi + B),$$

тобто

$$b = Aa + B,$$

звідки

$$B = b - Aa.$$

Далі, за допомогою формули (13.109) знаходимо:

$$M\xi\eta = M\xi f(\xi) = M(A\xi^2 + B\xi) = AM\xi^2 + (b - Aa)a,$$

Звідки

$$A = (M\xi\eta - ab) / (M\xi^2 - a^2) = (M\xi\eta - ab) / \sigma^2_1.$$

Отриманий коефіцієнт називають *коефіцієнтом регресії ξ на η* і позначають через $\rho(\eta/\xi)$:

$$\rho(\eta/\xi) = (M\xi\eta - ab) / \sigma^2_1$$

Таким чином, рівняння прямої регресії η на ξ має вигляд

$$y = \rho(\eta/\xi)(x - a) + b. \quad (13.116)$$

Аналогічно можна одержати рівняння прямої регресії ξ на η

$$x = \rho(\xi/\eta)(y - b) + a, \quad (13.117)$$

де

$$\rho(\xi/\eta) = (M\xi\eta - ab) / \sigma^2_2$$

є коефіцієнт регресії ξ на η .

Рівняння прямих регресії можна записати в більш симетричному вигляді, якщо ввести безрозмірний, симетричний відносно ξ і η , коефіцієнт

$$r = (M\xi\eta - ab) / \sigma_1\sigma_2, \quad (13.118)$$

який називається *коефіцієнтом кореляції між величинами ξ і η* .

При цьому

$$\rho(\eta/\xi) = r(\sigma_2/\sigma_1); \rho(\xi/\eta) = r(\sigma_1/\sigma_2)$$

і рівняння прямих регресії приймають вигляд

$$(y - b) / \sigma_2 = r[(x - a) / \sigma_1], \quad (13.119)$$

$$(x - a) / \sigma_1 = r[(y - b) / \sigma_2]. \quad (13.120)$$

З рівнянь прямих регресії видно, що обидві ці прямі проходять через точку $(a; b)$ — центр спільного розподілу величин ξ, η ; кутові коефіцієнти прямих регресії рівні відповідно (позначення кутів див. на рис. 13.21)

$$\operatorname{tg}\alpha = (\sigma_2/\sigma_1); \operatorname{tg}\beta = (1/r)(\sigma_2/\sigma_1).$$

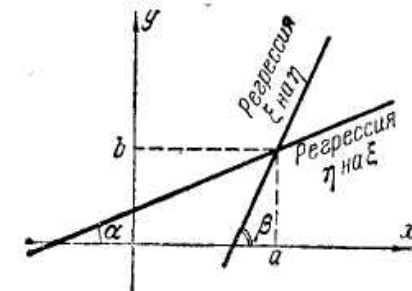


Рис. 13.21.

У наступному пункті ми доведемо, що $|r| \leq 1$ і, отже,

$$|\operatorname{tg}\alpha| \leq |\operatorname{tg}\beta|$$

Це означає, що пряма регресії η на ξ має менший нахил до осі абсцис, чим пряма регресії ξ на η . Чим ближче $|r|$ до 1, тим менше кут між прямими регресії. Ці прямі зливаються тоді і тільки тоді, коли $|r| = 1$.

При $r = 0$ прямі регресії мають рівняння $y = b; x = a$.

У цьому випадку

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x \eta &= b = \mathbf{M} \eta; \\ \mathbf{M}_y \xi &= a = \mathbf{M} \xi. \end{aligned}$$

Коефіцієнти регресії мають той же знак, що і коефіцієнт кореляції r , і зв'язані співвідношенням

$$\rho(\eta/\xi)\rho(\xi/\eta) = r^2. \quad (13.121)$$

З того, що знаки $\rho(\eta/\xi)$ і $\rho(\xi/\eta)$ однакові, випливає, що якщо величина η у середньому зростає при збільшенні величини ξ , то і величина ξ у середньому зростає при збільшенні величини η , але зв'язок між швидкостями зростання цих величин істотно залежить від коефіцієнта кореляції.

Приклад. Нормальна кореляція.

Кореляція між ξ і η називається нормальною, якщо щільність двовимірного розподілу ймовірностей величини (ξ, η) задається формулою

$$p(x; y) = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[A(x-a)^2 + 2BA(x-a)(y-b) + C(y-b)^2]},$$

де A, B, C – деякі сталі, $A > 0, C > 0, AC - B^2 > 0$.

При цьому щільність часткового розподілу величини ξ відповідно до формули (13.54) буде дорівнювати

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x; y) dy = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}C\left[(y-b) + \frac{B}{C}(x-a)\right]^2 - \frac{1}{2}\left(A - \frac{B^2}{C}\right)(x-a)^2} dy = \\ &= \frac{\sqrt{AC - B^2}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{C}} e^{-\frac{1}{2}\frac{AC - B^2}{C}(x-a)^2} \end{aligned}$$

так як

$$\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}C(y-\lambda)^2} dy = 1 \quad \text{при будь-якому } \lambda.$$

Звідси видно, що частковий розподіл величини ξ є нормальний розподіл з центром a і дисперсією

$$\sigma^2_1 = C/(AC - B^2).$$

Аналогічно, частковий розподіл величини η є нормальний розподіл з центром b і дисперсією

$$\sigma^2_2 = A/(AC - B^2).$$

Умовним розподілом величини η при фіксованому значенні $\xi = x$ також є нормальний розподіл із щільністю

$$\varphi_x(y) = \frac{p(x; y)}{\psi_1(x)} = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}C\left[(y-b) + \frac{B}{C}(x-a)\right]^2}$$

і, виходить, з центром

$$\mathbf{M}_x \eta = b - \frac{B}{C}(x - a).$$

Аналогічно знаходимо центр умовного розподілу величини ξ при фіксованому значенні $\eta = y$:

$$\mathbf{M}_y \xi = a - \frac{B}{A}(y - b).$$

Звідси видно, що нормальна кореляція є лінійною кореляцією. Прямі регресії тут мають рівняння

$$y = -\frac{B}{C}(x - a) + b,$$

$$x = -\frac{B}{A}(y - b) + a,$$

і виходить, коефіцієнти регресії рівні відповідно

$$\rho(\eta/\xi) = -\frac{B}{C}; \quad \rho(\xi/\eta) = -\frac{B}{A}.$$

З останніх формул і формули (13.121) легко знайти коефіцієнт кореляції:

$$r = -\frac{B}{\sqrt{AC}}. \quad (13.122)$$

20. Коефіцієнт кореляції

Розглянемо докладніше введений у попередньому пункті коефіцієнт кореляції між випадковими величинами ξ і η :

$$r = r(\xi, \eta) = (\mathbf{M}\xi\eta - ab) / \sigma_1\sigma_2 = (\mathbf{M}\xi\eta - \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta) / (\sigma(\xi)\sigma(\eta)) \quad (3.123)$$

Цей коефіцієнт характеризує відносну величину відхилення математичного очікування добутку $(\mathbf{M}\xi\eta)$ від добутку математичних очікувань $(\mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta)$ величин ξ і η . Так як це відхилення має місце тільки для залежних величин, то можна сказати, що коефіцієнт кореляції характеризує тісноту залежності між ξ і η .

За допомогою коефіцієнта кореляції можна узагальнити теорему додавання дисперсій для залежних величин:

$$\sigma^2(\xi + \eta) = \sigma^2(\xi) + \sigma^2(\eta) + 2r(\xi; \eta)\sigma(\xi)\sigma(\eta). \quad (13.124)$$

Ця формула виходить з формули (13.80):

$$\sigma^2(\xi+\eta) = \mathbf{M}(\xi-a)^2 + 2\mathbf{M}(\xi-a)(\eta-b) + \mathbf{M}(\eta-b)^2$$

за допомогою перетворення

$$\mathbf{M}(\xi-a)(\eta-b) = \mathbf{M}\xi\eta - a\mathbf{M}\eta - b\mathbf{M}\xi + ab = \mathbf{M}\xi\eta - ab = r\sigma_1\sigma_2.$$

Безрозмірність коефіцієнта кореляції дозволяє представити його у вигляді математичного очікування добутку нормованих відхилень

$$\xi_0 = (\xi - a) / \sigma_1$$

і

$$\eta_0 = (\eta - b) / \sigma_2.$$

Дійсно,

$$\mathbf{M}\xi_0\eta_0 = \mathbf{M}\left(\frac{\xi - a}{\sigma_1} \frac{\eta - b}{\sigma_2}\right) = \frac{\mathbf{M}(\xi - a)(\eta - b)}{\sigma_1\sigma_2} = r. \quad (13.125)$$

Властивості коефіцієнта кореляції

Теорема 1. Лінійні перетворення, які зводяться до зміни масштабу або початку відліку випадкових величин ξ і η , не змінюють коефіцієнта кореляції між ними:

$$r(c_1\xi + c_2; c_3\eta + c_4) = r(\xi; \eta)$$

при будь-яких сталих

$$c_1 > 0, c_2, c_3 > 0, c_4.$$

Це впливає з того, що при зазначених лінійних перетвореннях не змінюються нормовані відхилення ξ_0 і η_0 .

Дійсно, при заміні ξ на

$$\xi' = c_1\xi + c_2 \quad (c_1 > 0)$$

маємо

$$\mathbf{M}\xi' = c_1\mathbf{M}\xi + c_2 = c_1a + c_2; \quad \sigma(\xi') = c_1\sigma(\xi) = c_1\sigma_1,$$

і тому

$$\xi'_0 = (\xi' - \mathbf{M}\xi') / \sigma(\xi') = [c_1\xi + c_2 - (c_1a + c_2)] / c_1\sigma_1 = (\xi - a) / \sigma_1 = \xi_0.$$

Теорема 2. Коефіцієнт кореляції $r(\xi; \eta)$ заключається між -1 і $+1$, і досягає цих крайніх значень тільки у випадку лінійної функціональної залежності між ξ і η .

Доведення. З формули (13.125) і формул

$$\mathbf{M}\xi_0^2 = [\mathbf{M}(\xi - a)^2] / \sigma_1^2 = 1; \quad \mathbf{M}\eta_0^2 = 1$$

впливає рівність

$$\mathbf{M}(\xi_0 \pm \eta_0)^2 = \mathbf{M}\xi_0^2 \pm 2\mathbf{M}\xi_0\eta_0 + \mathbf{M}\eta_0^2 = 1 \pm 2r(\xi; \eta) + 1.$$

Звідси випливає що

$$1 \pm r(\xi; \eta) = (1/2)\mathbf{M}(\xi_0 \pm \eta_0)^2 \geq 0, \quad (13.126)$$

тобто

$$-1 \leq r(\xi; \eta) \leq +1.$$

Знак рівності в співвідношенні (13.126) досягається тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbf{M}(\xi_0 \pm \eta_0)^2 = 0,$$

тобто коли

$$\xi_0 \pm \eta_0 = 0.$$

Остання рівність означає наявність лінійної функціональної залежності

$$(\xi - a) / \sigma_1 \pm (\eta - b) / \sigma_2 = 0,$$

або

$$\eta = b \pm (\sigma_2 / \sigma_1)(\xi - a).$$

Теорема 3. Коефіцієнт кореляції між незалежними випадковими величинами дорівнює нулеві.

Це безпосередньо випливає з формул (13.69) і (13.123).

Помітимо, що зворотне твердження невірне, тобто з рівності нулеві коефіцієнта кореляції $r(\xi; \eta)$ не випливає незалежність величин ξ і η . Якщо коефіцієнт кореляції $r(\xi; \eta) = 0$ то величини ξ і η , називаються *некорельованими*.

В одному важливому випадку *некорельованість* випадкових величин ξ , η спричиняє їх незалежність. Це має місце при нормальній кореляції.

Дійсно, з формули (13.122) видно, що при нормальній кореляції коефіцієнт $r(\xi; \eta)$ обертається в нуль тоді і тільки тоді, коли $B = 0$. Але при цій умові щільність розподілу $p(x; y)$ можна представити у вигляді

$$p(x; y) = \frac{\sqrt{AC}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[A(x-a)^2 + C(y-b)^2]} = \frac{\sqrt{A}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}A(x-a)^2} \frac{\sqrt{C}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}C(y-b)^2},$$

звідки відразу видно, що величини ξ і η незалежні.

21. Найкраще лінійне наближення до функції регресії

У розглянутому нами випадку лінійної кореляції параметри функції регресії знаходяться порівняно легко. У випадку більш складної кореляційної залежності знаходження функції регресії представляє значні труднощі. Тому виникає задача про найкраще лінійне наближення до функції регресії. Який зміст варто вкладати в слова «найкраще наближення»? У п. 18 ми установили, що

функція $f(\xi)$ дає найкраще наближення до величини η у змісті середнього квадратичного наближення, а саме, що при будь-якій функції $h(\xi)$ має місце нерівність

$$\mathbf{M}[\eta - f(\xi)]^2 \leq \mathbf{M}[\eta - h(\xi)]^2.$$

Природно тепер під лінійною функцією найкращого наближення до функції регресії $f(x)$ розуміти таку функцію $Ax+B$, для якої середній квадрат відхилення

$$\mathbf{M}[\eta - (A\xi + B)]^2$$

приймає найменше значення. Задачею цього пункту є знаходження параметрів A і B такої лінійної функції. Виявляється, що ці параметри знаходяться по тим же формулам, що і параметри лінійної функції регресії у випадку лінійної кореляції (див. п. 19). А саме, має місце наступна

Теорема. *Середнє квадратичне відхилення випадкової величини η від лінійної функції $A\xi+B$ досягає найменшого значення тоді і тільки тоді, коли*

$$A = \rho(\eta/\xi) = r(\sigma_2/\sigma_1); \quad B = b - Aa,$$

тобто коли ця функція має вигляд

$$r(\sigma_2/\sigma_1)(\xi - a) + b.$$

Іншими словами, при будь-якій кореляційній залежності з усіх прямих ліній пряма регресії (13.116) дає найкраще в середньому наближення до дійсної регресії η на ξ .

Доведення. Позначимо $B - (b - Aa) = C$ і перетворимо середній квадрат відхилення

$$\mathbf{M}[\eta - (A\xi + B)]^2 = \mathbf{M}[(\eta - b) - A(\xi - a) - C]^2,$$

користуючись лінійністю математичного очікування і з огляду на те, що

$$\mathbf{M}(\xi - a) = 0 \quad \text{і} \quad \mathbf{M}(\eta - b) = 0:$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}[\eta - (A\xi + B)]^2 &= \mathbf{M}(\eta - b)^2 + A^2 \mathbf{M}(\xi - a)^2 - 2A \mathbf{M}(\xi - a)(\eta - b) + C^2 = \\ &= \sigma_2^2 + A^2 \sigma_1^2 - 2Ar\sigma_1\sigma_2 + C^2 \end{aligned} \quad (13.127)$$

В отриманій сумі доданок σ_2^2 сталий, доданок C^2 приймає найменше значення (0) при $B = b - Aa$, а доданок

$$A^2 \sigma_1^2 - 2Ar\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2 [A - r(\sigma_2/\sigma_1)]^2 - r^2 \sigma_2^2$$

приймає найменше значення ($-r^2 \sigma_2^2$) при $A = r(\sigma_2/\sigma_1)$. Тим самим теорема доведена.

Знайдемо ще середній квадрат відхилення η від лінійної функції

$$r(\sigma_2/\sigma_1)(\xi - a) + b,$$

яка дає найкраще лінійне наближення в середньому.

З формули (13.127) при $C=0$, $A=r(\sigma_2/\sigma_1)$ одержуємо:

$$\mathbf{M}\{\eta - [r(\sigma_2/\sigma_1)(\xi - a) + b]\}^2 = \sigma_2^2 - r^2 \sigma_2^2 = \sigma_2^2 (1 - r^2). \quad (13.128)$$

Формула (13.128) дозволяє з'ясувати питання про те, як саме коефіцієнт кореляції характеризує тісноту зв'язку.

Дійсно, з формули (13.128) випливає, що

$$\sqrt{1 - r^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{M}\left\{\eta - \left[r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi - a) + b\right]\right\}^2}}{\sigma_2} = \frac{\sigma\left\{\eta - \left[r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} (\xi - a) + b\right]\right\}}{\sigma(\eta)} \quad (13.129)$$

Звідси видно, що коефіцієнт кореляції $r(\xi; \eta)$ характеризує відносну величину середнього квадратичного відхилення випадкової величини η від лінійної функції найкращого наближення

$$r(\sigma_2/\sigma_1)(\xi - a) + b,$$

тобто коефіцієнт кореляції характеризує тісноту лінійного зв'язку між ξ і η . Чим ближче значення r^2 до 1, тим менше розсіяні в середньому значення величини η відносно прямої регресії η на ξ . Усе сказане вище відноситься, звичайно, і до регресії ξ на η .

22. Аналіз лінійної кореляції за даними випадкової вибірки. Оцінка значимості коефіцієнта кореляції

Для аналізу лінійної кореляції між двома величинами ξ і η , роблять ряд незалежних іспитів (дослідів, спостережень), результатом кожного з яких є пара $(x_i; y_i)$. Розглядаючи отримані пари відповідних значень

$$(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$$

як випадкову вибірку із сукупності всіх можливих значень величини $(\xi; \eta)$, ми можемо знайти наближені значення всіх параметрів лінійної кореляції між ξ і η по методу моментів. Насамперед, ми маємо наступні наближені формули:

$$\left. \begin{aligned} a &= M\xi \approx \bar{x} = \frac{\sum x}{n}; & b &= M\xi \approx \bar{y} = \frac{\sum y}{n}; \\ \sigma^2(\xi) \approx s^2_1 &= \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}; & \sigma^2(\eta) \approx s^2_2 &= \frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n-1}; \end{aligned} \right\} \quad (13.130)$$

$$\mathbf{M}(\xi - a)(\eta - b) \approx \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n-1}. \quad (13.131)$$

Звідси одержуємо наближену формулу для коефіцієнта кореляції

$$r(\xi; \eta) \approx r_n = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{(n-1)s_1s_2} = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y - \bar{y})^2}}. \quad (13.132)$$

Величина r_n називається *вибірковим коефіцієнтом кореляції*.

Далі, заміняючи у формулах (13.116) і (13.117) усі математичні очікування відповідними середніми значеннями, ми одержуємо *вибіркову пряму регресії η на ξ*

$$y - \bar{y} = r_n \frac{s_2}{s_1} (x - \bar{x}) \quad (13.133)$$

і *вибіркову пряму регресії ξ на η*

$$x - \bar{x} = r_n \frac{s_1}{s_2} (y - \bar{y}). \quad (13.134)$$

Коефіцієнти

$$r_n \frac{s_2}{s_1} \quad \text{і} \quad r_n \frac{s_1}{s_2}$$

називаються *вибірковими коефіцієнтами регресії*.

Важливо відзначити, що вибіркові прямі регресії (13.133) і (13.134) володіють мінімальною властивістю, яка аналогічна розглянутому в п.21. А саме, сума квадратів відхилень значень, які спостерігались, y_i від вибіркової прямої регресії (13.133) менша, ніж сума квадратів відхилень їх від будь-якої іншої прямої:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \bar{y}_i - \left[\bar{y} + r_n \frac{s_2}{s_1} (x_i - \bar{x}) \right] \right\}^2 \leq \sum_{i=1}^n \{ \bar{y}_i - (Ax_i + B) \}^2$$

Доведення проводиться тим же методом, що й у п.21. Те ж саме можна сказати і про пряму регресію (13.134).

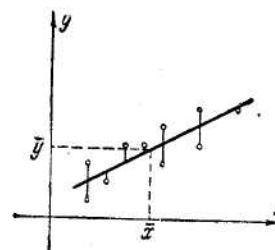


Рис. 13.22.

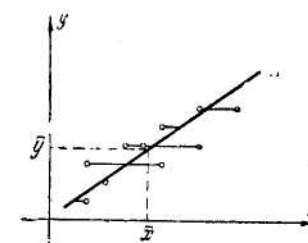


Рис. 13.23.

Рисунки 13.22 і 13.23 показують, про які відхилення тут йде мова.

Як видно з приведених вище формул (13.130) — (13.134), розрахунок вибіркових прямих регресії пов'язаний з великою кількістю наближених обчислень з багатозначними числами $(x_i - \bar{x})$ і $(y_i - \bar{y})$. Ці обчислення можна істотно спростити за допомогою попереднього лінійного перетворення величин x і y , тобто за допомогою вибору зручного початку відліку і підходящого масштабу.

Заміняючи x і y величинами $u = (x - x_0)/h_1$; $v = (y - y_0)/h_2$ ($h_1 > 0$, $h_2 > 0$), ми одержимо наступні формули:

$$x = x_0 + h_1 u; \quad y = y_0 + h_2 v;$$

$$\bar{x} = x_0 + h_1 \bar{u} \left(\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n} \right); \quad \bar{y} = y_0 + h_2 \bar{v} \left(\bar{v} = \frac{\sum v_i}{n} \right);$$

$$s_1 = h_1 \sqrt{\frac{\sum u_i^2 - n(\bar{u})^2}{n-1}}; \quad s_2 = h_2 \sqrt{\frac{\sum v_i^2 - n(\bar{v})^2}{n-1}}$$

і, нарешті,

$$r_n = \frac{\sum (h_1 u_i - h_1 \bar{u})(h_2 v_i - h_2 \bar{v})}{h_1 \sqrt{\sum u_i^2 - n(\bar{u})^2} \sqrt{\sum v_i^2 - n(\bar{v})^2}} = \frac{\sum u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sqrt{\sum u_i^2 - n(\bar{u})^2} \sqrt{\sum v_i^2 - n(\bar{v})^2}}.$$

(Тут ми замінили

$$\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v}) = \sum u_i v_i - \bar{u} \sum v_i - \bar{v} \sum u_i + n\bar{u}\bar{v} = \sum u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}.)$$

13.7 Закон великих чисел

Для кожної випадкової величини не можна передбачати, яке вона прийме значення в підсумку іспиту. Але поведження суми великого

числа випадкових величин майже утрачає випадковий характер і стає закономірним; тут необхідне прокладає собі дорогу крізь безліч випадків. Теорема, у яких з'ясовуються умови того, що сукупна дія багатьох випадкових причин приводить до результату, який майже не залежить від випадку, одержали загальну назву закону великих чисел.

1. Про випадкові події з дуже малими ймовірностями

Нагадаємо, що ймовірність p випадкової події є число, що об'єктивно характеризує можливість його появи при даному комплексі умов. Відносна частота цієї події є випадкова величина ω_n з розподілом ймовірностей, центром якого служить саме ймовірність p (п. 12, приклад 3). У той час як значення ймовірності не може бути знайдене безпосередньо з досвіду, кожне n -кратне повторення іспиту дає визначене, дослідне значення відносної частоти. Ми уже вказували на початку нашого модуля, що значення відносної частоти ω_n при досить великій кількості іспитів n виявляється, як правило, досить близьким до ймовірності p . Цей загальний принцип зв'язує теорію з практикою, але він виявляється занадто невизначеним для кількісних оцінок (ми знаємо вже, що відносна частота близька до ймовірності, але не знаємо поки, наскільки саме). Тому в основу подальших висновків ми покладемо інший, більш вузький, але зате і більш визначений принцип, що відноситься до подій з дуже малими ймовірностями. Якщо подія має дуже малу ймовірність, то вона відбувається вкрай рідко. Наприклад, якщо подія має ймовірність 0,000001, то вона відбувається приблизно один раз на мільйон іспитів. (Зрозуміло, це аж ніяк не означає, що вона відбувається саме при мільйонному іспиті; вона може відбутися і при одному з перших іспитів).

Досвід переконує нас у тому, що при малій кількості іспитів випадкова подія з такою малою ймовірністю, як правило, не відбувається зовсім; тому можливістю її появи ми зневажаємо. Наприклад, навряд чи хто-небудь, володіючи одним квитком у лотереї, де на 1 000 000 квитків приходиться один виграш, стане всерйоз розраховувати на цей виграш (хоча один з мільйона власників таких квитків обов'язково виграє!). Ну, а якби в лотереї було 500 000 квитків? або 10 000? Виникає питання, наскільки мала повинна бути ймовірність випадкової події, щоб можна було зневажити можливістю її появи в одиничному іспиті.

Відповідь на це питання не може бути дана у теорії ймовірностей, вона відноситься до її практичних додатків і залежить від суттєвості розв'язуваної проблеми. Пояснимо це наступним прикладом порівняння двох випадкових подій.

а) Нехай при автоматичній обробці деякої деталі ймовірність отримання нестандартного розміру дорівнює 0,01, причому нестандартна деталь буде бракуватися при зборці. Якщо деталь недорога, то цілком припустимо не робити суцільний контроль усіх деталей перед зборкою, тобто зневажити ймовірністю 0,01 нестандартності деталі.

б) Нехай при виготовленні парашутів ймовірність отримання парашута, який вчасно не розкривається, дорівнює 0,01. Ясно, що в цьому випадку зневажити ймовірністю 0,01 неприпустимо, так як це привело б до загибелі приблизно кожного сотого парашутиста.

У цьому випадку варто було б організувати контроль усіх виготовлених парашутів.

У кожній області додатка теорії ймовірностей призначається визначена границя „дуже малих” ймовірностей. У відношенні цієї границі приймається так названий принцип практичної неможливості малоїмовірних подій: *вважається, що випадкова подія, яка має ймовірність менш призначеної границі, не відбудеться при одиничному іспиті.*

Цей принцип відіграє основну роль у застосуваннях теорії ймовірностей до практики; він дозволяє нам з'ясувати практичне значення розглянутих далі теорем.

Іноді цей принцип формулюють трохи інакше і називають «принципом практичної впевненості»: якщо ймовірність події A менша призначеної границі α , то є практична впевненість у тому, що подія A не відбудеться (при одиничному іспиті). При цьому ймовірність протилежної події \bar{A} буде більше, ніж $1-\alpha$, тобто буде так само близька до одиниці, як ймовірність події A близька до нуля. Тому принцип практичної впевненості формулюють також і в такий спосіб: якщо ймовірність події більше, ніж $1-\alpha$, то є практична впевненість у тому, що вона відбудеться (при одиничному іспиті).

Зробимо ще наступне важливе зауваження про практичний додаток прийнятого вище принципу. Припустимо, що, керуючись деякою гіпотезою, ми знайшли, що ймовірність події A дуже мала (менше призначеної границі). Але, зробивши іспит, ми знайшли, що подія A

відбулася. Тоді буде розумним узяти під сумнів нашу вихідну гіпотезу і шукати не випадкову причину появи події A . Особливо яскраво це виражено в наступному стародавньому анекдоті, приведеному Берtrandом у його «Вирахуванні ймовірностей» (1889 р.): «Один раз у Неаполі абат Галліані побачив чоловіка з Базилікати, який, струшуючи три гральні кістки в чашці, тримав парі, що викине три шістки; і дійсно, він негайно одержав три шістки. Ви скажете, така удача можлива (ймовірність цього за умови, що кіста правильна, складає: $1/6^3=1/216$).

Однак чоловікові з Базилікати це удалося в другий раз (ймовірність цього за умови, що кістка правильна, складає уже $1/(216)^2=1/46656$) і парі повторилося. Він клав кістки назад у чашку три, чотири, п'ять разів, і щораз викидав три шістки. „Чорт забори, — закричав абат, — кістки наліті свинцем“. Так воно і було».

2. Теорема Я. Бернуллі і стійкість відносних частот

Нехай при деякому іспиті випадкова подія A має визначену ймовірність p . Нехай, далі, зазначений іспит повторюється n раз. Як ми вже знаємо, відносна частота випадкової події буде випадковою величиною ω_n , у якої центр розподілу збігається з ймовірністю p . Що ж стосується середнього квадратичного відхилення величини ω_n , то воно буде зменшуватися зі збільшенням кількості іспитів n , як показує формула (13.82):

$$\sigma(\omega_n) = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}.$$

Звідси випливає, що зі збільшенням кількості іспитів значення відносної частоти випадкової події будуть розсіюватися усе менше і менше, тобто будуть усе тісніше групуватися біля ймовірності цієї події.

Уточненням цього положення є теорема Я. Бернуллі

Теорема Я. Бернуллі. *Якщо в послідовності незалежних іспитів ймовірність p випадкової події залишається незмінною, то ймовірність того, що відхилення відносної частоти ω_n від p перевершить задане число $\varepsilon > 0$, прагне до нуля при необмеженому збільшенні числа іспитів n :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\omega_n - p| > \varepsilon\} = 0. \quad (13.135)$$

Прагнення до нуля ймовірності нерівності $|\omega_n - p| > \varepsilon$

означає, що при досить великому n ця ймовірність стане менше призначеної границі дуже малих ймовірностей. При цьому ми будемо мати практичну впевненість у тім, що зазначена нерівність не буде виконуватися, і, отже, у тім, що буде виконуватися протилежна нерівність:

$$|\omega_n - p| \leq \varepsilon. \quad (13.136)$$

Іншими словами, теорему Я. Бернуллі можна формулювати так:

При досить великій кількості іспитів досягається практична впевненість у тому, що відхилення відносної частоти випадкової події від її ймовірності не перевершить по абсолютній величині наперед заданого числа ε (яким би мале воно не було!).

Теорема Я. Бернуллі є частковим випадком теореми Чебишева, яку ми доведемо далі. Помітимо, що, яким би велике не було n , ми не можемо категорично стверджувати, що буде мати місце нерівність (13.136), а можемо мати тільки практичну впевненість, у змісті п.1, у виконанні цієї нерівності.

Щоб підкреслити відмінність установленого положення від звичайного поняття границі, іноді вводять спеціальне поняття «*границі по ймовірності*». Наприклад, теорему Бернуллі записують у символічному вигляді:

$$\overset{\text{ймов}}{\omega_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} p \quad (13.137)$$

(читається так: ω_n прагне по ймовірності до числа p при $n \rightarrow \infty$).

Якщо при n -кратному повторенні іспиту випадкова подія A фактично з'явилася m раз, то відношення m/n буде частковим, дослідним значенням відносної частоти ω_n . При досить великому n можна бути практично упевненим у виконанні наближеної рівності

$$m/n \approx p \quad (13.138)$$

з якою завгодно наперед заданою точністю. На практиці це проявляється в тому, що значення m/n відносної частоти ω_n мають стійкість, про яку ми говорили на початку мікромодуля 31.

Співвідношення (13.138) може служити для наближеного обчислення невідомої ймовірності випадкової події по дослідним даним. Наприклад, у статистиці народонаселення ХХ століття було встановлено, що відносна частота народження хлопчиків стійка і складає 0,512. Звідси можна заключити, що народження хлопчика має визначену ймовірність, близьку до 0,512.

При конкретних значеннях n точність наближеної рівності (13.138) має потребу в оцінці; ми дамо цю оцінку в наступному розділі.

3. Теорема Чебишева

Для незалежних випадкових величин загальний закон великих чисел виражається теоремою Чебишева, доведеною їм у 1867 р.

Розглянемо послідовність попарно незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ з якими завгодно розподілами ймовірностей. Припустимо, що всі ці випадкові величини мають визначені математичні очікування і дисперсії:

$$\mathbf{M}\xi_k = a_k; \quad \mathbf{M}(\xi_k - a_k)^2 = \sigma_k^2 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (13.139)$$

Утворимо середню арифметичну з перших n випадкових величин:

$$\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}. \quad (13.140)$$

Математичним очікуванням величини $\bar{\xi}_n$ служить середнє арифметичне з математичних очікувань величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$:

$$\mathbf{M}\bar{\xi}_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \bar{a}_n. \quad (13.141)$$

Дисперсія ж середньої арифметичної $\bar{\xi}_n$ не дорівнює середньої арифметичної з дисперсій, а менше неї в n раз:

$$\sigma^2(\bar{\xi}_n) = \frac{1}{n^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2) = \frac{1}{n} \sum \frac{\sigma_k^2}{n}. \quad (13.142)$$

Якщо всі дисперсії σ_k^2 обмежені одним і тим же числом:

$$\sigma_k^2 \leq H \quad (k=1, 2, \dots),$$

то дисперсія середньої арифметичної прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$, так як

$$\sigma^2(\bar{\xi}_n) \leq \frac{H}{n}.$$

Звідси випливає, що зі збільшенням n значення середньої арифметичної $\bar{\xi}_n$ будуть розсіюватися усе менше і менше, тобто будуть усе тісніше групуватися біля свого центра розподілу. (Це можна тлумачити таким чином,

що при утворенні середньої арифметичної відбувається часткове взаємне погашення випадкових відхилень різних знаків).

Для уточнення цього положення оцінимо можливі відхилення випадкової величини $\bar{\xi}_n$ від її центра за допомогою універсальної нерівності Чебишева.

Нерівність Чебишева

Нерівність Чебишева дає оцінку ймовірності того, що відхилення будь-якої випадкової величини ξ від центру її розподілу $a = \mathbf{M}\xi$ перевершить задане додатне число ε :

$$\mathbf{P}\{|\xi - a| > \varepsilon\} < \frac{\sigma^2(\xi)}{\varepsilon^2}. \quad (13.143)$$

Виявляється, що ця ймовірність, узагалі говорячи, тим менша, чим менша дисперсія $\sigma^2(\xi)$.

Проведемо доведення нерівності Чебишева для безперервних випадкових величин. По основній формулі (13.38) маємо:

$$\mathbf{P}\{|\xi - a| > \varepsilon\} = \int_{|x-a|>\varepsilon} \varphi(x) dx,$$

де інтеграл у правій частині поширюється на інтервали

$$(-\infty; a - \varepsilon) \text{ і } (a + \varepsilon; +\infty),$$

у яких $|x - a| > \varepsilon$. Так як у цих інтервалах має місце нерівність

$$1 < \frac{(x - a)^2}{\varepsilon^2},$$

а значить, і нерівність

$$\varphi(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} (x - a)^2 \varphi(x),$$

то

$$\int_{|x-a|>\varepsilon} \varphi(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-a|>\varepsilon} (x - a)^2 \varphi(x) dx.$$

Тепер для завершення висновку нерівності (13.143) досить помітити. Що

$$\int_{|x-a|>\varepsilon} (x - a)^2 \varphi(x) dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \varphi(x) dx = \sigma^2(\xi).$$

Застосуємо тепер нерівність Чебишева (13.143) до випадкової величини $\bar{\xi}_n$:

$$\mathbf{P}\{|\bar{\xi}_n - \bar{a}_n| > \varepsilon\} < \frac{\sigma^2(\bar{\xi})}{\varepsilon^2} < \frac{H}{n\varepsilon^2}. \quad (13.144)$$

Яким би малим не було наперед задане додатне число ε , завжди можна вибрати настільки велике n , щоб права частина нерівності (13.144) стала як завгодно мала, зокрема, менше призначеної границі «дуже малих» ймовірностей. Тоді ми будемо мати практичну впевненість у тому, що нерівність

$$|\bar{\xi}_n - \bar{a}_n| > \varepsilon$$

не буде виконуватися і, отже, у тому, що буде виконуватися протилежна нерівність:

$$|\bar{\xi}_n - \bar{a}_n| \leq \varepsilon.$$

Таким чином, при досить великій кількості незалежних випадкових величин досягається практична впевненість у тому, що відхилення їх середньої арифметичної від її центра розподілу не перевершить по абсолютній величині наперед заданого числа ε (яким би малим воно не було!).

У малому розсіюванні середньої $\bar{\xi}_n$ біля центра її розподілу при великих значеннях n і полягає закон великих чисел. Точний математичний вираз цього закону дає

Теорема Чебишева. Якщо послідовність $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ складається з попарно незалежних випадкових величин з обмеженими дисперсіями, то для середньої арифметичної $\bar{\xi}_n$ з перших n величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ при будь-якому додатному ε має місце співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\bar{\xi}_n - \mathbf{M}\bar{\xi}_n| > \varepsilon\} = 0. \quad (13.145)$$

Формула (13.145) виходить з нерівності (13.144) граничним переходом, так як права частина нерівності (13.144) прагне до нуля при $n \rightarrow \infty$, а ліва частина, яка є ймовірністю, не може бути від'ємною.

Частковий випадок теореми Чебишева

Якщо усі випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ мають однакові центри розподілу

$$\mathbf{M}\xi_k = a \quad (k=1, 2, \dots),$$

то центр розподілу середньої арифметичної $\bar{\xi}_n$ також збігається з a :

$$\mathbf{M}\bar{\xi}_n = 1/n(\mathbf{M}\xi_1 + \mathbf{M}\xi_2 + \dots + \mathbf{M}\xi_n) = a,$$

і тому формула (13.145) приймає вигляд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\bar{\xi}_n - a| > \varepsilon\} = 0. \quad (13.146)$$

Формула (13.146) допускає символічний запис

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ймов}} a, \quad (13.147)$$

який цілком аналогічний запису (13.137).

Доведення теореми Я. Бернуллі

Якщо в якості величин ξ_k узяти характеристичні величини λ_k , які були введені раніше, то їхня середня арифметична буде дорівнювати відносній частоті випадкової події:

$$\bar{\lambda}_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} = \omega_n.$$

Так як при цьому

$$\mathbf{M}\lambda_k = p; \quad \sigma^2(\lambda_k) = pq < 1,$$

то формула (13.146) приймає вигляд (13.135), що і доводить теорему Я. Бернуллі.

4. Стійкість вибірових середніх і метод моментів

Розглянемо спочатку статистичну задачу про середні значення. Нехай із сукупності N елементів, які розрізняються деякою кількісною ознакою x , відбираються випадковим чином n елементів. Чи можна вважати, що середні арифметичні значення ознаки у всій сукупності й у відібраній сукупності будуть близькі між собою?

Теорема Чебишева дає розв'язання цього питання за умови, що вибірка є повторною, тобто виконується за схемою "повернутої кулі", описаної раніше. Зв'яжемо з кожним елементом, який відбирається, випадкову величину ξ_k , рівну можливому значенню ознаки в k -го елемента вибірки. За умови повторності вибірки добір кожного елемента виконується з однієї і тієї ж вихідної сукупності, і тому усі випадкові величини

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ будуть незалежні і будуть мати однакові розподіли ймовірностей типу (13.62). Як було показано раніше, центр розподілу всіх цих величин збігається з середнім арифметичним значенням ознаки у вихідній («генеральній») сукупності, тобто з так названою «генеральною середньою» a :

$$M\xi_k = a \quad (k=1, 2, \dots),$$

Тому для арифметичної середньої

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}$$

буде справедлива теорема Чебишева у формі (13.146) — (13.147). Це означає, що середнє можливе значення ознаки у вибірці прагне по ймовірності до генерального середнього при необмеженому збільшенні обсягу вибірки.

Зробимо звідси практичні висновки. Дослідним значенням кожної випадкової величини ξ_k є те значення, що ми фактично виявляємо в k -го елемента вибірки; дослідним значенням випадкової величини $\bar{\xi}$ служить *вибіркова середня* \bar{x} — середнє арифметичне значення ознаки у відібраних елементах. Тому співвідношення (13.147) може бути витлумачене так: *при досить великому обсязі (n) випадкової повторної вибірки можна бути практично упевненим у тому, що вибіркова середня буде як заведено мало відрізнятися від генеральної середньої*, тобто в тому, що буде мати місце наближена рівність

$$\bar{x} \approx a. \quad (13.148)$$

Звідси випливає також, що *вибіркові середні мають стійкість*, тобто в двох випадкових повторних вибірках досить великого обсягу вибіркові середні повинні бути приблизно рівні. Цей висновок добре погоджується з дослідом.

Підкреслимо, що степінь близькості вибіркової середньої до генеральної залежить тільки від обсягу вибірки n і не залежить від відношення обсягу вибірки до обсягу генеральної сукупності. Наприклад, 1%-на вибірка із сукупності в 1 000 000 елементів дає більш точні відомості про генеральну середню, чим 2%-на вибірка із сукупності в 1000 елементів (при тій же величині σ).

Помітимо ще, що якщо обсяг генеральної сукупності дуже великий у порівнянні з обсягом вибірки, то повторність вибірки виявляється несуттєвою і наші висновки можна застосовувати по відношенню до безповторних випадкових вибірок, що особливо

важливо на практиці. Справа в тому, що генеральна середня, узагалі говорячи, невідома і про її значення судять по величині вибіркової середньої. Наскільки це може бути важливо, видно з наступного приклада. Припустимо, що для деяких розрахунків треба знати середню тривалість служби великої партії приладів. Щоб точно знати середню тривалість служби для всієї партії, треба випробувати всі прилади; але тоді в нас не залишиться ні одного приладу, для якого мала би значення отримана середня. Практично такі середні, як середню тривалість служби приладів, знаходять вибіркоким методом, тобто за допомогою випадкової вибірки. Звичайно, наближене визначення генеральної середньої по вибірковій середній має потребу в оцінці точності.

Про метод моментів

Наближеній рівності (13.148) можна дати й інше тлумачення.

Нехай ξ — деяка випадкова величина з кінцевим центром розподілу $M\xi = a$. Будемо робити незалежні дослідні, у результаті яких величина ξ , прийме визначні значення x_1, x_2, \dots, x_n .

Ці дослідні значення величини ξ можна розглядати і як значення різних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ з тим же розподілом ймовірностей, що й у величині ξ , причому величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ можна вважати незалежними в силу незалежності іспитів. При такому тлумаченні середнє арифметичне з дослідних даних

$$\bar{x}_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

можна розглядати як дослідне значення випадкової величини $\bar{\xi}$, для якої справедлива теорема Чебишева у формі (13.146). Тому для досить великих n можна очікувати виконання з достатньою точністю наближеної рівності

$$\bar{x} \approx M\xi = a. \quad (13.149)$$

Звідси випливає, що *наближеним значенням математичного очікування випадкової величини є середнє арифметичне з її значень, отриманих дослідним шляхом*.

Це положення дозволяє приблизно знаходити не тільки центр розподілу, але й інші моменти розподілу, які визначаються теж як

математичні очікування деяких величин. Наприклад, для дисперсії ми одержуємо таку наближену формулу:

$$\sigma^2(\xi) = \mathbf{M}(\xi - a)^2 \approx \frac{\sum (x_k - a)^2}{n}, \quad (13.150)$$

де сума береться по всім дослідним даним x_1, x_2, \dots, x_n .

Дійсно, значення

$$\frac{\sum (x_k - a)^2}{n},$$

можна розглядати як часткове значення середньої арифметичної з n однаково розподілених незалежних випадкових величин $(\xi_k - a)^2$ з математичним очікуванням

$$\mathbf{M}(\xi_k - a)^2 = \mathbf{M}(\xi - a)^2 = \sigma^2(\xi) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Тому

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{\sum (x_k - a)^2}{n} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

У формулу (13.150) входить значення центра розподілу a . Зазвичай це значення невідоме і природно спробувати замінити його наближеним значенням \bar{x} . Виявляється, однак, що формула, яка виходить при цьому

$$\sigma^2(\xi) \approx \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{n} \quad (13.151)$$

уже не буде вірна (у тому змісті, у якому вірні приближенні формули (13.149) і (13.150)). Справа в тому, що хоча значення

$$\frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{n}$$

можна і тут розглядати як часткове значення середньої арифметичної з n випадкових величин $(\xi_k - \bar{\xi}_n)^2$, але математичним очікуванням цих величин уже не буде служити $\sigma^2(\xi)$. Дійсно, безпосередній підрахунок математичного очікування дає:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 &= \mathbf{M} \left[(\xi_k - a) - \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a \right) \right]^2 = \\ &= \mathbf{M} \left[(\xi_k - a) \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{\xi_2 - a}{n} \right) - \dots - \left(\frac{\xi_n - a}{n} \right) \right]^2 = \\ &= \sigma^2(\xi_k) \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 + \frac{\sigma^2(\xi_2)}{n^2} + \dots + \frac{\sigma^2(\xi_n)}{n^2} = \frac{n-1}{n} \sigma^2(\xi); \end{aligned}$$

і аналогічно для якого завгодно k :

$$\mathbf{M}(\xi_k - \bar{\xi}_n)^2 = \frac{n-1}{n} \sigma^2(\xi);$$

Причина цього полягає в лінійній залежності між величинами $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ і їх середньої

$$\bar{\xi}_n = 1/n (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

У силу лінійності математичного очікування звідси слідує, що випадкові величини

$$\frac{n-1}{n} (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2$$

будуть мати своїм математичним очікуванням саме $\sigma^2(\xi)$; і хоча ці величини не будуть незалежні, закон великих чисел буде для них справедливий; тому значення їх середньої арифметичної

$$\frac{\sum \frac{n-1}{n} (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2}{n} = \frac{\sum (\xi_k - \bar{\xi}_n)^2}{n-1}$$

будуть мало відрізнятися від їхнього центра $\sigma^2(\xi)$ при досить великому числі n .

Таким чином, формулу (13.151) можна виправити введенням в праву частину множника $n/(n-1)$.

Виправлена наближена формула для обчислення дисперсії по дослідним даним має вигляд

$$\sigma^2(\xi) \approx \frac{\sum (x_k - \bar{x})^2}{n-1} \quad (13.152)$$

Величина, яка стоїть в правій частині цього співвідношення, називається *вибірковою дисперсією* і позначається через s_n^2 . Корисно помітити, що при великих значеннях n число $n-1$ відносно мало відрізняється від n і тому формули (13.151) і (13.152) дають практично однакові результати. Але при малих значеннях n розходження між цими формулами досить помітне.

Звичайно, усі приведені вище наближені формули при конкретному n мають потребу в оцінці похибки. Деякі оцінки ми вказали раніше.

Можливість наближеного знаходження моментів розподілу по дослідним даним дозволяє розв'язувати задачу знаходження параметрів розподілу, якщо тип розподілу відомий.

Пояснимо цю задачу на прикладах розглянутих вище розподілів.

1. Для загального нормального розподілу з щільністю

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

параметри a і σ^2 є центром розподілу і дисперсією. Вони можуть бути знайдені з дослідних даних безпосередньо по формулах (13.149) і (13.152).

2. Для рівномірного розподілу ймовірностей невідомими параметрами можуть бути початок і кінець інтервалу можливих значень $(\alpha_1; \alpha_2)$. Як ми знаємо, моменти розподілу виражаються через ці параметри по формулах:

$$a = M\xi = (\alpha_1 + \alpha_2)/2; \quad \sigma = \sigma(\xi) = (\alpha_2 - \alpha_1)/2\sqrt{3}.$$

Звідси знаходимо:

$$\alpha_1 = a - \sigma\sqrt{3}; \quad \alpha_2 = a + \sigma\sqrt{3},$$

де a і σ^2 знаходяться по формулах (13.149) і (13.152).

3. Для розподілу Пірсона (13.146) параметри α і β зв'язані з центром і дисперсією формулами

$$a = M\xi = \alpha/\beta; \quad \sigma^2 = \sigma^2(\xi) = \alpha/\beta^2.$$

Звідси знаходимо:

$$\alpha = a^2/\sigma^2; \quad \beta = a/\sigma^2,$$

де a і σ^2 знаходяться по формулах (13.149) і (13.152).

Якщо відомо, що щільність розподілу залежить від l невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$, то, виражаючи через них перші l моментів розподілу, ми одержуємо l рівнянь, з яких

(узагалі говорячи) можемо знайти всі l параметрів. Самі ж моменти розподілу можуть бути знайдені по дослідним даним, як указувалося вище. Варто помітити, однак, що чим вище порядок моменту розподілу, тим більше потрібно дослідних даних для його скільки-небудь точного обчислення. Тому на практиці часто обмежуються розподілами тільки з двома невідомими параметрами, які знаходять за допомогою перших двох моментів розподілу.

Мікромодуль 32

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Нехай час служби деякого приладу є випадкова величина ξ з функцією розподілу $F(x)$. Відомо, що прилад пропрацював час a . Треба визначити розподіл часу служби який залишився у приладу, а також визначити чому дорівнює його математичне очікування. Тобто, в нашій задачі треба знайти

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a) \text{ і } M(\xi - a / \xi \geq a).$$

При цьому мається на увазі, що

$$P(a) = P(\xi \geq a) > 0.$$

Керуючись, приведеними в теоретичній частині мікромодуля 32, формулами, запишемо

$$P(\xi - a \geq x / \xi \geq a) = P(x + a) / P(a),$$

$$M(\xi - a / \xi \geq a) = 1 / P(a) \int_0^\infty x dF(x + a).$$

Приклад 2. n агрегатів розташовані так, що відстань між i -м і j -м агрегатом дорівнює a_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Кожен агрегат час від часу має потребу в обслуговуванні (налагодженню, ремонті і т.п.). Припустимо, що обслуговування виконується одним робітником і що кожен черговий виклик на обслуговування з ймовірністю

$$p_j \left(\sum_{j=1}^n p_j = 1 \right)$$

$$M(\xi / B_i) = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}$$

виникає в j -го агрегаті. Якщо, наприклад, у даний момент робітник закінчив обслуговування i -го агрегату, то з ймовірністю p_i (від i не залежної) він наступним буде обслуговувати агрегат з

номером j ; при цьому він пройде до нього шлях довжиною a_{ij} . Чому дорівнює середня довжина пройденого шляху за один перехід?

Нехай подія B_i , означає, що номер агрегату, обслуговування якого передувало даному переходові, дорівнює i . Тоді $P(B_i)=p_i$ і ймовірність того, що робітник від i -го агрегату направиться до j -му, $j=1, \dots, n$, дорівнює p_j . Довжина переходу при цьому складе a_{ij} . Тому

$$M(\xi/B_i) = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij}$$

і по формулі повної ймовірності

$$M\xi = \sum_{j=1}^n P(B_i)M(\xi/B_i) = \sum_{i,j=1}^n p_i p_j a_{ij}$$

Отриманий вираз дозволяє порівнювати різні варіанти розташування агрегатів з погляду мінімізації величини $M\xi$ при заданих обмеженнях на a_{ij} . Наприклад, якщо $a_{ij} \geq 1$ і всі агрегати однотипні ($p_i=1/n$), то при їхньому розташуванні уздовж однієї прямої лінії одержимо $a_{ij} = |j - i|$,

$$M\xi = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n |j - i| = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{n-1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

так що $M\xi$ при великих n дорівнює приблизно $n/3$.

(Для підрахунку цієї суми досить помітити, що

$\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1) = \frac{1}{3}(n-2)(n-1)n$ (порівняйте початкові значення і збільшення цих функцій)).

Таким чином, якщо в день відбувається a викликів, то середня довжина сумарного переходу складе приблизно $an/3$. Неважко показати, що розташування агрегатів по колу буде більш вигідним, однак і воно не буде оптимальним.

Приклад 3. Зробимо розрахунок лінійної кореляції за даними наступної таблиці (частота m_i показує, скільки разів зустрілася пара відповідних значень x_i, y_i :

x	y	Частота m
23,0	0,48	2
24,0	0,50	4

24,5	0,49	3
24,5	0,50	2
25,0	0,51	1
25,5	0,52	1
26,0	0,49	2
26,0	0,51	1
26,0	0,53	2
26,5	0,50	1
26,5	0,52	1
27,0	0,54	2
27,0	0,52	1
28,0	0,53	3
		$n=26$

Виберемо для величини x початок відріку $x_0=26,0$. Масштабний коефіцієнт $h_1=0,5$. Для величини y виберемо відповідно $y_0=0,50$; $h_2=0,01$. Таким чином, для нашого приклада

$$u = (x-26,0)/0,5; \quad v = (y-0,50)/0,01.$$

Складемо розрахункову таблицю для обчислення потрібних нам сум $\sum u, \sum u^2, \sum v, \sum v^2, \sum uv$,

причому помітимо, що кожен доданок варто враховувати стільки разів, скільки разів він зустрічається в таблиці. Це значить, що відповідні доданки варто ще помножити на частоту m .

Нижче приведено розрахункову таблицю (у другому рядку умовно зазначено порядок дій):

x	y	m	u	um	u^2m	v	vm	v^2m	uvm
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)= (3)(4)	(6)= (4)(5)	(7)	(8)= (3)(7)	(9)= (7)(8)	(10)= (5)(7)
23,0	0,48	2	-6	-12	72	-2	-4	8	24
24,0	0,50	4	-4	-16	64	0	0	0	0
24,5	0,49	3	-3	-9	27	-1	-3	3	9
24,5	0,50	2	-3	-6	18	0	0	0	0
25,0	0,51	1	-2	-2	4	1	1	1	-2
25,5	0,52	1	-1	-1	1	2	2	4	-2
26,0	0,49	2	0	0	0	-1	-2	2	0

26,0	0,51	1	0	0	0	1	1	1	0
26,0	0,53	2	0	0	0	3	6	18	0
26,5	0,50	1	1	1	1	0	0	0	0
26,5	0,52	1	1	1	1	2	2	4	2
27,0	0,54	2	2	4	8	4	8	32	16
27,0	0,52	1	2	2	4	2	2	4	4
28,0	0,53	3	4	12	48	3	9	27	36
Суми		26	-	-28	248	-	22	104	87

В останньому рядку розрахункової таблиці підраховано суми, які потрібні для подальших розрахунків (Тут через Σ^* позначено суми, узяті з урахуванням частоти т.):

$$\Sigma u = \Sigma^* u m = -26; \Sigma u^2 = \Sigma^* u^2 m = 248; \Sigma v = \Sigma^* v m = 22;$$

$$\Sigma v^2 = \Sigma^* v^2 m = 104; \Sigma uv = \Sigma^* uv m = 87.$$

Звідси одержуємо:

$$\bar{u} = \frac{-26}{26} = -1; \quad \bar{x} = 26,0 + 0,5(-1) = 25,5;$$

$$s_1 = 0,5 \sqrt{\frac{248 - 26(-1)^2}{25}} = 1,49; \quad \bar{v} = \frac{22}{26} = 0,846;$$

$$\bar{y} = 0,50 + 0,01 \cdot 0,846 = 0,50846;$$

$$s_2 = 0,01 \sqrt{\frac{104 - 26(0,846)^2}{25}} = 0,0185;$$

і, нарешті, вибірковий коефіцієнт кореляції

$$r_n = \frac{87 - 26(-1)0,846}{\sqrt{248 - 26} \sqrt{104 - 18,6}} = \frac{109,0}{14,90 \cdot 9,24} = 0,793.$$

За допомогою отриманих даних можна вже написати рівняння прямих регресії

$$y - 0,508 = 0,793 \frac{0,0185}{1,49} (x - 25,5) = 0,0098(x - 25,5),$$

$$x - 25,5 = 0,793 \frac{1,49}{0,0185} (y - 0,508) = 64(y - 0,508).$$

На рис. 13.24 приведені прямі регресії і вибіркові дані для розглянутого приклада.

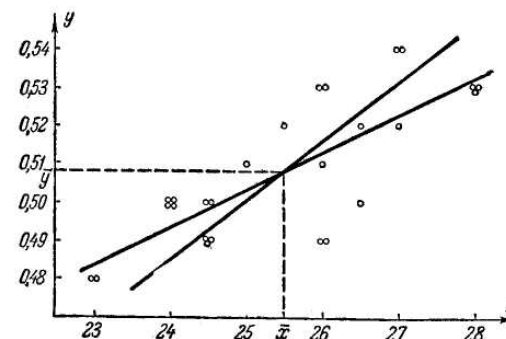


Рис. 13.24.

Зауваження про довірчі оцінки коефіцієнта кореляції.

Розгляд питання про довірчі оцінки коефіцієнта кореляції виходить за рамки нашого посібника. Помітимо тільки, що для цих оцінок не рекомендується застосовувати «правило трьох сигм», так як розподіл ймовірностей вибіркового коефіцієнта кореляції навіть для великих n значно відрізняється від нормального. Ми обмежимося вказівкою про вирішення більш простого питання: чи не може виявитися, що вибірковий коефіцієнт кореляції випадково відмінний від нуля, а в дійсності випадкові величини ξ і η не корельовано?

Розв'язання цього питання дається за допомогою розподілу ймовірностей для вибіркового коефіцієнта кореляції за умови, що істинний коефіцієнт кореляції $r(\xi; \eta)$ дорівнює нулеві.

Нижче приводиться таблиця границь випадкових відхилень від нуля добутку $|r_n|$ на

$$\sqrt{n-1}$$

за умови $r(\xi; \eta) = 0$ у залежності від заданої ймовірності P і числа даних n . Якщо для вибіркового коефіцієнта кореляції r_n величина

$$\sqrt{n-1} |r_n|$$

виявиться більшою приведеного в таблиці граничного значення, то з надійністю P ми можемо стверджувати, що істинний коефіцієнт кореляції $r(\xi; \eta)$ відмінний від нуля.

Таблиця границь випадкових відхилень

$$\sqrt{n-1} |r_n|$$

$n \backslash P$	0,99	0,999	$n \backslash P$	0,99	0,999
------------------	------	-------	------------------	------	-------

10	2,29	2,62	25	2,47	3,03
11	2,32	2,68	30	2,49	3,07
12	2,35	2,73	35	2,50	3,10
13	2,37	2,77	40	2,51	3,13
14	2,39	2,81	45	2,52	3,15
15	2,40	2,85	50	2,53	3,16
16	2,41	2,87	60	2,536	3,184
17	2,41	2,90	70	2,541	3,198
18	2,43	2,92	80	2,546	3,209
19	2,44	2,94	90	2,550	3,219
20	2,45	2,96	100	2,553	3,226
			∞	2,576	3,291

Приклад 4. Для приклада, розглянутого вище,
 $n=26; r_n=0,793; \sqrt{n-1} |r_n|=3,96$.

Так як це число (3,96) значно більше границі випадкового відхилення, що складає всього 3,03 при надійності $P=0,999$, то ми можемо бути упевнені в кореляційному зв'язку розглянутих величин.

Мікромодуль 32
Індивідуальні тестові завдання

1. Знайти центр розподілу і середнє квадратичне відхилення для розподілу (13.20) числа очок.
2. Те ж для суми чисел очок, які випадають на двох гральних кістках.
Указівка. Скористатися теоремами додавання математичних очікувань і дисперсій.
3. Знайти математичне очікування числа білих куль в іспиті за схемою завдання 8 мікромодуля 31.
Указівка. Представити ξ у вигляді суми характеристичних випадкових величин, зв'язаних з кожним вийманням кулі.
4. Знайти центр і дисперсію розподілу (13.22) числа зроблених пострілів при стрілянині за схемою приклада 3 мікромодуля 31 (п.6). Розглянути числовий приклад при $p=1/10$ і дати тлумачення математичного очікування.
Указівка. Скористатися степеневими рядами для

$$\frac{1}{(1-q)^2} \text{ і } \frac{1}{(1-p)^2}$$

5. Знайти центр і дисперсію розподілу Пірсона (13.45).
Указівка. Скористатися інтегруванням по частинам або основною властивістю гамма-функції.
6. Довести теорему додавання центральних моментів третього порядку для незалежних випадкових величин ξ, η :

$$\mathbf{M}[(\xi+\eta)-(a+b)]^3 = \mathbf{M}(\xi-a)^3 + \mathbf{M}(\eta-b)^3$$
.
7. Знайти коефіцієнт асиметрії біноміального розподілу частоти μ_n .
Указівка. Обчислити спочатку третій центральний момент для характеристичної величини λ :

$$\mathbf{M}(\lambda-p)^3 = (1-p)^3 p + (0-p)^3 q = pq(q-p),$$

потім скористатися теоремою додавання для центральних моментів третього порядку.

8. Довести, що коефіцієнт асиметрії розподілу Пірсона (13.45) удвічі більший так названого коефіцієнта варіації

$$C_v = \sigma(\xi) / \mathbf{M}(\xi) = 1 / \sqrt{a}$$
.

Указівка. При обчисленні центрального моменту

$$\mathbf{M}(\xi-a)^3$$

- виразити його через початкові моменти.
9. Обчислити центральний момент четвертого порядку для загального нормального розподілу ймовірностей (13.44).
Указівка. Замінити $x-a=t\sigma$ і проінтегрувати по частинам.
 10. Довести теорему Муавра—Лапласа безпосередньо за допомогою характеристичної функції частоти μ_n (13.91).
Указівка. За допомогою формул (13.90), (13.91) і (13.96) побудувати характеристичну функцію $f_n(u)$ нормованої частоти

$$\tau_n = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}}$$

і потім за допомогою розкладання в ряд експонент

$$e^{i \frac{u}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{q}{p}}} \text{ і } e^{-i \frac{u}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{q}{p}}}$$

перетворити характеристичну функцію до вигляду

$$f_n(u) = \left(1 - \frac{u^2}{2n} - i \frac{u^3}{3!n\sqrt{n}} \frac{q-p}{\sqrt{pq}} + \dots \right)^n$$

11. Оцінити відносну частоту ω_n при $p=0,01$; $n=1000$ з надійністю $P=0,99$. Сформулювати висновок.

12. Було зроблено 12 000 кидань монети, при цьому герб випадав 6019 разів. Наскільки добре погоджується це з припущенням про те, що ймовірність випадання герба дорівнює 0,5.

13. Розподіл деякої ознаки у великій партії виробів дається таблицею:

Значення x	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	
Частота M	150	380	1320	1530	970	470	180	5000

Виконується випадкова вибірка в 100 виробів. Оцінити вибірккову середню з надійністю $P=0,99$.

14. Випадкова вибірка з деякої партії виробів дала наступний розподіл ознаки:

Значення x	3,40	3,45	3,50	3,55	3,60	3,65	3,70	
Частота m	3	5	12	28	28	14	10	100

Чи можна вважати, що середнє значення ознаки в цій партії не відрізняється від середнього значення в партії попереднього приклада (якщо прийняти умову незмінності σ у різних партіях)?

15. Довести, що розподіл Пуассона можна розглядати як граничний для біноміального розподілу при $n \rightarrow \infty$ і $p \rightarrow 0$, якщо $np = a$ залишається незмінним.

Указівка. Замінивши $p = a/n$, перейти у формулі

$$C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} \frac{a^m}{n^m} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-m}$$

до границі при $n \rightarrow \infty$.

16. При додаванні великого числа n доданків, заокруглених до одиниць того самого розряду 10^{-m} , приймається, що похибка заокруглення кожного доданка є випадкова величина (ξ) з рівномірним розподілом ймовірностей в інтервалі $(-0,5 \cdot 10^{-m}; +0,5 \cdot 10^{-m})$. Показати, що абсолютна похибка суми з ймовірністю 0,997 не перевищить $\sqrt{3n} \cdot 0,5 \cdot 10^{-m}$.

Указівка. Похибку суми розглядати як суму n однаково розподілених незалежних доданків — похибок заокруглення. Вважати, що при досить великому n похибка суми має розподіл,

близький до нормального з центром 0 і середнім квадратичним відхиленням

$$\sigma = \sqrt{n} \sigma(\xi) = \sqrt{n} \frac{10^{-m}}{2\sqrt{3}}$$

17. Розрахуйте лінійну кореляцію за даними спостережень:

x	y	Частоти m
2,3	7,1	5
2,3	7,3	4
2,6	7,3	12
2,6	7,5	8
2,6	7,7	1
2,9	7,5	5
2,9	7,7	5
3,2	7,7	4
3,2	7,7	7
3,5	7,7	2
3,5	7,9	1
3,8	7,9	1
		55

18. На телефонній станції виконувалися спостереження за числом ξ неправильних з'єднань у хвилину. Спостереження протягом години дали наступні результати:

3	1	3	1	4	2
2	4	0	3	0	2
2	0	2	1	4	3
3	1	4	2	2	1
1	2	1	0	3	4
1	3	2	7	2	0
0	1	3	3	1	2
4	2	0	2	3	1
2	5	1	1	0	1
1	2	2	1	1	5

Знайти центр і дисперсію розподілу і перевірити виконання

основної умови для розподілу Пуассона $M\xi=\sigma^2=a$. Знайти відповідний розподіл Пуассона. Порівняти таблицю розподілу дослідних даних з відповідною таблицею розподілу Пуассона.

19. Вимір 100 оброблених деталей дали наступні відхилення від номінального розміру:

-2	2	1	2	-1	-2	3	1	-1	0
0	-1	3	1	2	-3	1	0	1	1
0	1	-1	1	0	2	2	1	0	-1
1	1	4	-1	1	1	-1	0	2	-2
2	0	-2	0	0	-1	1	4	-2	1
-3	0	0	1	4	0	-1	2	1	2
-1	1	9	-1	0	3	1	-2	3	-1
1	2	2	0	-2	1	0	-1	0	3
3	-2	-1	-2	1	0	0	-3	1	0
2	1	0	3	-1	2	1	0	-1	0

Найти центр і дисперсію розподілу і побудувати відповідний нормальний розподіл ймовірностей. Порівняти таблицю функції розподілу по дослідним даним (таблицю накопичених відносних частот) з відповідною таблицею функції нормального розподілу

20. Знайти розподіл Пірсона (13.45) для наступної таблиці дослідних даних (у приведених одиницях):

Значення x	0	1	2	3	4	5	6	
Частота m	1	33	41	18	5	1	1	100

Перевірити виконання основної умови для розподілу Пірсона $C_S=2C_v$. Порівняти таблицю накопичених частот по дослідним даним з таблицею відповідної функції розподілу Пірсона.

Список літератури

- 1.Боровков А.А. Теория вероятностей. М: Наука, 1976.-352с.
- 2.Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков. Издательство Харьковского университета.1972.-256с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. К:А.С.К.,2001.-648с.
4. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. К: Видавничий центр "Академія", 2002,— 624 с.(Альма-матер).
5. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика (модульна технологія навчання). К: НАУ, 2004. -276с.
6. Козлов В.Н.,Максимов Ю.Д., Хватов Ю.А. Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов /для студентов технических направлений бакалаврата /: Учеб. пособие. Пб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.-56с.

7. Кононюк А.Ю. Вища математика. Навчальний посібник. У 2 ч. Ч.1 К: 2008.- 690 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М: Наука, 1971.-432с.
9. Мовчан В. Т., Репета В.К., Бойко О.М., Пічкоров О.В. Диференціальне числення функції однієї змінної: Задачник-практикум. К: НАУ, 2001.-96с.
10. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М: Наука, 1969.- 640с.
11. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення.-К: Техніка, 2000.-592 с.
12. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник.- Д: "Видавництво Сталкер", 2003.- 496 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М: Наука, 1985.-Т. 1.-456с.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М: Наука, 1966.-Т. 3.-656с.

Навчальне видання

КОНОНЮК Анатолій Юхимович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Модульна технологія навчання)

Частина 2

Навчальний посібник

Навчальне видання

А.Ю. Кононюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Модульна технологія навчання)

Книга 1

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів Кривенко О.А.
Оригінал-макет виготовлено видавництвом «КНТ»
Редагування авторське
Відповідальний за випуск Пашутинський Є.К.

Підписано до друку 15.07.2008 р.
Гарнітура SchoolBookAS. Формат 60x84/16 .
Папір офсетний. Друк офсетний.
Обл.-видав. арк. 28,33. Умов. друк. арк. 39,53.
Тираж 1000 пр. Замовлення № 23

Видавництво «КНТ»
04210, м. Київ, пр. Героїв Сталінграда, 8, корпус 8, оф. 1.
Тел./факс (044) 581-21-38, 331-91-53. E-mail: knt2003@ukr.net
Свідоцтво: ДК № 581 від 03.08.2001.
Надруковано в друкарні ІІІІ «Іса Плюс»
м. Харків, вул. Леніна, 29, кв. 5
тел. 8(057)759-70-84