МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

А.Ю. Кононюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Модульна технологія навчання)

Книга 1

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
КНТ
2009

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К 213

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів (лист № 1.48-Г-725 від 31.03.2008)

Рецензенти:

В.В.Довгай - к-т фіз.-мат. наук, доц. (Національний технічний університет „КПІ”);

В.В.Гавриленко - д-р фіз.-мат. наук, проф., *О.П.Будя* - к-т техн. наук, доц. (Київський університет економіки, туризму і права); *М.К.Печурін* - д-р техн. наук, проф. (Національний авіаційний університет).

Кононюк А.Ю.
К 213 Вища математика. (Модульна технологія навчання). В 2-х кн. Кн.1. Д 332. Навчальний посібник. К.: КТН, 2009. – 698 с.

ISBN 968-966–573–467–5 (багатотомне видання)
ISBN 968-966–573–466–8 (Книга 1)

У посібнику навчальний матеріал викладено на базі модульної технології вивчення вищої математики.

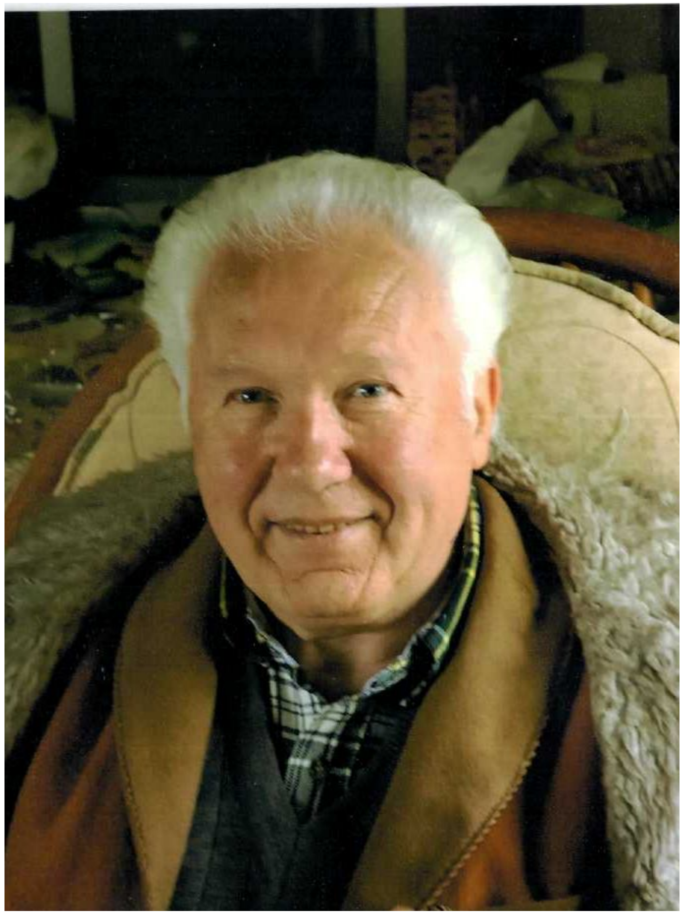
В першій частині навчального посібника викладено ті розділи вищої математики, які вивчаються на першому курсі вищих навчальних закладів технічного і економічного профілів.

Навчальний матеріал викладено у вигляді логічно завершених розділів – модулів. Модуль складається з трьох частин – мікромодулів. Кожний мікромодуль містить, відповідно до програми курсу, достатні теоретичні відомості, практичну частину, в якій наведено приклади розв’язання типових задач і вправ, а також індивідуальні тестові завдання.

Для студентів вищих технічних і економічних закладів.

УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 968-966–573–467–5 (багатотомне видання)
SBN 968-966–573–466–8 (Книга1)



Кононюк Анатолій Юхимович

Зміст

Вступ... 4
Модуль 1. Елементи лінійної алгебри 6
Мікромодуль 1. Системи лінійних рівнянь. Визначники. ... 6
Мікромодуль 2. Загальна теорія систем лінійних рівнянь... 56
Мікромодуль 3. Алгебра матриць 98
Модуль 2. Початок векторного і тензорного аналізу……… 129
Мікромодуль 4. Основні відомості з векторної алгебри 129
Мікромодуль 5. Основні відомості про тензори 183
Модуль 3. Елементи аналітичної геометрії 214
Мікромодуль 6. Аналітична геометрія на площині 214
Мікромодуль 7. Аналітична геометрія в просторі 255
Модуль 4. Величина, функція, границя 288
Мікромодуль 8. Величина 288
Мікромодуль 9. Функція 308
Мікромодуль 10. Границя 342
Модуль 5. Похідна і диференціал 412
Мікромодуль 11. Похідна 412
Мікромодуль 12. Диференціал 442
Модуль 6. Застосування похідної і диференціала 474
Мікромодуль 13. Основні теореми диференціального числення 474
Мікромодуль 14. Застосування похідної при дослідженні функцій……………………………….......................... 498
Модуль 7. Кривизна кривої і функції декількох змінних 554
Мікромодуль 15. Кривизна кривої 554
Мікромодуль 16. Функції декількох змінних 584
Мікромодуль 17. Застосування часткових похідних 633
Список літератури 678

Вступ

Як зазначено в Національній доктрині розвитку освіти в Україні, модернізація системи освіти на сучасному етапі спрямована на забезпечення її якості, відповідно до освітніх досягнень науки, культури і соціальної практики. Держава здійснює перманентний моніторинг якості освіти, забезпечує його прозорість, сприяє розвитку громадського контролю.

Одним із шляхів поліпшення якості навчально-методичного процесу у ВЗО є введення модульно-рейтингової системи навчання, яка є невід'ємною складовою всього навчально-виховного процесу та діагностики результітов навчання. Модульно-рейтингова система сприяє створеню необхідних умов і обставин для отримання певного рівня кваліфікації.

На відміну від сталої дидактичної системи оцінювання знань модульно-рейтингова система зорієнтована на стимулювання пізнавальної діяльності студентів, за рахунок скорочення аудиторних занять і приріст об’єму годин на самостійну роботу, індивідуальну роботу під керівництвом викладача. Студент у процесі навчання розвиває в собі навички самостійно оцінювати свій рівень підготовки, вибирати і визначати рівень засвоєння знань.

На підставі загальних положень в даному навчальному посібнику розроблені конкретні форми модульної системи організації навчання з дисципліни „Вища математика” і врахована специфіка і особливості навчального процесу. Рекомендована кількість модулів складає 2-4 модулі на семестр.

Матеріал посібника розділено на дві книги.

Перша книга містить матеріал з 1-го по 7-й модулі включно, який в основному відповідає програмі першого курсу вищих навчальних закладів.

Друга книга містить матеріал з 8-го по 13-й модулі включно, який відповідає програмі другого курсу вищих навчальних закладів.

Зміст всього навчального посібника відповідає програмі загального курсу вищої математики для бакалаврів і магістрів технічних та економічних вищих навчальних закладів і розрахований на 600-650 годин навчального процесу.

Модуль являє собою логічно завершений розділ навчального матеріалу. Матеріал навчального посібника поділено на тринадцять модулів. Кожен модуль складається з кількох мікромодулів.

Мікромодуль містить :

1) теоретичну частину,
2) практичну частину,
3) тестові завдання.

В теоретичній частині викладено в необхідному обсязі матеріал, опанування яким дозволяє засвоїти вказану в ньому тему.

Практична частина містить приклади розв’язання типових задач, які ілюструють теоретичний матеріал.

Наприкінці модуля вміщено мікромодуль індивідуальних тестових завдань, які послуговують для контролю засвоєння студентами матеріалу даного розділу.

Враховуючи різну кількість годин, які відводяться за планом для вивчення вищої математики студентами різних спеціальностей, викладач (лектор) може коригувати зміст модулів, кількість тестових завдань, які студент повинен виконати протягом терміну, відведеного навчальним планом.

Модуль 1.
Елементи лінійної алгебри

Мікромодуль 1
Системи лінійних рівнянь. Визначники

1.1. Метод послідовного виключення невідомих

Ми починаємо елементи лінійної алгебри з вивчення систем рівнянь першого степеня з декількома невідомими або, як зазвичай говорять, *систем лінійних рівнянь.*

На відміну від елементарної алгебри ми будемо вивчати системи з довільним числом рівнянь і невідомих, причому іноді число рівнянь системи не буде навіть передбачатися співпадаючою з числом невідомих. Нехай нам дана система з s лінійних рівнянь з n невідомими. Умовимося вживати наступну символіку: невідомі ми будемо позначати буквою x з індексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; рівняння будемо вважати перенумерованими — перше, друге, . . . , s-е; коефіцієнт із i-го рівняння при невідомому x_j позначимо a_{ij}, вільний член i-го рівняння позначимо через b_i.

Наша система запишеться тепер у наступному загальному вигляді

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= b_s \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

Коефіцієнти при невідомих складають прямокутну таблицю

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots. a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ a_{s1}a_{s2}\ldots a_{sn} \end{pmatrix} (1.2)$$

яка називається матрицею з s рядків і n стовпців; числа a_{ij} називаються елементами матриці.

Якщо $s=n$ (тобто число рядків дорівнює числу стовпців),то матриця називається *квадратною матрицею порядку n.* Діагональ цієї матриці, що йде від лівого верхнього до першого нижнього кута (тобто складена з елементів a_{11}, a_{22},, ..., a_{nn}), називається *головною діагоналлю.* Квадратна матриця порядку n буде називатися *одиничною матрицею порядку n,* якщо всі елементи її головної діагоналі дорівнюють одиниці, а всі елементи поза цією діагоналлю дорівнюють нулеві.

Розв'язком системи лінійних рівнянь (1.1) називається така система n чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, де кожне з рівнянь (1.1) обертається в тотожність після заміни в ньому невідомих x_i відповідними числами k_i, $i=1, 2, \ldots, n$.

Система лінійних рівнянь може не мати жодного розв'язка і тоді вона називається *несумісною.* Така є, наприклад, система

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}\right\}$$

Ліві частини цих рівнянь збігаються, але праві різні, і тому ніяка система значень невідомих не може задовольнити обом рівнянням відразу.Якщо ж система лінійних рівнянь має розв'язок, то вона називається *сумісною.* Сумісна система називається *визначеною,* якщо вона має одне-єдине розв'язання — лише такі системи допускаються до розгляду в елементарній алгебрі,— і невизначеною, якщо розв'язок більше ніж один. Так система

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 + \ x_2 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

визначена: вона має розв'язок $x_1=1$, $x_2=3$ і, як легко перевіряється методом виключення невідомого, цей розв'язок буде єдиним. З іншого боку, система

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - \ x_2 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

невизначена, тому що має нескінченно багато розв’язок вигляду

$$x_t=k,\ x_2=3k—1, \qquad (1.3)$$

де число k довільне, причому розв’язками, що виходять з формули (1.3), вичерпуються всі розв’язки нашої системи.

Задача теорії систем лінійних рівнянь складається в розробці методів, що дозволяють довідатися, чи сумісна дана система рівнянь чи ні. У випадку сумісності установити число розв’язок, а також указати спосіб як знайти всі ці розв’язки.

Ми почнемо з методу, найбільш зручного для практичного застосування розв’язок систем з числовими коефіцієнтами, а саме *методу послідовного виключення невідомих* або *методу Гаусса.*

Спочатку одне попереднє зауваження. Нам доведеться робити далі такі перетворення системи лінійних рівнянь: обидві частини одного з рівнянь системи, які помножені на те саме число, віднімати з відповідних частин деякого іншого рівняння системи. Нехай для визначеності ми обидві частини першого рівняння системи (1.1), які помножені на число c, віднімаємо з відповідних частин другого рівняння. Ми одержимо нову систему лінійних рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\
&a'_{21}x_1+a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n=b'_2\\
&a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n=b_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s
\end{aligned}\right\}(1.4)$$

де $a'_{2j}=a_{2j}-ca_{1j}$ при $j=1,2,\ldots n$, $b'_2=b_2-cb_1$.

*Системи рівнянь (*1.1*) і (*1.4*) еквівалентні, тобто вони або обидві несумісні, або ж обидві сумісні і мають одні і ті ж самі розв’язки.* Справді, нехай $k_1,k_2,\ldots k_n$, буде довільний розв’язок системи (1.1). Ці числа задовольняють, мабуть, усім рівнянням системи (1.4), крім другого. Вони задовольняють, однак, і другому рівнянню системи (1.4) - досить згадати, як це рівняння виражається через друге і перше рівняння системи (1.1). Зворотно, усякий розв’язок системи (1.4) буде задовольняти і системі (1.1). Дійсно, друге рівняння системи (1.1) отримують віднімаючи з обох частин другого рівняння системи (1.1) відповідних частин першого рівняння цієї системи, помножених на число $-c$. Зрозуміло, що *якщо до системи* (1.1) *будуть кілька разів застосовані перетворення розглянутого типу, то знову отримана система рівнянь залишиться еквівалентною вихідній системі* (1.1).

Може статись, що після виконання таких перетворень у нашій системі з'явиться рівняння, усі коефіцієнти лівої частини якого дорівнюють нулеві. Якщо і вільний член цього рівняння дорівнює нулеві, то рівняння задовольняється при будь-яких значеннях невідомих, і тому, *відкидаючи це рівняння, ми прийдемо до системи рівнянь, еквівалентній вихідній системі.* Якщо ж вільний член розглянутого рівняння відмінний від нуля, то це рівняння не може задовольнятися ні при яких значеннях невідомих, а тому *отримана нами система рівнянь, так само як і еквівалентна їй вихідна система, будуть несумісними.*

Перейдемо тепер до викладу методу Гаусса.

Нехай дана довільна система лінійних рівнянь (1.1). Покладемо, для визначеності, що коефіцієнт $a_{11}\neq 0$, хоча насправді він може, звичайно, виявитися рівним нулю, і ми повинні нулем почати з якого-небудь іншого, відмінного від нуля, коефіцієнта з першого рівняння системи.

Перетворимо тепер систему (1.1), виключаючи невідоме x_1 із усіх рівнянь, крім першого. Для цього обидві частини першого рівняння помножимо на число a_{21}/a_{11} і віднімемо з відповідних частин другого рівняння, потім обидві частини першого рівняння, помножені на число a_{21}/a_{11}, віднімемо з відповідних частин третього рівняння, і т.д.

Ми прийдемо цим шляхом до нової системи з s лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\
a'_{22}x_2+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2\\
a'_{32}x_2+\ldots+a'_{3n}x_n&=b'_3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a'_{s2}x_2+\ldots+a'_{sn}x_n&=b'_s
\end{aligned}\right\}(1.5)$$

Нам немає необхідності явно записувати вирази нових коефіцієнтів a'_{ij} і нових вільних членів b'_i через коефіцієнти і вільні члени вихідної системи (1.1). Як ми знаємо, система рівнянь (1.5) еквівалентна системі (1.1). Будемо перетворювати тепер систему

(1.5). При цьому перше рівняння ми не будемо більше торкати зовсім і підлягаючому перетворенням будемо вважати лише частину системи (1.5), що складається з усіх рівнянь, крім першого. При цьому ми вважаємо, звичайно, що серед цих рівнянь немає таких, усі коефіцієнти лівих частин яких дорівнюють нулю,— такі рівняння ми викинули б, якби і їхні вільні члени були рівні нулеві, а в протилежному випадку ми вже довели б несумісність нашої системи. Таким чином, серед коефіцієнтів a'_{ij} є відмінні від нуля; для визначеності приймемо, що $a'_{22}\neq0$.Перетворимо тепер систему (1.5), віднімаючи з обох частин ретього і кожного з наступних рівнянь обидві частини другого рівняння, помножені відповідно на числа

$$a'_{32}/a'_{22},\ a'_{42}/a'_{22},\ \ldots a'_{s2}/a'_{22}\ldots$$

Цим буде виключене невідоме x_2 із усіх рівнянь, крім першого і другого, і ми прийдемо до наступної системи рівнянь, еквівалентній системі (1.5), а тому і системі (1.1):

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a''_{t3}x_3 + \ldots + a''_{tn}x_n = b''_t
\end{array}\right\}$$

Наша система містить тепер t рівнянь, $t\leq s$, тому що деякі рівнянні виявилися, можливо, відкинутими. Зрозуміло, що число рівнянь системи могло зменшитися вже після виключення невідомого x_1. Надалі підлягає перетворенням лише частина отриманої системи, що містить усі рівняння, крім двох перших.

Коли зупиниться цей процес послідовного виключення невідомих? Якщо ми прийдемо до такої системи, одне з рівнянь якої має відмінний від нуля вільний член, а всі коефіцієнти лівої частини дорівнюють нулеві, то, як ми знаємо, наша вихідна система несумісна.

У протилежному випадку ми одержимо систему рівнянь, еквівалентну системі (1.1)

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1,k-1}x_{k-1} + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2,k-1}x_{k-1} + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^{(k-2)}{}_{k-1,k-1}x_{k-1} + a^{(k-2)}{}_{k-1,k}x_k + \ldots + a^{(k-2)}{}_{k-1,n}x_n = b^{(k-2)}{}_{k-1} \\
a^{(k-1)}{}_{k,k}x_k + \ldots + a^{(k-1)}{}_{k,n}x_n = b^{(k-1)}{}_k
\end{array}\right\} (1.6)$$

Тут $a_{11}\neq 0,\ a'_{22}\neq 0,\ \ldots,\ a^{(k-2)}{}_{k-1,k-1}\neq 0,\ a^{(k-1)}{}_{kk}\neq 0$

Відмітимо також, що $k\leq s$ і, очевидно, $k\leq n$.

В цьому випадку система (1.1) сумісна. Вона буде визначеною при $k=n$ і невизначеною при $k<n$. Дійсно, якщо $k=n$, то система має вигляд

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a^{(n-1)}{}_{nn}x_n = b^{(n-1)}{}_n
\end{array} \qquad (1.7)$$

З останнього рівняння ми одержуємо цілком визначене значення для невідомого x_n. Підставляючи його в передостаннє рівняння, ми знайдемо однозначно визначене значення для невідомого x_{n-1}. Продовжуючи так далі, ми знайдемо, що система (1.6), а тому і система (1.1), мають єдиний розв'язок, тобто сумісні і визначені. Якщо ж $k<n$, то для "вільних" невідомих $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ми візьмемо довільні числові значення, після чого, рухаючись по системі (1.6) знизу вгору, ми, як і вище, знайдемо для невідомих $x_k,\ x_{k-1},\ \ldots,\ x_2,\ x_1$ цілком визначені значення. Так як значення для вільних невідомих можна вибрати нескінченним числом різних способів, то наша система (1.6) і, отже, система (1.1) будуть спільними, але невизначеними. Легко перевірити, що зазначеним тут методом (при усіляких виборах значень для вільних невідомих) будуть знайдені всі розв'язки системи (1.1).

Варто відмітити, що „трикутна" форма системи рівнянь (1.7) або „трапецієподібна" форма системи рівнянь (1.6) (при $k<n$) вийшла через припущення що коефіцієнти a_{11}, a'_{22}, і т. д. відмінні від нуля. В загальному випадку та система рівнянь, до котрої ми

прийдемо після доведення до кінця процесу виключення невідомих, здобуває трапецієподібну форму тільки після належної зміни нумерації невідомих.

Підсумовуючи усе викладене вище, ми одержуємо, що *метод Гаусса може застосовуватися до будь-якої системи лінійних рівнянь. При цьому система буде несумісна, якщо в процесі перетворень ми одержимо рівняння, у якому коефіцієнти при всіх невідомих дорівнюють нулеві, а вільний член відмінний від нуля; якщо ж ми такого рівняння не зустрінемо, то система буде сумісною.*

Сумісна система рівнянь буде визначеною, якщо вона приводиться до трикутного вигляду, і невизначеною, якщо приводиться до трапецієподібного вигляду при $k<n$.

Застосуємо сказане до випадку системи лінійних *однорідних* рівнянь, тобто рівнянь, вільні члени яких дорівнюють нулеві. Така система завжди сумісна, тому що має *нульовий розв'язок* (0, 0, ..., 0). Нехай у розглянутій системі число рівнянь менше числа невідомих. Тоді наша система не може приводитися до трикутного вигляду, тому що в процесі перетворень за методом Гаусса число рівнянь системи може зменшуватися, але не може збільшуватися; вона приводиться, отже, до трапецієподібного вигляду, тобто невизначена.

Іншими словами, *якщо в системі лінійних однорідних рівнянь число рівнянь менше числа невідомих, то ця система має, крім нульового розв'язка, також і ненульовий розв'язок,* тобто розв'язки, у яких значення деяких (або навіть усіх) невідомих відмінні від нуля; *таких розв'язків буде нескінченно багато.*

При практичному розв'язані системи лінійних рівнянь метолом Гаусса варто виписати матрицю з коефіцієнтів системи, приєднати до неї стовпець з вільних членів, який для зручності відділений вертикальною рисою, і всі перетворення виконувати над рядками цієї «розширеної» матриці.

Приклади.

1. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9\\ x_1+x_2+3x_3&=2\\ 3x_1+6x_2+x_3&=25 \end{aligned}\right\}$$

Піддаємо перетворенням розширену матрицю цієї системи:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&5&-9\\ 1&-1&3&2\\ 3&-6&-1&25 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&5&-9\\ 0&-3&-2&11\\ 0&-12&-16&52 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1&2&5&-9\\ 0&-3&-2&11\\ 0&0&-8&8 \end{array}\right)$$

Ми приходимо, отже до системи рівнянь

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+5x_3&=-9\\ -3x_2-2x_3&=11\\ -8x_3&=8 \end{aligned}\right\}$$

яка має єдиний розв'язок $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=-1$

Вихідна система виявилася визначеною.

2. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} x_1-5x_2-8x_3+x_4&=3\\ 3x_1+x_2-3x_3-5x_4&=1\\ -7x_3+2x_4&=-5\\ 11x_2+20x_3-9x_4&=2 \end{aligned}\right\}$$

Перетворимо розширену матрицю системи

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-5&-8&1&3\\ 3&1&-3&-5&1\\ 1&0&-7&2&-5\\ 0&11&20&-9&2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-5&-8&1&3\\ 0&16&21&-8&-8\\ 0&5&1&1&-8\\ 0&11&20&-9&2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-5&-8&1&3\\ 0&-89&0&-29&160\\ 0&5&1&1&-8\\ 0&-89&0&-29&162 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1&-5&-8&1&3\\ 0&-89&0&-29&160\\ 0&5&1&1&-8\\ 0&0&0&0&2 \end{array}\right)$$

Ми прийшли до системи, що містить рівняння 0=2. Вихідна система буде, отже, несумісною.

1.2. Визначники другого і третього порядків

Метод розв'язання системи лінійних рівнянь, викладений у попередньому розділі, досить простий і вимагає виконання однотипних обчислень. Його істотним недоліком є, однак, те, що він не дає можливості сформулювати умови сумісності або визначеності системи за допомогою коефіцієнтів і вільних членів цієї системи. З іншого боку, навіть у випадку визначеної системи цей метод не дозволяє знайти формули, які виражають розв'язання системи через її коефіцієнти і вільні члени. Усе це виявляється, однак, необхідним у різних теоретичних питаннях, зокрема, у геометричних дослідженнях, а тому теорію систем лінійних рівнянь розвивають іншими методами, більш глибокими. Загальний випадок буде розглянуто у наступних розділах, а подальший зміст цього розділу присвячується випадкові визначених систем, які мають рівне число рівнянь і невідомих, причому ми почнемо з систем із двома і трьома невідомими, які уже вивчалися в елементарній алгебрі.

Нехай дана *система двох лінійних рівнянь із двома невідомими*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array}\right\}(1.8)$$

коефіцієнти якої складають квадратну матрицю другого порядку

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Застосувавши до системи (1.8) метод зрівняння коефіцієнтів, ми отримаємо:

$(a_{11}a_{22} — a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22} — a_{12}b_2$

$(a_{11}a_{22} — a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}\ b_2 — b_1\ a_{21}$

Припустимо, що $a_{11}a_{22} — a_{12}a_{21} \neq 0$. Тоді

$x_1=(\ b_1a_{22} — a_{12}b_2\ )\ /(a_{11}a_{22} — a_{12}a_{21}),$

$x_2=(\ a_{11}\ b_2 — b_1\ a_{21}\ )\ /\ (a_{11}a_{22} — a_{12}a_{21})$ (1.10)

Легко перевірити, підставляючи отримані значення невідомих у рівняння (1.8), що (1.10) служить розв’язання для системи (1.8).

Загальний знаменник значень невідомих (1.10) дуже просто виражається через елементи матриці (1.9): він дорівнює добуткові елементів головної діагоналі мінус добуток елементів другої діагоналі. Це число називається *визначником* (або *детермінантом)* матриці (1.9), причому, як говорять, *визначником другого порядку,* так як матриця (1.9) є матриця другого порядку. Для позначення визначника матриці (1.9) уживається наступний символ: виписується матриця (1.9), але розміщується у прямих рисках замість круглих дужок; таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22}- a_{12}\ a_{21}. \quad (1.11)$$

Визначник має також інші позначення: $|A|$, det A.

Приклади

1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ =3·4-7·1=5;

2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$=1·5-(-2)·3=11.

Необхідно ще раз підкреслити, що в той час як матриця є таблиця з чисел, визначник є число, яке цілком певним чином зв'язане з квадратною матрицею. Помітимо, що добутки $a_{11}a_{22}$ і $a_{12}a_{21}$ називаються ***членами*** визначника другого порядку.

Чисельники виразів (1.10) мають такий же вигляд, як і знаменник, тобто також є визначниками другого порядку: чисельник виразу для x_1, є визначником матриці, що виходить з матриці (1.9) заміною її першого стовпця стовпцем з вільних членів системи (1.8), чисельник виразу для x_2 є визначник матриці, що виходить з матриці (1.9) такою же заміною її другого стовпця. Формули (1.10) тепер можна записати в наступному вигляді :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}} (1.12)$$

Словами це правило розв’язання системи двох лінійних рівнянь із двома невідомими (яке називається *правилом* Крамера) формулюється так:

Якщо визначник (1.11) *з коефіцієнтом системи рівнянь* (1.8) *відмінний від нуля, то ми одержимо розв’язання системи* (1.8), *беручи в якості значення для невідомих дроби, загальним знаменником яких служить визначник* (1.11), *а чисельником для невідомого* x_i (i=1,2) *є визначник, який отримується заміною у визначнику* (1.11) *і-го стовпця* (*тобто стовпця коефіцієнтів при шуканому невідомому) стовпцем з вільних членів.*

Приклад. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&=7\\ x_1-3x_2&=-2 \end{aligned}\right\}$$

Визначник з коефіцієнтів є

$$d=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-7$$

він відмінний від нуля, і тому до системи може бути застосовано правило Крамера. Чисельниками для невідомих будуть визначники

$$d_1=\begin{vmatrix}7 & 1\\ -2 & -3\end{vmatrix}=-19\ ,\ d_2=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-11$$

Таким чином, розв'язанням нашої системи служить наступна система чисел:

$$x_1=d_1/d=19/7,\ x_2=d_2/d=11/7.$$

Уведення визначників другого порядку не вносить істотних спрощень у розв'язання систем двох лінійних рівнянь із двома невідомими, розв'язання яких і без цього не представляє ніяких труднощів. Аналогічні методи для випадку *систем трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими* виявляються вже практично корисними.

Нехай дана система

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3. \end{aligned}\right\}\quad(1.13)$$

з матрицею із коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}a_{13}\\ a_{21} & a_{22}a_{23}\\ a_{31} & a_{32}a_{33} \end{pmatrix}\quad(1.14)$$

Якщо ми помножимо обидві частин першого з рівнянь (1.13) на число $a_{22}a_{33}—a_{23}a_{32}$, обидві частини другого рівняння на $a_{13}a_{32}—a_{12}a_{33}$,

обидві частини третього на $a_{12}a_{23}$-$a_{13}a_{22}$ а потім складемо всі три рівняння, то, як легко перевірити, коефіцієнти при x_2 і x_3 виявляться рівними нулеві, тобто ці невідомі одночасно виключаються, і ми одержимо рівність

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})x_1=$$
$$=b_1a_{22}a_{33}++a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}.\quad(1.15)$$

Коефіцієнт при x_1 у цій рівності називається *визначником третього порядку, який* відповідає матриці (1.14). Для його запису вживається така ж символіка, як і у випадку визначників другого порядку; таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}\quad(1.16)$$

Хоча вираз визначника третього порядку є досить громіздким, закон його складання з елементів матриці (1.14) виявляється досить простим.

Справді, один із трьох членів визначника, що входять у його вираз (1.16) зі знаком плюс, буде добутком елементів головної діагоналі, кожний із двох інших - добутком елементів, що лежать на паралелі до цієї діагоналі, з додаванням третього множника з протилежного кута матриці. Члени, що входять у (1.16) зі знаком мінус, будуються в такий же спосіб, але щодо другої діагоналі. Ми одержуємо спосіб обчислення визначників третього порядку, що приводить досить швидко до результату.

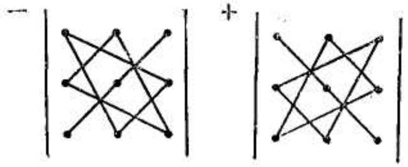


Рис.1.1.

На рис.1.1 праворуч схематично зазначено правило обчислення додатних членів визначника третього порядку, ліворуч — правило обчислення його від'ємних членів.

Приклади

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2-1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=30+2-24-12+20-6=10$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)\cdot(-2)\cdot(-2)-(-5)\cdot3\cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2)=-20+15+4=-1$$

Права частина рівності (1.15) також буде визначником третього порядку, а саме визначником матриці, що виходить з матриці (1.14) заміною її першого стовпця стовпцем з вільних членів системи (1.13). Якщо ми позначимо визначник (1.16) буквою d, а визначник, що виходить заміною його j-го стовпця (j=1, 2, 3) стовпцем з вільних членів системи (1.13), символом d_j, то рівність (1.15) буде мати вигляд $dx_l=d_l$, звідки при $d\neq0$ випливає

$$x_l=d_l/d \quad (1.17)$$

Таким же шляхом, помноживши рівняння (1.13) відповідно на числа $a_{23}a_{31}$-$a_{21}a_{33}$, $a_{11}a_{33}$-$a_{13}a_{31}$, $a_{13}a_{21}$-$a_{11}a_{23}$, ми одержимо для x_2 наступний вираз (знову при $d\neq0$):

$$x_2=d_2/d \quad (1.18)$$

Нарешті, помноживши ці рівняння відповідно на $a_{12}a_{31}$ — $a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}$— $a_{12}a_{21}$, ми прийдемо до виразу для x_3 :

$$x_3=d_3/d. \qquad (1.19).$$

Підставляючи вираз (1.17)—(1.19) у рівняння (1.13) (передбачається, зрозуміло, що визначники d і всі d_j записані в розгорнутому вигляді), ми одержали б після громіздких, але цілком доступних обчислень, що всі ці рівняння задовольняються, тобто що числа (1.17)—(1.19) складають розв'язання системи (1.13). Таким чином, *якщо визначник з коефіцієнтів системи трьох лінійних рівнянь із трьома невідомими відмінний від нуля, то розв'язання цієї системи може бути знайдене за правилом Крамера, яке формулюється так само, як і у випадку системи двох рівнянь.*

Приклад. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2 \quad +x_3 &= 0 \\ 3x_1+2x_2-5x_3 &= 1 \\ x_1+3x_2-2x_3 &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Визначник з коефіцієнтів системи відмінний від нуля:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=28$$

тому до системи можливо застосувати правило Крамера.

Чисельниками для невідомих будуть визначники

$$d_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}=13 \qquad d_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}=17$$

$$d_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=24$$

тобто розв'язанням системи служить система чисел

$$x_1=13/28,\ x_2=47/28,\ x_3=21/28=3/4.$$

1.3. Перестановки і підстановки

Для визначення і вивчення визначників порядку n нам будуть потрібні деякі поняття і факти, що відносяться до кінцевих множин.

Нехай дана деяка кінцева множина M, що складається з n елементів. Ці елементи можуть бути перенумеровані за допомогою перших n натуральних чисел 1, 2, ..., n, і так як в цікавлячих нас питаннях індивідуальні властивості елементів множини M не будуть грати ніякої ролі, то ми просто приймемо, що елементами M служать самі ці числа 1, 2, ..., n.

Крім розташування чисел, яке вживається нами, 1,2, ..., n в їхньому нормальному порядку, їх можна упорядкувати і багатьма іншими способами.

Так, числа 1, 2, 3, 4 можна розташувати також такими способами: 3, 1, 2, 4 або 2, 4, 1, 3 і т.д. Усяке розташування чисел 1, 2, ..., n в деякому визначеному порядку називається *перестановкою* з n чисел (або з n символів). *Число різних перестановок з n символів дорівнює добуткові* $1\cdot 2\ldots n$, що позначається $n!$ (читається: «энфакториал»).

Дійсно, загальний вигляд перестановки з n символів є $i_1, i_2, ..., i_n$, де кожне з i_s є одне з чисел 1, 2, ..., n, причому ні одне з цих чисел не зустрічається двічі. У якості i_1 можна взяти кожне з чисел 1, 2, ..., n; це дає n різних можливостей. Якщо, однак, i_1 уже вибрано, то в якості i_2 можна взяти лише одне з тих що залишилися $n—1$ чисел, тобто число різних способів вибрати символи i_1 і i_2 дорівнює добуткові n $(n—1)$ і т.д.

Таким чином, число перестановок з n символів при n=2 дорівнює 2!=2 (перестановки 12 і 21; ми не будемо в прикладах, де $n \leq 9$, розділяти символи, які переставляються, комами); при n=3 це число дорівнює 3!=6, при n=4 воно дорівнює 4!=24. Далі, з ростом n число перестановок надзвичайно швидко зростає; так, при n = 5 воно дорівнює 5! = 120, а при n=10 — уже 3628800.

Якщо в деякій перестановці ми поміняємо місцями які-небудь два символи (не що обов'язково стоять поруч), а всі інші символи залишимо на місці, то одержимо, мабуть, нову перестановку. Це перетворення перестановки називається *транспозицією.*

Усі $n!$ перестановок з n символів можна розташувати в такому порядку, що кожна наступна буде виходити з попередньої одною транспозицією, причому починати можна з будь-якої перестановки.

Це твердження справедливе при n=2: якщо потрібно починати з перестановки 12, то шукане розташування буде 12,21; якщо ж ми повинні почати з перестановки 21,то це буде розташування 21,12. Припустимо, що наше твердження вже доведене для $n—1$, і доведемо його для n.

Нехай ми повинні почати з перестановки

$$i_1, i_2, \ldots i_n \qquad (1.20)$$

Розглянемо всі перестановки з n символів, у яких на першому місці стоїть i_1. Таких перестановок $(n—1)!$ і їх можна упорядкувати згідно з вимогами теореми, притому починаючи з перестановки (1.20), так як це зводиться насправді до упорядкування всіх перестановок з $n—1$ символів, яке, по індуктивному припущенню, можна почати з будь-якої перестановки, зокрема з перестановки $i_2, \ldots, i_n$. В останній з отриманих таким шляхом перестановок з n символів робимо транспозицію символу i_1 з будь-яким іншим символом, наприклад з i_2, і, починаючи зі знову отриманої перестановки, упорядковуємо потрібним способом усі ті перестановки, у яких на першому місці стоїть i_2, і т.д. Цим шляхом можна, мабуть, перебрати всі перестановки з n символів.

З цієї теореми випливає, що *від будь-якої перестановки з n символів можна перейти до будь-якої іншої перестановки з тих же символів за допомогою декількох транспозицій*

Говорять, що в даній перестановці числа i і j складають *інверсію,* якщо $i>j$, але i стоїть в цій перестановці раніш. Перестановка називається *парною,* якщо її символи складають парне число інверсій, і непарною в протилежному випадку. Так, перестановка $1, 2, \ldots, n$ буде парною при будь-якому n, тому що число інверсій у ній дорівнює нулеві. Перестановка 451362 (n = 6) містить 8 інверсій і тому парна. Перестановка 38524671 (n = 8) містить 15 інверсій і тому непарна.

Усяка транспозиція змінює парність перестановки.

Для доведення цієї важливої теореми розглянемо спочатку випадок, коли транспоновані символи i і j стоять поруч, тобто перестановка має вигляд $\ldots, i, j, \ldots$, де точки замінюють ті символи, які не зачіпаються транспозицією. Транспозиція перетворює нашу перестановку в перестановку $\ldots, j, i, \ldots$, причому, зрозуміло, в обох перестановках кожний із символів i, j складає ті самі інверсії із символами, які залишаються на місці. Якщо символи i і j раніш не складали інверсії, то у новій перестановці з'являється одна нова інверсія, тобто число інверсій збільшується на одиницю; якщо ж вони раніш складали інверсію, то тепер вона пропадає, тобто число інверсій на одиницю зменшується. В обох випадках парність перестановки міняється. Нехай тепер між транспонованими символами i і j розташовано s символів, $s>0$, тобто перестановка має вигляд,

$$\ldots .\ i,\ k_l\ k_2,\ \ldots,\ k_s, j, \ldots \qquad (1.21)$$

Транспозицію символів i і j можна одержати в результаті послідовного виконання $2s+1$ транспозицій сусідніх елементів. А саме, це будуть транспозиції, що переставляють символи i і k_1, потім i (які уже стоять на місці символу k_1) і k_2, і т.д., поки i не займе місце символу k_s. За цими S транспозиціями випливає транспозиція, яка переміщує символи i і j, а потім s транспозицій символу j із усіма k, після чого j займає місце символу i, а символи k повертаються на свої старі місця. Таким чином, ми непарне число раз змінювали парність перестановки, а тому перестановки (1.21) і

$$\ldots.,\ j,\ k_l, k_2, \ldots k_s,\ i, \ldots \quad (1.22)$$

мають протилежні парності.

При $n \geq 2$ *число парних перестановок з n символів дорівнює числу непарних, тобто дорівнює* $(1/2)n!$.

Справді, упорядкуємо, на підставі доведеного раніше, усі перестановки з n символів так, що кожна виходить з попередньої одною транспозицією. Сусідні перестановки будуть мати протилежні парності, тобто перестановки розташовані так, що парні і непарні чергуються. Наше твердження випливає тепер з очевидного зауваження, що при $n \geq 2$ число $n!$ парне.

Визначимо тепер одне нове поняття, а саме поняття *підстановки n-го степеня.* Запишемо одну під іншою дві перестановки з n символів, беручи отримані два рядки в дужки; наприклад, при $n=5$:

$$\begin{pmatrix} 3\,5\,1\,4\,2 \\ 5\,2\,3\,4\,1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

У цьому прикладі під числом 3 стоїть число 5, під числом 5- число 2 і т.д. Ми кажемо, що число 3 *переходить* в 5, число 5 переходить в 2, число 1 переходить в 3, число 4 переходить в 4 (або *залишається на місці)* і, нарешті, число 2 переходить в 1. Таким чином, дві перестановки, які записані одна під одною у вигляді (1.23), визначають деяке *взаємно однозначне відображення* множини з перших п'яти натуральних чисел на себе, тобто відображення, яке кожному з натуральних чисел 1,2,3,4,5 ставить у відповідність одне з цих же натуральних чисел, причому різним числам ставляться у відповідність різні ж числа. При цьому, так як чисел всього п'ять, тобто маємо кінцеву множину, то кожне з цих п'яти чисел буде відповідати одному з чисел 1,2,3,4,5, а саме числу, яке в нього «переходить».

Ясно, що те взаємно однозначне відображення множини з перших п'яти натуральних чисел, що ми одержали за допомогою (1.23), можна було б одержати, записуючи одну під другою, і деякі інші пари перестановок з п'яти символів. Ці записи виходять з (1.23) шляхом декількох транспозицій стовпчиків; такими є, наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

В усіх цих записах 3 переходить в 5, 5 в 2, і т.д.

Аналогічним шляхом дві перестановки з n символів, які записані одна під іншою, визначають деяке взаємно однозначне відображення множини перших n натуральних чисел на себе. Усяке взаємно однозначне відображення A множин перших n натуральних чисел на себе називається *підстановкою n-го степеня,* причому, мабуть, усяка підстановка A може бути записана за допомогою двох перестановок, підписаних одна під одною

$$A = \begin{pmatrix} i_1\,,\ i_2, \ldots,\ \ i_n \\ \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

через α_i тут позначається те число, в яке при підстановці A переходить число i, $i = 1,2,\ldots,\ n$.

Підстановка A володіє багатьма різними записами вигляду (1.25). Так, (1.23) і (1.24) є різними записами однієї і тієї ж підстановки 5-го степеня.

Від одного запису підстановки A до іншої можна перейти за допомогою декількох транспозицій стовпчиків. При цьому можна одержати такий запис вигляду (1.25), у верхньому (або нижньому) рядкові якої стоїть кожна наперед задана перестановка з n символів. Зокрема, усяка підстановка n-го степеня A може бути записана у вигляді

$$A=\begin{pmatrix}1, \ 2,..., \ n\\ \alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\end{pmatrix}(1.26)$$

тобто з натуральним розташуванням чисел у верхньому рядку. При такому записі різні підстановки відрізняються одна від одної перестановками, які стоять у нижньому рядку, і тому *число підстановок n-го степеня дорівнює числу перестановок з n символів, тобто дорівнює n*!.

Прикладом підстановки *n*-го степеня служить *тотожна підстановка*

$$E=\begin{pmatrix}1, \ 2,..., \ n\\ 1, \ 2,..., \ n\end{pmatrix},$$

при якій на місці залишаються всі символи. Необхідно відмітити, що верхній і нижній рядки в записі (1.25) підстановки *A* грають різні ролі і, переставивши їх, ми, узагалі говорячи, одержуємо іншу підстановку. Так, підстановки 4-го степеня

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 3\\ 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} \text{ і } \begin{pmatrix}4 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

різні: при першій число 2 переходить в 4, при другій — в 3.

Візьмемо довільний запис (1.25) деякої підстановки *n*-го степеня *A*. Перестановки, що складають верхній і нижній рядки цього запису, можуть мати або однакові, або протилежні парності. Перехід до будь-якого іншого запису підстановки *A* можна здійснити, як ми знаємо, шляхом послідовного виконання декількох транспозицій у верхньому рядку і відповідних їм транспозицій у нижньому рядку. Однак, роблячи одну транспозицію у верхньому рядку запису (1.25) і одну транспозицію відповідних елементів у нижньому рядку, ми одночасно змінюємо парності обох перестановок і тому зберігаємо збіг або протилежність цих парностей. Звідси випливає, що *або при всіх записах підстановки A парності верхнього і нижнього рядків збігаються, або ж при всіх записах вони протилежні.* У першому випадку підстановка *A* буде називатися *парною,* у другому — *непарною.* Зокрема, тотожна підстановка буде парною.

Якщо підстановка *A* записана у вигляді (1.26), тобто у верхньому рядку стоїть парна перестановка 1,2, ..., *n*, то парність підстановки *A* буде визначатися парністю перестановки α_1, α_2, ..., α_n, яка стоїть в нижньому рядку. Звідси випливає, що *число парних підстановок n-го степеня дорівнює числу непарних, тобто дорівнює* (1/2)*n*!. Визначенню парності підстановок можна дати наступну трохи змінену форму. Якщо в запису (1.25) парності обох рядків збігаються, то число інверсій або в обох рядках парне, або в обох непарне, тобто загальне число інверсій у двох рядках запису (1.25) буде парним; якщо ж парності рядків запису (1.25) протилежні, то загальне число інверсій у цих двох рядках непарне. Таким чином, *підстановка A буде парною, якщо загальне число інверсій у двох рядках будь-якого її запису парне, і непарною— у протилежному випадку.*

Приклад. Нехай дана підстановка п'ятого степеня

$$\begin{pmatrix}3\,1\,4\,5\,2\\ 2\,5\,4\,3\,1\end{pmatrix}$$

У її верхньому рядку 4 інверсії, у нижньої 7 інверсій. Загальне число інверсій у двох рядках є 11, і тому підстановка непарна. Перепишемо цю підстановку у вигляді

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ 5\,1\,2\,4\,3\end{pmatrix}$$

Число інверсій у верхньому рядку є 0, у нижньої 5, тобто загальне число знову непарне. Ми бачимо, що при різних записах підстановки зберігається парність загального числа інверсій, але не саме це число.

1.4. Визначники *n*-го порядку

Ми хочемо тепер узагальнити результати, які отримані в розділі 1.2 для *n*=2 і 3, на випадок довільного *n.* Для цієї мети необхідно увести визначники *n*-го порядку. Неможливо, однак, зробити це тим шляхом, яким були уведені визначники другого і третього порядків, тобто розв'язуючи в загальному вигляді системи лінійних рівнянь: у міру зростання *n* обчислення ставали б усе більш і більш громіздкими, а при довільному *n* практично здійсненними тільки з використанням комп'ютерів . Ми вибираємо інший шлях: розглядаючи уже відомі нам визначники другого і третього порядків, ми постараємося установити загальний закон, по якому ці визначники виражаються через елементи відповідних матриць, і застосуємо цей закон як визначення для визначника порядку *n*, а потім доведемо, що при такому визначенні правило Крамера залишається справедливим.

Нагадаємо вираз визначників другого і третього порядків:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Ми бачимо, що всякий член визначника другого порядку є добуток двох елементів, що стоять як у різних рядках, так і в різних стовпцях, причому всі добутки такого вигляду, які тільки можна скласти з елементів матриці другого порядку (їх всього два), використані як члени визначника. Подібним же чином усякий член визначника третього порядку є добутком трьох елементів, також узятих по одному в кожнім рядку і у кожнім стовпці, причому знову всі такі добутки використовуються як члени визначника.

Нехай тепер дано квадратну матрицю порядку *n*

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Розглянемо всі добутки, які можливо утворити по *n* елементів цієї матриці, які розташовані у різних рядках і різних стовпцях, тобто добутки вигляду

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n} \quad (1.28)$$

де індекси $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ складають деяку перестановку з чисел 1,2…., *n*. Число таких добутків дорівнює числу різних перестановок з *n* символів, тобто дорівнює *n*!. Будемо вважати всі ці

добутки членами майбутнього визначника *n*-го порядку, що відповідає матриці (1.27).

Для визначення знака, з яким добуток (1.28) входить до складу визначника, помітимо, що з індексів цього добутку можна скласти підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_n \end{pmatrix} (1.29)$$

де *i* переходить у α_i якщо до складу добутку (1.28) входить елемент, що стоїть в *i*-му рядку і α_i –му стовпці матриці (1.27). Розглядаючи вираз визначників другого і третього порядків, ми бачимо, що в них зі знаком плюс входять ті члени, індекси яких складають парну підстановку, а зі знаком мінус — члени з непарною підстановкою індексів. Природно зберегти цю закономірність і у визначенні визначника *n*-го порядку.

Ми приходимо, таким чином, до наступного визначення: *визначником n-го порядку,* який відповідає матриці (1.27), називається алгебраїчна сума *n*! членів, складена в такий спосіб: членами служать всі добутки, які можливо утворити, *n* елементів матриці, узятих по одному в кожнім рядку й у кожнім стовпці, причому член береться зі знаком плюс, якщо його індекси складають парну підстановку, і зі знаком мінус — у протилежному випадку.

Для запису визначника *n*-го порядку, який відповідає матриці (1.27), ми будемо, як і у випадку визначників другого і третього порядків, уживати символ

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.30)$$

Визначники *n-го* порядку перетворюються при *n*=2 і *n*=3 у розглянуті раніше визначники другого і третього порядків, а при *n*=1, тобто для матриць, які складаються з одного елемента, визначник дорівнює самому цьому елементові. Ми не знаємо поки, однак, чи можна при *n*>3 використовувати визначник *n*-го порядку для розв'язання систем лінійних рівнянь. Це буде показано далі; попередньо необхідно піддати визначники n-го порядку детальному вивченню і, зокрема, знайти методи для їхнього обчислення, тому що обчислювати визначники, безпосередньо застосовуючи їхнє визначення, навіть при не дуже великих n було б досить важко.

Зараз ми установимо деякі найпростіші властивості визначників n-го порядку, які відносяться переважно до одного з наступних двох питань: з одного боку, нас будуть цікавити умови, при яких визначник дорівнює нулю; з іншого боку, ми вкажемо деякі перетворення матриці, які не змінюють її визначника або ж піддають його змінам, які легко враховуються.

Назвемо *транспонуванням* матриці (1.27) таке перетворення цієї матриці, при якому її рядки становляться стовпцями з тим же самим номером, тобто перехід від матриці (1.27) до матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \ldots a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22}\ \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ \ldots a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

можна сказати, що транспонування є поворот матриці (1.27) біля головної діагоналі. Відповідно говорять, що визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{21}\ \ldots a_{n1} \\ a_{12}\ a_{22}\ \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\ a_{2n}\ \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.32)$$

отримано транспонуванням визначника (1.30).

Властивість 1. *Визначник не міняється при транспонуванні.*

Справді, усякий член визначника (1.30) має вигляд

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n} \quad (1.33)$$

де другі індекси складають деяку перестановку із символів 1, 2, . . ., n. Однак усі множники добутку (1.33) і у визначнику (1.32) залишаються в різних рядках і різних стовпцях, тобто (1.33) служить членом і для транспонованого визначника. Вірно, мабуть, і зворотне, і тому визначники (1.30) і (1.32) складаються з тих самих членів. Знак члена (1.33) у визначнику (1.30) визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 \quad 2 \ldots\ n \\ \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_n \end{pmatrix}; \quad (1.34)$$

у визначнику (1.32) перші індекси елементів указують на помер стовпця, другі — на номер рядка, тому членові (1.33) у визначнику (1.32) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_n \\ 1 \quad 2 \ldots\ n \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Підстановки (1.34) і (1.35) — у загальному випадку різні, але мають, мабуть, ту саму парність, а тому член (1.33) має в обох визначниках той самий знак. Таким чином, визначники (1.30) і (1.32) є сумами однакових членів, узятих з однаковими знаками, тобто рівні один одному. З властивості 1 випливає, що усяке твердження про рядки визначника справедливе і для його стовпців і зворотно, тобто, що *у визначнику* (на відміну від матриці) *рядки і стовпці рівноправні.* Виходячи з цього, ми будемо подальші властивості 2—9 формулювати і доводити лише для рядків визначника; аналогічні властивості для стовпців не будуть вимагати особливого доведення.

Властивість 2. *Якщо один з рядків визначника складається з нулів, то визначник дорівнює нулеві.*

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка визначника є нулями. В кожен член визначника повинен увійти множником один елемент із i-го рядка, і тому всі члени визначника дорівнюють нулеві.

Властивість 3. *Якщо один визначник отримано з іншого перестановкою двох рядків, то всі члени першого визначника будуть членами і в другому, але зі зворотними знаками, тобто від перестановки двох рядків визначник лише змінює знак.*

Нехай у визначнику (1.30) переставляються i-й і j-й рядки, $i \neq j$, а всі інші рядки залишаються на місці. Ми одержуємо визначник

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1} \ a_{j2} \ \dots \ a_{jn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ .a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn} \end{vmatrix} (i),(j) \quad (1.36)$$

(збоку зазначені номери рядків).

Якщо

$$a_{1\alpha_1} \quad a_{2\alpha_2} \quad \dots \quad a_{n\alpha_n} \quad (1.37)$$

є член визначника (1.30), то всі його множники і у визначнику (1.36) залишаються, мабуть, у різних рядках і різних стовпцях. Таким чином, визначники (1.30) і (1.36) складаються з тих самих членів. Членові (1.37) у визначнику (1.30) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & i \dots & j \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_i \dots & \alpha_j \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

а у визначнику (1.36) - підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & j \dots & i \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 \dots & \alpha_i \dots & \alpha_j \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

так як, наприклад, елемент $a_{i\alpha_i}$ стоїть тепер у j-у рядку, але залишається в старому α_i–му стовпці. Підстановка (1.39) виходить, однак, з підстановки (1.38) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку, тобто має протилежну парність. Звідси випливає, що всі члени визначника (1.30) входять у визначник (1.36) зі зворотними знаками, тобто визначники (1.30) і (1.36) відрізняються один від одного лише знаком.

Властивість 4. *Визначник, що містить два однакові рядки, дорівнює нулеві.*

Справді, нехай визначник дорівнює числу d і нехай відповідні елементи його i-го і j-го рядків $(i \neq j)$ рівні між собою. Після перестановки цих двох рядків визначник стане дорівнювати, через властивість 3, числу — d. Так як, однак, переставляються однакові рядки, то визначник насправді не міняється, тобто $d=—d$, звідки $d=0$.

Властивість 5. *Якщо всі елементи деякого рядка визначника помножити на деяке число k, то сам визначник збільшиться на k.*

Нехай на k помножені всі елементи i-го рядка. Кожен член визначника містить рівно один елемент із i-го рядка, тому всякий член здобуває множник k, тобто сам визначник збільшується на k.

Ця властивість допускає і таке формулювання: *загальний множник всіх елементів деякого рядка визначника можна винести за знак визначника.*

Властивість 6. *Визначник, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулеві.*

Справді, нехай елементи j-го рядка визначника відрізняються

від відповідних елементів i-го рядка $(i \neq j)$ тим самим множником k. Виносячи цей загальний множник k з j-го рядка за знак визначника, ми одержимо визначник із двома однаковими рядками, який дорівнює нулеві по властивості 4. Властивість 4 (а також властивість 2 при $n>1$) є, мабуть, окремими випадками властивості 6 (при $k=1$ і $k=0$).

Властивість 7. *Якщо всі елементи i-го рядка визначника n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків:* $a_{ij}=b_j+c_j, \quad j=1, \quad \dots, n$, *то визначник дорівнює сумі двох визначників, у яких усі рядки, крім i-го, — такі ж, як і в заданому визначнику, а i-й рядок в одному з доданків складається з елементів* b_j, *в іншому — з елементів* c_j.

Дійсно, усякий член заданого визначника можна представити у виді

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...a_{i\alpha_i}...a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}...\left(b_{\alpha_i} + c_{\alpha_i}\right)...a_{n\alpha_n} =$$

$$= a_{1\alpha_1}a_{1\alpha_1}...b_{\alpha_i}...a_{n\alpha_n} + a_{1\alpha_1}a_{1\alpha_1}...c_{\alpha_i}...a_{n\alpha_n}$$

Збираючи разом перші доданки цих сум (з тими ж знаками, які мали відповідні члени в заданому визначнику), ми отримаємо, мабуть, визначник n-го порядку, який відрізняється від заданого визначника лише тим, що в i-у рядку замість елементів a_{ij} стоять елементи b_j,. Відповідно другі доданки складають визначник, в i-у рядку якого стоять елементи c_j. Таким чином,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & ... & b_n+c_n \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \\ \multicolumn{4}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Властивість 7 без труднощів поширюється на випадок, коли всякий елемент i-го рядка є сума не двох, а m доданків, $m \geq 2$.

Будемо говорити, що i-й рядок визначника є *лінійна комбінація* його інших рядків, якщо для всякого рядка з номером j, $j = 1, ...,$ $i - 1$, $i+1, ...,$ n, можна вказати таке число k_j, що, помноживши j-й рядок на k_j, а потім складаючи всі рядки, крім i-го (причому додавання рядків варто розуміти так, що складаються елементи всіх цих рядків у кожнім стовпці окремо), ми одержимо i-й рядок. Деякі з коефіцієнтів k_j можуть бути рівними нулю, тобто i-й рядок буде насправді лінійною комбінацією не всіх, а лише деяких з рядків, що залишилися. Зокрема, якщо лише один з коефіцієнтів k_j відмінний від нуля, ми одержуємо випадок пропорційності двох рядків. Нарешті, якщо рядок складається цілком з нулів, то він завжди буде лінійному комбінацією інших рядків, - випадок, коли всі k_j дорівнюють нулеві.

Властивість 8. *Якщо один з рядків визначника є лінійна комбінація його інших рядків, то визначник дорівнює нулеві.*

Нехай, наприклад, i-й рядок буде лінійною комбінацією s інших рядків, $1 \leq s \leq n—1$. Всякий елемент i-го рядка буде тоді сумою s доданків, а тому, застосовуючи властивість 7, ми представимо наш

визначник у вигляді суми визначників, у кожнім з яких i-й рядок буде пропорційний одному з інших рядків. По властивості 6 усі ці визначники дорівнюють нулеві; дорівнює нулеві, отже, і заданий визначник. Ця властивість є узагальненням властивості 6, причому, вона дає самий загальний випадок рівності визначника нулеві.

Властивість 9. *Визначник не міняється, якщо до елементів одного з його рядків додаються відповідні елементи іншого рядка, помножені на те саме число.*

Нехай, справді, до i-го рядка визначника d додається j-й рядок, $j \neq i$, помножений на число k, тобто в новому визначнику всякий елемент i-го рядка має вигляд $a_{is} + ka_{is}$, $s = 1, 2, ..., n$. Тоді, на підставі властивості 7, цей визначник дорівнює сумі двох визначників, з яких перший є d, а другий містить два пропорційні рядки і тому дорівнює нулеві.

Так як число k може бути і від'ємним, то визначник не міняється і при віднімані з одного його рядка іншого рядка, помноженого на деяке число. Узагалі, визначник не міняється, якщо до одного з його рядків додається будь-яка лінійна комбінація інших рядків . Розглянемо один приклад. Визначник називається *кососиметричним,* якщо його елементи, які є симетричні щодо головної діагоналі, відрізняються один від одного лише знаком, тобто якщо при всіх i і j буде a_{ji}=-a_{ij}, звідси випливає, що для всіх i буде a_{ii}=-a_{ii}=0. Таким чином, визначник має вигляд

$$d = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} ... a_{1n} \\ -a_{13} & 0 & a_{23} ... a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 ... a_{3n} \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} ... 0 \end{vmatrix}.$$

Помноживши кожен рядок цього визначника на число —1, ми одержимо транспонований визначник, тобто знову рівний d, звідки, через властивість 5, випливає:

$$(-1)^n d = d.$$

При непарному n звідси випливає: —d=d, тобто d=0. Таким чином, *усякий кососиметричний визначник непарного порядку дорівнює нулеві.*

1.5. Мінори і їхні алгебраїчні доповнення

Вище уже відзначалося, що було б важко обчислювати визначники n-го порядку, застосовуючи безпосередньо їхнє визначення, тобто кожен раз виписуючи всі $n!$ членів, визначаючи їхні знаки і т.д. Існують більш прості методи обчислення визначників, які засновані на тому, що визначник порядку n може бути виражений через визначники більш низьких порядків. З цією метою введемо наступне поняття.

Нехай дано визначник d порядку n. Беремо ціле число k, яке задовольняє умові $1 \leq k \leq n—1$, і у визначнику d вибираємо довільні k рядків і k стовпців. Елементи, які стоять на перетині цих рядків і стовпців, тобто приналежні до одного з обраних рядків і до одного з обраних стовпців, складають, мабуть, матрицю порядку k. Визначник цієї матриці називається *мінором* k-го *порядку* визначника d. Можна сказати також, що мінор k-го порядку є визначник, що виходить після викреслювання у визначнику d $n— k$ рядків і $n—k$ стовпців. Зокрема, після викреслювання у визначнику одного рядка й одного стовпця ми одержуємо мінор $(n—1)$-го порядку; з іншого боку, мінорами першого порядку будуть окремі елементи визначника d.

Нехай у визначнику d n-го порядку узято мінор M k-го порядку.

Якщо ми викреслимо ті рядки і стовпці, на перетині яких стоїть цей мінор, то залишиться мінор $M'(n—k)$-го порядку, який називається *додатковим мінором* для мінору M. Якщо ми викреслимо, навпаки, ті рядки і стовпці, у яких розташовані елементи мінору M', то залишиться, мабуть, мінор M. Таким чином, можна говорити про пару взаємно додаткових мінорів визначника. Зокрема, елемент a_{ij} і мінор $(n—1)$-го порядку, який виходить викреслюванням у визначнику i-го рядка і j-го стовпця, будуть складати пари взаємно додаткових мінорів. Якщо мінор k-го порядку M розташований у рядках з номерами $i_1, i_2 \ldots, i_k$ і в стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то назвемо *алгебраїчним доповненням* мінору M його додатковий мінор M', узятий зі знаком плюс або мінус у залежності від того, парна або непарна сума номерів усіх рядків і стовпців, в яких розташовано мінор M, тобто сума

$$s_M = i_1 + i_2 \ldots + i_k + j_1 + j_2 + \ldots + j_k \qquad (1.40)$$

Іншими словами, алгебраїчним доповненням для мінору M буде число

$$(—1)^{s_M} M'.$$

Добуток будь-якого мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення у визначнику d є алгебраїчною сумою, доданки якої, які виходять від помноження членів мінору M на узяті зі знаком $(—1)^{s_M}$ члени додаткового мінору M', будуть деякими членами визначника d, причому їхні знаки в цій сумі збігаються з тими знаками, з якими вони входять до складу визначника.

Доведення цієї теореми ми почнемо з випадку, коли мінор M розташований у лівому верхньому куті визначника:

$$d = \left| \begin{array}{c|c} a_{11} \ldots a_{1k} & a_{1,k+1} \ldots a_{1n} \\ \ldots M \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1} \ldots a_{kk} & a_{k,k+1} \ldots a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} \ldots a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} \ldots a_{k+1,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \quad M' \ldots \\ a_{n1} \ldots \quad a_{nk} & a_{n,k+1} \ldots \quad a_{nn} \end{array} \right|$$

тобто у рядках з номерами $1, 2, \ldots, k$ і в стовпцях з такими ж номерами. Тоді мінор M' буде займати правий нижній кут визначника. Число s_M в цьому випадку буде парним:

$$s_M = 1+2+\ldots+k+1+2+\ldots+k = 2(1+2+\ldots+k)$$

тому алгебраїчним доповненням для M служить сам мінор M'. Беремо довільний член

$$a_{1\alpha_1} \; a_{2\alpha_2} \ldots a_{k\alpha_k} \qquad (1.41)$$

мінору M; його знак у M буде $(—1)^l$, якщо l є число інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k \\ \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_k \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

Довільний член

$$a_{k+1,} \beta_{k+1} \; a_{k+2,} \beta_{k+2} \ldots a_{n,} \beta_n \qquad (1.43)$$

мінору M' має в цьому мінорі знак $(—1)^{l'}$, де l' є число інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 \ldots n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} \ldots \beta_n \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

Перемножуючи члени (1.41) і (1.43), ми одержимо добуток n елементів

$$a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2}\ \ldots a_{k\alpha_k}\ a_{k+1\ \beta_{k+1}}\ a_{k+2\ \beta_{k+2}}\ \ldots a_{n\ \beta_n}\ , \qquad (1.45)$$

розміщених у різних рядках і різних стовпцях визначника; він буде, отже, членом визначника d. Знак члена (1.45) у добутку MM' буде добутком знаків членів (1.41) і (1.43),тобто $(—1)^{l}\cdot(—1)^{l'}=(—1)^{l+l'}$. Такий же знак має, однак, член (1.45) і у визначнику d. Дійсно, нижній рядок підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\ldots & k & k+1 & k+2\ldots n \\ \alpha_1 & \alpha_2\ldots\alpha_k & & \beta_{k+1} & \beta_{k+2}\ldots\beta_n \end{pmatrix}$$

яка складена з індексів цього члена, містить лише $l+\ l'$ інверсій, так як ніяке α з жодним з β не може скласти інверсію: усі α не більше k, усі β не менше $k+l$.

Цим доведено розглянутий нами окремий випадок теореми.

Переходимо до розгляду загального випадку, тобто припустимо, що мінор M розташований в рядках з номерами $i_{1,}i_2, \ldots, i_k$ і в стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, причому

$$i_1<i_2<\ldots<i_k,\ \ j_1<j_2<\ldots<j_k$$

Постараємося, переставляючи рядки і стовпці визначника, перемістити мінор M в лівий верхній кут, причому так, щоб додатковий мінор не змінився. Для цієї мети переставимо i_1–й рядок з $(i_1\text{-}1)$-м, потім з $(i_2—2)$-м і т. д., поки i_1–й рядок не займе місце першого рядка; для цього ми повинні будемо переставити рядки $i_1—1$ раз. Будемо потім послідовно переставляти i_2-й рядок з рядками, розташованими над ним, поки він не розташується безпосередньо під i_1–м рядком, тобто на місці, яке до початку всіх перетворень займав другий рядок; для цього, як легко перевірити, ми повинні будемо переставити рядки $i_2—2$ рази. Аналогічним чином i_3–й рядок ми перемістимо на місце третього рядка і т.д., поки i_k-й рядок не з'явиться на місці k-го рядка. Усього ми повинні будемо зробити

$$(i_1\text{-}1)+(i_2\text{-}2)+\ \ldots\ +(i_k\text{-}k)=(\ i_1+i_2+\ \ldots\ +i_k)\ -\ (1+2+\ldots+k)$$

транспозицій рядків.

Мінор M розташувався уже в перших k рядках нового визначника. Будемо тепер послідовно переставляти стовпці визначника: j_1–й з усіма йому попередніми, поки він не займе першого місця, потім j_2-й, поки він не займе другого місця, і т.д. Усього стовпці будуть переставлені

$$(\ j_1+j_2+\ \ldots\ +j_k)\ -\ (1+2+\ldots+k)\ \text{раз.}$$

Після всіх цих перетворень ми приходимо до нового визначника d', у якому мінор M займає лівий верхній кут. Так як ми переставляли щораз лише сусідні рядки або стовпці, то взаємне розташування рядків і стовпців, які містили у визначнику d мінор M', залишається без зміни, а тому додатковим до мінору M у визначнику d' залишається мінор M', що займає, однак, уже правий нижній кут. Як доведено вище, добуток MM' є сумою деякої кількості членів визначника d', узятих з тими ж знаками, з якими вони входять в d'. Однак визначник d' отримано з визначника d шляхом

$$[(i_1+i_2+\ldots+i_k)\text{-}(1+2+\ldots+k)]+[(j_1+j_2+\ldots+j_k)\text{-}(1+2+\ldots+k)]=$$

$$=s_M\ \text{-}(1+2+\ldots+k)$$

транспозиції рядків і стовпців, тому, як ми знаємо з попереднього розділу, члени визначника d' відрізняються від відповідних членів визначника d лише знаком $(—1)^{s_M}$ (парне число $2(1+2+,\ldots+k)$ не буде, зрозуміло, впливати на знак). Звідси випливає, що добуток $(—1)^{s_M}MM'$ складається з деякої кількості членів визначника d, узятих з такими ж знаками, які вони мають у цьому визначнику. Теорема доведена.

Відмітимо, що якщо мінори M і M' взаємно доповнюють один одного, то числа S_M і S_M' мають однакову парність. Дійсно, номер усякого рядка і всякого стовпця входить доданком в одне і тільки одне з цих чисел, а тому сума $S_M + S_{M'}$ дорівнює загальній сумі номерів усіх рядків і стовпців визначника, тобто дорівнює парному числу $2(1+2+\ldots+n)$.

1.6. Обчислення визначників

Результати попереднього розділу дозволяють звести обчислення визначника n-го порядку на обчислення декількох визначників $(n—1)$-го порядку. Введемо спочатку наступні позначення: якщо a_{ij} — елемент визначника d, то через M_{ij} позначимо додатковий мінор або, коротше, *мінор цього елемента,* тобто мінор $(n—1)$-го порядку, який виходить після викреслювання з визначника i-го рядка і j-го стовпця. Далі, через A_{ij} позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, тобто

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$$

Як доведено в попередньому розділі, добуток $a_{ij}A_{ij}$ є сумою декількох членів визначника d, які входять у цю суму з тими ж знаками, з якими вони входять до складу визначника d.

Легко підрахувати число цих членів: воно дорівнює числу членів у мінорі M_{ij}, тобто дорівнює $(n—1)!$. Вибираємо тепер будь-який i-й рядок визначника d і беремо добуток кожного елемента цього рядка на його алгебраїчне доповнення:

$$a_{i1}A_{i1},\ a_{i2}A_{i2},\dots,a_{in}A_{in} \qquad (1.46)$$

Ніякий член визначника d не може ввійти до складу двох різних з числа добутків (1.46): усі члени визначника, які входять в добуток $a_{i1}A_{i1}$, містять з i-го рядка елемент a_{i1} і тому відрізняються від членів, які входять в добуток $a_{i2}A_{i2}$, тобто які утримують з i-го рядка елемент a_{i2}, і т. д.

З іншого боку, загальне число членів визначника d, які входять в усі добутки (1.46), дорівнює $(n—1)!\cdot n=n!$, тобто цим вичерпуються узагалі всі члени визначника d. Ми довели, таким чином, що має місце наступне *розкладання визначника d по i-у рядкові:*

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}, \qquad (1.47)$$

тобто *визначник d дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка на їхні алгебраїчні доповнення.* Аналогічне розкладання визначника можна одержати і по будь-якому його стовпцю.

Заміняючи в розкладанні (1.47) алгебраїчні доповнення відповідними мінорами зі знаками плюс або мінус, ми зведемо обчислення визначника n-го порядку до обчислення декількох визначників $(n—1)$-го порядку. Помітимо, що якщо деякі з елементів i-го рядка дорівнюють нулеві, то відповідні їм мінори не потрібно буде, зрозуміло, обчислювати. Через це корисно попередньо так перетворити визначник, використовуючи властивість 9, щоб в одному з рядків або в одному з стовпців досить багато елементів виявилося заміненими нулями. У дійсності *властивість 9 дозволяє в будь-якому рядку або будь-якому стовпці замінити нулями всі елементи, крім одного.* Справді, якщо $a_{1k}\neq0$, то будь-який елемент i-го рядка a_{ij} $i\neq k$, буде замінений нулем після віднімання k-го стовпця, помноженого на a_{ij}/a_{ik}, з j-го стовпця. Таким чином, обчислення визначника n-го порядку можна звести до обчислення одного визначника $(n$-$1)$-го порядку.

Приклади.

1. Обчислити визначник четвертого порядку

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Розкладемо його по третьому рядку, використовуючи наявність в ньому одного нуля:

$$d=(-1)^{3+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

Обчислюючи отримані визначники третього порядку, одержимо:
$d=2\cdot16-40+48=40$.

2.Обчислити визначник п'ятого порядку

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Додаючи до другого рядка потроєний п'ятий і віднімаючи з четвертого рядка учетверений п'ятий, одержимо;

$$d=\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Розклавши цей визначник по третьому стовпцю, що містить лише один елемент, який не дорівнює нулеві (з сумою індексів 5+3, тобто парному), одержимо

$$d=(-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Перетворимо знову отриманий визначник, додаючи до першого рядка подвоєний другий і віднімаючи з третього рядка потроєний другий, а з четвертого — подвоєний другий:

$$d=-\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

а потім розкладемо його по першому стовпцеві, причому помітимо, що єдиному не рівному нулеві елементові цього стовпця відповідає непарна сума індексів, одержимо:

$$d=\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

Обчислимо цей визначник третього порядку, попередньо розклавши його по третьому рядку:

$$d=36\cdot\begin{vmatrix} 25 & 17 \\ -34 & -26 \end{vmatrix}-(-33)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 17 \\ 26 & -26 \end{vmatrix}+(-24)\cdot\begin{vmatrix} -13 & 25 \\ 26 & -34 \end{vmatrix}=$$

$$=36\cdot(-72)-(-33)\cdot(-104)+(-24)\cdot(-208)=-1032$$

3. *Якщо всі елементи визначника, які розташовані по одну сторону від головної діагоналі, дорівнюють нулеві, то цей визначник дорівнює добуткові елементів, які стоять на головній діагоналі,*

Для визначника другого порядку це твердження очевидне. Ми тому будемо доводити його по індукції, тобто припустимо, що для визначників *(n*—1)-го порядку воно вже доведено, і розглянемо визначник *n*-го порядку

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23}\ldots a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0\ldots.\ \ a_{nn} \end{vmatrix}$$

Розкладаючи його по першому стовпцю, одержимо

$$d=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\ldots\ a_{2n} \\ 0 & a_{33}\ldots a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0\ldots.\ \ a_{nn} \end{vmatrix}$$

Але до мінору, що стоїть в правій частині, може бути застосовано припущення індукції, тобто він дорівнює добуткові $a_{22}a_{33}\ldots a_{nn,,}$ а тому

$$d=a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}$$

Узагальнюючи отримані вище розкладання визначника по рядку або стовпцеві, доведемо наступну теорему, яка говорить про *розкладання визначника по декількох рядках або стовпцях.*

Теорема Лапласа. *Нехай у визначнику d порядку n довільно обрані k рядків (або k стовпців),* $1\le k\le n$—1. *Тоді сума* *добутків усіх мінорів k-го порядку, які знаходяться в обраних рядках, на їхні алгебраїчні доповнення дорівнює визначникові d.*

Доведення. Нехай у визначнику d обрані рядки з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Ми знаємо, що добуток будь-якого мінору k-го порядку M, розташованого в цих рядках, на його алгебраїчне доповнення складається з деякої кількості членів визначника d, узятих з тими ж знаками, з якими вони входять до складу визначника. Теорема буде, отже, доведена, якщо ми покажемо, що, змушуючи M пробігати всі мінори k-го порядку, які розташовані в обраних рядках, ми одержимо всі члени визначника, причому жоден з них не зустрінеться двічі. Нехай

$$a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \quad (1.48)$$

- довільний член визначника d. Візьмемо окремо добуток тих елементів з цього члена, які належать до обраних нами рядкам з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$... Це буде добуток

$$a_{i_1\alpha_{i_1}}\, a_{i_2\alpha_{i_2}} \ldots a_{i_k\alpha_{i_k}}\,; \quad (1.49)$$

k множників цього добутку стоять в k різних стовпцях, а саме, в стовпцях з номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots \ \alpha_{i_k}$. Ці номери стовпців цілком визначаються, отже, завданням члена (1.48). Якщо ми позначимо через M мінор k-го порядку, який стоїть на перетині стовпців з цими номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \ \alpha_{i_k}$ і обраних раніше рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то добуток (1.49) буде одним із членів мінору M, а добуток всіх елементів із члена (1.48), які не ввійшли в (1.49), членом його додаткового мінору. Таким чином, усякий член визначника входить в добуток деякого, притому цілком визначеного, мінору k-го порядку з обраних рядків на його додатковий мінор, причому є добутком цілком визначених членів цих двох мінорів. Для того ж, нарешті, щоб одержати узятий нами член визначника з тим знаком, який він має у визначнику, залишається, як ми знаємо, замінити додатковий мінор алгебраїчним доповненням.

Цим закінчується доведення теореми.

Доведення теореми виконаємо трохи іншим шляхом. А саме, добуток будь-якого мінору k-го порядку M, розташованого в обраних рядках, на його алгебраїчне доповнення складається з $k!\,(n-k)!$ членів, так як мінор k-го порядку M складається з $k!$ членів, а його алгебраїчне доповнення, відрізняючись, можливо, лише знаком від мінору порядку $n-k$, містить $(n-k)!$ членів. З іншого боку, число мінорів k-го порядку, які утримуються в обраних нами рядках, дорівнює числу сполучень з n по k, тобто дорівнює числу $n!/k!(n\text{-}k)!$

Перемножуючи, ми одержуємо, що сума добутків усіх мінорів k-го порядку з обраних рядків на їхні алгебраїчні доповнення складається з $n!$ доданків. Таке ж, однак, і загальне число членів визначника d. Теорема показує, що всякий член визначника d входить хоча б один раз (а тоді і точно один раз) у розглянуту суму добутків мінорів на їхні алгебраїчні доповнення. Теорема Лапласа дозволяє зводити обчислення визначника n-го порядку до обчислення декількох визначників порядків k і $n-k$. Цих нових визначників досить багато і тому застосовувати теорему Лапласа доцільно лише в тому випадку, якщо у визначнику можна так вибрати k рядків (або стовпців), що багато яких з мінорів k-го порядку, розташованих у цих рядках, будуть дорівнювити нулеві.

Приклади.

1. Нехай дано визначник, всі елементи якого, які стоять у перших k рядках і останніх $n-k$ стовпцях, дорівнюють нулеві:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & 0 & \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & & & \\ a_{k+1,1} & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Тоді цей визначник дорівнює добуткові двох своїх мінорів

1.7. Правило Крамера

Викладена вище теорія визначників n-го порядку дозволяє показати, що ці визначники, уведені лише за аналогією з визначниками другого і третього порядків, подібно останнім можуть бути використані для розв'язання систем лінійних рівнянь. Спочатку зробимо, одне додаткове зауваження, зв'язане з розкладаннями визначників по рядку або стовпцеві; це зауваження буде надалі неодноразово використовуватися. Розкладемо визначник

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1f} \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots a_{2f} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nf} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

по його j-му стовпцю:

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

а потім замінимо в цьому розкладанні елементи j-го стовпця системою n довільних чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Вираз

$$b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \ldots + b_nA_{nj}$$

який ми одержимо, буде слугувати розкладанням по j-му стовпцю для визначника

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots b_1 \ldots a_{1n} \\ a_{21} \ldots b_2 \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots b_n \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

який отримується з визначника d заміною його j-го стовпця стовпцем з чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Справді, заміна j-го стовпця визначника d не впливає на мінори елементів цього стовпця, а тому і на їхні алгебраїчні доповнення.

Застосуємо це до випадку, коли за числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ беруться елементи k-го стовпця визначника d при $k \neq j$. Визначник, який ми одержимо після такої заміни, буде містити два однакових стовпця (j-й і k-й) і тому буде дорівнювати нулеві. Дорівнює нулеві, отже, і розкладання цього визначника по його j-му стовпцю, тобто

$$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0 \text{ при } j \neq k$$

Таким чином, *сума добутків всіх елементів деякого стовпця визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулеві.* Такий же результат справедливий і для рядків визначника.

Переходимо до розгляду систем лінійних рівнянь, причому обмежимося поки що випадком систем, у яких число рівнянь дорівнює числу невідомих, тобто систем вигляду

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (1.50)$$

Додатково припустимо, що визначник d з коефіцієнтів при невідомих у цій системі, який називають коротко *визначником системи,* відмінний від нуля. При цих припущеннях ми доведемо, що система (1.50) сумісна і навіть визначена.

Як указувалося раніше, розв'язуючи систему трьох рівнянь із трьома невідомими, ми множили кожне з рівнянь на деякий множник, а потім складали ці рівнянні, після чого коефіцієнти при двох невідомих із трьох виявлялися рівними нулю. Зараз ми легко виявляємо, що множники, які нами вживалися, були алгебраїчними доповненнями у визначнику системи до елемента, що є коефіцієнтом при шуканому невідомому в даному рівнянні. Цей же прийом буде тепер використаний для розв'язання системи (1.50).

Припустимо спочатку, що система (1.50) сумісна і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$— один з її розв'язок. Справедливі, отже, рівності

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1, \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2, \\ a_{31}\alpha_1 + a_{32}\alpha_2 + \ldots + a_{3n}\alpha_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{array}\right\} \quad (1.51)$$

Нехай j буде кожним з чисел 1, 2, ..., n. Помножимо обидві частини першої з рівностей (1.51) на A_{1j},тобто на алгебраїчне доповнення елемента a_{1j} у визначнику системи d; обидві частини другої рівності помножимо на A_{2j} і т.д., нарешті, обидві частини останньої — на A_{nj}. Складаючи потім окремо ліві й окремо праві частини всіх рівностей, ми прийдемо до наступної рівності.

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+...+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+...+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+$$
$$.........+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+...+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+...........+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+...+a_{nn}A_{nj})\alpha_n=$$
$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+...+b_nA_{nj}$$

Коефіцієнтом при α_j, у цій рівності служить d, коефіцієнти при всіх інших α будуть, через зроблене вище зауваження, дорівнювати нулеві, а вільний член буде визначником, який виходить з визначника d після заміни в ньому j-го стовпця стовпцем з вільних членів системи (1.50). Якщо цей останній визначник ми позначимо через d_j, то наша рівність прийме вигляд

$$d\alpha_j=d_j$$

звідки, через те, що $d\neq 0$,

$$\alpha_j=d_j/d,$$

Цим доведено, що якщо система (1.50) сумісна, то вона має єдиний розв'язок

$$\alpha_1=d_1/d,\ \alpha_2=d_2/d,...,\ \alpha_n=d_n/d \qquad (1.52)$$

Покажемо тепер, що система чисел (1.52) насправді задовольняє системі рівнянь (1.50), тобто що система (1.50) сумісна. При цьому ми використовуємо наступну загальновживану символіку.

Усяка сума вигляду $a_1+a_2+...+a_n$ буде скорочено позначатися через $\sum_{i=1}^{n}a_i$. Якщо ж розглядається сума, доданки якої a_{ij}, позначені двома індексами, причому i=1,2, ..., n, j=1,2, ..., m, то можна спочатку взяти суми елементів з фіксованим першим індексом, тобто суми

$$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

де i=1, 2,..., n, а потім скласти всі ці суми. Ми одержимо тоді для суми всіх елементів a_{ij} запис

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}$$

Можна було б, однак, спочатку складати доданки a_{ij}, з фіксованим другим індексом, а потім уже складати отримані суми. Тому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{i=1}^{n}a_{ij}$$

тобто *у подвійній сумі можна змінювати порядок підсумовувань.*

Підставимо тепер в i-те рівняння системи (1.50) значення невідомих (1.52). Так як ліву частину i-го рівняння можна записати у вигляді $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ і так як $d_j=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$, то ми одержимо

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bullet\frac{d_f}{d}=\frac{1}{d}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}\right)=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}b_k\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}\right)$$

Щодо цих перетворень відмітимо, що число $1/d$ виявилося загальним множником у всіх доданках і тому ми його винесли за знак суми; крім того, після зміни порядку підсумовувань множник b_k винесено за знак внутрішньої суми, так як від індексу внутрішнього підсумовування j він не залежить. Ми знаємо що вираз

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{A}_{kj}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+...+a_{in}A_{kn}$$

буде дорівнювати d при $k=i$ і дорівнює 0 при всіх інших k. Таким чином, у нашій зовнішній сумі по k залишиться лише один доданок, а саме b_id, тобто

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\bullet\frac{d_f}{d}=\frac{1}{d}\bullet b_id=b_i$$

Цим доведено, що система чисел (1.52) дійсно служить розв'язком для системи рівнянь (1.50).

Ми одержали наступний важливий результат:

Система n лінійних рівнянь з n невідомими, визначник якої відмінний від нуля, має розв'язання, і притому тільки одне. Це розв'язання виходить по формулах (1.52), тобто за *правилом Крамера;* формулювання цього правила таке ж, як і у випадку системи двох рівнянь .

Приклад. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 \qquad - 6x_4 &= 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Визначник цієї системи відмінний від нуля

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27$$

тому до системи може бути застосовано правило Крамера. Значення невідомих будуть мати чисельниками визначники

$$d_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \quad d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & -9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \quad d_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

Таким чином, $x_1=3$, $x_2=-4$, $x_3=-1$, $x_4=1$ буде розв'язком нашої системи, притому єдиним.

Ми виключили з розгляду випадок, коли визначник системи n лінійних рівнянь з n невідомими (1.50) дорівнює нулеві. Цей випадок ми будемо розглядати далі, де він знайде собі місце в загальній теорії систем з будь-яким числом рівнянь і будь-яким числом невідомих.

Щодо систем n лінійних рівнянь з n невідомими зробимо ще одне зауваження. Нехай дана система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (1.53)$$

Усі визначники d_j, $j=1, 2 \ldots, n$, містять у цьому випадку стовпець, складений з нулів, і тому дорівнюють нулеві. Таким чином, якщо визначник системи (1.53) відмінний від нуля, тобто якщо до цієї системи можна застосувати правило Крамера, то єдиним розв'язанням системи (1.53) буде нульове розв'язання

$$x_1=0, \quad x_2=0, \ldots.\ x_n=0. \qquad (1.54)$$

Звідси випливає такий результат:

Якщо система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими має розв'язання, відмінне від нульового, то визначник цієї системи необхідно дорівнює нулеві.

Далі буде показано, що і зворотно, якщо визначник такої системи дійсно дорівнює нулеві, то, крім нульового розв'язання, існування якого для всякої системи однорідних рівнянь очевидно, у неї будуть існувати й інші розв'язання.

Приклад. При яких значеннях k система рівнянь

$$\begin{aligned} kx_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + kx_2 &= 0 \end{aligned}$$

може мати ненульові розв'язання?

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$$

буде дорівнювати нулеві лише при $k=\pm1$. Легко бачити, що при кожнім з цих двох значень k задана система дійсно має розв'язання, які відмінні від нульового.

Значення правила Крамера полягає головним чином у тому, що в тих випадках, коли це правило може бути застосоване, воно дає явний вираз для розв'язання системи через коефіцієнти цієї системи. Практичне використання правила Крамера зв'язано, однак, з досить громіздкими обчисленнями: у випадку системи n лінійних рівнянь з n невідомими приходиться обчислювати $n+1$ визначник n-го порядку. Метод послідовного виключення невідомих, викладений раніше, є в цьому відношенні набагато більш зручним, так як обчислення, яких цей метод вимагає, власне кажучи рівносильні тим, які приходиться виконувати при обчисленні одного визначника n-го порядку.

Мікромодуль 1
Приклади розв'язання типових задач

Обчисліть визначники:

1. $a)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$; $б)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$

Розв'язання

$$a)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 0\cdot7-8\cdot(-2)=16$$

$$б)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)$$

2. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Розв 'язання. Перший спосіб. За правилом трикутників маємо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot(-1)\cdot3+2\cdot1\cdot1+(-4)\cdot3\cdot1-(1\cdot(-1)\cdot(-4)+2\cdot3\cdot3+3\cdot1\cdot1)=$$

$$=-9+2-12-(4+18+3)=-19-25=-44$$

Другий спосіб. Використовуючи властивості визначника, дістаємо $\Delta=$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -13 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=a_{31}A_{31}=1\cdot(-1)^{3+1}M_{31}=\begin{vmatrix} -1 & -13 \\ -4 & -8 \end{vmatrix}=8-52=-44$$

Третій спосіб. Розкладемо визначник за першим рядком: $\Delta=$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot(-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot(-4)-2\cdot8-4\cdot4=-44$$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Розв 'язання. У визначнику є кілька нульових елементів, проте зручно, коли нульові елементи містяться в одному рядку чи стовпцеві. Зробимо, наприклад, нульовими всі елементи першого рядка, крім першого елемента. Для цього додамо до третього стовпчика перший, після чого помножимо елементи першого стовпчика на —2 і додамо їх до відповідних елементів четвертого стовпчика. Дістанемо

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2 \\ 1 & 2 & -2+1 & 0-2 \\ -1 & 3 & 0-1 & 2+2 \\ 2 & 1 & -1+2 & 3-4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta=a_{11}A_{11}=1\cdot(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Зробимо два нулі у другому стовпчику. Для цього до першого і другого рядків по-черзі додаємо третій рядок. Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$\Delta = a_{32}A_{32} = 1\cdot(-1)^{3+21}M_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(15+12) = -27$$

4. Розв'яжіть рівняння $\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$

Розв 'язання. Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} -2-k & 2 & 0 \\ 2 & 4-k & 6 \\ 1 & 2 & 3-k \end{vmatrix} = (-2-k)\begin{vmatrix} 4-k & 6 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -(2+k)((4-k)(3-k)-12) - 2(6-2k-6) = -(2+k)(k^2-7k) + 4k =$$

$$= -(k^3 + 2k^2 - 14k) + 4k = -k^3 + 5k^2 + 18k$$

Отже, дане рівняння рівносильне рівнянню

$$-k^3 + 5k^2 + 18k$$

Далі маємо

$$-k(k^2 - 5k \ \ -18 = 0; \quad k = 0 \ \textit{або} \ k^2 - 5k \ \ -18 = 0 \quad \textit{звідки} \quad k = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{2}$$

Мікромодуль 1.

Індивідуальні тестові завдання

1.Обчисліть визначники використовуючи:

а) метод зведення до трикутного вигляду;

б) метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпчика ;

в) правило трикутників.

$$1.1.1.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix} .1.1.2.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} 1.1.3.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix} 1.1.4.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} 1.1.5.\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} 1.1.6.\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 7 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.1.7.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} 1.1.8.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} 1.9.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \\ 7 & 4 & 8 \end{vmatrix} 1.1.10.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} 1.1.11.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 8 \end{vmatrix} 1.1.12.\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

$$1.1.13.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} 1.1.14.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} 1.1.15.\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 6 & 1 \\ 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} 1.1.16.\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} 11..17.\begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} 1.1.18.\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.1.19.\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} 1.1.20.\begin{vmatrix} 8 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} 11..21.\begin{vmatrix} 9 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} 1.1.22.\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} 11..23.\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} 1.1.24.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

2.Обчисліть визначники четвертого порядку

$$1.2.1.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -14 & 21 \end{vmatrix}. \qquad 1.2.2.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & -12 & 19 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.3.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 7 & 7 \\ 2 & 1 & -10 & 17 \end{vmatrix}. \qquad 1.2.4.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 10 & 8 \\ 2 & 0 & -8 & 15 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.5.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 13 & 9 \\ 2 & -1 & -6 & 13 \end{vmatrix}. \qquad 1.2.6.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 16 & 10 \\ 2 & -2 & -4 & 11 \end{vmatrix}.$$

$$1.2.7.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 19 & 11 \\ 3 & -8 & -2 & 9 \\ 2 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}. \qquad 1.2.8.\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & -8 & 22 & 12 \\ 2 & -4 & -10 & 7 \end{vmatrix}.$$

1.2.17. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & -2 \\ 7 & 50 & 1 & -16 \\ 3 & 25 & 11 & -6 \\ 2 & -10 & 11 & 1 \end{vmatrix}.$ 1.2.18. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & -2 \\ 8 & 65 & 1 & -18 \\ 3 & 27 & 11 & -4 \\ -2 & -12 & 12 & 1 \end{vmatrix}.$

1.2.19. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 5 \\ -1 & 10 & 2 & -27 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$ 1.2.20. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & -2 \\ 9 & 82 & 1 & -20 \\ 3 & 29 & 11 & -2 \\ -2 & -14 & 13 & 1 \end{vmatrix}.$

1.2.21. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -8 \end{vmatrix}.$ 1.2.22. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 6 & 0 & -13 \\ 2 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}.$

1.2.23. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 1 & -20 \\ 2 & 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}.$ 1.2.24. $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 & -2 \\ 9 & 91 & 1 & -20 \\ 3 & 31 & 11 & 0 \\ 1 & 15 & 25 & 1 \end{vmatrix}$

1.2.25 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & 12 & 3 & -34 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$ 1.2.26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & 14 & 4 & -41 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

1.2.27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \\ -1 & 16 & 5 & -48 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}.$ 1.2.28. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 3 & 13 \\ -1 & 18 & 6 & -55 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$

1.2.29. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 15 \\ -1 & 20 & 7 & -62 \\ 2 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$ 1.2.30. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 3 & 17 \\ -1 & 22 & 8 & -69 \\ 2 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix}.$

1.3. Обчисліть визначники, використовуючи:
а) метод зведення до трикутного вигляду;
б) метод розкладу визначника за елементами деякого рядка або стовпчика.

1.3.1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$ 1.3.2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 1.3.3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

1.3.4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$ 1.3.5. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 1.3.6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$

1.3.7. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$ 1.3.8. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 1.3.9. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

1.3.10. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$ 1.3.11. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 1.3.12. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$

1.3.13. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$ 1.3.14. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 1.3.15. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$

Мікромодуль 2
Загальна теорія систем лінійних рівнянь

1.8. *n*-мірний векторний простір

Для побудови загальної теорії систем лінійних рівнянь недостатньо того апарата, який з таким успіхом послужив нам при розв‘язані систем, які допускають застосування правила Крамера. Крім визначників і матриць, ми повинні будемо використовувати одне нове поняття, яке представляє, може бути, ще більший загально математичний інтерес, а саме поняття багатомірного векторного простору. Спочатку кілька попередніх зауважень. З курсу аналітичної геометрії відомо, що всяка точка площини визначається (при заданих осях координат) своїми двома координатами, тобто упорядкованою системою двох дійсних чисел; усякий вектор на площині визначається своїми двома компонентами, тобто знову упорядкованою системою двох дійсних чисел. Аналогічно всяка точка тримірного простору визначається своїми трьома координатами, усякий вектор у просторі — трьома компонентами.

У геометрії, а також у механіці і фізиці часто приходиться, однак, вивчати такі об'єкти, для завдання яких недостатньо трьох дійсних чисел. Так, розглянемо сукупність куль в тримірному просторі. Для того щоб куля була цілком визначена, потрібно задати координати її центра і радіус, тобто задати упорядковану систему чотирьох дійсних чисел, з яких, утім, останнє (радіус) може приймати лише додатні значення. Розглянемо, з іншого боку, різні положення твердого тіла в просторі. Положення тіла буде цілком визначено, якщо будуть зазначено координати його центра ваги (тобто три дійсних числа), напрямок деякої фіксованої осі, що проходить через центр ваги (два числа — два з трьох направляючих косинусів), і, нарешті, кут повороту навколо цієї осі. Таким чином, положення твердого тіла в просторі визначається упорядкованою системою із шести дійсних чисел. Ці приклади вказують на доцільність розгляду сукупності всіляких упорядкованих систем з *n* дійсних чисел. Ця сукупність після введення в неї операцій додавання і множення на число (що буде зроблено нижче за

аналогією з відповідними операціями над векторами тримірного простору, які виражають через компоненти) і називається *n*-мірний векторний простір. Таким чином, *n*-мірний простір є лише алгебраїчне утворення, яке зберігає деякі найпростіші властивості сукупності векторів тримірного простору, які виходять з початку координат.

Упорядкована система *n* чисел

$$\alpha=(a_1,\ a_2\ \ldots,a_n)\quad(1.55)$$

називається *n-мірним вектором.* Числа a_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, будуть називатися *компонентами* вектора α. Вектори α і

$$\beta=(\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)\quad(1.56)$$

будуть вважатися *рівними* в тому випадку, якщо збігаються їхні компоненти, які стоять на однакових місцях, тобто якщо $a_i=b_i$ при $i=1,2,\ldots,n$. Для позначення векторів будуть уживатися далі малі грецькі букви, у той час як малі латинські букви будуть використані для позначення чисел.

Як приклади векторів укажемо наступні:

1) Вектори-відрізки, що виходять з початку координат на площині або в тримірному просторі, будуть при фіксованій системі координат відповідно дво- і тримірними векторами в розумінні даного вище визначення.

2) Коефіцієнти всякого лінійного рівняння з *n* невідомими складають *n*-мірний вектор.

3) Усяке розв‘язання будь-якої системи лінійних рівнянь з *n* невідомими буде *n-мірним* вектором.

4) Якщо дано матрицю з *s* рядків і *n* стовпців, то її рядки будуть *n*-мірними векторами, стовпці— s-мірними векторами.

5) Сама матриця з s рядків і *n* стовпців може розглядатися як *sn*-мірний вектор: досить прочитати елементи матриці підряд, рядок за рядком; зокрема, усяка квадратна матриця порядку *n* може розглядатися як *n*-мірний вектор, причому, мабуть, усякий *n*-мірний вектор може бути отриманий цим шляхом з деякої матриці порядку *n*.

Сумою векторів (1.55) і (1.56) називається вектор

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \ldots,\ a_n+b_n),\quad(1.57)$$

компоненти якого суть суми відповідних компонентів векторів, які складаються. Додавання векторів комутативно і асоціативно через комутативності й асоціативності додавання чисел. Роль нуля грає *нульовий вектор*

$$0=(0,\ 0,\ \dots,\ 0). \qquad (1.58)$$

Дійсно,

$$\alpha+0=(a_1+0,\ a_2+0,\ \dots,\ a_n+0)=(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)=\alpha.$$

Для запису нульового вектора ми вживаємо той же символ 0, як і для числа нуль.

Назвемо *протилежним* векторові (1.55) вектор

$$—\alpha=(—a_1,-a_2,\ \dots,-a_n). \quad (1.59)$$

Очевидно, що $\alpha+(—\alpha)=0$. Тепер легко бачити, що для додавання векторів існує обернена операція — віднімання: *різницею* векторів (1.55) і (1.56) буде вектор

$$\alpha—\beta=\alpha+(—\beta),$$

тобто

$$\alpha—\beta=(a_1—b_1,\ a_2—b_2,\dots,\ a_n—b_n). \qquad (1.60)$$

Додавання n-мірних векторів, яке обумовлене формулою (1.57), виникло з геометричного додавання векторів на площині або в тримірному просторі, яке проводиться за правилом паралелограма. У геометрії використовується також множення вектора на дійсне число (на «скаляр»): множення вектора α на число k означає при $k>0$ розтягнення α у k раз (тобто стиск при $k<1$), а при $k<0$ розтягнення в $|k|$ раз і зміна напрямку на протилежний. Виражаючи це правило через компоненти вектора α і переходячи до розглянутого нами загальному випадкові, ми одержуємо таке визначення:

Добутком вектора (1.55) *на число k* називається вектор

$$k\alpha=\alpha k=(ka_1,\ ka_2,\ \dots,\ ka_n), \qquad (1.61)$$

компоненти якого дорівнюють добуткові на k відповідних компонентів вектора α. З цього визначення випливають наступні важливі властивості

$$k(\alpha\pm\beta)=k\alpha\pm k(\beta), \quad (1.62)$$

$$(k\pm l)=k\alpha\pm l\alpha, \qquad (1.63)$$

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha\ , \qquad (1.64)$$

$$1\cdot\alpha=\alpha\ . \qquad (1.65)$$

Настільки ж легко перевіряються, але можуть бути отримані і як наслідки з властивостей (1.62)—(1.65), наступні властивості:

$$0\cdot\alpha=0; \qquad (1.66)$$

$$(-1)\cdot\alpha=—\alpha; \qquad (1.67)$$

$$k\cdot 0=0;\ (1.68)$$

якщо $k\alpha=0$, то, або $k=0$, або $\alpha=0$. (1.69)

Сукупність усіх n-мірних векторів з дійсними компонентами, яка розглядається з визначеними в ній операціями додавання векторів і множення вектора на число, називається *n-мірним векторним простором.*

Підкреслимо, що у визначення n-мірного векторного простору не входить ніяке множення вектора на вектор. Визначити множення векторів було б легко - покласти, наприклад, що компоненти добутку векторів дорівнюють добуткам відповідних компонентів співмножників. Таке множення не знайшло б у нас, однак, ніяких серйозних додатків. Так, вектори-відрізки, які виходять з початку координат на площині або в тримірному просторі, складають при фіксованій системі координат двомірний і, відповідно, тримірний векторний простір. Додавання векторів і множення вектора на число мають у цьому прикладі, як уже відзначено вище, важливий геометричний зміст, у той час як покомпонентному множенню векторів не можна дати ніякого розумного геометричного тлумачення. Розглянемо ще один приклад. Ліва частина лінійного рівняння від n невідомих, тобто вираз вигляду

$$f=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n,$$

називається *лінійною формою* від невідомих $x_1,x_2,\dots,x_n$.Лінійна форма f цілком визначається, мабуть, вектором $(a_1,a_2,\ ..,a_n)$ зі своїх коефіцієнтів; зворотно, усякий n-мірний вектор однозначно визначає деяку лінійну форму. Додавання векторів і множення вектора на число перетворюються у відповідні операції над лінійними формами; ці операції широко використовувалися нами раніше. Покомпонентне множення векторів і в цьому прикладі не має ніякого змісту.

1.9. Лінійна залежність векторів

Вектор β з *n*-мірного векторного простору називається *пропорційним* векторові α, якщо існує таке число *k,* що β=*k*α (див. формулу (1.61) попереднього розділу). Зокрема, нульовий вектор пропорційний будь-якому векторові α через рівність 0=0·α. Якщо ж β=*k* α і β≠0, звідки *k*≠0, то α=k^{-1}β, тобто для ненульових векторів пропорційність має властивість симетричності.

Узагальненням поняття пропорційності векторів служить наступне поняття, з яким (для випадку рядків матриці) ми вже зустрічалися: вектор β називається *лінійноюкомбінацією* векторів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$, якщо існують такі числа $l_1, l_2, ..., l_s$, що

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_s\alpha_s\ .$$

Таким чином, *j*-а компонента вектора β, *j*=1,2,...,*n,* дорівнює, через визначення суми векторів і добутку вектора на число, сумі добутків *j*-х компонент векторів $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ відповідно на $l_1, l_2, ..., l_s$. Система векторів

$$\alpha_{1,}\,\alpha_{2,\ldots,}\ \alpha_{r\text{-}1,}\alpha_r\ (r\geq 2) \quad (1.70)$$

називається *лінійно залежною,* якщо хоча б один з цих векторів є лінійною комбінацією інших векторів системи (1.70), і *лінійно незалежною* в протилежному випадку. Вкажемо іншу форму цього досить важливого визначення: система векторів (1.70) лінійно залежна, якщо існують такі числа $k_1, k_2, ..., k_r$, *хоча б одне з яких відмінне від нуля,* що має місце рівність

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + _{\ldots} + k_r\alpha_r = 0 \ (1.71)$$

Доведення еквівалентності цих двох визначень не представляє утруднень. Нехай, наприклад, вектор α_r із системи (1.70) є лінійна комбінація інших векторів:

$$\alpha_r = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r\text{-}1}\alpha_{r\text{-}1}$$

Звідси випливає рівність

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \ldots + l_{r\text{-}1}\alpha_{r\text{-}1} - \alpha_r = 0$$

тобто рівність вигляду (1.71), де $k_i = l_i$ для

$$i = 1, 2, \ldots,\ r — 1 \text{ і } k_r = —1, \text{ тобто } k_r \neq 0.$$

Нехай, зворотно, вектори (1.70) зв'язані співвідношенням (1.71), у якому, наприклад, $k_r \neq 0$. Тоді

$$\alpha_r = \left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\alpha_1 + \left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\alpha_2 + \ldots + \left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\alpha_{r-1}$$

тобто вектор α_r виявився лінійною комбінацією векторів $\alpha_{1,}\alpha_2, ..., \alpha_{r^-1}$,

Приклад. Система векторів

$$\alpha_1 = (5,2,1),\ \alpha_2 = (—1,3,3),\ \alpha_3 = (9,7,5),\ \alpha_4 = (3,8,7)$$

лінійно залежна, тому що вектори зв'язані співвідношенням

$$4\alpha_1 — \alpha_2 — 3\alpha_3 + 2\alpha_4 = 0.$$

У цьому співвідношенні всі коефіцієнти відмінні від нуля. Між нашими векторами існують, однак, і інші лінійні залежності, у яких деякі з коефіцієнтів дорівнюють нулеві, наприклад

$$2\alpha_1 + \alpha_2 — \alpha_3 = 0. \qquad 3\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0.$$

Друге з даних вище визначень лінійної залежності може бути застосовано і до випадку *r*=1, тобто до випадку системи, яка складається з одного вектора α*: ця система тоді і тільки тоді буде лінійно залежною, якщо* α=0. Дійсно, якщо α=0, то, наприклад, при *k*=1 буде *k*α=0. Зворотно, якщо *k*α=0 і *k*≠0, то α=0. Відзначимо наступну властивість поняття лінійної залежності.

*Якщо деяка підсистема системи векторів (*1.70) *лінійно залежна, то і вся система* (1.70) *лінійно залежна.*

Дійсно, нехай вектори $\alpha_{1,}\ \alpha_2, ..., \alpha_s$, із системи (1.70), де *s*<*r*, зв'язані співвідношенням

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s = 0.$$

у якому не всі коефіцієнти дорівнюють нулеві. Звідси випливає співвідношення

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_s\alpha_s + 0\cdot\alpha_{s+1} + \ldots + 0\alpha_r = 0.$$

тобто система (1.70) лінійно залежна.

З цієї властивості випливає лінійна залежність усякої системи векторів, що містить два рівних або, узагалі, два пропорційних вектори, а так само всякої системи, що містить нульовий вектор. Помітимо, що доведеній зараз властивості можна дати таке формулювання: *якщо система векторів* (1.70) *лінійно незалежна,то і всяка її підсистема також лінійно незалежна.*

Виникає питання, як багато векторів може містити лінійно незалежна система n-мірних векторів і чи існують, зокрема, такі системи з довільно великим числом векторів.

Для відповіді на це питання розглянемо в n-мірному векторному просторі вектори

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1=(1,0,0,...,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,0,...,0),\\ ....\\ \varepsilon_n=(0,0,0,...,1).\end{array}\right\}\quad(1.72)$$

які називаються *одиничними векторами* цього простору. *Система одиничних векторів буде лінійно незалежною:* нехай

$$k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\ldots+k_n\varepsilon_n$$

так як ліва частина цієї рівності дорівнює векторові $(k_1, k_2,\ldots, k_n)$, то $(k_1, k_2,\ldots, k_n)=0$, тобто $k_i=0$, $i=1,2,\ldots, n$, так як усі компоненти нульового вектора дорівнюють нулеві, а рівність векторів рівносильна рівності їхніх відповідних компонентів.

Ми знайшли, таким чином, у n-мірному векторному просторі одну лінійно незалежну систему, яка складається з n векторів. Як буде показано пізніше, насправді в цьому просторі існує нескінченно багато різних таких систем. Доведемо наступну теорему.

Усякі s векторів n-мірного векторного простору складають при $s>n$ *лінійно залежну систему.* Нехай дано вектори

$$\begin{array}{l}\alpha_1=(a_{11},a_{12},...a_{1n}),\\ \alpha_2=(a_{21},a_{22},...a_{2n})\\ ....\\ \alpha_s=(a_{s1},a_{s2},...a_{sn})\end{array}$$

потрібно підібрати такі числа k_1, k_2, ..., k_s, які не всі дорівнюють нулеві, що

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_s\alpha_s=0\,. \qquad (1.73) \qquad .$$

Переходячи від рівності (1.73) до відповідних рівностей між компонентами, одержуємо

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\ldots+a_{s1}k_s=0\\ a_{12}k_1+a_{22}k_2+\ldots+a_{s2}k_s=0\\ ....\\ a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\ldots+a_{sn}k_s=0\end{array}\right\}\quad(1.74)$$

Рівності (1.74) складають, однак, систему n лінійних однорідних рівнянь відносно s невідомих $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Число рівнянь у цій системі менше числа невідомих, а тому, ця система має ненульові розв‘язки. Таким чином, можна підібрати числа $k_1\ k_2\ \ldots, k_s$, які не всі рівні нулеві, що задовольняють вимозі (1.73). Теорема доведена.

Назвемо лінійно незалежну систему n-мірних векторів

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \ (1.75)$$

максимальною лінійно незалежною системою, якщо додавання до цієї системи будь-якого n-мірного вектора β дає вже лінійно залежну систему. Так як у всякій лінійній залежності, яка зв'язує вектори $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, β, коефіцієнт при β повинний бути відмінним від нуля — інакше система (1.75) була б лінійно залежною, — то вектор β лінійно виражається через вектори (1.75). Тому система векторів (1.75) тоді і тільки тоді буде максимальною лінійно незалежною системою, якщо вектори (1.75) лінійно незалежні, а будь-який n-мірний вектор β є їхньою лінійною комбінацією.

З результатів, отриманих вище, випливає, що *в n-мірному просторі всяка лінійно незалежна система, яка складається з n векторів, буде максимальною,* а також що *будь-яка максимальна лінійно незалежна система векторів цього простору складається не більш ніж з n векторів.*

Усяка лінійно незалежна система n-мірних векторів міститься хоча б в одній максимальній лінійно незалежній системі. Справді, якщо задана система векторів не максимальна, то до неї можна додати один вектор так, що отримана система залишиться лінійно незалежною. Якщо ця нова система усе ще не максимальна, то до неї можна додати ще один вектор, і т.д. Цей процес не може, однак, продовжуватися нескінченно, так як вже будь-яка система n-мірних векторів, яка складається з $n+1$ вектора, буде лінійно залежною.

Так як всяка система, яка складається з одного ненульового вектора, лінійно незалежна, то ми одержуємо, що *всякий* *ненульовий вектор міститься в деякій максимальній лінійно незалежній системі,* а тому *в n-мірному векторному просторі існує нескінченно багато різних максимальних лінійно незалежних систем векторів.*

Виникає питання, чи існують у цьому просторі максимальні лінійно незалежні системи з меншим, чим *n,* числом векторів або ж число векторів у будь-якій такій системі неодмінно дорівнює *n?* Відповідь на це важливе питання буде дана нижче, після деяких попередніх розглядів.

Якщо вектор β є лінійною комбінацією векторів

$$\alpha_{1,}\ \alpha_2,..\ .,\ \alpha_r\ , \quad (1.76)$$

то часто говорять, що β *лінійно виражається через систему* (1.76). Зрозуміло, що якщо вектор β лінійно виражається через деяку підсистему цієї системи, то він буде лінійно виражатися і через систему (1.76) — досить інші вектори системи взяти з коефіцієнтами, рівними нулеві. Узагальнюючи цю термінологію, говорять, що *система векторів*

$$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_s. \quad (1.77)$$

лінійно виражається через систему (1.76), якщо усякий вектор β_i, i=1,2, .. ., s, є лінійною комбінацією векторів системи (1.76). Доведемо транзитивність цього поняття: *якщо система* (1.77) *лінійно виражається через систему* (1.76), *а система векторів*

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\gamma_t \qquad (1.78)$$

лінійно виражається через систему (1.77), то (1.78) буде лінійно виражатися і через (1.76).

Справді

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji}\beta_{i,} \quad j=1,2,...,t, \quad \text{але} \quad \beta_i = \sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_{m,} \quad i=1,2,...,s. \ (1.79)$$

Підставляючи ці вирази в (1.79), одержуємо:

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{s} l_{ji}\left(\sum_{m=1}^{r} k_{im}\alpha_m\right) = \sum_{m=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{s} l_{ij}k_{im}\right)\alpha_{m,}$$

тобто усякий вектор γ_j, $j=1,2,...,t$, буде лінійною комбінацією векторів системи (1.76).

Дві системи векторів називаються *еквівалентними,* якщо кожна з них лінійно виражається через іншу. З доведеної зараз

транзитивності властивості систем векторів лінійно виражатися один через другий випливає транзитивність поняття еквівалентності систем векторів, а також наступне твердження: *якщо дві системи векторів еквівалентні і якщо деякий вектор лінійно виражається через одну з цих систем, то він буде лінійно виражатися і через іншу.*

Не можна стверджувати, що якщо одна з двох еквівалентних між собою систем векторів лінійно незалежна, то цією же властивістю володіє й інша система. Якщо ж обидві ці системи лінійно незалежні, то про число векторів, які входять в них, можна зробити одне важливе висловлення. Доведемо спочатку наступну теорему, яку, через її роль в подальшому і для зручності посилань,назвемо основною теоремою.

Якщо в n-мірному векторному просторі дані дві системи векторів

$$(|) \qquad \alpha_{1,}\alpha_2,..\ .,\alpha_r$$

$$(||) \qquad \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,...,\boldsymbol{\beta}_s$$

з яких перша лінійно незалежна і лінійно виражається через другу, то число векторів у першій системі не більше, ніж у другій, тобто $r \leq s$. Нехай, $r>s$. За умовою, кожен вектор системи (|) лінійно виражається через систему (||):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_{11}\beta_1 + a_{12}\beta_2 + ... + a_{1s}\beta_s, \\ \alpha_2 &= a_{21}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + ... + a_{2s}\beta_s, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_r &= a_{r1}\beta_1 + a_{r2}\beta_2 + ... + a_{rs}\beta_s) \end{aligned} \qquad (1.80)$$

Коефіцієнти цих лінійних виразів складають систему з r s-мірних векторів:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= (a_{11}, a_{12},...a_{1s}), \\ \gamma_2 &= (a_{21}, a_{22},...a_{2s}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_r &= (a_{r1}, a_{r2},...a_{rs}) \end{aligned}$$

Так як $r>s$, то ці вектори лінійно залежні, тобто

$$k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2 + \ldots + k_r\gamma_t = 0$$

де не всі коефіцієнти $k_1 k_{2\ldots}, k_r$ дорівнюють нулеві. Звідси ми приходимо до наступних рівностей між компонентами

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_{ij} = 0, \quad j = 1,2\ldots,s. \ (1.81)$$

Розглянемо тепер наступну лінійну комбінацію векторів системи (I):

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_r\alpha_r$$

або, коротше,

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i$$

Використовуючи (1.80) і (1.81), одержуємо

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{r} k_i \left(\sum_{j=1}^{s} a_{ij} \beta_j \right) = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{r} k_i a_{ij} \right) \beta_j = 0;$$

це суперечить, однак, лінійній незалежності системи (I).

З доведеної зараз основної теореми випливає наступний результат: *усякі дві еквівалентні лінійно незалежні системи векторів містять рівне число векторів.* Будь-які дві максимальні лінійно незалежні системи n-мірних векторів будуть, мабуть, еквівалентними. Вони складаються, отже, з того самого числа векторів, а так як існують, як нам відомо, системи такого роду, які складаються з n векторів, то ми одержуємо відповідь на поставлене раніше питання: *усяка максимальна лінійно незалежна система векторів n-мірного векторного простору складається з n векторів.* З отриманих результатів можна вивести й інші наслідки.

Якщо в даній лінійно залежній системі векторів узято дві в ній максимальні лінійно незалежні підсистеми, тобто такі підсистеми, до яких не можна приєднати жодного вектора нашої системи, не порушуючи лінійної незалежності, то ці підсистеми містять рівне число векторів.

Справді, якщо в системі векторів

$$\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_r, \ (1.82)$$

підсистема

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \quad s < r \ (1.83)$$

буде максимальною лінійно незалежною підсистемою, то всякий з векторів $\alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_r$ буде лінійно виражатися через систему (1.83).

З іншого боку, усякий вектор α_i із системи (1.82) лінійно виражається через цю систему: досить узяти при самому векторі α_i коефіцієнт 1, а при всіх інших векторах системи коефіцієнт 0. Тепер легко бачити, що системи (1.82) і (1.83) еквівалентні. Звідси випливає, що система (1.82) еквівалентна всякій з своїх максимальних лінійно незалежних підсистем, а тому всі ці підсистеми еквівалентні між собою, тобто, будучи лінійно незалежними, містять по одному і тому ж числу векторів. Число векторів, які входять у будь-яку максимальну лінійно незалежну підсистему даної системи векторів, називається *рангом* цієї системи. Використовуючи це поняття, виведемо ще один наслідок з основної теореми.

Нехай дано дві системи n-мірних векторів:

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_r \quad (1.84)$$

і

$$\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_s \quad (1.85)$$

не обов'язково лінійно незалежні, причому ранг системи (1.84) *дорівнює числу k, ранг системи* (1.85) — *числу l. Якщо перша система лінійно виражається через другу, то k≤l. Якщо ж ці системи еквівалентні, то k=l.* Справді, нехай

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{ik} \ (1.86)$$

і

$$\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots, \beta_{ji}, \ (1.87)$$

будуть, відповідно, будь-які максимальні лінійно незалежні підсистеми систем (1.84) і (1.85). Тоді системи (1.84) і (1.86) еквівалентні між собою, і це ж вірно для систем (1.85) і (1.87). З того, що система (1.84) лінійно виражається через систему (1.85), випливає тепер, що система (1.86) також лінійно виражається через систему (1.85), а тому і через еквівалентну їй систему (1.87), після чого залишається, використовуючи лінійну незалежність системи (1.86), застосувати основну теорему. Друге твердження наслідку, який доводився, безпосередньо випливає з першого.

1.10. Ранг матриці

Якщо дано деяку систему n-мірних векторів, то виникає природне запитання, чи є ця система векторів лінійно залежною чи ні. Не можна розраховувати на те, що в кожному конкретному випадку розв‘язання цього питання буде отримано без особливих труднощів: при поверхневому розгляді системи векторів

$$\alpha=(2,-5,1,-1),\ \beta=(1,3,6,5),\ \gamma=(-1,4,1,2)$$

важко помітити в ній які-небудь лінійні залежності, хоча в дійсності ці вектори зв'язані співвідношенням $7\alpha-3\beta+11\gamma=0$

Один метод для розв‘язання цього питання був викладений раніше; так як компоненти заданих векторів нам відомі, то, вважаючи невідомими коефіцієнти шуканої лінійної залежності, ми одержуємо систему лінійних однорідних рівнянь, яку і розв‘язуємо методом Гаусса. У цьому розділі буде указано інший підхід до розглянутого питання; одночасно ми значно наблизимося до нашої основної мети — розв‘язанню довільних систем лінійних рівнянь. Нехай дана матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

яка складається з s рядків і n стовпців, причому числа s і n ніяк не зв’язані між собою. Стовпці цієї матриці, які розглядаються як n-мірні вектори, можуть, узагалі кажучи, бути лінійно залежними. Ранг системи стовпців, тобто максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці A (точніше, число стовпців, які входять у будь-яку максимальну лінійно незалежну підсистему системи стовпців), називається *рангом* цієї матриці. Зрозуміло, що подібним же чином рядки матриці A можна розглядати як n-мірні вектори. Виявляється, що ранг системи рядків матриці дорівнює рангові системи її стовпців, тобто дорівнює рангові цієї матриці. Доведення цього твердження буде отримано після того, як ми укажемо ще одну форму визначення рангу матриці, яка дає заодно спосіб його практичного обчислення.

Узагальнимо спочатку, для випадку коли матриці прямокутні, поняття мінору. Вибираємо в матриці A довільні k рядків і k стовпців, $k\leq\min(s, n)$. Елементи, що стоять на перетині цих рядків і стовпців, складають квадратну матрицю k-го порядку, визначник якої називається *мінором k-го порядку* матриці A. Далі нас будуть цікавити порядки тих мінорів матриці A, які відмінні від нуля, а саме найвищий серед цих порядків. При його пошуку корисно враховувати наступне зауваження: *якщо всі мінори k-го порядку матриці A дорівнюють нулеві, то дорівнюють нулеві і всі мінори більш високих порядків.* Справді, розкладаючи всякий мінор порядку $k+j$, $k<k+j\leq min(s,n)$, на підставі теореми Лапласа, по будь-яким k рядках, ми представимо цей мінор у вигляді суми мінорів порядку k, помножених на деякі мінори порядку j, і цим доведемо, що він дорівнює нулеві.

Доведемо тепер наступну теорему про ранг матриці: *найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A дорівнює рангові цієї матриці.*

Доведення. Нехай найвищий порядок відмінних від нуля мінорів матриці A дорівнює r. Припустимо,— що не порушує спільності доведення,— що мінор r-го порядку D, який стоїть в лівому верхньому куті матриці

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & D & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \hline a_{r+1,1} & \dots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \dots & a_{r+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{s,r+1} & \dots & a_{sn} \end{array}\right),$$

відмінний від нуля, $D\neq0$. Тоді перші r стовпців матриці A будуть між собою лінійно незалежними: якби між ними існувала лінійна залежність, то, так як при додаванні векторів складаються відповідні компоненти, між стовпцями мінору D існувала б ця ж лінійна залежність і тому мінор D дорівнював би нулеві.

Доведемо тепер, що всякий l-й стовпець матриці A, $r<l\leq n$, буде лінійною комбінацією перших r стовпців. Беремо будь-яке i, $1\leq i\leq s$, і будуємо допоміжний визначник $(r+1)$-го порядку

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1r} & a_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{r1}\ldots a_{rr} & a_{rl} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{i1}\ldots a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix}$$

який отримується «облямівкою» мінора *D* відповідними елементами *l*-го стовпця і *i*-го рядка. При будь-якому *i* визначник Δ_i, дорівнює нулеві. Дійсно, якщо $i>r$, то Δ_i буде мінором $(r+1)$-го порядку нашої матриці *A* і тому дорівнює нулеві в зв'язку з вибором числа *r*. Якщо ж $i\le r$, то Δ_i вже не буде мінором матриці *A,* так як не може бути отриманий викреслюванням з цієї матриці деяких її рядків і стовпців; однак визначник Δ_i буде містити тепер два рівні рядки і, отже, знову дорівнює нулеві. Розглянемо алгебраїчні доповнення елементів останнього рядка визначника Δ_i. Алгебраїчним доповненням для елемента a_{il} служить мінор *D*. Якщо ж $1\le j\le r$, то алгебраїчним доповненням для елемента a_{ij}, в Δ_i буде число

$$A_j=(-1)^{(r+1)+j}\begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1,j-1}a_{1,j+1}\ldots a_{1r}a_{1l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}\ldots a_{r,j-1}a_{r,j+1}\ldots a_{rr}a_{rl} \end{vmatrix};$$

воно не залежить від *l* і тому позначене через A_j. Таким чином, розкладаючи визначник Δ_i по його останньому рядку і прирівнюючи це розкладання нулеві, так як $\Delta_i=0$, ми одержимо:

$$a_{i1}A_1+a_{i2}A_2+\ldots+a_{ir}A_r+a_{il}D=0$$

звідки, через $D\neq0$

$$a_{il}=-(A_1/D)\,a_{i1}-(A_2/D)\,a_{i2}-\ldots-(A_r/D)\,a_{ir}.$$

Ця рівність справедлива при всіх *i*, $i=1,2,\ldots,s$, а так як його коефіцієнти від *i* не залежать, то ми одержуємо, що весь *i*-й стовпець матриці *A* буде сумою її перших *r* стовпців, узятих, відповідно, з коефіцієнтами

$$-A_1/D,\ -A_2/D,\ldots,-A_r/D\ldots$$

Таким чином, у системі стовпців матриці *A* ми знайшли максимальну лінійно незалежну підсистему, яка складається з *r* стовпців. Цим доведено, що ранг матриці *A* дорівнює *r,* тобто доведена теорема про ранг матриці.

Ця теорема дає метод для практичного обчислення рангу матриці, а тому і для розв'язання питання про існування лінійної залежності в даній системі векторів. Складаючи матрицю, для якої дані вектори служать стовпцями, і обчислюючи ранг цієї матриці, ми знаходимо максимальне число лінійно незалежних векторів нашої системи.

Метод находження рангу матриці, заснований на теоремі про ранг, вимагає обчислення хоча і кінцевого, але, може бути, дуже великого числа мінорів цієї матриці. Наступне зауваження дозволяє, однак, внести в цей метод значні зпрощення. Якщо переглянути ще раз доведення теореми про ранг, то можна помітити, що ми не використовували при її проведенні рівності нулеві всіх мінорів $(r+1)$-го порядку матриці *A* — у дійсності вживалися лише ті мінори $(r+1)$-го порядку, які облямовують даний, який не дорівнює нулеві,мінор *r*-го порядку *D* (тобто містять його цілком всередині себе), і тому з рівності нулеві лише цих мінорів випливає, що *r* є максимальне число лінійно незалежних стовпців матриці *A;* останнє ж спричиняє рівності нулеві узагалі всіх мінорів $(r+1)$-го порядку цієї матриці. Ми приходимо до наступного правила обчислення рангу матриці:

При обчисленні рангу матриці варто переходити від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо вже знайдено мінор k-го порядку D, відмінний від нуля, то необхідно обчислити лише мінори (k+1)-го порядку, які облямовують мінор D: якщо усі вони дорівнюють нулеві, то ранг матриці дорівнює k.

Приклади.

1. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Мінор другого порядку, який стоїть в лівому верхньому куті цієї матриці, дорівнює нулеві. Однак у матриці знаходяться і відмінні від нуля мінори другого порядку, наприклад

$$d = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Мінор третього порядку

$$d' = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

який *облямовує мінор d*, відмінний від нуля, тобто він дорівнює d'=1, однак обидва мінори четвертого порядку, які облямовують *мінор d',* дорівнюють нулеві:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Таким чином, ранг матриці *A* дорівнює трьом.

2. Знайти максимальну лінійно незалежну підсистему в системі векторів α_1=(2,-2,-4),α_2=(1,9,3),α_3=(—2,-4,1),α_4=(3,7,-1)

Складаємо матрицю $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 9 & -4 & 7 \\ -4 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

для якої дані вектори служать стовпцями. Ранг цієї матриці дорівнює двом: мінор другого порядку, який стоїть в лівому верхньому куті, відмінний від нуля, але обидва мінори третього порядку, які його облямовують, дорівнюють нулеві. Звідси випливає, що вектори α_1,α_2 складають у заданій системі одну з максимальних лінійно незалежних підсистем. Як наслідок з теореми про ранг матриці доведемо твердження, уже висловлене раніше:

Максимальне число лінійно незалежних рядків усякої матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців, тобто дорівнює рангові цієї матриці.

Для доведення транспонуємо матрицю, тобто зробимо її рядки стовпцями, зберігаючи їхню нумерацію. При транспонуванні максимальний порядок відмінних від нуля мінорів матриці не може змінитися, так як транспонування не змінює визначника, а для всякого мінору вихідної матриці мінор, отриманий з нього транспонуванням, міститься в новій матриці, і зворотно. Звідси випливає, що ранг нової матриці дорівнює рангові вихідної матриці; він дорівнює, разом з тим, максимальному числу лінійно незалежних стовпців нової матриці, тобто максимальному числу лінійно незалежних рядків вихідної матриці.

Приклад. Раніше вже було введене поняття лінійної форми від *n* невідомих і визначено додавання лінійних форм і їхнє множення на число. Це визначення дозволяє перенести на лінійні форми поняття лінійної залежності з усіма його властивостями.

Нехай дана система лінійних форм

$$f_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4$$
$$f_2 = 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 6x_4$$
$$f_3 = x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 7x_4$$
$$f_4 = 2x_1 + x_2 - x_3$$

Потрібно виокремити в ній максимальну лінійно незалежну підсистему.

Складемо матрицю з коефіцієнтів цих форм:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & -4 & -7 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

і знайдемо її ранг. Мінор другого порядку, який стоїть в лівому верхньому куті, відмінний від нуля, але, як легко перевірити, усі чотири мінори третього порядку, які його облямовують, дорівнюють нулеві. Звідси випливає, що перші два рядки нашої матриці лінійно незалежні, а третя і четверта будуть їхніми лінійними комбінаціями. Система f_1, f_2 буде, отже, шуканою підсистемою заданої системи лінійних форм . Укажемо ще один важливий наслідок з теореми про ранг матриці.

Визначник n-го порядку тоді і тільки тоді дорівнює нулеві, якщо між його рядками існує лінійна залежність.

В одну сторону це твердження вже доведене раніше(властивість 8). Нехай тепер нам дано визначник *n*-го порядку, який дорівнює нулеві, тобто дана, іншими словами, квадратна матриця *n*-го порядку, єдиний мінор якої, який має максимальний порядок, дорівнює нулеві. Звідси випливає, що найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці менше *n*, тобто ранг менше *n,* а тому, на підставі доведеного вище, рядки цієї матриці лінійно залежні. Зрозуміло, що у формулюванні доведеного зараз наслідку можна замість рядків говорити про стовпці визначника.

Для обчислення рангу матриці існує ще один метод, не зв'язаний з теоремою про ранг і не потребуючий обчислення визначників. Його застосовують, утім, тільки в тому випадку, якщо ми хочемо знати лише самий ранг і не цікавимося тим, які саме стовпці (або рядки) складають максимальну лінійно незалежну систему. Викладемо цей метод.

Елементарними перетвореннями матриці *A* називаються наступні перетворення цієї матриці:

(a) зміна місць (транспозиція) двох рядків або двох стовпців;

(b) множення рядка (або стовпця) на довільне відмінне від нуля число,

(c) додавання до одного рядка (або стовпця) іншого рядка (стовпця), помноженого на деяке число.

Легко бачити, що *елементарні перетворення не змінюють рангу матриці.* Дійсно, якщо ці перетворення застосовуються, наприклад, до стовпців матриці, то система стовпців, розглянутих як вектори, заміняється еквівалентною системою. Доведемо це лише для перетворення (c), так як для (a) і (b) це очевидно. Нехай до *i*-го стовпця додається *j*-й стовпець, помножений на число *k.* Якщо стовпцями матриці до перетворення служили вектори

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_{i,\ldots,}\alpha_j,\ldots,\alpha_n,\ (1.88)$$

то після перетворення стовпцями матриці будуть вектори

$$\alpha_1,\ldots,\alpha'_i=\alpha_i+k\alpha_{j,\ldots,}\alpha_j,\ldots,\alpha_n,\ (1.89)$$

Система (1.89) лінійно виражається через систему (1.88), а рівність

$$\alpha_i=\alpha'_I-k\alpha_j$$

показує, що система (1.88), у свою чергу, лінійно виражається через (1.89). Ці системи, отже, еквівалентні, і тому їх максимальні лінійно незалежні підсистеми складаються з однакового числа векторів,

Таким чином, при обчисленні рангу матриці можна попередньо її спростити за допомогою деякої комбінації елементарних перетворень.

Говорять, що матриця, яка містить s рядків і *n* стовпців, має *діагональну форму,* якщо всі її елементи дорівнюють нулеві, крім елементів $a_{11}, a_{22},, \ldots, a_{rr.}$ (де $0\le r\le\min(s,\ n)$ *),* рівних одиниці .Ранг цієї матриці дорівнює, мабуть, *r*.

Усяку матрицю можна елементарними перетвореннями привести до діагональної форми. Справді, нехай дана матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}\ldots a_{sn} \end{pmatrix}$$

Якщо всі її елементи дорівнюють нулеві, то вона вже має діагональну форму. Якщо ж у ній є елементи, відмінні від нуля, то транспозицією рядків і стовпців можна домогтися того, щоб елемент a_{11} був відмінний від нуля. Помноживши потім перший рядок на a_{11}^{-1}, ми перетворимо елемент a_{11} в одиницю. Якщо ми віднімемо тепер з *j*-го стовпця, *j*>1, перший стовпець, помножений на $a_{1j,}$ то елемент a_{1j} буде замінено нулем. Виконуючи таке перетворення з усіма стовпцями, починаючи з другого, а також із усіма рядками, ми прийдемо до матриці вигляду

$$A'=\begin{pmatrix} 1 & 0\ldots\quad 0 \\ 0 & a'_{22}\ldots a'_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & a'_{s2}\ldots a'_{sn} \end{pmatrix}$$

Виконуючи такі ж перетворення з матрицею, яка залишається в правому нижньому куті, і т.д., ми після кінцевого числа кроків прийдемо до діагональної матриці, яка має той же ранг, що і вихідна матриця *A*.

Таким чином, *для знаходження рангу матриці потрібно елементарними перетвореннями привести цю матрицю до діагональної форми і підрахувати число одиниць, які стоять в останній на головній діагоналі.*

Приклад. Найти ранг матриці $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Переставляючи в цій матриці перший і другий стовпець, а потім помноживши перший рядок на число 1/2, ми прийдемо до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 0 & -10 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Додаючи до її третього стовпця подвоєний перший стовпець, а потім додаючи деяке кратне новому першому рядку до кожного з інших рядків, ми одержимо матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Помноживши, нарешті, другий рядок на —1, віднімаючи з третього стовпця потроєний другий стовпець, а потім віднімаючи з третього і п'ятого рядків деякі кратні нового другого рядка, ми прийдемо до шуканої діагональної форми

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким чином, ранг матриці A дорівнює двом.

1.11. Системи лінійних рівнянь

Ми переходимо до вивчення довільних систем лінійних рівнянь, причому вже не робимо припущення, що число рівнянь системи дорівнює числу невідомих. Наші результати будуть, утім, застосовні і в тому випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих, але визначник системи дорівнює нулеві.Нехай дана система лінійних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+\ldots+a_{3n}x_n&=b_3\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n \end{aligned}\right\} \quad (1.90)$$

Як ми знаємо, насамперед варто розв'язати питання про сумісність цієї системи. Для цієї мети візьмемо матрицю A з коефіцієнтів системи і «розширену» матрицю $\bar{A}$, отриману приєднанням до A стовпця з вільних членів,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots.a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}a_{s2}\ldots a_{sn} \end{pmatrix} \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}\ldots.a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{s1}a_{s2}\ldots a_{sn} & b_s \end{pmatrix}$$

і обчислимо ранги цих матриць. Легко бачити, що *ранг матриці $\bar{A}$ або дорівнює ранговій матриці A, або на одиницю більше останнього.* Справді, беремо деяку максимальну лінійно незалежну систему стовпців матриці A. Вона буде лінійно незалежною і у матриці $\bar{A}$. Якщо вона зберігає і властивість максимальності, тобто стовпець з вільних членів через неї лінійно виражається, то ранги матриці A і $\bar{A}$ рівні; у протилежному випадку, приєднуючи до цієї системи стовпець з вільних членів, ми одержуємо лінійно незалежну систему стовпців матриці $\bar{A}$, яка буде в ній максимальною.

Питання про спільність системи лінійних рівнянь цілком вирішується наступною теоремою.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних рівнянь (1.90) тоді і тільки тоді сумісна, коли ранг розширеної матриці $\bar{A}$ дорівнює рангові матриці A.*

Доведення.

1. Нехай система (1.90) сумісна і нехай $k_1, k_2, \ldots, k_n$ буде одним з її розв'язок. Підставляючи ці числа замість невідомих у систему (1.90), ми одержимо s тотожностей, які показують, що останній стовпець матриці $\bar{A}$ є сумою всіх інших стовпців, узятих відповідно з коефіцієнтами $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Всякий інший стовпець матриці $\bar{A}$ входить і в матрицю A і тому лінійно виражається через усі стовпці цієї матриці. Зворотно, усякий стовпець матриці A є стовпцем і в $\bar{A}$, тобто лінійно виражається через стовпці цієї матриці. Звідси випливає, що системи стовпців матриць A і $\bar{A}$ еквівалентні між собою, а тому, як доведено раніше, обидві ці системи s-мірних векторів мають той самий ранг; іншими словами, ранги матриць A і $\bar{A}$ рівні між собою.

2. Нехай тепер дано, що матриці A *і* $\bar{A}$ мають рівні ранги. Звідси випливає, що будь-яка максимальна лінійно незалежна система стовпців матриці A залишається максимальною лінійно незалежною системою і у матриці $\bar{A}$. Таким чином, через цю систему, а тому і взагалі через систему стовпців матриці A, лінійно виражається останній стовпець матриці $\bar{A}$. Існує, отже, така система коефіцієнтів $k_1, k_2 \ldots, k_n$, де сума стовпців матриці A, узятих з цими коефіцієнтами, дорівнює стовпцеві з вільних членів, а тому числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ складають розв'язання системи (1.90). Таким чином, збіг рангів матриць A і $\bar{A}$ спричиняє спільність системи (1.90). Теорема цілком доведена. При її застосуванні до конкретних прикладів необхідно обчислити спершу ранг матриці A, для чого знайти один з тих відмінних від нуля мінорів цієї матриці, що всі мінори, які його облямовують, дорівнюють нулеві; нехай це буде мінор M. Після цього варто обчислити всі мінори матриці $\bar{A}$, що облямовують M, але в A не утримуються (так називані *характеристичні визначники* системи (1.90)). Якщо вони усі дорівнюють нулеві, то ранг матриці $\bar{A}$ дорівнює рангові матриці A і тому система (1.90) сумісна, у протилежному випадку вона несумісна. Таким чином, теоремі Кронекера—Капеллі можна дати таке формулювання: *система лінійних рівнянь* (1.90) *тоді і тільки тоді сумісна, якщо всі її характеристичні визначники дорівнюють нулеві.* Припустимо тепер, що система (1.90) сумісна. Теорема Кронекера—Капеллі, за допомогою якої ми встановлюємо сумісність цієї системи, стверджує існування розв'язання; вона не дає, однак, ніякого способу для практичного пошуку всіх розв'язань системи. До цієї задачі ми зараз переходимо.

Нехай матриця A має ранг r. Як доведено в попередньому розділі, r дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків матриці A. Нехай, для визначеності, перші r рядків матриці лінійно незалежні, а кожна з інших буде їхньою лінійною комбінацією. Тоді перші r рядків матриці $\bar{A}$ також будуть лінійно незалежними: усяка лінійна залежність між ними була б лінійною залежністю і між першими r строками матриці A. З співпадання рангів матриць A і $\bar{A}$ випливає, далі, що перші r рядків матриці $\bar{A}$ складають у ній максимальну лінійно незалежну систему рядків, тобто всякий інший рядок цієї матриці буде їхньою лінійною комбінацією.Звідси випливає, що всяке рівняння системи (1.90) можна представити як суму перших r рівнянь, узятих з деякими коефіцієнтами, а тому будь-яке загальне розв'язання перших r рівнянь буде задовольняти всім рівнянням системи (1.90). Досить знайти всі розв'язки системи

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rn}x_n = b_r \end{array}\right\} \qquad (1.91)$$

Так як рядки з коефіцієнтів при невідомих у рівняннях (1.91) лінійно незалежні, тобто матриця з коефіцієнтів має ранг r, то $r \leq n$ і, крім того, хоча б один з мінорів r-го порядку цієї матриці відмінний від нуля. Якщо $r=n$, то (1.91) буде системою з рівним числом рівнянь і невідомих і з відмінним від нуля визначником, тобто вона, а тому і система (1.90), має єдине розв'язання, а саме — обчислюється по правилу Крамера.

Нехай тепер $r<n$ і нехай, для визначеності, буде відмінним від нуля мінор r-го порядку, складений з коефіцієнтів при перших r невідомих. Перенесемо в кожнім з рівнянь (1.91) у праву частину всі члени з невідомими $x_{r+1}, \ldots, x_n$ і виберемо для цих невідомих декотрі значення $c_{r+1}, \ldots, c_n$. Ми одержимо систему r рівнянь

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1.r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{1n}c_n,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2.r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{2n}c_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r.r+1}c_{r+1} - \ldots - a_{rn}c_n,
\end{aligned}\right\} \quad (1.92)$$

відносно r невідомих $x_1, x_2 \ldots, x_r$. До цієї системи можна застосувати правило Крамера, і тому вона має єдине розв’язання $c_1, c_2, \ldots, c_r$; очевидно, що система чисел $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}, \ldots, c_n$, буде служити розв’язанням системи (1.91). Так як значення $c_{r+1}, \ldots, c_n$, для невідомих $x_{r+1}, \ldots, x_n$, які називають *вільними невідомими,* ми могли вибирати довільним чином, то цим шляхом буде отримано нескінченно багато різних розв’язань системи (1.91).

З іншого боку, усяке розв’язання системи (1.91) може бути отримане зазначеним шляхом: якщо дано деяке розв’язання $c_1, c_2, \ldots, c_n$ системи (1.91), то в якості значень для вільних невідомих беремо числа $c_{r+1} \ldots, c_n$. Тоді числа $c_1, c_2, \ldots, c_r$ будуть задовольняти системі (1.92) і тому будуть складати те єдине розв’язання цієї системи, яке обчислюється за правилом Крамера.

Усе сказане вище поєднується у вигляді наступного правила розв’язання довільної системи лінійних рівнянь: *Нехай дана спільна система лінійних рівнянь* (1.90) *і нехай матриця з коефіцієнтів А має ранг r. Вибираємо в А r лінійно незалежних рядків і залишаємо в системі* (1.90) *лише рівняння, коефіцієнти яких ввійшли в обрані рядки. У цих рівняннях залишаємо в лівих частинах такі r невідомих, що визначник з коефіцієнтів при них відмінний від нуля, а інші невідомі об’являємо вільними і переносимо в праві частини рівнянь. Придаючи вільним невідомим довільні числові значення й обчислюючи значення інших невідомих за правилом Крамера, ми одержимо всі розв’язання системи* (1.90). Додатково ще раз сформулюємо наступний отриманий нами результат: *Спільна система* (1.90) *тоді і тільки тоді має єдиний розв’язок, якщо ранг матриці А дорівнює числу невідомих.*

Приклади. 1. Розв’язати систему

$$\left.\begin{aligned}
5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7\\
2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1\\
x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює двом: мінор другого порядку, який стоїть в лівому верхньому куті цієї матриці, відмінний від нуля, але обидва мінори третього порядку, які його облямовують, дорівнюють нулеві. Ранг розширеної матриці дорівнює трьом, так як

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$$

Звідси випливає, що система несумісна.

2. Розв’язати систему

$$\left.\begin{aligned}
7x_1 + 3x_2 &= 2\\
x_1 - 2x_2 &= -3\\
4x_1 + 9x_2 &= 11
\end{aligned}\right\}$$

Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює двом, тобто, дорівнює числу невідомих; ранг розширеної матриці також дорівнює двом. Таким чином, система сумісна і має єдине розв’язання. Ліві частини перших двох рівнянь лінійно незалежні; розв’язуючи систему цих двох рівнянь, ми одержимо для невідомих значення x_1=-(5/17), x_2=23/17

Легко бачити, що цей розв’язок задовольняє і третьому рівнянню.

3. Розв’язати систему

$$\left.\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= 1\\
3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 4\\
x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

Система сумісна, так як ранг розширеної матриці, як і ранг матриці з коефіцієнтів, дорівнює двом. Ліві частини першого і третього рівнянь лінійно незалежні, так як коефіцієнти при невідомих x_1 і x_2 складають відмінний від нуля мінор другого порядку. Розв’язуємо систему з цих двох рівнянь, причому невідомі x_3, x_4, x_5 вважаємо вільними, переносимо в праві частини рівнянь і припускаємо, що їм уже дані деякі числові значення. Ми одержимо, застосовуючи правило Крамера:

$$x_1 = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 - x_5,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{7}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4.$$

Ці рівності визначають *загальне розв'язання* заданої системи: придаючи в них вільним невідомим довільні числові значення, ми одержимо всі розв'язання нашої системи. Так, розв'язаннями нашої системи будуть, наприклад, вектори (2,5,3,0,0), (3,5,2,1,—2), і т.д. З іншого боку, підставляючи вираз для x_1 і x_2 із загального розв'язання в кожне з рівнянь системи, наприклад в друге, яке раніше було виключене з розгляду, ми одержимо тотожність.

4. Розв'язати систему

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + x_2 \quad - 2x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \quad + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad - x_4 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 \quad - x_3 - 3x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Хоча число рівнянь дорівнює числу невідомих, але визначник системи дорівнює нулеві і тому правило Крамера не може бути застосоване. Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює трьом — у правому верхньому куті цієї матриці розташований відмінний від нуля мінор третього порядку. Ранг розширеної матриці також дорівнює трьом, тобто система сумісна. Розглядаючи лише перші три рівняння і вважаючи невідоме x_1 вільним, ми одержимо загальне розв'язання у вигляді

$$x_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_1, \quad x_3 = -\frac{3}{5} + \frac{9}{5}x_1, \quad x_4 = 0$$

5. Нехай дана система, яка складається з n+1 рівнянь відносно n невідомих. Розширена матриця $\bar{A}$ цієї системи буде квадратною порядку n+1. Якщо наша система сумісна, то, по теоремі Кронекера—Капеллі, визначник матриці $\bar{A}$ повинний бути рівним нулеві.

Так, нехай дана система

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 8x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 7x_2 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

Визначник з коефіцієнтів і вільних членів цих рівнянь відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & -8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & -4 \end{vmatrix} = -77$$

тому система несумісна.

Зворотне твердження не буде, узагалі говорячи, справедливим: з рівності нулеві визначника матриці $\bar{A}$ не випливає співпадання рангів матриць A і $\bar{A}$.

1.12. Системи лінійних однорідних рівнянь

Застосуємо результати попереднього розділу до випадку *системи лінійних однорідних рівнянь:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (1.93)$$

З теореми Кронекера—Капеллі випливає, що ця система завжди сумісна, так як додавання стовпця з нулів не може підвищити ранг матриці. Це, утім, видно і безпосередньо — система (1.93) завідомо має *нульове розв'язання* (0,0, ...,0). Нехай матриця A з коефіцієнтів системи (1.93) має ранг r. Якщо ранг *r=n, то нульове розв'язання буде єдиним розв'язанням системи (1.93); при r<n система володіє також розв'язаннями, відмінними від нульового, і для* пошуку всіх цих розв'язань використовується той же прийом, який використовувався вище у випадку довільної системи рівнянь. Зокрема, *система n лінійних однорідних рівнянь з n невідомими тоді і тільки тоді має розв'язання, які відмінні від нульового, якщо визначник цієї системи дорівнює нулеві.* Справді, рівність нулеві цього визначника рівносильне твердженню, що ранг матриці A менше n. З іншого боку, *якщо в системі однорідних рівнянь число рівнянь менше числа невідомих, то система неодмінно має* *розв'язання, які відмінні від нульового, так* як ранг у цьому випадку не може бути рівним числу невідомих.

Розглянемо, зокрема, випадок системи, що складається з n — 1 однорідних рівнянь відносно n невідомих, причому припустимо, що ліві частини цих рівнянь між собою лінійно незалежні. Нехай

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2n}, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2}\dots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

- матриця з коефіцієнтів цієї системи; через M_i позначимо мінор (n-1)-го порядку, який виходить після викреслювання з матриці A її i-го стовпця, $i=1,2$ ..., n. *Тоді одним з розв'язань нашої системи буде система чисел*

$$M_1, - M_2, M_3, -M_4, \dots, (-1)^{n-1} M_n \qquad (1.94)$$

а всяке друге розв'язання йому пропорційне.

Доведення. Так як, за умовою, ранг матриці A дорівнює n—*1*, то один з мінорів M_i повинний бути відмінний від нуля; нехай це буде M_n. Покладаємо в нашій системі невідоме x_n вільним і переносимо його в праву частину кожного з рівнянь, після чого одержимо

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \quad a_{12}x_2 + \dots \quad + \quad a_{1.n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + \quad a_{22}x_2 + \dots \quad + \quad a_{2.n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1.n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1,n}x_n, \end{aligned}$$

Застосовуючи потім правило Крамера, ми одержимо загальне розв'язання заданої системи рівнянь, якому після легких перетворень можна придати вигляд

$$x_i=(—1)^{n-i}(M_i/M_n)x_n, \; i=1,2, \dots, n — 1 \qquad (1.95)$$

Поклавши $x_n=(—1)^{n-1}M_n$, ми одержимо: $x_i=(—1)^{2n-i-1}M_i$, $i=1,2,\dots,n—1$,або, так як різниця $(2n—i—1)—(i-1)=2n-2i$ є парне число, $x_i=(—1)^{i-1}M_i$, тобто, система чисел (1.94) дійсно буде розв'язанням нашої системи рівнянь. Будь-яке інше розв'язання цієї системи виходить з формул (1.95) при іншому числовому значенні невідомого x_n, і тому воно пропорційне розв'язанню (1.94). Зрозуміло, що розглянуте твердження справедливе і у тому випадку, коли M_n=0, але один з мінорів M_i, $1\leq i\leq n—1$, відмінний від нуля.Розв'язання системи лінійних однорідних рівнянь мають наступні властивості. Якщо вектор $\beta=(b_1, b_2 \dots, b_n)$ є розв'язанням системи (1.93), то при будь-якому числі k вектор $k\beta=(kb_1, kb_2,\dots,kb_n)$ також буде розв'язанням цієї системи, що перевіряється безпосередньою підстановкою в кожне з рівнянь (1.93). Якщо, далі, вектор $\gamma=(c_1, c_2, \dots, c_n)$—ще одне розв'язання системи (1.93), то для цієї системи служить розв'язанням і вектор $\beta+\gamma=(b_1+c_1, b_2+c_2, \dots, b_n+c_n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_j + c_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = 0, \quad i = 1,2,\dots,s.$$

Тому узагалі *всяка лінійна комбінація розв'язань однорідної системи* (1.93) *буде сама розв'язанням цієї системи.* Помітимо, що у випадку *неоднорідної* системи, тобто, системи лінійних рівнянь, вільні члени яких не всі дорівнюють нулеві, відповідне твердження не має місця: ні сума двох розв'язань системи неоднорідних рівнянь, ні добуток розв'язання цієї системи на число не будуть уже служити розв'язаннями для цієї системи.

Ми знаємо, що всяка система n-мірних векторів, яка складається більш ніж з n векторів, буде лінійно залежною. Звідси випливає, що з числа розв'язань однорідної системи (1.93), що є, як ми знаємо, n-мірними векторами, можна вибрати кінцеву максимальну лінійно незалежну систему, максимальну в тім змісті, що всяке інше розв'язання системи (1.93) буде лінійною комбінацією розв'язань, які входять у цю обрану систему. Усяка максимальна лінійно незалежна система розв'язань однорідної системи рівнянь (1.93) називається її *фундаментальною системою розв'язань.*

Ще раз підкреслимо, що *n-мірний вектор тоді і тільки тоді буде розв'язанням системи (1.93), якщо він є лінійною комбінацією векторів, які складають дану фундаментальну систему.*

Зрозуміло, що фундаментальна система буде існувати лише в тому випадку, якщо система (1.93) має ненульові розв'язання, тобто якщо ранг її матриці з коефіцієнтів менше числа невідомих. При цьому система (1.93) може мати багато різних фундаментальних систем розв'язань. Усі ці системи еквівалентні, однак, між собою, так як кожен вектор усякої з цих систем лінійно виражається через будь-яку іншу систему, і тому системи *складаються з того самого числа розв'язань.*

Справедлива наступна теорема:

Якщо ранг r матриці з коефіцієнтів системи лінійних однорідних рівнянь (1.93) *менше числа невідомих n, то усяка фундаментальна система розв'язань системи (1.93) складається з n-r розв'язань.*

Для доведення відмітимо, що $n—r$ є числом вільних невідомих у системі (1.93); нехай вільними будуть невідомі $x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n$. Розглянемо довільний відмінний від нуля визначник d порядку $n—r$, який запишемо в такому вигляді

$$d=\begin{vmatrix} c_{1,r+1,} & c_{1,r+2,}\ldots, c_{1n,} \\ c_{2,r+1,} & c_{2,r+2,}\ldots, c_{2n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{n-r,r+1,} & c_{n-r,r+2,}\ldots,c_{n-r,n,} \end{vmatrix}$$

Беручи елементи i-го рядка цього визначника, $1\leq i\leq n—r$, як значення для вільних невідомих, ми, як відомо, одержимо однозначно визначені значення для невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_r$, тобто прийдемо до цілком визначеного розв'язання системи рівнянь (1.93); запишемо це розв'язання у вигляді вектора

$$\alpha_i=(c_{i1,}\ c_{i2,}\ldots,c_{ir,}c_{i,r+1,}\ c_{i,r+2,}\ldots,c_{in}).$$

Отримана нами система векторів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$ служить для системи рівнянь (1.93) фундаментальною системою розв'язань. Справді, ця система векторів лінійно незалежна, так як матриця, яка складена з цих векторів як з рядків, містить відмінний від нуля мінор d порядку $n — r$. З іншого боку, нехай $\beta=(b_1, b_2,\ldots b_r,b_{r+1}, b_{r+2},\ldots b_n)$ буде довільне розв'язання системи рівнянь (1.93). Доведемо, що вектор β лінійно виражається через вектори $\alpha_1,\alpha_2,\ldots, \alpha_{n-r}$. Позначимо через α'_i, $i=1,2, \ldots, n—r$, i-й рядок визначника d, який розглядається як $(n–r)$-мірний вектор. Покладемо, далі,

$$\beta'=(b_{r+1}, b_{r+2},\ldots b_n)$$

Вектори α'_i, $i=1,2, \ldots,n—r$, лінійно незалежні, так як $d\neq0$. Однак система $(n — r)$-мірних векторів

$$\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ \ldots,\alpha'_{n-r}\ \beta'$$

лінійно залежна, так як в ній число векторів більше їхньої розмірності. Існують, отже,такі числа $k_1,k_2,\ldots k_{n-r}$, що

$$\beta'=k_1\alpha'_1+k_2\alpha'_2+\ldots+k_{n-r}\alpha'_{n-r}. \qquad (1.96)$$

Розглянемо тепер n-мірний вектор

$$\delta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}-\beta.$$

Вектор δ, будучи лінійною комбінацією розв'язання системи однорідних рівнянь (1.93), сам буде розв'язанням цієї системи. З (1.96) випливає, що в розв'язанні δ значення для усіх вільних невідомих дорівнюють нулеві. Однак те єдине розв'язання системи рівнянь (1.93), яке виходить при рівних нулеві значеннях для вільних невідомих, буде нульовим розв'язанням. Таким чином, δ=0, тобто

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

Терема доведена. Помітимо, що проведене вище доведення дозволяє стверджувати, що ми одержимо усі фундаментальні системи розв'язань системи однорідних рівнянь (1.102), беручи в якості d усілякі відмінні від нуля визначники порядку n-r.

Приклад. Дана система лінійних однорідних рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-8x_3\ +2x_4\ \ +x_5&=0 \\ 2x_1-2x_2-3x_3\ -7x_4\ +2x_5&=0 \\ x_1+11x_2-12x_3+34x_4\ +5x_5&=0 \\ x_1-\ 5x_2+2x_3\ -16x_4\ -3x_5&=0 \end{aligned}\right\}$$

Ранг матриці з коефіцієнтів дорівнює двом, число невідомих дорівнює п'яти, тому усяка фундаментальна система розв'язань цієї системи рівнянь складається з трьох розв'язань. Розв'яжемо систему, обмежуючись першими двома лінійно незалежними рівняннями і вважаючи x_3, x_4, x_5 вільними невідомими. Ми одержимо загальне розв'язання у вигляді

$$x_1=\frac{19}{8}x_3+\frac{3}{8}x_4-\frac{1}{2}x_5,$$

$$x_2=\frac{7}{8}x_3-\frac{25}{8}x_4+\frac{1}{2}x_5,$$

Беремо, далі, наступні три лінійно незалежних тривимірних вектори (1, 0, 0), (0, 1, 0). (0, 0, 1). Підставляючи компоненти кожного з них у загальне розв'язання як значення для вільних невідомих і обчислюючи значення для x_1 і x_2, ми одержимо наступну фундаментальну систему розв'язань заданої системи рівнянь:

$$\alpha_1=(\frac{19}{8},\frac{7}{8},1,0,0),\quad \alpha_2=(\frac{3}{8},-\frac{25}{8},0,1,0),\quad \alpha_3=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,1)$$

Далі ми розглянемо зв'язок, який існує між розв'язуваннями неоднорідних і однорідних систем. Нехай дана система лінійних неоднорідних рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=b_s \end{array}\right\}\ (1.97)$$

Система лінійних однорідних рівнянь

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\ldots+a_{sn}x_n=0 \end{array}\right\}\ (1.98)$$

яка отримана з системи (1.98) заміною вільних членів нулями, називається *приведеною системою* для системи (1.97).

Як показують наступні дві теореми, між розв'язаннями систем (1.97) і (1.98) існує тісний зв'язок

1. *Сума будь-якого розв'язання системи* (1.97) *з будь-яким розв'язанням приведеної системи* (1.98) *знову буде розв'язанням системи* (1.97).Справді, нехай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - розв'язання системи (1.97),$d_1, d_2, \ldots, d_n$ - *розв'язання* системи (1.98). Беремо кожне з рівнянь системи (1.97), наприклад k-е, і вставляємо в нього замість невідомих числа c_1+d_1, $c_2+d_2, \ldots, c_n+d_n$. Ми одержимо:

$$\sum_{j=1} a_{kj}(c_j+d_j)=\sum_{j=1} a_{kj}c_j+\sum_{j=1} a_{kj}d_j=b_k+0=b_k.$$

2. *Різниця будь-яких двох розв'язань системи* (1.97) *служить розв'язанням для приведеної системи* (1.98).

Дійсно, нехай $c_1, c_2, \ldots, c_n$ і $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$ — розв'язання системи (1.97). Беремо кожне з рівнянь системи (1.98), наприклад k-е, і підставляємо в нього замість невідомих числа $c_1-c'_1$, $c_2-c'_2, \ldots, c_n-c'_n$.

Ми одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}(c_j-c'_j)=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c_j-\sum_{j=1}^{n} a_{kj}c'_j=b_k-b_k=0.$$

З цих теорем випливає, що, *знайшовши одне розв'язання системи лінійних неоднорідних рівнянь* (1.97) *і складаючи його з кожним з розв'язань приведеної системи (1.98), ми одержимо всі розв'язання системи (1.97).*

Мікромодуль 2

Приклади розв'язання типових задач

1. Розв'язати систему рівнянь матричним методом і за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=3, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ -x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$$

Розв 'язання. Матричний метод

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ - основна матриця системи.

Використовуючи властивості визначників, обчислюємо визначник основної матриці:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0-9+0-(2+0+0)=-11\neq 0$$

Оскільки $\Delta(A)\neq0$, то обернена матриця існує. Знаходимо її.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1,$$

Обернена матриця має вигляд $A^{-1}=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

тоді за формулою $X=A^{-1}B$ одержуємо

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1\cdot3-4\cdot2 & 5\cdot0 \\ -3\cdot3-1\cdot2-7\cdot0 \\ 2\cdot3-3\cdot2 & 1\cdot0 \end{pmatrix}=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $x_1=x_2=1$, $x_3=0$ - розв'язок даної системи.

Метод *Крамера.* Використаємо тепер формули Крамера:

$$\Delta=-11,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-11,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-11,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$x_1=\Delta_1/\Delta=1,\ x_2=\Delta_2/\Delta=1,\ x_3=\Delta_3/\Delta=0$$

2. Розв′яжить систему рівнянь, використовуючи метод Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -4 \end{cases},$$

Розв'язання . Записуємо розширену матрицю даної системи

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12. \\ 2 & 1 & 2 & 9\ . \\ -3 & 1 & 4 & 10. \end{array}\right)$$

і виконуючи перетворення над рядками, зведемо її до трапеціподібного виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12. \\ 2 & 1 & 2 & 9\ . \\ -3 & 1 & 4 & 10. \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12\ . \\ 0 & -3 & -4 & -15. \\ 0 & 7 & 13 & 46\ . \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12\ . \\ 0 & -3 & -42 & -15. \\ 0 & 1 & 5 & 16\ . \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12\ . \\ 0 & 1 & 5 & 16\ . \\ 0 & -3 & -\ 4 & -15. \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 12. \\ 0 & 1 & 5 & 16. \\ 0 & 0 & 11 & 33. \end{array}\right)$$

Останній рядок відповідає рівнянню $11x_3=33$, звідки $x_3=3$.

Далі записуємо рівняння:

$x_2+5x_3=16$,

тоді

$x_2=16-5x_3=16-15=1,\ x_2=1.$

$x_1+2x_2+3x_3=12,$

тоді

$x_1=12-2x_2-3x_3=12-2-9=1$

Отже, розв'язок системи такий: $x_1 = 1, x_2= 1, x_3 = 3$.

3. Дослідіть систему рівнянь $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3+x_4=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1 \end{cases}$

на сумісність і в разі сумісності знайдіть її розв'язок:

Розв'язання . Виписуємо розширену матрицю даної системи

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1. \end{array}\right)$$

Знаходимо ранг цієї матриці (і одночасно основної матриці), виконуючи елементарні перетворення рядків:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0. \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}\right)$$

З вигляду останньої матриці робимо висновок, що ранг основної матриці дорівнює 3. Ранг розширеної матриці також дорівнює трьом, оскільки ранг розширеної матриці не менший за ранг основної матриці, а останній рядок, що містить лише нульові елементи, не збільшує рангу (всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю).

Висновок. Дана система має безліч розв'язків. Ці розв'язки знаходимо так. За виглядом останньої матриці, записуємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \quad -2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1 \\ \qquad\quad 6x_3 - 5x_4 = 1 \end{cases}$$

яка еквівалентна вихідній системі. Рухаючись від останнього рівняння до першого, послідовно знаходимо:

$$x_3 = \frac{1+5x_4}{6}; \quad x_2 = -5x_3 + 3x_4 + 1 = -5\cdot\frac{1+5x_4}{6} + 3x_4 + 1 = \frac{1-7x_4}{6};$$

$$x_1 = 1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 - 2\cdot\frac{1-7x_4}{6} - 3\frac{1+5x_4}{6} + x_4 = \frac{1+5x_4}{6};$$

Відповідь можна записати так:

$$x_1 = \frac{1+5t}{6}; \quad x_2 = \frac{1-7t}{6}; \quad x_3 = \frac{1+5t}{6}; \quad x_4 = t; \quad де \quad t \in R$$

4.Знайдіть усі розв ‘язки системи

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання . Виписуємо розширену матрицю даної системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0. \\ 2 & -1 & 3 & 0. \\ 1 & 3 & -4 & 0. \end{array}\right)$$

Знаходимо ранг цієї матриці (і одночасно основної матриці), виконуючи елементарні перетворення рядків:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0. \\ 2 & -1 & 3 & 0. \\ 1 & 3 & -4 & 0. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0. \\ 2 & -1 & 3 & 0. \\ 3 & 2 & -1 & 0. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0. \\ 0 & -7 & 11 & 0. \\ 0 & -7 & 11 & 0. \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0. \\ 0 & -7 & 11 & 0. \\ & & & . \end{array}\right).$$

Оскільки кутовий мінор

$$M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

,

то ранг дорівнює 2 (2<3). Отже, система має безліч розв'язків. За останньою матрицею записуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 0 \end{cases}$$

Значення $x_3=7t$, $x_2=11t$, де $t \in R$ задовольняють друге рівняння. Тепер з першого рівняння дістаємо $x_1=4x_3-3x_2=28t-33t=-5t$,

Відповідь $x_1=-5t$, $x_2=11t$, $x_3=7t$, де $t \in R$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

*Розв'язання.*Розв' яжемо характеристичне рівняння матриці

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda)+1+1-5+3-\lambda-3+\lambda,$$

$$(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-6)=0, \quad \lambda_1=2, \quad \lambda_2=3, \quad \lambda_3=0$$

Отже, матриця *A* має три власних числа. Знайдемо тепер власні вектори, підставляючи по черзі значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в систему

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Власному числу $\lambda_2=2$ відповідає власний вектор X_1, координати якою задовольняють систему

$$\begin{cases} (3-2)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-2)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-2)x_3 = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Звідси
$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

і власний вектор
$$X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Аналогічно знаходять власні вектори

$$X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ та } X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

де C_1, C_2, C_3 - відмінні від нуля дійсні числа.

<u>Мікромодуль 2.</u>

Індивідуальні тестові завдання

2.1.Розв’язатисистему:

а)матричним методом;

б)по формулі Крамара

$$\text{2.1.1. }\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \end{cases} \qquad \text{2.1.2. }\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\text{2.1.3. }\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases} \qquad \text{2.1.4. }\begin{cases} 3x_1 + 4_2 - x_3 = -2 \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{2.1.5. }\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \text{2.1.6. }\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7 \end{cases}$$

$$\text{2.1.7. }\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.1.8. }\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{2.1.9. }\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \qquad \text{2.1.10. }\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{2.1.11. }\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases} \qquad \text{2.1.12. }\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 \quad + \quad 2x_3 = 7 \\ x_1 \quad + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\text{2.1.13. }\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad \text{2.1.14. }\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \qquad x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{2.1.15. }\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 \quad + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \qquad \text{2.1.16. }\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{2.1.17. }\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 \quad + \quad 4x_3 = -13 \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.1.18. }\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.1.19. }\begin{cases} x_1 + 3x_2 \quad = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases} \qquad \text{2.1.20. }\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20 \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8 \end{cases}$$

2.2. Розв’язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\text{2.2.1. }\begin{cases} \qquad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \qquad 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.2. }\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + \qquad x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.3. }\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.4. }\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.5. }\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.6. }\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.7. }\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 \qquad + \quad x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.8. }\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.9. }\begin{cases} -x_1 + \qquad x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.10. }\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.11. }\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.12. }\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.13. }\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - \qquad x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.14. }\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{2.2.15. }\begin{cases} x_1 + 3_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{2.2.16. }\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

2.2.17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.18. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

2.2.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.21. $\begin{cases} -3x_1 + 2_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.22. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.23. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.26. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.27. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.29. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

2.2.30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

Мікромодуль 3
Алгебра матриць

1.13. Множення матриць

У попередніх розділах поняття матриці було використано в якості істотного допоміжного матеріалу при вивченні систем лінійних рівнянь. Численні інші застосування цього поняття зробили його предметом великої самостійної теорії, яка в багатьох своїх частинах виходить за межі нашого курсу. Ми зараз вивчимо основи цієї теорії, яка починається з того, що в множині всіх квадратних матриць даного порядку своєрідним, але цілком вмотивованим способом визначаються дві алгебраїчні операції - додавання і множення. Ми почнемо з визначення множення матриць.

З курсу аналітичної геометрії відомо, що при повороті осей прямокутної системи координат на площині на кут α координати точки перетворюються по наступним формулам:

$$x=x'\cos\alpha — y'\sin\alpha,$$
$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

де x, y — старі координати точки, x', y' — її нові координати; таким чином, x і y виражаються через x' і y' лінійно з деякими числовими коефіцієнтами. У багатьох інших випадках також приходиться зустрічатися з заміною невідомих (або змінних), при якій старі невідомі лінійно виражаються через нові; таку заміну невідомих називають зазвичай їх лінійним перетворенням (або лінійною підстановкою). Ми приходимо, отже, до такого визначення:

Лінійним перетворенням невідомих називається такий перехід від системи n невідомих x_1, x_2 $\dots$, x_n до системи n невідомих $y_1, y_2, \dots$, y_n, при якому старі невідомі виражаються через нові лінійно з деякими числовими коефіцієнтами:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{array}\right\} \qquad (1.99)$$

Лінійне перетворення (1.99) цілком визначається своєю матрицею з коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n}, \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

так як два лінійних перетворення з однією і тією ж матрицею можуть відрізнятися одне від одного лише буквами, прийнятими для позначення невідомих; ми будемо вважати, однак, що вибір цих позначень цілком знаходиться в нашому розпорядженні. Зворотно, задаючи довільну матрицю *n*-го порядку, ми зараз же можемо написати лінійне перетворення, для якого ця матриця служить матрицею коефіцієнтів. Таким чином, між лінійними перетвореннями *n* невідомих і квадратних матриць *n*-го порядку існує взаємно однозначна відповідність, а тому всякому поняттю, зв'язаному з лінійними перетвореннями, і усякій властивості цих перетворень повинне відповідати аналогічне поняття або властивість, яка відноситься до матриць.

Розглянемо питання про послідовне виконання двох лінійних перетворень. Нехай слідом за лінійним перетворенням (1.99) виконано лінійне перетворення

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= b_{11}z_1 + b_{12}z_2 + \ldots + b_{1n}z_n, \\ y_2 &= b_{21}z_1 + b_{22}z_2 + \ldots + b_{2n}z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= b_{n1}z_1 + b_{n2}z_2 + \ldots + b_{nn}z_n, \end{aligned}\right\} \quad (1.100)$$

яке переводить систему невідомих $y_1, y_2, \ldots, y_n$ у систему $z_1, z_2, \ldots, z_n$; матрицю цього перетворення позначимо через *B*. Підставляючи в (1.99) вираз для $y_1, y_2, \ldots, y_n$ з (1.100), ми прийдемо до лінійних виразів для невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ через невідомі $z_1; z_2, \ldots, z_n$. Таким чином, *результат послідовного виконання двох лінійних перетворень невідомих знову буде лінійним перетворенням.*

Приклад. Результатом послідовного виконання лінійних перетворень

$$x_1 = 3y_1 - y_2, \quad y_1 = z_1 + z_2,$$

$$x_2 = y_1 + 5y_2, \quad y_2 = 4z_1 + 2z_2,$$

буде лінійне перетворення

$$x_1 = 3(z_1 + z_2) - (4z_1 + 2z_2)_1 = -z_1 + z_2,$$

$$x_2 = (z_1 + z_2) + 5(4z_1 + 2z_2)_1 = 21z_1 + 11z_2,$$

Позначимо через *C* матрицю лінійного перетворення, яке є результатом послідовного виконання перетворень (1.99) і (1.100), і знайдемо закон, по якому її елементи c_{ik}, $k=1, 2, \ldots, n$, виражаються через елементи матриць *A* і *B*. Коротко записуючи перетворення (1.99) і (1.100) у вигляді

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, y_j, \quad i = 1,2,\ldots,n; \quad y_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k, \quad j = 1,2,\ldots,n;.$$

ми одержимо

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk} z_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) z_k, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Таким чином, коефіцієнт при z_k у виразі для x_i, тобто елемент c_{lk} матриці *C*, має вигляд

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}; \quad (1.101)$$

елемент матриці C, що *стоїть в i-у рядку і k-у стовпці, дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A і k-го стовпця матриці B.*

Формула (1.101), яка дає вираз елементів матриці *C* через елементи матриць *A* і *B*, дозволяє при заданих матрицях *A* і *B* відразу написати матрицю *C,* минаючи розгляд лінійних перетворень, які відповідають матрицям *A* і *B*. Таким чином, усякій парі квадратних матриць *n*-го порядку ставиться у відповідність однозначно визначена третя матриця. Можна сказати, що ми визначили в множині всіх квадратних матриць *n*-го порядку алгебраїчну операцію; вона називається *множенням матриць,* а матриця *C— добутком* матриці *A* на матрицю *B:*

$$C=AB.$$

Ще раз сформулюємо зв'язок між лінійними перетвореннями і множенням матриць:

Лінійне перетворення невідомих, яке отримано в результаті послідовного виконання двох лінійних перетворень з матрицями A і B, має своєю матрицею коефіцієнтів матрицю AB.

Приклади

1) $\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 9 \\ -12 & -3 & 14 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 16 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$.

4) Знайти результат послідовного виконання лінійних перетворень

$x_1=5y_1- y_2+3y_3$

$x_2=y_1- 2y_2,$

$x_3=\quad 7y_2- y_3$

та

$y_1=2z_1+\quad z_3$

$y_2=\quad z_2 -5z_3,$

$y_3=\quad 2z_2$

Перемножуючи матриці, одержимо

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 11 \\ 0 & 5 & -35 \end{pmatrix}$$

тому шукане лінійне перетворення має вигляд

$$x_1 = 10z_1 + 5z_2 + 10z_3,$$
$$x_2 = 2z_1 - 2z_2 + 11z_3$$
$$x_3 = \qquad 5z_2 - 35z_3$$

Візьмемо один з розглянутих зараз прикладів множення матриць, наприклад 2), і знайдемо добуток тих же матриць, але узятих у зворотному порядку:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 9 \\ 14 & -6 & 13 \end{pmatrix}$$

Ми бачимо, що добуток матриць залежить від порядку множників, тобто *множення матриць некомутативне.* Цього, утім, слід було очікувати, уже хоча б тому, що у визначення матриці *C*, яке дано вище за допомогою формули (1.101), матриці *A* і *B* входять нерівноправним чином: в *A* беруться рядки, в *B*— стовпці.

Приклади непереставновчих матриць *n*-го порядку, тобто матриць, добуток яких міняється при перестановці співмножників, можна вказати для всіх *n,* починаючи з *n*=2 (матриці другого порядку в прикладі 1) непереставновчі). З іншого боку, дві дані матриці випадково можуть виявитися переставновчими, як показує наступний приклад:

$$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 45 \\ 15 & 26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Множення матриць асоціативно; можна говорити, отже, про однозначно визначений добуток будь-якого кінцевого числа матриць *n*-го порядку, узятих (через некомутативність множення) у визначеному порядку.

Доведення. Нехай дано три довільні матриці *n*-го порядку *A, B* і *C.* Запишемо їх наступним скороченим способом, який вказує загальний вигляд їх елементів: $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Введемо, далі, наступні позначення:

$AB=U=(u_{ij})$, $\quad BC=V=(v_{ij})$, $\quad (AB)C=S=(s_{ij})$, $A(BC)=T=(t_{ij})$

Нам потрібно довести справедливість рівності $(AB)C=A(BC)$, тобто $S=T$. Однак

$$u_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl},\ v_{kj} = \sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj}$$

і тому, маючи на увазі рівності $S=UC,\ T=AV,$

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{n}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj},$$

$$t_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}$$

тобто $s_{ij}=t_{ij}$ при $i,j=1,2,\dots,\ n$. Подальше вивчення властивостей множення матриць вимагає залучення їхніх визначників, причому ми умовимося для стислості позначати визначник матриці A через $|A|$. Якщо в кожнім з розглянутих вище прикладів підрахувати визначники матриць, що перемножуються, і порівняти добуток цих визначників з визначником добутку заданих матриць, то знайдемо закономірність, яка виражається наступною дуже важливою теоремою про множення визначників:

Визначник добутку декількох матриць n-го порядку дорівнює добуткові визначників цих матриць.

Досить довести цю теорему для випадку двох матриць. Нехай

дано матриці n-го порядку $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ і нехай $AB=C=(c_{ij})$.

Побудуємо наступний допоміжний визначник Δ порядку $2n$: у його лівому верхньому куті поставимо матрицю A, у правому нижньому — матрицю B, весь правий верхній кут займемо нулями і, нарешті, по головній діагоналі лівого нижнього кута поставимо число —1, зайнявши всі інші місця також нулями. Визначник Δ має, отже, такий вигляд:

$$\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0\\
-1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n}\\
0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}
\end{vmatrix}$$

Застосування до визначника Δ теореми Лапласа — розкладання по першим n рядкам - призводить до наступної рівності:

$$\Delta=|A|\cdot|B| \qquad (1.102)$$

Спробуємо, з іншого боку, так перетворити визначник Δ, не змінюючи його значення, щоб всі елементи $b_{ij},\ i,j=1,2,\ .\ .\ .\ .,\ n$, виявилися заміненими нулями. Для цієї мети до $(n+1)$-го стовпця визначника Δ додамо його перший стовпець, помножений на b_{11}, другий, помножений на b_{21}, і т.д., нарешті n-й стовпець, помножений на b_{n1}. Потім до $(n+2)$-го стовпця визначника Δ додамо перший стовпець, помножений на b_{12}, другий, помножений на b_{22}, і т.д. Узагалі, до $(n+j)$-го стовпця визначника Δ, де $j=1,\ 2,\ .\ .\ .,\ n$, ми додамо суму перших n стовпців, узятих, відповідно, з коефіцієнтами $b_{1j},\ b_{2j}\ .\ .\ .,\ b_{nj}$. Легко бачити, що ці перетворення, які не змінюють визначника, насправді приводять до заміни всіх елементів b_{ij} нулями. Одночасно замість нулів, що стояли в правому верхньому куті визначника, з'являться наступні числа: на перетині i-го рядка і $(n+j)$-го стовпця визначника, $i,j=1,2,\ .,n$, буде стояти тепер число $a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{in}b_{nj}$, рівне, через (1.102), елементові c_{ij} матриці $C=AB$.Правий верхній кут визначника займає тепер,отже,матрицяC

$$\Delta=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}\\
-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}$$

Застосуємо ще раз теорему Лапласа, розкладаючи визначник по останнім n стовпцях. Додатковий мінор для мінору $|C|$ дорівнює $(-1)^n$, а так як мінор $|C|$ розташований у рядках з номерами $1,2\ .\ .\ .,\ n$ і в стовпцях з номерами $n+1,\ n+2,\dots,\ 2n$, причому

$$1+2+\dots+n+(n+1)+(n+2)+\dots+2n=2n^2+n,$$

то $$\Delta=(-1)^{2n^2+n}(-1)^n|C| = (-1)^{2(n^2+n)}|C|$$

або, через парність числа 2 ($n^2 + n$),

$$\Delta=|C| \quad (1.103)$$

З (1.102) і (1.103) випливає, нарешті, рівність, яка доводилася

$$|C|=|A|\cdot|B|$$

1.14. Обернена матриця

Квадратна матриця називається *виродженою* (або *особливою),* якщо її визначник дорівнює нулеві, і *невиродженою* (або *неособливою)*— у протилежному випадку. Відповідно лінійне перетворення невідомих називається *виродженим* або *невиродженим* у залежності від того, чи буде дорівнювати нулеві або відмінний від нуля визначник з коефіцієнтів цього перетворення. З теореми, доведеної наприкінці попереднього розділу, випливає наступне твердження.

Добуток матриць, хоча б одна з яких вироджена, буде виродженою матрицею.

Добуток будь-яких невироджених матриць сам буде невиродженою матрицею.

Звідси випливає, через зв'язок, який існує між множенням матриць і послідовним виконанням лінійних перетворень, таке твердження: *результат послідовного виконання декількох лінійних перетворень тоді і тільки тоді буде невиродженим перетворенням, якщо всі задані перетворення невироджені.*

Роль одиниці в множенні матриць грає одинична матриця

$$E=\begin{pmatrix} 1\,0 ... 0 \\ 0\,1 ... 0 \\ .... \\ 0\,0 ... 1 \end{pmatrix}$$

причому вона перестановочна з будь-якою матрицею A даного порядку,

$$AE=EA=A \qquad (1.104)$$

Доводяться ці рівності або безпосереднім застосуванням правила множення матриць, або ж на підставі зауваження, що одинична матриця відповідає *тотожному* лінійному перетворенню невідомих

$$\begin{aligned} x_1&=y_1, \\ x_2&=\ y_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n&=\quad y_n \end{aligned}$$

виконання якого до або після будь-якого іншого лінійного перетворення, вочевидь, не змінює цього останнього. Помітимо, що *матриця E є єдиною матрицею, яка задовольняє умові* (1.99) *при будь-якій матриці A.* Дійсно, якби існувала ще матриця E' з цією же властивістю, то ми мали б $E'E = E'$, $E'E = E$, звідки $E'=E$.

Питання про існування для даної матриці A *оберненої матриці* виявляється більш складним. Через некомутативність множення матриць ми будемо говорити зараз про *праву обернену* матрицю, тобто про таку матрицю A^{-1}, коли добуток матриці A праворуч на цю матрицю дає одиничну матрицю,

$$AA^{-1}=E.(1.105)$$

Якщо матриця A вироджена, то, якби матриця A^{-1} існувала, добуток, який стоїть в лівій частині рівності (1.105), був би, як ми знаємо, виродженою матрицею, у той час як насправді матриця E, яка стоїть в правій частині цієї рівності, є невиродженою, так як її визначник дорівнює одиниці. Таким чином, вироджена матриця не може мати правої оберненої матриці. Такі ж міркування показують, що вона не має і лівої оберненої матриці і тому *для виродженої матриці обернена матриця взагалі не існує.*

Переходячи до випадку невиродженої матриці, уведемо спочатку наступне допоміжне поняття. Нехай дана матриця n-го порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$$

Матриця

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11}A_{21}\ldots A_{n1} \\ A_{12}A_{22}\ldots A_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}A_{2n}\ldots A_{nn} \end{pmatrix}$$

яка складена з алгебраїчних доповнень до елементів матриці *A*, причому алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} стоїть на перетинанні *j*-го рядка і *i*-го стовпця, називається *приєднаною* (або *взаємною)* матрицею до матриці *A*. Знайдемо добутки *AA** і *A*A*. Використовуючи відому формулу розкладання визначника по рядку або стовпцю, а також теорему про суму добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), і позначаючи через *d* визначник матриці *A,*

$$d=|A|,$$

ми одержимо наступні рівності:

$$AA^{*}=A^{*}A=\begin{pmatrix} d\ 0\ldots 0 \\ 0\ d\ldots 0 \\ 0\ 0\ldots d \end{pmatrix} \qquad (1.106)$$

Звідси випливає, що *якщо матриця A невироджена, то її приєднана матриця A* також буде невиродженою, причому визначник d* матриці A* дорівнює (n—*1*)-го степеня визначника d матриці A.*

Справді, переходячи від рівностей (1.105) до рівності між визначниками, ми одержимо

$$dd^{*}=d^{n}$$

звідки через $d\neq 0$

$$d^{*}=d^{n-1}$$

Тепер легко довести існування оберненої матриці для всякої невиродженої матриці *A* і знайти її вид. Помітимо спочатку, що якщо ми розглянемо добуток двох матриць *AB* і всі елементи одного з множників, наприклад *B,* розділимо на одне і те ж саме число *d,* то всі елементи добутку *AB* також розділяться на це ж число: для доведення потрібно лише згадати визначення множення матриць. Таким чином, якщо

$$d=|A|\neq 0,$$

то з рівностей (1.106) випливає, що *оберненою матрицею для A буде служити матриця, яка виходить із приєднаної матриці A* діленням усіх її елементів на число d:*

$$A^{-1}=\left\langle \begin{matrix} \dfrac{A_{11}}{d}\,\dfrac{A_{12}}{d}\ldots\dfrac{A_{n1}}{d} \\ \dfrac{A_{12}}{d}\,\dfrac{A_{12}}{d}\ldots\dfrac{A_{n2}}{d} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{A_{1n}}{d}\,\dfrac{A_{1n}}{d}\ldots\dfrac{A_{nn}}{d} \end{matrix} \right\rangle$$

Дійсно, з (1.106) випливають рівності

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E \qquad (1.107)$$

Ще раз підкреслимо, що в *i*-у рядку матриці A^{-1} стоять алгебраїчні доповнення до елементів *i*-го стовпця визначника $|A|$, поділені на $d=|A|$.

Легко довести, що *матриця A^{-1} є єдиною матрицею, яка задовольняє умові* (1.107) *для даної невиродженої матриці A.* Дійсно, якщо матриця *C* така, що

$$AC=CA=E,$$

то

$$CAA^{-1}=C(AA^{-1})=CE=C,$$
$$C\,AA^{-1}=(CA)\,A^{-1}E\,A^{-1}=A^{-1}$$

звідки $C=A^{-1}$.

З (1.107) і теореми про множення визначників випливає, *що визначник матриці A^{-1} дорівнює* $1/|A|$, *так що ця матриця також буде невиродженою; оберненою для неї служить матриця A.* Якщо тепер нам задані квадратні матриці *n*-го порядку *A* і *B,* з яких *A* — невироджена, а *B*-довільна, то ми можемо виконати *праве і ліве ділення B на A,* тобто розв'язати матричні рівняння

$$AX=Y,\quad YA=B. \ (1.108)$$

Для цього, так як має місце асоціативність множення матриць, досить покласти

$$X=A^{-1}B,\ \ Y=B\,A^{-1}$$

причому ці розв’язання рівнянь (1.108) будуть, через некомутативність множення матриць, у загальному випадку різними.

Приклади. 1) Дана матриця

$$A=\begin{pmatrix} 3-1 & 0 \\ -2\ \ 1 & 1 \\ 2-1 & 4 \end{pmatrix}$$

Її визначник $|A|=5$, тому обернена матриця A^{-1} існує, причому

$$A^{-1}=\left\langle\begin{matrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{matrix}\right\rangle$$

2) Дано матриці

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Матриця A невироджена, причому

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

тому розв’язками рівнянь $AX=B$, $YA=B$ будуть служити матриці

$$X=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$$

Множення прямокутних матриць. Хоча множення матриць, яке визначено в попередньому розділі, лише для квадратних матриць однакового порядку, але його можна поширити і

на випадки прямокутних матриць A і B, якщо тільки можна застосувати формулу (1.106) попереднього розділу, тобто якщо всякий рядок матриці A містить стільки ж елементів скільки з у всякому стовпці матриці B. Іншими словами, *можна говорити про добуток прямокутних матриць A і B у тому випадку, якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B, причому число рядків матриці AB дорівнює числу рядків матриці A, число ж стовпців матриці AB дорівнює числу стовпців матриці B.*

Приклади.

$$1)\begin{pmatrix} 5-1 & 3 & 1 \\ 2 & 0-1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1\,3 & 0 \\ -2\,1 & 1 \\ 3\,0 & -2 \\ 4\,1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2)\begin{pmatrix} 0-3 & 1 \\ 2\ \ 1 & 5 \\ -4\ \ 0 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

$$3)\ (5 \quad 1 \quad 0 \quad -3)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \\ & \end{pmatrix}=(11 \quad -1).$$

Множення прямокутних матриць можна зв'язати з послідовним виконанням лінійних перетворень невідомих, якщо тільки у визначенні останніх відмовитися від припущення, що число невідомих зберігається при лінійному перетворенні. Легко перевірити також, дослівно повторюючи доведення, яке приведено вище для випадку квадратних матриць, що *закон асоціативності залишається справедливим і для множення прямокутних матриць.* Ми скористаємося зараз множенням прямокутних матриць і властивостями оберненої матриці для нового доведення правила Крамера, яке не потребує тих громіздких обчислень, які проводилися раніше. Нехай дана система n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n = b_n, \end{aligned} \qquad (1.109)$$

причому визначник цієї системи відмінний від нуля. Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів системи (1.109) . Ця матриця невироджена, так як, по припущенню, $d=|A|\neq 0$. Позначимо далі через X стовпець з невідомих, через B - стовпець з вільних членів системи (1.109),тобто

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Добуток AX має сенс, так як число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриць X, причому цей добуток буде стовпцем, складеним з лівих частин рівнянь системи (1.109).Таким чином, систему (1.109) можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$$AX=B. \quad (1.110)$$

Помноживши обидві частини рівняння (1.110) зліва (ліворуч) на матрицю A^{-1}, існування якої випливає з невиродженості квадратної матриці, ми одержимо

$$X=A^{-1}B \quad (1.111)$$

Добуток, що стоїть праворуч, буде матрицею з одного стовпця; її j-й елемент дорівнює сумі добутків елементів j-го рядка матриці A^{-1} на відповідні елементи матриці B, тобто дорівнює числу

$$\frac{A_{1j}}{d}b_1+\frac{A_{2j}}{d}b_2+\ldots+\frac{A_{nj}}{d}b_n=\frac{1}{d}(A_{1j}b_1+A_{2j}b_2+\ldots+A_{nj}b_n)$$

Дужка, що стоїть праворуч, є, однак, розкладанням по j-му стовпцеві визначника d_j, який виходить заміною j-го стовпця визначника d стовпцем B. Таким чином, формули (1.111) рівносильні формулам (1.52), що виражають розв'язання системи (1.109), яке ми отримуємо по правилу Крамера. Залишається показати, що отримані значення невідомих дійсно складають розв'язання системи (1.109) Для цього досить вираз (1.111) підставити у рівняння (1.110) що, очевидно, приводить до тотожності $B=B$.

Ранг добутку матриць. Теорема про множення визначників не приводить у випадку вироджених матриць ні до якого висловлення поверх того, що їхній добуток також буде виродженим, хоча вироджені квадратні матриці можна ще розрізняти по їхніх рангах. Помітимо, що не існує цілком визначеної залежності між рангами співмножників і рангом добутку, як показують наступні приклади:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

в обох випадках перемножуються матриці рангу 1, однак в одному випадку добуток має ранг 1, в іншому — ранг 0. Справедлива, притім не тільки для квадратних, але і для прямокутних матриць, лише наступна теорема.

Ранг добутку матриць не вище рангу кожного зі співмножників.

Досить довести цю теорему для випадку двох множників. Нехай дано матриці A і B, для яких добуток AB має сенс; позначимо $AB=C$. Розглянемо формулу (1.101), яка дає вираз елементів матриці C. Беручи цю формулу для даного k і усіх можливих i ($i=1, 2, \ldots$), ми одержуємо, що k-й стовпець матриці C є сумою всіх стовпців матриці A, узятих з деякими коефіцієнтами (а саме з коефіцієнтами b_{1k}, $b_{2k\ldots}$). Цим доведено, що система стовпців матриці C лінійно виражається через систему стовпців матриці A, а тому, як показано раніше, ранг першої системи менший або дорівнює рангові другої системи; іншими словами, ранг матриці C не більший рангу матриці A. Так як, з іншого боку, з тієї ж формули (1.101) при даному i і усіх k випливає, що всякий i-й рядок матриці C є лінійною комбінацією рядків матриці B, то з аналогічних міркувань ми одержимо, що ранг C не вищий рангу B.

Більш точний результат має місце для випадку, коли один із множників є невиродженою квадратною матрицею:

Ранг добутку довільної матриці A праворуч або ліворуч на невироджену квадратну матрицю Q дорівнює рангові матриці A.

Нехай, наприклад,

$$AQ=C. \quad (1.112)$$

З попередньої теореми випливає, що ранг матриці C не вище рангу матриці A. Перемножаючи, однак, рівність (1.112) праворуч на Q^{-1} прийдемо до рівності

$$A=CQ^{-1},$$

а тому, знову на підставі попередньої теореми, ранг A не вище рангу Зіставлення цих двох результатів доводить збіг рангів матриць A і C.

1.15. Додавання матриць і множення матриці на число

Для квадратних матриць порядку n визначається додавання у такий спосіб:

Сумою $A+B$ двох квадратних матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ порядку n називається матриця $C=(c_{ij})$, всякий елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B:

$$c_{ij=}a_{ij+}b_{ij}$$

Визначене нами додавання матриць буде, мабуть, комутативним і асоціативним. Для нього існує обернена операція — віднімання, причому різницею матриць A і B служить матриця, складена з від'ємностей відповідних елементів заданих матриць. Роль нуля грає при цьому *нульова матриця,* складена суцільно з нулів; надалі ця матриця позначається символом 0: немає серйозної небезпеки змішати нульову матрицю з числом нуль.

Додавання квадратних матриць і їхнє множення, яке визначене раніше, зв'язані законами дистрибутивності.

Справді, нехай дано три матриці порядку n, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, $C=(c_{ij})$. Тоді для будь-яких i і j має місце очевидна рівність

$$\sum_{s=1}^{n}(\mathrm{a}_{\mathrm{is}}+\mathrm{b}_{is})c_{sj}=\sum_{s=1}^{n}\mathrm{a}_{\mathrm{is}}c_{sj}+\sum_{s=1}^{n}\mathrm{b}_{is}c_{sj}.$$

Однак ліва частина цієї рівності є елемент, який стоїть в i-у рядкові і j-у стовпці матриці $(A+B)C$, права частина — елемент, який стоїть на цьому ж місці в матриці $AC+BC$. Цим доведена рівність

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Рівність $C(A+B)=CA+CB$ доводиться таким же шляхом — некомутативність множення матриць вимагає, зрозуміло, доведення цих обох законів дистрибутивності.

Введемо наступне визначення множення матриць на число. *Добутком k квадратної матриці $A=(a_{ij})$ на число k* називається матриця *$A'=(a'_{ij})$, яка* виходить множенням на k всіх елементів матриці A:

$$a'_{ij=}ka_{ij}.$$

З одним прикладом такого множення матриці на число ми вже зустрічалися в попередньому розділі: якщо матриця A невироджена, причому $|A|=d$, то її обернена матриця A^{-1} і приєднана матриця A^* зв'язані рівністю $A^{-1}=d^{-1}A^*$. Як ми знаємо, усяку квадратну матрицю порядку n можна розглядати як n^2-мірний вектор, причому ця відповідність між матрицями і векторами взаємно однозначна. Визначені зараз додавання матриць і множення матриці на число перетворюються при цьому в додавання векторів і множення вектора на число. Таким чином, *сукупність квадратних матриць порядку n можна розглядати як n^2-мірний векторний простір.*

Звідси випливає справедливість наступних рівностей (тут A,B - *матриці* порядку n; *k,l-числа*, 1-число одиниця);

$$k(A+B)=kA=kB \quad (1.113)$$

$$(k+l)A=kA+lA, \quad (1.114)$$

$$k(lA)=(kl)A, \quad (1.115)$$

$$1\cdot A=A. \quad (1.116)$$

Властивості (1.113) і (1.114) зв'язують множення матриці на число з додаванням матриць. Існує, разом з тим, дуже важливий зв'язок між множенням матриці на число і перемножуванням самих матриць, а саме:

$$(kA)B=A(kB)=k(AB), \quad (1.117)$$

тобто *якщо в добутку матриць один із множників збільшується на число k, то і весь добуток буде збільшуватися на k.* Справді, нехай дано матриці $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ і число k. Тоді для будь-яких i і j буде:

$$\sum_{s=1}^{n}(k\mathrm{a}_{\mathrm{is}})\mathrm{b}_{sj}=k\sum_{s=1}^{n}\mathrm{a}_{\mathrm{is}}\mathrm{b}_{sj}$$

Ліва частина цієї рівності є, однак, елемент, який стоїть в i-у рядкові і j-му стовпці матриці $(kA)B$, права частина — елемент, який *стоїть на цьому ж місті,* у матриці $k(AB)$. Цим доведена рівність $(k)B=k(AB)$. Рівність $A(kB)= k(AB)$ доводиться таким же шляхом.

Операція множення матриці на число дозволяє ввести новий спосіб запису матриць. Позначимо через E_{ij} матрицю, у якій на перетині i-го рядка і j-го стовпця стоїть одиниця, а всі інші елементи дорівнюють нулеві. Покладаючи i=1,2, . . ., n і j=1,2, . . ., n, ми одержимо n^2 таких матриць E_{ij}, які зв'язані, як легко перевірити, наступною таблицею множення:

$$E_{is}E_{sj}=E_{ij},\quad E_{is}E_{tj}=0 \quad \text{при } s\neq t.$$

Матриця kE_{ij} відрізняється від матриці E_{ij} лише тим, що в ній на перетині i-го рядка і j-го стовпця стоїть число k. З огляду на це і використовуючи визначення додавання матриць, ми одержуємо наступний запис для довільної квадратної матриці A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}E_{ij} \quad (1.118)$$

причому матриця A має, мабуть, лише один запис вигляду (1.118).

Матриця kE, де E—одинична матриця, має, по визначенню множення матриці на число, наступний вигляд:

$$kE=\begin{pmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{pmatrix},$$

тобто на головній діагоналі стоїть те саме число k, а всі елементи поза цією діагоналлю дорівнюють нулеві. Такі матриці називаються *скалярними.*

Визначення додавання матриць приводить до рівності

$$kE+lE=(k+l)E.(1.119)$$

З іншого боку, використовуючи визначення множення матриць або ж спираючись на рівність (1.117), одержуємо:

$$kE\cdot lE=(kl)E.(1.120)$$

Множення матриці A на число k можна витлумачити як множення A на скалярну матрицю k у змісті перемножування матриць. Дійсно, по (1.117), $(kE)\ A=A\ (kE)=kA$. Звідси випливає також, що *всяка скалярна матриця перестановочна з будь-якою матрицею A.* Дуже важливо, що скалярні матриці є єдиними, які володіють цією властивістю:

Якщо деяка матриця $C=(c_{ij})$ n-го порядку перестановочна з будь-якою матрицею цього ж порядку, то матриця C скалярна.

Справді, покладемо $i\neq j$ і розглянемо рівні між собою, за умовою, добутки CE_{ij} і $E_{ij}C$ (див. вище визначення матриці E_{ij}). Легко бачити, що всі стовпці матриці CE_{ij}, крім j-го, складаються з нулів, а j-й стовпець збігається з i-м стовпцем матриці C; зокрема, на перетині i-го рядка і j-го стовпця матриці CE_{ij} стоїть елемент c_{ij}. Аналогічно всі рядки матриці E_{ij}, крім i-го, складаються з нулів, а i-й рядок збігається з j-м рядком матриці C; на перетині i-го рядка і j-го стовпця матриці $E_{ij}C$ розташований елемент c_{ij}. Використовуючи рівність $CE_{ij}=E_{ij}C$, ми одержуємо, що $c_{ii}=c_{jj}$ (як елементи, що стоять у рівних між собою матрицях на однакових місцях), тобто всі елементи головної діагоналі матриці C рівні між собою. З іншого боку, на перетині j-го рядка і j-го стовпця матриці CE_{ij} стоїть елемент c_{ji}; але в матриці $E_{ij}C$ на цьому ж місці стоїть нуль (тому що $i\neq j$), і тому $c_{ji}=0$, тобто всякий елемент матриці C, розташований поза головною діагоналлю, дорівнює нулеві. Теорема доведена.

Мікромодуль 3

Приклади розв'язання типових задач

1. Знайдіть добуток матриць AB, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & 1 & -1\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тобто матриці узгоджені, то операція множення AB має зміст і добуток матриць обчислюємо так:

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+3\cdot 5+2\cdot 4 & 1\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 1+3\cdot(-1)+2\cdot 2\\ 4\cdot(-2)+1\cdot 5+3\cdot 4 & 4\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 3 & 4\cdot 1+1\cdot(-1)+3\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 9 & 2\\ 9 & 10 & 9\end{pmatrix}$$

2. Знайдіть $f(A)$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix},\quad f(x)=(x^2-3x)(3x+2)$$

Розв'язання. Необхідно знайти значення виразу

$$f(A)=(A^2-3A)\cdot(3A-2E)$$

Маємо

$$A^2-3A=\begin{pmatrix}-8 & -21\\ 28 & 13\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -21\\ 28 & 13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & -9\\ 12 & 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & -12\\ 16 & -2\end{pmatrix};$$

$$3A+2E=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 4 & 7\end{pmatrix};$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-14 & -12\\ 16 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -3\\ 4 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14\cdot 4-12\cdot 4 & -14\cdot(-3)-12\cdot 7\\ 6\cdot 4-2\cdot 4 & 16\cdot(-3)-2\cdot 7\\ & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-104 & -42\\ 16 & -62\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Якщо $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_{n-1}x+a_n$ і A – деяка квадратна матриця, то $f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+a_{n-1}A\ +a_nE.$

3. Знайдіть обернену до матриці A матрицю, якщо

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Розв 'язання. В першу чергу обчислюємо визначник матриці A:

$$\det(A)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 5 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}=10\neq 0.$$

Оскільки A - невироджена матриця, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=1;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=1;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=5;$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2;\quad A_{22}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=2;\quad A_{32}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=0;\quad A_{13}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=-5;$$

$$A_{23}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}=5;\quad A_{33}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=5;$$

Отже, обернена матриця має вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 2 & 0\\ -5 & 5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}5\\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0\\ -0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

4.Розв'яжіть матричне рівняння $X\cdot A\cdot B=C$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{pmatrix},\ \text{C=(1,-2).}$$

Розв 'язання. Послідовно дістаємо

$$X\cdot A\cdot B=C,\ X\cdot A\cdot B\ B^{-1}=CB^{-1},\ X\cdot A\cdot E=CB^{-1},\ X\cdot A=CB^{-1,}$$

$$X\cdot AA^{-1}=CB^{-1}\ A^{-1,}\ X\cdot E=CB^{-1}\ A^{-1,}\ X=CB^{-1}\ A^{-1}$$

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1}:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-4\neq 0,\quad A_{11}=1,\quad A_{21}=-2,\quad A_{12}=-3,\quad A_{22}=2,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix};$$

$$\Delta(B)=\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & -7\end{vmatrix}=-1,\quad B_{11}=-7,\quad B_{21}=-4,\quad B_{12}=-2,\quad B_{22}=-1,$$

$$B^{-1}=-\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{X}=\mathrm{CB}^{-1}\mathrm{A}^{-1}=(1\ -2)\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$$

Тоді

$$=-\frac{1}{4}(1\cdot 7-2\cdot 2\quad 1\cdot 4-2\cdot 1)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}(3\quad 2)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}(3\cdot 1+2\cdot(-3)\quad 3\cdot(-2)+2\cdot 2)=-\frac{1}{4}(-3\quad -2)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

5. Знайдіть ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 6\end{pmatrix}$$

Розв 'язання. Виділений у матриці мінор другого порядку

$$M^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0$$

Обвідними для нього мінорами третього порядку є:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}\quad i\quad \begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}$$

Обидва мінори третього порядку рівні нулю, а мінор другого порядку не рівний нулю, отже, *r(A)*=2.

6. Знайдіть ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & -1 & 3\\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3\\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix}$$

Розв 'язання. Виконавши елементарні перетворення, дістанемо

$$\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & -1 & 3\\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3\\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & -1 & 3\\ -4 & 0 & 2 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & -1 & 3\\ -4 & 0 & -2 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 3 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1 & -5 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Визначник третього порядку, складений з елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці, не дорівнює нулю, а всі мінори четвертого порядку рівні нулю. Отже, *r(A)*=3.

Мікромодуль 3.
Індивідуальні тестові завдання

3.1. Визначити *f(A)*, якщо

$$3.1.1.\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad f(x)=2x^2+3x+1.$$

$$3.1.2.\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & -1\end{pmatrix},\quad f(x)=x^2+5x+1.$$

$$3.1.3.\ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad f(x)=x^3+x^2-7x+3.$$

$$3.1.4.\ A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix},\quad f(x)=3x^2-2x+8.$$

$$3.1.5.\ A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix},\quad f(x)=x^2-3x-1.$$

3.1.6. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^2-x-1.$

3.1.7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^2-2x+1.$

3.1.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}, \quad f(x)=-2x^2+8x-6.$

3.1.9. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^3-4.$

3.1.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}, \quad f(x)=2x^2+6x-3.$

3.1.11. $A=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^2-5x+3.$

3.1.12. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}, \quad f(x)=5x^2+2x-8.$

3.1.13. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^3-4x^2+x-1.$

3.1.14. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}, \quad f(x)=2x^3-8x+6.$

3.1.15. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 5 & -4\end{pmatrix}, \quad f(x)=x^2-6x+9.$

3.1.16. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}, \quad f(x)=9x^2-4.$

3.1.17. $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 6\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}, \quad f(x)=9-x^2.$

3.1.18. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}, \quad f(x)=2x^2+8x+8.$

3.1.19. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}, \quad f(x)=5-4x-x^2.$

3.1.20. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix}, \quad f(x)=3x^2-7x+5.$

3.2. Розвяжіть матричні рівняння

3.2.1 $A\cdot X=B, \quad A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}.$

3.2.2 $X\cdot A=B, \quad A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$

3.2.3 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.4 $A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

2.4.5 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

3.2.6 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.7 $A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$

3.2.8 $X \cdot A =, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

3.2.10 $A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$

3.2.11 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$

3.2.12 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3.2.13 $A \cdot X = B, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3.2.14 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

3.2.15 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.16 $X \cdot A \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1- & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

3.2.17 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.18 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

3.2.19 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

3.2.20 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

3.2.21 $A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}., \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3.2.22 $X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$

3.2.23 $A \cdot X = B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

3.2.4.24 $A \cdot X = B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.2.25 $X \cdot A = B,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

3.2.26 $A \cdot X \cdot B = C,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.,\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$

3.2.27 $A \cdot X = B,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ ,\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

3.2.28 $X \cdot A = B,\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

3.2.29 $X \cdot A \cdot B = C,\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.,\quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$

3.2.30 $A \cdot X = B,\quad A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.3.Знайдіть обернену до матриці A матрицю A', якщо:

3.3.1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, 3.3.2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 3.3.3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 3.3.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$. 3.3.6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

3.3.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. 3.3.8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 3.3.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.3.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.11. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3.3.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.15. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

3.3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.17. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.18. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

3.3.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. 3.3.20. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. 3.3.21. $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.3.22. $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 0 \\ 1 & 13 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.3.23. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 9 \\ 4 & -5 & 11 \end{pmatrix}$. 3.3.24. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.3.25. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.3.26. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -13 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. 3.3.27. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 9 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.3.28. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 13 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. 3.3.29. $A = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 7 \\ 0 & 29 & 7 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$. 3.3.30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.4.Визначте ранг матриці

3.4.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4.2 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3.4.3. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

3.4.4 $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4.5. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

3.4.6 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3.4.7. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.4.8 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3.4.9. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

3.4.10 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3.4.11. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

3.4.12 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

3.4.13. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1{-} & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3.4.14 $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

3.4.15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

3.4.16 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.4.17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

3.4.18. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.4.19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

3.4.20. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3.4.21. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

3.4.22. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3.4.23. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3.4.24. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

3.4.25. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

3.4.26. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Модуль 2

Початок векторного і тензорного аналізу

Мікромодуль 4

Основні відомості з векторної алгебри

У мікромодулі розглядаються основні алгебраїчні дії над векторами, основані на широко розповсюдженому визначенні вектора. Надалі буде приведено природне узагальнення цих дій і основних понять, які складають предмет тензорної алгебри.

2.1. Вектори і скаляри

Величини, для визначення яких досить знати одне число (додатне, від'ємне або нуль), називаються *скалярами.* Такими є температура, щільність, маса, робота сили. Порівнюватися можуть скаляри однакової розмірності. Два скаляри однакової розмірності рівні, якщо їхні знаки і чисельні значення, що виходять при вимірі однією і тією же одиницею виміру, однакові.

Часто приходиться мати справу з величинами, для визначення яких, крім чисельного значення, необхідно вказати напрямлення у просторі. Це переміщення, швидкість, прискорення, сила, момент сили, напруга електричного поля, діелектрична поляризація і т.п. Вивчення такого роду величин приводить до поняття вектора. (Вектор –напрямлений відрізок від латинського слова *vehere*–волокти, тягнути). Дії над векторами підкоряються правилам векторної алгебри, які будуть приведені нижче.

Багато величин, які розглядаються в математиці і фізиці, мають більш складну структуру, ніж вектори і скаляри. Для визначення їх недостатньо знати числові значення і напрямлення. Такі величини називаються тензорами другого і вищого рангів. Так, сукупність векторів пружних напружень на всіляких площадках, які можна провести через деяку точку в пружному тілі, приводить до поняття тензора 2-го рангу пружних напружень, аналіз деформацій довільного елементарного об’єму пружного тіла — до поняття тензора деформацій.

Спочатку більш докладно зупинимося на векторах.

Вектор ***A*** зображується відрізком прямої, напрямлення якої збігається з напрямленням величини яка розглядається, а довжина в обраному масштабі характеризує її чисельне значення (модуль вектора $A = |\boldsymbol{A}|$).

Нульовим вектором називається вектор, модуль якого дорівнює нулеві. Такому векторові не можна приписати визначений напрямок; він може мати будь-яке напрямлення у просторі. Для позначення нульового вектора застосовується звичайний нуль.

Порівнювати можна тільки вектори, що мають однакову розмірність, тобто однаковий фізичний або геометричний зміст. При порівнянні двох векторів однаково істотні як величини, так і їх напрямлення.

*Два вектори **A** і **B** однакової розмірності рівні, якщо модулі їх однакові і напрямлення збігаються.* Тоді пишуть ***A*=*B*.**

Вектори вільні, ковзні, зв'язані. Як правило розрізняють вектори вільні, ковзні і зв'язані.

Вільний вектор можна переносити паралельно самому собі і прикладати в будь-якій точці (наприклад, швидкість поступального руху тіла). Вільний вектор (рис.2.1, *а*) у просторі цілком визначається трьома числами, наприклад, трьома його проекціями на осі декартової системи координат; його можна задати величиною (довжиною відрізка, модулем вектора) і двома незалежними кутами, утвореними вектором з осями координат і т.п.

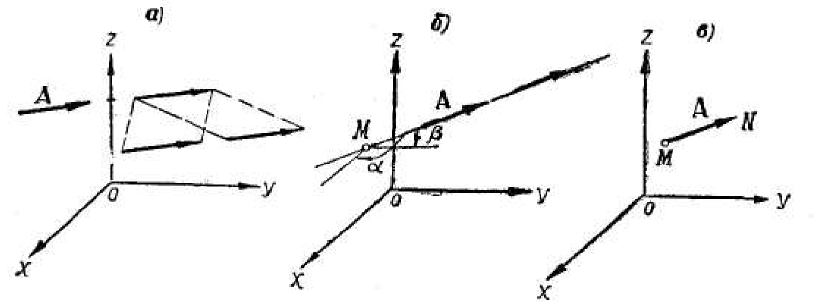


Рис. 2.1. Вільні і ковзні вектори:

а) вільний вектор може бути перенесений паралельно самому собі;
б) ковзний вектор може бути перенесений по лінії його дії;
в) зв'язаний вектор.

Ковзні вектори можна переносити по прямій, яка визначає напрямлення вектора (наприклад, вектор сили, прикладеної до твердого тіла). Ковзний вектор (рис.2.1,б) вимагає для свого визначення в просторі п'яти чисел, наприклад, координат точки *M* перетинання прямої, на якій лежить вектор, з якою-небудь координатною площиною (два числа), довжини вектора (одне число) і двох незалежних кутів α і β з осями (два числа).

Зв'язаний вектор відноситься до визначеної точки (наприклад, швидкість і рискорення точки твердого тіла, яке рухається довільно).

Зв'язаний вектор (рис.2.1, в) визначається шістьма числами, наприклад, координатами початку і кінця вектора (точки *M* і *N).*

Вільні вектори є найбільш загальним випадком завдання величин, обумовлених чисельним значенням і напрямленням. Вивчення ковзних і зв'язаних векторів можна звести до вивчення вільних векторів. Тому надалі ми будемо вивчати тільки вільні вектори.

2.2. Додавання і віднімання векторів. Проекція вектора на вісь

Додавання векторів і його властивості. Визначенням векторного додавання служить наступне правило.

Сумою двох векторів (**A** *і* ***B****) є третій вектор* (**C**), *який зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які складаються*, (рис.2.2, *а*). Наслідком цього визначення є правило додавання декількох векторів:

Сумою декількох векторів (**A**,***B***,***C***, ...) *є вектор* ***(N****), який представляє замикаючу багатокутника, побудованої на векторах, які складаються,* (рис.2.2,б).Це правило приймає ясний фізичний зміст, якщо під векторами, які складаються, розуміти послідовні переміщення деякої точки в просторі. Тоді їхня сума буде результатом цих послідовних переміщень і дасть загальне переміщення точки.

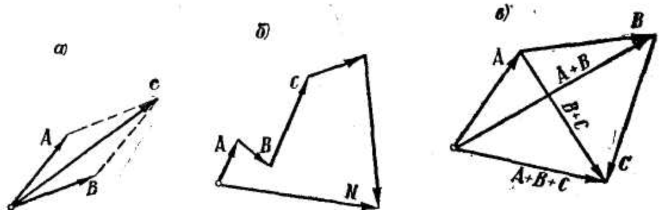


Рис. 2.2. Додавання векторів: а) сума двох векторів; б) сума декількох векторів ; в) асоціативність векторного додавання: **A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C*).***

З визначення векторного додавання випливає, що дія додавання векторів має характерні властивості звичайного алгебраїчного додавання, а саме:

1) *комутативність,* тобто

$$A+B=B+A\ .$$

2) *асоціативність,* тобто

$$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C.$$

Таким чином, *при векторному додаванні результат не залежить від* порядку доданків і суму більш ніж двох векторів можна писати без дужок (рис.2.2, в). Що стосується додавання будь-якого вектора з нулем, то справедливе правило $A+0=A$.

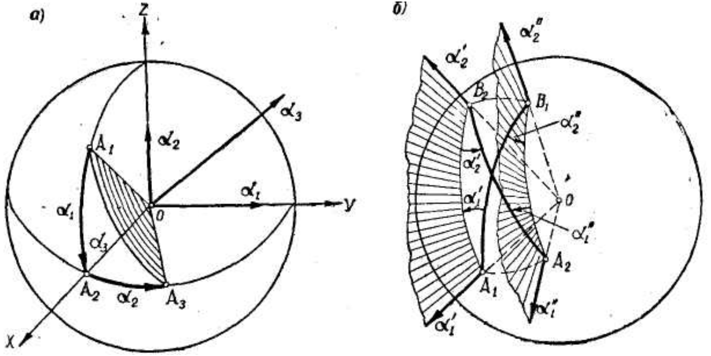


Рис. 2.3. Кінцеві повороти твердого тіла:
а) кінцеві повороти не можуть бути представлені векторами: напрямлений відрізок α_2, який зображує сумарний поворот, не лежить в площині відрізків α_1 і α_2, які представляють додатні повороти; б) два способи переводу дуги з положення A_1B_1 в A_2B_2 шляхом послідовних кінцевих поворотів

Величина вектора характеризується чисельним значенням і напрямленням. Це необхідна, але аж ніяк не достатня ознака того, що дана величина є вектором. Вона обов'язково повинна підкорятися діям векторної алгебри, зокрема векторному (геометричному) додаванню.

Для ілюстрації цього положення розглянемо поворот твердого тіла навколо деякої осі; він може бути представлений відрізком, рівним по величині кутові повороту, напрямленим по осі обертання, наприклад, у ту сторону, звідки можна бачити поворот проти ходу годинної стрілки. Однак можна показати, що такі відрізки не підкоряються правилу векторного додавання, причому їхня сума залежить від порядку доданків.

А. Нехай сфера (рис.2.3, а) повернулася навколо осі *Oy* на кут α_1 так, що деяка точка сфери з положення A_1 перемістилася в положення A_2 Зобразимо цей поворот у вигляді напрямленого відрізка α_1. Нехай другий поворот сфери відбувається навколо осі *Oz* на кут α_2, так що точка перейде з положення A_2 в A_3. Цей поворот зобразиться напрямленим відрізком α_2. Тоді по визначенню для напрямлених відрізків, які введені нами, поворот сфери, який переводить точку з положення A_1 в A_3, з одного боку, повинний бути сумою відрізків α_1 і α_2, а з іншого боку - повинний бути зображений відрізком α_3, перпендикулярним до площини A_1OA_3. Оскільки α_3 не лежить у площині z*Oy,* цей відрізок не може бути сумою α і α_2. Цей приклад особливо наочний для випадку

$$\alpha_1=\alpha_2=\pi/2.$$

Б. Поворот сфери, який переводить деяку дугу на ній з положення A_1B_1 у положення A_2B_2, може бути здійснений двома шляхами (рис. 2.3,б):

а) поворот навколо осі $0A_1$ на кут α'_1, («вектор» α'_1) + поворот навколо осі OB_2 на кут α'_2 («вектор» α'_2);

б) поворот навколо осі OB_1 на кут α''_2 («вектор» α''_2) + поворот навколо осі OA_2 на кут α''_1 («вектор» α''_1).

Хоть додатки повороту рівні по величині і зміна їх послідовності не змінює результату (дуга з A_1B_1 перейде в A_2B_2), неважко бачити, що зображення повороту у вигляді векторів спричиняє некомутативність суми «векторів», тобто

$$\alpha'_1+\alpha'_2\neq\alpha''_2+\alpha''_1$$

На противагу кінцевим поворотам твердого тіла, нескінченно малі повороти є векторами .

Віднімання векторів і нульовий вектор. Розглянемо дію віднімання векторів.

Під вектором -*A* (мінус *A)* мається на увазі вектор, величина якого дорівнює величині вектора *A,* а напрямлення протилежне.

Будемо вважати в цьому випадку, що вектори *A* і -*A протилежні.* Очевидно, вектор, рівний своєму протилежному векторові, є нульовий. Віднімання як дія, зворотна додаванню, зводиться до визначення одного з доданків ***X*** по відомій сумі ***A*** і другому доданкові — векторові ***B***: ***B+X=A*** . Використовуючи поняття протилежних векторів, неважко одержати

$$\boldsymbol{X=A+(-B)=A-B}.$$

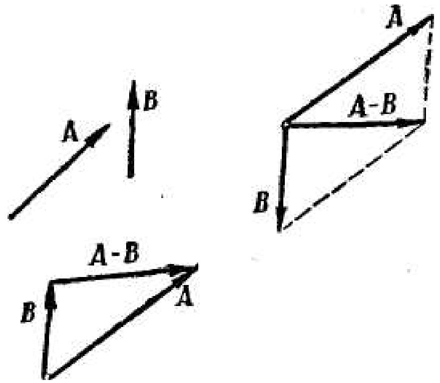


Рис. 2.4. Побудова різниці двох векторів

Отже, *віднімання векторів зводиться до додавання зменшуваного з вектором, протилежним який віднімається* (рис.2.4).

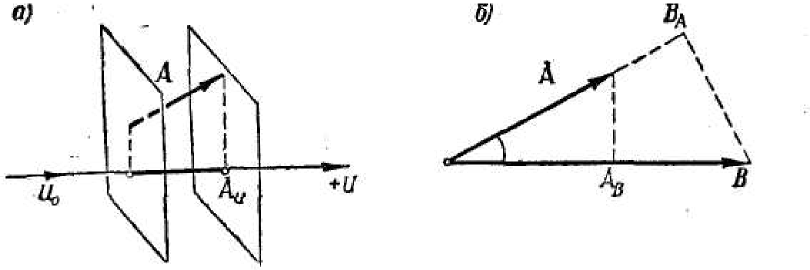


Рис. 2.5. Проекції вектора:

а) проекція вектора на вісь; б) проекція одного вектора на напрямлення іншого.

Проекція вектора на вісь. *Проекцією A_u вектора* ***A*** *на вісь (u)* (рис.2.5) *називається довжина відрізка, який відсікається на цій осі перпендикулярними до неї площинами, проведеними через кінці* *вектора* ***A****. Ця довжина відрізка береться зі знаком плюс, якщо напрямлення від проекції початку вектора на вісь до проекції його кінця збігається з додатним напрямленням осі, і зі знаком мінус — в протилежному випадку.*

Ортом *осі (и) називається вектор* $\boldsymbol{u}_0$, *напрямлений у додатну сторону осі і рівний по величині одиниці,* тобто $u_0=|\mathbf{u}_0|=1$.Позначимо кут (кут між векторами завжди береться в межах від 0 до π) між вектором $\boldsymbol{A}$ і $\mathbf{u}_0$ через $\varphi=(\boldsymbol{A}, \mathbf{u}_0)$. Проекцію A_u вектора $\boldsymbol{A}$ на вісь *(и)* можна обчислювати по формулі

$$A_u=\boldsymbol{A}\cos\varphi=\boldsymbol{A}\cos(\boldsymbol{A}, \mathbf{u}_0).$$

Дійсно, легко бачити, що $|\mathbf{A}\cos\varphi|$ завжди дає довжину відрізка осі *(и)* між площинами, проведеними через кінці вектора перпендикулярно до осі. Якщо $\varphi<\pi/2$, то напрямлення від проекції початку вектора до проекції кінця вектора збігається з додатним напрямленням *(и).* У цьому випадку $\cos\varphi>0$, так що і $A_u>0$. Якщо $\varphi>\pi/2$, то $\cos\varphi<0$ і $A_u<0$ відповідно з визначенням проекції.

Отже, *проекція вектора на яку-небудь вісь дорівнює добуткові довжини вектора на косинус кута між вектором і додатним напрямленням осі.*

Неважко показати, що *проекція суми векторів на яку-небудь вісь дорівнює сумі проекцій доданків цієї суми на цю ж вісь .*

2.3. Множення вектора на скаляр. Лінійна залежність векторів. Розкладання вектора.

Множення вектора на скаляр. *Добуток вектора* ***A*** *на скаляр m являє собою вектор* ***B*** *модуль якого в |m| раз більше модуля вектора* ***A****, а напрямлення збігається з* ***A*** *при* $m>0$ *і протилежне* ***A****, якщо* $m<0$.

Таким чином

$$m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B};\ |\boldsymbol{B}|=\boldsymbol{B}=|m|\ |\boldsymbol{A}|=|m|\boldsymbol{A}.$$

В частковому випадку $m=—1$, вектори ***B*** і ***A*** протилежні.

Вектори ***A*** і $m\boldsymbol{A}$ $(m \gtrless 0)$ паралельні між собою.

Вони представляють найпростіший випадок лінійно залежних векторів. Множення вектора на число задовольняє правилам:

$$m\,(n\boldsymbol{A}) = (mn)\,\boldsymbol{A},$$

$$m(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})= m\boldsymbol{A} +m\boldsymbol{B}$$

$$(m+n)\boldsymbol{A}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{A}$$

Лінійна залежність векторів. **Вектори колінеарні і компланарні**.

Вектори ***A, B, C...*** (всього *n) називаються лінійно залежними, якщо існують скаляри* $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$, *не всі рівні нулеві, такі, що*

$$c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B} + c_3\boldsymbol{C}+...+c_n\boldsymbol{N}=0,$$

тобто, якщо існує лінійна комбінація векторів, яка обертається в нуль.

Два лінійно залежних вектори паралельні між собою.

Дійсно, нехай $c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B}=0$, причому, принаймні, $c_2\neq\boldsymbol{0}$. Тоді, позначаючи $c_1/c_2=—m$, одержимо $\boldsymbol{B}=m\boldsymbol{A}$. Звідси випливає паралельність векторів ***A*** і ***B***. Такі вектори називаються *колінеарними.*

Три лінійно залежних вектори лежать в одній площині (або паралельні одній площині). Дійсно, нехай $c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B}+c_3\boldsymbol{C}=0$, причому, принаймні, $c\neq0$. Тоді, позначаючи $c_1/c_3 =-m$, $c_2/c_3=- n$, одержимо:

$$\boldsymbol{C} = m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}.$$

Звідси випливає, що вектор ***C*** лежить в одній площині з векторами ***A*** і ***B*** (тому що ***C*** є сумою векторів $m\boldsymbol{A}$ і $n\boldsymbol{B}$, колінеарних ***A*** і ***B***). Такі вектори називаються *компланарними.*

Розкладання векторів. Розглянемо два принципово важливих твердження, які стосуються представлення будь-якого вектора у вигляді лінійної комбінації двох або трьох інших векторів (розкладання вектора по двох або трьох інших векторах).

1. *Якщо два вектори* ***A*** *і* ***B*** *лінійно незалежні* (не є колінеарними векторами), *то будь-який вектор* ***C****, компланарний з* ***A*** *і* ***B****, може бути єдиним шляхом розкладений по цих векторах,* тобто справедлива формула

$$\boldsymbol{C}=m\boldsymbol{A}+n\boldsymbol{B}. \qquad (2.1)$$

Оскільки вектори ***A, B, C*** компланарні, має місце рівність

$$c_1\boldsymbol{A}+c_2\boldsymbol{B}+c_3\boldsymbol{C}=0\ (*)\ .$$

Так як вектори ***A*** і ***B*** за умовою лінійно незалежні, то $c_3\neq0$.

Розділивши (*) на c_3 і позначивши $c_1/c_3 =-m$, $c_2/c_3=—n$, одержимо розкладання (2.1). Покажемо, що воно єдине. Нехай поряд з (2.1) має місце інше розкладання: $\boldsymbol{C}=m'\boldsymbol{A}+n'\boldsymbol{B}$. Віднімаючи цю рівність з (2.1), одержимо

$$(m—m')\boldsymbol{A}+(n—n')\boldsymbol{B}=0.$$

Звідси випливає, що $m=m'$, $n=n'$, тому що за умовою **A** і **B** лінійно незалежні вектори. Таким чином, розкладання (2.1) єдине.

2. *Якщо три вектори* ***A, B, C*** *лінійно незалежні* (не є компланарними векторами), *то будь-який вектор* ***D*** *може бути єдиним шляхом розкладений по цих векторах,* тобто справедлива формула

$$\mathbf{D}=m\mathbf{A}+n\mathbf{B}+p\mathbf{C}. \quad (2.2)$$

Відкладемо чотири вектори ***A, B, C, D*** від загального початку *O* (рис.2.6). Через кінець вектора ***D*** проведемо площини, паралельні площинам векторів ***A*** і ***B***, ***A*** і ***C***, ***B*** і **C**; ці три площини разом із площинами векторів ***A*** і ***B***, ***A*** і ***C***, ***B*** *і* ***C*** утворюють паралелепіпед. Однією з діагоналей цього паралелепіпеда є вектор ***D***. Вектори ***A***, ***B*** і ***C***, які виходять з точки *O*, спрямовані відповідно по трьох його ребрах. У силу колінеарності векторів ***A***, ***B***, ***C*** і $m\mathbf{A}$, $n\mathbf{B}$, $p\mathbf{C}$, які мають модулі, рівні довжинам ребер паралелепіпеда, можна показати справедливість формули (2.2).

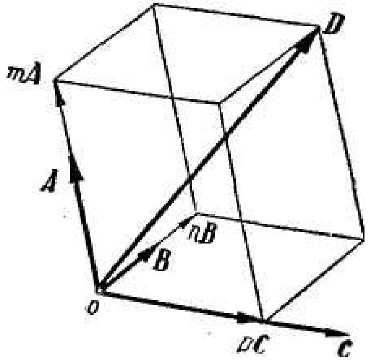


Рис. 2. 6. Розкладання векторів

Який завгодно вектор ***D*** може бути єдиним чином розкладено по трьом не компланарним векторам ***A, B ,C.***

Якщо поряд з розкладанням (2.2) має місце також і розкладання

$$\mathbf{D}=m'\mathbf{A}+n'\mathbf{B}+p'\mathbf{C}$$

то $(m-m')\mathbf{A}+(n-n')\mathbf{B}+(p-p')\mathbf{C}=0.$

Звідси $m=m'$, $n=n'$, $p=p'$, тому що за умовою ***A***, ***B***, ***C*** - лінійно незалежні вектори. Таким чином, з (2.2) випливає: *будь-які чотири вектори в тривимірному просторі лінійно залежні .*

Векторний базис. *Система будь-яких трьох лінійно незалежних векторів* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *утворює, по визначенню, базис тривимірного простору.*

У силу доведеного вище, трійка базисних векторів володіє тою властивістю, що для усякого вектора ***A*** існує розкладання

$$\mathbf{A}=m\mathbf{e}_1+n\mathbf{e}_2+p\mathbf{e}_3 \quad (2.3)$$

причому коефіцієнти розкладання визначаються єдиним чином.

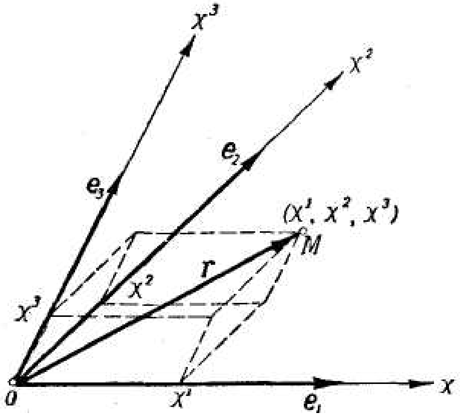


Рис. 2.7. Координатний базис косокутної декартової системи координат.

Підкреслимо, що за базис можуть бути обрані три *будь-яких некомпланарних вектора.* Відкладаючи трійку базисних векторів $\mathbf{e}_k$ (k=1,2,3) від загальної точки *O* і позначаючи через Ox_k прямі, на яких лежать базисні вектори (k — індекс, а не степінь; зручність такого позначення стане ясним з подальшого), одержимо косокутну декартову систему координат з осями Ox^1, Ox^2, Ox^3 з початком в точці *O* (рис.2.7). Базисні вектори $\mathbf{e}_k$ називаються *масштабними векторами,* а кінці цих векторів, відкладених від початку координат, — *одиничними точками* осей координат. Якщо базисні вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ взаємно-ортогональні і їхні модулі дорівнюють одиниці, то вони називаються *ортами* прямокутної декартової системи координат і позначаються через $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ для осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 (рис.2.8). Положення точки *M* в просторі визначається її *радіусом-вектором* $\mathbf{r}$. Це вектор $\mathbf{r}$ *(M),* проведений з початку координат у точку *M* (рис. 2.7 і 2.8). Координатами точки *M* в прямокутній декартовій системі координат будуть відстані (зі знаком) x_1, x_2, x_3 до площин x_2Ox_3, x_3Ox_1, x_1Ox_2, і тому

$\mathbf{r}=\mathbf{i}_1x_1+\mathbf{i}_2x_2+\mathbf{i}_3x_3$

Одне з найважливіших достоїнств векторного віднімання полягає в тому, що рівняння, які описують те або інше фізичне явище, можна формулювати безвідносно до координатних систем. Однак при разв'язанні конкретних задач, які завжди зв'язані з обчисленнями, кожну задачу ,зазвичай, приводять до виразу, який містить скалярні величини. Це можна зробити, користуючись зручною системою координат, коли векторне (тензорне) рівняння розкладається на еквівалентну систему скалярних рівнянь, які містять тільки скаляри (числа), які підкоряються правилам арифметичного числення.

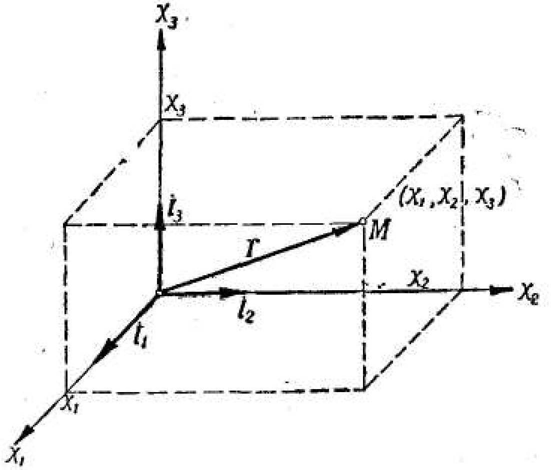


Рис. 2.8. Координатний базис прямокутної декартової системи координат і представлення радіуса-вектора точки.

Кожне таке розкладання зв'язане з вибором підходящого базису, який будується відповідно до обраної системи координат. На практиці найчастіше користуються прямокутними системами координат — прямолінійними (декартовими) або криволінійними: циліндричними, сферичними, еліптичними і т.п. У прямолінійній системі координат базисні вектори однакові у всіх точках по величині і напрямленню, у криволінійних — напрямлення базисних векторів міняються від точки до точки.

Розглянемо спочатку для простоти точку на площині — її положення цілком визначається радіусом-вектором **r** щодо деякої фіксованої точки (полюса) *O*, який, зазвичай, не зв'язаний ні з якою системою координат і не залежить від неї. Щоб робити обчислення, потрібно вибрати яку-небудь систему координат, і тоді положення точки на площині буде визначатися двома числами-координатами: назвемо їх p і q. Ці числа вже будуть залежати від прийнятої системи координат, від прийнятої системи відліку. У прямокутній декартовій системі координат, наприклад, це будуть відстані (зі знаком) $p\equiv x_1$ і $q\equiv x_2$ до двох взаємо-перпендикулярних прямих, які проходять через початок координат.

Якщо зберігати сталим значення однієї координати, наприклад, $p=$const, і змінювати безупинно іншу, одержимо координатну лінію. Через кожну точку на площині проходять дві координатні лінії. У прямокутній декартовій системі це прямі, паралельні осям координат.

Якщо визначати положення точки на площині двома такими числами — відстанню R $(0\leq R<+\infty)$ від деякої фіксованої точки *O* на площині (полюса) і кутом θ $(0\leq\theta<2\pi)$ між прямою, проведеною з полюса *O* в розглянуту точку, і фіксованою напівпрямою з полюса (полярною віссю), одержимо так називану полярну систему координат. Координатні лінії - це кола радіуса

$$R=\sqrt{x^2{}_1+x^2{}_2}$$

і напівпрямі (промені) $\Theta=arc\ tg\dfrac{x_2}{x_1}$ і зворотно:

$$x_1=R\cos\theta,\ x_2=R\sin\theta$$

(передбачається, що початок декартових прямокутних координат збігається з полюсом і вісь Ox_1 — з полярною віссю).

У цій системі криволінійних координат напрямлення базисних векторів у кожній точці різні, але перетинаються усі вони під прямим кутом — полярна система координат ортогональна (рис.2.9, а).

Координатними лініями узагальненої полярної системи координат є еліпси

$$u^2=\frac{x^2{}_1}{a^2}+\frac{x^2{}_2}{b^2}$$

і промені

$$\vartheta = arc\,tg\frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} \quad (0 \le u < +\infty, \quad 0 \le \vartheta < 2\pi; \quad a > 0; \quad b > 0; \quad a \ne b);$$

зворотно: $x_1 = au\cos\vartheta, \quad x_2 = bu\sin\vartheta$

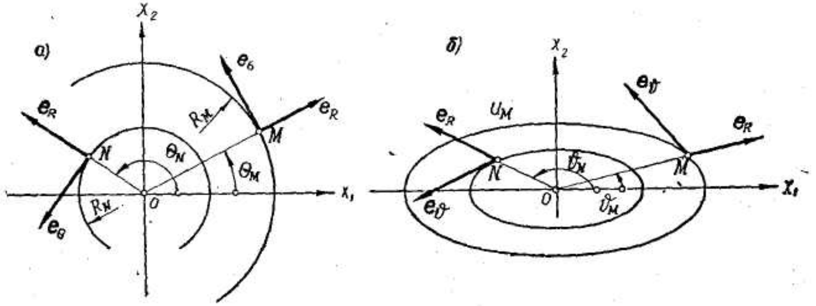


Рис. 2.9. Криволінійні системи координат на площині.

а) полярна (координатні осі – промені і дотичні до кіл); б) узагальнена полярна (координатні осі – промені і дотичні до еліпсів).

Підкреслимо ще раз, що при розв'язанні конкретних задач , зазвичай ,користуються ортогональними системами координат. Однак багато властивостей їх стають значно ясніші, якщо розглядати їх як граничний випадок узагальнених криволінійних координат, базис яких не прямокутний, а координатні лінії не прямі. Тому надалі основні властивості векторів (тензорів) розглядаються головним чином у декартовій прямокутній системі координат, хоча в деяких місцях застосовуються неортогональні базиси.

Пряме і обернене перетворення векторів двох довільних базисів із загальним початком. Нехай у деякій точці *O* обрано два векторних базиси ***(e**$_1$, **e**$_г$, **e**$_3$**)*** і (***e'**$_1$, **e'**$_2$, **e'**$_3$*). Любий з векторів першого базису можна розкласти по векторах другого базису, і навпаки (рис.2.10).

Позначимо через $\alpha_{i'}^{1}$,$\alpha_{i'}^{2}$,$\alpha_{i'}^{3}$ (цифри вгорі—індекси) коефіцієнти розкладання вектора ***e'**$_i$* по векторах базису ***e**$_1$, **e**$_2$, **e**$_3$,* будемо називати ці дев'ять (i=1,2,3) величин *коефіцієнтами прямого перетворення,* так що відповідно до (2.3)

$$\boldsymbol{e'}_1 = \alpha^1{}_{1'}\,\boldsymbol{e}_1 + \alpha^2{}_{1'}\,\boldsymbol{e'}_2 + \alpha^3{}_{1'}\,\boldsymbol{e'}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha^k{}_{1'}\,\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{e'}_2 = \alpha^1{}_{2'}\,\boldsymbol{e}_1 + \alpha^2{}_{2'}\,\boldsymbol{e'}_2 + \alpha^3{}_{2'}\,\boldsymbol{e'}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha^k{}_{2'}\,\boldsymbol{e}_k$$

$$\boldsymbol{e'}_3 = \alpha^1{}_{3'}\,\boldsymbol{e}_1 + \alpha^2{}_{3'}\,\boldsymbol{e'}_2 + \alpha^3{}_{3'}\,\boldsymbol{e'}_3 = \sum_{k=1}^{3}\alpha^k{}_{3'}\,\boldsymbol{e}_k \qquad (2.4)$$

або в загальному вигляді $\boldsymbol{e'}_i = \sum_{k=1}^{3}\alpha^k{}_{i'}\,\boldsymbol{e}_k$

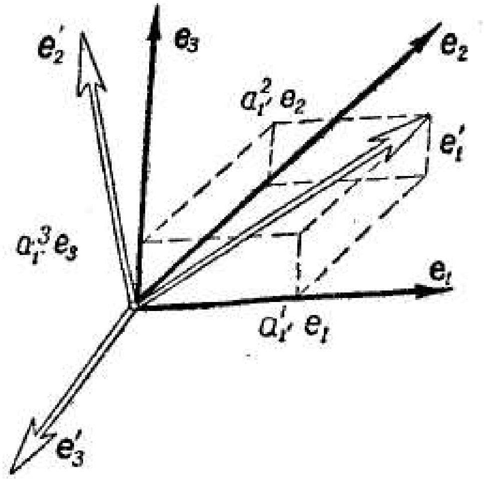


Рис. 2.10. Розкладання вектора ***e'**$_i$* по векторах ***e**$_1$,**e**$_2$,**e**$_3$*

Аналогічно коефіцієнти розкладання вектора ***e**$_i$* по векторах ***e'**$_1$*, ***e'**$_2$*, ***e'**$_3$* позначимо через $\alpha_j^{1'}$, $\alpha_j^{2'}$, $\alpha_j^{3'}$ (j = 1, 2, 3), і ці дев'ять величин будемо називати *коефіцієнтами зворотного перетворення:*

$$\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3}\alpha^{k'}{}_j\,\boldsymbol{e}'_k \; (2.5)$$

Між коефіцієнтами прямого і зворотного перетворень існує зв'язок. Підставивши розкладання кожного вектора $\boldsymbol{e}_k$ з (2.5) у (2.4), після перегрупування доданків знайдемо

$$\boldsymbol{e}'_{i}=\alpha^{1}{}_{i'}\,\boldsymbol{e}_{1}+\alpha^{2}{}_{i'}\,\boldsymbol{e}_{2}+\alpha^{3}{}_{i'}\,\boldsymbol{e}_{3}=\alpha^{1}{}_{i'}\,(\alpha^{1'}{}_{1}\boldsymbol{e}'_{1}+\alpha^{2'}{}_{1}\boldsymbol{e}'_{2}+\alpha^{3'}{}_{1}\boldsymbol{e}'_{3})+$$

$$+\alpha^{2}{}_{i'}\,(\alpha^{1'}{}_{2}\boldsymbol{e}'_{1}+\ldots)+\alpha^{3}{}_{i'}\,(\alpha^{1'}{}_{3}\boldsymbol{e}'_{1}+\ldots)=(\alpha^{1}{}_{i'}\,\alpha^{1'}{}_{1}+\alpha^{2}{}_{i'}\,\alpha^{2'}{}_{1}+$$

$$+\alpha^{3}{}_{i'}\,\alpha^{1'}{}_{3})\,\boldsymbol{e}'_{1}+(\alpha^{1}{}_{i'}\,\alpha^{2'}{}_{1}+\ldots)\,\boldsymbol{e}'_{2}+(\alpha^{1}{}_{i'}\,\alpha^{3'}{}_{1}+\ldots)\,\boldsymbol{e}'_{3}=$$

$$=\boldsymbol{e}'_{1}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{1'}{}_{l}+\boldsymbol{e}'_{2}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{2'}{}_{l}+\boldsymbol{e}'_{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{3'}{}_{l}=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{e}'_{k}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{k'}{}_{l}\quad(2.6)$$

таким же шляхом можна знайти

$$\boldsymbol{e}_{i}=\boldsymbol{e}_{1}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l'}{}_{i}\alpha^{1}{}_{l'}+\boldsymbol{e}_{2}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l'}{}_{i}\alpha^{2}{}_{l'}+\boldsymbol{e}_{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l'}{}_{i}\alpha^{3}{}_{l'}=\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{e}_{k}$$

$$\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l'}{}_{i}\alpha^{k}{}_{l'}\quad(2.6a)$$

Звідси ясно, що для кожного значення індексу i (i =1,2,3) мають місце наступних 18 співвідношень:

$$\sum_{l=1}^{3}\alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{j'}{}_{l}=\begin{cases}0, \text{ якщо } i\neq j\\ 1, \text{ якщо } i=j\end{cases};\quad \sum_{l=1}^{3}\alpha_{i}^{l'}\alpha_{i'}^{j}=\begin{cases}0, \text{ якщо } i\neq j\\ 1, \text{ якщо } i=j\end{cases}\quad(2.7)$$

2.4. Скалярний і векторний добутки двох векторів

Скалярний добуток. *Скалярним добутком* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ *двох векторів* $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$ *називається добуток їх модулів на косинус кута між векторами.*

Таким чином, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=AB\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

Звідси також випливає, що скалярний добуток дорівнює добуткові модуля одного вектора і проекції іншого вектора на напрямлення першого (рис.2.5), тобто

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_BB=AB_A.$$

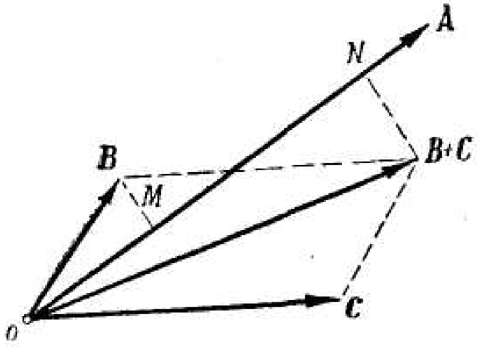


Рис. 2.11. Дистрибутивність скалярного добутку.
Так як $ON=OM+MN$, то $|\boldsymbol{A}|ON=|\boldsymbol{A}|OM+|\boldsymbol{A}|MN$, тобто $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$.

Скалярний добуток векторів володіє комутативністю і дистрибутивністю:

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ (комутативність).

$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ (дистрибутивність) (рис.2.11).

Необхідна і достатня умова перпендикулярності двох векторів $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ виражається наступною рівністю:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0.$$

Необхідність і достатність цієї умови очевидна (якщо $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$, то $\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$; якщо один вектор є нуль, то йому можна приписати напрямлення, яке перпендикулярне до другого вектора).

Проекція вектора на вісь дорівнює скалярному добуткові орта осі на вектор: $A_u=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}_0=A\cos(\boldsymbol{A},\mathbf{u}_0)$.

Це випливає з визначення проекції вектора на вісь. Якщо (x_1), (x_2), (x_3) — осі прямокутної декартової системи координат, то будь-який вектор $\boldsymbol{A}$ може бути розкладений по ортах $\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\boldsymbol{i}_3$ осей, і, отже, (див. формулу 2.2)

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3$$

У силу взаємної перпендикулярності координатних осей маємо

$$\boldsymbol{i}_l\cdot \boldsymbol{i}_k=\begin{cases}0, & \text{якщо } l \neq k\\ 1, & \text{якщо } l = k\end{cases} \qquad (2.8)$$

Тоді $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_1=A_1;\ \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{i}_2=A_2,\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3=A_3.$

Таким чином, A_1, A_2, A_3 суть проекції вектора ***A*** на координатні осі. Отже, будь-який вектор ***A*** може бути записаний у вигляді

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{i}_1)\boldsymbol{i}_1+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_2)\ \boldsymbol{i}_2+(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{i}_3)\ \boldsymbol{i}_3. \qquad (2.9)$$

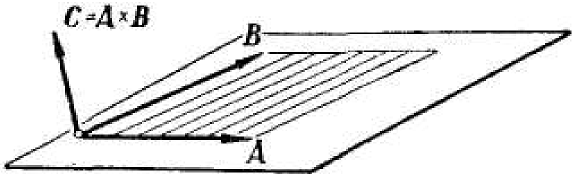


Рис. 2.12. Векторний добуток

Скалярний добуток векторів може бути записаний через добутки проекцій цих векторів на осі прямокутної декартової системи координат:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(A_1\boldsymbol{i}_1+A_2\boldsymbol{i}_2+A_3\boldsymbol{i}_3)\times(B_1\boldsymbol{i}_1+B_2\boldsymbol{i}_2+B_3\boldsymbol{i}_3)=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \ (2.10)$$

Тут використані властивості дистрибутивності скалярного добутку, формула (2.9) розкладання вектора по осях декартової системи й умови (2.8).

Векторний добуток. *Векторним добутком* ***A***×***B*** *двох векторів називається вектор* ***C***≡***A***×***B*** (рис.2.12), *напрямлений перпендикулярно до площини векторів-співмножників у ту сторону, звідки поворот від першого співмножника до другого на менший кут видний проти ходу годинної стрілки, і рівний по величині площі паралелограма, побудованого на цих векторах, тобто*

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}\times\mathbf{B}|=AB\ sin\ (\mathbf{A},\ \mathbf{B}). \quad (2.11)$$

Таким чином, напрямлення векторного добутку відповідає рухові правого гвинта при його обертанні від ***A*** до ***B***. *На відміну від скалярного добутку, векторний добуток не володіє коммутативністю, а саме*

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=—\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A},$$

але, як і скалярне, воно задовольняє законові дистрибутивності, тобто (рис.2.13)

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}.$$

Необхідна і достатня умова паралельності двох векторів ***A*** *і* ***B*** має вигляд

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0.$$

Необхідність цієї умови випливає з того, що $\sin(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0$, якщо $\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}$, а при встановленні достатності варто пам'ятати, що векторові, який дорівнює нулеві, можна приписати будь-яке напрямлення.

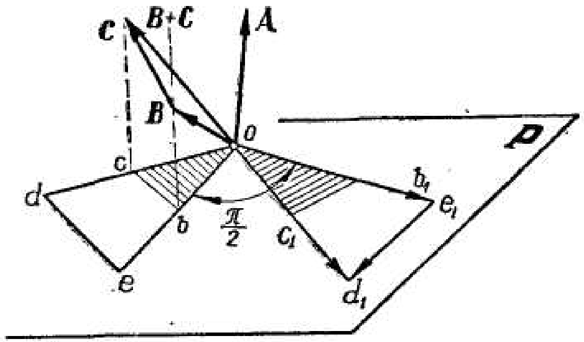


Рис. 2.13. Дистрибутивність векторного добутку: $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}.$

Спроектуємо вектори ***B,C*** і ***B+C*** на площину, перпендикулярну до |***A***|. Сторони отриманого трикутника *Ocb* збільшимо в |***A***| разів і повернемо отриманий трикутник *Ode* на кут π/2 так, щоб напрямлення повороту і напрямленяя ***A*** складали правий гвинт, до положення Od_1e_1. Уведемо вектори $\overrightarrow{Od_1},\overrightarrow{Oe_1},\overrightarrow{e_1d_1}$. З того, що $\overrightarrow{Od_1}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$; $\overrightarrow{c_1d_1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}$; $\overrightarrow{Oe_1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ і $\overrightarrow{Od_1}=\overrightarrow{Oe_1}+\overrightarrow{e_1d_1}$, випливає дистрибутивність векторного добутку.

Якщо прийняти вищенаведене визначення векторного добутку, то для ортів $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ праві системи координат, у якій осі розташовані, як показано на рис.2.14,*а*, маємо

$$\boldsymbol{i}_1\times \boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_3,\ \boldsymbol{i}_2\times \boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{i}_1,\ \boldsymbol{i}_3\times \boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2,\ \ \boldsymbol{i}_1\times \boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2\times \boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_3\times \boldsymbol{i}_3=0,$$

або

$$\boldsymbol{i}_k\times \boldsymbol{i}_l=\boldsymbol{i}_m\ ;\ \boldsymbol{i}_n\times \boldsymbol{i}_n=0 \quad (2.12)$$

де індекси *k, l, m* складають циклічну (циклічність перестановки чисел 1,2,3 суть 123, 231, 312) (парну) перестановку чисел 1,2,3.

Можна було б інакше визначити напрямлення векторного добутку: по русі не правого, а лівого гвинта при обертанні від **A** до **B**. Тоді векторний добуток буде спрямовано в протилежну сторону. При цьому формули (2.12) мали би місце в лівій системі координат, у якій осі розташовані так, як показано на рис.2.14,*б*, а векторний добуток мав би напрямлення протилежне тому, який визначено для правої системи координат (рис.2.14, *а).*

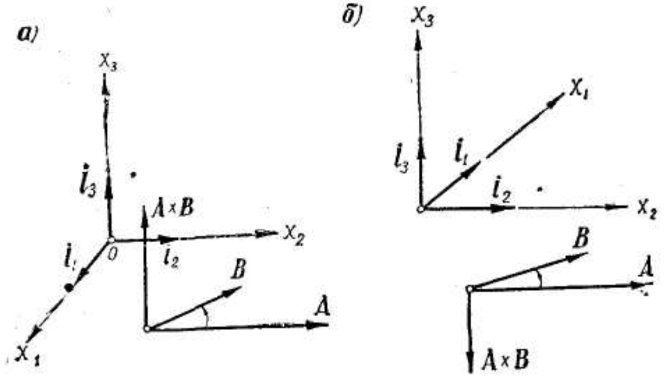


Рис. 2.14. Напрямлення добутку **A**×**B** у правій (а) і лівій (б) системах координат.

Вектори, напряммлення яких встановлюється угодою і які в силу цього змінюють своє напрямлення при заміні правої системи координат на ліву, називаються *аксіальними* (момент сили, кутова швидкість і т.п.). Вектори, напрямлення яких визначається тільки фізичним змістом (сила, швидкість і т.п.) і які в силу цього не змінюють свого напрямлення при зміні системи координат, називаються *полярними.* Для визначення природи вектора можна представити відображення його в дзеркалі, перпендикулярному до нього. Якщо відображення зберігає напрямлення величини, яка описує явище, то вектор аксіальний (рис.2.15). Надалі *усюди ми будемо користуватися тільки правою системою координат.*

а) *б)*

Рис. 2.15. Полярні й аксіальні вектори:

а) сила **F** - полярний вектор: напрямлення її дії змінюється на протилежне при відображенні в дзеркалі;

б) кутова швидкість **ω** — аксіальний вектор; обертання зберігає своє напрямлення при відображенні в дзеркалі.

Виразимо проекції векторного добутку через проекції співмножників:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=(A_1\mathbf{i}_1+A_2\mathbf{i}_2+A_3\mathbf{i}_3)\times(B_1\mathbf{i}_1+B_2\mathbf{i}_2+B_3\mathbf{i}_3)=$$
$$=\mathbf{i}_1(A_2B_3-A_3B_2)+\mathbf{i}_2(A_3B_1-A_1B_3)+\mathbf{i}_3(A_1B_2-A_2B_1).$$

Таким чином,

$$C_1=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_1=A_2B_3-A_3B_2$$
$$C_2=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_2=A_3B_1-A_1B_3$$
$$C_3=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_3=A_1B_2-A_2B_1$$

або

$$C_i=A_kB_l-A_lB_k \qquad (2.13)$$

де *(i, k, l)* складають циклічну перестановку чисел 1,2,3.

Векторний добуток зручно записати у вигляді визначника:

$$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \qquad (2.14)$$

Векторний і скалярний добутки тісно зв'язані з багатьма фізичними поняттями. Робота сили, прикладеної до точки, вимірюється добутком величини переміщення точки і проекції сили на напрямлення переміщення. Сила, яка перпендикулярна до переміщення, «роботи не робить». У зв'язку з цим, якщо F — сила, а s — переміщення, робота A сили по визначенню дорівнює

$$A=F_s s=Fs\cos(F,s)=F\cdot s$$

Якщо сила і переміщення складають тупий кут (сили опору), то їх роботі приписують знак мінус, що цілком погоджується з визначенням роботи як скалярного добутку. Найпростішим фізичним образом векторного добутку є момент сили F відносно деякої точки O: $\mathbf{M}_0=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ де $\mathbf{r}$ - вектор, проведений із точки O до початку вектора $\boldsymbol{F}$. Напрямлення вектора $\boldsymbol{M_o}$ вибирається умовно, точно так само, як і напрямлення вектора кутової швидкості обертання, яка викликана цим моментом сили. Додатне напрямлення встановлюється в залежності від вибору системи координат.

2.5. Добуток трьох векторів

Тут ми відзначимо два типи добутків.

Векторно-скалярний добуток $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$. В силу визначення скалярного добутку можна записати

$$V\equiv(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|\boldsymbol{C}_{A\times B}=|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|h$$

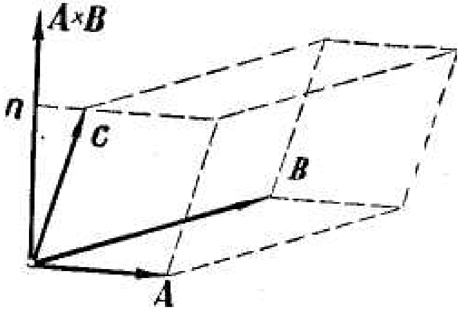


Рис. 2.16. Векторно-скалярний добуток трьох векторів.

Тут $C_{A\times B}=h$ — проекція вектора $\boldsymbol{C}$ на напрямлення вектора $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ (рис.2.16) — є висотою паралелепіпеда, побудованого на векторах $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$. Оскільки $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$ — площа основи цього паралелепіпеда, то векторно-скалярний добуток являє собою об'єм паралелепіпеда зі знаком (+) або (—) у залежності від того, чи буде гострим або тупим кут між векторами $\boldsymbol{C}$ і $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

Використовуючи вирази (2.10) і (2.14), одержимо зручний запис векторно-скалярного добутку через проекції співмножників на осі прямокутної декартової системи координат:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \boldsymbol{i_3}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\cdot(C_1\boldsymbol{i_1}+C_2\boldsymbol{i_2}+C_3\boldsymbol{i_3})=\begin{vmatrix}C_1 & C_2 & C_3\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\quad(2.15)$$

Звідси випливає важливий наслідок про незмінюваність значення векторно-скалярного добутку при циклічній перестановці його векторів:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{B}\qquad(2.16)$$

Якщо два вектори у векторно-скалярном добутку однакові (або паралельні), то цей добуток дорівнює нулеві:

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\ \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\ \boldsymbol{B}=0$$

Якщо три вектори $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ лежать в одній площині (компланарні), то об'єм паралелепіпеда, побудованого на них, дорівнює нулеві.

Звідси необхідну і, як неважко бачити, достатню умову компланарності векторів $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ можна записати у вигляді

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}=0.\qquad(2.17)$$

Отже, *якщо* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\neq0$, *то вектори* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ *утворюють базис*. При цьому, по визначенню, *якщо* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})>0$, *то базис* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$ *називається правим, якщо* $\boldsymbol{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})<0$, *то базис називається лівим.*

Подвійний векторний добуток $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$. Цей добуток трьох векторів представляє собою вектор, що лежить у площині векторів $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ і перпендикулярний до $\boldsymbol{A}$ (рис.2.17).

Оскільки вектори $\boldsymbol{B}$ і $\boldsymbol{C}$ неколиніарні, то на підставі (2.1) існує єдине представлення виразу

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\text{x}\boldsymbol{C})=m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}.\ (2.18)$$

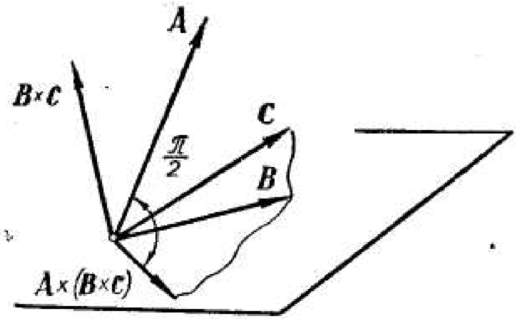


Рис. 2.17. Подвійний векторний добуток трьох векторів.

Визначимо скалярні множники m і n.

Позначимо $\mathbf{E}\equiv\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$; $\mathbf{D}\equiv(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

Обчислимо проекції E_1, E_2, E_3 вектора $\mathbf{E}$ на осі прямокутної декартової системи координат, уведеної довільно.

Згідно (2.13) одержимо $E_1=A_2D_3 — A_3D_2$.

У свою чергу,

$$D_2=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_2=B_3C_1\text{-} B_1C_3;$$
$$D_3=(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_3=B_1C_2\text{-} B_2C_1.$$

Таким чином,

$$E_i=A_2(B_1C_2\text{-}B_2C_1)\text{-}A_3(B_3C_1\text{-}B_1C_3)=B_1(A_2C_2+A_3C_3)\text{-}C_1(A_2B_2+A_3B_3)$$

Додамо і віднімемо величину, яка знаходиться праворуч $A_1B_1C_1$.

Тоді, з огляду на (2.10), одержимо

$$E_1=B_1(A_1C_1\text{-} A_2C_2+A_3C_3)\text{-}C_1(A_1B_1\text{-}A_2B_2+A_3B_3)=$$
$$=B_1(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\text{-}C_1(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$$

Аналогічно знайдемо

$$E_2=B_2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\text{-}C_2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B});$$
$$E_3=B_3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\text{-}C_3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}).$$

Отже, $m=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ і $n=\text{-}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

Таким чином, остаточно

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\text{-}\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}). \qquad (2.19)$$

Як наслідок, звідси можна одержати

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C})=\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\text{-}\mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}). \qquad (2.20)$$

Зауваження про «ділення» векторів. Розв’язання рівнянь зазвичай зв'язано з дією ділення, яке у векторному численні визначається неоднозначно. Дійсно, визначаючи ділення як дію, зворотну множенню, насамперед потрібно розглядати його окремо для кожного з приведених типів добутків. Але навіть у найпростішому випадку скалярного добутку рівняння, яке визначає невідомий вектор $\mathbf{x}$,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}=m\ (\mathbf{a}\neq0),$$

має незлічену множину розв’язок.

Аналітично це рівняння визначає тільки одну проекцію невідомого вектора $\mathbf{x}$ на напрямлення вектора $\mathbf{a}$ (рис. 2.18).

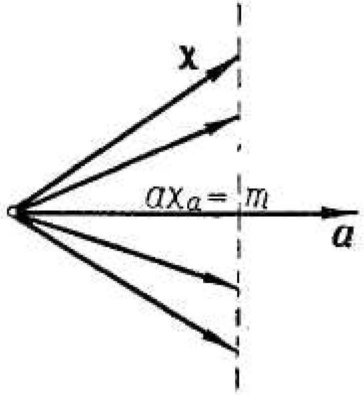


Рис.2.18.Рівняння $\mathbf{x}\bullet\mathbf{a}=ax_a=m$. Це рівняння визначає тільки проекцію невідомого вектора $\mathbf{x}$ на заданий вектор $\mathbf{a}$.

Тому у векторному численні воліють зовсім відмовитися від операції ділення на вектор.

2.6. Взаємні базиси векторів. Коваріантні і контраваріантні складові вектора. Скорочені позначення

Взаємні базиси векторів. Находження проекції деякого вектора $\mathbf{A}$ на осі прямокутної системи координат з ортами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ зводиться до визначення скалярних добутків $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_1$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_2$, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i}_3$. Ці скаляри визначають розкладання даного вектора по трьох заданих взаємо-перпендикулярних напрямленнях, які характеризуються векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Якщо врахувати, що

$$\mathbf{i}_1=\mathbf{a}_1:a_1,\ \mathbf{i}_2=\mathbf{a}_2:a_2,\ \mathbf{i}_3=\mathbf{a}_3:a_3,$$

то таке розкладання може бути записане у вигляді

$$\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{3}(\mathbf{A}\cdot(\mathbf{a}_k/\mathbf{a}^2_{\mathbf{k}}))\mathbf{a}_k \qquad (2.21)$$

Задача розкладання заданого вектора $\mathbf{B}$ по трьох *довільних* некомпланарних векторах $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ зводиться до визначення трьох невідомих B^1, B^2, B^3 (числа 1,2,3 — індекси, а не степені) із системи трьох скалярних рівнянь, які одержуються проектуванням виразу

$$\mathbf{B}=B^1\mathbf{b}_1+B^2\mathbf{b}_2+B^3\mathbf{b}_3$$

на осі якої-небудь системи координат Прямий шлях розв’язання цієї важливої задачі — використання взаємних базисів векторів.

Два базиси $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ і $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ називаються взаємними (біортогональними), якщо їхні вектори задовольняють співвідношенню

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_k=\begin{cases}0, & якщо\ i\neq k\\ 1, & якщо\ i=k\end{cases} \qquad (2.22)$$

Підкреслимо, що $\mathbf{e}_k$ розташовані один до одного під довільними кутами (косокутна система координат) і модулі їх можуть відрізнятися від одиниці. З цього визначення видно, що кожен вектор одного базису перпендикулярний до двох векторів взаємного базису, а з третім вектором, індекс якого має те ж числове значення, складає гострий кут .

Таким чином, якщо на двох взаємних базисах побудувати паралелепіпеди з об’ємами

$$|V|=|\mathbf{e}_1\ (\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)\ |\ \text{ і }\ |V'|=|\ \mathbf{e}^1\cdot(\mathbf{e}^2\times\mathbf{e}^3)|,$$

то ребра одного з них будуть перпендикулярні до граней іншого, і навпаки.

Умова $\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}^3=1$, наприклад, означає, що

$$|\mathbf{e}^3|=1/\ |\mathbf{e}_3|cos(\mathbf{e}^3,\mathbf{e}_3)=1/h \qquad (2.23)$$

(рис. 2.19), тобто модулі векторів одного базису дорівнюють оберненим значенням паралельних їм висот паралелепіпеда взаємного базису.

Розглянемо побудову базису, який взяємний даному.

Нехай дано базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Вектор $\mathbf{e}^1$ взаємного базису повиннен бути перпендикулярний до векторів $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}^1=m(\mathbf{e}_2\times\ \mathbf{e}_3)$$

Скаляр m визначається з умови

$$\mathbf{e}_1.\mathbf{e}^1=1$$

тобто

$$m\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\ \mathbf{e}_3)=1$$

Оскільки $\mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\ \mathbf{e}_3)\neq 0$ (вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ складають базис), одержимо

$$\mathbf{e}^1=(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)/\ \mathbf{e}_1\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)/V'.$$

Тут $|V'|$— об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах базису $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$.

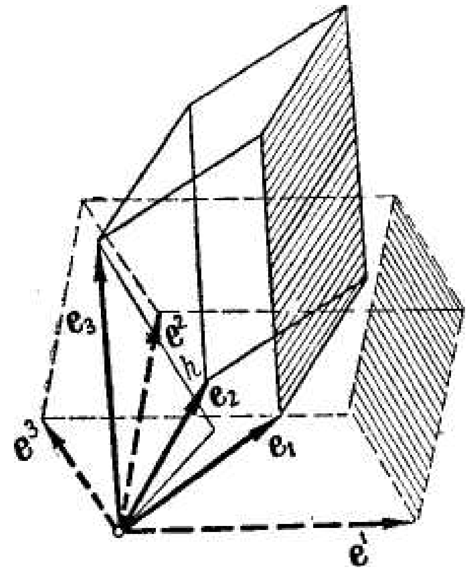


Рис. 2.19. Взаємні базиси і побудовані на них паралелепіпеди.

Аналогічно будуються вектори $\mathbf{e}^2$ і $\mathbf{e}^3$: $\mathbf{e}^2=\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1/V'$; $\mathbf{e}^3=\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2/V'$.

Ці співвідношення можна записати коротше

$$\mathbf{e}^i=\mathbf{e}_j\times\mathbf{e}_k/\mathbf{e}_l\cdot(\mathbf{e}_m\times\mathbf{e}_n), \qquad (3.24)$$

де (i, j, k) і (l,m,n) складають циклічні перестановки чисел 1,2,3.

Отримані формули дають вирази для векторів $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ через вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Аналогічно можна одержати вирази векторів першого базису через вектори другого:

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3/\boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)=\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3/V',$$
$$\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}^3\times\boldsymbol{e}^1/V',\qquad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}^1\times\boldsymbol{e}^2/V',$$

де $|V'|$ — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах базису $\boldsymbol{e}^1,\boldsymbol{e}^2,\boldsymbol{e}^3$.

Скорочений запис цих співвідношень має вигляд

$$\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{e}^j\times\boldsymbol{e}^k/\boldsymbol{e}^l\cdot(\boldsymbol{e}^m\times\boldsymbol{e}^b). \qquad (2.25)$$

Відзначимо дві важливих властивості взаємних базисів.

1) Якщо $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ — базис прямокутної системи координат, то взаємний до нього базис $(\boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3)$ збігається з основним тобто $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}^1=\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}^2=\boldsymbol{i}_2$; $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}^3=\boldsymbol{i}_3$.

Доведення випливає з властивостей (2.8) і (2.12) ортів прямокутної системи координат.

2) Взаємні базиси або обоє праві, або обоє ліві. Це випливає з того, що $V{,}V'=1$. Таким чином, якщо $V'>0$, то $V{,}>0$.Для визначення $\boldsymbol{B}^k$ із векторного рівняння

$$\boldsymbol{B}=B^1\boldsymbol{b}_1+B^2\boldsymbol{b}_2+B^3\boldsymbol{b}_3=\sum_{k=1}^{3} B^k\boldsymbol{b}_k, \qquad (2.26)$$

де $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ — некомпланарні вектори, помножимо скалярно $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{b}'$ — вектор взаємного базису. Тоді

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}^i=\sum_{k=1}^{3} B^k\boldsymbol{b}_k\cdot\boldsymbol{b}^i=B^i \quad (2.27)$$

Це і є шуканий розв'язок. Так, наприклад

$$B^1=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}^1=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3)/\boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{b}_2\times\boldsymbol{b}_3). \quad (2.28)$$

Таким чином, розкладання вектора по базису виражається через проекції вектора на взаємний базис, тобто

$$\boldsymbol{B}=\sum_{k=1}^{3}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{b}^k)\boldsymbol{b}_k.$$

Використовуючи побудову взаємного базису, можна легко розв'язати задачу про визначення вектора $\boldsymbol{A}$, який задовольняє трьом рівнянням:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_1=m_1;\ \mathbf{A}\cdot\boldsymbol{a}_2=m_2;\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_3=m_3, \ (*)$$

де $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ – некомпланарні вектори, m_1, m_2, m_3 – скаляри.

Єдиний розв'язок цієї задачі має вигляд

$$\boldsymbol{A}=m_1\boldsymbol{a}^1+m_2\boldsymbol{a}^2+m_3\boldsymbol{a}^3.$$

Неважко перевірити, що цей розв'язок задовольняє заданій системі.

Якщо $\boldsymbol{A}'$ — другий розв'язок, тобто

$$\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{a}_1=m_1;\ \mathbf{A}'\cdot\boldsymbol{a}_2=m_2;\ \boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{a}_3=m_3 \ (**),$$

то, віднімаючи з кожного рівняння системи (*) відповідне рівняння системи (**), одержимо

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\cdot\boldsymbol{a}_1=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\cdot\boldsymbol{a}_2=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')\cdot\boldsymbol{a}_3=0$$

Вектор $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}'$, перпендикулярний до усіх векторів базису $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$, може бути тільки нулем, тобто $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$, і знайдений розв'язок єдиний.

Скорочені позначення. У сучасній фізичній і математичній літературі прийнято вважати:

1. Кожен літерний індекс, який зустрічається у виразі один раз, може приймати значення 1, 2, 3.

При цьому, оскільки для позначення координатних осей обрані літери з індексами (наприклад, x_1 x_2, x_3 або x^1, x^2, x^3), під записом A_i, наприклад, будемо розуміти сукупність трьох величин A_1, A_2, A_3; запис A_{ik} означає сукупність 3^2 = 9 величин: A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31},A_{32}, A_{33}; запис A^{ik} — сукупність дев'яти величин: A^{11}, A^{12}, . . ., A^{33}.

2. По двічі повторюваному в одночлені індексові варто робити додавання від 1 до 3.

Таким чином, вираз A_{ii}, A_iB^i, $A_iB^kC^i$ означає

$$A_{ii}=\sum_{i=1}^{3} A_{ii}=A_{11}+A_{22}+A_{33}$$

$$A_iB^i=\sum_{i=1}^{3} A_iB^i=A_1B^1+A_2B^2+A_3B^3$$

$$A_iB^kC^i=B^k\sum_{k=1}^{3} A_iB^kC^i=B^k\,(A_1C^1+A_2C^2+A_3C^3)$$

Тому рівності (2.4) і (2.5) можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{e}'_i=\alpha^k{}_{i'}\ \boldsymbol{e}_k$$
$$\boldsymbol{e}_j=\alpha^{k'}{}_j\ \boldsymbol{e}'_k$$

Ці позначення поширюються і на більш складні суми, наприклад, рівності (2.6) можна записати так:

$$\boldsymbol{e'}_i = \alpha^{l}{}_{i'}\alpha^{k'}{}_{l}\ \boldsymbol{e'}_k$$

$$\boldsymbol{e}_i = \alpha^{l'}{}_{i}\alpha^{k}{}_{l'}\ \boldsymbol{e}_k$$

Індекси додавання часто називаються «німими» у тім змісті, що сума не змінює значення, якщо замінити «німий» індекс іншою літерою:

$$A_{ii} \equiv A_{kk} \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33} \quad \text{і т.п.}$$

Крім цих загальноприйнятих позначень, умовимося, що якщо є дві системи координат *(К)* і *(К')*, то координати якоїсь точки в системі *(К)* будемо позначати через x_i (або x^i, якщо система *(К)* не є декартовою прямокутною системою координат), а координати *тієї ж самої* точки в системі *(К')* будемо позначати через x_i' (або $x^{'i}$, якщо система *(К')* не є декартовою прямокутною системою координат). Аналогічних позначень будемо дотримуватися і для компонентів векторів (і тензорів узагалі).

Умовність тут полягає в тім, що, наприклад, A_1 і A'_1 суть компонента *того самого вектора* ***А*** по першій осі системи *(К)* і по першій осі системи *(К')* відповідно, а аж ніяк не компоненти двох різних векторів у якійсь одній системі.

Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора. При розгляді питання про взаємні базиси було показано, що один і той же самий вектор (рис. 2.20) можна представити розкладеним по векторах основного базису

$$\boldsymbol{A} = A^1\,\boldsymbol{e}_1 + A^2\,\boldsymbol{e}_2 + A^3\,\boldsymbol{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} A^k\,\boldsymbol{e}_k \equiv A^k\,\boldsymbol{e}_k\ ;\quad A^k = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^k \qquad (2.29)$$

і взаємного

$$\boldsymbol{A} = A_1\,\boldsymbol{e}^1 + A_2\,\boldsymbol{e}^2 + A_3\,\boldsymbol{e}^3 = \sum_{k=1}^{3} A_k\,\boldsymbol{e}^k \equiv A_k\,\boldsymbol{e}^k\ ;\quad A_k = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_k \qquad (2.30)$$

(останні записи рівностей приведено в скорочених позначеннях).

Числа A^k називаються *контраваріантними,* а числа A_k *коваріантними* компонентами вектора ***А.***

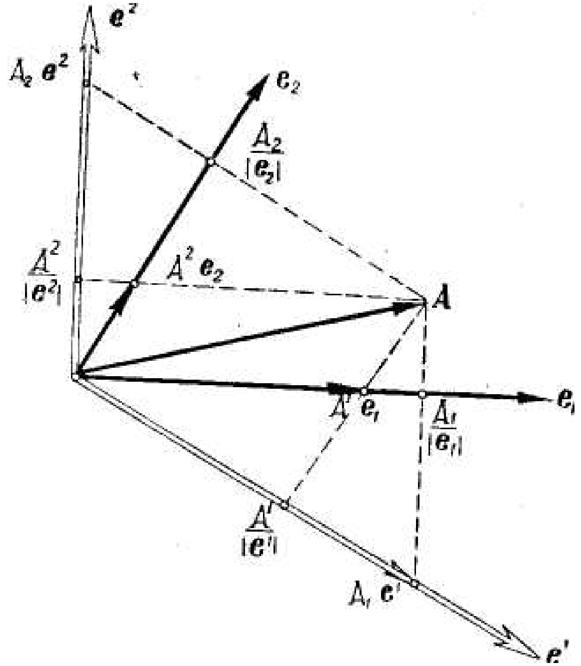


Рис. 2.20. Коваріантні і контраваріантні компоненти вектора на площині.

Коваріантні компоненти A_1, A_2, можуть бути знайдені або по складовим $A_1|\boldsymbol{e}^1|$, $A_2|\boldsymbol{e}^2|$ вектора ***А*** по напрямках взаємного базису, або по проекціях $A_1/|\boldsymbol{e}^1|$; $A_2/|\boldsymbol{e}^2|$ вектора на осі основного базису. Контраваріантні компоненти A^1, A^2 можна знайти зі складових $A^1\boldsymbol{e}_1$, $A^2\boldsymbol{e}_2$ по напрямках основного базису, а також із проекцій на осі взаємного базису $A_1/|\boldsymbol{e}^1|$; $A_2/|\boldsymbol{e}^2|$.

Варто звернути увагу на рис. 2.20, де зображено вектор ***А****,* який лежить у площині векторів $\boldsymbol{e}_1$ і $\boldsymbol{e}_2$ і його ко- і контраваріантні компоненти. Назви компонентів вектора зв'язані з тим, що *пряме* перетворення *коваріантних* компонентів виконується за допомогою коефіцієнтів $\alpha^{k}{}_{i'}$ *прямого* перетворення, тобто

$$A'_i = \alpha^{k}{}_{i'}\,A_k. \qquad (2.31)$$

а *контраваріантних* компонентів — за допомогою коефіцієнтів $\alpha^{i'}{}_{k}$ *зворотного* перетворення, тобто

$$A'^{i} = \alpha_k^{i'}\,A^k. \qquad (2.32)$$

У випадку оберненого перетворення мають місце «зворотні» формули

$$A_i = \alpha_i^{k'} A'_k \, ; \, A^i = \alpha^i_{k'} A'^k \quad (2.33)$$

Дійсно, нехай у системі обумовленій базисом ($\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), ми маємо коваріантні компоненти A_i і контраваріантні A^i вектора **A.**

Визначимо в іншій координатній системі з базисом ($\boldsymbol{e'}_1, \boldsymbol{e'}_2, \boldsymbol{e'}_3$), коваріантні компоненти A'_i, *(того ж вектора **A**)* через його компоненти A_i і контраваріантні компоненти A'^i через A^i.

Помітимо, насамперед, що з (2.4) і (2.5) випливають вирази для коефіцієнтів прямого і зворотного перетворення:

$$\alpha^k{}_{i'} = \boldsymbol{e'}_i \cdot \boldsymbol{e}^k \, ; \, \alpha^{k'}{}_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e'}^k. \quad (2.34)$$

Помножимо обидві частини розкладання

$$\boldsymbol{A} = A_k \boldsymbol{e}^k$$

скалярно на вектор $\boldsymbol{e'}_i$. Одержимо $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e'}_i = A_k \, \boldsymbol{e'}_i \cdot \boldsymbol{e}^k$.

У силу (2.30) і (2.34) одержуємо закон перетворення (2.31).

Аналогічно, помноживши розкладання $\boldsymbol{A} = Ak^k \boldsymbol{e}_k$ скалярно на $\boldsymbol{e'}^I$, в силу (2.29) і (2.34) одержуємо закон (2.32).

У зв'язку з поняттям контраваріантних компонентів вектора важливо відзначити, що *косокутні декартові координати* точки варто писати з індексом угорі x^1, x^2, x^3. Це стає ясним, якщо врахувати, що такі координати є контраваріантними компонентами радіуса-вектора даної точки (див. рис. 2.7) так, що $\boldsymbol{r} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3 \equiv x^k \boldsymbol{e}_k$.

Фізичні компоненти вектора. Слід зазначити, що розмірності компонентів A^i і A_i одного і того ж вектора $\boldsymbol{A} = A^i \boldsymbol{e}_i = A_I \boldsymbol{e}^i$ різні: вони визначаються розмірностями базисних векторів і співвідношенням

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^i = 1.$$

При визначенні операцій вектори розглядаються геометрично як спрямлені відрізки з довжиною, яка пропорційна величині вектора, і фізична розмірність їх не приймається до уваги (за винятком основного правила, що усі вектори, які входять у рівняння доданками, повинні мати однакову фізичну розмірність). Можна, однак, увести так називані «фізичні» (іноді «фактичні») компоненти вектора, розмірності яких будуть збігатися з розмірностями вектора ,який розглядається. Для цього визначимо *векторний одиничний базис* $\boldsymbol{e}^*_i$ і, відповідно, взаємний йому $\boldsymbol{e}^{*i}$ за допомогою співвідношень

$$\boldsymbol{e}^*_i = \boldsymbol{e}_i / |\boldsymbol{e}_i|; \; \boldsymbol{e}^{*i} = \boldsymbol{e}^i \, |\boldsymbol{e}_i|, \quad (2.35)$$

і тоді

$$\boldsymbol{A} = A^{*i} \boldsymbol{e}^*_i = A^*_i \boldsymbol{e}^*_{i,} \quad (2.36)$$

де A^{*i}, A^*_i—фізичні компоненти вектора **A**.

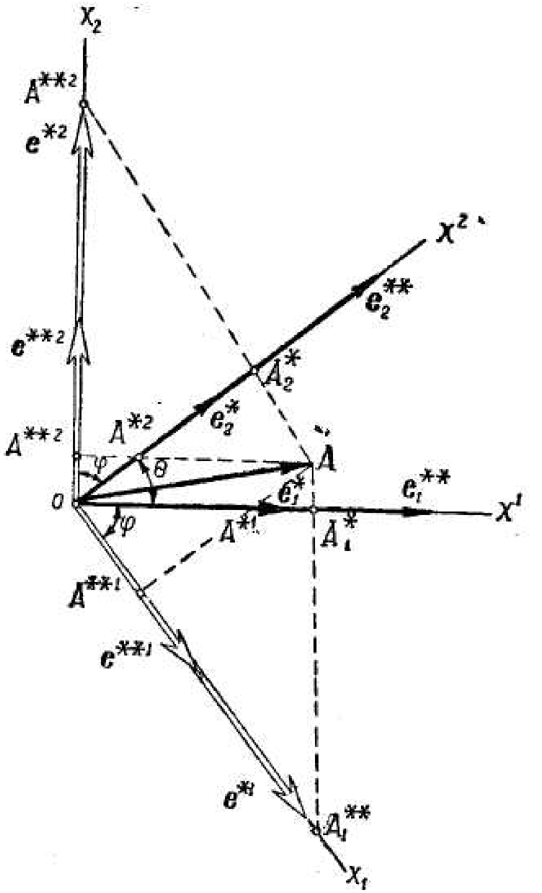


Рис. 2.21. Фізичні складові вектора.

Зв'язок фізичних компонентів з ко- і контраваріантними компонентами найдеться без труднощів:

$A^{*i} = A^i |\boldsymbol{e}_i|; \; A^{*i} = A^i / |\boldsymbol{e}_i|$ (немає підсумовування по i). (2.37).

Як видно (рис. 2.21), A^{*i} є *компонентами* (паралельні проекціям) вектора $\boldsymbol{A}$ при розкладанні його по ортах $\boldsymbol{e}^*_i$ основного базису, а A_{i}^* - проекції (ортогональні) цього ж вектора $\boldsymbol{A}$ на осі того ж базису.

Можна за основу прийняти взаємний базис і визначити одиничний векторний базис співвідношеннями:

$$\boldsymbol{e}^{**k}=\boldsymbol{e}^{k}/|\boldsymbol{e}^{k}|; \qquad \boldsymbol{e}^{**}{}_{k}=\boldsymbol{e}_{k}|\boldsymbol{e}^{k}|;$$

Це дає

$$\boldsymbol{e}^{**k}=\boldsymbol{e}^{*k}cos(\boldsymbol{e}^{k},\ \boldsymbol{e}_{k});$$
$$\boldsymbol{e}^{**}{}_{k}=\boldsymbol{e}^{*}{}_{k}/cos(\boldsymbol{e}^{k},\ \boldsymbol{e}_{k});$$

і

$$A^{**}{}_{k}=A^{*}{}_{k}/cos(\boldsymbol{e}^{k},\ \boldsymbol{e}_{k});$$
$$A^{**k}=A^{*k}/cos(\boldsymbol{e}^{k},\ \boldsymbol{e}_{k})$$

тобто обидва визначення рівнозначні й усе зводиться до вибору масштабу для одиниці. Підкреслимо, що всі обчислення майже завжди виконуються зі звичайними ко- і контраваріантними компонентами і тільки наприкінці, якщо потрібно, робиться перерахування на фізичні компоненти.

Зв'язок між коваріантними і контраваріантними компонентами вектора. Вираз коваріантних компонентів вектора через його контраваріантні компоненти, і навпаки, можна одержати, якщо розкладання (2.29) помножити скалярно на $\boldsymbol{e}_i$, а (2.30) - на $\boldsymbol{e}^i$:

$$\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{e}_{i}=A^{k}(\boldsymbol{e}_{k}\cdot \boldsymbol{e}_{i}),$$
$$\boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{e}^{i}=A_{k}(\boldsymbol{e}^{k}\cdot \boldsymbol{e}^{i}), \qquad (2.38)$$

Уведемо позначення:

$$\boldsymbol{e}_{k}\cdot \boldsymbol{e}_{i}=g_{ik}=g_{ki}$$
$$\boldsymbol{e}^{k}\cdot \boldsymbol{e}^{i}=g^{ik}=g^{ki} \quad (2.39)$$

$$\boldsymbol{e}^{k}\cdot \boldsymbol{e}_{i}=g^{\kappa}{}_{i}\equiv\delta^{\kappa}{}_{i}=\begin{cases}0, & якщо\ i\neq k\\ 1, & якщо\ i=k\end{cases}$$

Тоді з (2.38) випливають формули

$$A_i=g_{ik}A^{k}, \qquad (2.40)$$
$$A^{i}=g^{ik}A_k \qquad (2.41)$$

які і дають шукані вирази.

Дев'ять величин g_{ik} (і відповідно g^{ik} і $g^{k}{}_{i}\equiv\delta^{k}{}_{i}$), як надалі буде показано, складають тензор другого рангу — так називаний *метричний тензор.* Тут ми розглянемо деякі властивості цих величин, тому що вони є основною характеристикою простору, арифметизованно введеною системою координат з базисом $(\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$.

Розглянемо квадрат довжини дуги Δs між двома нескінченно близькими тачками x^i і $x^i+\Delta x^i$ в системі координат з базисом $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3)$

Одержимо

$$\Delta s^2=|\Delta\boldsymbol{r}|^2=\Delta\boldsymbol{r}\cdot\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_i\Delta x^i\cdot\ \boldsymbol{e}_k\Delta x^k=\ \boldsymbol{e}_i\Delta x^i\cdot\ \boldsymbol{e}^k\Delta x_k=\ \boldsymbol{e}^i\Delta x_i\cdot\ \boldsymbol{e}^k\Delta x_k$$

Використовуючи позначення (2.39), маємо

$$\Delta s^2=g_{ik}\Delta x^i\Delta x^k$$
$$\Delta s^2=g_{ik}\Delta x^i\Delta x^k$$
$$\Delta s^2=\Delta x_i\Delta x^i \qquad (2.42)$$

де Δx_i— коваріантні, а Δx^i — контраваріантні компоненти вектора $\Delta\boldsymbol{r}$.

Формули (2.42) визначають квадрат елементарної дуги в обраній системі координат через g_{ik} (або g^{ik}). Говорять, що величини g_{ik} (або g^{ik}) визначають *метрику простору,* арифметичні властивості якого установлюються введеною системою координат x^1, x^2, x^3.

Зв'язок між величинами g_{ik} і g^{ik} можна установити, якщо розглянути вираз $A_i=g_{ik}A^k\ (i=1,\ 2,\ 3)$ як систему трьох лінійних рівнянь відносно A^1, A^2, A^3.

Розв’язок цієї системи має вигляд

$$A^i=\frac{\sum_{k=1}^{3}G^{ik}A_k}{G}\equiv\frac{G^{ik}A_k}{G} \qquad (2.43)$$

де

$$G=\det\|g_{ik}\|=\begin{vmatrix}g_{11}g_{12}g_{13}\\ g_{21}g_{22}g_{23}\\ g_{31}g_{32}g_{33}\end{vmatrix}$$

G^{ik} — алгебраїчне доповнення, яке відповідає членові g_{ik} детермінанта G, може бути записане у вигляді

$$G^{ik}=\begin{vmatrix}g_{ps}g_{pt}\\ g_{rs}g_{rt}\end{vmatrix}$$

де індекси (i, p, r) і (k, s, t) складають циклічну перестановку чисел 1,2,3. Таким чином, наприклад, маємо

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22}g_{23} \\ g_{32}g_{33} \end{vmatrix}; \; G^{12} = \begin{vmatrix} g_{23}g_{21} \\ g_{33}g_{33} \end{vmatrix}; \; G^{13} = \begin{vmatrix} g_{21}g_{22} \\ g_{31}g_{32} \end{vmatrix};$$

Порівнюючи тепер (2.43) з (2.41), одержимо шуканий зв'язок:

$$\mathrm{g}^{\mathrm{ik}} = \frac{G^{ik}{}_{k}}{G} \quad (2.44)$$

Аналогічним шляхом можна одержати вираз

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G^{'}} \quad (2.45)$$

де $G^{'} = \det \| g^{ik} \|,\qquad G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{ps} g^{pt} \\ g^{rs} g^{rt} \end{vmatrix};$

З іншого боку, безпосереднім обчисленням, використовуючи (2.39) і (2.24), одержимо

$$| \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_s \;\; \boldsymbol{e}_p \cdot \boldsymbol{e}_t | \;\; g^{ik} = \boldsymbol{e}^t \cdot \boldsymbol{e}^k = (1/V_{,}^2)(\boldsymbol{e}_p \times \boldsymbol{e}_r) \cdot (\boldsymbol{e}_s \times \boldsymbol{e}_t)(1/V_{,}^2) =$$

$$= (1/V_{,}^2) \, | \, \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_s \;\; \boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_t | = \frac{1}{V_{,}^2} \begin{vmatrix} g_{ps}g_{pt} \\ g_{rs} \;\; g_{rt} \end{vmatrix}$$

Тут використана властивість (2.15) векторно-скалярного добутку і вираз (2.19) для подвійного векторного добутку. Порівнюючи цей вираз для g^{ik} з (2.40), одержимо

$$G = V_{,}^2; \; V_{,} \pm \sqrt{G} \qquad (2.46)$$

Відповідно до прийнятих раніше визначень знак у кореня у випадку правої системи вибирається додатним. Оскільки аналогічним шляхом можна одержати

$$V' \pm \sqrt{G'}, \quad (2.47)$$

то, з огляду на $V_{,} \cdot V' = 1$, знайдемо як наслідок

$$G \cdot G' = 1 \quad (2.48)$$

Таким чином, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах основного базису, дорівнює $\sqrt{G}$, а на векторах взаємного базису - $\sqrt{G'}$.

Випадок ортогональних базисів. Розглянемо його особливо, так як ортогональні системи координат найбільш поширені в додатках.

Як уже відзначалося, ортогональний базис збігається зі своїм взаємним. У цьому випадку з величин g_{ik} згідно (2.39) відмінні від нуля тільки g_{11}, g_{22}, g_{33}.

Тоді з (2.40) і (2.41) випливає

$$A_1 = g_{11}A^1; \; A_2 = g_{22}A^2; \; A_3 = g_{33}A^3;$$
$$A^1 = g^{11}A_1; \; A^2 = g^{22}A_2; \; A^3 = g^{33}A_3. \quad (2.49)$$

Виходить,

$$g_{11} = 1/\, g^{11} \;\; g_{22} = 1/\, g^{22} \;\; g_{33} = 1/\, g^{33} \quad (2.50)$$

і, крім цього, маємо

$$\Delta s^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2. \quad (2.51)$$

Коефіцієнти $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ (2.52) (не підсумовуються по i) носять назву *коефіцієнтів Ляме.*

У випадку ортогональних координат фізичні компоненти A^{*i} і A^*_i збігаються. *У прямокутній декартовій системі координат фізичні, коваріантні і контраваріантні компоненти збігаються.*

Зауваження з приводу «верхніх» і «нижніх» індексів. Для контролю написання формул може служити правило, яке носить до деякої міри мнемонічний характер. Воно говорить: *підсумовування може виконуватися тільки по різнойменним (верхній і нижній) «німим» індексах.* Наприклад, формули A_iB^i, $g^{ik}A_k$ і т.п. означають правильно написані суми. Але вирази A^kB^k, $g^{ik}A^k$ не мають змісту як суми.

У зв'язку з цим про вираз $A_i = g^{ik}A_k$ іноді говорять як про операції «підняття індексу», а про вираз $A_i = g_{ik}A^k$ — як про операції «опущення індексу» (оператор - сукупність дев'яти коефіцієнтів g_{ik} або g^{ik}).

Ці зауваження корисно мати на увазі і надалі, особливо при алгебраїчних діях з тензорами. Усе сказане вище відноситься до компонентів тензорів у системах узагальнених координат. У прямокутній декартовій системі, звичайно, припустимі записи A_iB_i, $C_{ik}A_k$ і т.п.

2.7. Змінні вектори

Вектор-функція скалярного аргументу. Вектори, так само як іскаляри, можуть змінюватися в просторі від точки до точки і з часом: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mathbf{r}, t)$.

Тут розглядаються вектори, які залежать тільки від однієї скалярної величини — *вектора-функції скалярного аргументу.*

Якщо кожному припустимому чисельному значенню скалярної величини t відповідає одне цілком визначене значення вектора $\boldsymbol{A}$, то кажуть, що задано вектор-функцію від скалярного аргументу t: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t)$. При цьому, взагалі говорячи, усі компоненти є функціями t: $A_i = A_i(t)$.

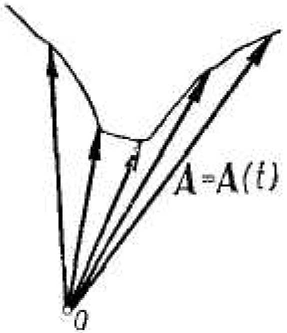


Рис. 2.22. Годограф вектора-функції скалярного аргументу.

Геометричною характеристикою вектора-функції служить її годограф— крива, яку описує кінець вектора. Її визначення будується аналогічно визначенню скалярної функції скалярного аргументу.

Зміна векторів-функції означає зміну як величини, так і напрямлення вектора. Зміна векторів-функції від скалярного аргументу графічно зображується *годографом вектора.* Годографом вектора A називається геометричне місце, утворене кінцями вектора при зміні t, якщо вектор відкладати (рис. 2.22*)* з деякої фіксованої точки (полюса).

Якщо вектор змінюється тільки по величині, його годографом є пряма (рис. 2.23,а), якщо вектор змінюється тільки по напрямленню, — сферична крива (рис. 2.23,б).

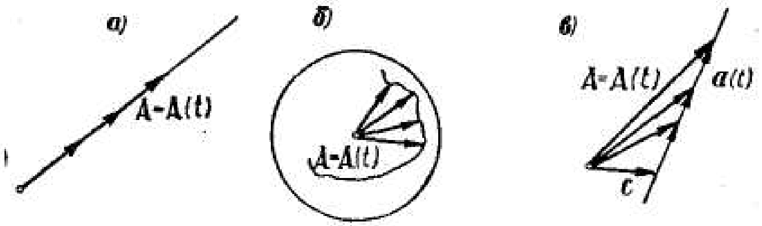


Рис. 2.23. Приклади годографів:

а) годограф вектора-функції, яка змінюється тільки по величині, — пряма;

б) годограф вектора-функції, яка змінюється тільки по напрямленню, — сферична крива;

в) вектор-функція, яка має годографом пряму, може бути представлена у вигляді суми сталого вектора і вектора, який змінюється тільки по величині

Якщо вектор має годографом пряму, то в загальному випадку він може змінюватися як по величині, так і по напрямленню (рис. 2.23,*в*), але завжди може бути представлений у вигляді суми сталого вектора і вектора змінного тільки по величині:

$$\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}(t)$$

де c, $a_i/|\boldsymbol{a}|$ — сталі величини.

Векторна похідна. *Якщо для змінного вектора* $\boldsymbol{A}(t)$ *при* $t\to t_0$ *існує такий сталий вектор* $\boldsymbol{A}_o$, *що*

$$\lim_{t\to t_0}|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|=0$$

то вектор $\boldsymbol{A}_0$ *називається границею при* $t\to t_0$ *вектор-функції* $\boldsymbol{A}(t)$.

Похідною $d\boldsymbol{A}/dt$ від вектора-функції по скалярному аргументу (векторної похідної) називається границя (якщо вона існує)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t}=\frac{d\vec{A}}{dt}. \quad (2.53)$$

Оскільки вектор $\Delta\boldsymbol{A}/\Delta t$ спрямований по січній до годографа, вектор $d\boldsymbol{A}/dt$, який є границею $\Delta\boldsymbol{A}/\Delta t$ при $\Delta t\to 0$, спрямований по дотичній до годографа вектора $\boldsymbol{A}(t)$ (рис. 2.24).

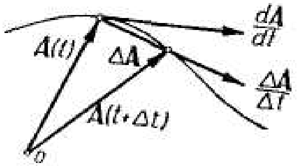


Рис. 2.24. Похідна вектор-функції скалярного аргументу.
Це вектор, напрямлений по дотичній до годографа цієї функції.

Векторна похідна $\Delta \boldsymbol{A}/\Delta t$ *завжди напрямлена по дотичній до годографа вектора* $\boldsymbol{A}(t)$.

Якщо вибрати *сталі* (не залежні від зміни аргументу *t) осі декартової прямокутної системи координат,* то

$$\boldsymbol{A}(t)=A_k(t)\boldsymbol{i}_k,$$

де $\boldsymbol{i}_k$ — сталі вектори.

Тоді

$$d\boldsymbol{A}/dt = \boldsymbol{i}_k(dA_k/dt);\ (d\boldsymbol{A}/dt)_k= dA_k/dt$$

Компоненти векторної похідної $\Delta \boldsymbol{A}/\Delta t$ є похідними від компонентів вектора-функції $\boldsymbol{A}(t)$, якщо координатна система не змінюється з плином аргументу *t.* При цьому величина векторної похідної може бути обчислена по формулі

$$|d\boldsymbol{A}/dt|=\sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dA_2}{dt}\right)^2+\left(\frac{dA_3}{dt}\right)^2} \quad (2.54)$$

Якщо $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор матеріальної точки, а t — час, то рух точки в самому загальному випадку характеризується її рівнянням руху або вектором-функцією $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$.

Дійсною швидкістю $\boldsymbol{V}$ у момент часу t є вектор – функція $\boldsymbol{V}(t)=d\boldsymbol{r}/dt$, а дійсним прискоренням $\boldsymbol{W}$- вектор-функція $\boldsymbol{W}(t)=d\boldsymbol{V}/dt= d^2\boldsymbol{r}/dt_2$

Правила диференціювання векторів-функцій установлюються з визначення похідної вектора-функції і мають вигляд:

1) $d(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})/dt=(d\boldsymbol{A}/dt)\pm (d\boldsymbol{B}/dt)$;

2) $d(\varphi\boldsymbol{A})/dt=(d\varphi/dt)\boldsymbol{A}+\varphi (d\boldsymbol{A}/dt)$;

3) $d(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})/dt=(d\boldsymbol{A}/dt)\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot (d\boldsymbol{B}/dt)$;

4) $d(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})/dt=(d\boldsymbol{A}/dt)\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times (d\boldsymbol{B}/dt)$;

Розглянемо, наприклад, доведення правила (4):

$$d(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})/dt= \lim_{\Delta t\to 0} [(\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{B}+\Delta \boldsymbol{B})- \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}]/\Delta t=$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} [(\Delta \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\times\Delta \boldsymbol{B})+(\Delta \boldsymbol{A}\times\Delta \boldsymbol{B})]/\Delta t=$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} [(\Delta \boldsymbol{A}/\Delta t) \times\boldsymbol{B}]+ \lim_{\Delta t\to 0} [\boldsymbol{A}\times (\Delta \boldsymbol{B}/dt)]+ \lim_{\Delta t\to 0} [(\Delta \boldsymbol{A}/\Delta t) \times\Delta \boldsymbol{B}]=$$

$$=[(d\boldsymbol{A}/dt) \times\boldsymbol{B}]+ [\boldsymbol{A}\times (d\boldsymbol{B}/dt)]$$

Помітимо, що при використанні правила (4) необхідно завжди мати на увазі некомутативність векторного добутку.

Невизначений інтеграл від вектор-функції. *Невизначеним інтегралом від вектор-функції* $\boldsymbol{A}(t)$ *називається вектор-функція* $\boldsymbol{B}(t)\equiv\int\boldsymbol{A}(t)dt$ *векторна похідна якої дорівнює* $\boldsymbol{A}(t)$, тобто

$$d\boldsymbol{B}/dt= \boldsymbol{A}(t)$$

Таки чином,

$$\boldsymbol{B}(t)=\int\boldsymbol{A}(t)dt+\boldsymbol{C} \quad (2.56)$$

де $\boldsymbol{C}$ — сталий вектор.

Якщо обрана незмінна (не залежна від *t)* система координат, то компоненти невизначеного інтеграла цілком визначаються невизначеними інтегралами від компонентів вектор-функції, тобто

$$B_i=\int A_i(t)dt+C_i \quad (2.57)$$

Величини B_i є компонентами вектора

Мікромодуль 4

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. Довести теорему косінусів у трикутнику.

*Розв'язання***.** Зобразимо сторони трикутника *ABC* у вигляді векторів $AB\equiv\boldsymbol{c}$, $AC\equiv\boldsymbol{b}$, $CB\equiv\boldsymbol{a}$. Тоді $\boldsymbol{a} +\boldsymbol{b}= \boldsymbol{c}$.

Піднесемо цей вираз до квадрату $\boldsymbol{a}^2 +\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}^2$.

Використовуючи поняття скалярного добутку, одержимо

$\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b}= ab\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})= ab\cos(\pi-\alpha)= -ab\cos\alpha$, де $\alpha=\angle ABC$.

Таким чином $c^2= a^2 +b^2-2ab\cos\alpha$.

Задача 2. Довести, що $\cos(\alpha-\beta)= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

Вказівка. Застосувати формулу

$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})/|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$ до двох векторів $|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}|=1$, які лежать у площині ($xy$) і які складають кути α і β з віссю (x).

Задача 3. Виразити скалярний добуток двох векторів через коваріантні і контраваріантні компоненти.

Розв'язання. По визначенню

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A^i\boldsymbol{e}_i\cdot B^k\boldsymbol{e}_k=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot B_k\boldsymbol{e}^k=A_i\boldsymbol{e}^i\cdot B^k\boldsymbol{e}_k=A^i\boldsymbol{e}_i\cdot B_k\boldsymbol{e}^k=g_{ik}A^iB^k=g^{ik}A_iB_k=A_iB^i=A^iB_i$

тому що в силу (2.39)

$$g^k{}_i=\delta^k{}_i=\begin{cases}0, i\neq k;\\ 1, i=k\end{cases}$$

Так як модуль вектора $\boldsymbol{A}$, наприклад, дорівнює

$$|\boldsymbol{A}|=A=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\equiv\sqrt{g_{ik}A^iA^k}=\sqrt{g^{ik}A_iA_k}=\sqrt{A_iA^i},$$

то кут між векторами $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ може бути знайдений по одній з наступних формул

$$\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\frac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g_{ik}B^iB^k}}=\frac{g^{ik}A_iB_k}{\sqrt{g^{ik}A_iA_k}\sqrt{g^{ik}B_iB_k}}=\frac{A_iB^i}{\sqrt{A_iA^i}\sqrt{B_iB^i}}$$

(чисельник і підкореневий вираз записані в скорочених позначеннях).

Задача 4. *Вивести основні формули сферичної тригонометрії.*

Розв'язання. Візьмемо на сфері одиничного радіуса сферичний трикутник *ABC* (рис. 2.25), який висікається тригранним кутом *OABC.* Нехай α, β, γ — кути цього трикутника, а довжини його сторін дорівнюють *a, b, c*.

Оскільки радіус сфери дорівнює одиниці, то *a* дорівнює плоскому кутові *BOC, b* — плоскому кутові *AOC* і *c* - плоскому кутові *AOB.* Установимо залежність між кутами α, β, γ сферичного трикутника і його сторонами *a, b, c* (плоскими кутами тригранного кута *OABC).* Введемо *одиничні* вектори $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ (рис. 2.25), які спрямовані з центра сфери до вершин сферичного трикутника.

Кут між площинами *OAC* і *OAB* (кут α) дорівнює кутові між нормалями до цих площин. Тому $\cos\alpha=[(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3)]/[|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2|\cdot|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3|]$

Переставляючи в змішаному добутку чисельника співмножники та розкриваючи по (2.19) подвійний векторний добуток ,а також маючи на увазі, що $|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2|=\sin b$; $|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3|=\sin c$, отримаємо

$$\cos\alpha=\{\boldsymbol{e}_1\cdot[\boldsymbol{e}_2\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3)]\}/(\sin b\cdot\sin c)=\boldsymbol{e}_1\cdot[\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3)-\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)]/(\sin b\cdot\sin c)=$$
$$=(\cos\alpha-\cos c\cdot\cos b)/(\sin b\cdot\sin c).$$

Звідси маємо $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$.

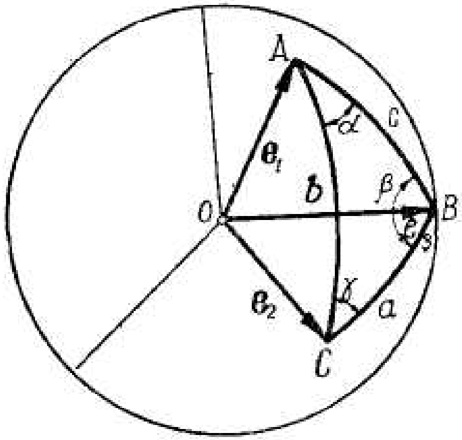


Рис. 2.25. Означення кутів в сферичній тригонометрії

Зовсім аналогічно знаходимо формули

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos\beta.$$

і

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma.$$

Другу групу формул отримаємо, віднімаючи синуси кутів α, β, γ.

Наприклад: $\sin\alpha=|(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\times(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3)|/|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2|\cdot|\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3|$

Читачеві пропонується одержати співвідношення

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

Задача 5. Скласти рівняння прямої у векторній формі.

Розглянемо кілька випадків визначення рівняння прямої у просторі

1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки *A* і *B* (рис. 2.26) у просторі.

Розв'язання. Нехай $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ — радіуси-вектори заданих точок відносно деякого початку. Тоді умовою того, що будь-яка точка *M* (її радіус-вектор $\boldsymbol{r}$) лежить на прямій, є умова паралельності векторів $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, тобто

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

З цього рівняння, помноживши його векторно на **b — a**, можна виключити параметр λ. Тоді одержимо

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0,$$

або

$$\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ .$$

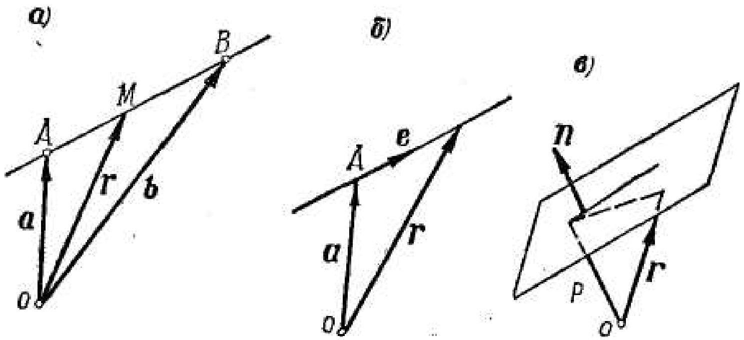


Рис. 2.26. До задач 5 і 7:
а) пряма, що проходить через дві задані точки;
б) пряма, для якої задані точка і напрямлення;
в) до нормальної форми рівняння площини

2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку *A(a)* паралельно даному векторові **e**.

Розв'язання. Використовуючи умову паралельності вектора **r-a** і вектора **e**, одержимо $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{e}$, де λ — параметр. Цей параметр можна виключити, помноживши рівняння векторно на **e**

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{e}.$$

3. Скласти рівняння прямої, яка проходить через задану точку *A(a)* перпендикулярно до двох заданих векторів $\boldsymbol{N}_1$ і $\boldsymbol{N}_2$.

Відповідь $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)$; $(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times\lambda(\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2)=0$.

Задача 6. *Одержати умову того, що точки A(a), B(b) і C(c) лежать на одній прямій.*

Розв'язання. Виходячи з розв'язання попередньої задачі, ця умова може бути записана у вигляді

$$(c_1-a_1)/(b_1-a_1)=(c_2-a_2)/(b_2-a_2)=(c_3-a_3)/(b_3-a_3),$$

де a_i, b_i, c_i— декартові координати відповідних точок у деякій системі з початком у точці *O*.

Показати, що шукана умова може бути записана у вигляді

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+(\mathbf{c}\times\boldsymbol{a})=0,$$

і з'ясувати геометричний зміст цієї умови.

Задача 7. *Скласти рівняння площини у векторній формі.*

Розглянемо кілька випадків визначення площини в просторі.

1. Скласти рівняння площини, яка проходить через три задані точки *A(a), B(b), C(c)*.

Розв'язання. Рівняння площини виходить з умови компланарності векторів **r — a, b — a, c — a** і у параметричній формі має вигляд

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}=\lambda\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+\mu\,(\mathbf{c}-\boldsymbol{a}),$$

де λ, μ — параметри.

Для виключення параметрів помножимо це рівняння спочатку векторно на **c — a**, а потім скалярно на **b — a**. Одержимо

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0.$$

Це можна було написати відразу, якщо врахувати необхідну і достатню умову компланарності трьох векторів (2.17).

2. Скласти рівняння площини, яка проходить через дві точки *A(a), B(b)* паралельно заданому векторові **e**,

Відповідь. $[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\cdot\boldsymbol{e}_1=0$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку *A(a)* паралельно векторам $\boldsymbol{e}_1$ і $\boldsymbol{e}_2$.

Відповідь

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{e}_1]\cdot\boldsymbol{e}_2=0$$

4. Скласти рівняння площини, якщо задана її відстань *p* від початку *O* (рис. 2.26) і напрямлення перпендикуляра до неї (орт **n** нормалі до площини).

Розв'язання. Якщо **n** — орт нормалі до площини, напрямлений у бік де не лежить початок (*O*), то для будь-якої точки **r** площини справедлива формула

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}=r\cos\,(\boldsymbol{r},\,\boldsymbol{n})=p$$

Це і є рівняння площини (нормальна форма рівняння площини).

Задача 8. Нехай у тетраедрі з площами граней s_1, s_2, s_3, s_4 проведені чотири вектори $\boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}, \boldsymbol{S_3}, \boldsymbol{S_4}$ по напрямленню вищих до граней нормалей. Абсолютні величини дорівнюють відповідно площам граней $|S_i|=s_i$. Показати, що

$$\boldsymbol{S_1}+\boldsymbol{S_2}+\boldsymbol{S_3}+\boldsymbol{S_4}=0.$$

Указівка. Використовувати представлення площі через векторний добуток.

Задача 9. *Показати, що нескінченно малі повороти є векторами.*

Розв'язання. Розглянемо приклад *А* в 2.2 (рис. 2.3. *а).*

Уведемо вектори $\overline{OA_1}, \overline{OA_2}, \overline{OA_3}$.

Перший поворот сфери можна охарактеризувати зсувом точки її з положення A_1 в A_2, а другий — з положення A_2 в A_3.

Якщо вважати кути α_1, α_2, α_3 малими, то можна записати

$$\overline{OA_2}=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}=\overline{OA_1}+(\alpha_1\times\overline{OA_1})$$

Дійсно $$|\alpha_1\times\overline{OA_1}|=\alpha_1\cdot\overline{OA_1}=\breve{A}_1\breve{A}_2=|\overline{A_1A_2}|$$

і вектор $\alpha_1\times\overline{OA_2}$ напрямлено в ту же сторону, що і вектор $\overline{A_1A_2}$

Аналогічно, $\overline{OA_3}=\overline{OA_2}+\overline{A_2A_3}=\overline{OA_2}+(\alpha_2\times\overline{OA_2})$.

Підставляючи сюди отриманий вище вираз для $\overline{OA_2}$ отримаємо

$$\overline{OA_3}=\overline{OA_1}+(\alpha_1\times\overline{OA_1})+\alpha_2\times[\overline{OA_1})+(\alpha_1\times\overline{OA_1})]=\overline{OA_1}+(\alpha_1+\alpha_2)\times\overline{OA_1}+\alpha_2\times(\alpha_1\times\overline{OA_1})=$$
$$=\overline{OA_1}+(\alpha_1+\alpha_2)\times\overline{OA_1})+\alpha_2\times(\alpha_1\times\overline{OA_1}) \qquad (*)$$

З іншого боку, якщо ввести поворот α_3, який переводить точку з A_1 в A_3, знайдемо

$$\overline{OA_3}=\overline{OA_1}+\alpha_2\times\overline{OA_1}. \qquad (**)$$

Якщо α_1, α_2, α_3 - нескінченно малі величини, то тоді (і тільки тоді), відкидаючи нескінченно малі другого порядку і порівнюючи (*) і (**), одержимо

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2=\alpha_2+\alpha_1.$$

Таким чином, нескінченно малі повороти є векторами, тому що вони підкоряються законам векторної алгебри (результуючий поворот дорівнює геометричній сумі доданків, величина якої не міняється від зміни порядку доданків).

Задача 10. Знайти розподіл швидкостей точок твердого тіла, яке має нерухому точку *O* (рис. 2.27).

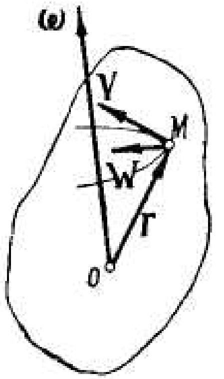


Рис. 2.27. Швидкість і осьострімке прискорення точок твердого тіла, яке має нерухому точку *O*.

Розв'язання. Змістимо тіло з початкового положення в близьке так, що його деяка точка *M* (*r*) перейде в положення M_1. Елементарний зсув Δr точки *M* може бути виражений, відповідно до попередньої задачі, через вектор нескінченно малого повороту $\Delta\varphi$ у такий спосіб:

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta\varphi\times\boldsymbol{r}.$$

Розділивши на Δt (час переміщення точки *M* в M_1) і перейшовши до границі при $\Delta t\to 0$, одержимо

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{V}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t)$– швидкість точки *M* , а $\boldsymbol{\omega}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\Delta\varphi/=\Delta t)$ миттєва кутова швидкість обертання твердого тіла.

Цю формула називають *формулою Эйлера.*

Задача 11. *Эйлерові кути.*

Як випливає з формул лінійного ортогонального перетворення координат, положення системи *(К')* по відношенню до системи *(К),* яка має з нею загальний початок, можна визначити *трьома* незалежними параметрами (дев'ять косинусів кутів між осями *(К)* і *(К')* повинні задовольняти шести умовам ортогональності). У якості трьох параметрів у кінематиці найчастіше вибирають кути Эйлера. Систему *(К)* в систему *(К')* можна перевести за допомогою трьох поворотів (рис. 2.28): 1) на кут ψ навколо осі (x_3) (кут прецесії); 2) на кут υ навколо лінії *ON* (лінія вузлів з ортом $\boldsymbol{n}$), де υ — кут нутації; 3) на кут φ навколо осі (x'_3) (кут чистого обертання).

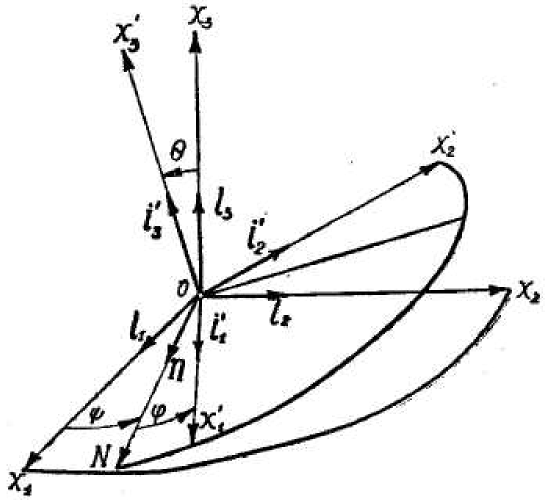


Рис. 2.28**.** Эйлерові кути.

Незалежні параметри ψ, υ, φ називаються кутами Эйлера.

Потрібно виразити орти $\boldsymbol{i}'_1$, $\boldsymbol{i}'_2$, $\boldsymbol{i}'_3$ *системи (К') через орти* $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ *системи (К) і кути Эйлера.*

Розв'язання. Раніше було отримано вираз:

$$\boldsymbol{i}'_1 = \alpha_{1'1}\boldsymbol{i}_1 + \alpha_{1'2}\,\boldsymbol{i}_2 + \alpha_{1'3}\,\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{i}'_2 = \alpha_{2'1}\boldsymbol{i}_1 + \alpha_{2'2}\,\boldsymbol{i}_2 + \alpha_{2'3}\,\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{i}'_3 = \alpha_{3'1}\boldsymbol{i}_1 + \alpha_{3'2}\,\boldsymbol{i}_2 + \alpha_{3'3}\,\boldsymbol{i}_3;$$

Зі сферичного трикутника, утвореного на одиничній сфері кінцями ортів $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{n}$ і $\boldsymbol{i}'_1$, відповідно до формул, отриманих у задачі 4, знайдемо

$$\alpha_{1'1}=\cos(\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}_1)=\cos\psi\cos\varphi+\sin\varphi\sin\psi\cos(\pi-\theta)=\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta.$$

З інших сферичних трикутників, вибираючи щораз одну вершину в кінці орта $\boldsymbol{n}$ лінії вузлів, одержимо

$$\alpha_{1'2}=\cos(\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}_2)=\cos\varphi\cos[(\pi/2)-\psi]+\sin\varphi\sin[(\pi/2)-\psi]\cos\theta=$$
$$=\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta;$$
$$\alpha_{1'3}=\cos(\boldsymbol{i}'_1, \boldsymbol{i}_3)=\cos\varphi\cos\pi/2+\sin\varphi\sin\pi/2\cos[(\pi/2)-\theta]=\sin\varphi\sin\theta.$$

Таким чином

$$\boldsymbol{i}'_1=\boldsymbol{i}_1(\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)+\boldsymbol{i}_2(\cos\varphi\sin\psi+$$
$$+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)+\boldsymbol{i}_3\sin\varphi\sin\theta.$$

Інші формули мають вигляд:

$$\boldsymbol{i}'_2=\boldsymbol{i}_1(-\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)+\boldsymbol{i}_2(\cos\psi\cos\varphi\cos\theta--\sin\psi\sin\varphi)+$$
$$+\boldsymbol{i}_3\sin\theta\cos\varphi.$$
$$\boldsymbol{i}'_3=\boldsymbol{i}_1\sin\psi\sin\theta-\boldsymbol{i}_2\cos\psi\sin\theta+\boldsymbol{i}_3\cos\theta.$$

Задача 12. *Показати, що* (див. умову попередньої задачі)

$$\boldsymbol{i}_1=(\cos\psi\cos\varphi-\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)\,\boldsymbol{i}'_1+(-\cos\psi\cos\varphi-$$
$$-\sin\psi\cos\varphi\cos\theta)\,\boldsymbol{i}'_2+\boldsymbol{i}'_3\sin\psi\sin\theta;$$
$$\boldsymbol{i}_2=(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)\,\boldsymbol{i}'_1+(\cos\psi\cos\varphi\cos\theta-$$
$$-\sin\psi\sin\varphi)\,\boldsymbol{i}'_2-\boldsymbol{i}'_3\cos\psi\sin\theta;$$
$$\boldsymbol{i}_3=\boldsymbol{i}'_1\sin\varphi\sin\theta+\boldsymbol{i}'_2\sin\theta\cos\varphi+\boldsymbol{i}'_3\cos\theta$$

Задача 13. Момент $\boldsymbol{M}_0$ сили $\boldsymbol{F}$ щодо точки *O* визначається виразом

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор початку вектора $\boldsymbol{F}$ відносно точки *O.*

Моментом сили $\boldsymbol{F}$ відносно осі (u), яка проходить через точку *O,* називається проекція M_0 на вісь (u), тобто

$$M_u=\boldsymbol{M}_0\cdot\boldsymbol{u}_0=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{u}_0$$

де $\boldsymbol{u}_0$ — орт осі *(u).*

Показати, що величина M_u *не залежить від розташування точки O на осі (u).*

Задача 14. Нехай у точках, обумовлених радіусами-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2,\ldots, \boldsymbol{r}_k,\ldots, \boldsymbol{r}_n$ відносно деякого початку *O,* розташовані заряди, рівні відповідно $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots, e_n.$

Дипольним моментом цієї системи зарядів відносно початку *O* називається вектор

$$\boldsymbol{p}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r}_k.$$

Назвемо центром зарядів (за аналогією з центром мас) цієї системи точку *C*, яка визначається радіусом-вектором:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{p}\,/\sum_{k=1}^{n} e_k=(\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r}_k)\,/\,(\sum_{k=1}^{n} e_k).$$

Цю точку можна визначити, якщо $\sum_{k=1}^{n} e_k\neq 0$.

Якщо $\sum_{k=1}^{n} e_k=0$, то система зарядів нейтральна

1. *Показати, що дипольний момент нейтральної системи не залежить від початку, відносно якого він обчислюється.*

2. *Виразити дипольний момент через центри систем додатних і від'ємних зарядів, які складають нейтральну систему.*

Розв'язання. 1. Нехай $\boldsymbol{p}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r}_{k.}$ дипольний момент відносно початку *O*, а $\boldsymbol{p'}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r'}_{k.}$ відносно початку *O'*, причому $\overline{OO'}=\boldsymbol{r}_0$.

Тоді $\boldsymbol{r'}_k=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_0$.

Отже,

$$\boldsymbol{p'}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r'}_k=\sum_{k=1}^{n} e_k(\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_0)=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{r}_0\sum_{k=1}^{n} e_{k.}$$

так як система зарядів нейтральна ($\sum_{k=1}^{n} e_k$), то $\boldsymbol{p'}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r'}_k=\boldsymbol{p}$

2.Нехай e_k=0. Тоді в системі є від'ємні заряди e_k^- і додатні e_k^+. Розіб'ємо всю суму зарядів на суми додатних і від'ємних, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} e_k=\sum e_k^-+\sum e_k^+=0$$

Тоді позначимо $\sum e_k^+=-\sum e_k^-=Q$. По визначенню, центри додатних і від'ємнних зарядів знаходяться в точках, радіуси-вектори яких рівні

$$\boldsymbol{R}^+=(\sum e_k^+\boldsymbol{r}^+_k)\,/\,\sum e_k^+; \qquad \boldsymbol{R}^-=(\sum e_k^-\boldsymbol{r}^-_k)\,/\,\sum e_k^-;$$

Тоді дипольний момент системи дорівнює

$$\boldsymbol{p}=\sum_{k=1}^{n} e_k\boldsymbol{r}_k=\sum e_k^+\boldsymbol{r}^+_k+\sum e_k^-\boldsymbol{r}^-_k=\boldsymbol{R}^+\sum e_k^++\boldsymbol{R}^-\sum e_k^-=Q(\boldsymbol{R}^+-\boldsymbol{R}^-).$$

Задача 15. *Зіткнення часток.* Нехай дві частки однакової маси до зіткнення мали швидкості $\boldsymbol{V_1}$ і $\boldsymbol{V_2}$, а після зіткнення придбали швидкості $\boldsymbol{V'}_1$ і $\boldsymbol{V'}_2$ (рис. 2.29).

Оскільки зіткнення часток відбувається під дією центральних сил, то, як відомо з механіки, їхні траєкторії будуть лежати в одній площині в системі координат, де знаходиться в спокої центр інерції. Для такого зіткнення справедливі закони збереження кількості руху і кінетичної енергії системи (потенційна енергія до і після зіткнення дорівнює нулеві), тому

$$\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{V'}_1+\boldsymbol{V'}_2$$

$$\boldsymbol{V}^2_1+\boldsymbol{V}^2_2=\boldsymbol{V'}^2_1+\boldsymbol{V'}^2_2\ (*)$$

1. *Виразити швидкості після зіткнення* $\boldsymbol{V'}_1$ і $\boldsymbol{V'}_2$ *через початкові швидкості* $\boldsymbol{V}_1$ і $\boldsymbol{V}_2$.

2. *Показати, що відносні швидкості*

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_1$$

$$\boldsymbol{U'}=\boldsymbol{V'}_2-\boldsymbol{V'}_1$$

до ($\boldsymbol{U}$) *і після* ($\boldsymbol{U'}$) *зіткнення рівні по абсолютній величині.*

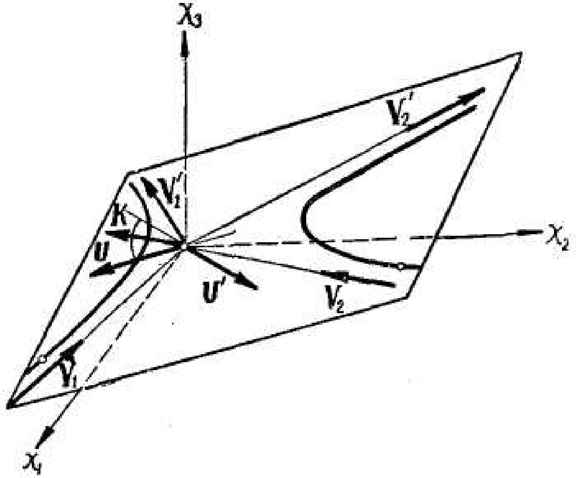


Рис. 2.29. До задачі 15 про зіткнення часток.

Розв'язання. **1.** Система (*) являє собою систему чотирьох скалярних рівнянь відносно шести компонентів швидкостей $\boldsymbol{V}'_1$ і $\boldsymbol{V}'_2$. Таким чином, явне вираження $\boldsymbol{V}'_1$ і $\boldsymbol{V}'_2$ через $\boldsymbol{V}_1$ і $\boldsymbol{V}_2$ може бути здійснено введенням двох додаткових параметрів, які характеризують геометрію зіткнення (положення площини траєкторії в деякій системі (x_1, x_2, x_3)). Це означає, що зіткнення двох часток може бути цілком охарактеризовано значенням двох геометричних параметрів. Ці геометричні параметри ми введемо за допомогою орта $\boldsymbol{k}$ ($|\boldsymbol{k}|=1$) по напрямленню зміни швидкості першої частки (рис. 2.29), тобто

$$\boldsymbol{V}'_1 - \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{k}A \ (**).$$

Два незалежних кути, які складають $\boldsymbol{k}$ з осями системи (x_1, x_2, x_3), можуть бути прийняті за геометричні параметри зіткнення. Тоді з першого рівняння системи (*) випливає

$$\boldsymbol{V}'_2 - \boldsymbol{V}_2 = -\boldsymbol{k}A \ (***).$$

Підставляючи $\boldsymbol{V}'_1$ і $\boldsymbol{V}'_2$ з (**) і (***) у друге рівняння системи (*), одержимо вираз для A. Маємо

$$\boldsymbol{V}^2{}_1+\boldsymbol{V}^2{}_2=(\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{k}A)^2+(\boldsymbol{V}_2+\boldsymbol{k}A)^2=\boldsymbol{V}^2{}_1+2A(\boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{k})+A^2+\boldsymbol{V}^2{}_2-2A(\boldsymbol{V}_2\cdot\boldsymbol{k})+A^2.$$

Звідки

$$A=\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{V}_1)=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}.$$

Тоді з (**) і (***) маємо

$$\boldsymbol{V}'_1=\boldsymbol{V}_1+\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}); \quad \boldsymbol{V}'_2=\boldsymbol{V}_2-\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}).$$

Ці формули і дають явний вираз кінцевих швидкостей $\boldsymbol{V}'_1$ і $\boldsymbol{V}'_2$ через швидкості $\boldsymbol{V}_1$ і $\boldsymbol{V}_2$ до зіткнення і вектор $\boldsymbol{k}$.

2. Вираховуючи з другого рівняння системи (****) перше, одержимо

$$\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}-2\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}). \ (*****)$$

Підносячи до квадрату, знайдемо $\boldsymbol{U}'^2=\boldsymbol{U}^2$, тобто $\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}$ — величина відносної швидкості часток зберігається при зіткненні.

Неважко показати, що вектор $\boldsymbol{k}$ ділить кут між $\boldsymbol{U}$ і — $\boldsymbol{U}'$ навпіл. Дійсно, помноживши (*****) скалярно на $\boldsymbol{k}$, одержимо

$$\boldsymbol{U}'\cdot\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{k}.$$

Задача 16. *Розглянути зіткнення часток з різними масами m_1 і m_2. Показати, що величина відносної швидкості $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}_2—\boldsymbol{V}_1$ зберігається при зіткненні.*

*Розв'язання***.** Нехай

$$\boldsymbol{p}_1=m_1\boldsymbol{V}_1, \ \boldsymbol{p}_2=m_2\boldsymbol{V}_2, \ \boldsymbol{p}'_1=m_1\boldsymbol{V}'_1, \ \boldsymbol{p}'_2=m_2\boldsymbol{V}'_2,$$

де $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ — швидкості часток до зіткнення, а $\boldsymbol{V}'_1, \boldsymbol{V}'_2$ — після зіткнення. Закон збереження кількості руху і кінетичної енергії має вигляд $\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1,$

$$p^2{}_1+mp^2{}_1=p'^2{}_1+mp'^2{}_2 \qquad (m=m_1/m_2). \ (*)$$

Вводячи орт $\boldsymbol{k}$ співвідношеннями

$$\boldsymbol{p}'_1-\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{k}A, \ \boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{k}A$$

і визначаючи A з другого рівняння (*), одержимо

$$A=2/(1+\mathrm{m})\ \boldsymbol{k}\cdot(m\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)=[2m_1/(1+m)](\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}).$$

Тобто

$$\boldsymbol{p}'_1=\boldsymbol{p}_1+[2/(1+m)]\ \boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\cdot(m\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)]=\boldsymbol{p}_1+[2m_1/(1+m)]\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}).$$

$$\boldsymbol{p}'_2=\boldsymbol{p}_2-[2/(1+m)]\ \boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\cdot(m\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)]=\boldsymbol{p}_2-[2m_1/(1+m)]\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}).$$

Звідси маємо $\quad m\boldsymbol{p}'_2-\boldsymbol{p}'_1=m\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1-2\boldsymbol{k}[\boldsymbol{k}\cdot(m\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_1)],$

або $\quad \boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}-2\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{U}),(**)$

де позначено $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{V}'_2-\boldsymbol{V}'_1$

Підносячи вираз(**) до квадрату, отримаємо $\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}$.

Мікромодуль 4

Індивідуальні тестові завдання

1. Довести, що проекція на будь-яку вісь суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків на ту ж вісь.

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_2+3\boldsymbol{i}_3; \quad \boldsymbol{C}=3\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{i}_1+5\boldsymbol{i}_2+6\boldsymbol{i}_3; \quad \boldsymbol{D}=6\boldsymbol{i}_1+5\boldsymbol{i}_2+4\boldsymbol{i}_3.$$

2. Дано вектори, де $\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3$ – орти декартової системи координат (x_1, x_2, x_3)

Знайти

1) суми і різниці векторів.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}; \ \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}; \ \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}; \ -\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D};$$

2) кути, що складають вектори **A, B, C, D** з осями координат

3) модулі векторів $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$.

3. Знайти суму трьох векторів, які мають довжину a і проведених:

1) з вершини куба по трьох його ребрах;

2) з вершини правильної трикутної піраміди по трьох її ребрах.

4. Знаючи, що центр мас із системи матеріальних точок визначається радіусом-вектором $\boldsymbol{r}_c$, який має вигляд

$$\boldsymbol{r}_c=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

де m_i — маси точок,

$\boldsymbol{r}_i$ — їхні радіуси-вектори,

n — число точок,

визначити:

1) центр мас системи точок, розташованих у вершинах квадрата (довжина сторони *a*), з масами 1г, 2г, 3г, 4г;

2*)* центр мас системи точок, розташованих у вершинах правильного трикутника (довжина сторони *a*), з масами 1г, 2г, 3г;

3) центр мас системи точок, розташованих у вершинах куба (довжина сторони *a*), з масами 1г, 2г, 3г, 4г (нижня підстава) і 5г, 6г, 7г, 8г (верхня підстава).

Де буде знаходитися центр мас куба, якщо в його протилежних вершинах зосереджені однакові маси?

5. *У* паралелограмі гострий кут дорівнює π/3, а сторони a=3 і b= 5.

Зображуючи його сторони у вигляді векторів ***a*** і ***b****,* визначити:

1) вектори $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ (побудувати);

2) площу паралелограма;

3) проекцію кожної сторони паралелограма на напрямлення іншої сторони.

6. Для векторів, приведених у вправі 2, визначити:

1) скалярний добуток суми двох перших векторів на суму двох наступних,

2) кути, що утворюють вектор ***A*** с іншими векторами ***B*****,** ***C*** і ***D****,*

3) проекцію вектора ***A*** на напрямлення векторів ***B*****,** ***C*** і ***D***;

4) векторні добутки $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$ і кути, які вони утворюють з вектором ***D;***

5)площі паралелограмів, побудованих на векторах ***A*** і ***B*****,** ***C*** і ***D;*** знайти довжини діагоналей цих паралелограмів.

7. Показати, що усі вектори ***A*****,** ***B*****,** ***C*****,** ***D*** (вправа2) лежать в одній площині.

8. Дано вектори:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_2+3\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{B}=4\boldsymbol{i}_1+5\boldsymbol{i}_2;$$
$$\boldsymbol{C}=3\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_2+\boldsymbol{i}_3$$

Яку систему (праву або ліву) утворять ці вектори?

Визначити:

1) об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах;

2) вектори, які зображують дві (які виходять з кінців вектора ***A)*** діагоналі паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, і знайти довжини цих діагоналей;

3) площу діагонального пересічення паралелепіпеда, проведеного через вектор ***A.***

9. Показати, що якщо з'єднати середини сторін довільного чотирикутника прямими лініями, то отримана фігура буде паралелограмом.

Вказівка. Сторони вихідного чотирикутника зобразити у вигляді векторів ***a*****,** ***b*****,** ***c*****,** ***d*** так, що $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=0$.

10. Показати, що якщо ***a*****,** ***b*****,** ***c*** і ***d*** — суть радіуси-вектори чотирьох точок і справедлива рівність $[(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]\bullet(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0$, то точки лежать в одній площині .

11. Перевірити, чи можуть наступні трійки векторів утворювати базис

$$\boldsymbol{a}_1=2\boldsymbol{i}_1+\boldsymbol{i}_2-3\boldsymbol{i}_3;\quad \boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{i}_1-3\boldsymbol{i}_2+2\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{i}_1-4\boldsymbol{i}_3;\quad \boldsymbol{b}_2=2\boldsymbol{i}_1-4\boldsymbol{i}_2-\boldsymbol{i}_3;$$
$$\boldsymbol{a}_3=4\boldsymbol{i}_1+3\boldsymbol{i}_2-\boldsymbol{i}_3;\quad \boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{i}_1+2\boldsymbol{i}_2-\boldsymbol{i}_3.$$

Тут $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{i}_3$ орти прямокутної декартової системи координат.

12. Якщо $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ – вектори (див. вправу 10), перевірити, чи будуть лінійно незалежними вектори $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, $\boldsymbol{B}_3$:

$$\boldsymbol{B}_1=2\boldsymbol{b}_1-3\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3;$$
$$\boldsymbol{B}_2=3\boldsymbol{b}_1-5\boldsymbol{b}_2+2\boldsymbol{b}_3;$$
$$\boldsymbol{B}_3=4\boldsymbol{b}_1-5\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3\ .$$

13. Кінетичним моментом відносно центру *0* (момент кількості руху) системи *n* матеріальних точок називається векторна сума

$$\boldsymbol{L}_0=\sum_{i=1}^{n}\ \boldsymbol{r}_i\times m_i\,\mathbf{V}_i,$$

де $\mathbf{r}_i$– радіус- вектор *i*-ї точки, що має масу m_i і швидкість V_i

Визначити:

1) кінетичний момент двох точок з масами m_1=1г, m_2=2г які обертаються з кутовою швидкістю ω=5(1/*сек.*) навколо осі *(x_3)* і виписують круги, радіусом 3 і 6 *см,*

2*)* кінетичний момент точок масою 1г і 2г, які рухаються в протилежні сторони зі швидкістю 3 *см /сек.* по двох протилежно лежачих ребрах куба, щодо всіх його вершин (довжина ребер куба дорівнює *а см).*

14. Нехай ***a, b*** — два вектори, які визначають сторони паралелограма з діагоналями ***a+b*** і ***a — b***. Показати, що:

1) сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін;

2) діагоналі паралелограма перпендикуляри тоді і тільки тоді, якщо цей паралелограм — ромб;

3) площа паралелограма *(А),* побудованого на діагоналях іншого паралелограма *(В),* у два рази більше площі цього паралелограма *(В).*

Мікромодуль 5

Основні відомості про тензори

2.8. Компоненти тензорів і їхнє перетворення. Рівноправність координатних систем

У попередньому мікромодулі були розглянуті приклади скалярів і векторів. Скаляр має один компонент, вектор — три. Іншими словами, яку б ми не вибрали систему координат, для повного опису скаляра досить одного числа, а для такої величини, як вектор, необхідно три числа. Більш складні об'єкти вимагають для свого визначення більшого числа компонент. Так, для опису деформації пружного тіла в точці необхідно 3^2=9 чисел, а для повної характеристики пружних властивостей анізотропного тіла — 3^4 = 81 число.

Числа (або функції), які цілком визначають величину в якійсь системі координат, називаються компонентами цієї величини.

Ми вже говорили, що з цього погляду зручно розглядати тензори різних рангів: скаляр (3^0=1 компонента) — тензор рангу 0, вектор (3^1=3 компоненти) — тензор рангу 1, величина, що має 3^2=9 компонент, — тензор рангу 2 і т.д. Тензори можуть бути самого різного рангу, і взагалі тензор рангу *n* має 3^n компонент. Компоненти можуть бути функціями, наприклад, часу і координат.

У цьому мікромодулі ми розглянемо правила, по яких перетворюються компоненти тензорів різних рангів у залежності від зміни системи координат.

Величини можна розглядати в системах координат з різним початком і різним чином орієнтованих. Компоненти однієї і тієї ж величини (тензора) можуть мати різні значення в різних системах координат. Однак у зв'язку з тим, що щораз ці компоненти визначають ту саму величину, закон перетворення компонент при переході з однієї системи координат в іншу не може бути довільним. Цей закон повинний випливати з природи величини яку розглядають (для скаляра один закон, для вектора — інший і т.д.) і з властивостей простору, в якому вибираються системи координат.

Довільність вибору початку (перенос) координатних систем є досвідним (дослідним) фактом і відображає так звану однорідність простору.

Рівноправність будь-якої орієнтації (поворот) координатних систем також є досвідним (дослідним) фактом і означає ізотропність простору.

Таким чином, в однорідному й ізотропному просторі всі координатні системи рівноправні в тому змісті, що опис величин або явищ (закони) не залежать від часткового (якщо казати взагалі, довільного) вибору системи координат.

Це означає наступне. Нехай в однорідному й ізотропному просторі обрані дві довільні системи координат *К* і *К ',* які можуть мати різні початки і різну орієнтацію. Тоді закон, сформульований у системі *К* через компоненти величин, які відносяться до цієї системи, повинний мати той же вигляд, що і той же закон, сформульований у системі *К'* через компоненти, які відносяться до системи *К'.*

Ця вимога до правильно сформульованих законів носить назву вимоги *інваріантості.*

Так, наприклад, якщо довжина якогось відрізка, яка обчислена в системі координат *К,* дорівнює Δs, то, обчислюючи довжину цього ж відрізка через координати його кінця і початку стосовно будь-якої іншої системи *К',* ми одержимо те ж саме чисельне значення його довжини. Математично це може бути виражене тим, що величина

$$\Delta s^2 = \Delta x^2{}_1 + \Delta x^2{}_2 + \Delta x^2{}_3 \qquad (2.58)$$

має однакове числове значення незалежно від того, у якій із прямокутних декартових системах обчислені Δx_1, Δx_2, Δx_3 — різниці координат кінця і початку відрізка.

Незалежність описування від вибору системи координат не є єдиною вимогою, яка пред'являється до величин і законів. У якості іншої такої загальної вимоги вкажемо на широко відому *умову незалежності формулювання законів від вибору системи одиниць виміру.*

Фізичні величини мають розмірність. Однак вибір одиниць виміру цих величин залишається довільним. Таким чином, відношення двох значень однієї і тієї ж величини не залежить від того, у яких одиницях ця величина виміряна (цей факт використовується в теорії розмірностей при доведенню основної формули розмірності).

Любий закон формулюється також незалежно від вибору системи одиниць виміру величин, між якими він установлює відповідність.

Як відомо, незалежність формулювання закону від вибору системи одиниць виміру забезпечується *однаковою розмірністю величин,* що входять у формулювання у вигляді доданків. Надалі ми побачимо, що незалежність формулювання закону від вибору системи координат забезпечується *однаковим рангом усіх тензорів,* які входять у запис закону у вигляді доданків.

Далі ми розглянемо послідовно тензори різних рангів у зв'язку з законом перетворення їхніх компонент, що забезпечує у всіх випадках рівноправність координатних систем при описі величин.

Основні визначення і формулювання будуть дані по відношенню до прямокутних декартових систем координат. Проте, там де це буде потрібно по ходу викладу, будуть розглянуті також компоненти тензорів і їхні властивості в системах узагальнених координат

2.9. Тензори нульового рангу (скаляри)

Вище уже відзначалося, що такі величини, як температура, об'єм, тиск і ін., називаються скалярами. Приведемо визначення скаляра в зв'язку з законом його зміни при перетвореннях координатної системи.

Скаляр — це величина, цілком обумовлена в будь-якій координатній системі одним числом (або функцією), яке не міняється при зміні просторової системи координат.

Скаляр має один компонент. Таким чином, якщо φ — значення скаляра в одній системі координат, а φ' — в іншій, то $\varphi' = \varphi$. Розглянемо приклад скалярної величини.

Приклад. Нехай *A* і *B* — дві точки в просторі, координати яких у системі *(К)* декартових координат суть $x^A{}_k$, $x^B{}_k$ (k= 1, 2, 3), а в іншій декартовій системі *(K')* - x'^A_k, x'^B_k (k = 1, 2, 3) (рис. 2.30). Так як довжина Δs відрізка прямої по своєму визначенню є скаляром, то

$$\Delta s' = \Delta s.$$

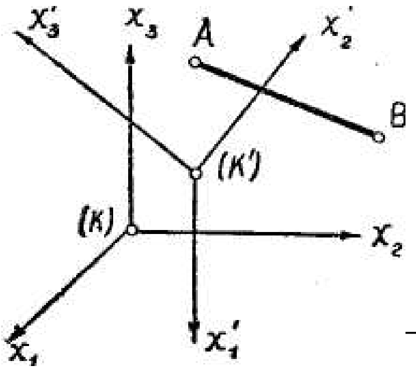


Рис. 2.30. Приклад скалярної величини.

Довжина відрізка *AB* — скалярна величина має те саме значення в різних системах координат.

Отже, для будь-яких двох систем декартових координат необхідне виконання рівності (тут і всюди надалі ми будемо вважати, що одиниці масштабів у системах залишаються незмінними)

$$\sum_{k=1}^{3} \Delta x^2{}_k = \sum_{k=1}^{3} \Delta x'^2{}_k \quad (2.59)$$

Тут

$$\Delta x_k = x^B{}_k - x^A{}_k \quad (k=1, 2, 3);$$
$$\Delta x'_k = x'^B{}_k - x'^A{}_k \quad (k=1, 2, 3).$$

Як відомо з аналітичної геометрії, формули для перетворення декартових координат мають наступний вигляд (приводимо скороченні означення)

$$x'_1=\alpha_{1'k}\, x_k+ x_1{}'^{\,0};\quad x_1=\alpha_{k'1}\, x'_k+ x_1{}^{01.};$$
$$x'_2=\alpha_{2'k}\, x_k+ x_2{}'^{0};\quad x_2=\alpha_{k'2}\, x'_k+ x_2{}^{01.};$$
$$x'_3=\alpha_{3'k}\, x_k+ x_3{}'^{0};\quad x_1=\alpha_{k'3}\, x'_k+ x_3{}^{01.};$$

або

$$x'_i=\alpha_{i'k}\, x_k+ x_i{}'^{01};\quad (2.60)$$
$$x_i=\alpha_{k'i}\, x'_k+ x_i{}'^{\,0.};$$
$$(i= 1, 2, 3).$$

Звідси $\Delta x'_i=\alpha_{i'k}\Delta\, x_{k\,.}$ (2.61)

Тут $\alpha_{i'k}$= cos $(x'_i,\ x_k)$ — косинус кута між i-ю новою віссю і k-ю старою віссю. Усі коефіцієнти $\alpha_{i'k}$ цього ортогонального лінійного перетворення не залежать від координат, а між ними існує співвідношення

$$\alpha_{i'i}\alpha_{i'k}=\delta_{ik}\begin{cases}1,\ якщо\ i=k\\0,\ якщо\ i\neq k\end{cases}\qquad(2.62)$$
$$\alpha_{i'i}\alpha_{k'i}=\delta'_{ik}\begin{cases}1,\ якщо\ i=k\\0,\ якщо\ i\neq k\end{cases}$$

Ортогональні лінійні перетворення забезпечують виконання умови (2.59). Дійсно, обчислимо, $\sum\limits_{i=1}^{3}\Delta x'^2{}_i$

використовуючи (2.61)

$$\sum_{i=1}^{3}\Delta x'^2{}_i=\sum_{i'=1}^{3}\alpha_{i'k}\Delta x_k\alpha_{i'i}\Delta x_i=\Delta x_k\Delta x_i\alpha_{i'k}\alpha_{i'i}$$

У силу співвідношень (2.62) маємо

$$\sum_{i=1}^{3}\Delta x'^2{}_i=\Delta x_k\Delta x_i\delta_{ki}=\sum_{k=1}^{3}\Delta x^2{}_k\,.$$

Таким чином, закон перетворення координат (2.60) забезпечує інваріантість довжини відрізка прямої по відношенню до будь-яких ортогональних змінах координатної системи.

2.10. Тензори 1-го рангу (вектори)

Векторні величини (переміщення, прискорення, сила й ін.), як уже вказувалося, вимагають для свого визначення трьох дійсних чисел або функцій. Вектори — величини більш високого рангу в порівнянні зі скалярами; вони можуть бути названі *тензорами першого рангу.*

Варто підкреслити, що *вектор — це не набір трьох скалярних величин.* Двома числами (щільність і температура) можна цілком охарактеризувати стан ідеального газу, як і двома числами (різниці абсцис і ординат двох точок) можна описати переміщення в площині. Але зі зміною системи просторових координат щільність і температура не міняються, тому що вони є скалярами, і тому не можуть утворювати вектор, у той час як різниці координат змінюються при цьому по визначеному закону. Три числа або функції, що визначають вектор, міняються при зміні просторової системи координат, але за таким законом, що в кожній з координатних систем вони визначають один і той же самий вектор.

Закон перетворення компонент вектора. Закон перетворення компонент вектора встановлюється на підставі перетворення трьох чисел Δx_i. Якщо Δx_i — різниці декартових прямокутних координат яких-небудь двох точок у системі *(К),* то різниці координат цих точок $\Delta x'_i$ в іншій декартовій системі *(К')* визначаються згідно з формулою (2.61): $\Delta x_i=\alpha_{i'\,k}\,\Delta x_{k,}$

де $\alpha_{i'k}$ – косинус кута між i'-ю віссю системи *(К')* і k-ю віссю системи (*К*).

Якщо в просторі задані вектор ***А****,* то його компоненти A_i можна знайти, вибравши якусь систему *(К)* декартових координат.

В іншій системі координат *(К')* (рис. 2.31) його компоненти A'_i , природно, будуть іншими хоча сам вектор ***А*** залишається незмінним у тім змісті, що A'_i визначають той же самий вектор (наприклад, швидкість точки *М).*

Так як кожному векторові можна зіставити визначений відрізок у просторі, то компонентам вектора будуть відповідати різниці прямокутних декартових координат початку і кінця цього відрізка . Тому, щоб поняття вектора як деякої величини не залежало від вибору системи координат, необхідно, щоб його компоненти мінялися так само, як згадані різниці координат.

Тоді відповідно до закону (2.61) маємо для компонентів вектора в прямокутних декартових координатах

$$A'_i = \alpha_{i'k}\, A_k$$

Цей закон і лежить в основі аналітичного визначення вектора.

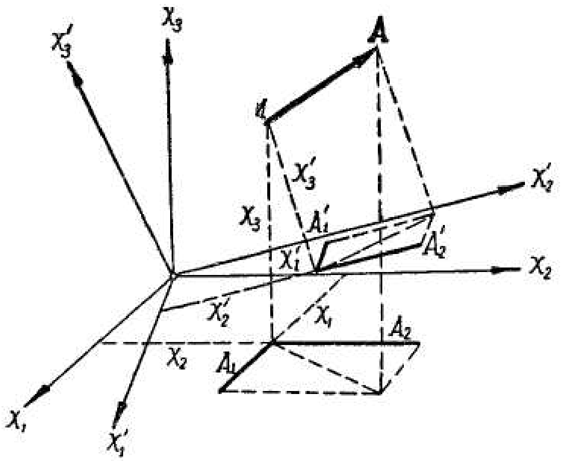


Рис. 2.31. Приклад векторної величини.
Компоненти вектора A_i мають різні значення в різних системах координат**.**

Вектор — це величина, яка обумовлена в будь-якій системі координат трьома числами (або функціями) A_i , які при зміні просторової системи координат перетворюються в A'_I за законом

$$A'_i = \alpha_{i'k}\, A_k. \qquad (2.63)$$

Три величини A_i є компонентами вектора.

Зворотно, якщо зі зміною просторової системи координат три числа A_i міняються за законом (2.63) , то ці числа визначають вектор.

Якщо компоненти вектора задані в одній системі декартових координат *(К),* то, використовуючи закон (2.63) перетворення компонентів вектора, можна визначити компоненти A'_i в будь-якій іншій системі, осі якої складають з осями першої системи кути з косінусами $\alpha_{i'k}$.

Якщо три компоненти вектора обертаються в нуль у якій-небудь системі координат (вектор дорівнює нулеві), то вони дорівнюють нулеві і у будь-якій іншій системі внаслідок однорідності закону перетворення (2.63). Відзначимо, що це визначення вектора еквівалентне визначенню, даному раніше. Однак воно дозволяє

природним чином перейти до поняття величини більш високого рангу — тензорів 2-го і вищих рангів і з єдиної точки зору зупинитися на тензорних властивостях фізичних величин.

Приклад. Нехай у системі *(К)* координати точки x_i змінюються з часом *t,* так що $x_i = x_i(t)$. Тоді за час Δt точка переміситься по осях системи *(К)* на відстань $x_i(t+\Delta t) - x_i\,(t)$.

Ці три величини визначають вектор (вектор переміщення точки), тому що, з огляду на закон перетворення (2.60), в іншій системі (*К′*) одержимо

$$x_i(t+\Delta t) - x_i\,(t) = \alpha_{i'k}[x_k(t+\Delta t) - x_k\,(t)].$$

Розглянемо відношення

$$[x_i(t+\Delta t) - x_i\,(t)]/\,\Delta t. \qquad (*)$$

Три таких відношення (i=1, 2, 3) складають вектор. Дійсно, у системі (*К′*) маємо

$$[x'_i(t'+\Delta t') - x'_i\,(t')]/\,\Delta t\,.$$

Оскільки $t' = t$ і $x'_i = \alpha_{i'k}x_k$, то

$$[x'_i(t'+\Delta t') - x'_i\,(t')]/\,\Delta t = \alpha_{i'k}\,[x_i(t+\Delta t) - x_i\,(t)]/\,\Delta t$$

що і доводить векторний характер відношень (*). Вектор (*) називається середньою швидкістю точки за проміжок часу Δt у системі (*К*).

Сукупність трьох послідовностей (якщо вони існують)

$$V_i = \lim_{\Delta t \to 0}\,[x_i(t+\Delta t) - x_i\,(t)]/\,\Delta t \qquad (**)$$

також визначає вектор. Дійсно, оскільки $\alpha_{i'k}$ не залежать від t, то , переходячи до границі при $\Delta t \to 0$ одержимо

$$V'_i = \lim_{\Delta t' \to 0}\,[x'_i(t'+\Delta t') - x'_i\,(t')]/\,\Delta t = \alpha_{i'k} \lim_{\Delta t \to 0}\,[x_k(t+\Delta t) - x_k\,(t)]/\,\Delta t = \alpha_{i'k}\, V_k.$$

З цього закону перетворення границь випливає, що вони визначають вектор. Вектор (**) називається дійсною швидкістю точки в момент часу t у системі (*К*). Аналогічно, визначаючи дійсне прискорення точки в момент часу t у системі (*К*) як сукупність трьох границь:

$$W_i = \lim_{\Delta t' \to 0}\,\{V_i[(t+\Delta t) - V_i(t)]/\,\Delta t\}\ ;$$

можна установити, що вони також визначають вектор.Тоді, приймаючи, що у всіх координатних системах виконується другий закон Ньютона $mW_i = F_i$ знайдемо, що сила є векторною величиною.

2.11. Тензори 2-го рангу

Як уже відзначалося, деякі геометричні об'єкти, а також цілий ряд фізичних властивостей, вимагають для своєї характеристики більше трьох чисел (або функцій).

Це приводить до поняття величин, тензорні властивості яких складніші, ніж у векторів і скалярів. Такі величини, тензори 2-го рангу, не можуть бути складені у вигляді простого набору векторів або скалярів. Це якісно нові величини, які відповідають фізичному або геометричному змістові описуваних об'єктів.

Тензор напруг. Розглянемо приклад, зв'язаний з описом напруженого стану середовища в точці, яке привело до поняття тензора напруг.

Напружений стан середовища в точці вважається відомим, якщо відома напруга на будь-якій площадці, яка проходить через дану точку.

Вектор напруги $\boldsymbol{p}$ у середовищі є функцією точки і орієнтації площадки, на якій розглядається напруга, тобто

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}\ (\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n}),$$

де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точки, $\boldsymbol{n}$ - орт нормалі до площадки.

Залежність вектора напруги від орієнтації площадки зазвичай відзначається індексом унизу, який вказує напрямлення нормалі до площадки , яка розглядається. Вектор напруги $\boldsymbol{p}$ принципово не підходить для характеристики напруженого стану середовища в *точці,* тому що при цьому треба розглядати нескінченну сукупність $\boldsymbol{p}$ на всіляких площадках, які проходять через точку (рис. 2.32).

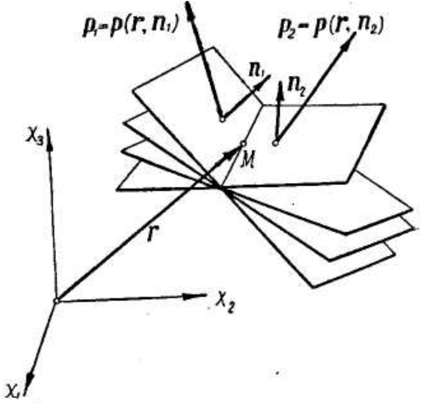


Рис. 2.32. До поняття тензора напруг.

Вектор напруги в суцільному середовищі залежить не тільки від точки, але і від орієнтації площадки, на якій він розглядається, і тому не є однозначною функцією точки. Виявилося можливим визначити таку величину, яка є однозначною функцією точки, тобто не залежить від орієнтації площадки і у той же час дозволяє обчислити напругу на будь-якій площадці з нормаллю $\boldsymbol{n}$*.* Розглянемо вирізаний у середовищі у точки *M* елементарний тетраедр, три ребра якого спрямовані по осях декартової системи координат (рис. 2.33).

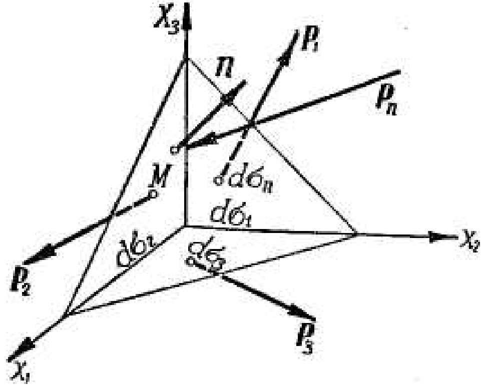


Рис. 2.33. Напруги на гранях тетраедра.

Позначимо площі граней, перпендикулярних до осей (x_1), (x_2), (x_3) системи *(K),* через $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, а похилої грані з нормаллю $\boldsymbol{n}$ — через $d\sigma_n$. Дія середовища на ці грані тетраедра виражається відповідно в напругах $\boldsymbol{p}_{-1}$, $\boldsymbol{p}_{-2}$, $\boldsymbol{p}_{-3}$, $\boldsymbol{p}_n$, прикладених до граней. Тут мінус в індексах у напруг означає, що розглядаються напруги на зовнішніх сторонах граней тетраедра, зовнішні нормалі яких спрямовані протилежно осям (x_1), (x_2), (x_3). Унаслідок рівності дії і протидії сили, які діють на внутрішні сторони граней тетраедра $(\boldsymbol{p}_1 d\sigma_1,\ \boldsymbol{p}_2 d\sigma_2,\ \boldsymbol{p}_3 d\sigma_3)$, рівні по величині і протилежні по напрямленню силам, які діють на зовнішні сторони граней. Звідси маємо:

$$\boldsymbol{p}_1=-\ \boldsymbol{p}_{-1},\ \boldsymbol{p}_2=-\boldsymbol{p}_{-2},\quad \boldsymbol{p}_3=-\ \boldsymbol{p}_{-3}$$

Якщо **W** - прискорення центра інерції тетраедра, $\boldsymbol{f}$ — вектор масових сил, віднесених до одиниці маси, то за законом руху центра інерції тетраедра, масу якого позначимо через *dm,* одержимо

$$\boldsymbol{W}dm=\boldsymbol{f}dm+\boldsymbol{p}_n d\sigma_n+\boldsymbol{p}_{-1}d\sigma_1+\boldsymbol{p}_{-2}d\sigma_2+\boldsymbol{p}_{-3}d\sigma_3=\boldsymbol{f}dm+\boldsymbol{p}_n d\sigma_n-\ \boldsymbol{p}_1 d\sigma_1-\ \boldsymbol{p}_2 d\sigma_2-\ \boldsymbol{p}_3 d\sigma_3.$$

В границі, при стягуванні тетраедра до точки M (унаслідок того, що члени, які містять елемент маси, пропорційної об'єму , є малими більш високого порядку в порівнянні з членами, які містять елемент площі), одержимо

$$\boldsymbol{p}_n d\sigma_n = \boldsymbol{p}_1 d\sigma_1 + \boldsymbol{p}_2 d\sigma_2 + \boldsymbol{p}_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i d\sigma_{i.}$$

(В цих виразах по індексу n підсумовування нема)

Оскільки $d\sigma_i = d\sigma_n cos(\boldsymbol{n}, x_i) = n_i d\sigma_{n,}$

то $$\boldsymbol{p}_n = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{p}_i n_i \equiv \boldsymbol{p}_i n_{i.}$$

Проекції вектора напруги $\boldsymbol{p}_n$ на площадці з нормаллю $\boldsymbol{n}$ на осі системи (K) $p_{nk} = p_{ik} n_i$.

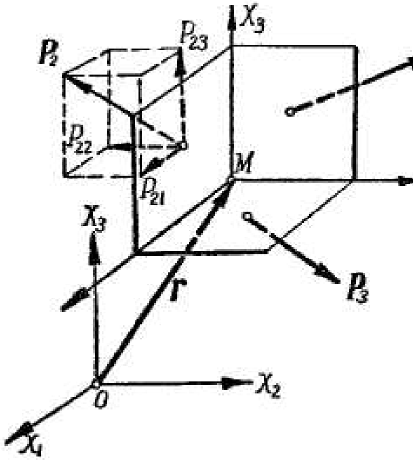


Рис. 2.34. Тензор напруг як сукупність трьох векторів напруг $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ взаємо-перпендикулярних площадках.

Проекції цих векторів на координатні осі представляють дев'ять компонентів тензора напруг.

Тут p_{ik} — сукупність дев'яти напруг, нормальних (при $i=k$) і дотичних (при $i \neq k$) на трьох взаємо-перпендикулярних площадках у точки M (рис. 2.34).

Ці дев'ять величин, вочевидь, ніяк не зв'язані з орієнтацією площадки, на якій визначається напруга $\boldsymbol{p}_{n,}$ а лише з даною точкою середовища, у той же час знання p_{ik} дозволяє обчислити напругу $\boldsymbol{p}_n$ на будь-якій площадці, якщо відомо її орієнтацію $\boldsymbol{n}$. У кожній точці середовища однозначно визначена одна фізична величина, яка визначається дев'ятьма числами $p_{ik,}$ яка і служить вичерпною характеристикою напруженого стану середовища в точці.

Сукупність цих величин p_{ik} визначає тензор 2-го рангу, який має назву *тензора напруг.*

Розглянемо закон перетворення дев'яти величин p_{ik} при зміні системи координат.

Не обмежуючи спільності, можна вважати, що i-а вісь нової системи координат *(К')* спрямована по нормалі $\boldsymbol{n}$ (тому що при визначенні p_{ik} ніяких обмежень на $\boldsymbol{n}$ не накладалося). Якщо $\boldsymbol{i}_l$ $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — орти системи *(К),* а $\boldsymbol{i'}_1$, $\boldsymbol{i'}_2$ $\boldsymbol{i'}_3$ — орти системи (*К'),* то $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i'}_i$.

Проекція $\boldsymbol{n}$ на l-у вісь системи (*К*) дорівнює $n_i = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{i'}_i . \boldsymbol{i}_i = \alpha_{i'i}$, де $\alpha_{i'l}$ косинус кута між i' -ю віссю системи (*К*') і i -ю віссю системи (*К).* Таким чином,

$$\boldsymbol{p}_n \equiv \boldsymbol{p'}_i = \boldsymbol{p}_l n_l = \alpha_{i'l} \boldsymbol{p}_l = \alpha_{i'l}\, \mathbf{i}_m p_{lm.}$$

Спроектуємо цю рівність на k-у вісь системи *(К')*

$$\boldsymbol{p'}_i \cdot \boldsymbol{i'}_k = \alpha_{i'l}\, (\boldsymbol{i}_m \cdot \boldsymbol{i'}_k)\, p_{lm,}$$

або

$$p'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm} p_{lm.}$$

Таким є закон перетворення дев'яти величин p_{ik} при зміні декартової системи координат.

Тензор 2-го рангу. Перш ніж дати визначення тензора 2-го рангу, зупинимося ще на двох прикладах утворення цих величин.

Нехай дано два лінійно залежних вектори $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$. Тоді їхні компоненти пропорційні:

$$A_i = \lambda B_i$$

тобто вектори колинеарні.

У самому загальному випадку лінійна залежність між компонентами двох векторів, один із яких (наприклад, $\boldsymbol{B}$) довільний, у деякій системі *(К)* може бути виражена за допомогою дев'яти коефіцієнтів (ми будемо їх позначати через $a_{ik},(i,k=1,2,3)$) формулами:

$$A_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_{3;}$$
$$A_2 = a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_{3;}$$
$$A_3 = a_{31}B_1 + a_{32}B_2 + a_{33}B_{3;}$$

або скорочено

$$A_i = a_{ik} B_{k.} \qquad (*)$$

В іншій системі *(К')* будуть інші компоненти у векторів і інші числа a'_{ik}, так що в системі *(К')* маємо

$$A'_i = a'_{ik} B'_k. \quad (**)$$

Розглянемо зв'язок між числами a'_{ik} і a_{ik}.

Помножимо кожне з рівнянь (*) на $\alpha_{l'i}$ і підсумуємо по i. Одержимо

$$\alpha_{l'i} A_i = a_{ik}\, \alpha_{l'i}\, B_k.$$

Тоді ліворуч, згідно (2.63), одержимо i-у компоненту вектора ***A*** в системі *(К')*. Таким чином,

$$A'_l = a_{ik}\, \alpha_{l'i}\, B_k.$$

Оскільки

$$B_k = \alpha_{m'k}\, B'_m,$$

то

$$A'_l = \alpha_{l'i}\, \alpha_{m'k}\, a_{ik}\, B'_m,$$

або, що те саме,

$$A'_i = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, a_{lm}\, B'_k.$$

Порівнюючи цей вираз з (**), у силу довільності вектора ***B*** одержимо

$$a'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, a_{lm}.$$

Нагадаємо, що праворуч стоїть подвійна сума по l і m від 1 до 3.

Таким є закон перетворення дев'яти чисел a_{ik} при зміні просторової системи координат. Їхня сукупність, яка визначена в якій-небудь системі координат, завжди визначена і у будь-якій іншій системі.

Інший приклад.

З компонентів двох незалежних векторів ***A*** і ***B*** можна скласти дев'ять добутків вигляду $A_i\, B_k$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

При переході до іншої системи координат *(К')* ці добутки будуть мати інші значення. Виразимо їх через старі значення. Це завжди можна зробити, тому що ми знаємо закон перетворення компонент векторів ***A*** і ***B***. Використовуючи (2.63), одержимо

$$A'_i\, B'_k = \alpha_{i'l}\, A_l \alpha_{k'm}\, B_m = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm} A_l B_m.$$

Таким чином, величини $A_i B_k$ перетворюються при зміні системи координат по тому же закону, що і числа a_{ik} з попереднього приклада.

Величини a_{ik}, $A_i B_k$ представляють приклади тензорів 2-го рангу.

Тензор 2-го рангу — це величина, обумовлена в будь-якій системі координат дев'ятьма числами (або функціями) A_{ik}, *які при зміні системи координат перетворюються в* A'_{ik} *по закону*

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm} A_{lm}. \qquad (2.64)$$

Величини A_{ik} є компонентами тензора 2-го рангу. Якщо компоненти *(*A_{ik}*)* тензора задані в одній декартовій прямокутній системі координат, то по формулі (2.64) можна визначити компоненти *(*A'_{ik}*)* тензора в будь-якій іншій декартовій прямокутній системі, осі якої складають з осями первинної системи кути з косинусами $\alpha_{i'k}$. Якщо усі компоненти тензора обертаються в нуль у якій-небудь системі координат, то вони дорівнюють нулеві в будь-якій іншій системі внаслідок однорідності закону перетворення (2.64). Іноді зручно записувати тензор у вигляді матриці:

$$\left|A_{ik}\right| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad (2.65)$$

Розглянемо кілька прикладів, з яких видно, як деякі геометричні і фізичні об'єкти вимагають для свого опису тензорів 2-го рангу.

Приклад 1. Нехай x_i — компоненти вектора, напрямленого з центра поверхні 2-го порядку, який знаходиться на початку системи декартових координат, до точок цієї поверхні. Тоді рівняння поверхні має вигляд $A_{ik}\, x_i\, x_k = 1$ Числа A_{ik} цілком визначають цю поверхню, причому $A_{ik} = A_{ki}$. Якщо *(К')* — система, повернена відносно *(К)* на кути з косинусами $\alpha_{i'k}$, то $x_i' = \alpha_{i'k} x_k.$

Рівняння поверхні в системі *(К')* має вигляд

$$A'_{ik}\, x_i'\, x_k' = 1.$$

Із закону перетворення величин x_i знаходимо

$$A_{lm}\, x_l\, x_m = A_{lm}\, \alpha_{i'l}\, x_i' \alpha_{k'm} x_k' = (A_{lm}\, \alpha_{i'l} \alpha_{k'm})\, x_i' x_k' = 1.$$

Порівнюючи цю формулу з попередньою, одержимо закон перетворення дев'яти величин A_{ik}

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm}\, A_{lm}$$

з якого заключаємо, що величини A_{ik} утворюють тензор 2-го рангу.

Приклад 2. ***Тензор моментів інерції***.

Вектор моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно початку координат деякої системи координати *(К)*

$$\boldsymbol{L} = \sum_{n=1}^{N} m_n\, (\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{V}_n).$$

Тут m_n — маса n-ї точки, $\boldsymbol{r}_n$ — її радіус-вектор, $\boldsymbol{V}_n$ — її швидкість.

Якщо відстані $|\boldsymbol{r}_n — \boldsymbol{r}_p|$ між точками не змініються (система представляє тверде тіло) і якщо їхні відстані до початку координат також незмінні (тверде тіло має нерухому точку на початку координат), то по формулі Эйлера (див. задачу 10 мікромодуля 4) їхні швидкості можуть бути виражені через миттєву кутову швидкість системи **ω**: $\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{r}_{n.}$

Тоді, з урахуванням (2.19), одержимо

$$\boldsymbol{L}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,[(\boldsymbol{r}_n\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_n)]=\sum_{n=1}^{N} m_n\,[\,\boldsymbol{\omega}\,(\boldsymbol{r}_n\cdot\boldsymbol{r}_n)-\boldsymbol{r}_n\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{r}_n)].$$

або в проекціях ($x_i^{(n)}$ — координати n-ї точки)

$$L_i=\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\,\omega_i\,x_l^{(n)}\,x_l^{(n)}-x_i^{(n)}\,\omega_k\,x_k^{(n)}).$$

Представивши $\omega_i\equiv\delta_{ik}\,\omega_k$ запишемо

$$L_i=\omega_k\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\,\delta_{ik}\,x_l^{(n)}\,x_l^{(n)}-x_i^{(n)}\,x_k^{(n)})=\omega_k I_{ik,}$$

де

$$I_{ik}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\,\delta_{ik}\,x_l^{(n)}\,x_l^{(n)}-x_i^{(n)}\,x_k^{(n)}).\quad(2.66)$$

Дев'ять величин I_{ik} виражаються через моменти інерції I_{x1x1}, I_{x1x2}, ... наступним чином:

$$I_{11}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,[(\,x_2^{(n)}\,)^2+(\,x_3^{(n)}\,)^2]=I_{x1x1;}$$

$$I_{22}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,[(\,x_1^{(n)}\,)^2+(\,x_3^{(n)}\,)^2]=I_{x2x2;}$$

$$I_{33}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,[(\,x_1^{(n)}\,)^2+(\,x_3^{(n)}\,)^2]=I_{x2x2;}$$

$$I_{12}=I_{21}=-\sum_{n=1}^{N} m_n\,x_1^{(n)}\,x_2^{(n)}=-\,I_{x1x2;}$$

$$I_{13}=I_{31}=-\sum_{n=1}^{N} m_n\,x_3^{(n)}\,x_1^{(n)}=-\,I_{x1x3;}$$

$$I_{23}=I_{32}=-\sum_{n=1}^{N} m_n\,x_2^{(n)}\,x_3^{(n)}=-\,I_{x2x3}\,.$$

Покажемо, що дев'ять величин I_{ik} є компонентами тензора 2-го рангу.

Цей тензор називається *тензором моментів інерції* системи.

У якій-небудь іншій системі *(K')* прямокутних декартових координат моменти інерції мають вигляд (рис.2.35)

$$I'_{ik}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\,\delta'_{ik}\,x'^{(n)}_l\,x'^{(n)}_l-x'^{(n)}_i\,x'^{(n)}_k).$$

Розглянемо закон перетворення I_{ik} у I'_{ik} при зміні системи координат. З закону перетворення векторів маємо

$$x'^{(n)}_l\,x'^{(n)}_i=x_l^{(n)}\,x_i^{(n)});$$

$$x'^{(n)}_i\,x'^{(n)}_k=\alpha_{i's}\alpha_{k'r}\,x_s^{(n)}\,x_r^{(n)}).$$

З визначення величин δ_{ik} одержимо, що в системі (K) $\alpha_{l'i}\alpha_{l'k}=\delta_{ik}$, а в системі ($K'$) - $\alpha_{i's}\alpha_{k'r}=\delta'_{ik}$

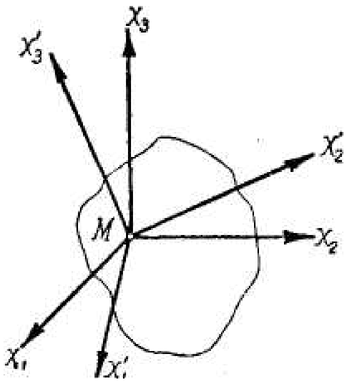


Рис. 2.35. До поняття тензора моментів інерції твердого тіла.

Кожній точці M твердого тіла можна зіставити дев'ять чисел, які утворять тензор моментів інерції.

З огляду на те, що $\alpha_{k's}=\alpha_{k'r}\delta_{sr}$ одержимо

$$\delta'_{ik}=\alpha_{i's}=\alpha_{k'r}\delta_{sr\,.}\qquad(2.67)$$

Таким чином, унаслідок незалежності $\alpha_{i'k}$ від координат

$$I'_{ik}=\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\,\alpha_{i's}\alpha_{k'r}\,\delta_{sr}x_l^{(n)}\,x'^{(n)}_l-\alpha_{i's}\alpha_{k'r}\,x_s^{(n)}\,x_r^{(n)})=$$

$$=\alpha_{i's}\alpha_{k'r}\sum_{n=1}^{N} m_n\,(\delta_{sr}x_l^{(n)}\,x_l^{(n)}-\,x_s^{(n)}\,x_r^{(n)})=\alpha_{i's}\alpha_{k'r}\,I_{sr.}$$

Це доводить, що дев'ять величин I_{ik} утворюють тензор 2-го рангу.

Закон перетворення (2.67) показує, що величини δ_{ik} також утворюють тензор 2-го рангу. Унаслідок його особливої побудови його називають одиничним тензором. Його матриця має вигляд ,

$$|\delta_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2.12. Тензори вищих рангів

Випишемо закони перетворення компонент тензорів нульового, 1-го і 2-го рангів $\varphi' = \varphi$; $A'_i = \alpha_{i'l} A_l$; $A'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, A_{im}$.

Формула перетворення скалярів не містить коефіцієнтів $\alpha_{i'k}$. У формулу перетворення компонент вектора коефіцієнти $\alpha_{i'k}$ входять лінійно (однорідна функція першого степеня відносно $\alpha_{i'k}$). Формула перетворення компонент тензора 2-го рангу є вже однорідною функцією другого степеня відносно $\alpha_{i'k}$.

Як узагальнення, можна дати визначення тензора n-го рангу.

Тензор n-го рангу — це величина, яка обумовлена в кожній системі декартових координат сукупністю 3^n чисел (або функцій) $A_{ikl\ldots}$(n — число індексів), які при зміні системи координат перетворюються за законом

$$A_{ikl\ldots} = \alpha_{i'p}\, \alpha_{k'r}\, \alpha_{i's} \ldots A_{prs\ldots} \quad (2.68)$$

Сума , що стоїть праворуч є однорідним многочленом (формою) степеня n відносно косінусів кутів $\alpha_{i'k}$.

(Формою змінних x_l, x_2,..., x_n називаються вирази

$$c_i x_i \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \text{ – 1-го степеня,}$$

$$c_{ik} x_i x_k \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k\right) \text{-2-го степеня,}$$

$$c_{ikl} x_i x_k x_l \left(\equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} c_{ikl} x_i x_k x_l\right) \text{ -3-го степеня і т.д.)}$$

$A_{ikl\ldots}$ — компонент тензора. Якщо усі вони дорівнюють нулеві в якійсь системі координат, то тензор тотожно дорівнює нулеві.

Розглянемо кілька прикладів тензорів вищих рангів.

Приклад 1. Якщо ***A, B, C*** — три вектори, то $3^3 = 27$ величин

$$D_{ikl} = A_i B_k C_l$$

складають тензор 3-го рангу.

Приклад 2. Нехай A_{ik} і $B_{iк}$ — два тензори 2-го рангу, один із яких (наприклад, $B_{iк}$) довільний, і нехай між компонентами цих тензорів існує лінійна залежність. Її можна записати у вигляді

$$A_{ik} = \lambda_{iklm} B_{lm}$$

де λ_{iklm} – сукупність $3^4 = 81$ коефіцієнта. Можна показати на підставі закону перетворення A_{ik} і B_{ik}, що λ_{iklm} утворюють тензор 4-го рангу, тобто

$$\lambda'_{iklm} = \alpha_{i'n}\, \alpha_{k'p}\, \alpha_{l'r}\, \alpha_{m's}\, \lambda_{nprs}.$$

Компоненти тензора 2-го рангу, утвореного розглянутою раніше сукупністю дев'яти добутків $A_i B_k =\ _{ik}$, (i, k=1, 2, 3) компонент A_i і B_k векторів ***A*** і ***B***, іноді записують у вигляді ***C=AB*** (без знака множення), що називається *діадним добутком.* Цей добуток не має властивість комутативності, і матриця добутку ***BA*** є транспонованою матрицею тензора ***AB***. За аналогією з записом вектора у вигляді $\boldsymbol{A} = A_i \boldsymbol{e}^i$ визначений у такий спосіб тензор можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{C} = A_i B_k \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^k = C_{iк} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^k, \ (i, k=1, 2, 3)$$

Узагальнюючи цей спосіб запису на випадок тензора будь-якого рангу , тензор n-го рангу представляємо у вигляді

$$\boldsymbol{T} = T_{ik\ldots}^{pq\ldots}\ \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^k \ldots \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q \ldots \ (i, k, \ldots, p, q, \ldots, =1, 2, 3)$$

де додавання виконується по всіх індексах i, k, ..., p, q, ...; нагадаємо, що в кожнім одночлені добуток $\boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^k \ldots \boldsymbol{e}_p \boldsymbol{e}_q \ldots$ має визначений порядок .

2.13. Інваріантість тензорних рівнянь

Під інваріантістю рівняння щодо зміни системи координат розуміють незмінюваність його вигляду при переході від однієї системи координат до іншої.

Як було показано раніше, перетворення координат супроводжується перетворенням функцій, які входять у рівняння, за законом, цілком визначеним для кожної функції: для скалярної функції один закон, для векторної — інший і т.д.

Зіставляється початковий вигляд рівняння до перетворення координат з кінцевим його виглядом після перетворення. Якщо говорити узагалі, нові, перетворені функції будуть задовольняти новому рівнянню, яке описує те ж саме явище в новій системі координат. Якщо це нове рівняння має такий же вигляд у нових координатах, як і первісне рівняння в старих координатах, то таке рівняння називається *інваріантним.*

Інваріантість рівнянь, які описують той або інший фізичний закон, є їхньою неодмінною властивістю, тому що закон повинний мати те саме формулювання в будь-якій системі координат внаслідок однорідності і ізотропності реального простору.

Для інваріантості рівнянь необхідно, щоб усі тензори, які входять у вигляді доданків у це рівняння, були тензорами одного рангу.

Вектор не може бути складений зі скаляром, тензор 2-го рангу — з вектором і т.п. Це положення має такий же універсальний характер, як і положення про однакову розмірність доданків у рівняннях.

Рівняння прямої в системі декартових координат має вигляд (див. задачу 4 мікромодуля 4)

$$x_k - a_k - \lambda e_k=0$$

Помножимо кожне з цих рівнянь на $\alpha_{i'k}$ і пісумуємо по k:

$$\alpha_{i'k}\, x_k - \alpha_{i'k}\, a_k - \lambda\, \alpha_{i'k}\, e_k=0$$

Так як x_i, a_i, e_i — компоненти векторів , то , згадуючи закон (2.63), одержимо рівняння прямої в системі (K'):

$$x'_i - a'_i -\lambda\, e'_i =0$$

де x'_i, a'_i, e'_i - компоненти векторів у новій системі координат (K').

Рівняння прямої інваріантне, тому що всі доданки в ньому — вектори — тензори одного рангу.

Другий закон Ньютона справедливий і однаково формулюється в будь-якій з декартових систем координат. Отже, рівняння, які виражають цей закон, повинні мати той самий вигляд у кожній з декартових координат, тобто повинні бути інваріантними в зазначеному змісті. Інваріантість забезпечується тим, що швидкість і сила — вектори, а час і маса (узагалі-то змінна) — скаляри.

Маємо в системі (K)

$$d(mV_i)/dt=F_i$$

У системі (K') одержуємо зовсім аналогічний запис

$$d(mV'_i)/dt=F'_i$$

у силу того , що

$$m=m' ,\quad V'_i= \alpha_{i'k}\, V_k;$$
$$t= t' ,\quad F'_i= \alpha_{i'k}\, F_k.$$

Інваріантістю володіють усі правильно сформульовані фізичні закони.

2.14. Тензорна алгебра

У цьому розділі ми зупинимося на основних алгебраїчних діях над тензорами (додавання, віднімання, множення, згортання) і на деяких властивостях тензорів.

Так як тензор визначається своїми компонентами, то визначення дій над тензорами зводиться до побудови формул, які виражають у кожній системі

координат компоненти результату дії через компоненти тензорів, над якими проводяться дії.

Додавання тензорів. Нехай A_{ik} і B_{ik} — компоненти двох тензорів 2-го рангу.

Зіставимо числа C_{ik} у вигляді сум відповідних компонентів тензорів $C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$.

Числа C_{ik} утворюють тензор 2-го рангу. Дійсно, так як A_{ik} і B_{ik} — компоненти тензорів, то

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, A_{lm};$$
$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, B_{lm};$$

і

$$C'_{ik} =A'_{ik} +B'_{ik}= \alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, (A_{lm} + B_{lm})=\alpha_{i'l}\, \alpha_{k'm}\, C_{lm},$$

тобто C_{ik} утворюють тензор 2-го рангу.

Тензор з компонентами C_{ik} називається *сумою* тензорів з компонентами A_{ik} і B_{ik} , а операція утворення його компонент — *додаванням* цих тензорів.

Правило додавання відноситься до будь-якого числа тензорів будь-якого рангу.

Сумою тензорів одного рангу називається тензор того ж рангу, компоненти якого дорівнюють сумі відповідних компонентів доданків.

Таким чином, складати можна тільки тензори одного рангу.

Аналогічно як і для суми двох тензорів визначається різниця двох тензорів одного рангу і відповідно операція віднімання.

У випадку віднесення тензорів до узагальнених координат при додаванні і віднімані тензорів одного рангу необхідно оперувати компонентами однакової побудови. Таким чином, правильними будуть, наприклад, записи:

$$A^{ik} + B^{ik} =C^{ik},\ A_i^{\cdot k} + B_i^{\cdot k} =C_i^{\ \cdot k},\ \ A^{ik}{}_{..l}+ B^{ik}{}_{..l} =C^{ik}{}_{..l}$$

і т.п.

Унаслідок того, що формули перетворення компонент тензорів при зміні координатної системи і у самому загальному випадку залишаються однорідними щодо коефіцієнтів перетворення і лінійними щодо компонентів тензорів, величини C^{ik}, $C_i^{\cdot к}$ і т.д. попередніх виразів є компонентами тензорів того ж рангу і побудови, що і доданки.

Множення тензорів. Нехай A_{ik} і B_{ik} — компоненти двох тензорів 2-го рангу. Складемо в кожній координатній системі всілякі добутки компонент одного тензора на компоненти іншого. Ці добутки будуть залежати від індексів, число яких дорівнює сумі рангів тензорів A_{ik} і B_{ik}.

Позначимо $C_{iklm} = A_{ik}B_{im}$. Числа C_{iklm} утворять тензор 4-го рангу. Дійсно, так як

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\ \alpha_{k'm}\ A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\ \alpha_{k'm}\ B_{lm};$$

то

$$C'_{iklm} =A'_{ik}\ B'_{lm}= \alpha_{i'n}\ \alpha_{k'p}\ \alpha_{l'r}\ \alpha_{m's}\ A_{np}\ B_{rs}= \alpha_{i'n}\ \alpha_{k'p}\ \alpha_{l'r}\ \alpha_{m's}\ C_{nprs}.$$

Це доводить, що C_{iklm} утворюють тензор 4-го рангу.

Тензор з компонентами C_{iklm} називається добутком тензорів з компонентами A_{ik} і $B_{ik,}$, а операція утворення його компонент — множенням (іноді зовнішнім множенням або тензорним множенням) цих тензорів.

Неважко бачити, що

$$C_{iklm} =A_{ik}\ B_{lm}\ C_{lmik} =A_{lm}\ B_{ik}.$$

Таким чином, тензорне множення некомутативне.

Правило множення відноситься до будь-якого числа тензорів будь-якого рангу.

Добутком декількох тензорів називається тензор, компоненти якого дорівнюють добуткам компонентів співмножників. Ранг добутку тензорів дорівнює сумі рангів співмножників.

У самому загальному випадку координатних систем добутком двох тензорів, обумовлених, наприклад, компонентами $A^i{}_{\bullet kl}$ і B^{ik} , називається тензор з компонентами, обумовленими за правилом

$$C_{\bullet kl}{}^{i\cdot\cdot mn} = A^i{}_{\bullet kl}B^{mn}$$

Використовуючи загальні закони перетворення компонент тензорів, неважко показати, що величини $C_{\bullet kl}{}^{i\cdot\cdot mn}$ утворюють тензор.

Таким чином, перемножувати можна тензори будь-якого рангу і побудови.

Згортання тензорів. У тензорному численні часто застосовується операція згортання тензорів.

Згортанням називається додавання компонентів тензора по двох яких-небудь індексам.

Згортання можна проводити тільки тих тензорів, ранг яких не менш двох.

Нехай A_{ikl} утворюють тензор 3-го рангу. Зробимо згортання його по двох індексах — i і k, тобто візьмемо тільки ті його компоненти, у яких індекси i і k рівні, і складемо з них суми:

$$A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{iil} =A_{11l} +A_{22l} +A_{33l}$$

У результаті згортання тензора A_{ikl} по іншим індексам одержимо суми A_{iki} і A_{ili} . Таких сум кожного вигляду буде три. Наприклад, для A_{ili} маємо:

$$A_{ii1}\ (\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii1}\ );\quad A_{ii2}\ (\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii2}\ );\quad A_{ii3}\ (\equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii3}\ ).$$

Доведемо, що будь-яка така група з трьох сум, наприклад A_{iil} утворить тензор 1-го рангу, тобто вектор.

Так як A_{ikl} утворюють тензор 3-го рангу, то $A'_{ikl} = \alpha_{i'm}\ \alpha_{k'n}\ \alpha_{l'r}\ A_{mnr.}$

Звідси, згортаючи по індексам i і k і з огляду на формулу, аналогічну (2.62), одержимо

$$A'_{iil} = \alpha_{i'm}\ \alpha_{i'n}\ \alpha_{l'r}\ A_{mnr} = \delta_{mn}\ \alpha_{l'r}\ A_{mnr} = \alpha_{l'r}\ A_{mm}.$$

З цієї формули перетворення випливає, що величини A_{iil} визначають вектор.

Сформулюємо загальне правило щодо згортання.

При згортанні по двох індексах тензора рангу n виходить тензор рангу n — 2.

Операцію згортання можна застосовувати до тензора кілька разів, аж доти, поки його ранг не стане менше двох.

Тензор парного рангу може бути згорнутий до скаляра, а тензор непарного рангу — тільки до вектора.

Множення тензорів з наступним згортанням по індексах, які відносяться до різних множників — тензорам, називається іноді скалярним або «внутрішнім» добутком тензорів.

Ми вже приводили приклади «внутрішніх» добутків:

$$\alpha_{ik}\ B_k= A_{i,}$$

$$\lambda_{iklm}\ B_{lm}= A_{ik.}$$

Скалярний добуток двох векторів є добутком двох тензорів 1-го рангу з наступним згортанням.

При згортанні тензорів, компоненти яких розглядаються в узагальнених системах координат, важливо пам'ятати, що *згортання може проводитися тільки по парам різноймених індексів,* тобто один індекс, який згортається, повинний бути «коваріантним», а інший обов'язково «контраваріантним». Це випливає з вимоги про те, що результат згортання тензора повинний залишатися тензором.

Дійсно, нехай, наприклад, ми зробили згортку тензора $A^{\cdot kl}_{i}$ по індексах i і k; тоді величини $A^{\cdot il}_{i}$ будуть компонентами тензора (вектора), тому що в силу

$$A'_{ik} = \alpha^{l}_{i'}\,\alpha^{m}_{k'}\,A_{lm}, \qquad A'^{ik} = \alpha_{l}^{i'}\,\alpha_{m}^{k'}\,A^{lm},$$

$$A_{i}'^{\cdot k} = \alpha^{l}_{i'}\,\alpha_{m}^{k'}\,A_{l}'^{\cdot m}, \quad A'^{i}_{\cdot k} = \alpha_{l}^{i'}\alpha^{m}_{k'}\,A'^{l}_{\cdot m.}$$

де $\alpha^{i'}_{i'}$, $\alpha_{i}^{k'}$ - коефіцієнти прямого і оберненого перетворення (формули 2.4-2.5), а також в силу (2.7) маємо

$$A_{i}'^{\cdot il} = \alpha^{n}_{i'}\,\alpha_{m}^{l'}\,\alpha_{r}^{l'}\,A_{n}^{\cdot mr} = \alpha_{r}^{l'}\,A_{n}^{\cdot nr}$$

«Внутрішній» добуток тензорів, віднесених до довільних систем координат, може бути утворено тільки з компонентів з різнойменними індексами. Наприклад,

$$A_{ik}\,A_{i}'^{\cdot k} = A^{l}; \quad \lambda_{ik}^{\cdot\cdot lm}\,B_{lm} = \lambda_{ik\cdot m}^{\cdot\cdot l}\,B_{l}^{\cdot m} = \lambda_{iklm}\,B^{lm} = A_{ik}$$

Властивість симетрії тензорів. Поняття симетрії відноситься до тензорів рангу не менш двох.

Тензор S_{ikl}... називається *симетричним* по парі індексів, наприклад *i* і *k,* якщо компоненти, які виходять при перестановці цих індексів, рівні один одному, тобто $S_{ikl}\ldots = S_{kil}\ldots$

Таким чином,

$$S_{12l}\ldots = S_{21l\ldots};\ S_{23l} = S_{32l}\ldots..\ \text{і т.д.}$$

Тензор A_{ikl} називається *антисиметричним* по парі індексів, якщо при їхній перестановці компоненти змінюють знак, тобто $A_{ikl} = -A_{kil}$

Таким чином,

$$A_{12l}\ldots = —A_{21l\ldots};\ A_{23l\ldots} = —A_{32l}\ldots\text{і т.д.}$$

В антисиметричного тензора компоненти з рівними індексами, по яких має місце антисиметрія, дорівнюють нулеві.

Якщо $A_{ikl} = -A_{kil}$, то, наприклад,

$$A_{11l}\ldots = —A_{11l\ldots,}\ \text{тобто}\ A_{11l}\ldots = 0\ldots$$

Властивість симетрії або антисиметрії не залежить від вибору системи координат.

Таким чином, тензор, симетричний (антисиметричний) у якій-небудь системі координат, залишається симетричним (антисиметричним) у будь-якій іншій системі координат.

Доведення цього твердження випливає з закону перетворення тензора.

Дійсно, якщо тензор T_{ik} симетричний у системі *(К),* тобто $T_{ik}=T_{ki}$, то

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}\,T_{lm} = \alpha_{i'l}\,\alpha_{k'm}\,T_{ml} = T'_{ki.}$$

Аналогічно доводиться інваріантість властивості антисиметрії стосовно вибору системи координат.

Симетричний S_{ik} і антисиметричний A_{ik} тензори 2-го рангу мають матриці наступного вигляду

$$|\,S_{ik}| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}; \qquad |\,A_{ik}| = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & A_{33} & 0 \end{vmatrix};$$

Антисиметричний тензор 2-го рангу називається бівектором.

Любий тензор T_{ik} може бути представлений у вигляді суми симетричного тензора S_{ik} і антисиметричного A_{ik}

Доведення випливає з очевидної рівності

$$T_{ik} = (1/2)(T_{ik} + T_{ki}) + (1/2)(T_{ik} - T_{ki}). \qquad (2.69)$$

Тензор $S_{ik} \equiv (1/2)(T_{ik} + T_{ki})$ - симетричний, тому що $S_{ik} = S_{ki}$

Тензор $A_{ik} \equiv (1/2)(T_{ik} - T_{ki})$- антисиметричний, тому що $A_{ik} = -A_{ki}$

Твердження доведено.

Перестановка індексів, симетрирування й альтернування. Компоненти тензора, наприклад коваріантного T_{ik}, можна розглядати як елементи квадратної матриці

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix};$$

Якщо в тензорі T_{ik} поміняти місцями індекси, то вийде новий тензор $T_{кi}$, матриця якого

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix};$$

буде транспонованою стосовно матриці T_{ik} (стовпці стануть рядками); сукупність величини T_{ki} буде перетворюватися по формулах (2.64).

Таким чином, найпростіша операція — перестановка індексів — приводить до побудови нового тензора. Очевидно, що для симетричного тензора перестановка індексів приводить до того ж тензора.

Симетрируванням називається операція перестановки пари індексів з наступним додаванням отриманого тензора до вихідного тензора. У результаті виходить тензор, симетричний щодо прийнятої пари індексів.

Альтернуванням називається операція перестановки пари індексів з наступним відніманням отриманого тензора від вихідного, при цьому виходить антисиметричний тензор щодо прийнятої пари індексів.

З (2.69) випливає, що симетрична частина S_{ik} тензора T_{ik} дорівнює половині від результату симетрирування, а антисиметрична A_{ik} — половині від результату альтернування.

Наявність у тензора властивості симетрії зменшує число його незалежних компонентів.

Число незалежних компонентів симетричного тензора 2-го рангу дорівнює шести, антисиметричного 2-го рангу — трьом.

Прикладом симетричного тензора 2-го рангу може служити одиничний тензор δ_{ik}, прикладом антисиметричного тензора 2-го рангу — тензор $C_{ik} = A_iB_k — A_kB_i,$

де A_i і B_i — компоненти двох векторів.

Одиничний тензор. Метричний тензор. Відомий з алгебри символ Кронекера δ_{ik} є тензором 2-го рангу з матрицею

$$|\delta_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \delta_{ik} = \alpha_{l'i}\, \alpha_{l'k} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \neq k; \\ 1, \text{ якщо } i = k. \end{cases}$$

Тензор δ_{ik} носить назву одиничного тензора.

За змістом визначення одиничного тензора його *компоненти рівні або нулеві ($i \neq k$), або одиниці* у всіх координатних системах. Це випливає з визначення δ_{ik} і δ'_{ik}.

Множення δ_{ik} на тензор з наступним згортанням часто використовується в алгебраїчних викладеннях. Наприклад,

$$A_{ik}B_k — B_i = A_{ik}B_k — \delta_{ik}\, B_k = (A_{ik} - \delta_{ik})\, B_k$$

(тому що $B_i \equiv \delta_{ik}\, B_k$)

Можна сказати , що метричний тензор є узагальненням поняття одиничного тензора δ_{ik} . Насамперед помітимо, що квадрат лінійного елемента в прямокутних декартових координатах може бути записаний у вигляді

$$ds^2 = \delta_{ik}\, dx_i dx_k,$$

у той час як у довільних координатах маємо

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i dx^k.$$

Крім того, з визначення

$$\delta_{ik} = \boldsymbol{i}_i \cdot \boldsymbol{i}_k$$

випливає, що компоненти δ_{ik} являють собою косинуси кутів між осями однієї якоїсь координатної системи (декартової прямокутної). Тензор δ_{ik} може бути визначений через $\alpha_{i'k}$ — косинуси кутів між осями двох довільних декартовиих прямокутних систем , причому $\alpha_{i'k} = \boldsymbol{i'}_i \cdot \boldsymbol{i}_k$

У випадку введення довільних базисів, які визначають системи узагальнених координат, компоненти метричного тензора визначаються через усілякі добутки векторів основного і взаємного базисів однієї і тієї ж системи координат:

$$g_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}_k| \cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k);$$
$$g^{ik} = \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}^k = |\boldsymbol{e}^i||\boldsymbol{e}^k| \cos(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^k);$$
$$g_i^{\cdot k} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}^k| \cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^k).$$

При цьому, оскільки вектори $\boldsymbol{e}_i$ і $\boldsymbol{e}^i$ не є ортами, компоненти g^{ik} ,g_{ik}, $g^{\cdot k}_{i}$ визначають косінуси кутів між осями базисів тільки з точністю до множників. Що стосується коефіцієнтів прямого $\alpha_{i'}^{\ k}$, і оберненого $\alpha_i^{\ k'}$ перетворень, то вони також з точністю до множників визначають косінуси кутів між осями різнойменних базисів двох різних систем координат:

$$\alpha_{i'}^{\ k} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{e}^k = |\boldsymbol{e}'_i||\boldsymbol{e}^k| \cos(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}^k).$$
$$\alpha_i^{\ k'} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}'^k = |\boldsymbol{e}_i||\boldsymbol{e}'^k| \cos(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}'^k).$$

Через ці коефіцієнти можуть бути виражені змішані компоненти метричного тензора: $g^{\cdot k}_{i} = \alpha_i^{\ l'} \alpha_{l'}^{\ k}$ (*)

Це випливає, наприклад, з визначення

$$\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} = g_{ik} = g_{ki},$$

$$\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}} = g^{ik} = g^{ki},$$

$$\boldsymbol{e}^k \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} = g_i^{\,k} \equiv \delta_i^{\,k} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \neq k; \\ 1, \text{ якщо } i = k. \end{cases}$$

і з (2.5). Помноживши (2.5) на $\boldsymbol{e}^i$, отримуємо

$$\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} = \sum_{k=1}^{3} \alpha_j^{k'} \boldsymbol{e}'_k \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}},$$

звідки – рівність (*).

З визначення одиничного і метричного тензорів випливає

1) одиничний тензор симетричний ($\delta_{ik}=\delta_{ki}$);

2) метричний тензор симетричний ($g_{ik}= g_{ki}$; $g^{ik}= g^{ki}$).

Мікромодуль 5

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. *Знайти вираз для моменту інерції системи матеріальних точок відносно осі (u) з ортом **u**.*

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати двома шляхами.

Якщо не використовувати поняття тензора моментів інерції, а виходити з елементарного визначення моменту інерції матеріальної точки як добутку маси на квадрат відстані до осі, то

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{u})^2,$$

де N — число точок,

m_n – маса n-ї точки,

$\boldsymbol{r}_n$ —радіус-вектор n-ї точки відносно деякого початку O, узятого на осі *(u)* з ортом $\boldsymbol{u}$ ($|\boldsymbol{u}| = 1$), при цьому $|\, \boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{u} \,|$ — відстань n-ї точки від осі *(u)*.

Перетворимо вираз для I_{uu}, використовуючи (2.16) і (2.19):

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{u}) = \sum_{n=1}^{N} m_n\, \boldsymbol{r}_n\, [\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{r}_n \times \boldsymbol{u})] =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} m_n\, \boldsymbol{r}_n \cdot [\boldsymbol{r}_n - \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{u})] = \sum_{n=1}^{N} m_n\, [\boldsymbol{r}^2{}_n - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{r}_n)^2].$$

Якщо ввести систему (K) з початком у O, то одержимо вираз I_{uu} через координати точок $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$ $(\boldsymbol{r}_n = x_1^{(n)}\boldsymbol{i}_1 + x_2^{(n)}\boldsymbol{i}_2 + x_3^{(n)}\boldsymbol{i}_3)$;

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^{N} m_n\, [x_l^{(n)} x_l^{(n)} - (x_i^{(n)} u_i)^2].\ (*)$$

Цей же вираз можна одержати, якщо в *(K)* відомі компоненти I_{ik} тензора моментів інерції.

Дійсно, якщо прийняти вісь *(u)* за вісь (x_1) деякої системи *(K')*, то по (2.64) маємо $\quad I_{uu} \equiv I'_{11} = \alpha'_{1'i}\, \alpha_{1'k}\, I_{ik}.$

Але $\quad \alpha_{1'k} = \boldsymbol{i}'_1 \cdot \boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{i}_i = \boldsymbol{u}_i.$

Тому $\quad I_{uu} = I_{ik} u_i u_k. \quad (**)$

Підставивши сюди вираз (2.66) для I_{ik}, одержимо формулу (*).

Задача 2. *Показати, що кінетична енергія твердого тіла, яке має нерухому точку й обертається з миттєвою кутовою швидкістю **ω** дорівнює* $\quad T=(1/2)\, \omega^2\, I_{\omega\omega}$,

де $I_{\omega\omega}$ — момент інерції тіла відносно миттєвої осі обертання (осі, яка збігається з ω).

Розв'язання. Використовуючи формулу Эйлера, одержимо

$$T=(1/2)\sum_{n=1}^{N} m_n V^2{}_n = (1/2)\sum_{n=1}^{N} m_n(\omega \times \boldsymbol{r}_n)^2 = (12)\sum_{n=1}^{N} m_n(\omega \times \boldsymbol{r}_n)\cdot(\omega \times \boldsymbol{r}_n).$$

З урахуванням (2.16) і (2.19)

$$T=(1/2)\sum_{n=1}^{N} m_n\, \boldsymbol{\omega}\cdot[\boldsymbol{r}_n \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_n)] = (1/2)\sum_{n=1}^{N} m_n\, \boldsymbol{\omega}\, [(\omega(\boldsymbol{r}_n)^2 - \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{r}_n \cdot \boldsymbol{\omega})] =$$

$$=(1/2)\sum_{n=1}^{N} m_n[(\boldsymbol{\omega}^2 \boldsymbol{r}^2{}_n) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_n)^2].$$

Вводячи орт миттєвої осі обертань $\boldsymbol{\omega}^0 = \boldsymbol{\omega}/\boldsymbol{\omega}$ і з огляду на вираз для I_{uu}, отриманий в попередній задачі, знайдемо

$$T=(1/2)\, \boldsymbol{\omega}^2 \sum_{n=1}^{N} m_n[\boldsymbol{r}^2{}_n - (\boldsymbol{\omega}^0 \cdot \boldsymbol{r}_n)^2] = (1/2)\, \boldsymbol{\omega}^2\, I_{\omega\omega}$$

Використовуючи формулу (**) попередньої задачі, можна представити T через компоненти тензора моментів інерції відносно нерухомої точки і компонента вектора **ω**:

$$T=(1/2)\, \boldsymbol{\omega}^2\, I_{\omega\omega} = (1/2)\, \boldsymbol{\omega}^2\, I_{ik}\, \boldsymbol{\omega}^0{}_i\, \boldsymbol{\omega}^0{}_k = (1/2)\, I_{ik}\, \boldsymbol{\omega}_i\, \boldsymbol{\omega}_k.$$

Задача 3. *Обчислити момент інерції системи відносно осі (v) з ортом* ***v****, якщо вісь (v) паралельна осі (u), яка проходить через центр мас і відносно якої момент інерції системи дорівнює* I_{uu}.

Розв'язання. Виберемо на осі *(v)* деякий початок *O*, відносно якого положення центра мас, який знаходиться на осі *(u),* визначається радіусом-вектором ***R***.

Якщо $\boldsymbol{r}_n$ —радіус-вектор точки з масою m_n відносно початку *O*, а $\boldsymbol{r}'_n$ – радіус-вектор тієї ж точки відносно центра мас, то

$$\boldsymbol{r}_n = \boldsymbol{r}'_n + \boldsymbol{R}.$$

Тоді маємо

$$I_{vv} = \sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}_n \times v)^2 = \sum_{n=1}^{N} m_n[(\boldsymbol{r}'_n + R)\times v]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} m_n[(\boldsymbol{R}\times v)^2 + \sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}'_n \times v)^2 = 2\sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{R}\times v)\cdot(\boldsymbol{r}'_n \times v).$$

Але

$$\sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{v})^2 = \sum_{n=1}^{N} m_n(\boldsymbol{r}'_n \times \boldsymbol{u})^2 = I_{uu};$$

$$\sum_{n=1}^{N} m_n(I_{uu}))\cdot(\boldsymbol{r}'_n \times v) = (\boldsymbol{R}\times v\ v)\cdot[(\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}'_n)\times v] = 0,$$

тому що $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ (осі паралельні) і $\sum_{n=1}^{N} m_n \boldsymbol{r}'_n = 0$ по визначенню центра мас.

Отже $$I_{vv} = I_{uu} + M|\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}|^2;$$

тут $|\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}|$ – відстань між осями, а *M* – маса всієї системи.

Мікромодуль 5
Індивідуальні тестові завдання

1. Нехай система *(К')* з початкового положення, у якому вона збігалася з *(К),* повернена на кут π/6 навколо осі (x_3), а потім на π/2 навколо осі $(x'_1,)$ так, що вісь (x'_2) збігається з (x_3) (рис. 2.36).

Знайти:

1) Компоненти векторів

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}_1 + 2\boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3$$

$$\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i}_1 + 5\boldsymbol{i}_2 + 6\boldsymbol{i}_3$$

у системі *(К')*.

2) Дотичні і нормальні напруги на площадках, перпендикулярних до осей системи *(К'),* якщо в системі *(К)* тензор напруг p_{ik} мав матрицю

$$|p_{ik}| = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}$$

3) Знайти напругу на площадці, яка проходить через бісектрису першого квадрата площини $(x_1,\ x_2)$ під кутом π/4 до осі (x_3) у системі *(К).*

2. Тензор інерції прямого кругового циліндра відносно осей, які проходять через його центр ваги (вісь (x_3) паралельна твірним), має вигляд

$$|I_{ik}| = \begin{vmatrix} l_0 & 0 & 0 \\ 0 & l_0 & 0 \\ 0 & 0 & l_0 \end{vmatrix}$$

Знайти момент інерції циліндра відносно бісектрис координатних кутів.

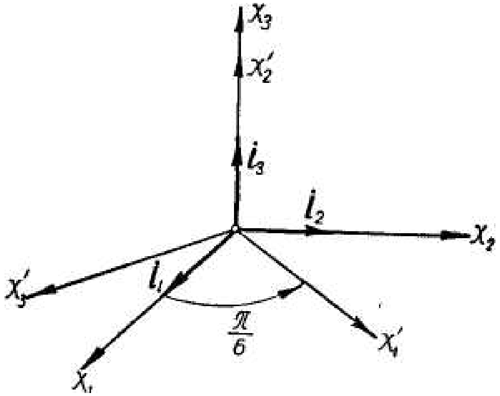


Рис. 2.36. До вправи 1.

3. Якщо A_{ikl}—ковариантні компоненти тензора 3-го рангу, а B^{pqmn} — контраваріантні компоненти тензора 4-го рангу, показати, що величини $A_{ikl}B^{klmn}$ є змішаними (один раз коваріантними, два рази контраваріантними) компонентами тензора 3-го рангу.

4. Якщо V_i— коваріантні компоненти вектора, x^l — узагальнені координати, то перевірити, чи є сукупність дев'яти величин $\partial V_i/\partial x^k$ тензором 2-го рангу

5. Для перетворення координат $q^1= x_1 + x_2,$ $q^2= x_2- x_1,$ $q^3=2x_3,$ де (x_1, x_2, x_3) — прямокутні декартові координати:

1) показати, що (q^1, q^2, q^3)- система декартових координат;

2) знайти базисні вектори;

3) знайти компоненти g_{ik} метричного тензора.

6.Утворити скаляри шляхом згортання тензорів, матриці яких мають вигляд:

$$\begin{vmatrix}1&0&5\\0&6&3\\2&4&3\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}5&0&1\\3&6&3\\4&5&4\end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix}3&5&3\\4&4&4\\3&2&6\end{vmatrix}$$

7. Знайти вектор, утворений множенням тензора T_{ik} на вектор A^i с наступним згортанням по індексу вектора i:

1) першому індексові тензора,

2) другому індексові тензора, якщо

$$\left|T_{ik}\right| = \begin{vmatrix}1&0&2\\3&4&1\\1&3&4\end{vmatrix};\quad A = l_1 + 2l_2 + 3l_3$$

8. Знайти скаляр, утворений множенням тензора T_{ik} на вектори $\boldsymbol{A}$ і **B** з наступним згортанням по індексу вектора $\boldsymbol{A}$ і першому індексові тензора і по індексу вектора $\boldsymbol{B}$ і другому індексові тензора, якщо T_{ik} і $\boldsymbol{A}$ задані умовою попередньої задачі, а $\boldsymbol{B} = 4\boldsymbol{i}_1+ 5\boldsymbol{i}_2 + 6\boldsymbol{i}_3.$

9. Дано: $$\left|T_{ik}\right| = \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix};\quad A=\boldsymbol{i}_1+ 2\boldsymbol{i}_2 + 3\boldsymbol{i}_3$$

Розкласти тензор T_{ik} на симетричний S_{ik} і антисиметричний $K_{ik}=-K_{ki}$

Знайти

1) $T_{ik}A_k;$ $T_{ik}A_i;$ $T_{ik}\, A_iA_k\, ;$

2) $K_{ik}T_{ik};$ $K_{ik}S_{iki};$ $K_{ik}\, A_i;$ $K_{ik}\, A_iA_k;$

3) $T_{ik}\delta_{ik};$ $K_{ik}\delta_{ik};$ $S_{ik}\delta_{ik}$

4) $T_{ik}-(1/3)\delta_{ik}\, T_{ll};$ $[T_{ik}-(1/3)\delta_{ik}\, T_{ll})\, A_i];$ $[T_{ik}-(1/3)\delta_{ik}\, T_{ll})\, A_i\, A]_k;$

5) показати, що якщо S_{ik} — симетричний тензор, а K_{ik} — антисиметричний, то $S_{ik}K_{ik}=0$

10.Знайти інваріанти тензора вправ 6 і 9 .

Модуль 3

Елементи аналітичної геометрії

Мікромодуль 6

Аналітична геометрія на площині

Аналітична геометрія – це область математики, яка розглядає вивчення геометричних задач засобами алгебри на основі методу координат.

3.1. Координати на площині

1. Декартові координати. Декартові координати відомі з курсу середньої школи і вже застосовувалися нами раніше. Декартові координати декількох точок показані на рис. 3.1. Відзначимо, осі координат тут обов'язково беруться взаємно перпендикулярними, одиниця масштабу — однаковою по обох осях, а початок відліку по осях — у точці їх взаємного перетину.

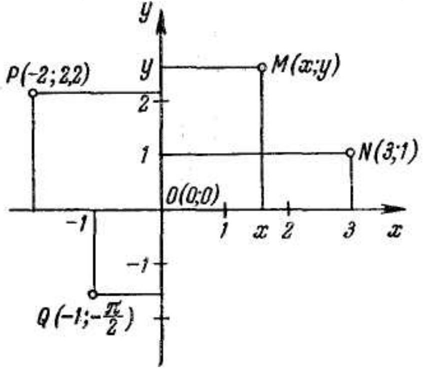


Рис. 3.1.

Кожна точка на площині має цілком визначені координати, і, навпаки, *кожному наборові координат x, y відповідає визначена точка на площині.* Ця основна властивість дає можливість замість точок розглядати їхньої координати.

Осі координат поділяють площину на *четверті (квадранти),* які нумеруються, як показано на рис. 3.2.

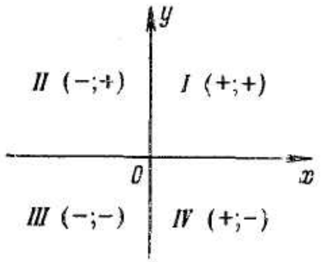


Рис. 3.2.

Для кожної з цих четвертей характерна своя комбінація знаків абсциси й ординати, яка також показана на рис. 3.2.

2. Прості задачі на декартові координати.

1. *Відстань між двома точками.* Нехай дано точки $M_1\ (x_1;y_1)$ і $M_2\ (x_2;y_2)$ (тобто дано координати цих точок); потрібно знайти відстань $d= M_1M_2$ (рис. 3.3).

Формула для цієї відстані випливає з теореми Піфагора, застосованої до прямокутного трикутника M_1M_2P.

Маємо $M_1\ M^2{}_2= M_1P^2+ PM^2{}_2$, тобто $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^{2,}$ або

$$d\ =\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ . \quad (3.1)$$

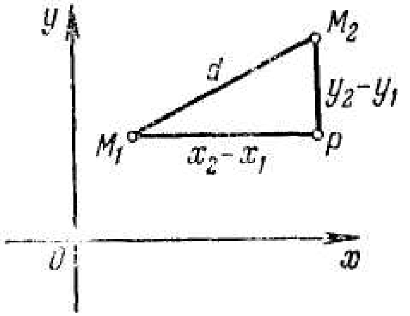


Рис. 3.3.

Ця формула, як і подальші, справедлива при будь-якому розташуванні точок M_1 і M_2.

2. *Поділ відрізка в даному відношенні.* Нехай дано точки $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$; потрібно знайти точку $M(x;\ y)$, яка лежить на відрізку M_1M_2 і ділить його в даному відношенні $M_1M/MM_2=\lambda$ (рис. 3.4).

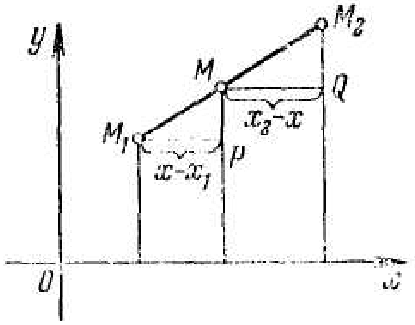


Рис.3.4.

Розв'язання цієї задачі випливає з подоби трикутників M_1PM і MQM_2, якого випливає, що $M_1P/MQ=M_1M/MM_2=\lambda$, тобто

$$(x-x_1)/\ (x_2-x)=\lambda\ ,\ x-x_1=\lambda x_2-\lambda x,$$

звідки остаточно

$$x=(\ x_1+\lambda x_2)/\ (1+\lambda);\ y=(\ y_1+\lambda y_2)/\ (1+\lambda); \qquad (3.2)$$

(вираз для y виводиться аналогічно). Зокрема, якщо $\lambda=1$, тобто при поділі відрізка M_1M_2 навпіл, виходить

$$x=\ (x_1+x_2)/2;\quad y=(y_1+y_2)/2$$

3. *Перехід від однієї декартової системи координат до іншої* без зміни одиниці масштабу. Нехай на площині, крім «старої» системи координат x, y, дана «нова» система координат x',y'; потрібно встановити зв'язок між старими координатами і новими. Ми розглянемо три випадки.

I. Нехай нові осі координат виходять у результаті паралельного переносу старих, причому новий початок координат має старі координати (a; b).

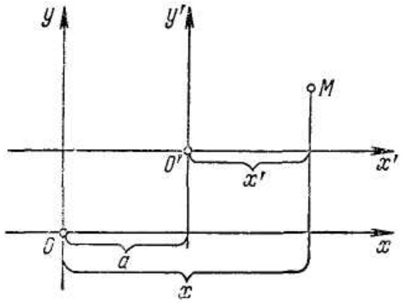


Рис. 3.5.

Тоді з рис. 3.5 одержуємо $x = x' + a$, $y = y' + b$.

II. Нехай нові осі виходять у результаті дзеркального відображення старих, наприклад, відносно осі *y*. Тоді (рис. 3.6)

$$x = — x', \quad y = y'. \quad (3.3)$$

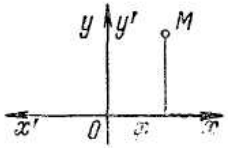


Рис. 3.6.

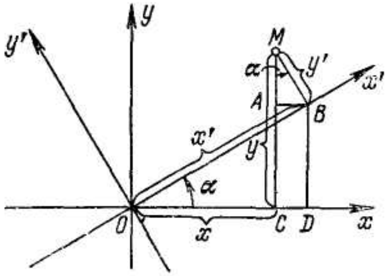


Рис. 3.7.

III. Нехай нові осі виходять у результаті повороту старих навколо початку координат на кут α (рис. 3.7). Тоді з рівностей

$$OC=OD-AB, \ CM=DB + AM$$

одержуємо

$$x = x'cosa — y'sina;$$
$$y=x'\ sin\ a +y'\ cos\ a. \quad (3.4)$$

Загальний випадок переходу від однієї декартової системи координат до іншої зводиться до комбінації розібраних окремих випадків.

3.Полярні координати. Крім декартовиіх, на площині можна

побудувати велике число інших систем координат, тобто способів охарактеризувати положення точки на площині за допомогою двох числових параметрів (координат). Кожна з цих систем уживається там, де це зручніше, а декартова — частіше усіх. Тут ми розглянемо тільки систему полярних координат, яка застосовується, зокрема, при дослідженні обертальних рухів.

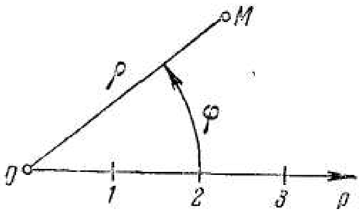


Рис. 3.8.

Для визначення полярних координат треба вибрати полюс *O* і полярну вісь *Op* (рис. 3.8), після чого положення точки *M* характеризується полярним радіусом ρ, тобто відстанню від *O* до *M* і полярним кутом φ (він же називається фазою точки *M*). При цьому полярний кут вважається додатним, якщо він відкладається в додатному напрямку (як правило, проти годинної стрілки). На рис. 3.9 показана побудова декількох точок за даними їхніх полярних координатам; видно, зокрема, що полюс має полярний радіус, який дорівнює нулеві, і зовсім довільний полярний кут. Для характеристики всіх положень точки на площині досить тільки значень — $180° < φ \le 180°$, однак іноді отримуються значення φ за межами цього інтервалу; при додаванні до полярного кута 360° положення точки не змінюється.

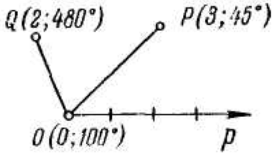


Рис. 3.9.

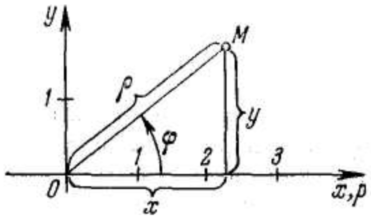


Рис. 3.9-А.

Зв'язок декартових координат з полярними, якщо вони розташовані, як на рис. 3.9-А, такий: $x=\rho cos\varphi$, $y=\rho sin\varphi$;

навпаки, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $tg=y/x$ (3.5)

3.2. Лінії на площині

4. Рівняння лінії в декартових координатах. Як ми бачили раніше *рівняння*

$$F(x,\ y)=0 \qquad (3.6)$$

визначає на площині x, y (тобто на площині, у якій задана декартова система координат *x, y) деяку лінію* (*L*), яка *представляє собою сукупність усіх точок, координати яких задовольняють даному рівнянню* (3.6); при цьому співвідношення (3.6) називається *рівнянням лінії* (*L*). Якщо, навпаки, спочатку дана лінія *(L)* на площині *x, y,* то, формулюючи аналітично геометричну властивість, яка визначає цю лінію, ми одержуємо рівняння лінії (*L*) у формі (3.6). (При цьому треба мати на увазі, що кожне рівняння можна переписати в різних рівносильних формах.) Це дає можливість замість ліній розглядати їхні рівняння і тим самим зводити геометричні задачі до алгебраїчних, котрі, як правило розв'язуються значно простіше й одноподібно ніж перші. Наприклад, *щоб перевірити, чи проходить лінія з рівнянням* (3.6) (говорять просто "лінія *F(x,y)*=0") *через деяку точку* (*a;b*), досить *підставити координати цієї точки в рівняння лінії і перевірити, чи задовольниться воно, тобто чи буде F(a,b)*=0.

Розглянемо, наприклад, *доведення рівняння кола* (рис. 3.10).

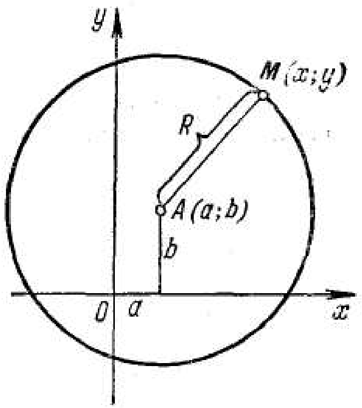


Рис. 3.10.

Нехай його центр *A* має координати *(a; b),* а *M(x; y)* - люба (поточна) точка на колі. Тоді властивість, яка визначає коло, можна записати так: *AM=R,* де *R* — радіус даного кола. Застосовуючи формулу (3.1) для відстані між двома точками одержимо

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

або, підносячи до квадрата,

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0.$$

Це і є співвідношення, якому задовольняють координати всіх точок, тобто рівняння даного кола.

У ньому *a*, *b* і *R-фіксовані* числа (параметри, які визначають положення і розміри кола), а *x* і *y* — змінні *поточні координати* точки кола. Нехай, навпаки, задано рівняння, наприклад, вигляду

$$x^2+y^2+3x+4y—1=0. \quad (3.7)$$

За допомогою доповнення до повного квадрата одержуємо

$$(x—3/2)^2-(3/2)^2+(y+2)^2-2^2-1=0,\ (x-3/2)^2+(y+2)^2-29/4=0.$$

Виходить, дане рівняння - це рівняння кола з центром у точці (1,5; —2) і радіусом √29/4 = 2,69.

Якщо дано дві лінії з рівняннями $F_1(x,\ y)=0$ *і* $F_2\ (x,\ y=0,$ то може виникнути задача про *знаходження точки перетину* цих ліній. Так як шукана точка повинна належати обом лініям, то її координати *x, y* повинні задовольняти рівнянням обох ліній. Таким чином, для знаходження цих координат *треба розв'язати систему рівнянь:*

$$F_1(x,y)=0,$$

$$F_2(x,y)=0. \qquad (3.8)$$

Число розв'язань і дасть число шуканих точок перетину; звичайно, кожне розв'язання складається із вказаного значення *x* і значення *y*.

Нехай, наприклад, потрібно знайти точку перетину кола (3.7) із прямою *y=x+b,* де *b* — деяка стала. Для цього треба розв'язати систему рівнянь:

$$x^2+y^2-3x+4y-1=0,$$

$$y=x+b.$$

Якщо підставити y із другого рівняння в перше, розкрити дужки і розв'язати отримане квадратне рівняння відносно x, то після перетворень одержимо

$$x_1=\frac{-1-2b+\sqrt{9-28b-4b^2}}{4};\quad y_1=\frac{-1+2b+\sqrt{9-28b-4b^2}}{4};$$

$$x_2=\frac{-1-2b-\sqrt{9-28b-4b^2}}{4};\quad y_2=\frac{-1+2b-\sqrt{9-28b-4b^2}}{4}.$$

Подивимося, при якому значенні b обидві точки перетину збігаються. Для цього підкореневе значення повинне дорівнювати нулеві, звідки одержуємо $b_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{58}}{2}$,тобто b_1=0,31, b_2=-7,31. При цих значеннях b пряма $y=x+b$ дотикається заданого кола (рис. 3.11).

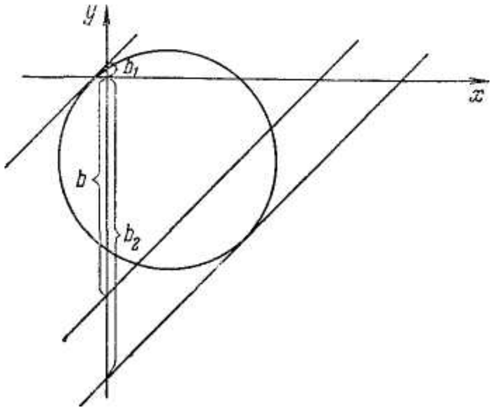


Рис. 3.11.

При $b_2 <b < b_1$ точок перетину дві: $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$. При інших b пряма не перетинає коло (підкореневий вираз виявляється від'ємним). І в

інших прикладах збіг двох точок перетину, координати яких знайдені із системи (3.8), зазвичай свідчить про те, що в цій загальній точці обидві задані лінії *дотикаються* одна до одної, тобто мають у цій точці одну і ту саму дотичну.

5. Рівняння лінії в полярних координатах. У будь-якій системі координат на площині рівняння між цими координатами визначає деяку лінію (виключення будуть зазначені в п. 8). Розглянемо, зокрема, полярні координати. Ми будемо вважати, що рівняння розв'язане відносно ρ, тобто має вигляд $\rho=f(\varphi)$ (3.9). Придаючи φ числові значення і знаходячи відповідні значення ρ, одержимо точки, які утворять лінію на площині — графік функції (3.9) у полярних координатах.Розглянемо два приклади. Графік лінійної залежності $\rho=a\varphi+b$ зображено на рис. 3.12; це — *спіраль Архімеда.* Вона виходить при накладенні рівномірного обертання і рівномірного руху уздовж по радіусу, так як якщо

$$\rho=vt+b,\ \varphi=\omega t\ \text{,то}\ \rho=(v/\rho)\varphi+b.$$

Отже, графік однієї і тієї ж функції (у даному випадку лінійної) у полярних координатах і в декартових має зовсім різний вигляд.

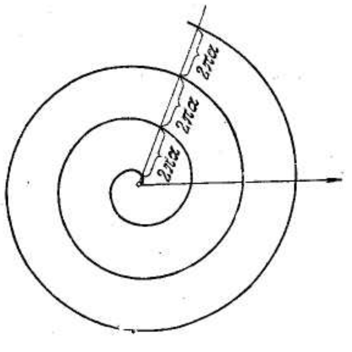


Рис. 3.12.

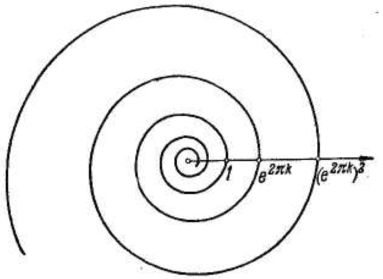


Рис. 3.13.

Графік показникової функції $\rho=e^{k\varphi}$ у полярних координатах зображено на рис. 3.13. Це - *логарифмічна спіраль.* Вона нескінченно накручується на полюс, ніколи його не досягаючи. Логарифмічна спіраль має ряд цікавих властивостей. Наприклад, якщо її піддати *подібному перетворенню,* тобто всебічному рівномірному розтягуванню в *m* раз *(m — коефіцієнт подоби),* то вийде лінія з рівнянням $\rho=me^{k\varphi}$.

Але $$\rho=me^{k\varphi}=e^{k(\varphi+\frac{\ln m}{k})}=e^{k(\varphi+\alpha)}.$$

де $\alpha=(\ln\ m)/k$, тобто вийде такий же результат, як якщо вихідну спіраль повернути навколо полюса по годинній стрілці на кут α радіан, так як графік $\rho=f(\varphi+\alpha)$ виходить із графіка $\rho=f(\varphi)$ поворотом навколо полюса на кут α радіан у від′ємному напрямленню. Таким чином, логарифмічна спіраль сама собі подібна з будь-яким коефіцієнтом подоби. З інших ліній на площині цією властивістю володіє тільки пряма.

На закінчення скажемо про *координатні лінії,* тобто про лінії, на яких одна або інша координата зберігають стале значення. У декартових координатах координатні лінії утворюють два сімейства прямих, паралельних одній або іншій з осей координат. У полярних координатах лінії ρ=const утворюють сімейство концентричних кіл, а лінії φ=const – сімейство променів, що виходять з полюса (рис. 3.14).

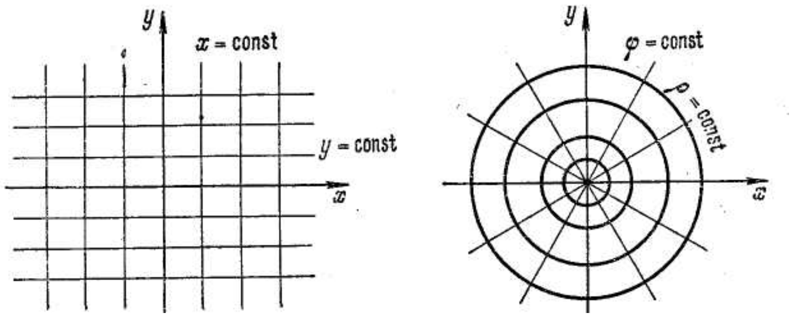


Рис. 3.14.

6. Параметричне завдання ліній і функцій. Буває, що обидві координати, наприклад декартові, виявляються заданими як функції деякої третьої змінної, яку ми позначимо буквою *t:*

$$x=\varphi(t);y=\psi(t).\quad(3.10)$$

Ця змінна є параметром, який визначає положення точки *(x; y)* на площині; коли *t* змінюється, то точка на площині переміщується, описуючи деяку *лінію (L)* (рис. 3.15), *задану,* таким чином, у *параметричному вигляді* (3.10). Так буває ,наприклад,при дослідженні руху точки в площині; тоді параметр *t*—час, формули (3.10) визначають *закон руху,* а лінія *(L)* називається *траєкторією.* В інших прикладах параметр може мати інший зміст, однак і тоді його можна для себе розглядати так, начебто він є часом. Відзначимо, що та сама лінія *(L)* може вийти при різних рівняннях (3.10), так як закони руху по одній і тій же траєкторії можуть бути різними (так, закони руху студентів уздовж траєкторії від трамвайної зупинки до інституту за 22 і за 2 хвилини до початку занять)

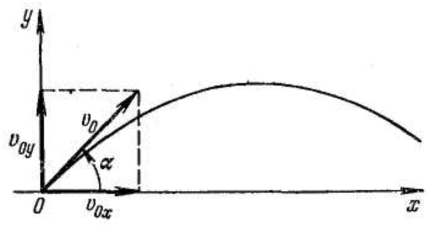


Рис. 3.15.

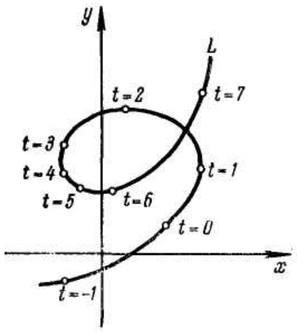


Рис. 3.16.

Щоб перейти до рівняння лінії (*L*) у загальній формі (3.6), треба з двох рівнянь (3.10) виключити параметр (наприклад, з першого рівняння виразити *t* через *x* і підставити результат у друге або як-небудь інакше). Однак це не завжди можливо і не завжди доцільно, так що часто приходиться залишати параметричну форму. Рівняння (3.10) задають визначену функціональну залежність *y(x),* так як якщо задати значення *x,* то з першого рівняння визначиться значення *t* (може бути, не одне), а з другого — відповідне значення (або відповідні значення) *у*. Ця *функція у(х)* виявляється *заданою в параметричному вигляді,* а графіком її служить лінія (*L*).

Приклад 1. Розглянемо політ снаряда без урахування опору повітря і кулястості і обертання Землі (рис.3.16). Якщо початкова швидкість дорівнює v_0, а кут пострілу α, то горизонтальна складова швидкості буде увесь час дорівнювати $v_{0x}=v_0\cos a$, тоді як вертикальна складова швидкості увесь час змінюється. Так як рух по вертикалі відбувається зі сталим прискоренням g земного тяжіння, то шлях, пройдений по вертикалі, відрізняється від вільного шляху, який відповідає швидкості $v_{0y}=v_0\sin\alpha$, на $gt^2/2$ (це доводиться в курсі механіки). Таки чином одержуємо закон руху в площині x, y:

$$x = (v_0 \cos \alpha)\, t,\ y = (v_0 \sin \alpha)\, t — gt^2/2.$$

Це і є закон руху, що дає одночасно траєкторію в параметричному вигляді. Крім t, одержимо

$$y = (\,\mathrm{gt}\ \alpha)x - \frac{gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}; \qquad (3.11)$$

так як залежність $y(x)$ квадратична, то *траєкторією буде служити парабола.*

Приклад 2. Розглянемо траєкторію точки кола, яке котиться без ковзання по прямої лінії (на рис.3.17 пунктиром показано положення кола в початковий момент, а суцільною лінією – деяке поточне положення

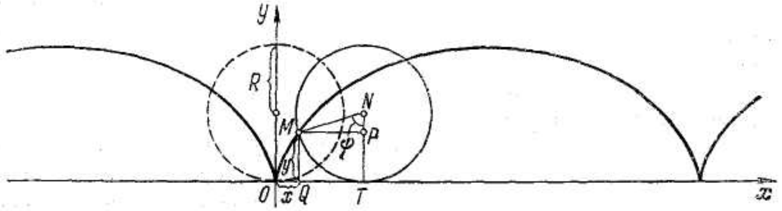


Рис. 3.17.

Виберемо за параметр кут ψ повороту кола. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &x=OQ=OT-QT=\breve{M}\breve{T}-MP=R\psi-R\sin\psi; \quad x=R(\psi-\sin\psi);\\ &y=OM=TN-PN=R-R\cos\psi; \quad y=R(1-\cos\psi); \end{aligned}\right\}(3.12)$$

тут відрізок OT прирівняно дузі MT відповідно до умови відсутності ковзання. Вийшли параметричні рівняння лінії, яка називається *циклоїдою,* від грецького «киклос» — коло; вона нескінченна і має точки повернення (рис. 3.17).

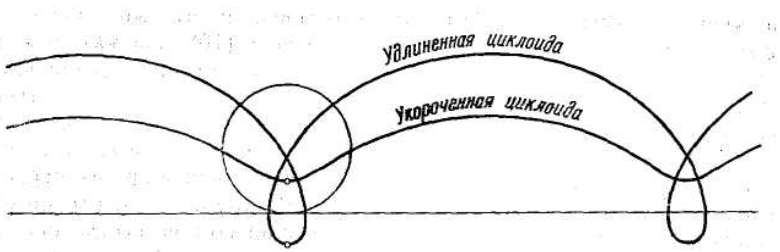


Рис.3.18.

Циклоїда є однією з найпростіших *рулетт,* тобто кривих, яку описує на нерухомій площині точка, яка жорстко зв'язана з однією з двох яких-небудь ліній, коли та без ковзання котиться по іншій. Іншими прикладами рулетт є *укорочена* і *подовжена циклоїди* (рис. 3.18), які описуються точкою, яка знаходиться відповідно усередині або поза колом, яке котиться по прямій лінії (при цьому подовжена циклоїда має *точки самоперетину); гіпоциклоїди і эпіциклоїди,* які описує точка кола, яка котиться по іншому колі зсередини і ззовні (рис. 3.19), і т.д.

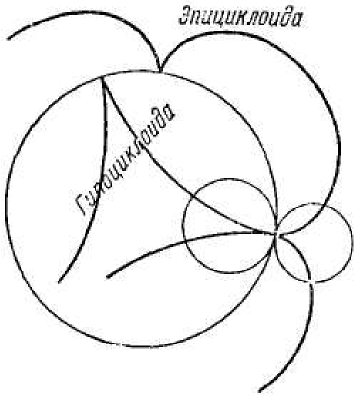


Рис.3.19.

Гіпоциклоїда при співвідношенні радіусів 1:4 називається *астроїдою,* від грецького «астрон» — зірка, а при 1:2 перетворюється у відрізок прямої; эпіциклоїда при 1:1 називається *кардіоїдою* від грецького «кардіа» — серце; ці лінії і їхні рівняння, показані на рис. 3.20 і рис.3.21. Усі ці лінії мають велике значення в теорії механізмів.

7. Алгебраїчні лінії. Якщо рівняння лінії *(L)* у декартових координатах *x, y* має вигляд

$$P(x, y)=0, \quad (3.13)$$

де *P*—многочлен степеня *n,* то говорять, що *(L)*- алгебраїчна *лінія порядку n.* Неалгебраїчна лінія називається трансцендентною. Так, графік лінійної функції, тобто пряма лінія,- це алгебраїчна лінія першого порядку, а квадратична парабола й коло — лінії другого порядку, кубічна парабола і напівкубічна парабола (рівняння $y=x^{2/3}$ останньої необхідно переписати у вигляді $y^3—x^2= 0$, щоб ийшло рівняння у вигляді (3.13)) — це алгебраїчні лінії третього порядку. З іншого боку, синусоїда, тангенсоїда, графік показникової функції — це трансцендентні лінії.

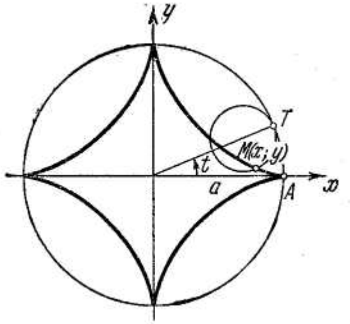


Рис. 3.20.

Астроїда. З рівності $\smile TM=\smile TA$ виведіть рівняння $x=cos^2\, t,$ $y=a\, sin^2\, t.$

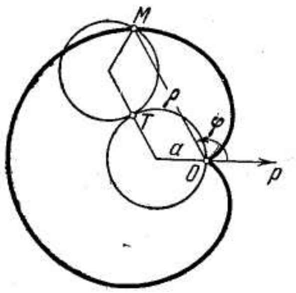


Рис. 3.21.

Кардіоїда. З рівності $\smile TM=\smile TO$ виведіть рівняння $\rho=2a(1\text{-}\cos\varphi)$

Як приклад ліній четвертого порядку розглянемо *овали Кассині,* введені астрономом Кассині (рис. 3.22).

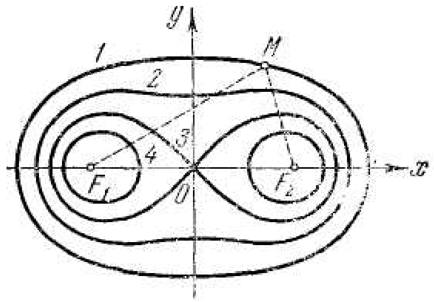


Рис. 3.22.

Такий овал визначається як сукупність точок площини, добуток відстаней яких від двох даних точок F_1 і F_2 цієї площини є величина стала. Розташувавши осі координат, як на рис. 3.22, і позначивши координати точок $F_1(—a;\,0)$, $F_2\,(a;\,0)$, $M\,(x;\,y),$ а заданий добуток відстаней через $b^2,$ одержуємо по формулі (3 . 1)

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=b^2,$$

звідки легко вивести остаточне рівняння:

$$(x^2+y^2)^2—2a^2\,(x^2—y^2)=b^4\text{-}\,a^4.$$

У важливому окремому випадку, коли *b=a,* лінія має вигляд вісімки і називається *лемніскатою;* вона була відкрита в 1694 р. швейцарським математиком Я. Бернуллі. Перейшовши до полярних координат по формулах (3.5), одержимо рівняння лемніскати $\rho^2=2a^2cos2\varphi$. При $0 < b < a$ овал Кассині складається з двох шматків.

Треба відзначити, що при визначенні порядку лінії мова йде неодмінно про рівняння в декартових координатах. Так, рівняння архімедової спіралі в полярних координатах (див. п. 5) має перший степінь, але якщо його переписати в декартових координатах

$$\sqrt{x^2+y^2}=arctg(y/x+b),$$

то видно, що ця спіраль - трансцендентна лінія. Трансцендентні і всі інші спіралі і узагалі всі нескінченні лінії, які володіють тою або іншою властивістю періодичності.

Порядок алгебраїчної лінії не змінюється при заміні в площині однієї декартової системи координат на іншу.

Дійсно, наприклад, при рівнобіжному переносі (див. п. 2) рівняння даної лінії набирає вигляду

$$P(x'+a,\ y'+b)=0$$

Після розкриття дужок і приведення подібних членів степінь отриманого многочлена не може вийти вище вихідної (нема звідки). Могло б показатися, що при приведенні подібних членів загальний степінь многочлена може понизитися, якщо старші члени взаємно знищаться. Але цього не може відбутися, оскільки тоді при зворотному переході від x', y' до x, y степінь многочлена повинен був б знову підвищитися, а ми тільки що бачили, що цього не може бути. Аналогічна картина буде при перетвореннях іншого вигляду.

Так як заміна координат при нерухомій лінії приводить до того ж результату, що і рух лінії при нерухомих осях координат, то *порядок алгебраїчної лінії залишається інваріантним* (незмінним) *при русі цієї лінії як цілого.*

Величина або взагалі який-небудь об'єкт, який не міняється при тих або інших перетвореннях, називається *інваріантом цих* перетворень (або інваріантом щодо цих перетворень). Так, площа є інваріантом рухів, а кути — інваріантом не тільки рухів, але також і перетворень подоби. Як ми бачимо, порядок алгебраїчної лінії також є інваріантом рухів.

8. Особливі випадки. Для деяких рівнянь вигляду $F(x, y)=0$ на площині x, y може вийти щось, зовсім несхоже на те, що прийнято називати лініями. Пояснимо це на прикладах.

Рівнянню $x^2+y^2+1=0$ на площині не задовольняє жодна точка, так як при будь-яких x, y ліва частина додатна. Говорять, що це — *уявна лінія,* так як якщо допускати уявні числа, то можна покласти, наприклад, $x=i, y=0$ і т.п. Але ця назва не змінює того, що дана лінія «фігури не має».

Рівнянню

$$x^2+y^2=0 \qquad (3.14)$$

на площині задовольняє єдина точка: $x=0$, $y=0$ (початок координат). Якщо порівняти це рівняння з рівнянням

$$x^2+y^2-R=0 \quad (3.15)$$

(див. п. 4), то виходить як би рівняння кола нульового радіусу. Узагалі, якщо який-небудь об'єкт залежить від параметрів і при деяких значеннях цих параметрів якісно міняється, утрачаючи які-небудь досить істотні властивості, то говорять, що при цих значеннях відбувається *виродження* даного об'єкта. Коло (3.15) залежить від параметра R; при $R=0$ воно вироджується в точку (3.14), утрачаючи найважливішу властивість — бути лінією.

Рівняння алгебраїчної лінії другого порядку

$$x^2-y^2=0 \qquad (3.16)$$

можна переписати у вигляді $(y-x)(y+x)=0$.

Але добуток дорівнює нулеві, якщо дорівнює нулеві який-небудь із множників. Тому або $y-x=0$, тобто $y=x$, або $x+y=0$, тобто $y=-x$ (рис. 3.23). Кожне з цих рівнянь визначає пряму лінію на площині x, y. Таким чином, точка, яка задовольняє рівнянню (3.16), лежить або на одній прямій, або на іншій. Отже, лінія, яка обумовлена рівнянням (3.16), представляє собою пари прямих, як говорять, *розпадається* на пари прямих; лінія другого порядку розпалася на пари ліній першого порядку. Ні в якому разі не можна вважати, що гіпербола теж розпадається; вона складається з двох шматків, кожний з яких являє собою половину гіперболи, і обоє вони мають єдине рівняння. У випадку ж рівняння (3.16) кожна з отриманих двох прямих має зовсім самостійне рівняння. Ясно, що таким шляхом можна об'єднати дві зовсім довільні лінії, $F_1(x, y)=0$ і $F_2(x, y)=0$; для цього досить написати рівняння

$$F_1(x, y)F_2(x, y)=0.$$

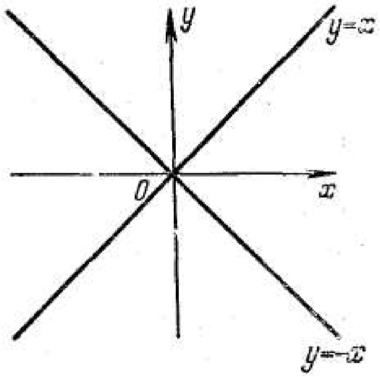


Рис. 3.23.

Також не можна вважати розпаданням розкладання параболи на верхню і нижню половини на основі формули

$$y^2 — x=(y- \sqrt{} x)(y- \sqrt{} x), \qquad (3.17)$$

яка замість $y^2 — x=0$ дає $y_{1,2}=\pm\sqrt{x}$. Справа в тому, що розпадання виходить, коли многочлен у лівій частині (35.13) розкладається на добуток *многочленів,* а множники в правій частині (3.17) не є многочленами .

3.3. Алгебраїчні лінії перших двох порядків

9. Лінії першого порядку. З п. 7 ми бачимо, що для одержання лінії першого порядку треба прирівняти нулеві многочлен першого степеня. Він може містити тільки члени першого степеня і вільний член. Тому рівняння лінії першого порядку в загальному вигляді таке:

$$Ax+By+ C=0. \quad (3.18)$$

Тут може бути два випадки. Якщо $B\neq 0$, то, виконуючи ділення на B і позначаючи

$$-(A/B)=k; \;\; -(C/B)=b \quad (3.19)$$

одержимо

$$y = kx +b. \quad (5.20)$$

Раніше ми бачили, що це — рівняння прямої лінії (там замість k стояло a, що несуттєво), зображеної на рис. 3.24.

Якщо ж $B=0$, то, поділивши на A і позначивши —$(C/A)=a$, одержуємо рівняння $x=a$, тобто пряму, паралельну осі y. Відзначимо, що для таких прямих кутовий коефіцієнт k=tg$\pi/2=\pm\infty$, що також випливає з виразу (3.19), а рівняння записати у формі (3.20) неможливо.

Отже, *лінії першого порядку — це прямі лінії.*

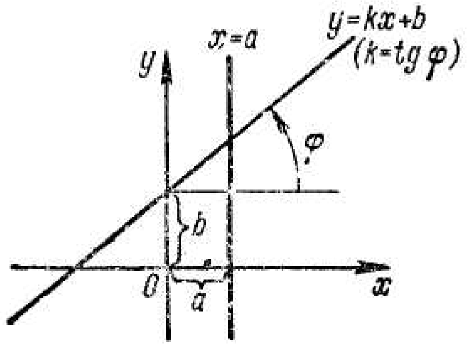


Рис. 3.24.

Розглянемо деякі прості задачі на прямі лінії.

1. *Через дану точку (x_1, y_1) провести пряму з даним кутовим коефіцієнтом k.* Звичайно, в аналітичній геометрії «провести пряму» означає «написати рівняння прямої». Шукане рівняння має вигляд (3.20), але b у ньому невідомо. Однак раз пряма проходить через дану точку, то координати цієї точки повинні задовольнити рівнянню прямій: $y_1= kx_1+b$.

Виконуючи віднімання, виключаємо b і одержуємо шукане рівняння

$$y\text{-}y_1=k(x\text{-}x_1). \quad (3.21)$$

Якщо в цьому рівнянні змінювати k, то ми одержимо пучок усіляких прямих, які проходять через точку (x_1; y_1). Можна покласти і $k=\pm\infty$, тобто одержати вертикальну пряму; однак для цього треба попередньо обидві частини поділити на k, тоді після підстановки просто вийде $0=x—x_1$, тобто $x=x_1$. Аналогічні обережності приймаються й в інших задачах, коли параметри приймають нескінченні значення.

2. *Провести пряму через дві задані точки (x_1, y_1)* і (x_2; y_2). Рівняння шуканої прямої має вигляд (3.21), але k невідоме. Однак з умови проходження через другу точку одержуємо $y_2 — y_1= k(x_2 — x_1)$, звідки, виконуючи ділення, виключаємо k:

$$(y\text{-}y_1)/(y_2\text{-}y_1)= (x\text{-}x_1)/(x_2 \text{-}x_1). \quad (3.22)$$

Відзначимо, що в цьому рівнянні, як і в (3.21), x і y — це змінні координати поточної (якої завгодно) точки шуканої прямої.

3. *Знайти кут між прямими з даними кутовими коефіцієнтами* k_1 *і* k_2 . Розв'язання видно з рис. 3.25:

$$tg\,\alpha = tg\,(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\,\varphi_2 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (3.23)$$

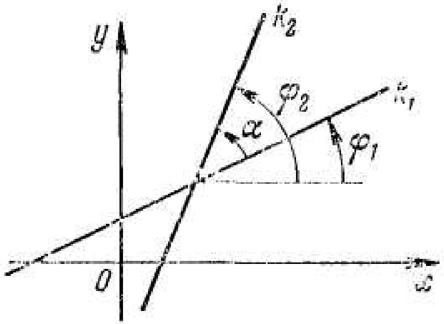


Рис. 3.25.

4.Умова *паралельності двох прямих* очевидна: $k_1=k_2$.

5. *Умова перпендикулярності двох прямих* випливає з задачі 3: для перпендикулярних прямих $\alpha=\pi/2$; але $tg\pi/2 = \pm\infty$, звідки

$$1+ k_1 k_2 = 0 \text{ або } k_2 = -(1/k_1) .$$

10. Еліпс. *Еліпсом називається сукупність усіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини* (які називаються *фокусами* цього еліпса) *є величина стала.*

З цього визначення випливає спосіб побудови еліпса за допомогою натягнутої нитки, показаний на рис. 3.26 і який дає представлення про форму еліпса: це замкнута опукла лінія з двома осями симетрії, які називаються *головними осями* еліпса, і з центром симетрії , який називається *центром еліпса.* Для виведення рівняння еліпса в найбільш простому вигляді розташуємо осі координат так, як показано на рис. 3.26, і позначимо

$$F_1F_2 = 2c, \qquad r_1+r_2 \text{ (= const)} = 2a.$$

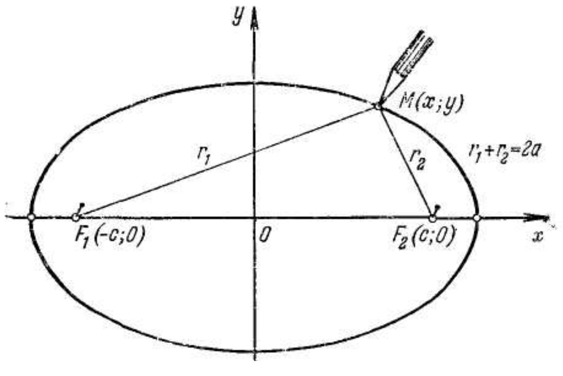


Рис. 3.26.

Тоді за допомогою формули (3.1) для відстані між точками рівняння еліпса можна написати у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

звідки одержуємо послідовно

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$(x+c)^2 + y^2 - 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx; \quad a^2[(x-c)^2 + y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2;$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (3.24)$$

З трикутника F_1MF_2 видно, що $2a>2c$, тобто a^2-c^2>0. Позначимо для стислості a^2-c^2=b^2. Тоді з рівності (3.24) одержимо так називане *канонічне рівняння еліпса*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad (3.25)$$

З цього рівняння знову видно, що осі координат служать осями симетрії еліпса, так як якщо точка *(p; q)* задовольняє рівнянню (3.25), то і точки (*-p;q*), (*-p;—q)* і *(p;—q)* теж (рис. 3.27). Якщо покласти $y = 0$, то виходить $x=\pm\, a$, а якщо покласти $x = 0$, виходить $y=\pm b$; таким чином, *a* і *b* — це довжини *півосей еліпса* (рис. 3.27) - *великої (AT= OC = a)* і *малої (DO=OB=b).* Крім того, кожен з доданків у лівій частині (3.25) не може бути більше одиниці, звідки $|x| \le a$, $|y| \le b$, і тому весь еліпс розташований усередині прямокутника, який зображено на рис. 3.27. Точки *A, B, C, D*, у яких еліпс перетинається своїми осями симетрії, називаються *вершинами* еліпса. Еліпс має чотири вершини.

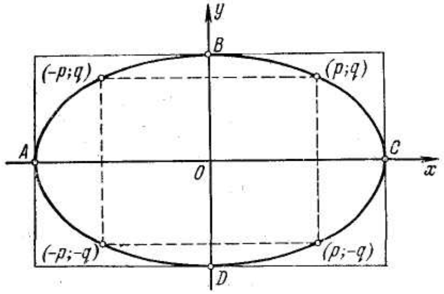


Рис. 3.27.

Відношення

$$\varepsilon = c/a = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}, \quad 0<\varepsilon<1,$$

називається *ексцентриситетом еліпса*. Це — величина безрозмірна і при подібному перетворенні еліпса, коли всі його розміри збільшуються в k раз, не змінюється, так як $kc/ka = c/a$.

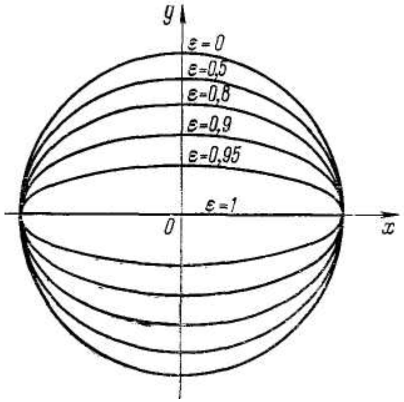


Рис. 3.28.

Ексцентриситет еліпса говорить про його форму (степені витягнутості), але нічого не говорить про його розміри. Цікаво подивитися, як впливає ексцентриситет на форму еліпса, якщо зафіксувати велику вісь $2a$ і змінювати ε (рис. 3.28), маючи на увазі, що $c=\varepsilon a$,

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.$$

При зменшенні ε фокуси зближуються, а мала піввісь наближається до великої. У границі, коли ε=0, буде $c=0$, $b=a$, тобто вийде коло. Таким чином, коло є особливим, граничним випадком еліпса, якщо фокуси злилися в центр; тоді ексцентриситет дорівнює нулеві. Якщо ,навпаки, ε наближається до 1, то еліпс стає усе більш витягнутим і в границі вироджується у відрізок.

Еліпс виходить при рівномірному стиску кола в одному напрямку. Дійсно, розглянемо, наприклад, рівномірний стиск до осі x (рис. 3.29) у k раз. Якщо точка $M(x; y)$ лежить на кривій, яка отримана після стиску, то точка $N(x; ky)$ повинна лежати на колі, звідки

$$x^2+(ky)^2=R^2 \text{ або } \frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{(\frac{R}{k})^2}=1$$

тобто, виходить еліпс із півосями R і R/k.

З доведеної властивості легко вивести параметричні рівняння еліпса. Дійсно, рівняння $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ при заданому R визначають коло радіуса R з центром в початку координат. Виконуючи стиск, одержимо $x=R\cos t$, $y=R\sin(t/k)$ або, уводячи півосі $a=R$, $b=R/k$, одержимо остаточно параметричні рівняння еліпса

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad (0\le t\le 2\pi). \quad (3.26)$$

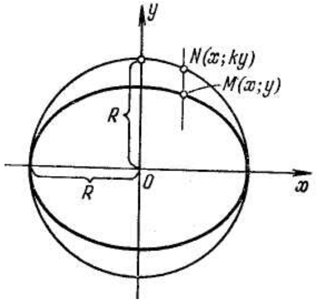


Рис. 3.29.

Так як *при ортогональному проектуванні якої-небудь плоскої фігури вона рівномірно стискується в одному напрямленню,* то при ортогональному проектуванні кола виходить еліпс (рис. 3.30).

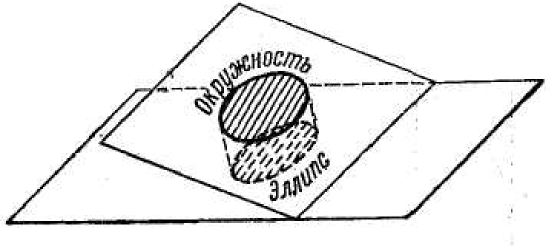


Рис. 3.30.

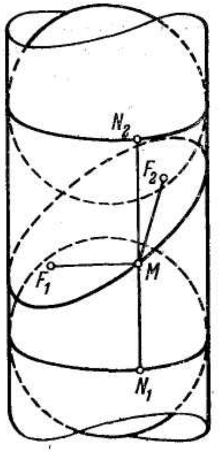


Рис. 3.31.

Еліпс виходить і при перерізі прямого кругового циліндра або конуса площиною. Для випадку циліндра це показано на рис. 3.31. Для доведення того, що в перерізі вийде еліпс, у циліндр вписуються кулі так, щоб вони торкнулися площини в точках F_1 і F_2. Після цього для будь-якої точки M перерізу можна написати, використовуючи рівність дотичних до кулі, проведених з однієї і тієї ж точки (рис. 3.31):

$$MF_1+MF_2= MN_1+MN_2=N_1N_2=const;$$

звідси і випливає дане твердження. Для конуса побудова аналогічна. Усі ці властивості широко застосовуються в кресленні.

11. Гіпербола. Приведемо наступне визначення: *гіперболою називається сукупність усіх точок площини, різниця відстаней яких від двох даних точок цієї площини (які називаються фокусами цієї гіперболи) є величина стала.* Якщо вибрати осі координат, як на рис. 3.32, і позначити

$$F_1F_2=2c;\ r_1—r_2=\pm 2a=const,$$

то одержимо рівняння гіперболи

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

звідки, виконуючи перетворення, як у п. 10, одержимо те ж співвідношення (3.24).

Однак тепер із трикутника F_1MF_2, бачимо, що $2a<2c$, і тому тепер не можна, як у п. 10, позначити a_2-c_2=b_2, але можна позначити

$$a_2-c_2=-b_2\ .$$

Тоді з (3.24) одержуємо

$$-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2$$

і остаточно канонічне рівняння гіперболи:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1. \qquad (3.27)$$

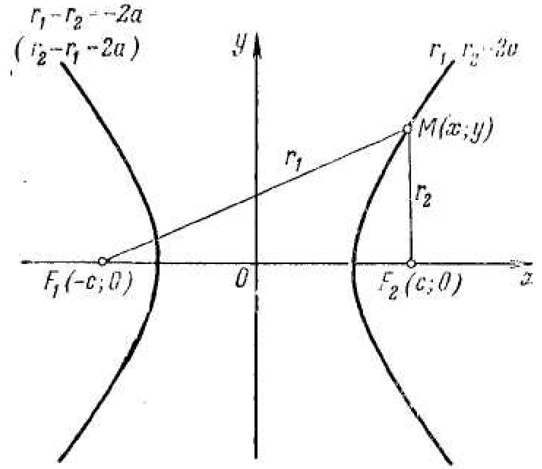
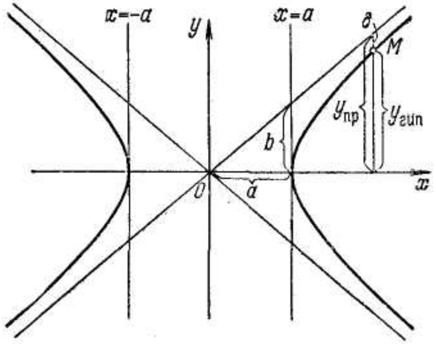


Рис.3.32

З цього рівняння видно, що і гіпербола має дві осі симетрії *(головні осі),* а також центр симетрії (центр гіперболи*)*. Покладаючи y=0, одержуємо *x=±a* , а *покладаючи* x=0 одержуємо **y=** ±*ib*.

Виходить, вісь *x* перетинає гіперболу в двох точках (вершинах гіперболи*),* це — *дійсна вісь;* вісь *у* гіперболу не перетинає, це- *„уявна вісь"*. Відповідно сталі *a* і b називаються *дійсною* і *уявною півосями* **гіперболи (хоча** остання назва не зовсім вдала, тому що число *b*, звичайно, дійсне). Крім того, з рівняння (3.27) видно, що $x^2/a^2 \geq 1$,тобто *x* або ≤-*a*, або ≥*a* (рис. 3.33).



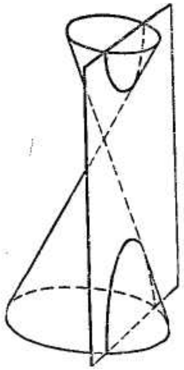


Рис. 3.33. Рис. 3.34.

Гіпербола має дві асимптоти. Щоб показати це, обмежимося першим квадрантом і запишемо, використовуючи (3.27):

$$y_{гіп}=b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

Застосуємо штучне перетворення, «виокремивши» *x* з $\sqrt{x^2-a^2}$,

$$\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}[x+(\sqrt{x^2-a^2}-x)]=\frac{b}{a}x+\frac{b}{a}(\sqrt{x^2-a^2}-x)$$

Щоб з'ясувати поводження доданку $\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-x$ при збільшенні *x,* помножимо і розділимо цей доданок на $\sqrt{x^2-a^2}+x$; одержимо

$$y_{гіп}=\frac{b}{a}x+\frac{b}{a}\ \frac{(\sqrt{x^2-a^2}-x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}=\frac{b}{a}x-\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

При віддаленні точки *M* по гіперболі в нескінченність останній дріб, мабуть, безмежно наближається до нуля. Тому якщо розглянути пряму *y=(b/a)x,* то різниця $\delta=y_{пр}-y_{гіп}$ безмежно наближається до нуля і тим самим пряма є асимптотою гіперболи. З огляду на симетрію, одержуємо рівняння асимптот

$$y=\pm(b/a)x$$

Можна перевірити, що гіпербола виходить у результаті перерізу нескінченного в обидва боки прямого кругового конуса площиною (рис. 3.34), нахиленою до осі ближче, чим твірна конуса.

Спорідненння еліпса, гіперболи і параболи. Між еліпсом , гіперболою і параболою є близьке споріднення. Це пояснюється тим, що усі вони — лінії другого порядку, причому, як ми побачимо в п. 13, інших ліній другого порядку нема, якщо не брати до уваги особливих випадків. У багатьох задачах, які включають параметри, у розв’язані може вийти одна з цих ліній, у залежності від значень параметрів, причому парабола (або її вироджені стани) завжди займає проміжне положення між еліпсом і гіперболою.

Розглянемо *переріз прямого кругового конуса з площиною, яка* повертається навколо осі *pp,* яка обрана, наприклад, перпендикулярно до осі конуса (рис. 3.35). Поки нахил малий, у перерізі виходить еліпс. При збільшенні нахилу еліпс подовжується, його ексцентриситет росте, а коли площина стане вже перерізати обидві половини, у перерізі виходить гіпербола. У проміжному положенні, коли площина нахилена до осі конуса так само, як твірні, лінія перерізу нескінченна, але ще є одним шматком. Так як особливих випадків, які вказані в п.8, тут не буде, а в результаті виродження лінії другого порядку не може вийти лінія вищого порядку, то ця лінія — парабола. З цієї причини еліпс, гіперболу і параболу іноді називають *конічними перетинами.*

Розглянемо з цієї ж точки зору найпростіше полярне *рівняння ліній другого порядку.* Почнемо з еліпса, для чого помістимо полюс *O* в правий фокус (рис. 3.36). Застосовуючи теорему косинусів до трикутника *AMO,* де *A-лівий* фокус, а *M-поточна* точка еліпса, одержимо

$$AM^2=AO^2+OM^2-2AO\cdot OM\cos(180-\varphi);$$

$$(2a-\rho)^2=(2c)^2+\rho^2+2\cdot 2c\rho\cdot\cos\varphi;$$

$$4a^2-4a\rho+\rho^2=4(a^2-b^2)+\rho^2+4c\rho\cos\varphi;$$

звідки

$$\rho=\frac{b^2}{a+c\cos\varphi}=\frac{\dfrac{b^2}{a}}{1+\left(\dfrac{c}{a}\right)\cos\varphi}. \quad (3.28)$$

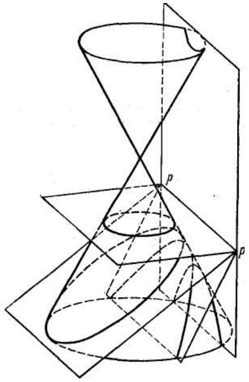


Рис. 3.35.

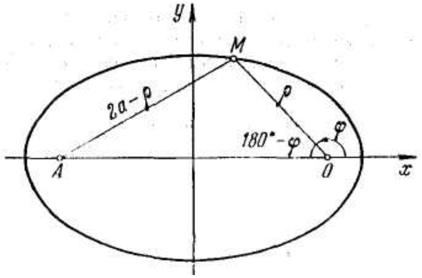


Рис. 3.36.

Якщо для стислості позначити $b^2/a=p$ (це - так називаний *«параметр»* еліпса), одержимо остаточно

$$\rho=p/(1+\varepsilon\cos\varphi) \quad (3.29)$$

Якщо помістити полюс у лівий фокус, у знаменнику буде ($1-\varepsilon\cos\varphi$). Якщо для гіперболи помістити полюс у лівий фокус (рис. 3.37), то після аналогічних перетворень, вийде та ж формула (3.28), а якщо позначити: $b^2/a=p$, $c/a=\varepsilon$, то вийде формула (3.29). Однак тут безрозмірна величина ε (яка також називається *ексцентриситетом)* уже >1. Легко перевірити, переходячи від полярних координат до декартових по формулах (3.5), що при ε=1 рівняння (3.29) представляє параболу; справді, тоді можна написати

$$\rho=\frac{p}{1+\cos\varphi}, \quad \rho+\rho\cos\varphi=p,$$

звідки

$$\sqrt{x^2+y^2}+x=p, \quad \sqrt{x^2+y^2}=p-x, \quad x^2=p^2-2px+x^2$$

і кінцево

$$x=-\frac{1}{2p}y^2+\frac{p}{2}$$

При цьому полюс координат називається *фокусом* параболи; на відміну від еліпса і гіперболи, *парабола має тільки один фокус.* Цікаво відзначити, що на рис. 3.28 при ε = 1 з еліпса вийшов відрізок. Таким чином, у різних задачах виродження може привести до різних результатів.

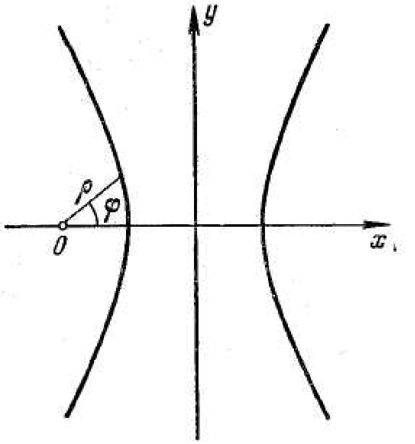
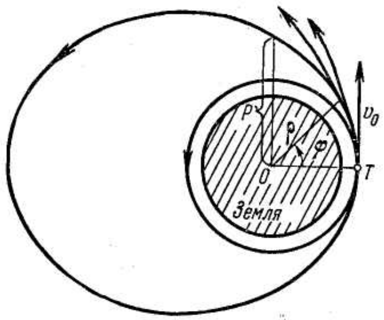


Рис. 3.37.

Рівняння (3.29) застосовується, зокрема, у небесній механіці в *задачі двох тіл, які* рухаються під дією їхнього взаємного притягання. Розглянемо, наприклад, запуск штучного супутника Землі з точки *T*, яка лежить за межами атмосфери, у горизонтальному напрямі (рис. 3.38).

Якщо початкова швидкість v_0 недостатня, то супутник обертатися навколо Землі не буде. При досягненні «першої космічної швидкості» супутник буде обертатися по круговій орбіті, центр якої знаходиться в центрі Землі. Якщо v_0 збільшити, то виявляється, що обертання буде відбуватися по еліпсу, причому центр Землі буде знаходитися в одному з його фокусів.



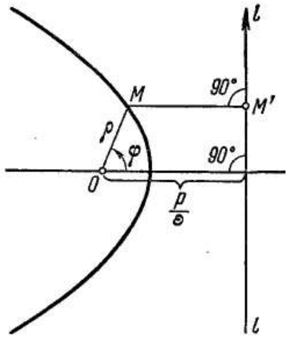


Рис. 3.38 . Рис. 3.39.

При подальшому збільшені v_0 ексцентриситет еліпса буде збільшуватися, а його другий фокус буде віддалятися. При досягненні „другої космічної швидкості” траєкторія стане параболічною і супутник не повернеться в *T*.

Таким чином, парабола - це еліпс, у якого один з фокусів віддалений на нескінченність. При подальшому збільшені v_0 траєкторія стане гіперболічною і другий фокус з’явиться „з другої сторони”. Центр Землі весь час буде знаходитися в фокусі орбіти.

Конічні перерізи можливо визначити також наступним чином. Якщо рівняння (3.29) переписати у вигляді

$$\rho+\rho\varepsilon\cos\varphi=p,\text{ або }\rho=p-\rho\varepsilon\cos\varphi=\varepsilon[(p/\varepsilon)-\rho\cos\varphi],$$

то отриманий вираз в дужках якраз дорівнює довжині відрізка MM' на рис.3.39, де пряма ll проведена перпендикулярно до полярної осі на відстані p/ε від полюса. Але $\rho=OM$, тобто одержуємо $OM=\varepsilon MM'$, звідки $OM/MM'=\varepsilon$ (const). Таким чином, еліпс, параболу і гіперболу можна визначити ще як *сукупності всіх точок, відношення відстані яких від деякої точки (фокуса) до відстані від деякої прямої* (яку називають *директрисою) є величина стала.*

13. Загальне рівняння лінії другого порядку. За аналогією з (3.18) напишемо рівняння лінії другого порядку в загальному вигляді:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (3.30)$$

(2B, а не просто B, пишеться тільки для більшої простоти формул, які виходять,).Наша мета, за допомогою

заміни декартових координат зуміти перетворити рівняння (3.30) до більш простого вигляду і тим самим розібратися, яку лінію воно зображує. Так як канонічні рівняння не містять членів з добутком координат, то постараємося насамперед шляхом повороту осей усунути такий член. Після повороту одержимо в силу формул (3.4) рівняння в нових координатах x', y':

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+$$
$$+D(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0. \quad (3.31)$$

Якщо тут розкрити дужки і зібрати члени з добутком $x'y'$, то коефіцієнтом при $x'y'$ буде

$$-2A\cos\alpha\sin\alpha+2B\cos^2\alpha-2B\sin^2\alpha+2C\sin\alpha\cos\alpha=2B\cos 2\alpha+(C-A)\sin 2\alpha.$$

Таким чином, повинно бути

$$2B\cos 2\alpha+(C-A)\sin 2\alpha=0,$$

тобто

$$tg2\alpha=\frac{2B}{A-C}. \quad (3.32)$$

Звідси і знаходимо кут повороту осей α.

Після повороту рівняння прийме вигляд

$$A'x'^2+C'y'^2+D'x'+E'y'+F=0, \quad (3.33)$$

де A', C', D', E'—нові коефіцієнти, отримані з (3.31) після приведення подібних членів. Можна показати, що при будь-якому повороті осей, хоча коефіцієнти A,B,C при членах другого степеня, узагалі говорячи, міняються, але вираз $AC-B^2$ при цьому залишається інваріантним (незмінним). Так як в рівнянні (3.33) немає члена з $x'y'$, тобто $B' = 0$, то звідси одержуємо

$$A'C'\ (=(A'C'-B'^2) = AC — B^2$$

Таким чином, якщо вираз $AC — B^2$, який складено для вихідного рівняння (3.30), додатний, то в рівнянні (3.33) коефіцієнти A' і C'

мають однаковий знак, так як їхній добуток додатний; це — *еліптичний випадок.* Якщо $AC-B^2<0$, то A' і C' мають протилежні знаки *(гіперболічний випадок).* Якщо $AC — B^2 = 0$, то з коефіцієнтів A' і C' один дорівнює нулеві *(параболічний випадок).* Зупинимося на

еліптичному випадку. Зробивши в рівнянні (3.33) доповнення до повного квадрата, одержимо рівняння вигляду

$$A'(x'—a)^2+C'(y'—b)^2+F'=0.$$

Виконуючи паралельний перенос осей x', y', ми перейдемо до нових координат $x''=x'—a$, $y''=y'—b$. Рівняння прийме вигляд

$$A'x''^2+C'y''^2=-F', \text{ тобто } \frac{x''^2}{-\frac{F'}{A'}}+\frac{y''^2}{-\frac{F'}{C'}}=1 \quad (3.34)$$

Нехай для визначеності A' і C' обоє додатні. Тоді, якщо $F'<0$, ми одержуємо канонічне рівняння еліпса. Виходить, і вихідна лінія була еліпсом, але відносно осей x, y зміщеним і поверненим. Якщо ж $F'>0$ або $F'=0$, то одержуємо особливі випадки, зазначені в п.8: уявну лінію або точку. Аналогічно в гіперболічному випадку лінія буде гіперболою, а в параболічному — параболою, якщо не враховувати особливих випадків, які описані у п.8. Розглянемо, наприклад, графік оберненої пропорційності з рівнянням $y=k/x$, яке можна переписати у вигляді $xy—k=0$.

Порівнюючи з рівнянням (3.30), бачимо, що тут

$$A=C=D=E=0;\ B=1/2;F=—k.$$

Так як $AC-B^2=1/4<0$, то це — гіперболічний випадок. По формулі (3.32) бачимо, що $tg\ 2\alpha=1/0=\pm\infty$, звідки можна покласти $2\alpha=\pi/2$, $\alpha=\pi/4$.

Отже, повернемо осі на 45°. По формулах (3.4) маємо

$$x=x'\frac{\sqrt{2}}{2}-y'\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),$$
$$y=x'\frac{\sqrt{2}}{2}+y'\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

Підставляючи цей вираз в вихідне рівняння, отримаємо

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')-k=0,$$

тобто $\frac{x'^2 - y'^2}{2} - k = 0; \quad \frac{x'^2}{2k} - \frac{y'^2}{2k} = 1;$

таким чином, розглянута лінія – гіпербола з рівними півосями $(a=b=\sqrt{2k})$ (рис. 3.40).

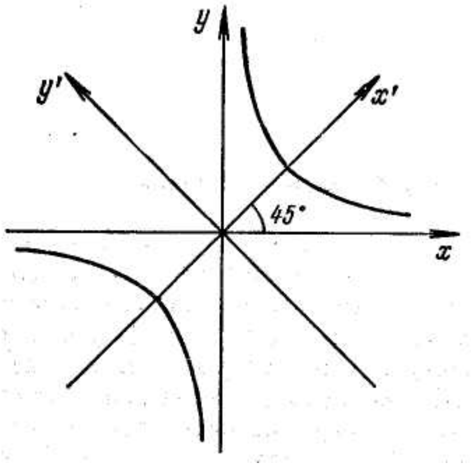


Рис. 3.40.

Мікромодуль 6

Приклади розв'язання типових задач

1. Дано точки $A(3;\ 1)$, $B(2;\ —3)$, $C(—1;\ 2)$- вершини трикутника ABC. Складіть:

а) загальне рівняння сторони AB;

б) канонічне рівняння висоти AD;

в) параметричне рівняння медіани BM;

г) рівняння прямої, що проходить через точку С(— 1; 2) паралельно до сторони AB.

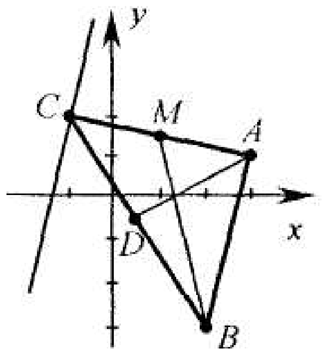


Рис. 3.41.

Розв'язання. Побудуємо рис. 3.41 і розглянемо випадки:

а) оскільки відомі координати точок A і B, то згідно з рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, маємо:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-1}{-3-1}$$

або,

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{-4}, \qquad y\text{-}1=4(x\text{-}3),$$

звідки $4x\text{-}\ y\ \text{-}11=0$ – загальне рівняння прямої, що містить сторону AB;

б) щоб записати канонічне рівняння прямої потрібно знати точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overrightarrow{BC} = \{—3;\ 5\}$ для висоти AD є нормальним вектором, тоді вектор $\boldsymbol{a}=\{5;\ 3\}$ буде перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{BC}$ (оскільки скалярний добуток $\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{a}$ 0). Тепер записуємо канонічне рівняння прямої AD:

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{3};$$

в) оскільки точка M - середина відрізка AC, то

$$x_м = (3\text{-}1)/2=1,\ y_м=(1+2)/2 = 1{,}5.$$

Вектор $\overrightarrow{BM} = \{1\text{-}2;\ 1{,}5 + 3\}= \{\text{-}1;\ 4{,}5\}$ - напрямний вектор прямої BM. За напрямний вектор можна взяти також вектор

$$\boldsymbol{a}= 2\,\overrightarrow{BM} =\{—2;\ 9\}.$$

Отже, l=-2 , m=9 і параметричне рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x = 2 - 1t \\ y = -3 + 9t \end{cases}$$

г) оскільки пряма, що проходити через точку C(- 1; 2) паралельна стороні AB, то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор **n**=(4; -1) – нормальний вектор прямої AB. Тоді шукане рівняння має вигляд

$4(x +1) - (y - 2) = 0$, або $4x - y + 6 = 0$.

2. Обчисліть площу трикутника, обмеженого прямою, що проходить через точки M_1 (—3; —4) і M_2 (6; 2), і осями координат (рис. 3.42).

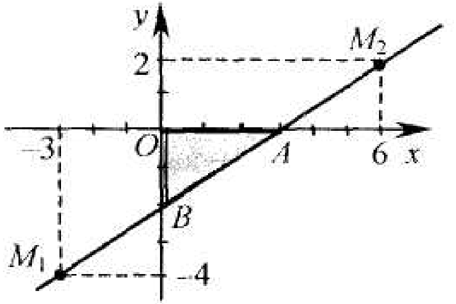


Рис. 3.42.

Розв'язання. Використовуючи формулу рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, складемо рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2:

$$\frac{x+3}{6+3}=\frac{y+4}{2+4},\quad \frac{x+3}{9}=\frac{y+4}{6},\quad \frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{2},\quad 2(x+3)=3(y+4),$$

$2x$-$3y$-6=0 – загальне рівняння прямої M_1M_2.

Знайдемо координати точок перетину прямої M_1M_2 з осями координат.

Нехай x=0, тоді-3y+6=0, або y=2.

Якщо y=-0, то 2x+6=0, або x= -3.

Отже, пряма перетинає вісь Ox у точці $A(3;$ 0), а вісь Oy - у точці

B(0;-2). Довжина катетів у трикутнику AOB відповідно дорівнює: OA = 3, OB = 2 , тоді площа трикутника: S_{AOB} — 3 кв. од.

3. Знайдіть відстань між прямими $4x$ — $3y$ + 2 = 0 та $8x$- $6y$ -13 = 0 .

Розв 'язання. Оскількі задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $8x$- $6y$- 13 = 0: нехай x = 0, тоді y= -13/6.

Відстань від точки M(0; — 13/6) до прямої 4x-3y+2 = 0 знаходимо за формулою :

$$d=\frac{|4\cdot 0-3\cdot(-13/6+2|}{\sqrt{16+9}}=1{,}7.$$

4. Визначіть, при яких m і n прямі mx+ 8y+ n = 0 та $2x$+ my-1=0:

а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні.

Розв 'язання:

а) умова паралельності: $m/2=8/m$, звідси m^2 = 16, m = ±4;

б) прямі збігаються в разі виконання умови $m/2=8/m=n/(-1)$,звідси дістаємо дві пари значень m = 4, n = —2 або m = —4, n = 2

в) умова перпендикулярності прямих:$m\cdot 2+8\cdot m=0$,тобто m=0.

5. Знайдіть точку, симетричну точці P(-8; 12) відносно прямої

$4x+7y+13 = 0$

Розв 'язання. Нехай $Q(x, y)$ – шукана точка (рис. 3.43)

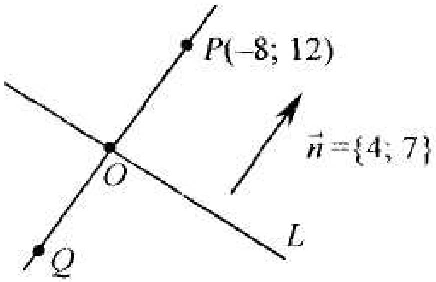


Рис. 3.43.

Задачу розв'язуємо в такій послідовності:

1) складаємо рівняння прямої PO, що проходить через точку P, перпендикулярно до прямої L;

2) знаходимо точку O - точку перетину прямих L і PO - проекцію точки P на пряму L;

3) визначаємо координати точки Q, враховуючи при цьому, що точка O - середина відрізка PQ.

Вектор $\boldsymbol{n}=\{4;\ 7\}$ - нормальний вектор прямої L одночасно є напрямним вектором перпендикуляра PO, тому канонічне рівняння прямої PO має такий вигляд:

$$\frac{x+8}{4}=\frac{y-12}{7},$$

звідки дістаємо $7(x+8)=4(y-12)$, $7x-4y+104=0$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 4y + 104 = 0 \\ 4x + 7y + 13 = 0 \end{cases}$$

знайдемо координати точки перетину прямих: $x_0=$ — 12, $y_0 = 5$.

Записуємо зв'язок між координатами точок P, O і Q:

$$x_o=\frac{x_P+x_Q}{2},\quad y_o=\frac{y_P+y_Q}{2}$$

Тоді

$$-12=\frac{-8+x_Q}{2},\quad 5=\frac{12+y_Q}{2}$$

звідки одержуємо координати симетричної точки: $x_0= -16$, $y_0= -2$

6. Задано рівняння лінії другого порядку $4x^2-5y^2+20 = 0$.

Визначіть вид кривої, знайдіть її фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи). Побудуйте графік.

Розв'язання . Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$(x^2/5)-(y^2/4)=-1, \text{ або } -(x^2/5)+(y^2/4)=1$$

Це – спряжена гіпербола з дійсною піввіссю $b=2$, яка лежить на осі Oy, і уявною $a=\sqrt{5}$ на осі Ox. Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2=a^2+b^2=9\ ,\ c=3.$$

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy і мають координати (0; -3) і (0; 3).
Ексцентриситет: $\varepsilon= c/b=1{,}5$, рівняння директрис: $y=\pm b/\varepsilon$, або $y =\pm 4/3$.
Рівняння асимптот: $y= \pm\ (b/a)\ x$, або $y = \pm(2/\sqrt{5})\ x$.

Графік гіперболи наведено на рис. 3.44.

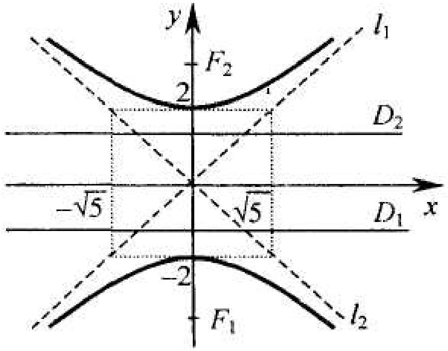


Рис. 3.44.

7. Визначіть тип кривої $4x^2+y^2+8\,x—2y+1=0$, зведіть рівняння до найпростішого вигляду та побудуйте графік рівняння.

Розв'язання. Виділивши повні квадрати по x та y, дістанемо

$$4(x^2+2x)+(y^2-2y+1)=0,\ \ 4(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=4,$$
$$4(x+1)^2+(y-1)^2=4,\ \ (x+1)^2+[(y-1)^2/4]=1$$

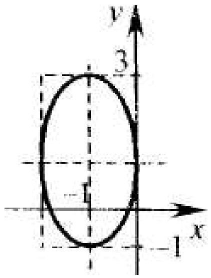


Рис. 3.45.

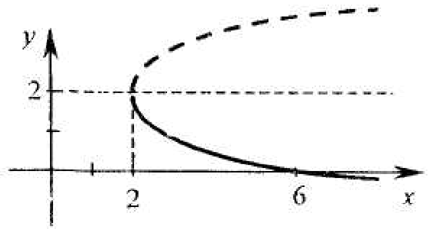


Рис. 3.46.

Одержали рівняння еліпса, який одержується з еліпса

$$x^2+(y^2/4)=1$$

паралельним переносом на вектор (-1; 1) (див. рис. 3.45)

8. Встановіть, яку лінію визначає рівняння $y=2-\sqrt{x}-2$ та побудуйте його графік.

Розв'язання. Очевидно, що $x \geq 2$, $y \leq 2$. При таких обмеженнях виконаємо перетворення: $y–2= -\sqrt{x-2}$, $(y—2)^2 = x-2$. Графіком даного рівняння є нижня гілка параболи, яка зображена на рис. 3.46.

Мікромодуль 6
Індивідуальні тестові завдання

6.1. Дано точки M_1, M_2, M_3 - вершини трикутника M_1 M_2 M_3 Складіть:

а) загальне рівняння сторони M_1M_2;

б) канонічне рівняння висоти M_1D;

в) параметричне рівняння медіани M_2M',

г) рівняння прямої, що проходить через точку M_3 паралельно до сторони M_1 M_2.

д) проекцію точки M_1 на пряму M_2M_3.

6.1.1. $M_1(0;1)$, $M_2(6;3)$, $M_3(-1;0)$
6.1.2. $M_1(0;6)$, $M_2(1;-3)$, $M_3(-2;3)$
6.1.3. $M_1(6;-2)$, $M_2(-4;-1)$, $M_3(0;-2)$
6.1.4. $M_1(2;2)$, $M_2(-1;7)$, $M_3(1;4)$
6.1.5. $M_1(1;8)$, $M_2(0;-3)$, $M_3(-1;2)$
6.1.6. $M_1(-5;-1)$, $M_2(-3;0)$, $M_3(1;-2)$
6.1.7. $M_1(0;-2)$, $M_2(-3;6)$, $M_3(5;3)$
6.1. 8. $M_1(3;-2)$, $M_2(2;7)$, $M_3(-2;1)$
6.1.9 $M_1(0;5)$, $M_2(11;-5)$, $M_3(-1-1)$
6.1.10. $M_1(1;0)$, $M_2(6;1)$, $M_3(3;-2)$
6.1.11. $M_1(-1;4)$, $M_2(11;5)$, $M_3(0;1)$
6.1.12. $M_1(4;6)$, $M_2(-6;3)$, $M_3(-2;0)$
6.1.13. $M_1(2;-1)$, $M_2(5;0)$, $M_3(-2;-2)$
6.1.14. $M_1(-4;5)$, $M_2(2;0)$, $M_3(-2;-2)$
6.1.15. $M_1(7;5)$, $M_2(-1;2)$, $M_3(1;-1)$

6.2. Знайдіть відстань між прямими

6.2.1. 2x+5y-12=0 та 4x+10y-12=0.
6.2.2. 3x-4y-7=0 та -6x+8y-15=0.

6.2.3. 2x-5y-11=0 та -6x+15y-17=0.
6.2.4. 3x-7y-7=0 та 12x-28y-25=0.
6.2.5. 5x+6y+22=0 та 10x+12y-31=0.
6.2.6. x-7y-32=0 та 2x-14y-13=0.
6.2.7. 3x+5y+5=0 та 9x+15y-17=0.
6.2.8. 3x-8y-27=0 та -6x+16y+11=0.
6.2.9. 2x-9y-37=0 та -6x+27y-10=0.
6.2.10. 3x-4y-18=0 та 15x-20y-41=0.
6.2.11. x+6y-14=0 та 4x+24y-23=0.
6.2.12. 3x-7y-8=0 та 9x-21y-16=0.
6.2.13. 3x-5y-19=0 та 6x-10y-21=0.
6.2.14. -3x-4y-28=0 та 9x+12y+7=0.
6.2.15. 4x-3y+7=0 та 8x-6y-11=0.

6.3. Знайдіть площину трикутника, який відсікається від осей координат прямою

6.3.1.4x+5y-40=0. 6.3.2.4x-5y+35=0.
6.3.3.5x+8y-35=0. 6.3.4.6x-11y-128=0.
6.3.5.3x+13-195=0.6.3.6.2x+7y-140=0.
6.3.7.7x-12y-168=0. 6.3.8.7x+5y-140=0.
6.3.9.13x+5y-260=0. 6.3.10.4x+7y-560=0.
6.3.11. 3x+7y-210=0. 6.3.12.8x+13y-208=0.
6.3.13. 6x-7y-210=0. 6.3.14.9x+4y-180=0.
6.3.15. 2x+7y-35=0. 6.3.16.9x+7y-126=0.
6.3.17. 4x-7y-420=0. 6.3.18.3x+11y+132=0.
6.3.19. 4x+5y+45=0. 6.3.20.6x+7y+21=0.
6.3.21. 5x-7y-175=0. 6.3.22.8x-5y+50=0.
6.3.23. 6x+13y+130=0. 6.3.24.5x-8y-64=0.
6.3.25. 3x+5y+80=0. 6.3.26.4x+9y+81=0.
6.3.27. 3x-13y-169=0. 6.3.28.9x+5y+75=0.
6.3.29. 4x+11y-40=0. 6.3.30.5x-8y-64=0.

6.4. Визначіть, при яких *m* і *n* прямі
а) паралельні, б) збігаються, в) перпендикулярні

6.4.3.1.$mx+6y+n=0$ *та* $3x+my-3=0$

6.4.3.2. $mx+7y+n=0$ *та* $2\ x+my-5=0$

6.4.3. $(m+1)x+5y+2n=0$ *та* $3x+my-4=0$

6.4.4. $(m-2)x+3y+n+2=0$ *та* $x-my-2=0$

6.4.5. $(m+41)x+2y+n-1=0$ *та* $2x+my-6=0$

6.4.6 $(m-4)x-y+n-2=0$ *та* $3x+my-5=0$

6.4.7. $(m+24)x+4y+n-3=0$ *та* $3x-my+4=0$

6.4.8. $(m+54)x+4y+n+1=0$ *та* $x+2my-3=0$

6.4.9. $(m+3)x+y+n-3=0$ *та* $3x+(m+1)y-n=0$

6.4.10. $(m-2)x+5y+n-4=0$ *та* $x-(m+1)y-6n=0$

6.4.11. $(m-3)x+y+n-4=0$ *та* $x-(m+1)y-6n=0$

6.4.12. $(m+3)x+2y+n-5=0$ *та* $2\ x-(m+2)y-4n=0$

6.4.13. $(m-1)x+y+n+2=0$ *та* $3x-(m-1)y-2n=0$

6.4.14. $(m-2)x+3y+n-3=0$ *та* $x+(m+1)y+2n=0$

6.4.15. $(m+3)x+2y+2n-1=0$ *та* $x-my-6+n=0$

6.4.16. $(m-1)x+y+n-4=0$ *та* $x-(m+2)y-n=0$

6.4.17. $(m-3)x+y+n-4=0$ *та* $x-(m+1)y-6n=0$

6.4.18. $(m-5)x+2y+2n-3=0$ *та* $x-(m+2)y-n-1=0$

6.4.19. $(m+2)x+y-n-4=0$ *та* $x+(m+1)y+2n=0$

6.4.20. $(m+1)x-y+n-3=0$ *та* $x-(m-1)y-3n=0$

6.4.21. $(m-6)x-y+n-2=0$ *та* $x+(m+2)y-n-1=0$

6.4.22. $mx+2y+3n-2=0$ *та* $x-(m+4)y-2n=0$

6.4.23. $mx-y+2n-5=0$ *та* $x+(m+2)y+n=0$

6.4.24. $(m-1)x-y+2n-1=0$ *та* $2x-my-n+1=0$

6.4.25. $(2m-1)x+y-n-3=$ *та* $x-(m+1)y-n=0$

6.5.Задано рівняння кривої другого порядкову. Виконайте такі дії:

а) визначїъ по рівнянню вигляд кривої;

б) у випадку еліпса знайдітъ величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складітъ рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот;

г) у випадку параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси;

д) виконайте креслення кривої з поданням фокусів, директрис, асимптот (при наявності).

6.5.1. $x^2+4y^2-4=0.$

6.5.2. $9x^2+4y^2-36=0$

6.5.3. $16x^2-25y^2-400=0$

6.5.4. $-6x^2+25y^2-400=0$

6.5.5. $x^2+10y^2-1=0$

6.5.6. $9x^2-16y^2+144=0$

6.5.7. $16x^2+25y^2-400=0$

6.5.8. $y^2-4x^2+4=0$

6.5.9. $16x^2-36y^2-576=0.$

6.5.10. $25x^2+16y^2-400=0$

6.5.11. $x^2-4y^2-4=0$

6.5.12. $4x^2+25y^2-100=0$

6.5.13. $9x^2-36y^2+324=0$

6.5.14. $4x^2+9y^2-36=0$

6.5.15. $5x^2+4y^2-20=0$

6.5.16. $25x^2+4y^2-100=0$

6.5.17. $8x^2+y^2-16=0$

6.5.18. $16x^2-9y^2+144=0$

6.5.19. $x^2+9y^2-9=0$

6.5.20. $25x^2-36y^2-900=0$

6.5.21. $9x^2-4y^2-36=0$

6.5.22. $4x^2-9y^2+36=0$

6.5.23. $x^2-12y^2-24=0$

6.5.24. $26x^2+16y^2-576=0$

6.5.25. $9x^2+16y^2-144=0$

6.5.26. $5^2-4y^2+20=0$

6.6.Встановіть, яку лінію визначає рівняння та побудуйте її графік

6.6.1. $y=1+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}.$

6.6.2. $y=2-\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}.$

6.6.3. $y=1-\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}.$

6.6.4. $y=-2-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}$

6.6.5. $x=1+\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}.$

6.6.6. $x=2-\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}$

6.6.7. $x=3+\frac{7}{5}\sqrt{4-y^2}.$

6.6.8. $x=3-\frac{3}{7}\sqrt{49-y^2}$

6.6.9. $y=-1+\frac{3}{4}\sqrt{16+x^2}.$

6.6.10. $y=2-\frac{3}{5}\sqrt{25+x^2}$

6.6.11. $y=\frac{5}{6}\sqrt{37+x^2+2x}.$

6.6.12. $y=\frac{5}{6}\sqrt{29+x^2+4x}$

6.6.13. $y=1+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}.$

6.6.14. $y=2-\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$

6.6.15. $y+1=\frac{4}{9}\sqrt{81+x^2}.$

6.6.16. $y-2=-\frac{9}{5}\sqrt{25+x^2}$

6.6.17. $x=\frac{7}{2}\sqrt{5+y^2-2y}.$

6.6.18. $x=\frac{3}{7}\sqrt{53+y^2+4y}$

6.6.19. $x=\frac{7}{4}\sqrt{25+y^2+6y}.$

6.6.20. $x=\frac{8}{3}\sqrt{25+y^2-16y}$

6.6.21. $x-2=-\frac{5}{7}\sqrt{49+y^2}.$

6.6.22. $x+1=-\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}$

6.6.23. $y=1-3\sqrt{1-x^2}.$

6.6.24. $x+3=-2\sqrt{4-y^2}$

6.6.25. $y-1=\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}.$

6.6.26. $y=-\frac{3}{5}\sqrt{24-x^2}$

6.6.27. $x-2=\frac{9}{7}\sqrt{49+y^2}.$

6.6.28. $x+1=-\frac{7}{9}\sqrt{81+y^2}$

6.6.29. $x=-\frac{7}{9}\sqrt{80-y^2-2y}.$

6.6.30. $y=\frac{2}{5}\sqrt{46+x^2+2x}$

Мікромодуль 7
Аналітична геометрія в просторі

3.4. Декартові координати в просторі

Нехай дана трійка векторів ***a, b, c*** віднесених до загального початку в деякій точці *O*, яку прийнято за *початок координат,* і які не лежать в одній площині. Якщо обрано початок координат, то положення довільної (поточної) точки M у просторі цілком характеризується вектором **r** $=\overrightarrow{OM}$, який називається *радіусом-вектором* точки *M* (рис. 3.47). Як було доведено раніше, можна прийняти вектори ***a, b, c*** за базис і представити ***r*** = λ***a***+μ***b***+ν***c***; таким чином, положення точки *M* характеризується набором чисел λ,μ,ν, які називаються *аффінними координатами* точки *M.* Можна сказати, що аффіні координати точки — це координати її радіуса-вектора. Таким чином, як і на площині, кожна точка має визначені координати і, навпаки, по заданих координатах завжди можна побудувати точку, однак *у просторі точка має три координати.*

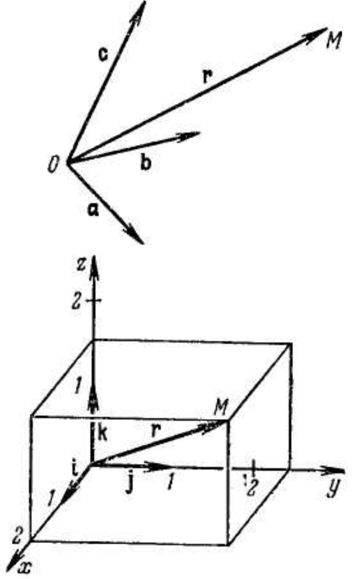


Рис. 3.47.   Рис. 3.48.

Якщо вектори, які прийняті за основу системи координат, усі мають одиничну довжину і взаємно перпендикулярні, то система координат називається декартовою. У цьому випадку основні вектори *(декартовий базис)* прийнято позначати буквами **i, j, k**. Самі декартові координати прийнято позначати буквами *x, y, z;* отже маємо (рис. 3.48),

$$\boldsymbol{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}\,. \quad (3.35)$$

Так, на рис. 3.48 показана точка M з координатами x=2; y=2,4; z=1,6. Знак координат указує на те, у якій з восьми частин, на які простір поділяється площинами *xOy, yOz* і *xOz,* знаходиться точка, яка розглядається.

Аналогічно формулі (3.35) будь-який вектор **a** в декартовій системі координат можна записати у вигляді

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{к}, \qquad (3.36)$$

де a_x, a_y, a_z—проекції вектора ***a*** на відповідні осі. Якщо врахувати, що для будь-якого одиничного вектора ***e*** буде пр$_l$***e***=cos(e,^ l), то з (3.36) одержуємо формулу

$$\boldsymbol{e}=\cos(e,\hat{}x)\boldsymbol{i}+ \cos(e,\hat{}y)\boldsymbol{j}+ \cos(e,\hat{}z)\boldsymbol{k}.$$

Задачі на декартові координати.1. *Дії над векторами, розкладеними по декартовим осях,* виконуються по формулах.

Якщо

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+ a_y\boldsymbol{j}+ a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+ b_y\boldsymbol{j}+ b_z\boldsymbol{k}, \qquad (3.37)$$

то

$$a+b=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+ (a_y+b_y)\boldsymbol{j}+ (a_z+b_z)\boldsymbol{k}, \qquad (3.38)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_x\boldsymbol{i} +\lambda a_y\boldsymbol{j}+ \lambda a_z\boldsymbol{k}, \qquad (3.39)$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} =a_xb_x+ a_yb_y+ a_zb_z, \qquad (3.40)$$

$$a^2= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}= a^{\,2}_{\,x}+ a^{\,2}_{\,y}+ a^{\,2}_{\,z}\,. \qquad (3.41)$$

При виведенні двох останніх дуже важливих формул треба відмітити, що $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} =1$, а $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i} =0$, так як вектори ***i, j, k*** одиничні і взаємно перпендикулярні. Формула (3.41) - це теорема Піфагора в просторі: квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Нехай, наприклад потрібно знайти кут між векторами

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i}—2\boldsymbol{j} + \mathbf{k} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{i} +\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

По формулі скалярного добутку векторів маємо

$$cos(\boldsymbol{a},\hat{}\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/ab=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})/(\sqrt{\ } a^2\sqrt{\ } b^2)=$$

$$=\frac{3(-2)+(-2)1+1\cdot 4}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}\sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}}=\frac{-4}{\sqrt{14\cdot 21}}=-0{,}233,$$

звідки $(\boldsymbol{a},^{\wedge}\boldsymbol{b})$=103,5.

2. *Умови паралельності і перпендикулярності векторів,* заданих своїми розкладаннями (3.37). Умова $\boldsymbol{a}\|\boldsymbol{b}$ рівносильна тому, що $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$ або в силу (3.39) $b_x=\lambda a_x$; $b_y=\lambda a_y$; $b_z = \lambda a_z$. Виключаючи λ, одержимо необхідну умову:

$$b_x/a_x =b_y /a_y =b_z/ a_z \qquad (\text{умова } \boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}).$$

Далі, умова $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ рівносильна тому, що $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$=0. Тому в силу (3.40) одержуємо умову

$$a_xb_x+a_yb_y + a_z\, b_z =0 \qquad (\text{умова } \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}).$$

3. *Напрямляючі косинуси* вектора — це косинуси кутів, що він утворює з осями координат. Якщо вектор ***a*** заданий своїм розкладанням (3.36), то

$$a_x=пр_x\boldsymbol{a}= a \cos(\boldsymbol{a},\hat{}x),$$

тобто.

$$cos(\boldsymbol{a},\hat{}x)= a_x/ a;\ cos(\boldsymbol{a},\hat{}y)= a_y/ a;\ cos(\boldsymbol{a},\hat{}z)= a_z/ a.$$

Звідси

$$cos^2(\boldsymbol{a},\hat{}x)+ cos^2(\boldsymbol{a},\hat{}y)+ cos^2(\boldsymbol{a},\hat{}z)= \frac{a^2{}_x}{a^2}+\frac{a^2{}_y}{a^2}+\frac{a^2{}_z}{a^2}=1\,.$$

Напрямляючі косинуси вектора цілком визначають його напрям, але нічого не говорять про його довжину.

Аналогічно визначаються *напрамляючі косинуси* будь-якої *осі:* для цього досить узяти будь-який вектор, що йде по осі.

4.*Вектор, що з'єднує дві точки* M_1 (x_1, y_1, z_1) і M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ (рис. 3.49). Маємо, з огляду на формулу (3.35),

$$\overrightarrow{OM_1} =\boldsymbol{r}_1= x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k};$$

$$\overrightarrow{OM_2} =\boldsymbol{r_2} =x_2\, \boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}+\ z_2\boldsymbol{k};$$

звідки

$$\overrightarrow{M_1M_2} =\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}=(x_2- x_1)\boldsymbol{i} + (y_2- y_1)\,\boldsymbol{j}+\ (z_2- z_1)\boldsymbol{k};$$

5. *Відстань між точками* M_1 (x_1, y_1, z_1) і M_2 $(x_2; y_2; z_2)$ у силу попередньої властивості дорівнює

$$M_1M_2=\sqrt{(M_1M_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^{2}+(z_2-z_1)^2}. \quad (3.42)$$

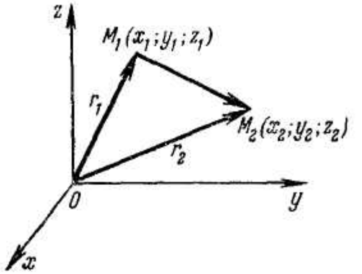


Рис. 3.49.

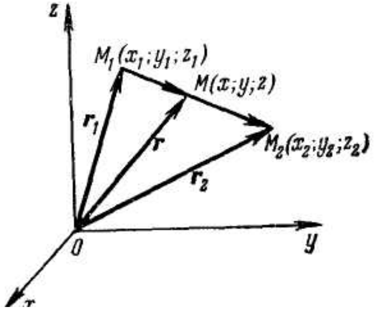


Рис. 3.50.

6. *Ділення відрізка в даному відношенні.* Дано (рис. 3.50)

$M_1(x_1;y_1;z_1)$; $M_2(x_2;y_2;z_2)$; $M_1M/MM_2=\lambda$;

треба знайти точку $M(x;y;z)$. Маємо

$$\mathbf{r}_1=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k};\quad \mathbf{r}_2=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k};\ (3.43)$$

$\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$ у силу паралельності цих векторів; але

$$\overrightarrow{M_1M}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_1;\ \overrightarrow{MM_2}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r},$$

тобто $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})$; $\mathbf{r}-\mathbf{r}_1=\lambda\,\mathbf{r}_2-\lambda\,\mathbf{r}$; $\mathbf{r}+\lambda\,\mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\lambda\,\mathbf{r}_2$;

$$\mathbf{r}=(\mathbf{r}_1+\lambda\,\mathbf{r}_2)/(1+\lambda). \quad (3.44)$$

Прирівнюючи проекції обох частин на осі *x, y, z* (див. формули (3.35) і (3.43), одержимо остаточно

$$x=(x_1+\lambda x_2)/(1+\lambda);\ y=(y_1+\lambda y_2)/(1+\lambda);\ z=(z_1+\lambda z_2)/(1+\lambda). \ (3.45)$$

Перехід від формули (3.44), що дає векторне розв'язання задачі, до формул (3.45) називається *проектуванням формули* (3.44) на осі координат. Ясно, що узагалі *усяка векторна рівність вигляду* ***a=b*** *у просторі рівносильна трьом скалярним:*

$$a_x=b_x,\ a_y=b_y,\ a_z=b_z,$$

які виходять у результаті проектування першого на осі координат.

7. *Паралельний перенос осей координат.* Нехай осі координат *x', y', z'* отримані з осей *x, y, z* за допомогою паралельного переносу на вектор ***a*** (рис. 3.51).

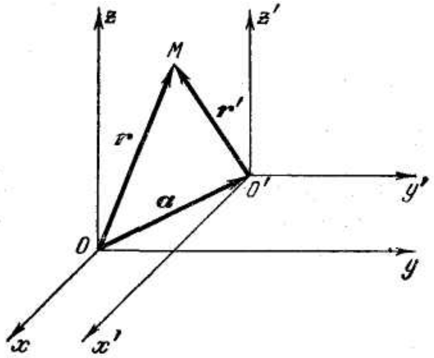


Рис. 3.51.

Тоді, проектуючи співвідношення ***r=a+r'*** між радіусами-векторами будь-якої точки *M* на осі координат, одержуємо співвідношення між старими і новими координатами:

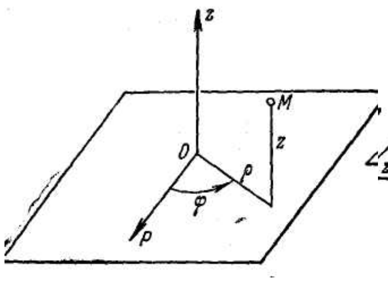
$$x=x'+a_x,\quad y=y'+a_y,\quad z=z'+a_z,$$

3.5. Різні види координат у просторі

Крім декартових координат, широко застосовуються наступні системи координат.

1. *Циліндричні координати* (ρ; φ; *z*), які показані на рис. 3.52,— це полярні координати на площині , до яких додана координата *z*. Для опису всіх точок у просторі досить значень $0\leq\rho<\infty;-\pi<\varphi\leq\pi;-<z<\infty$. *Координатні поверхні,* тобто поверхні, на яких одна з координат стала, а інші дві міняються, утворять три сімейства:

$$\rho=\text{const},\ \varphi=\text{const і } z=\text{const}.$$



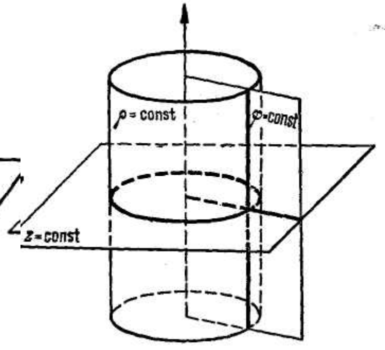


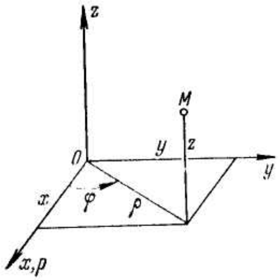
Рис. 3.52. Рис. 3.53.

На рис. 3.53 показано по одному представнику з цих сімейств; звичайно, усі поверхні треба вважати продовженими в нескінченність.

Координатні лінії, на яких дві координати сталі, а одна міняється, також утворять три сімейства і виходять у результаті перетину координатних поверхонь; вони показані на рис. 3.53 жирними лініями. (Помітимо, що для декартової системи координат координатними поверхнями служать площини, паралельні одній з площин xOy, yOz або zOx, а координатними лініями — прямі, паралельні одній з координатних осей.)

Зв'язок між декартовими координатами (x,y,z) і циліндричними (ρ,φ,z), якщо обидві системи координат розташовані одна відносно одної так, як показано на рис. 3.54, виражається формулами

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z.$$



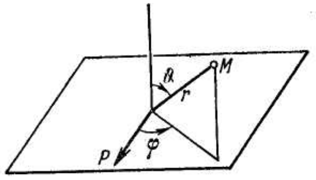


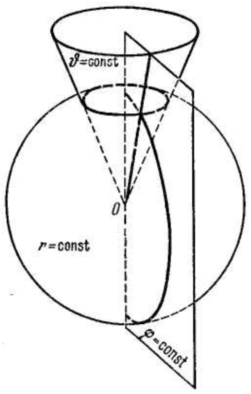
Рис. 3.54. Рис. 3.55.

Циліндричні координати часто застосовуються при розгляді тіл обертання (кругові циліндр і конус і т.д.), причому вісь z розташовується по осі обертання.

2. *Сферичні координати* $(r;\ \upsilon;\ \varphi)$, які показані на рис. 3.55, аналогічні географічним з тією різницею, що «широта» υ тут відраховується не від екватора як у географії, а від «північного полюса». Інтервали зміни координат, яких достатньо для опису всіх точок у просторі, такі: $0\le r<\infty;\ 0\le\upsilon\le\pi;\ -\pi<\varphi\le\pi.$

Координатні поверхні і лінії показані на рис. 3.56. Зв'язок між декртовими координатами $(x;\ y;\ z)$ і сферичними$(r;\ \upsilon;\ \varphi)$, якщо системи координат розташовані, так як на рис. 3.57, виражається формулами

$$x=\rho\cos\varphi=r\sin\upsilon\cos\varphi;$$
$$y=r\sin\upsilon\sin\varphi;$$
$$z=z\cos\upsilon.$$



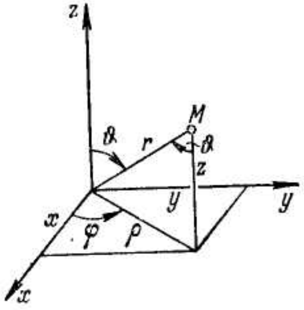


Рис. 3.56. Рис. 3.57.

Сферичні координати особливо зручні при розгляді тіл, обмежених поверхнями, показаними на рис. 3.56, але застосовуються і у багатьох інших випадках.

Декартові, циліндричні і сферичні координати — це окремі випадки ортогональних *координат,* характерних тим, що кут між координатними лініями в точках їхнього перетину прямий. Іноді застосовуються і неортогональні координати.

Число степенів свободи. Ми бачили, що в просторі можливі різні - системи координат, але для усіх них є загальним те, що положення точки в просторі визначається *трьома* координатами, тоді як положення точки на площині визначається *двома* координатами, а на лінії — *однією.* Це можна виразити словами: при виборі точки в (геометричному) просторі або, що те ж саме, при русі точки в просторі мають *три степені свободи,* тоді як при виборі точки на площині (а також на будь-якій поверхні) мають дві степені свободи, а на лінії - одну. Або, іншими словами: простір тримірний, тоді як поверхні двомірні, а лінії одномірні.

У загальному випадку поняття про число степенів свободи вводиться так. Нехай маємо деяку сукупність об'єктів (у попередньому прикладі — сукупність усіх точок у просторі), кожний з яких може бути охарактеризований приведеними чисельними значеннями деяких параметрів (у попередніх прикладах - координат). Нехай ці параметри є:

1) *незалежними,* тобто можуть приймати довільні значення: наприклад, якщо зафіксувати всі параметри, крім одного, то цей один можна ще довільно змінювати, може бути, у деяких границях;

2) *істотними,* тобто, при будь-якій зміні параметрів об'єкт, що розглядається, фактично змінюється. Тоді, якщо таких параметрів *k,* говорять, що при виборі об'єкта з розглянутої сукупності мають *k* *степенів свободи,* а сама сукупність називається (узагальненим) *k-мірним простором* або *k-мірним різномаїттям.* Самі параметри називаються (узагальненими) *координатами* в цьому просторі; як і у випадку звичайних координат у звичайному просторі, їх можна вибирати різним способом, як це виявиться зручнішим в тому або іншому дослідженні. Об’єкти, що складають простір, називаються його *елементами* або *точками.* Таким чином, багатомірний простір одержує конкретне тлумачення.

Приведене визначення розмірності погоджується з визначенням розмірності лінійного простору, так як за параметри в такому просторі можна прийняти коефіцієнти розкладання вектора по деякому фіксованому базису. Але тепер ми розглядаємо простори значно більш загального вигляду, елементи яких об'єднані тільки «загальною природою» і поняттям близькості між елементами, якій повинна відповідати близькість між відповідними параметрами. Такі загальні простори з поняттям близькості між елементами або, що те ж саме, з поняттям переходу до послідовності називаються *топологічними просторами.*

Приведемо кілька прикладів. Нехай розглядається сукупність усіляких кіл на площині. Кожне коло цілком характеризується трьома параметрами: координатами *(x; y)* центра і радіусом *r.* Ці параметри незалежні (їх можна довільно змінювати) і істотні (при їхній зміні коло також міняється). Таким чином, при виборі кола на площині є три степені свободи, тобто така сукупність кіл утворить тривимірний простір з узагальненими координатами *(x; y; r).* Аналогічно сукупність усіляких куль у просторі утворить чотирьохмірний простір.

У фізиці систематично розглядається сукупність *подій,* кожна з яких цілком характеризується відповідями на питання «де?» і «коли?» На перше питання можна відповісти показуючи, наприклад, на декартові координати *x, y, z,* а на друге – показуючи на момент часу *t.* Таким чином, простір подій— чотирьохмірний і узагальненими координатами в ньому можуть служити *(x; y;* z; *t).*

Ще приклад: скільки степенів свободи має відрізок даної довжини *l* при русі в просторі? Кожен такий відрізок цілком визначається координатами (x_1,y_1,z_1) і $(x_2;\ y_2;\ z_2)$ його кінців; ці координати можна прийняти за параметри, що визначають положення відрізка. Ці параметри, мабуть, істотні, однак вони не є незалежними, а зв'язані співвідношенням

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=l.$$

Таким чином, тільки п'ять параметрів можна вважати незалежними, а шостий виражається через них з цього співвідношення. Відрізок даної довжини при русі в просторі має п'ять степенів свободи.

У загальному випадку, якщо параметрів *n* і вони істотні, але зв'язані *m незалежними* рівняннями (тобто такими рівняннями, з яких жодне не випливає з інших), то *n-m* параметрів можна прийняти за незалежні, а інші *m* будуть через них виражатися, тобто буде *n-m* степенів свободи. Таким чином, наприклад, при русі трикутника в просторі вийде 9-3=6 степенів свободи. Цей приклад важливий у зв'язку з тим, що положення абсолютно твердого тіла довільної форми цілком визначається вказівкою положення трьох його точок, що не лежать на одній прямій. Виходить, при русі такого тіла в просторі також мають шість степенів свободи. Знайдемо ще число степенів свободи при русі нескінченної прямої в просторі. Можна розмірковувати так: виберемо довільно дві точки *A* і *B* у просторі (кожна має по три координати) і проведемо через них пряму *(P),* що буде визначатися, таким чином, шістьма параметрами. Так як ці параметри незалежні, то, здавалося б, виходить шість степенів свободи. Однак таке міркування невірне, так як при зміні цих параметрів точки *A* і *B* будуть, правда, мінятися, але пряма *(P)* може при цьому залишатися незмінною; виходить, вимога до того, щоб параметри були істотними, не виконується. Так як пряма (*P*) не міняється, якщо точка *A* ковзає по ній (один степінь свободи) або точка *B* ковзає по ній (ще один степінь свободи), то при нашому підрахунку вийшли два зайві степені свободи і насправді число степенів свободи дорівнює 6—2= 4. За незалежні й істотні параметри можна взяти, наприклад, координати точок перетину прямої (*P*) із площинами *xOy* і *yOz;* правда, не всі прямі перетинаються з цими площинами, але ці особливі випадки не можуть позначитися при підрахунку числа степенів свободи.

У *k*-мірному просторі можуть бути сукупності точок, тобто *підпростору* (різноманіття) тієї ж, або меншої розмірності. Попадання на різноманіття (S) розмірності $k — 1$ є винятковою обставиною, якщо, звичайно, це попадання спеціально не передбачено; воно обумовлюється виконанням визначеного співвідношення вигляду $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots\alpha_k)=0$ між координатами $\alpha_{1,}\alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Типовим, основним випадком є непопадання на *(S),* тобто виконання нерівності $f_s \neq 0$. Якщо ця нерівність виконана при деяких значеннях координат, то вона зберігається при будь-яких досить близьких значеннях, тоді як рівність $f_s=0$ може при як завгодно малій зміні координат порушитися. Тому говорять, що властивість, яка характеризується нерівностями між координатами, є *грубою, структурно стійкою* відносно зміни координат, тоді як властивість, яка характеризується рівностями, є *тонкою, структурно нестійкою.* Однак, якщо координати міняються так, що f_s безупинно переходить від від'ємних значень до додатних, то на шляху повинне бути і $f_s=0$, тобто, точка попадає на *(S).* Ще більш важким є попадання на різноманіття розмірності $k—p < k - 1$; для цього повинно виконуватися *p* співвідношень які мають вид рівностей.

Розглянемо, наприклад, систему двох рівнянь першого степеня з двома невідомими. Простір таких систем шестимірний, так як система визначається параметрами a_1 b_1, $d_{1,}$ a_2, b_2, d_2, які і можуть вважатися координатами системи. Особливий випадок визначається рівністю

$$D =a_1b_2—a_2b_1=0,$$

Тобто, структурно стійким є основний випадок $D\neq0$, а підпростір *(S)* особливих випадків п‘ятимірний. Серед цих особливих випадків типовим є несумісність системи, тоді як системи з нескінченним числом розв’язань утворюють чотирьохмірний підпростір у (*S*).

3.6. Поверхні і лінії в просторі

Поверхні в просторі. Раніше ми показали, що рівняння

$$F(x,y,z)=0 \quad (3.46)$$

визначає в просторі *x, y, z* (тобто в просторі, у якому задана декартова система координат *x, y, z)* деяку поверхню *(S),* яка представляє собою сукупність точок, координати яких задовольняють даному рівнянню (3.46). При цьому співвідношення (3.46) називається *рівнянням поверхні (S).* Якщо, навпаки, спочатку дана поверхня *(S)* у просторі *x, y, z,* то можна одержати її рівняння у формі (3.46). Наприклад, легко вивести рівняння сфери з центром у точці *(a; b; c)* і радіусом *R:*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2-R^2=0.$$

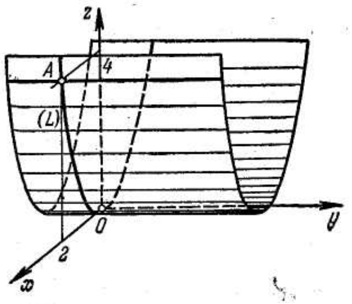
Рівняння поверхні можна записати й в інших координатах: наприклад, у сферичних воно має вигляд $\Phi\ (r, \upsilon, \varphi) = 0$.

При пошуку точок перетину трьох поверхонь, рівняння яких задані у формі (3.46), доводиться розв’язувати систему трьох рівнянь з трьома невідомими:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z)=0\\ F_2(x,y,z)=0\\ F_3(x,y,z)=0 \end{aligned}\right\}$$

Також, як п.7 мікромодуля 6 *вводяться поняття про алгебраїчні* і *трансцендентні поверхні.* Можливі особливі випадки: уявні поверхні, випадки *виродження* і *розпадання.* Варто тільки мати на увазі, що в п.8 лінія могла вироситися в точку, а поверхня може вироджуватися в точку (наприклад, «сфера нульового радіуса») або в лінію; наприклад, нескінченний «круговий циліндр нульового діаметра» являє собою пряму лінію.

Циліндри, конуси, поверхні обертання. Візьмемо для приклада рівняння $z — x^2=0$. Якщо його розглядати тільки в площині xOz, то це рівняння параболи *(L)* $(z=x^2)$, якій належать точки $O(x=0;\ z=0)$; $A(x=2;\ z=4)$ і т.п. Але якщо це ж рівняння розглядати у всьому просторі $x,\ y,\ z$, то вийде рівняння циліндричної поверхні (рис.3.58), направляючою якої служить парабола (*L*), а твірні паралельні осі *у* *(параболічний циліндр).* Дійсно, поряд, наприклад, із точкою *А* поверхні, яка розглядається ,належать точки (2; 5; 4), (2; —8; 4) і узагалі всі точки з координатами $(2;\ y;\ 4)$ при довільному *у,* так як ці координати задовольняють розглянутому рівнянню (воно не містить *у,* тобто *у* може бути будь-яким, аби *х* і *z* були такими, як потрібно). Але ці точки заповнюють всю пряму, показану на рис. 3.58 жирно; аналогічно розглядаються й інші точки параболи *(L).*



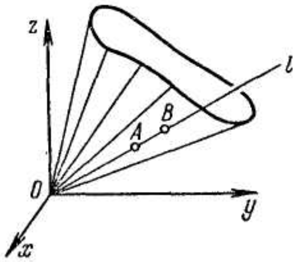


Рис. 3.58. Рис. 3.59.

Подібним чином будь-яке рівняння вигляду $F(x,\ z)=0$ являє собою в просторі $x,\ y,\ z$ рівняння деякої *циліндричної поверхні* з твірними, паралельними осі *у,* і напрамляючій в площині xOz з тим же рівнянням $F(x,\ z)=0$. Рівняння ж $\Phi(x,\ y)=0$ і $\Psi(y,\ z)=0$ представляють циліндричні поверхні з твірними, паралельними відповідно осі *z* або осі *х*. Наприклад, рівняння $x^2+y^2=R^2$ представляє прямий круговий циліндр радіуса *R* з віссю *Oz* (те ж рівняння в площині *xOy* представляє коло).

Розглянемо тепер рівняння (3.46), причому будемо припускати, що функція *F* однорідна і доведемо, що це рівняння представляє *конічну поверхню* з вершиною на початку координат. Дійсно (рис.3.59), нехай розглянута поверхня містить деяку точку *А* с координатами $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Тоді $F(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$, так як координати точки *А* повинні задовольняти рівнянню поверхні. Візьмемо тепер будь-яку точку *В* з координатами $(t\bar{x},t\bar{y},t\bar{z})$, де *t* — яке завгодно додатне число.

Тоді

$$F(t\bar{x};t\bar{y};t\bar{z}) = t^k F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = t^k 0 = 0,$$

тобто і точка *В* лежить на розглянутій поверхні. Але якщо тепер змінювати *t,* то точка *В* опише цілий промінь *l*, який, таким чином,

теж лежить на цій поверхні. Отже, розглянута поверхня разом з будь-якою своєю точкою *А* містить цілий промінь *l*, звідки випливає, що ця поверхня - конічна, точніше, являє собою *«напівконус»;* конус вийде, якщо *t* у тотожності може бути і від'ємним. Наприклад, рівняння $ax^2+by^2—cz^2=0$ $(a,b,c>0)$ представляє конус; так як в площині $z=1$ виходить еліпс, то це - еліптичний конус з віссю *Oz.* На закінчення розглянемо рівняння *поверхонь обертання.* Нехай наприклад, лінія *(L),* яка лежить у площині *yOz* і має рівняння $F(y,\ z) = 0$, обертається відносно осі z (рис. 3.60); виведемо рівняння отриманої поверхні.

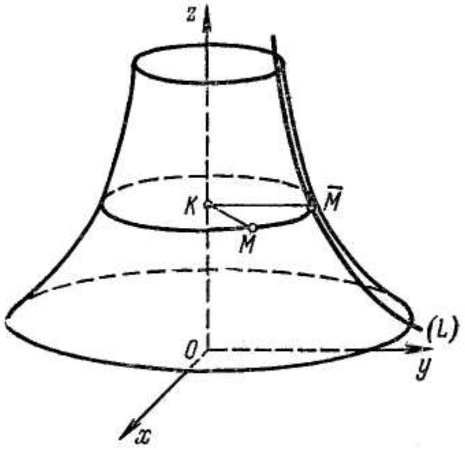


Рис. 3.60.

Для цього візьмемо на ній довільну точку *M (x; y; z)* і знайдемо відповідну точку $\overline{M}\ (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ на лінії *(L)*. Тоді $\bar{z} = z$, $\bar{x} = 0$, а для обчислення $\bar{y}$ помітимо, що $\bar{y} = \overline{KM} = KM = \sqrt{x^2 + y^2}$.Так як точка $\overline{M}$ лежить на *(L),* то $F\ (\bar{y}, \bar{z}) = 0$, тобто $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$. Це і є рівняння розглянутої поверхні обертання. Наприклад, $z=ay^2$ — рівняння параболи в площині *yOz,* а $z = a\,(x^2 + y^2)$ — рівняння параболоїда обертання.

Лінія в просторі. Лінія в просторі може вийти як результат перерізу (тобто як загальна частина) двох поверхонь або як слід (траєкторія) точки, що рухається. У першому випадку рівняння обох поверхонь у декартових координатах можна записати у вигляді

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{aligned}\right\} (3.47)$$

Тоді, оскільки точки лінії їхнього перетину належать одночасно обом поверхням, ця лінія буде являти собою сукупність точок, координати яких задовольняють одночасно обом рівнянням (3.47), тобто (3.47) треба розглядати як систему двох рівнянь із трьома невідомими.

При другому підході рівняння лінії виходить у параметричному вигляді

$$x=\varphi(t);\ y=\psi(t);\ z=\chi(t)\ .\ (3.48)$$

Для переходу від цього вигляду до вигляду (3.47) треба з рівнянь (3.48) виключити *t* (наприклад, з першого рівняння виразити *t* через *x* і підставити результат у два інших рівняння), якщо це удасться і якщо це доцільно. Для зворотного переходу від (3.47) до (3.48) треба (при тих же «якщо») у (3.47) підставити, наприклад, $x=t$, після чого розв'язати ці два рівняння відносно *y* і *z;* у результаті *y* і *z* виразяться через *t*.

Іноді виникає задача про находження проекції (*L*') заданої лінії (*L*) на одну з координатних площин, наприклад на площину *xOy* (рис. 3.61). Це означає, що потрібно знайти співвідношення між *x* і *y* для точок цієї лінії. Якщо (*L*) задана рівняннями (3.47), то для находження (*L*') з них треба виключити z, а якщо *(L)* задана у вигляді (3.48), то треба просто залишити дві перші рівності.

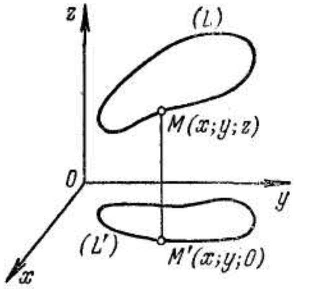


Рис. 3.61.

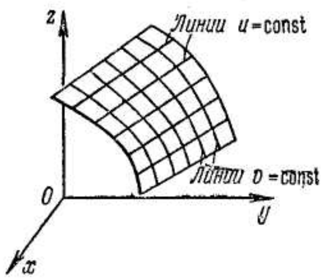


Рис. 3.62.

Параметричне завдання поверхонь у просторі і функцій. Раніше ми бачили (формули (3.48)), що для параметричного представлення лінії потрібен один параметр. Подивимося тепер, що вийде, якщо параметрів два, тобто який геометричний зміст рівнянь

$$x=\varphi(u,v);\ y=\psi(u,v);\ z=\chi(u,v)\quad (3.49)$$

у яких параметри *u* і *v* приймають довільні числові значення. Природно припустити, що ці рівняння представляють поверхню в просторі, так як точка на поверхні має дві степені свободи і тому потребує для свого показу двох параметрів.

Для обґрунтування цього припущення виберемо які-небудь два з рівнянь (3.49), наприклад, два перших. З них можна взагалі говорячи (у всякому разі, у принципі), виразити u і v через x і y. Якщо тепер підставити отримані вирази $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ у третє рівняння (3.49), то ми одержимо рівняння вигляду $z=z(x, y)$, яке, як ми знаємо, представляє поверхню в просторі.

Отже, *рівняння* (3.49) *задають у параметричній формі поверхню в просторі.*

У деяких особливих випадках описаний перехід принципово неможливий. Це означає, що розглянута поверхня вироджується в лінію або точку. Наприклад, «поверхня» $x=u+v$, $y=2u+2v$, $z=1—u—v$ насправді є лінією .

На рис. 3.62 показано примірний вигляд поверхні *(S)*, заданої рівняннями (3.49). Якщо покласти u сталим і змінювати тільки v, то (так як залишиться тільки один параметр) ми будемо одержувати різні лінії на *(S)* у залежності від значення u; аналогічно, приймаючи v=const, одержимо інше сімейство ліній на *(S)*. Ці лінії можна прийняти за координатні лінії на *(S)*, а u і v — за координати на *(S)*.

Рівняння (3.49) задають визначену функціональну залежність між x, y, z. Дійсно, якщо задати x і y, то, як говорилося вище, можна (у всякому разі, принципово) знайти відповідні значення u і v і тим самим відповідне значення z. Таким чином, виходить функція $z\ (x, y)$, *задана в параметричній формі,* а графіком її служить розглянута вище поверхня *(S)*.

У загальному випадку для будь-якого числа змінних *параметрична залежність* виходить так. Нехай дано рівняння

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, ..., t_m); \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, ..., t_m); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, ..., t_m), \end{aligned}\right\} \qquad (3.50)$$

де змінні $t_1, t_2, \ldots, t_m$ відіграють роль параметрів. Тоді, якщо $m < n$, то вибравши з даних рівнянь деякі m, можна (за винятком

особливих випадків виродження) виразити з них $t_1, t_2, \ldots t_m$ через відповідні x, після чого підставити отримані залежності в інші рівняння (3.50). Таким чином, рівняння (3.50) визначають n-m з x як функції m інших x. Можна сказати, що рівняння (3.50) представляють *m-мірне різноманіття* в *n-мірному* просторі, при виборі точки на такому різноманітті маємо m степенів свободи. У випадках виродження розмірність різноманіття виявляється менше m. Якщо $m \geq n$, то рівняння (3.50) функціональної залежності між величинами x, узагалі говорячи, не визначають.

3.7. Алгебраїчні поверхні перших двох порядків

Поверхні першого порядку. Рівняння поверхні першого порядку в загальному вигляді таке

$Ax+By+Cz+D=0$. (3.51)

Щоб з'ясувати, що це за поверхня, уведемо вектор

$$\boldsymbol{a}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}; \qquad (3.52)$$

тоді рівняння (3.51) можна переписати у формі $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}+D=0$, де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор. Однак $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}=a\text{пр}_\text{a}\boldsymbol{r}$, звідки одержуємо

$a\text{пр}_\text{a}\boldsymbol{r}+D=0; \quad \text{пр}_\text{a}\boldsymbol{r}= —D/a$

Таким чином, виходить, що в просторі потрібно взяти сукупність усіх точок M, для яких проекція радіуса-вектора на сталий вектор $\boldsymbol{a}$ має стале значення $–D/a$. Вийде (рис. 3.63) площина (P), яка перпендикулярна до вектора $\boldsymbol{a}$.

Отже, *поверхні першого порядку— це площини.*

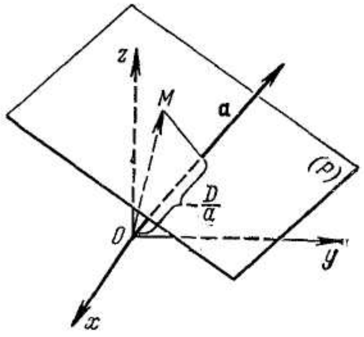


Рис. 3.63.

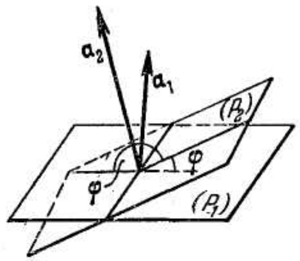


Рис. 3.64.

Розглянемо кілька задач.

1) *Вплив коефіцієнтів A,D,C,D на положення площини (P) у просторі* видно з рис. 3.63. Наприклад, якщо не змінювати коефіцієнти $A,D,C,$ а змінювати $D,$ то площина буде поступально переміщатися, зокрема, при $D=0$ вона пройде через початок координат; зміна ж коефіцієнтів A, B або C спричиняє поворот вектора $\boldsymbol{a}$, а отже, і поворот площини (P). Якщо $A=0$, то вектор $\boldsymbol{a}$ лежить у площині yOz і тому площина (P) паралельна осі x; якщо до того ж і $D=0$, то площина (P) пройде через вісь x.

Аналогічно розбираються випадки рівності нулеві інших коефіцієнтів.

Відмітимо рівняння площин xOy: $z=0$; yOz: $x=0$ і zOx: $y=0$

2) *Через дану точку $(x_1; y_1; z_1)$ провести площину перпендикулярно до даного вектора* (3.52). З (3.51) одержуємо відповідь

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

3) *Кут φ між двома площинами*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D=0,\quad A_2x+B_2y+C_2z+D=0\,. \qquad (3.53)$$

дорівнює кутові між перпендикулярними до них векторами

$$\boldsymbol{a}_1=A_1\boldsymbol{i}+B_1\boldsymbol{j}+C_1\boldsymbol{k};\quad \boldsymbol{a}_2=A_2\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+C_2\boldsymbol{k}\,. \quad (3.54)$$

або доповнює цей останній кут до 180°, як кути з взаємно перпендикулярними сторонами (рис. 3.64). Виходить, косинуси цих кутів або рівні, або розрізняються лише знаком. Обчислюючи кут між векторами одержимо

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A^2{}_1+B^2{}_1+C^2{}_1}\sqrt{A^2{}_2+B^2{}_2+C^2{}_2}}$$

4) *Умова паралельності*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

двох площин (3.53) також виходить з аналогічної умови для відповідних векторів (3.54). Якщо ж

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2},$$

то рівняння (3.53) рівносильні, тобто площини збігаються.

5) *Лінія* (пряма) *перетину двох площин* (3.53) вийде, якщо розглянути обидва рівняння (3.53) спільно як систему. Від цієї системи можна перейти до параметричної форми рівнянь прямої так, як це описано раніше. Покажемо цей перехід на прикладі. Нехай пряма лінія задана як перетин площин

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z-3&=0;\\ 2x+y+4z-5&=0.\end{aligned}\right\}$$

Позначивши $z=t$, одержимо

$$\left.\begin{aligned} x-2y&=-t+3;\\ 2x+y&=-4t+5.\end{aligned}\right\}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знайдемо

$$x=(13/5)-(9/5)t;\ y=(-1/5)-(2/5)t;\ z=t;$$

Виходить, розглянута пряма проходить через точку (13/5; -1/5;0) паралельно векторові

$$\boldsymbol{b}=-(9/5)\mathbf{i}-(2/5)\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

Задачі на прямі, а також на площині і прямі можна часто розв'язувати за допомогою такого переходу і застосування властивостей векторів. Розберемося в *геометричному змісті різних випадків, що можуть виникнути при розв'язані системи трьох рівнянь першого степеня з трьома невідомими.* Кожне з цих рівнянь представляє площину в просторі x, y, z, і, таким чином, мова йде про віднайдення точки перетину трьох площин (P_1), (P_2), (P_3). Визначник системи D дорівнює векторно-скалярному добуткові трьох перпендикулярних до них векторів. Якщо $D\neq 0$, то ці вектори не паралельні одній площині і тому площина (P_3) перетне лінію перетину (P_1) з (P_2) рівно в одній точці, тобто система має рівно одне розв'язання. Якщо ж $D=0$, то вектори паралельні одній площині (T) або, що те ж само (рис. 3.65), площини (P_1), (P_2), (P_3) паралельні деякій прямій (l) і тому або не мають ні однієї загальної точки, або, маючи загальну точку, мають цілу загальну пряму, паралельну (l). У першому випадку система не має розв'язань, а в другому має нескінченну кількість, цілу «пряму розв'язань». Можливе розташування площин в обох випадках показане на рис. 3.66.

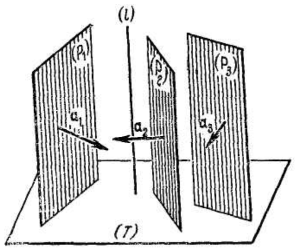


Рис. 3.65.

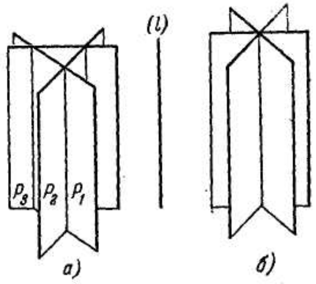


Рис. 3.66.
а) Загальної точки нема; б) загальна пряма.

Еліпсоїд. Ми не будемо давати геометричне визначення еліпсоїда, а почнемо з розгляду його *канонічного рівняння*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.55)$$

де *a, b, c* —додатні сталі, які називаються *півосями.*

Легко перевірити, що $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$, тобто еліпсоїд — кінцева, обмежена поверхня; що площини *xOy, yOz* і *zOx* служать площинами симетрії, а початок координат — центром симетрії (*центр еліпсоїда).* Щоб уточнити форму еліпсоїда, застосуємо *метод перерізів, який* полягає в дослідженні ліній перерізу розглянутої поверхні з координатними площинами, тобто площинами вигляду

$$x = \text{const},\ y = \text{const і } z = \text{const}.$$

Розглянемо спочатку лінію перерізу нашого еліпсоїда з площиною *z=h,* яка паралельна площині *xOy*. Для цього покладемо *z=h* у рівнянні (3.61), в результаті чого вийде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \quad або \quad \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1$$

тобто виходить еліпс із півосями $a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ і $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$

Таким чином, при *h*=0 вийде еліпс із півосями *a* і *b;* при збільшенні $|h|$ цей еліпс буде зменшуватися подібно і при $h=\pm c$ півосі стануть рівними нулеві, тобто еліпс вироджується в точку. Переріз еліпсоїда з площинами *y=h* і *x=h* дає аналогічний результат, і ми одержуємо поверхню, яка зображена на рис. 3.67.

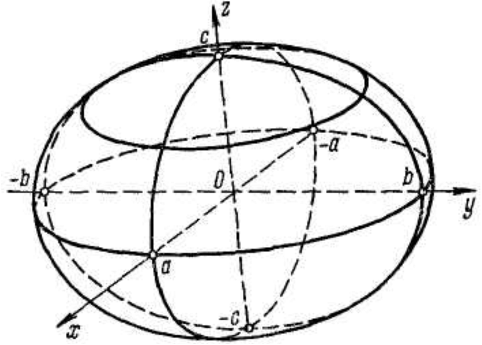


Рис. 3.67.

Якщо дві з півосей рівні, наприклад *a=b,* то в перетині з площинами *z=h* будуть виходити кола. Тоді замість *тривісного еліпсоїда* одержимо *еліпсоїд обертання,* тобто поверхню, отриману від обертання еліпса навколо однієї з його осей. У залежності від того, навколо якої осі, великої або малої, буде виконуватися обертання, вийде *витягнутий* (як яйце) або *сплюснений* еліпсоїд обертання. Якщо ж усі три півосі рівні, то еліпсоїд перетворюється в *сферу,* тобто поверхню кулі.

Аналогічно легко показати, що тривісний еліпсоїд виходить у результаті двох рівномірних стисків або розтягувань сфери до координатних площин; у результаті одного стиску виходить обов'язково еліпсоїд обертання. У той же час відомо, що при рівномірному стиску еліпсоїда знову виходить еліпсоїд.

Гіперболоїди. Гіперболоїди бувають двох типів.
Однопорожнинний гіперболоїд має канонічне рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (3.56)$$

Переріз площиною *z=h* дає еліпс із півосями

$$a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}} \quad і \quad b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}.$$

Тоді, при $h = 0$ вийде еліпс із півосями a і b, а при збільшенні $|h|$ цей еліпс буде подібно збільшуватися до нескінченності. Переріз з площинами $y=h$ і $x=h$ дає гіперболи, і ми одержуємо поверхню, зображену на рис. 3.68.

Як і еліпсоїд, гіперболоїд має три площини симетрії і центр симетрії. Якщо $a=b$, то виходить *однопорожнинний гіперболоїд обертання*—поверхня, яка отримана від обертання гіперболи навколо її умовної осі.

Його можна одержати також іншим способом, для пояснення якого покладемо $y=b$ у рівнянні (3.56), тобто подивимося, що вийде в перетинані з площиною $y = b$.

Вийде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0; \quad \left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0$$

тобто лінія розпадається на пару прямих

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right) \quad і\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) \quad (y=b),$$

показаних на рис. 3.69 і які пересікаються у точці A (0; b, 0). У силу осьової симетрії аналогічна картина вийде в перетинанні з будь-якою вертикальною площиною, що стосується «горлового кола». Виходить, весь *цей гіперболоїд цілком заповнений* показаними на рис. 3.69 *двома сімействами прямих ліній,* так що через кожну його точку проходять по дві прямі, що цілком лежать на ньому (подібно тому як циліндр або конус цілком заповнені одним сімейством прямих ліній).

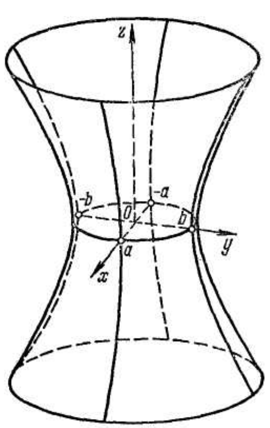


Рис. 3.68.

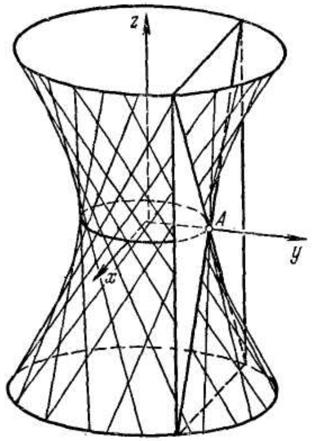


Рис. 3.69.

Також видно, що *однопорожнинний гіперболоїд обертання можна одержати від обертання однієї з двох перехресних прямих у просторі навколо іншої.* Що стосується однопорожнинного гіперболоїда загального вигляду (3.56), то він виходить з гіперболоїда обертання в результаті рівномірного стиску, при якому прямі залишаються прямими, і тому *також заповнений двома сімействами прямих ліній.* Відзначимо на закінчення, що площина, яка показана на рис. 3.69, є дотичною площиною до гіперболоїду в точці A. Справді, *дотична площина в будь-якій точці A будь-якої поверхні (S)* - це, по визначенню, *площина, яка проходить через A і дотична там до будь-якої лінії, що проходить через цю точку і яка лежить на (S).* Отже, дотична площина до гіперболоїду повинна проходити через обидві прямі, що лежать на ньому і які проходять через A. Отже, виявляється, що дотична площина може перетинати поверхню по двох лініях.

Канонічне рівняння *двупопорожнинного гіперболоїда* таке:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Переріз площиною $z = h$ дає еліпс із півосями

$$a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1} \quad і \quad b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

Таким чином, при $|h|<c$ перерізу нема, при $|h|=c$ виходять нульові півосі, а при подальшому збільшенні $|h|$ – еліпс, який подібно збільшується до нескінченності. Переріз площинами $y=h$ і $x=h$ дає гіперболи, і ми будемо одержувати поверхню, що складається з двох нескінченних шматків, яку зображено на рис. 3.70.

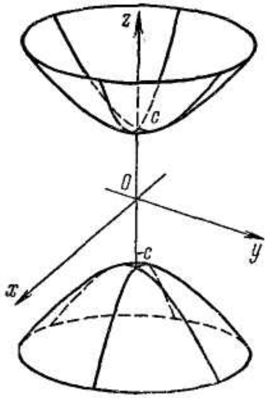


Рис. 3.70.

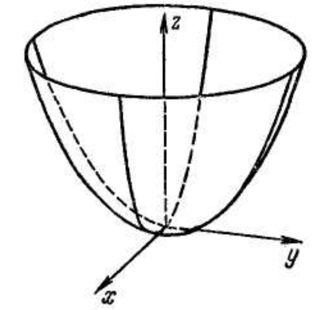


Рис. 3.71.

Переріз площинами $y= h$ і $x=h$ дає параболи, і ми одержуємо поверхню, зображену на рис. 3.70. Якщо $a=b$, виходить *двупорожнинний гіперболоїд обертання - поверхня*, отримана від обертання гіперболи навколо її дійсної осі.

Параболоїди. Параболоїди також бувають двох типів.

Еліптичний параболоїд має канонічне рівняння $z=ax^2+by^2$ $(a,b>0)$. У перерізі площиною $z=h$ вийде $ax^2+by^2=h$ або $x^2/(h/a)+y^2/(h/b)=1$ тобто еліпс із півосями $\sqrt{h/a}$ і $\sqrt{h/b}$. Виходить, при $h<0$ перерізу не буде, при $h=0$ вийде точка (початок координат), а при збільшенні $h>0$ вийде еліпс, який подібно збільшується до нескінченності. Переріз площинами $y=h$ і $x=h$ дає параболи, і ми одержуємо поверхню, зображену на рис. 3.71.

Параболоїд має дві площини симетрії $(x=0$ і $y=0)$. Якщо $a=b$, виходить *параболоїд обертання* — поверхня, яка отримана від обертання параболи навколо її осі.

Гіперболічний параболоїд має канонічне рівняння

$$z=—ax^2+by^2 \ (a,b>0). \quad (3.57)$$

Переріз з площиною $x=0$ дає параболу $z=by^2$, обернену гілками нагору, тоді як переріз з площинами $y=h$ дає параболи $z= —ax^2+bh^2$, обернені гілками вниз (рис. 3.72).

Переріз же з площинами $z = h$ дає гіперболи. Таким чином, виходить поверхня, що має вигляд сідла.

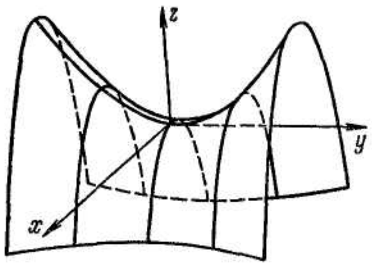


Рис. 3.72.

Можна довести, що ця поверхня, як і однопорожнинний гіперболоїд, цілком заповнена двома сімействами прямих ліній. Наприклад, на початку координат дотичною площиною до поверхні служить площина $z = 0$; у той же час, якщо в рівнянні (3.57) покласти $z=0$, то ми одержимо $\sqrt{a}x=\pm\sqrt{b}y$, тобто дотична площина перерізає поверхню по двох прямих лініях.

Огляд поверхонь другого порядку. Рівняння поверхні другого порядку в загальному вигляді таке:

$$A'x'^2+C'y'_2+F'z'_2+G'x'+H'y'+I'z'+J=0. \quad (3.58)$$

Завжди можна зробити такий поворот декартових осей координат, після якого рівняння в нових осях уже не буде містити членів з добутками координат, тобто буде мати вигляд

$$A'x'^2+C'y'^2+F'z'^2+G'x'+H'y'+I'z'+J=0. \quad (3.59)$$

Подальше дослідження йде по-різному, у залежності від знаків коефіцієнтів A',C',F'. Припустимо спочатку, що всі ці коефіцієнти відмінні від нуля і одного знака, наприклад, додатні. Тоді, виконуючи доповнення до повного квадрата, а потім паралельний перенос осей, приходимо до рівняння

$$A'x''^2+C'y''^2+F'z''^2+J'=0,$$

тобто

$$\frac{x''^2}{-\frac{J'}{A'}}+\frac{y''^2}{-\frac{J'}{C'}}+\frac{z''^2}{-\frac{J'}{F'}}=1$$

Звідси, якщо $J'<0$, одержуємо канонічне рівняння еліпсоїда, тобто і вихідна поверхня (3.58) була еліпсоїдом, але відносно осей x, y, z зміщеним і повернененим. Якщо ж $J' > 0$ або $J'=0$, то одержуємо відповідно уявну поверхню або точку. Аналогічні результати виходять, якщо коефіцієнти A', C', F' від'ємні.

Мікромодуль 7
Приклади розв'язання типових задач

1. Дано координати точок M_0 (2; 3; 1), M_1, (1; 2; -1), M_2(3;1;-2), M_3 (-2; 3; -2). Знайдіть:

а) рівняння площини M_1 M_2 M_3;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині M_1 M_2 M_3;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$.

Розв 'язання:

а) на площині $M_1M_2M_3$ візьмемо довільну точку $M(x,y,z)$ і утворимо три вектори

$$\overline{M_1M}=\{x-1,\ y-2,\ z+1\},\ \overline{M_1M_2}=\{2;-1;-1\},\ \overline{M_1M_3}=\{-3;1;-1\}.$$

Згідно з рівнянням площини, яка проходить через три точки складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

звідки одержуємо загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$:

$$2x + 5y-13 = 0;$$

б) запишемо рівняння площини α що проходити через точку M_o паралельно площині $M_1M_2M_3$, використавши той факт, що паралельні площини мають однакові вектори нормалі. Вектором нормалі площини $M_1M_2M_3$ є вектор ***n*** = {2; 5; — 1}

За формулою $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ рівняння площини α має вигляд:

$$2(x - 2) + 5(y - 3) - (z -1) = 0 ,$$

або

$$2x+5y-z-18=0$$

в) щоб записати рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$, скористаємось рівнянням площини, у якому координата вектора $\overline{M_1M_3}$, є координатами вектора нормалі:

$$-3(x-2)+(y-3)-(z-1)=0, \text{ або } 3x-y+z-4=0;$$

відстань від точки M_0(2;3;1) до площини $M_1M_2M_3$, заданої рівнянням

$$2x + 5y- z —13 = 0,$$

обчислюємо за формулою :

$$d=\frac{|\,2\cdot 2+5\cdot 3-1-13\,|}{\sqrt{2^2+5^5+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30.}}$$

2. Складіть рівняння площини, що проходить через точку M_0 (1; -2; 4) паралельно до векторів ***a*** = {2; -1; 0} та ***b*** = {3; -1; 3}.

Розв 'язання. Оскільки площина паралельна до векторів ***a*** і ***b*** , то нормаль ***n*** шуканої площини перпендикулярна до цих векторів. Тому за нормаль можемо взяти векторний добуток векторів ***a*** і **b**: ***n***=***a***x***b*** (пригадайте означенуя векторного добутку двох векторів), тобто

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=3\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}$$

За формулою загального рівняння площини

$$A(x\text{-}x_0)+B(y\text{-}y_0)+C(z\text{-}z_0)=0$$

записуємо рівняння шуканої площини

$$-3(x-1)-6(y+2)+(z-4)=0, \text{ або } 3x+6y-z+13=0$$

3. Знайдіть канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases}2x-5y+2z-10=0\\ x-2y-z+1=0\end{cases}$$

Розв'язання. Щоб записати канонічні рівняння прямої, достатньо знати координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $y=0$, система набирає вигляду

$$\begin{cases}2x+2z-10=0\\ x-z+1=0\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}x+z=5\\ x-z=-1,\end{cases}$$

розв'язок якої $x=2$, $z=3$. Отже, точка $M(2;\ 0;\ 3)$ належить шуканій прямій.

Напрямний вектор знайдемо за формулою

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -5 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=9\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}, \quad \textit{або} \quad \vec{a}=\{9;4;1\}.$$

Отже , канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-2}{9}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{1}$$

4. Перевірте, чи є перпендикулярними прямі

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3} \quad i \quad \begin{cases}2x+3y+8z+5=0,\\ 3x+y-5z+1=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні напрямні вектори цих прямих. Вектор ***a*** $=\{1;\ -2;\ 3\}$ — напрямний вектор першої прямої. Напрямний вектор другої прямої знаходимо за формулою

$$\vec{a}_2=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -8\\ 3 & 1 & -5\end{vmatrix}=-7\vec{i}-14\vec{j}-7\vec{k}=-7(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}).$$

Обчислюємо скалярний добуток

$$\vec{a}_1\vec{a}_2=1\cdot1-2\cdot2+3\cdot1=0$$

Отже, прямі перпендикулярні

5. Вкажіть, яку поверхню визначають рівняння:

$$а)\ \ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1;\quad б)\ \ x^2-\frac{z^2}{16}=1;\quad z^2-4=0;$$

$$в)\ \ 4x^2+y^2=4z;\quad д)\ \ \frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{9}=0.$$

Розв' язання:

а) рівняння

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

визначає еліпсоїд обертання, утворений обертанням еліпса

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

навколо осі *Oy;*

б) задане рівняння визначає гіперболічний циліндр, твірні якого паралельні осі *Oy;*

в) рівняння z^2-4 = 0 рівносильне сукупності рівнянь $z=2$ або $z=2$, геометричним образом яких є пара паралельних площин;

г) подамо рівняння у вигляді

$z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$.- еліптичний параболоїд з віссю симетрії *Oz,*

д) рівняння

$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{9}=0$ задає круговий конус з віссю симетрії *Ox*.

6. Рівняння поверхні

$$3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z-1=0$$

зведіть до канонічного вигляду та визначіть, яку поверхню воно задає.

Розв 'язання. Виконаємо перетворення лівої частини рівняння, виділивши повні квадрати:

$$3x^2+4y^2-8z^2-18x+8y+32z-1=3(x^2-6x+9)+4(y^2+2y+1)-8(z^2-4z+4)-1-27-+32=$$
$$=3(x-3)^2+4(y+1)^2-8(z-2)^2.$$

Отже, дане рівняння набирає вигляду

$$3(x-3)^2+4(y+1)^2-8(z-2)^2=0,$$

або

$$[3(x-3)2/8]+[4(y+1)^2/6]-[8(z-2)^2/3]=0.$$

Запровадивши нові змінні

$$\overline{x}=x-3, \overline{y}=y+1, \overline{z}=z-2,$$

дістанемо рівняння

$$\frac{\overline{x}^2}{8}+\frac{\overline{y}^2}{6}-\frac{\overline{z}^2}{3}=0,$$

яке є канонічним рівнянням конуса з вершиною в точці (3; -1; 2) (система *Oxyz).*

Мікромодуль 7

Індивідуальні тестові завдання

7.1. Дано координати точок M_0, M_1, M_2, M_3 . Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$,

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\mathbf{M_1 M_2}$;

г) відстань від точки $M_о$ до площини $M_1M_2M_3$.

7.1.1. M_0(0;-1;13), M_1(1;0;1), M_2(4;6;1), M_3(6;-1;0).
7.1.2. M_0(0;1;1), M_1(-13;0;6), M_2(10;1;-3), M_3(-2;1;3).
7.1.3. M_0(0;4;1), M_1(6;-8;-2), M_2(-4;10;-1), M_3(0;-2;-3).
7.1.4. M_0(0;1;2), M_1(2;0;2), M_2(8;-1;7), M_3(12;1;1).
7.1.5. M_0(0;1;-2), M_1(1;-12;8), M_2(0;11;-10), M_3(0;-1;2).
7.1.6. M_0(1;-1;0), M_1(7;-5;-1), M_2(-3;13;0), M_3(1;1;-2).
7.1.7. M_0(1;3;1), M_1(0;-2;-1), M_2(-3;-1;6), M_3(-5;-3;0).
7.1.8. M_0(1;2;3), M_1(14;3;-2), M_2(-9;2;7), M_3(3;2;1).
7.1.9. M_0(-3;1;-1), M_1(-7;0;5), M_2(11;1;-5), M_3(-1;-1;-1).
7.1.10. M_0(0;-1;1), M_1(1;0;1), M_2(4;6;1), M_3(6;-1;0).
7.1.11. M_0(1;0;-1), M_1(-2;-1;-2), M_2(-9;2;7), M_3(3;2;1).
7.1.12. M_0(1;2;3), M_1(14;3;-2), M_2(-9;2;7), M_3(3;2;1).
7.1.13. M_0(1;-2;-1), M_1(2;-1;-1), M_2(5;0;4), M_3(7;-2;-2).
7.1.14. M_0(2;0;0), M_1(-4;5;1), M_2(2;0;-4), M_3(-2;0;-2).
7.1.15. M_0(3;-1;2), M_1(7;5;0), M_2(-1;-5;2), M_3(1;-1;-2).
7.1.16. M_0(2;1;0), M_1(3;2;0), M_2(6;3;5), M_3(8;1;-1).
7.1.17. M_0(3;5;1), M_1(-3;9;2), M_2(7;-9;1), M_3(3;3;3).
7.1.18. M_0(-1;1;0), M_1(0;1;1), M_2(1;6;4), M_3(-1;0;6).
7.1.19. M_0(4;-2;-6), M_1(2;-4;4), M_2(4;-2;1), M_3(0;-2;2).
7.1.20. M_0(-1;-3;1), M_1(5;-7;0), M_2(-5;1;1), M_3(-1;-1;-1).
7.1.21. M_0(-1;0;3), M_1(0;1;3), M_2(3;2;8), M_3(5;0;2).
7.1.22. M_0(2;-1;-3), M_1(-1;-2;2), M_2(2;-1;-7), M_3(0;-1;1).
7.1.23. M_0(-2;3;2), M_1(10;7;1), M_2(-1;0;2), M_3(-2;1;0).
7.1.24. M_0(1;0;2), M_1(0;1;2), M_2(-1;4;12), M_3(1;6;0).
7.1.25. M_0(3;2;-2), M_1(-4;-9;0), M_2(6;9;-1), M_3(2;-3;1).
7.1.26. M_0(2;-1;-5), M_1(-1;1;3), M_2(3;2;-6), M_3(1;2;0).
7.1.27. M_0(2;3;1), M_1(1;2;1), M_2(-2;1;-4), M_3(-4;3;2).
7.1.28. M_0(0;-1;1), M_1(-1;4;12), M_2(0;-5;1), M_3(0;1;-1).
7.1.29. M_0(0;-8;-2), M_1(3;-4;-1), M_2(-2;5;-1), M_3(0;4;6).
7.1.30. M_0(0;-2;1), M_1(13;-3;-4), M_2(-10;2;5), M_3(2;-2;1).

7.2. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, (див. задачу 7.1). Знайдіть:

а) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2;

б) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_3;

в) кут між прямими $M_1 M_2$ і M_2*Мз*.

7.2.1. $\begin{cases} x-4y+4z-10=0 \\ 2x+y-2z-6=0, \end{cases}$ 7.2.2. $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ 2x+3y-z-8=0, \end{cases}$

7.2.3. $\begin{cases} x+4y+z+10=0 \\ 2x-y-2z+5=0, \end{cases}$ 7.2.4. $\begin{cases} x+5y+2z-20=0 \\ 4x+2y-z-8=0, \end{cases}$

7.2.5. $\begin{cases} x-6y+3z-12=0 \\ 3x+2y-3z-6=0, \end{cases}$ 7.2.6.5 $\begin{cases} x-2y+3z+5=0 \\ 5x+y-4z-12=0, \end{cases}$

7.2.7. $\begin{cases} x+3y+2z+6=0 \\ 2x+2y-3z-6=0, \end{cases}$ 7.2.8. $\begin{cases} x-6y+2z-14=0 \\ 4x-y-2z-8=0, \end{cases}$

7.2.9. $\begin{cases} x-3y+3z-7=0 \\ 2x+y-z-3=0, \end{cases}$ 7.2.10. $\begin{cases} 2x-3y+4z-15=0 \\ 2x+y-3z-4=0, \end{cases}$

7.2.11. $\begin{cases} 3x-2y+z-8=0 \\ 2x+y-z-7=0, \end{cases}$ 7.2.12. $\begin{cases} 4x-2y+z-10=0 \\ 2x+3y-2z-12=0, \end{cases}$

7.2.13. $\begin{cases} 3x+y+4z+6=0 \\ 4x-y-2z-3=0, \end{cases}$ 7.2.14. $\begin{cases} -2x-3y+2z-5=0 \\ 2x+2y-3z-4=0, \end{cases}$

7.2.15. $\begin{cases} x-5y+3z-11=0 \\ 2x+3y-z-3=0, \end{cases}$ 7.2.16. $\begin{cases} x+6y+2z-2=0 \\ 3x+y-3z=0, \end{cases}$

7.2.17. $\begin{cases} x-7y+2z-14=0 \\ 2x+4y-z-6=0, \end{cases}$ 7.2.18. $\begin{cases} x-4y-4z+10=0 \\ 2x-y+3z+6=0, \end{cases}$

7.2.19. $\begin{cases} 3x-4y+2z-15=0 \\ x+2y-2z-10=0, \end{cases}$ 7.2.20. $\begin{cases} 5x-y+2z-20=0 \\ 2x+2y-z-4=0, \end{cases}$

7.2.21. $\begin{cases} x+3y+3z-9=0 \\ 4x+2y-z-7=0, \end{cases}$ 7.2.22. $\begin{cases} x-8y+2z+6=0 \\ 2x+y-z+4=0, \end{cases}$

7.2.23. $\begin{cases} x-2y+4z+10=0 \\ 5x+y-3z-16=0, \end{cases}$ 7.2.24. $\begin{cases} x-2y+4z-2=0 \\ 3x+2y-z-36=0, \end{cases}$

7.2.25. $\begin{cases} x-y+z-5=0 \\ 3x-2y-2z-4=0, \end{cases}$ 7.2.26. $\begin{cases} x-2y+4z-12=0 \\ 2x+y-2z-6=0, \end{cases}$

7.3. Знайдіть:

а) точку перетину прямої і площини;

б) кут між прямою і площиною;

в) точку, симетричну точці *P* відносно даної площини.

7.3.1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}, \quad x+2y+3z-14=0, \quad P(1;\,3;\,-6).$

7.3.2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}, \quad x+2y-5z+20=0, \quad P(2;\,7;\,-4).$

7.3.3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}, \quad x-3y+7z-24=0, \quad P(0;\,10;\,-2).$

7.3.4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}, \quad 2x-y+4z=0, \quad P(-4;\,6;\,6).$

7.3.5. $\frac{x-3}{--1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}, \quad 3x+y-5z-12=0, \quad P(7;\,2;\,-5).$

7.3.6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}, \quad x+3y-5z+9=0, \quad P(5;\,0;\,-6).$

7.3.7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}, \quad x-2y+5z+17=0, \quad P(-12;\,4;\,6).$

7.3.8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1}, \quad x-2y+4z-19=0, \quad P(9;\,0;\,-3).$

7.3.9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1}, \quad 2x-y+3z+23=0, \quad P(6;\,-3;\,2).$

7.3.10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}, \quad 2x-3y-5z-7=0, \quad P(15;\,6;0).$

7.3.11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}, \quad 4x-2y-z-11=0, \quad P(7;\,1;\,-1).$

7.3.12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}, \quad 3x-2y-4z-8=0, \quad P(-4;\,0;\,8).$

7.3.13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}, \quad x+2y-z-2=0, \quad P(5;\,2;\,-2).$

7.3.14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}, \quad 5x-y+4z+3=0, \quad P(9;\,5;\,-3).$

7.3.15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}, \quad x+3y+5z-42=0, \quad P(-2;\,-4;\,-6).$

7.3.16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}, \quad 7x+y+4z-47=0, \quad P(5;\,-2;\,1).$

7.3.17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}, \quad 2x+3y+7z-52=0, \quad P(0;\,6;\,-8).$

7.3.18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}, \quad 3x+4y+7z-16=0, \quad P(-5;\,1;\,-3).$

7.3.19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}, \quad 2x-5y+4z+24=0, \quad P(2;\,2;\,-4).$

7.3.20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}, \quad x-2y-3z+18=0, \quad P(11;\,4;\,-3).$

7.3.21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}, \quad x-7y+3z+11=0, \quad P(14;\,12;\,-2).$

7.3.22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}, \quad 3x+7y-5z-11=0, \quad P(0;\,13;\,-16).$

7.3.23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}, \quad 4x+y-6z-5=0, \quad P(-1;\,11;\,5).$

7.3.24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}, \quad 5x+9y+4z-25=0, \quad P(7;\,0;\,-4).$

7.3.25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}, \quad x+4y+13z-23=0, \quad P(-6;\,4;\,-2).$

7.3.26. $\frac{x-1}{9}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}, \quad 3x-2y+5z-3=0, \quad P(11;\,0;\,-1).$

7.3.27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}, \quad 3x-y+4z=0, \quad P(-6;\,-3;\,-2).$

7.3.28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}, \quad x+2y-5z+16=0, \quad P(1;\,3;\,7).$

7.3.29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}, \quad 3x-7y-2z+7=0, \quad P(2;\,4;\,8).$

7.3.30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}, \quad 5x+7y+9z-32=0, \quad P(7;\,5;\,-3).$

7.4. Задано канонічне рівняння поверхні другого порядкову. Визначте по рівнянню вид поверхні та зведіть його до канонічного вигляду

7.4.1. $36x^2 + 4y^2 - 8y + 9z^2 - 32 = 0.$

7.4.2. $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 49z + 6 = 0.$

7.4.3. $x^2 + 16y^2 - 4z^2 - 4x + 8z = 0.$

7.4.4. $3x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2z + 7 = 0.$

7.4.5. $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y - 4z + 40 = 0.$

7.4.6. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 6z - 4 = 0.$

7.4.7. $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 2y + 4z + 1 = 0.$

7.4.8. $x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 2y - 2z + 9 = 0.$

7.4.9. $x^2 + y^2 - z^2 - 4x - 4y - 4z + 4 = 0.$

7.4.10. $4x^2 + y^2 - 2z^2 - 8x + 4z + 2 = 0.$

7.4.11. $12x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 24x + 12y + 8z + 16 = 0.$

7.4.12. $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 4y - 46z + 6 = 0.$

7.4.13. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 36y - 72z + 36 = 0.$

7.4.14. $3x^2 + y^2 + 9z^2 + 12x - 2y + 4 = 0.$

7.4.15. $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4x - 20z - 1 = 0.$

7.4.16. $3x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 8y + 8z - 12 = 0.$

7.4.17. $3x^2 + 4y^2 - 6z^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$

7.4.18. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 4x + 4z + 4 = 0.$

7.4.19. $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 + 8x - 18y - 23 = 0.$

7.4.20. $2x^2 + 5y^2 - 10z^2 + 8x + 20z - 12 = 0.$

7.4.21. $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 16x - 2y + 21 = 0.$

7.4.22.9 $x^2 + y^2 - 9z^2 + 18x + 2y + 19 = 0.$

7.4.23. $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 12x - 4y + 22 = 0.$

7.4.24. $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 16x + 8y + 2z + 23 = 0.$

7.4.25. $4x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 8y - 2z + 11 = 0.$

7.4.26. $2x^2 - y^2 - 4x - 2y - 6z + 1 = 0.$

7.4.27. $5x^2 - 4y^2 + 10z^2 + 8y - 20z + 1 = 0.$

7.4.28. $9x^2 - 4y^2 - 16y - 36z - 52 = 0.$

7.4.29. $4x^2 - y^2 + 4y - 4z + 4 = 0.$

7.4.30. $4x^2 - y^2 - 16 - 2y - 4z + 7 = 0.$

Модуль 4
Величина, функція, границя

Мікромодуль 8
Величина

4.1. Поняття величини

Поняття величини настільки широке і всебічне, що йому важко дати точне визначення. Маси, тиски, роботи, заряди, довжини й об'єми, цілі і дробові числа – усе це приклади величин. На перший випадок *величиною можна вважати те, що виражено у визначених одиницях* (наприклад, у грамах або тонах і т.п.), *характеризується своїм чисельним значенням.* Так, площа кола є величиною, оскільки оскільки будучи вираженою, наприклад, у квадратних сантиметрах, цілком характеризується своїм чисельним значенням (5, π і т.п.); саме коло, звичайно не є величиною, тому що для нього характерна визначена форма, що не виражається числом.

Розмірність величини. *Розмірністю величини називається та одиниця, через яку ця величина виражена.* Так, розмірністю маси, зазвичай, служить грам або кілограм; розмірністю площі – квадратний сантиметр або квадратний метр і т.п. Зазвичай, розмірності деяких величин приймаються за основні, а розмірності інших величин виражаються через ці основні. Так, у механіці величини одиниць довжини *(м),* маси (*кг*) і часу (*сек*) вважаються основними; через них виражаються, наприклад, розмірності *(м/сек)* або сили $(кгм/сек^2)$.

Додавати або віднімати можна тільки величини однакової розмірності, причому розмірність суми така ж, як розмірність доданків.

Множити або ділити одну на одну можна величини будь-якої розмірності; при множенні (або ділені) величин їх розмірності теж множаться (або відповідно діляться). Часто розглядаються величини *безрозмірні* („відвернені”). Так, *відношення двох величин однакової розмірності євеличина безрозмірна.* Чисельне значення величини, що є відношенням цієї величини до її вибраної одиниці, також безрозмірне; наприклад, чисельним значенням маси в 5 *кг* служить „безрозмірна маса” 5.

Безрозмірну масу можна одержати також узявши відношення досліджуваної маси до деякої *характерної* в розглянутому процесі маси

(добре відомому і прийнятому в даному процесі за еталон для порівняння). Подібним чином уводяться безрозмірні довжина, час і т.п.

У курсі математики величини, зазвичай, вважаються безрозмірними, безрозмірна величина цілком характеризується своїм чисельним значенням, її „одиницею” служить число 1.

Сталі і змінні величини. *Величина, яка бере участь у деякому розгляді, може або приймати різні, або приймати одне визначене значення; у першому випадку вона називається змінною величиною, а в другому – сталою (константою).* Так, при розгляді води в басейні тиск у різних точках є величина змінна, вона залежить від місця виміру, тоді як щільність у різних точках можна з достатньою точністю вважати величиною сталою. Інший приклад: при розгляді процесу стиску визначеної порції газу при сталій температурі тиск і об'єм будуть величинами змінними , а маса і температура – сталими. Втім, треба мати на увазі, що в будь-якому реальному процесі і ці дві останні величини трохи міняються, і тільки якщо ця зміна незначна і несуттєва для іншого, можна умовно, схематизуючи процес, прийняти їх за сталі.

І в інших випадках сталість тих або інших величин, зазвичай, є лише умовною; про це треба час від часу згадувати, тому що якщо вважати сталою величину, зміна якої невелика, але істотна для розгляду, то можна прийти до помилкових висновків.

Величина, стала в одному розгляді, може в іншому аналогічному (схожому) розгляді приймати інше значення або навіть бути змінною.

Такі сталі величини називаються параметрами даного розгляду; вони є його характеристиками.

Так, у процесі ізотермічного стиску газу маса і температура служать параметрами. При виборі електричної лампочки її параметрами служать опір, напруга в мережі, на яку вона розрахована, і споживана потужність. Зазвичай, тут є й інші параметри, що іноді приходиться брати до уваги (наприклад, габарити), але, зазвичай, саме ці вважаються основними; і в інших випадках важливо уміти виділити з усіляких параметрів, що характеризують той або інший об'єкт або процес, основні, найбільш важливі параметри.

Дійсні числа.Зображення дійсних чисел точками числової осі.

Одним з основних понять математики є число. Поняття числа виникло в стародавності . Числа цілі і дробові, як додатні, так і від'ємні, разом з числом нуль називаються *раціональними числами.* Кожне раціональне число може бути представлене у вигляді відношення p/q двох цілих чисел p і q, наприклад, 5/7, 1,25=5/4.

Раціональні числа можуть бути представлені у вигляді кінцевих або нескінченних періодичних дробів. Числа, що представляються нескінченними, але неперіодичними десятковими дробами, називаються *ірраціональними числами:* такими є числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3,5}$; $\sqrt{2}$ і т.д. Сукупність усіх раціональних і ірраціональних чисел називається множиною *дійсних чисел.* Дійсні числа упорядковані по величині, тобто для кожної пари дійсних чисел x і y має місце одне і тільки одне їхнє співвідношення $x<y$, $x=y$, $x>y$. Дійсні числа можна зображувати точками числової осі.

Числовою віссю називається нескінченна пряма, на якій обрані:

1) деяка точка O, яка називається початком відліку,
2) додатний напрям, що вказується стрілкою,
3) масштаб для виміру довжин.

Найчастіше ми будемо розташовувати числову вісь горизонтально і додатний напрям вибирати з ліва на право. Якщо число x_1 додатне, то його зображують точкою M_1, яка лежить праворуч від точки O на відстані $OM_1=x_1$; якщо число x_2 від'ємне, то його зображують точкою M_2, яка лежить ліворуч від точки O на відстані $OM_2=-x_2$. Точка зображує число нуль. Очевидно, що кожне дійсне число зображується визначеною точкою числової осі. Два різних дійсних числа зображуються різними точками числової осі. Справедливе також твердження: кожна точка числової осі є зображенням тільки одного дійсного числа (раціонального або ірраціонального). Таким чином, між усіма дійсними числами і всіма точками числової осі існує взаємно однозначна відповідність: кожному числу відповідає єдина його точка, що її зображує, і, навпаки, кожній точці відповідає єдине зображуване нею число. Це дає можливість у багатьох міркуваннях у деякому змісті рівнозначно вживати поняття „число *x”* і поняття «точка *x*». Останньою обставиною ми будемо широко користуватися в курсі. Вкажемо без доведення наступну важливу властивість сукупності дійсних чисел: *між двома довільними дійсними числами найдуться як раціональні, так і ірраціональні числа.* У термінах геометричних ця властивість формулюється так: *між двома довільними точками числової осі найдуться як раціональні, так і ірраціональні точки.*

Інтервал. В подальшому часто будуть зустрічатися різні області зміни змінної величини до яких перш за всі відноситься *інтервал* . Означення. *Інтервалом називається сукупність всіх чисел (точок) x , які розміщені між двома заданими числами (точками) a і b (a<b), при цьому самі ці числа не є приналежністю сукупності чисел, які розглядається***.** Інтервал з кінцями $x=a$ і $x=b$, де $a<b$, можна задати нерівностями $a<x<b$; він позначається ще так: $(a,\ b)$. Якщо разом з множиною точок інтервалу розглядати і його кінці, то вийде *замкнутий інтервал.* Замкнутий інтервал з кінцями $x=a$ і $x=b$ задається нерівностями $a\leq x\leq b$; його позначають так: $[a,\ b]$. На противагу замкнутому інтервалові інтервал $(a,\ b)$ називається *відкритим* або *незамкнутим.* (У математичній літературі замкнутий інтервал часто називають відрізком, зберігаючи термін «інтервал» тільки для відкритого інтервалу). Якщо один кінець приєднується до інтервалу, а інший — ні, то виходить інтервал, відкритий з одного боку, або *напіввідкритий* інтервал. Напіввідкритий інтервал задається нерівностями $a\leq x<b$, якщо приєднано кінець $x=a$, і $a<x\leq b$, якщо приєднано кінець $x=b$; записують їх відповідно так: $[a,\ b)$, $(a,\ b]$. Таким чином, приєднання кінця до інтервалу завжди позначається квадратною дужкою, а виключення — круглої. У тих випадках, де немає потреби розрізняти, чи зараховуються кінці до інтервалу, який розглядається чи ні, ми будемо говорити просто про інтервал. Крім обмежених інтервалів, часто зустрічаються нескінченні інтервали. Ці нескінченні інтервали задаються відповідно умовними нерівностями $-\infty<x<c$, $c<x<+\infty$ і $-\infty<x<+\infty$. Записують їх так:

$$(-\infty,\ c),\ (c,\ +\infty)\ \text{і}\ (-\infty,\ +\infty).$$

Якщо в перших двох випадках точку c зараховують до інтервалу, то це записують у вигляді $(-\infty,\ c]$ або $[c,\ +\infty)$.

Означення. *Інтервал довжини* $2l$ *з центром у точці* a *називається* l*-околом точки* a.

Координати x точок, що належать l-околу точки a, задовольняють, вочевидь, нерівностям $a-l<x<a+l$. Поняття околу точки часто буде використовуватися в подальшому. Приналежність точки x до даного інтервалу будемо позначати за допомогою *символу включення.* Так, запис $x\in[a,\ b]$ означає, що точка x є однією з точок замкнутого інтервалу $[a,\ b]$, тобто що $a\leq x\leq b$. Аналогічно символічний запис $x\in(a,\ b)$ означає, що $a<x<b$, і т.д.

Абсолютна величина дійсного числа. Уведемо потрібне для подальшого поняття абсолютної величини дійсного числа. Означення. *Абсолютною величиною (модулем)* дійсного числа x

(позначається $|x|$) називається невід’ємне дійсне число, що задовольняє умовам $|x|=x$, якщо $x\ge0$; $|x|=-x$, якщо $x<0$.

Приклади: $|2|=2$, $|-5|=5$, $|0|=0$.

З визначення випливає, що для будь-якого x справедливе співвідношення $x\le|x|$. Розглянемо деякі властивості абсолютних величин.

1. *Абсолютна величина алгебраїчної суми декількох дійсних чисел є не більше суми абсолютних величин доданків* $|x+y|\le|x|+|y|$
Доведення. Нехай $x+y\ge0$, тоді$|\ x +y\ | = x +y \le |\ x\ | + |y\ |$ (так як $x \le |\ x\ |$ і $y \le|y\ |$). Нехай $x +y < 0$, тоді $|x+y|= -(x+y)=(-x)+(-y)\le|x|+|y|$, властивість доведена. Виконане доведення поширюється на будь-яке число доданків.

Приклади:

$|-2+3|<|—2|+|3|=2+3 = 5$ або $1 < 5$; $-1-3-5|=|-3|+|-5|=3+5=8$ або $8=8$

2. *Абсолютна величина різниці не менше різниці абсолютних величин зменшуванного і від'ємника:* $|x—y\ | \ge|x\ | — |y|$, $|x|>|y|$.

Доведення. Покладемо $x—y=z$, тоді $x=y+z$ і по доведеному

$|x\ | = |y +z\ | \le |y\ | +|z\ | = |y\ | +|x -y|$, звідки $|x|-|y|\le|x-y$.

3. *Абсолютна величина добутку дорівнює добуткові абсолютних величин співмножників* $|\ xyz|=|x||y||z|$

4. *Абсолютна величина частки дорівнює частці абсолютних величин ділимого і дільника* $x/y|=|x|/|y|$.

4.2. Наближені значення величини

Поняття наближеного значення. Говорити про абсолютно точне чисельне значення фізичної величини неможливо. Наприклад, ми ніколи не можемо знати довжину якого-небудь реального тіла абсолютно точно. Це відбувається не тільки через недосконалість

виміру, але також і через недосконалість форми самого тіла, в результаті чого неможливо вказати точно, від якої точки і до якої треба робити відлік (а якщо згадати, що тіло складається з молекул, які увесь час рухаються, то це положення ще більш ускладниться). Більш того, у величезній більшості випадків показувати довжину з надмірно великим ступенем точності недоцільно, навіть якщо це можливо при сучасному рівні вимірювальної техніки. Наприклад, при обмірюванні або проектуванні житлового будинку було б безглуздо вказувати розміри з точністю до сотих часток міліметра. Те ж можна сказати про маси, тиски і т.п. Тому чисельні значення майже усіх величин у фізиці і техніці (наприклад, всіх безперервних величин) задаються приблизно. *Математичні дії над приблизними значеннями величин називаються приблизними обчисленнями.* Вибір степеня точності, з яким виконується виготовлення якої-небудь деталі, або вимір, або обчислення,—це надзвичайно відповідальна справа. При цьому виборі приходиться керуватися багатьма міркуваннями — потребами, технічними можливостями, економічністю і т.п.

Похибки. Нехай точне значення якої-небудь величини дорівнює A, а наближене дорівнює a. Тоді похибка, тобто відхилення точного значення від наближеного, дорівнює $A—a$; вона може вийти як додатною, так і від’ємною. Ця похибка зазвичай буває точно невідома, тому що невідомо значення A. Тому, зазвичай, задаються *граничні похибки* α_1 і α_2, між якими знаходиться дійсна похибка: $\alpha_l<A-a<\alpha_2$, тобто $a+\alpha_l<A<a+\alpha_2$. У цьому випадку говорять, що задано *двосторонню оцінку* величини A. Таким чином, наприклад, формула для довжини $L=9_{-0,1}^{+0,2}$ *мм* означає, що дійсне значення довжини знаходиться між 9 — 0,1 = 8,9 *мм* і 9 + 0,2=9,2 *мм.* Так як задавати дві граничні похибки не завжди зручно, то часто задається *гранична абсолютна похибка* α, тобто величина, яка більша абсолютного значення похибки: $|A — a|<\alpha$, тобто $—\alpha<A — a<\alpha$ або $a—\alpha<A<a+\alpha$. Нехай, наприклад, при вимірі деякої довжини l вийшло 137 *см,* причому ми можемо бути впевненні за величину точності до 0,5 *см.* Це значить, що в *даному* випадку $\alpha=0,5$ *см* і $136,5<l<137,5$ *см;* можна написати $l=(137\pm0,5)$ *см.* Гранична абсолютна похибка характеризує точність виміру не цілком: наприклад, якщо вона дорівнює 1 *см,* то ще неясно, груба це похибка чи ні, так як важливо знати, що вимірювали - довжину кита, або довжину жука. Якість виміру більше характеризується *граничною відносною похибкою* δ, яка обчислюється по формулі

$$\delta=\alpha/a$$

Гранична відносна похибка немає розміру і часто виражається у відсотках, причому для спрощення її значення зазвичай закругляється у бік збільшення. Скажемо, у приведеному прикладі з обчисленням довжини *гранична* відносна похибка у відсотках дорівнює 0,5×100/137=0,36...<0,4, тобто можна сказати, що вимір зроблений із граничною відносною похибкою в 0,4% (або навіть просто в 0,5%).

Для багатьох первинних розрахунків є достатньою точність (тобто гранична відносна похибка) порядку відсотків і навіть десятків відсотків.

Запис наближених чисел. Запис *наближених чисел,* тобто наближених чисельних значень величин, проводиться так, щоб сам вид запису говорив про ступінь їхньої точності. Зазвичай їх записують так, що *всі цифри вірні, крім останньої, сумнівної, у якій допускається похибка не більше чим на одиницю;* утім, якщо похибка не на багато більша, то особливо не чіпляються. Наприклад, вираз для опору R= 1,35 Ω означає, що R= 0,01Ω, тобто насправді 1,34<R<1,36 Ω. Між формулами R=1,35 Ω і R=1,3500 Ω величезна різниця, так як ці записи говорять, що перше обчислення визначалося з точністю до 0,01, а друге до - 0,0001 **Ω.** (Іноді говорять, що в другому випадку точність на два *порядки* вища, або що похибка на два порядки менша, ніж у першому.) Якщо при обчисленні вийшло значення R=2,377 Ω, але вже третя цифра сумнівна або четверта нас не цікавить, то треба зробити округлення, тобто написати R=2,38 **Ω.** Число знаків після коми говорить про граничну абсолютну похибку; про граничну ж відносну похибку говорить загальне *число вірних знаків,* до яких не відносять передні нулі: наприклад, числа 2,57; 1,7100; 0,015; 0,00210 мають відповідно 3, 5, 2, 3 вірних знаків. Чим більше вірних знаків у числі, тим менше гранична відносна похибка.

Варто уникати записів вигляду M=1800 *г*, так як вони найчастіше не показують точності виміру (або обчислення). Якщо друга цифра сумнівна, варто писати $M=1{,}8\cdot10^3$ *г*, а якщо четверта — то $1{,}800\cdot10^3$ *г*. Суворо кажучи, запис M=1800 *г* повинний

означати, що гранична абсолютна похибка дорівнює 1*г*. Це правило не завжди дотримується, тому можуть виникнути непорозуміння.

Додавання і віднімання наближених чисел. Розглянемо приклад. Нехай пляшка і пробка зважувалися роздільно, причому маси їх виявилися відповідно рівними M=323,1 *г* і m=5,722 *г* (пробка зважувалася на більш точних вагах). Для знаходження сумарної ваги пляшки з пробкою було б неправильно вважати так

$$\begin{array}{l} M=323{,}1 \\ m=\quad 5{,}722 \\ \hline M+m=328{,}822\ г. \end{array}$$

Дійсно, вага пляшки визначена з точністю до 0,1 *г* і тому соті і тисячні у відповіді є не тільки зайвими цифрами, але навіть шкідливими: форма відповіді така, начебто *M*+*m визначено* з точністю до 0,001, що невірно. Тому при додаванні *m* варто округлити до 0,1, тобто проводити обчислення так:

$$\begin{array}{l} M=323{,}1 \\ m=\quad 5{,}7 \\ \hline M+m=328{,}8г; \end{array}$$

ця ж відповідь вийде, якщо округлити результат, підрахований вище. Таким чином, у сумі береться стільки знаків після коми, скільки їх є в доданка з найбільшою абсолютною похибкою.

Якщо доданків багато, то похибки в них можуть складатися і дати велику похибку у сумі (систематичний „недолив”). У таких випадках рекомендується *правило зайвого знака:* залишати один зайвий знак, а у відповіді зробити його закруглення.

Нехай, наприклад, треба знайти суму

$$K=132{,}7+1{,}274+0{,}06321+20{,}96+46{,}1521$$

Найбільша абсолютна похибка у першого доданка: вона дорівнює 0,1. Тому інші доданки округляємо до 0,01:

$$132{,}7+1{,}27+0{,}06+20{,}96+46{,}15=201{,}14,$$

тобто K=201,1. Якби ми не скористалися правилом зайвого знака й округляли всі доданки до 0,1, то одержали б менш точний результат:

$$K = 132{,}7 + 1{,}3 + 0{,}1 +21{,}0 + 46{,}2 = 201{,}3.$$

Якщо число доданків досить велике, скажемо кілька сотень, варто користуватися двома зайвими знаками.

При обчисленні суми декількох доданків, заданих з однаковим числом знаків після коми, варто мати на увазі, що гранична абсолютна похибка у суми буде більше, ніж у доданків; тому відповідь доцільно округлити до попереднього знака. Наприклад, нехай

$$L = 1{,}38 + 8{,}71 + 4{,}48 + 11{,}96 + 7{,}33.$$

Додаючи, одержимо L = 33,86. Однак остання цифра дуже сумнівна; тому варто написати відповідь у вигляді L= 33,9. *Гранична абсолютна похибка суми або різниці декількох величин дорівнює сумі граничних абсолютних похибок цих величин.* Наприклад, якщо дві величини визначені з точністю до 0,1, то, як легко зрозуміти, сума або різниця цих величин визначені з точністю до 0,2, так як похибки можуть скластися. Якщо доданків багато, то дуже малоймовірно, щоб усі похибки склалися. У цьому випадку для визначення похибки суми треба користуватися методами теорії ймовірностей. З них випливає, що один знак у сумі треба округляти, як це було зроблено при обчисленні L, починаючи приблизно з п'яти доданків, а два знаки — приблизно з 500.

При відніманні наближених чисел правила ті ж, що при додаванні, але треба додатково мати на увазі, що при відніманні близьких чисел відносна точність різко погіршується. Наприклад, нехай треба знайти P=327,48—326,91. У від'ємного і зменшуваного α=0,01,тобто δ<(0,01/300)100%<0,004%.

Тому треба намагатися вимірювати або обчислювати різниці близьких чисел безпосередньо, без виконання такого віднімання: не слід обчислювати вагу капелюха, зважившись спочатку в капелюсі, а потім без нього. Формули ж, що містять різниці близьких величин, треба намагатися

перетворити, і від них відмовитись, якщо вони можуть істотно порушити точність обчислень.

Множення і ділення наближених чисел. Загальні зауваження. Почнемо з приклада. Нехай треба знайти площу S прямокутника зі сторонами a=5,2 *см* і b=43,1 *см.* Було б неправильно дати таку відповідь:

$$S = 5{,}2\cdot 43{,}1 =224{,}12\ см^2.$$

Дійсно, насправді величина a знаходиться між 5,1 і 5,3 *см,* а b — між 43,0 і 43,2 *см* і тому величина площі знаходиться між

$$S_1 = 5{,}1\cdot 43{,}0 = 219{,}3\ см^2 \text{ і } S_2 = 5{,}3\cdot 43{,}2 = 228{,}96\ см^2,$$

тобто в знайденому значенні S усі цифри після другої сумнівні і можуть тільки ввести в оману. Відповідь варто дати таку:

$$S = 2{,}2\cdot 10^2\ см^2.$$

Замітимо, до речі, що за тим зразком, за яким ми обчислили S_1 і S_2, і в інших прикладах можна дати двосторонні оцінки для відповіді.

Отже, ми бачимо, що при множенні двох чисел із двома і трьома вірними знаками у відповіді варто залишити два вірних знаки. Аналогічне правило справедливе в загальному випадку, а також при ділені наближених чисел: у відповіді число вірних знаків треба взяти рівним найменшому (гіршому) числу вірних знаків у співмножниках (або в діленому й у дільнику, якщо розглядається частка). Справа в тому, що**,** *при множенні або ділені наближених чисел граничні відносні похибки підсумовуються,* а число вірних знаків говорить приблизно про те, про що і гранична відносна похибка, тобто про відносну точність.

У приведеному прикладі з обчисленням S гранична відносна похибка у b була значно менша, ніж в a, а тому $\delta_s = \delta_a + \delta_b \approx \delta_a$, тобто і число вірних знаків у S таке ж, як в a.

Якщо множники дані з різним числом вірних знаків, то перед множенням варто зробити округлення, залишивши один зайвий знак, який треба відкинути після виконання дій. Якщо множники задані з однаковим числом вірних знаків, але цих множників багато, наприклад більш чотирьох, то вірних знаків у добутку варто взяти на один менше.

Таким чином, наприклад, при обчисленні кількості тепла, яка виділяється електричним струмом, по формулі Q=0,24I^2Rt у відповіді не може вийти більш двох вірних знаків, так як коефіцієнт 0,24 має лише два вірних знаки; при цьому нема рації брати *I*, *R* і *t* більш ніж із трьома вірними знаками (та й то третій знак, якщо береться, є лише запасним). Якщо *Q* потрібне з більшою точністю, то треба насамперед уточнити коефіцієнт. Відзначимо, що зовсім точні множники не впливають на вибір числа вірних знаків у добутку: наприклад, у формулі для довжини кола $L=2\pi r$ коефіцієнт 2 є зовсім точним (він може бути записаний у вигляді 2,0 або 2,00 і т.п.), так що точність, з яким можна обчислити *L*, залежить тільки від числа вірних знаків, з якими взяте π і визначено *r*.

Приведемо приклад на застосування всіх цих правил. Нехай

$$D= 11{,}3^2\cdot 5{,}4 + 0{,}381\ 9{,}1+7{,}43\cdot 21{,}1.$$

Для з'ясування, наскільки великі доданки, обчислимо їх, зробивши округлення всіх чисел до одного вірного знака. Одержуємо 500, 3,6 і 140. Виходить, сума буде містити кілька сотень, а оскільки в першому, найбільшому доданку один із множників (5,4) даний тільки з двома вірними знаками, то і вся відповідь вийде з двома вірними знаками. Відповідно до правила зайвого знака будемо проводити обчислення з точністю до одиниць, а потім відповідь округлимо до десятків. Вийде D=690+3+157=850, тобто D=$8{,}5\cdot 10^2$.

Обчислення з зайвими цифрами були б не тільки марними, але навіть шкідливими, що дають ілюзію точності, коли її насправді немає.

При виборі степеня точності наближених величин, над якими треба робити ті або інші обчислення, керуються *принципом рівної точності,* відповідно до якої всі ці степені точності що обираються повинні бути погоджені одна з одною і жодна не повинна бути надмірною або недостатньою.

Пояснимо цей принцип на прикладах. Нехай ми обчислюємо площу прямокутника по формулі $S=ab$. Тоді, якщо *a* виміряно або обчислено, наприклад, із трьома вірними знаками, то і *b* варто взяти з трьома вірними знаками, так як четвертий знак у *b* все одно буде зайвим, а якщо *b* взяти тільки з двома вірними знаками, то пропаде праця, витрачена на знаходження третього знака в *a* Таким чином, у добутку завжди вигідно множники (у всякому разі ті, знаходження яких зв'язане з тими або іншими труднощами) брати з тим самим

числом вірних знаків. Аналогічно в сумі треба брати доданки з тим самим числом знаків після коми.

На закінчення відзначимо наступну теорему, яка представляє у відомому змісту «місток між теорією і практикою».

Теорема. *Кожне ірраціональне число* α *можна з будь-яким ступенем точності виразити за допомогою раціональних чисел.*

Справді, нехай ірраціональне число $\alpha>0$ і нехай потрібно обчислити α з точністю до $1/n$ (наприклад, до 1/10, до 1/100 і т.д.). Яке б не було α, воно пролягає між двома цілими числами N і $N+1$. Поділимо відрізок між N і $N+1$ на n частин, тоді α виявиться між раціональними числами $N+m/n$ і $N+(m+1)/n$. Так як різниця цих чисел дорівнює $1/n$ то, отже, кожне з них виражає α з заданим ступенем точності: перше з недостатком, а друге — з надлишком.

Приклад. Іраціональне число $\sqrt{2}$ виражається раціональними числами з точністю до 1/1000 і т.д.

Послідовність. Якщо кожному натуральному числу n за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$ називають *числовою послідовністю* і позначають символом $\{x_n\}$.

Послідовність вважають заданою, якщо вказано спосіб знаходження її загального члена. Всяка функція $y=f(n)$,яка задана на множині натуральних чисел N, визначає деяку числову послідовність $\{y_n\}$ із загальним членом $y=f(n)$.

Границя числової послідовності. Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$.

У цьому випадку записують: або $x_n \to a$ при $n \to\infty$ і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ *є збіжною.*

Послідовніть $\{x_n\}$ називають *нескінченно малою,* якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Відзначимо, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то $\{x_n-a\}$– нескінченно мала послідовність. Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою,* якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує такий номер N, що при $n > N$ виконується нерівність $|\, x_n\, |>M$. У цьому випадку записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Теореми про границі

Теорема 1. Всяка збіжна посладовність має тільки одну границю.

Теорема 2. Збіжна послідовність обмежена.

Теорема 3. Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, то виконуються граничні рівності:

$$1)\ \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} Cy_n = C\lim_{n\to\infty} y_n,\ \textit{де}\ C - \textit{стала};$$

$$4)\ \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad (\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

Теорема 4. Якщо для послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ виконуються умови: $x_n \leq y \leq z_n$ для кожного n і

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} z_n = a,\ \text{тоді}\ \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Теорема 5 *(Вейєрштрасса).* Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на закритому проміжку $[a;\ b]$, то вона набуває на цьому проміжку своїх найбільших й найменших значень (рис. 4.1). Іншими словами, монотонна обмежена послідовність має границю.

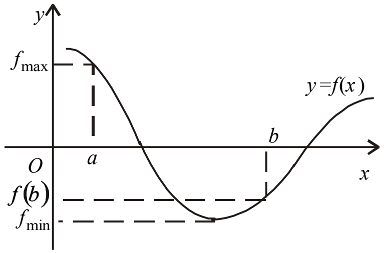


Рис. 4.1.

За допомогою останньої теореми доводять існування границі

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

яку позначають числом $e = 2{,}71828...$.

Отже

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Визначені та невизначені вирази

При обчисленні границь треба враховувати таке:

1) сума й добуток скінченого числа нескінченно малих, а також добуток нескінченно малої на величину обмежену є нескінченно малі величини;

2) сума й добуток нескінченно великих величин, а також добуток нескінченно великої на ненульову сталу є нескінченно великі величини;

3) частка від ділення сталої на нескінченно велику є нескінченно мала величина, частка від ділення ненульової сталої на нескінченно малу — нескінченно велика величина.

У прикладах на знаходження границь зазвичай зустрічаються невизначені вирази: відношення двох нескінченно малих величин; відношення двох нескінченно великих величин; різниця двох нескінченно великих величин; добуток нескінченно малої на нескінченно велику величину; нескінченно мала або нескінченно велика величина в нескінченно малому степені; величина, що прямує до одиниці в нескінченно великому степені. Символічно невизначені вирази можна записати у вигляді (їх *всього сім):*

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.$$

Поглиблено мова про нескінченно малі і нескінченно великі величини, а також границі буде йти в мікромодулі 10.

Мікромодуль 8
Приклади розв'язання типових задач

Доведіть що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+5}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Нехай довільне ε>0 задано. Згідно з означенням потрібно вказати такий номер *N*(ε), що для всіх *n*>*N*(ε) виконується нерівність

$$\left|\frac{n+2}{2n+5}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Звідси маємо

$$\left|\frac{2(n+2)-2n-5}{2(2n+5)}\right|<\varepsilon,\ \frac{1}{2(2n+5)}<\varepsilon,\ 4n+10>\frac{1}{\varepsilon},\ n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-10\right).$$

Візьмемо за *N*(ε) цілу частину від числа

$$\left|\frac{n+2}{2n+5}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Тоді нерівність

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-10\right):N(\varepsilon)=\left|\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-10\right),\right|$$

виконується на всіх *n*>*N*(ε). Це й означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+5}=\frac{1}{2}.$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^4-5n^2+4n}{10+2n-3n^4}$.

Розв 'язання. При *n*→∞ чисельник і знаменник прямують до ∞. Отже, маємо невизначеність вигляду (∞/∞). Розкриваємо її, поділивши чисельник і знаменник на найвищий степінь *n*, тобто на n^4:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^4-5n^2+4n}{10+2n-3n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\frac{5}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{\frac{10}{n^4}+\frac{2}{n^3}-3}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}3}=\frac{7-0+0}{0+0-3}=-\frac{7}{3}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{1}{3}}+4}{(n-2)^{\frac{3}{7}}-5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду (∞/∞).

Виконуємо перетворення

$$.\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{1}{3}}+4}{(n-2)^{\frac{3}{7}}-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}(1-n^{\frac{1}{15}}+4n^{\frac{2}{5}})}{n^{\frac{3}{7}}\left(1-\frac{2}{n}5\right)^{\frac{3}{7}}-5n^{\frac{3}{7}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}}\left(1-\frac{2}{n}5\right)^{\frac{3}{7}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{35}}}=\frac{1}{\infty}=0$$

Тут ми скористалися границями

$$\lim_{n\to\infty}n^p=0,\quad якщо\ p<0;$$

$$\lim_{n\to\infty}n^p=\infty,\quad якщо\ p>0$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-(n+1)!}{(2+n)!-n!}$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду (∞/∞). Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!-(n+1)!}{(2+n)!-n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!-n!(n+1)!}{n!(n+1)(n+2)-n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(1-n-1)}{n!((n+1)(n+2)-n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{(n+1)(n+2)-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+3n+1}=0.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду (∞/∞).

Використовуючи формулу

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$$

(суми *n* перших членів арифметичної прогресії), дістанемо:

$$1+3+5+...+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2} n = n^2,$$

$$1+4+7+...+(3n-2) = \frac{1+3n-2}{2} n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{1+4+7+...+(3n-2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}$$

$$6. \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-3} - n\right)$$

Розв 'язання. Маємо невизначеність вигляду (∞-∞)

Застосуємо стандартний прийом — домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз

$$\sqrt{n^2 - 2n - 3} + n$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-2n-3} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2-2n-3} - n\right)\left(\sqrt{n^2-2n-3} + n\right)}{\sqrt{n^2-2n-3} + n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n-3-n^2}{\sqrt{n^2-2n-3}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n-3}{\sqrt{n^2-2n-3}+n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+1} = \frac{-2}{1+1} = -1.$$

Розв'язання. Враховуючи, що $-1 \le \sin n \le 1$ запишемо подвійну

нерівність $$\frac{1}{2n} \le \frac{2^{\sin n}}{n} \le \frac{2}{n}$$

Оскільки $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0,$$

то за теоремою 4 одержуємо: $$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{\sin n}}{n} = 0$$

Мікромодуль 8.
Індивідуальні тестові завдання

Обчисліть границі

8.1. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2+n)^3-(3+n)^3+1}{(2+n)^2+(3+n)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{10}{3}}+2n^{\frac{13}{4}}+1}{n^{\frac{15}{4}}-2}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{7}}-n^{\frac{3}{5}}+3}{(n-1)^{\frac{5}{8}}}$

8.2. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3-2(n+1)^2+2}{(n+1)^3+n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+5+...+(4n-3)}{1+7+...+(6n-5)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-4n+3}-\sqrt{n^2+1}\right)$

8.3. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^4-3n+1}{2-7n-2n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}+2n^{\frac{3}{4}}+1}{(n+3)^{\frac{7}{8}}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+4+6+...+2n}{1+3+5+...+(2n+1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3-2}\right)$

8.4. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000n^4-3n+1}{2-7n-n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{6}{5}}+2n^{\frac{7}{6}}+1}{n^{\frac{13}{10}}-4}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{5^n}\right)$; г) $\left(\sqrt{n^2-n+3}-\sqrt{n^2+n}\right)$

8.5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^4-3n^3+n}{100+4n+n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{4}{3}}+2n^{\frac{5}{4}}+5}{n^{\frac{11}{8}}-2}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-1}{5^{\frac{1}{n}}+1}$

8.6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)^4+5n^3-2n}{(4n)^3-n-6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+5}+\sqrt[3]{7-2n^3}}{\sqrt[3]{3-8n^6}+n-1}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{\frac{2}{n}}-1}{8^{\frac{2}{n}}+1}$

8.7.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2(n-3)+6n^3-n}{(n-1)^3+n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-3}+\sqrt[3]{5n^3}}{\sqrt[4]{2n^5}-\sqrt[7]{n^8+5}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{1}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

8.8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2(n-1)+3n^3+1}{(n-2)^3+2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-2}+\sqrt[3]{n^7}}{\sqrt[4]{2n^5}-\sqrt[7]{n^{16}+1}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\ldots+\dfrac{1}{5^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$

8.9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n-1)^2(n+2)+2n^2-1}{(2n-1)^3+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt[4]{n^9}}{\sqrt[4]{n^{11}}-\sqrt[7]{n^9+1}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!+(n-2)!}{(n-1)!-(n-2)!}$

8.10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^2(n-2)-5n^3}{8(n-1)^3+4n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-3}+\sqrt[3]{3n^4}}{\sqrt[4]{2n^3}-\sqrt[3]{6n^4}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!}$

8.11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2(n-1)-5n^3}{8(n-1)^5+n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+7}-\sqrt[6]{5n^7}}{\sqrt[5]{n^7+3}+\sqrt{n}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{36}+\ldots+\dfrac{1}{6^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+2)!+3\cdot n!}{(n+2)!-n!}$

8.12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2(n+2)+3n^3}{8(n-3)^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^4+1}+\sqrt[5]{n^7}}{\sqrt[5]{n^8+2}+\sqrt{n}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}+\ldots+\dfrac{1}{7^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{49}+\ldots+\dfrac{(-1)^n}{7^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)!+(n-1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$

8.13.а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)(n-1)^2(n+2)+2n^3}{10(n+1)^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+5}+\sqrt[3]{3n^9}}{\sqrt[5]{n^7+2}+\sqrt{n}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)!+5\cdot n!}{2(n+2)!-n!}$

8.14. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(n-3)^2+7n^3}{14(n-1)^3+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n^7}+\sqrt[4]{2n^{11}}}{\sqrt[5]{n^7+1}+\sqrt{n^5}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{2n^2+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+5\cdot(n+2)!}{3(n+2)!-(n+2)!}$

8.15. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)(n-3)^2-n^3}{11(n-2)^3+22}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^{11}}+\sqrt[4]{3n^{13}}}{\sqrt[5]{n^{16}+1}+\sqrt{n}}$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-1)}{\sqrt{2n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!-4\cdot(n+2)!}{2(n+2)!+(n+2)!}$

Мікромодуль 9

Функція

4.3. Функції і графіки

При вивченні різних явищ природи і розв'язані технічних задач, а тому і в математиці приходиться розглядати зміну однієї величини в залежності від зміни іншої. Так, наприклад, при вивченні руху пройдений шлях розглядається як змінна, яка змінюється в залежності від зміни часу. Тут пройдений шлях є функція часу.

Функціональна залежність. Часто буває, що в одному і тому самому розгляді беруть участь одночасно декілька змінних величин, взаємозалежних одна від одної таким чином, що *зміна одних величин позначається на значеннях інших.* Тоді говорять, що між розглянутими величинами є *функціональна залежність.* Наприклад, при зміні умов, у яких знаходиться яка-небудь визначена порція газу, функціональна залежність буде між об'ємом *V*, температурою *Т* і тиском *р* цього газу, так як ці величини взаємозалежні. Функціональна залежність має місце між площею кола і довжиною його радіуса, між пройденим шляхом і часом у процесі руху і т.п.

Зазвичай серед функціонально залежних між собою величин можна вказати деякі величини *(незалежні змінні),* значення яких можуть вибиратися більш-менш довільно, тоді як значення інших величин *(залежних змінних)* визначаються значеннями перших. Наприклад, при розгляді зв'язку між площею *S* кола і довжиною *R* його радіуса цю довжину природно прийняти за незалежну змінну, так як її значення можна задавати довільно; при цьому площа буде залежною змінною. При зазначеному вище розгляді порції газу за незалежні змінні можна взяти *V* і *Т*; тиск *р* буде тоді залежної змінною.

Закон (правило), по якому значенням незалежних змінних відповідають значення залежної змінної, яка розглядається, називається функцією. Таким чином, щораз, коли нам задано такий закон відповідності, ми можемо сказати: ось функція. Функції - одне з найважливіших математичних понять.

Утім, слово «функція» вживається й в іншому змісті. А саме, часто незалежні змінні називаються також *аргументами,* а залежна змінна — *функцією* від цих аргументів. Зазвичай таке двояке вживання слова «функція» не приводить до помилок.

Слід зазначити, що якщо між величинами є функціональна залежність, то часто вибір того, які з цих величин вважати незалежними, а які — залежними, є досить умовним. Так, у приведеному прикладі з порцією газу за незалежні змінні можна було б прийняти *Т* і *р*, а *V*—за залежну змінну; неважко привести схему досліду, у якому б *Т* і *р* задавалися, а об'єм *V* знаходився. Вибір того, які змінні більш природно або більш зручно прийняти за незалежні, іноді буває досить важливий.

Функції можуть бути від одного аргументу (як у прикладі площі кола) або від двох і більш аргументів. У перших розділах нашого курсу ми будемо розглядати майже винятково функції від одного аргументу.

Помітимо, що для того, щоб деяка величина *у* могла розглядатися як функція від незалежної змінної *х,* немає потреби, щоб між змінами цих величин існував глибокий причинний зв'язок. Досить тільки, щоб існував визначений закон, по якому значенням x відповідали би значення y, цей закон може бути нам і невідомий. Наприклад, температуру θ у якій-небудь точці можна вважати функцією часу t, так як ясно, що значенням t відповідають визначені значення θ, хоча, зазвичай, зміна θ пояснюється не просто перебігом часу, але й переліком глибоких фізичних причин.

Означення. Якщо величина y є функцією від величини x, то зазвичай пишуть $y=f(x)$ (читається: *«ігрек є еф від ікс»),* де f, початкова буква латинського слова functio, — знак функції. *Часткові значення* цієї функції виходять, якщо аргументові x додавати окремі (конкретні) значення.

Нехай, наприклад, $y=f(x)$ має такий вид: $y=x^2$. Тоді при $x=2$ буде $y = 4$, при $x=$ —0,6 буде $y = 0{,}36$ і т.п. Це можна записати так:

$f(2) = 4$, $f($— $0{,}6) = 0{,}36$ і т.д., або $y|_{x=2}=4,\ y|_{x=0,6}=0{,}36$

Запис вигляду $y=f(x)$ застосовується, якщо конкретний вираз функції занадто громіздкий або навіть нам не відомий, а також для формулювання правил і властивостей, загальних для всіх або багатьох конкретних функцій (як, наприклад, в алгебрі формула $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ приводиться не для конкретних чисел, а для букв, замість яких можна підставити будь-які конкретні числа).

Якщо одночасно розглядається кілька різних функцій, то, крім f, застосовують інші букви F, φ, Φ і т.п. або застосовують *індекси* (значки): f_1, f_2 і т.п. Однак у різних розглядах однією і тією же буквою f можна позначити різні функції, як в алгебрі в одній і тій же задачі буквою a не можна позначити різні величини, але в іншій задачі та ж буква a може означати що-небудь інше. Якщо ж різні величини зв'язані однаковою залежністю, то можна застосовувати той самий знак функції, так як f означає закон залежності однієї величини від іншої. Наприклад, якщо $y = x^3$, $z = u^5$, $v = t^3$, то можна написати $y=f(x)$, $z=\varphi(u)$, $v=f(t)$; у даному випадку знак f означає піднесення аргументу до третього степеню, а знак φ - до п'ятого.

Аналогічно позначаються функції від декількох аргументів. Нехай, наприклад, $z=x^2—x2^y$, x і y — незалежні змінні, z-залежна; тоді можна написати $z=f(x, y)$, кома в даному випадку є

ознакою функції від двох аргументів. У цьому випадку окремі значення знаходяться так: $f(2,1)$ (тобто $z|_{x=2,y=1})=2^2-2\cdot 2^1=0$; $f(1, 2) = 1^2—1\cdot 2^2=$ —3 і т.п.

До усіх цих позначень треба звикнути і вільно з ними маніпулювати. Приведемо декілька прикладів таких маніпуляцій. Нехай розглядаються дві функції $y=f(x)=x^2-3x$ і $z=\varphi(x)=2x+1$ і a- стале число. Тоді

$f(a)=a^2-3a$ (значення першої функції при $x=a$);

$\varphi(a^2)=2a^2+1$(значення другої функції при $x=a^2$);

$f(x^2)=(x^2)^2-3x^2=x^4-3x^2$ [значення y , якщо замість аргумента підставлено x^2 ,отримується нова функція від x , яку можна позначити, наприклад, через $F(x)$];

$[f(x)]^2=(x^2-3x)^2= x^4-6x^2+9x^2$ (ще нова функція x);

$\varphi(x+a)=2(x+a)+1=2x+2a+1$ (нова функція x);

$f(x)\varphi(x)=(x^2-3x)(2x+1)= 2x^3-5x^2-3x$;

$f(\varphi(x))=[\varphi(x)]^2=3\varphi(x)=(2x+1)^2-3(2x+1)= 4x^2-2x-2$;

$\varphi(f(x))=2f(x)+1=2(x^2-3x)+1=2x^2-6x+1$;

$f(x+s)=(x+s)^2-3(x+s)=x^2+2xs+s^2-3x-3s$ [функція двох незалежних змінних, яку можна позначити через $\Phi(x,s)$] і т.п. У розібраних прикладах ми зустрілися з утворенням «функції від функції» або, як говорять, з утворенням *складової функції.* Зазвичай складова функція отримується у такий спосіб. Нехай змінна y залежить від змінної u, що у свою чергу залежить від змінної x, тобто $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$. Тоді при змінювані x буде мінятися u, а тому буде мінятися й y. Виходить, y є функцією $x, y=f(\varphi(x))$, яка і називається складовою функцією; змінна u у даному випадку називається *проміжною.* Може бути і декілька проміжних змінних. Якщо хочуть тільки відзначити, що y є функцією від x, але не робити подібні маніпуляції, то пишуть просто $y=y(x)$; так, $S=S(R)$, $p=p(V, T)$, $V=V(T,p)$.

Способи задання функцій. Щоб функцію, тобто залежність однієї величини від іншої, можна було вивчити, вона повинна бути якось задана. Є кілька способів задання функції.

Аналітичний спосіб (за допомогою формули) найчастіше застосовується в математиці. У цьому способі явно вказуються математичні дії, які треба зробити над незалежною змінною щоб одержати значення функції. Наприклад, формула $y=x^2—2x$ означає, що для того, щоб одержати значення функції y, потрібно значення аргументу піднести до квадрату і з результату відняти подвоєне значення цього аргументу.

Аналітичний спосіб компактний (формула займає мало місця), легко відтворюється (формулу легко переписати) і найбільш пристосований до виконання над функціями математичних дій — алгебраїчних (додавання, множення і т.п.), дій вищої математики (диференціювання, інтегрування і т.п.) і інших. Однак він не завжди наочний (не завжди видний характер залежності функції від аргументу) і для обчислення значень функції, якщо вони потрібні, необхідно зробити ряд викладень, не завжди простих.

У табличному способі задання функції її чисельні значення задаються за допомогою таблиці при визначених дискретних чисельних значеннях аргументу

Великою зручністю табличного способу є те, що значення функції вже обчислені, так що ними можна негайно користуватися. Однак можуть знадобитися значення функції при значеннях аргументу, яких немає в таблиці; тоді необхідно робити додаткові обчислення - *інтерполяцію* (для проміжних значень аргументу) або *екстраполяцію* (для значень аргументу, що лежать за границями таблиці), що іноді приводить до невірних результатів.

Третім основним способом задання функції є *графічний спосіб* (за допомогою графіка). Цей спосіб дуже наочний, так як за графіком легко детально простежити за характером зміни функції. Крім того, за графіком можна швидко знаходити значення функції з невеликою точністю (два-три вірних знака), щоправда, тільки в зображеному діапазоні зміни аргументу.

Усі ці способи задання функції як би доповнюють один одного, так що часто виникає задача про перехід від одного способу до іншого — про побудову графіка, про складання таблиці (так називане *табулювання),* про підбір формули. У нашому курсі ми зіштовхнемося з такими задачами.

Зустрічаються також і інші способи задання функцій. Наприклад, закон, по якому значення функції відповідають значенням аргументу, іноді формулюється словесно: так, щомісячний податок може бути функцією заробітної плати.

Графіки функцій. Графіки служать для геометричного зображення функцій. Нагадаємо методику побудови графіків функцій, відому з курсу середньої школи. Нехай величина y є функцією величини x, тобто $y=f(x)$. Для побудови графіка на площині вибираються дві числові осі: зазвичай вісь змінної x проходить зліва направо і називається *віссю абсцис,* а вісь змінної y проходить перпендикулярно до осі x і називається *віссю ординат.* Початок відліку на кожній з осей часто вибирається в точці їхнього взаємного перетину (рис.4.2)

Після цього надають аргументові різні значення, знаходять відповідні значення $y=f(x)$ і будують точки графіка.

На рис.4.2 показана довільна «поточна» точка M графіка, що має координати x, y. Практично ми можемо побудувати не дуже велике число точок графіка, після чого з'єднуємо їх лінією; теоретично ж необхідно уявляти собі, начебто змінна x пробігає *всю* область своєї зміни; тоді поточна точка M пробіжить весь графік. На рис.4.2 показано приклад графіка. З нього видно, що в даному випадку при зростанні аргументу x значення функції спочатку зростає; це продовжується приблизно до значення x=0,5, після чого функція убуває, порівняно повільно; починаючи ж приблизно з x=2, функція знову зростає, причому усе швидше і швидше.

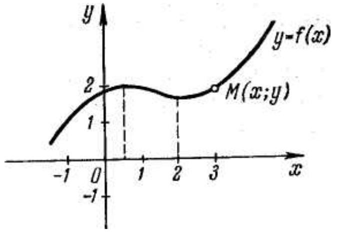


Рис. 4.2

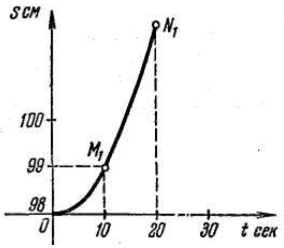


Рис.4.3

Одиниці масштабу і початку відліку на кожній з осей вибираються так, щоб найкраще передати хід зміни функції на найбільш цікавих інтервалах зміни аргументу і функції. Розглянемо, наприклад, графік рівноприскореного руху, що протікає за законом

$$s = 98+0{,}01t^2 \qquad (t\geq 0) \quad (4.1)$$

де t виражено в *сек.*, а s - в *см*. У цьому випадку можливо вибрати шкали на обох осях так, як показано на рис.4.3.

Ясно, що зміна початку відліку на осі аргументу (або осі функції) спричиняє перенос графіка як цілого паралельно осі аргументу (або відповідно осі функції). Зміна масштабу якої-небудь з осей у декілька разів спричиняє розтягнення в стільки ж разів графіка від іншої осі (або стиск до неї); наприклад, на рис.4.4 показано графік тієї ж функції (4.1) після зміни масштабу по осі t. Новий графік виходить зі старого розтягуванням від осі s паралельно осі t. Щоб щонайкраще передати поводження розглянутої функції, іноді застосовуються на осях нерівномірні шкали. Надалі ми будемо завжди вважати, якщо не оговорено зворотне, що змінні (аргументи і функція) — безрозмірні. У цьому випадку в теорії найпростіше вважати, як ми і будемо робити, *що одиниці масштабу по обох осях однакові, а відлік ведеться від точки їхнього перетину,* який називається *початком координат*.

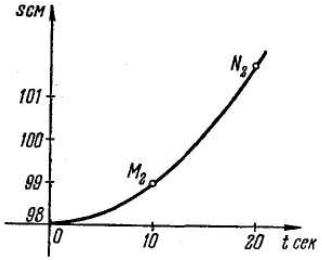


Рис.4.4

Область визначення функції. *Областю визначення функції* називається сукупність значень незалежної змінної при яких ця функція визначена, тобто область зміни незалежної змінної. Зазвичай ця змінна є безперервною, і тоді, як було зазначено раніше, ця область визначення складається з одного або декількох інтервалів.

В деяких випадках область визначення функції з'ясовується з фізичного або геометричного змісту цієї функції. Наприклад, якщо розглядається залежність $S=\pi R^2$ площі кола від довжини його радіуса, то областю визначення цієї функції буде інтервал $0 < R < \infty$, так як по геометричному змісту R може приймати саме такі значення. Якщо розглядається залежність щільності ρ атмосфери над даною точкою земної поверхні від висоти h над рівнем моря, то областю визначення цієї функції буде інтервал $h_0 \leq h \leq H$, де h_0 — висота земної поверхні, а H—умовна висота, прийнята за границю атмосфери, і т.д. Якщо функція задана просто формулою, то областю визначення служить сукупність значень аргументу, при яких формула дає визначене дійсне значення функції. (Ми поки що будемо розглядати тільки *дійсні функції від дійсного аргументу,* тобто функції, у яких залежна і незалежна змінні приймають лише дійсні значення.) Наприклад, якщо $y=x^3$, то x може приймати будь-яке значення, тобто областю визначення служить уся числова вісь —∞ < x <∞. Якщо $y=\sqrt{x^2-2}$, то при обчисленні y зустрінеться перешкода у добутку кореня, якщо виявиться, що x^2—2<0; виходить, повинно бути x^2— 2≥0, тобто x^2 ≥2, а це буде при x≤—√2 або x≥√2, тобто область визначення в даному випадку складається з двох інтервалів:—∞<x≤—√2 і √2≤x<∞. При знаходженні області визначення в аналогічних випадках треба з'ясувати, що може перешкоджати одержанню значення функції, після чого виписувати нерівності (як в останньому прикладі x^2—2≥0), які гарантують можливість цього одержання. Тоді задача зведеться до розв'язання цих нерівностей. Якщо незалежна змінна дискретна, то область визначення функції складається з дискретних (окремих) точок. Наприклад, якщо $f(x)=x\,! = 1\cdot 2\ldots x$, то x може приймати тільки значення 1, 2, 3, ... Якщо, як у цьому прикладі, дискретний аргумент приймає лише цілі значення, то зазвичай його позначають не x, а буквами n, m, k і т.п., а замість $f(1)$, $f(2)$, $\ldots$, $f(n)$, ... пишуть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ і говорять, що дана *послідовність;* наприклад, послідовністю служить геометрична прогресія $a_1=a$, $a_2=aq$, $a_3=aq^2$, …, $a_n=aq^{n-1}$, …і т.п. Графік функції від дискретного аргументу не є лінією, а складається з дискретних точок. Область зміни самої функції називається інакше *множиною значень цієї функції.* Наприклад, для функції $y=x^2$ областю визначення служить інтервал $-\infty<x<\infty$, а множиною значень – інтервал $0\leq y<\infty$, так як в даному випадку y приймає тільки такі значення. З'ясування області визначення функції важливо для побудови її графіка, так як ця область — це та частина осі абсцис, над або під якою пройде графік; точніше кажучи, це — проекція графіка на вісь абсцис. На рис.4.5 показані три простих графіки; області визначення цих функцій заштриховані. Ясно, що якщо область визначення складається з декількох часток, то і графік складається з декількох шматків.

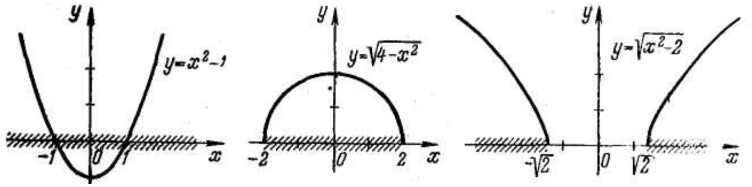


Рис.4.4.

Характеристики поводження функції.

Треба навчитися вільно характеризувати різні якості функції аналогічно тому, як ми характеризуємо якості людей: спокійний, блондин і т.п. Всюди, де не іде мова про протилежне, ми будемо вважати функції які досліджуються *однозначними,* тобто вважати, що кожному значенню незалежної змінної з її області зміни відповідає одне цілком визначене значення функції. Про *багатозначні* , тобто неоднозначні будемо говорити далі.

Функція називається *зростаючою* (відповідно *убутною*), якщо при зростанні аргументу значення функції зростають (відповідно убувають). Як зростаючі, так і убутні функції *називаються монотонними.* Якщо функція не є монотонною, то на осі аргументу можна вказати *інтервали монотонності,* на яких функція монотонна, іноді вони чергуються з *інтервалами сталості* функції. Так, на рис.4.6 показані графіки зростаючої функції *f(x),* функції $\varphi(x)$ яка убуває і немонотонної функції $\psi(x)$; остання функція має інтервал зростання $—\infty<x\le a$, інтервал убування $a\le x\le b$, інтервал сталості $b\le x\le c$ і інтервал зростання $c\le x<\infty$.

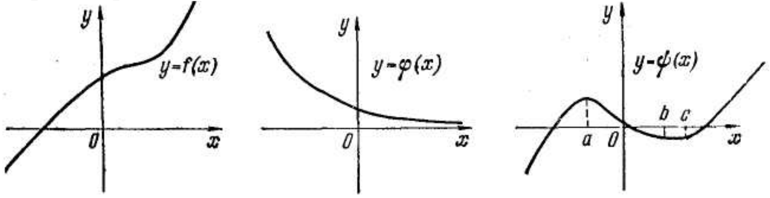


Рис.4.6.

Умову зростання функції $f(x)$ можна записати так: з $x_1 < x_2$ завжди випливає, що $f(x_1)< f(x_2)$. Це дає можливість робити однакові дії над обома частинами нерівності: наприклад, знаючи, що $y= x^3$ - зростаюча

функція, ми одержуємо, що з нерівності $a<b$ завжди випливає нерівність $a^3< b^3$ і зворотно. Якщо функція *f(x)* не є монотонною, то такі дії можна робити на інтервалі її зростання; на інтервалі убування функції *f(x)* з $x_1< x_2$ випливає, що $f(x_1) > f(x_2)$. Наприклад, функція $y=x^2$ — убутна при$—\infty <x\le 0$ і зростаюча при $0\le x<\infty$; виходить, з $a<b$ при $b<0$ випливає $a^2>b^2$, а при $a\ge 0$ випливає $a^2<b^3$. Функція називається *безперервною,* якщо при поступовій (безперервній) зміні аргументу значення функції міняються також поступово, без стрибків. В протилежному випадку функція називається *розривною,* а значення аргументу, при яких безперервність (поступовість) зміни функції порушується, називаються *точками розриву* функції .Так (рис.4. 7), функція $y=x^2$ безперервна на всій осі *x;* функція $y = 1/x$ має одну точку розриву $x=0$ (при наближенні аргументу до значення $x=0$ начення функції ідуть у нескінченність), а при інших *x* функція безперервна; функція $y= \mathrm{tg}x$ має нескінченне число точок розриву $x = \pm 0{,}5\pi, \pm 3/2\ \pi,$...

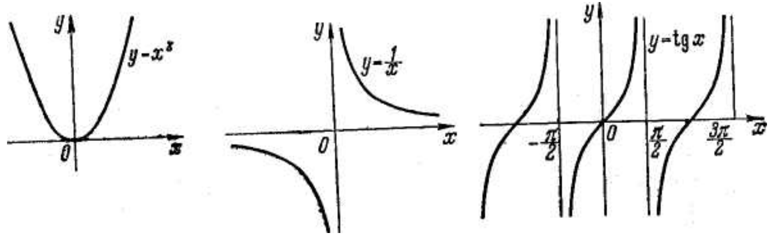


Рис.4.7

Якщо функція визначена по обидва боки від точки розриву, то графік цієї функції також має розрив і складається з двох або більшого числа частин (шматків; див., наприклад, рис.4.7). Функція $y =\sin x$ являє приклад періодичної функції. А саме (рис.4.8), поводження цієї функції на інтервалах

$$\ldots;— 4\pi\le x\le— 2\pi;\ — 2\pi\le x\le 0;\ 0\le x\le 2\pi;\ 2\pi\le x \le 4x,\ \ldots$$

зовсім однакове, більш точно: $\sin(x+2\pi)\equiv\sin x$. Тут $\equiv$ знак тотожної рівності, його пишуть, коли хочуть підкреслити, що деякі рівності є тотожними (хоча можна писати і звичайний знак рівності).

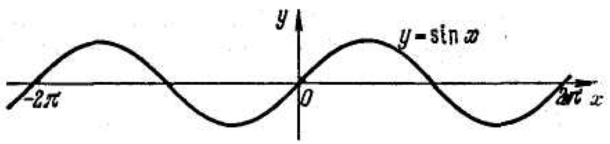


Рис.4.8

Число 2π називається періодом функції $y=sinx$.У загальному випадку функція $y=f(x)$ називається *періодичною* з *періодом* $A>0$, якщо має місце тотожність $f(x+A)\equiv f(x)$. Поводження такої функції на кожнім з інтервалів $\ldots;\ a—2A\le x\le a-A;\ a-A\le x\le a;\ a\le x\le a+A;\ a+A\le x\le a+2A;\ldots$ (де *а-довільно* вибране число) зовсім однакове (рис.4.9), так що досить розглядати функцію на одному з таких відрізків. (На рис.4.9 показано також рівність $f(x+A) = f(x)$ для одного із значень x.)

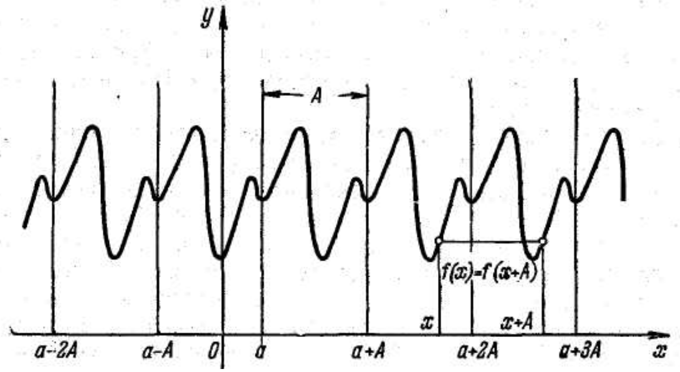


Рис.4.9.

Функція $f(x)$ називається *парною,* якщо вона не міняється при зміні знака у аргументу; іншими словами, якщо $f(-x)\equiv f(x)$. Прикладами парних функцій служать $y=x^2$, $y=x^6$, $y=cosx$ і т.д.

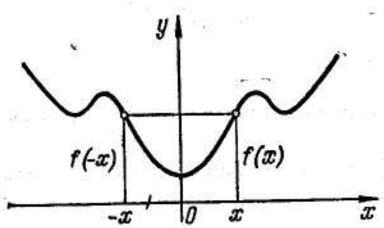


Рис.4.10.

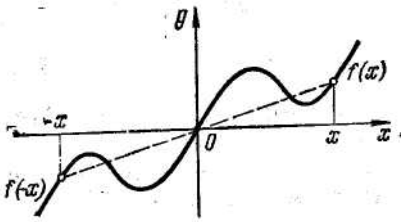


Рис.4.11.

З рис.4.10 видно, що графік парної функції симетричний щодо осі ординат. Функція $f(x)$ називається *непарною,* якщо при зміні знака у аргументу вона збільшується на—1, тобто, якщо $f(-x)\equiv-f(x)$. Прикладами можуть служити $y=x$, $y=x^5$, $y=sin\ x$ і т.д. З рис. 4.11 видно, що графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Відзначимо, що функція може не бути ні парною, ні непарною; наприклад, $y=1+\sin x$, $y=1-x$, $y=2^x$, $y=lgx$ і т.д.

Алебраїчна класифікація функцій. Функції, які задані єдиною формулою, класифікуються в залежності від характеру алгебраїчних дій, які треба зробити над аргументом, щоб одержати значення функцій. Якщо застосовуються тільки додавання, віднімання і множення, а також піднесення до цілого додатного степеню, що є частковим випадком множення, то функція називається цілою раціональною, або многочленом; при утворенні многочлена можуть застосовуватися довільні сталі коефіцієнти. Приклади многочленів: $y=x^3—2x+3$; $y=x^2$; $y=3$; $y=a^4x^2—2$ і т.д. З іншого боку, функції $y=x^{-5}$, $y=x^3+2\sqrt{x}$ не є многочленами в змісті приведеного визначення. Кожен многочлен має *степінь***,** який визначається старшим зі степенів, із тих які беруть участь, незалежної змінної: так, степені приведених многочленів дорівнюють 3, 2, 0, 3, 2. Більш широкий клас складають *раціональні* функції, у яких допускається також і ділення; при цьому, якщо раціональна функція не є цілою, то вона називається дробовою раціональною функцією.

Приклад. $$y=\frac{x^2-\dfrac{1}{x-1}}{x\sqrt{2}-3}-\frac{ax-\sqrt[3]{3}}{x^{-2}+1}.$$

Після приведення до загальних знаменників за правилами елементарної алгебри *всяку дробову раціональну функцію можна представити у вигляду відношення двох многочленів.* Ще більш широкий клас складають *алгебраїчні* функції, у яких допускається також і піднесення до кореня; при цьому, якщо алгебраїчна функція не є раціональною, вона називається *ірраціональною.*

Приклад ірраціональної функції:

$y = x^2—1/x+ \sqrt{x^2-1}$.

Неалгебраїчні функції називаються *трансцендентними.*

Приклади трансцендентних функцій:

$y=sinx$, $y = x^2 + \operatorname{tg} x$, $y=2^x$, $y = lgx$ і т.д.;

відзначимо, що дві останні функції також є трансцендентними.Усі ці визначення автоматично переносяться на функції декількох змінних. Єдиним новим моментом є визначення степеня многочлена задопомогою додавання показників степенів аргументів в одночленах. Так,функція $f(x,y)=x^4y–x^4y^2+x$ є многочленом шостого степеня від x і y; якщо ж, наприклад, у цій функції вважати y зафіксованим, то вона буде многочленом четвертого степеня від x.Для будь-якого числа змінних многочлен першого степеня називається *лінійною* функцією, многочлен другого степеня—*квадратичною* і т.д.

Елементарні функції. Перелічимо основні функції, які застосовуються в елементарній математиці:

$y =x^a$ (при сталому a) — *степенева* функція;

$y=a^x$ (при сталому a) - показникова функція, вона ж називається *експонентною* функцією або просто *експонентою;*

$y=log_a x$ (при сталому a)— *логарифмічна* функції;

$y=sinx$, $cosx$, tgx, $ctgx$ — *тригонометричні* функції;

$y =arcsinx$, $arccos\ x$ і т.д. — *обернені тригонометричні* функції.

Елементарними функціями називаються всі функції, які можна скласти з основних елементарних функцій за допомогою алгебраїчних

дій (із застосуванням будь-яких коефіцієнтів) і утворенні складених функцій. Так, всі алгебраїчні функції є елементарними. Але елементарними є і дуже багато трансцендентних функцій, наприклад, $x+ lg\ sin\ x$.

Елементарні функції складають значну частину функцій, що розглядаються в загальному курсі вищої математики. Прикладом неелементарної функції може служити, скажемо, функція $y=x!$.

Перетворення графіків.Часто буває, що нам відомі графіки яких-небудь функцій, а потрібно побудувати графіки інших функцій, які так чи інакше виражаються через перші. Ми приведемо кілька прикладів таких перетворень графіків. Нехай дано графік функції $y=f(x)$ і потрібно побудувати графіки функцій $z=f(x)+a$ і $u=f(x+b)$ (a і b — сталі), причому величини z і u будемо відкладати по тій же осі, що й y (рис.4.12).

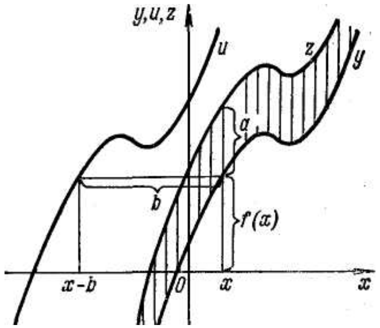


Рис.4.12.

Тоді при будь-якому x буде $z=y+a$, тобто графік функції z(x) виходить із графіка функції $y(x)$ за допомогою переносу уздовж осі y на a в додатному напряму (див. рис.4.12, де кожний з вертикальних відрізків має довжину a). Що стосується графіка функції $u(x)$, то часто помилково говорять, що він виходить із графіка $y(x)$ переносом на b уздовж осі x у додатному напряму. Насправді напрямлення переносу виходить прямо протилежним. Дійсно, щоб $u=y$, треба у виразі для u взяти аргумент на b менший, ніж у виразі для y, так як тоді

$$u=f[(x — b)+ b]=f(x) = y.$$

Тому графік функції $u(x)$ виходить із графіка функції $y(x)$ переносом на b уздовж осі x у від'ємному напрямленню. Зазвичай, якщо $a<0$ і $b<0$, то перенос буде в протилежному напрямленню, але цього не треба особливо обумовлювати, так як завжди ми маємо на увазі, що перенос на «—3» нагору — це все рівно, що перенос на «3» вниз. Подібним же чином будуються графіки функцій $v=kf(x)$ і $w=f(kx)$ (рис. 4.13). Графік функції $v(x)$ виходить із графіка функції $y(x)$ шляхом рівномірного розтягування від осі x у k раз, так як точки першого графіка мають при тих же абсцисах ординати в k раз більші, ніж у другого. Графік же функції $w(x)$ виходить із графіка функції $y(x)$ рівномірним стиском до осі y у k раз, так як $w(x/k)=f(k(x/k))=f(x)=y(x)$. Звичайно, якщо $0<k<1$, то замість розтягнення буде стиск, і навпаки (завжди мається на увазі, що розтягнення в 1/ 3 разу — це стиск у три рази). Якщо $k<0$, то до зазначених перетворень додасться ще дзеркальне відображення графіка від осі x для функції $v(x)$ або від осі y для функції $w(x)$.

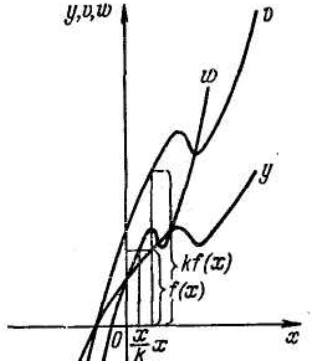


Рис.4.13.

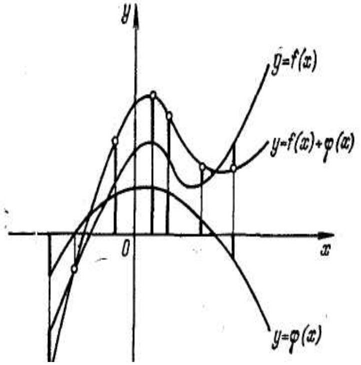


Рис.4.14.

Комбінуючи ці результати, бачимо, що графік функції $y=kf(mx+b)+a$ виходить із графіка $y=f(x)$ шляхом послідовних перетворень: переносу [який дасть графік $y=f(x+b)$], стиску [$y=f(mx+b)$], розтягування [$y=zf(mx+b)$] і ще одного переносу.

Аналогічних результатів можна досягти, зберігаючи графік, але виконуючи відповідні маніпуляції над осями координат. Наприклад, замість переносу графіка праворуч можна перенести осі координат ліворуч, іншими словами, перемістити ліворуч початок відліку на осі x, замість розтягнення графіка від осі x в k раз можна зменшити в k раз одиницю масштабу по осі y. Над функціями, заданими графічно, можна робити арифметичні дії. Наприклад, на рис. 4.14. показано графічне додавання двох функцій: графіки функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ дані, а графік

їхньої суми будується. На графіку рівні відрізки , які розташовані один над одним , виділені жирними лініями.

Покажемо на закінчення (рис. 4.15.) графічну побудову складеної функції $z=\varphi[f(x)]$, якщо відомі графіки кожної з функцій $z=\varphi(y)$ і $y=f(x)$.

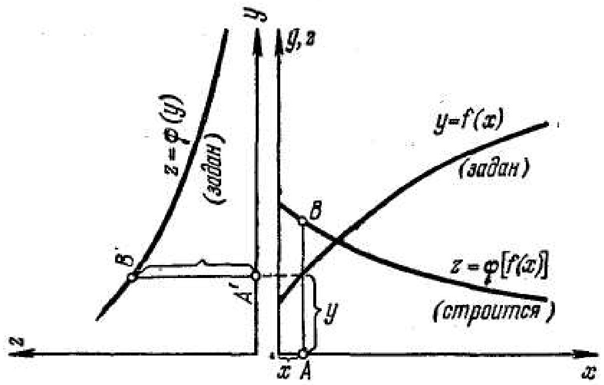


Рис. 4.15.

Ці графіки зручно розташувати так, як показано на рисунку, після чого, задаючись значеннями x, переносити відрізок $A'B'$ в положення AB, при цьому точка B опише необхідний графік складової функції.

Неявні функції. *Неявною функцією* називається функція, визначена з нерозв'язанного рівняння, що зв'язує аргумент і функцію. Розв'язуючи це рівняння, ми одержуємо ту ж функцію, але вже задану в явній формі. Так, рівності $x—y^3+2=0$ і $y=\sqrt[3]{x+2}$ рівносильні; вони визначають ту саму функцію $y(x)$, але перша рівність визначає її в неявній формі, як неявну функцію, а друга — у явній. Часто буває так , що розв'язати рівняння щодо функції неможливо або недоцільно; у цьому випадку рівняння так і залишають нерозв'язанним, в загальній формі (після переносу всіх членів у ліву частину)

$$F(x,\ y) = 0\ . \quad (4.2)$$

Цього не потрібно боятися, так як пізніше ми розглянемо ряд прийомів, які пристосовані до вивчення функцій, заданих у неявній формі.

Якщо в рівнянні (4.2), що визначає неявну функцію $y\ (x)$, задавати значення незалежної змінної x, то для знаходження відповідного значення y треба розв'язувати рівняння. Як відомо, якщо в рівняння підставити його розв'язання , то вийде тотожність. Тому можна сказати також, що неявна функція $y=y(x)$, яка визначена рівнянням (4.2), — це така функція, яка, будучи підставлена в рівняння (4.2), обертає його в тотожність (перевірте це на приведеному вище прикладі).

Рівняння (4.2) при заданому x може мати більше одного розв'язка . Тоді функція $y(x)$ буде багатозначною, тобто при заданому значенні аргументу приймає більше одного значення. Наприклад, розглядаючи неявну функцію $y(x)$, визначену з рівняння

$$x\text{-}y^2=0 \quad (4.3)$$

одержуємо при будь-якому заданому $x>0$ два значення y: $y=\sqrt{x}$ і $y=—\sqrt{x}$; *саме значення радикала завжди мається на увазі взятим в арифметичному змісті.* Розгляд багатозначних функцій виконувати незручно і його намагаються уникнути, розбиваючи таку функцію на *однозначні гілки*, які відповідають тому або іншому значенню функції. Так, у нашому прикладі двозначна функція $y=\pm\sqrt{x}$, яка визначена з рівняння (4.3), має дві однозначні гілки: $(y)_1=\sqrt{x}$ і $(y)_2= -\sqrt{x}$.Кожна гілка неявної функції являє собою однозначну функцію і тому має графік звичайного вигляду. Усі ці гілки складають зазвичай єдину лінію, що і є графіком функції, яка визначена рівнянням (4.2). Так у нашому прикладі рівняння (4.3) можна переписати у вигляді $x=y^2$ звідки ясно, що графіком служить звичайна «шкільна» парабола, але незвичайно розташована, так як осі x і y помінялися ролями в порівнянні з «стандартним» рівнянням $y=x^2$ (рис.4.16). Кожна з однозначних гілок зображується половиною параболи, перша — верхньою, друга —нижньою.

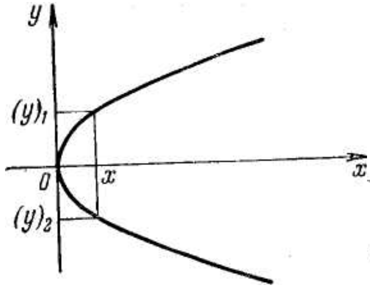


Рис.416.

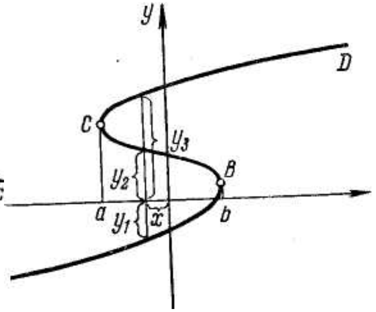


Рис.4.17.

Графік неявної функції може мати, наприклад, вигляд, зображений на рис.4.17. Тут видно, що при $x<a$ і при $x>b$ функція $y(x)$ є однозначною, а при $a<x<b$ — тризначною; при поділі значень на гілки природно вважати дугу AB графіком першої гілки, дугу BC - графіком другої і CD— графіком третьої гілки. У зв'язку з розглядом багатозначних функцій помітимо, що можливі такі функції, для яких кожному значенню незалежної змінної відповідає цілий інтервал значень функції. Наприклад, таке співвідношення буде між зростом і можливою вагою людини. Такі функції розглядаються зазвичай в теорії ймовірностей .

Обернені функції. Нехай розглядається функція

$$y=f(x) \quad (4.4)$$

Будемо придавати y різні значення і знаходити відповідні значення x, тобто приймемо колишню залежну змінну за аргумент, а колишню незалежну – за функцію. Отримана функція (залежність) $x(y)$ називається *оберненою* стосовно вихідної функції $y(x)$. Вона задається тією же рівністю (4.4), в якій, однак, треба розглядати y як незалежну змінну, а x — як залежну. Але раніше ми звертали увагу на те, що при розгляді однієї і тієї ж функції можна по-різному позначати змінні. Тому, якщо ми захотіли б для оберненої до (4.4) функції позначити, як зазвичай, незалежну змінну через x, а залежну - через y, то треба просто підставити в (4.4) x замість y, а y замість x, тобто рівність, що визначає обернену функцію, треба переписати у вигляді

$$x=f(y). \quad (4.5)$$

Таким чином, обернена функція виявляється задана в неявній формі і тому виявляється, узагалі говорячи, багатозначною. Легко показати умову однозначності оберненої функції — нею служить монотонність вихідної функції, так як тоді, задаючись значеннями *y*, ми щораз будемо одержувати єдине значення $x=x(y)$ (рис.4.18).

Приклади: Оберненою до $y=x^3$ служить функція, визначена з рівності $x=y^3$, тобто $y=\sqrt[3]{x}$; оберненою до $y=x^2$ служить двозначна функція $y=\pm\sqrt{x}$. Рівності (4.4) і (4.5) виходять у результаті простої перестановки величин *x* і *y*, тобто в результаті зміни їхніх ролей.

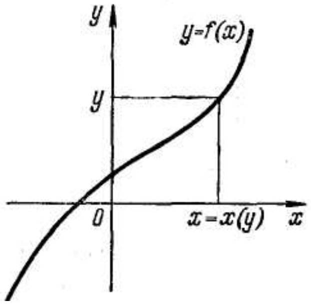


Рис. 4.18.

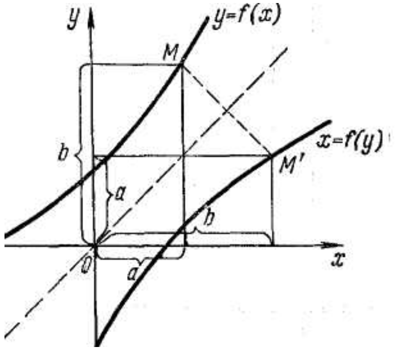


Рис. 4.19.

Тому з рис. 4.19 видно, що графік оберненої функції виходить із графіка вихідної функції за допомогою дзеркального відображення останнього щодо бісектриси кута між осями координат, позначеної на рис. 4.19 пунктиром. (Обидві точки *M* и *M'* на рис. 4.19 відповідають тій самій рівності вигляду $b=f(a)$). В заключення відзначимо, що якщо функція $x(y)$ обернена стосовно функції $y(x)$, то, навпаки, друга обернена стосовно першої; ці функції є взаємно оберненими.

4.4. Огляд найпростіших функцій

Багато функцій, які ми тут розглянемо, відомі з курсу середньої школи. Вони зібрані разом через їхнє велике значення.

Лінійна функція. Лінійна функція має загальний вигляд

$$y=ax+b, \quad (4.6)$$

де *a* і *b* — сталі коефіцієнти.

Графікам лінійної функції служить пряма лінія (рис. 4.20). Коефіцієнт *a* називається *кутовим коефіцієнтом* цієї прямої; чим $|a|$ більше, тобто чим *a* більше за абсолютним значенням, тим пряма йде крутіше.

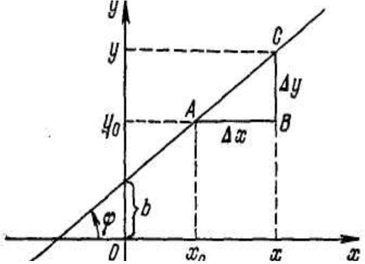


Рис. 4.20.

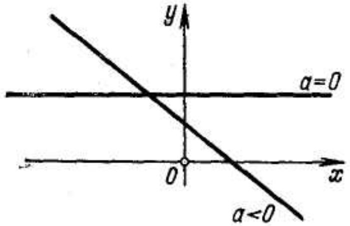


Рис. 4.21.

Якщо аргумент змінився від деякого значення x_0 до значення *x*, одержавши *приріст* Δx, а функція одержала відповідний приріст Δy, то з рівностей $y_0=ax_0+b$, $y=ax+b$ випливає $y—y_0=a\ (x—x_0)$, тобто

$$\Delta y = a\Delta x \text{ і } \Delta y/\Delta x=a. \quad (4.7)$$

Отже, для лінійної функції відношення приросту функції до приросту аргументу стало і дорівнює кутовому коефіцієнтові графіка; *приріст лінійної функції прямо пропорційний приросту аргумента.*

На рис. 4.20 зображено випадок, коли $a > 0$. Якщо $a < 0$, то пряма проходить праворуч вниз (рис.4.21). Якщо $a=0$, то пряма паралельна осі *x*; у цьому випадку функція стала, тобто виходить графік константи.

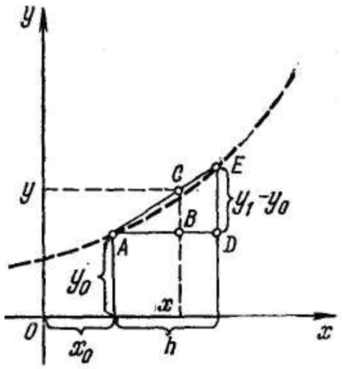


Рис. 4.22.

На властивості приросту лінійної функції заснована *лінійна інтерполяція,* що застосовується вже в шкільній практиці і полягає в наступному. Нехай значення деякої функції $y=f(x)$, графік якої зображений на рис. 4.22 пунктиром, відомі при $x = x_0$ і $x =x_0+h$,

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_0+h)=y_1,$$

але невідомі при проміжних значеннях x. Тоді ми наближено замінюємо дану функцію лінійною, яка приймає ті ж значення при $x=x_0$ і $x=x_0+h$, тобто замінюємо дугу AE відрізком прямої. З подоби трикутників ABC і ADE одержуємо тоді

$$(y-y_0)/(x-x_0)=(y_1-y_0)/h,$$

тобто

$$y=y_0+[(y_1-y_0)/h](x-x_0).$$

Така заміна можлива, якщо функція $f(x)$ на інтервалі, який розглядається, мало відрізняється від лінійної. Вона широко застосовується, зокрема, для таблиць з досить малим кроком, коли послідовні значення функції мало відрізняються одна від одної. Аналогічно здійснюється *лінійна екстраполяція* . З формули (4.7) і рис. 4.20 видно, що $a=\mathrm{tg}\ \varphi$, тобто *кутовий коефіцієнт прямої дорівнює тангенсові кута, під яким вона нахилена до осі абсцис.* Якщо величини x і y розмірні, то і кутовий коефіцієнт розмірний. З формули (4.6) видно, що $[b]=[y]$, $[ax]=[y]$, звідки $[a]=[y]/[x]$ (аналогічночно з'ясовується розмірність коефіцієнтів в інших формулах). Легко з'ясувати геометричний зміст кутового коефіцієнта: якщо одиниці величини x відповідає l_x одиниць довжини по осі x, а одиниці величини y відповідає l_y одиниць довжини по осі y (l_x і l_y—це *масштабні коефіцієнти),* то трикутник ABC на рис. 4.20 має довжини сторін $l_x\Delta x$ і $l_y\Delta y$, звідки

$$tg\ \varphi = \frac{l_y\Delta y}{l_x\Delta x} \text{ і } a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{l_x}{l_y} tg\ \varphi,$$

тобто кутовий коефіцієнт пропорційний тангенсу.

Квадратична функція. Квадратична функція має такий загальний вигляд:

$$y = ax^2 +bx+c.$$

В курсі середньої школи показується, що *графіком квадратичної функції служить парабола.* В найбільш простому випадку, коли $a=1$, $b=0$, $c=0$, тобто $y=x^2$, графік показано на рис. 4.23. Тоді функція буде парною, тобто вісь y для неї служить віссю симетрії *(вісь параболи).* Точка перетину параболи з її віссю називається *вершиною параболи;* на рис. 4.23 ця вершина розташована на початку координат.

У загальному випадку, при будь-яких a, b, c, парабола вийде в результаті рівномірного розтягування і паралельного переносу з тієї параболи, яка зображена на рис.4.23. При цьому з'ясувати положення вершини можна по методу *доповнення до повного квадрата,* що ми пояснимо на числовому прикладі. Нехай

$$y=2x^2—3x+1.$$

Тоді, після здійснення простих перетворень:

$$y=2(x-3/4)^2-1/8$$

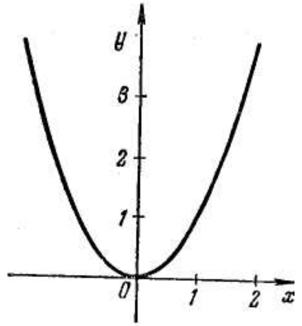


Рис. 4.23.

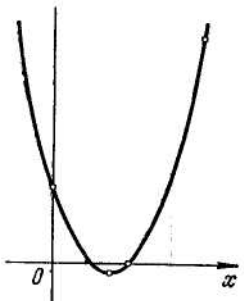


Рис. 4.24.

Таким чином, необхідний графік виходить з параболи, зображеної на рис. 4.23, в результаті переносу вправо на 3/4 рівномірного розтягу від осі x у два рази і наступний переніс вниз на 1/8. Отриманий графік зображено на рис. 4.24; для більш точної його побудови варто придати x кілька значень і знайти відповідні значення y, після чого побудувати відповідні точки на графіку (наприклад, при $x=0$, 1 і 2 виходить $y=1$, 0 і 3; відповідні точки на графіку відзначені). Вершина отриманої параболи знаходиться в точці M с координатами $x=3/4, y=—1/8$. Ця парабола більш вузька, ніж зображена на рис.4.23 (при тій же одиниці масштабу). Узагалі, чим більше $|a|$, тим парабола вужча. Якщо $a<0$, то парабола іде вниз, а якщо $a=0$, то квадратична функція перетворюється в лінійну.

Степенева функція. Степенева функція має вигляд

$$y=x^n$$

Якщо $0<x<1$, то чім більше n, тім значення функції менше, якщо $x>1$, то чім більше n, тім значення функції більше. Графіки при n=1,2,3,4 зображені на рис. 4.25. При побудові графіків в сторону $x<0$ треба врахувати, що при парному n функція виходить парною, а при непарному n—непарною. Звернемо, зокрема, увагу на графік функції $y=x^3$ *(кубова парабола).* При $x<0$ графік *опуклий догори* (вгнутий донизу), тобто лежить під дотичною, проведеною в будь-якій його точці. При $x>0$ графік *опуклий донизу.* На початку координат опуклість в одну сторону змінюється опуклістю в іншу сторону; тут дотичною до графіка служить вісь x, однак у точці дотику O графік переходить з однієї сторони дотичної на іншу. Такі точки називаються *точками перегину* даної кривої лінії. Таким чином, кубова парабола має одну точку перегину. Зокрема, точки перегину має синусоїда.

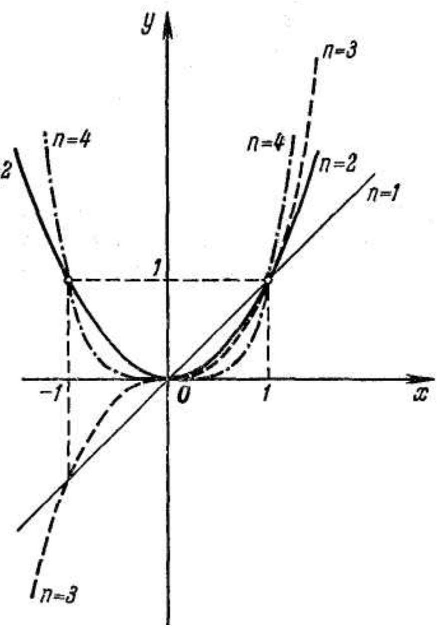


Рис. 4.25.

Якщо n нецілі, то графіки розташовуються між відповідними графіками для цілих n. Однак у цьому випадку при побудові графіка для від'ємних x треба дотримуватися обережності, так як від'ємне число в нецілому степені може дати уявне значення; у цьому випадку графік для $x<0$ не будується.

Розглянемо випадок $0<n<1$. Нехай, наприклад, $n=0,5$, тобто $y=x^{0,5}=\sqrt{x}$. Тоді графіком буде служити верхня половина звичайної (квадратичної) параболи з віссю, яка розташована по осі x (рис. 4.26). На рис. 4.26 зображені графіки степеневих функцій при деяких інших дробових n. Якщо дріб, який представляє n, має непарний знаменник, то графік існує не тільки при $x>0$, але і при $x<0$, так як з від'ємних чисел можливо добути корінь з непарним показником.

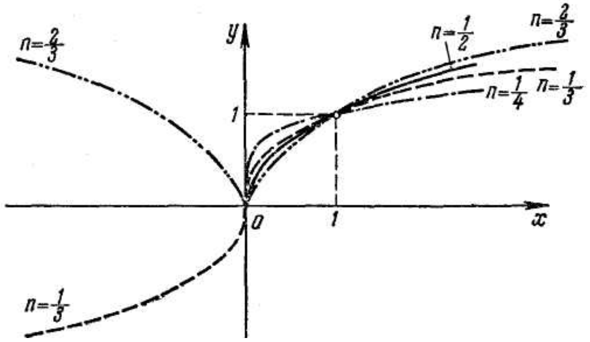


Рис. 4.26.

Звернемо, зокрема, увагу на графік функції $y=x^{2/3}$ *(напівкубова парабола),* відтворений на рис. 4.27.

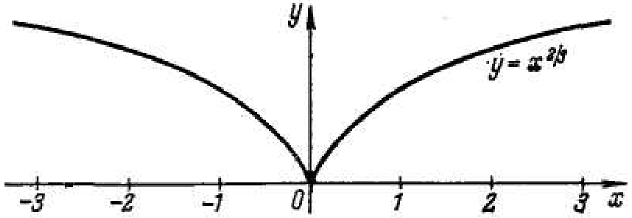


Рис. 4.27.

Цей графік, підходячи до початку координат, відходить від нього назад, маючи там вістря, яку називають *точкою повернення.* Надалі ми познайомимося з іншими лініями, які мають точки повернення.

Розглянемо, нарешті, випадок від'ємного $n=-m$. Тоді $y=1/x^m$ і тому при досить малих $|x|$ виходять досить великі $|y|$ і навпаки. Відповідні графіки показані на рис. 4.28 при $x>0$. Усі ці графіки при віддаленні в нескінченність витягаються вздовж координатних осей, безкінечно до них наближаючись. Якщо крива і пряма розташовані в такий спосіб одна відносно другої, то пряма називається *асимптотою* цієї кривої; таким чином, кожний із зазначених графіків має по дві асимптоти, якими служать осі координат.

Не слід думати, що і в інших випадках крива не може перетинати свою асимптоту.

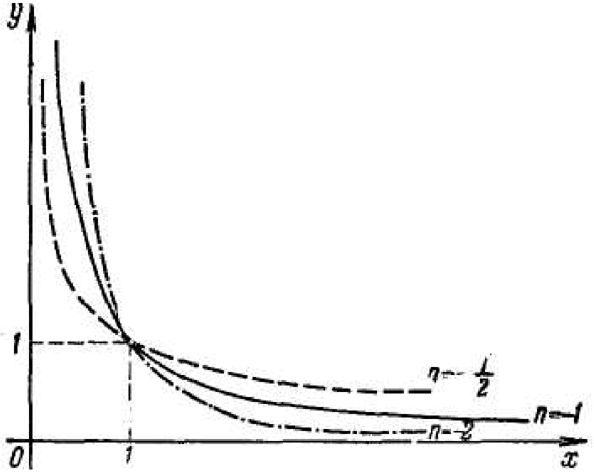


Рис. 4.28.

Так, при розгляді згасаючих коливань виходить графік вигляду, який зображено на рис. 4.29. Тут вісь x також служить асимптотою графіка.

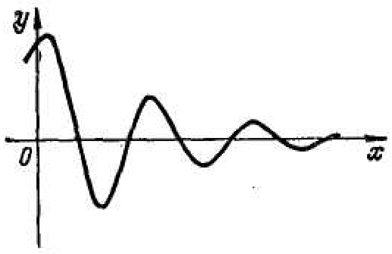


Рис. 4.29.

Дробово-лінійна функція. Дробово-лінійна функція являє собою відношення двох лінійних функцій і тому має загальний вигляд

$$y=(ax+b)/(cx+d). \quad (4.8)$$

У найпростішому випадку, коли $a=d=0$, якщо позначити $b/c=k$, одержимо $y = k/x$, тобто обернену пропорційну залежність. Відповідний графік, як відомо, називається *гіперболою.* На рис. 4.30 цей графік зображено у двох випадках: коли $k>0$ і коли $k<0$. Будучи графіком непарної функції, гіпербола має центр симетрії, на рис. 4.30 центром служить початок координат; вона має дві асимптоти, на рис. 4.30 ними є осі координат. В загальному випадку графіком дробово-лінійної функції також є гіпербола, але яка перенесена паралельно по відношенню положення, яке зображено на рис. 4.30.

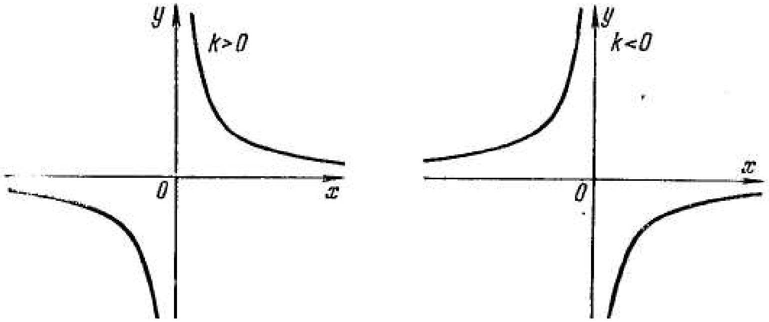


Рис. 4.30.

Покажемо це на числовому прикладі. Нехай

$$y=(2x+3)/(3x-5).$$

Проведемо прості перетворення

$$y=\frac{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}{3\left(x-\frac{5}{3}\right)}=\frac{2}{3}\frac{x-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{3}{2}}{x-\frac{5}{3}}=\frac{2}{3}\frac{\left(x-\frac{5}{3}\right)+\frac{19}{6}}{x-\frac{5}{3}}=\frac{2}{3}\left[1+\frac{\frac{19}{6}}{x-\frac{5}{3}}\right]=\frac{\frac{19}{6}}{x-\frac{5}{3}}+-\frac{2}{3}$$

Таки чином, необхідний графіка в виходить з графіка $y=\frac{19/9}{x}$ переносом праворуч на 5/3 і вгору на 2/3. Отримуємо гіперболу з центром симетрії в точці x=53, y=23 (рис. 4.31).

Дробово-лінійна функція загального вигляду має точку розриву при $x=-(d/c)$, де знаменник обертається в нуль. Тому і сталося, що її графік складається з двох шматків.

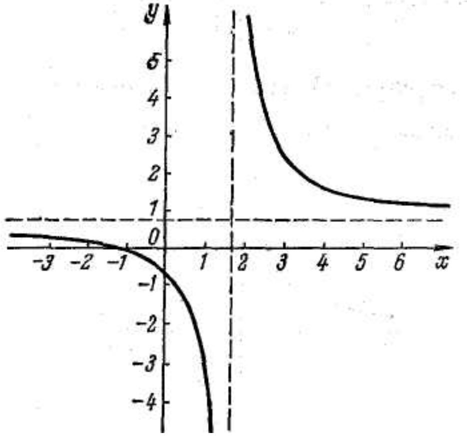


Рис. 4.31.

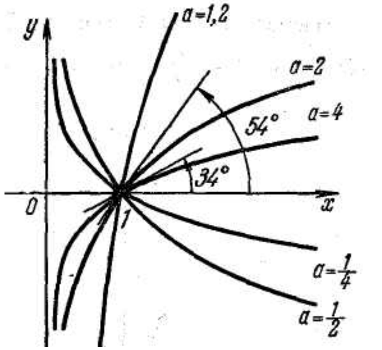
Логарифмічна функція. Логарифмічна функція – це функція яка має вигляд $y=log_a x$ (4.9)

Вона визначена тільки при $x>0$, причому розглядається при основі $a>0$ $(a\neq 1)$. Графіки логарифмічних функцій при різних основах показані на рис. 4.32. Вони не мають ні осі симетрії , ні центра симетрії, але мають асимптоту, якою служить вісь y. *Усі логарифмічні функції пропорційні одна одній,* так як якщо прологарифмувати рівність $a^{\log_a x}=x$ по основі b, одержуємо

$$log_b x=log_a x\cdot log_b a=k\ log_a x\ (k=log_b a=1/log_a b). \qquad (4.10).$$

Таким чином, усі графіки рис. 4.32 виходять з одного шляхом рівномірного розтягу від осі x або стиску до цієї осі. Для подальшого розгляду має значення той кут, під яким ці графіки перетинають вісь x; звичайно, мається на увазі кут між віссю x і дотичною до графіка в точці перетину, так як *кутом між двома* *лініями в точці їхнього перетину називається кут між дотичними до них у цій точці.*

При зазначеному розтягувані графіків дотична повертається, причому для дуже великих *a* вона нахилена досить полого, а при *a,* близьких до 1, — досить круто. *При деякому значенні a кут перетину графіка логарифмічної функції* (4.9) з *віссю x дорівнює* 45°; *це значення позначається буквою e* і грає у вищій математиці, як ми побачимо надалі, надзвичайно велику роль.



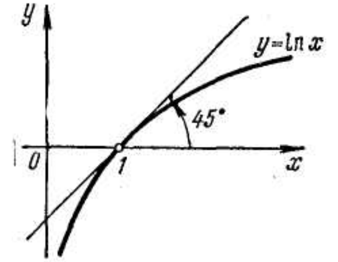


Рис. 4.32. Рис. 4.33.

На рис. 4.32 видно, що при *a*=2 кут перетину, який ми зглядаємо, більший за 45°, а при *a*=4 — менший; виходить, *e* розміщено між 2 і 4.

Точні підрахунки, про які буде сказано далі, показують, що *e*=2,71828, з точністю до 10^{-5}. Позначення числа *e* ввів Эйлер.

Логарифм по основі *e* називається *натуральним логарифмом* і позначається $\ln x=\log_e x$. Графік натурального логарифма показано на рис. 4.33. Логарифм при будь-якій іншій основі можна виразити через натуральні логарифми відповідно до формули (4.10):

$loga_x=lnx/lna$ (4.11.)

Наприклад, формули для переходу від десяткових логарифмів до натуральних і зворотно такі: lg *x* = 0,4343 ln *x*, ln *x*=2,303lg *x,* де коефіцієнт пропорційності зазначений з чотирма першими знаками. Крім натуральних логарифмів, у математиці широко застосовуються десяткові (при чисельних розрахунках) і двоїчні (в теорії інформації).

Показникова функція. Показниковою функцією називається функція вигляду $y=a^x$. (4.12)

Вона визначена при всіх *x,* причому розглядається тільки при додатному числі *a*>0, так як для *a*<0 при піднесені до нецілого степеню результат може вийти уявним. Рівність (4.12) вийде, якщо формулу (4.9) розв'язати відносно *x,* що дасть $x=a^y$, а потім переставити *x* і *y*. Таким чином, показникова і логарифмічна функції обернені одна одній. Тому графіки показникових функцій, які показані при різних додатних числах на рис. 4.34, виходять з відповідних графіків рис. 4.32 логарифмічних функцій за допомогою дзеркального відображення відносно бісектриси кута між осями координат. Якщо *a*>1, то показникова функція є зростаючої, причому тим швидше, чим більше *a*. Якщо $0<a<1$, то показникова функція убутна. Зазвичай за додатне число показникової функції приймається число *e;* у цьому випадку показникова (експоненціольна) функція має спеціальне позначення $y=e^x=\exp x$.

Показникову функцію з іншою основою можна привести до основи *e.*

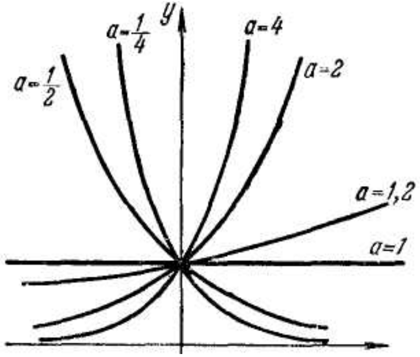


Рис. 4.34.

Гіперболічні функції. *Гіперболічними синусом, косинусом і тангенсом* називаються функції

$$sh\ x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad ch\ x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};th\ x=\frac{sh\ x}{ch\ x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

Встановимо деякі формули , які зв'язують ці функцій одна з другою, для чого піднесемо перші два рівняння до другого степеню:

$$sh^2\ x=\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4};\quad ch^2\ x=\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}$$

Виконавши віднімання і додавання цих двох формул , отримаємо

$$ch^2\ x - sh^2 - 1; \quad ch^2 x + sh^2 x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = ch\ 2x.$$

Уже ці отриманні формули вказують на значну аналогію між гіперболічними функціями і тригонометричними. Побудова графіків *sh x* і *ch x* показна на рис. 4.35, а графік *th x* , який можна побудувати по точках, користуючись першими двома графіками, показано на рис. 4.36.

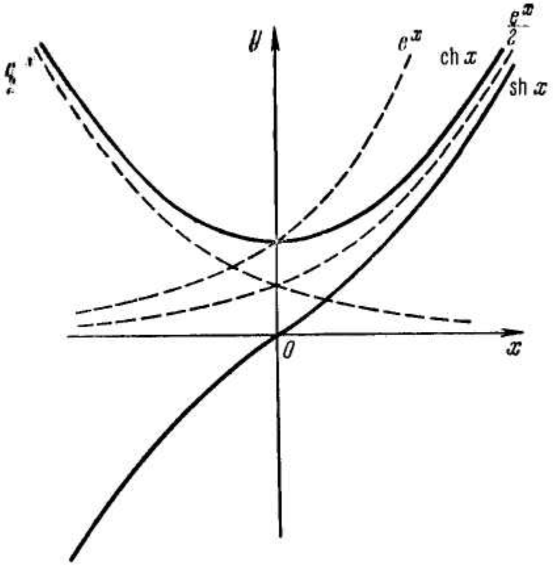


Рис. 4.35.

Ясно, що гіперболічні функції не мають найважливішої властивості тригонометричних функцій — властивості періодичності. Крім того, множина значень кожної гіперболічної функції істотно відрізняється відмножини значень відповідної тригонометричної функції.

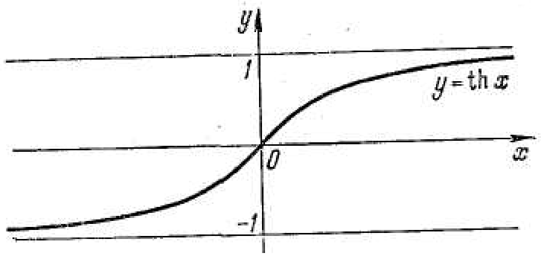


Рис. 4.36

Графік функції th *x* має дві асимптоти, так як, наприклад, при великих *x* буде e^{-x}«1«e^x (тут << — знак *«значно менше»)* і тому th $x \approx 1$.

Іноді розглядаються *обернені гіперболічні функції;* вони позначаються arsh *x*, arch *x* і arth *x*. З рис. 4.35 і 4.36 видно, що перша і третя функції є однозначними, тоді як друга — двозначна. Усі ці функції можна виразити через логарифм. Дійсно, нехай, наприклад, y=arsh$x$. Тоді по визначенню цієї оберненої функції

$$x = sh\ y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

тобто

$$e^y - e^{-y} \text{-}2x\text{=}0; \ e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

звідки $$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Так як ліва частина додатна, то і права повинна бути додатною, тобто перед радикалом можна взяти тільки знак «+». Логарифмуючи, одержимо

$$y = arsh\ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1.}\right)$$

Тригонометричні функції. Періодична з періодом 2π функція y=sin x добре відома з курсу тригонометрії;

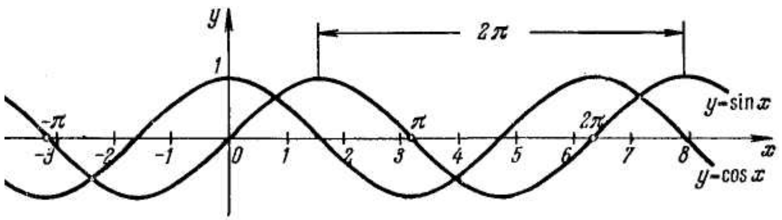


Рис. 4.37.

її графік *(синусоїда)* показано на рис. 4.37. Ця функція непарна, не має точок розриву і має границі (розміщена між —1 і +1). Так як

$\cos x = \sin(x+\pi/2)$,

то графік функції $\cos x$ - це та ж синусоїда, але зміщена на $\pi/2$ ліворуч, він також показаний на рис. 4.37. Синусоїдальна, ”гармонійна” залежність з'являється у вигляді

$$y = M \sin(\omega t+\alpha) \quad (4.13)$$

де незалежна змінна t — час, стала $M>0$ називається *амплітудою,* $\omega>0$ *частотою* (круговою), сума $\omega t+\alpha$ - фазою, стала α — *початковою фазою* (вона виходить з фази при $t=0$). Легко з'ясувати, як впливають параметри M, ω і α на форму і розташування синусоїди. Амплітуда M збільшує розмах синусоїди від $-M$ до M, частота ω робить період рівним $T=2\pi/\omega$, а через наявність початкової фази синусоїда зміщується ліворуч на α/ω, так як $\omega t+\alpha=\omega(t+\alpha/\omega)$, тобто до аргументу додається α/ω. Графік, який вийшов, показано на рис. 4.38.

Функція, яка має вигляд (4.13) виходить, при перетворенні виразу

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Так як праву частину (4.13) можна переписати у вигляді

$$M \sin \alpha \text{ x } \cos \omega t + M \cos \alpha \sin \omega t,$$

то для рівності

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \equiv M \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.14)$$

повинно бути

$A = M \sin \alpha$, $B = M \cos\alpha$.

Звідси легко знайти M і α:

$M = \sqrt{A^2+B^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = A/B$;

чверть, у якій потрібно взяти α, визначається знаками $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, тобто знаками A і B.

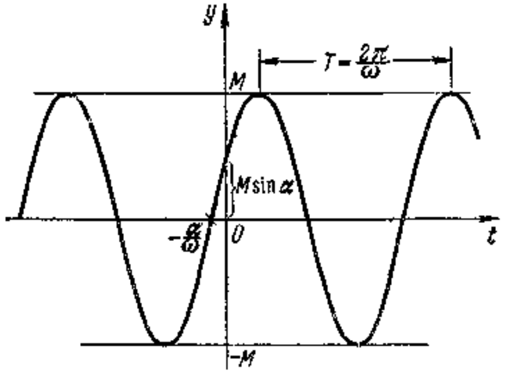
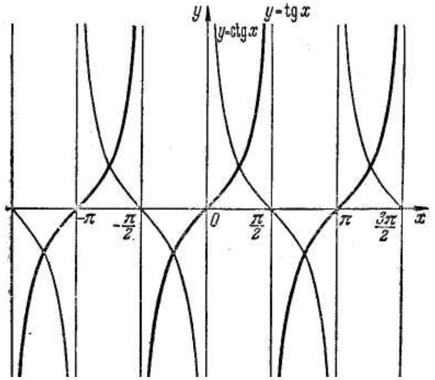


Рис. 4.38.

Графік цієї функції (тангенсоїда) показано на рис. 4.39, він складається з нескінченного числа однакових шматків і має нескінченне число асимптот. На рис. 4.39 показаний також графік функції $y=ctgx$. Так як $\operatorname{ctg} x = — \operatorname{tg}(x—\pi/2)$, то лінія виходить така ж, але по іншому розміщена. Функція $y = Arcsin\ x$ зворотна по відношенню до функції $y=sinx$, тому графік першої (рис. 4.40) виходить із графіка другої шляхом дзеркального відображення щодо бісектриси кута між осями координат. Ця функція багатозначна (точніше, нескінченозначна) і тому зазвичай розглядається її *головна гілка* (головне значення арксинуса), яка показана на рис. 4.40 більш масно. Ця гілка позначається $y=arcsinx$, $-\pi/2 \le arcsinx \le \pi/2$ і являє собою однозначну функцію



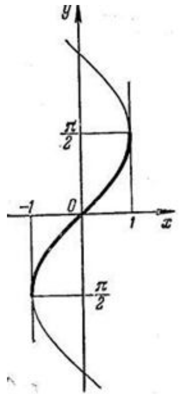


Рис. 4.39. Рис. 4.40.

На закінчення відзначимо, що значення arcsin x завжди будуть братися відверненими (безрозмірними). Аналогічно sin$x$ береться від безрозмірного значенні x; при цьому, зазвичай, синус числа x — це синус кута в x радіан. Наприклад,

$$\sin 1=\sin 57°18'=0{,}8415.$$

Підбір емпіричної формули. Як говорилося раніше в результаті експерименту часто цікавляча нас функція $y=f(x)$ виявляється заданою в табличному вигляді, і тоді може виникнути питання про підбір для неї наближеної *емпіричної формули.* При цьому зазвичай починають з того, що зображують значення функції на міліметрівці або іншому носієві візуальної інформації, наприклад, екран дисплея комп'ютера. Після цього вибирають вигляд формули, якою будуть користуватися. Якщо цей вигляд не випливає з яких-небудь загальних міркувань, то зазвичай вибирають одну з функцій, або просту комбінацію таких функцій (суму степеневих або показникових функцій і т.п.); зазвичай, для цього треба добре уявляти собі графіки цих функцій. При цьому стежать за тим, щоб функція, яка підбирається $\varphi\ (x)$ мала ті ж характерні риси, що і досліджувана функція $f(x)$: скажемо так, якщо по своєму фізичному змісту $f(x)$ парна і $f(0)=0$, то і функція $f(x)$ повинна мати ці ж властивості і т.п. Іноді не вдається підібрати єдину формулу на всьому інтервалу зміни x і тоді ми вимушені розбивати цей інтервал на частини і на кожній підбирати свою формулу.

Після вибору вигляду формули потрібно визначити значення параметрів, які входять у цю формулу.

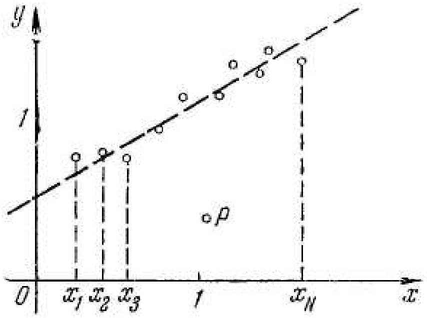


Рис. 4.41.

Нехай, наприклад, після побудови точок вийшла картина, яка зображена на рис. 4.41. Якщо при експерименті або при обчисленнях не були виключені істотні помилки, то точки, які в значній мірі випадають із загального ходу залежності, як точка P на кресленні, відкидаються. Втім, іноді такі точки свідчать про якісь важливі невраховані фактори, і тоді їх треба взяти до уваги.

Точки, що залишилися, на рис. 4.41 нагадують нам про лінійну залежність вигляду $y=ax+b$. Щоб знайти параметри a і b, проведемо на кресленні пряму, до якої експериментальні точки лежать ближче усього; це легко зробити, наклавши на креслення прозору лінійку і пересунути її на око в потрібне положення.

Так, на рис. 4.41 одержуємо $b=0{,}50$, $a=\Delta y/\Delta x=0{,}58$, тобто $y=0{,}58x+0{,}50$.

Описаний підбор лінійної залежності порівняно простий. Тому при виборі залежності іншого типу часто намагаються так ввести нові змінні, щоб у них залежність стала лінійною, після чого вже намагаються знайти параметри, які входять у цю залежність (це *метод вирівнювання).* Зазвичай, так можна робити, якщо таких параметрів не більш двох, так як в лінійної функції є два параметри.

Зображення експериментальних точок на інформаційному носії нагадують про степеневу функцію вигляду $y=ax^{\alpha}$. Щоб знайти параметри a і α , прологарифмуємо цю рівність і позначимо $\lg y=Y$, $\lg x=X$, $\lg a=A$. Тоді ми приходимо до рівності $Y=\alpha x+A$, тобто в нових змінних залежність є лінійною. За допомогою таблиці логарифмів отримаємо значення нових змінних: Отримані точки добре лягають на пряму (рис. 4.41), при проведенні якої треба більше орієнтуватися на останні точки, які відомі з кращою точністю. З креслення одержуємо $A=0{,}196$, $\alpha=2{,}44$, тобто $a=1{,}57$і остаточно одержуємо $y=1{,}57x^{2{,}44}$.

Мікромодуль 9
Індивідуальні тестові завдання

1. Дано функцію $f(x)=x^2+6x—4$. Перевірити, що

$$f(1)=3, f(3)=23.$$

2. $f(x)=x^2+1$. Обчислити значення:

а) $f(4)$. б) $f(\sqrt{2})$. в) $f(a+1)$. г) $f(a)+1$. д) $f(a^2)$. е)$[(a)]^2$.
ж) $f(2a)$.

3. $\varphi(x)=(x—l)(3x+5)^{-1}$. Написати вираз: $\varphi(1/x)$ і $1/\varphi(x)$.

4. $\varphi(x)=\sqrt{x^2+4}$. Написати вирази: $\varphi(2x)$ і $\varphi(0)$.

5. $f(\alpha) = \mathrm{tg}\alpha$. Перевірити рівність $f(2\alpha)=2f(\alpha)/\{1-[f(\alpha)]^2$.

6. $f(x)=lgx$; $\varphi(x)=x^3$. Написати вираз: а) $f[\varphi(2)]$. б) $f[\varphi(a)]$. в)$\varphi[f(a)]$.

7. Знайти природну область визначення функції $y=2x^2+1$.

Побудувати графіки функцій:

8. $y=—3x+5$. 9. $y=0,5x^2+l$. 10. $y=3—2x^2$. 11. $y=x^2+2x—1$.
12.$y=1/(x—1)$. 13.$y=\sin 2x$. 14. $y=\cos 3,x$. 15. $y=x^2—4x+6$
16. $y=\mathrm{tg}0,5x$. 17. $y=\mathrm{ctg}(x/4)$. 18. $y=3^x$. 19. $y=\log_2(1/x)$.
20. $y=x^3+1$. 21. $y=4—x^3$. 23. $y=x^4$. 24. $y=x^5$.
25. $y=\sqrt{x}$. 26. $y=(\sqrt{x})^{-1}$ .27. $y=\sqrt[3]{x}$. 28. $y=|x|$.
29. $y=\log_2|x|$. 30. $y=\log_2(1—x)$.
31. $y=3\sin[2x+\pi/3)$. 32. $y=4\cos(x+\pi/2)$.

33. Функція $f(x)$ визначена на відрізку [—1; 1] у такий спосіб:

$f(x)=1+x$ при $—1\le x\le 0$;

$f(x)=1-2x$ при $0\le x<1$.

34. Функція $f(x)$ визначена на відрізку [0; 2] у такий спосіб:

$f(x)=x^3$ при $0\le x\le 1$

$f(x)=x$ при $1\le x\le 2$.

Мікромодуль 10
Границя

4.4. Нескінченно малі і нескінченно великі величини

Нескінченно малі величини. Нескінченно малі величини це дуже важливий клас змінних величин, який грає першорядну роль у вищій математиці. *Змінна величина називається нескінченно малою в деякому процесі, якщо вона в цьому процесі безмежно наближається (прагне) до нуля.* Так, у процесі безмежного розширення даної маси газу щільність і тиск будуть величинами нескінченно малими; це — приклад додатної, неперервної, монотонної, нескінченно малої величини. При загасаючому коливанні маятника кут його відхилення від положення рівноваги в процесі перебігу часу також є нескінченно малою величиною, але ця величина вже така , яка коливається і знову і знову приймає значення обох знаків, а також нульове значення. При розгляді послідовності $a_1=-1/1^2$, $a_2=-1/2^2$, $a_3=-1/3^2$ … загальний її член $a_n=-1/n^2$ у процесі збільшення номера, n = 1,2,3,... є нескінченно малою дискретною величиною, притому від'ємною, і т.д. Відзначимо, що при кваліфікації деякої величини в якості нескінченно малої неодмінно повинно бути зазначено процес, так як та ж величина в іншому процесі може вже зовсім не бути нескінченно малою.

Як ми сказали, нескінченно мала величина α повинна „безмежно наближатися до нуля". Більш докладно це розшифровується так. В ході розвитку процесу повинний найтися момент, починаючи з якого вже напевно завжди буде $|\alpha|<1$; деякий інший, більш пізніший момент, починаючи з якого завжди буде $|\alpha|<0,1$; деякий третій, ще більш пізній момент, починаючи з якого завжди буде $|\alpha|<0,01$ і т.д. Це виражається такими словами: для *будь-якого* заданого сталого $\varepsilon>0$ у ході розвитку процесу повинний найтися момент, починаючи з якого завжди буде $|\alpha|<\varepsilon$. При цьому немає потреби завжди такий момент фактично точно вказувати: досить мати впевненість, що він коли-небудь, наступить. Таким чином, нескінченно мала величина на початку своєї зміни може бути зовсім не малою: істотно лише, що вона в ході розвитку процесу стає *як завгодно малою* (звичайно, маємо на увазі, по абсолютній величині).

Уточнимо ще поняття «момент у розвитку процесу». Якщо процес розглядається таким, який розвивається в часі, то під «моментом» розуміється просто момент часу. Однак розвиток процесу може характеризуватися зміною не часу, а деякої іншої змінної величини (наприклад, у третьому з приведених прикладів процес полягає в тому, що номер n приймає значення 1,2,3,) ; тоді «момент» полягає в тому, що ця величина приймає визначене значення.

Користуючись уточненнями, які описані в останніх двох абзацах, ми можемо сказати, наприклад, що загальний член a_n якої-небудь послідовності є нескінченно малим у процесі збільшення номера n, якщо для будь-якого заданого $\varepsilon>0$ повинен знайтися такий номер $N=N(\varepsilon)$, що при $n>N$ буде обов'язково $|a_n|<\varepsilon$

З погляду приведеного вище визначення стала величина, навіть досить мала, не є нескінченно малою; тільки стале число 0 з формальної точки зору є нескінченно малою величиною.

Треба сказати, що це визначення нескінченно малої величини, яким ми будемо користуватися, при його практичному застосуванні приводить до наступного принципового утруднення: жодна реальна величина не може *безмежно* наближатися до нуля. Дійсно, у розв’язані приведених прикладах газ безмежно розширюватися не може, а реальний маятник через якийсь час зупиниться. Розглядаючи нескінченно малу масу, ми зіштовхнемося з тим, що якщо взяти масу дуже малою, прийдеться враховувати молекулярну будову речовини, а взяти масу менше маси елементарних часток неможливо; те ж саме і в інших прикладах.

Таким чином, зазначене визначення нескінченно малої можна застосовувати лише до *математичної моделі* реального процесу, у якій дійсна картина змінена так, щоб зробити це застосування можливим: ми розглядаємо маятник, що може загасати нескінченно довго, матеріальні тіла «суцільної» (немолекулярної) побудови і т.п. Ця зовсім необхідна заміна реального процесу на його математичну модель повинна проводитися так, щоб досліджувані сторони процесу

не потерпіли б істотного перекручування. Але модель є лише модель, і забуття про це може привести до принципових помилок, наприклад, до спроб нав'язати без належного обгрунтування всі властивості моделей реальній дійсності.

Є й інший спосіб тлумачення можливості практичного застосування нескінченно малих, і ми цим способом також будемо користуватися. А саме, *практична нескінченність* дещо відрізняється від *математичної нескінченності.* Так, «практична» («фізична») нескінченно мала величина це змінна або навіть стала величина, досить мала в порівнянні з приймаючими участь «кінцевими» величинами (настільки мала, щоб можна було без істотної похибки застосовувати стосовно неї властивості «математичних» нескінченно малих). У той же час ця величина не повинна бути настільки малою, щоб довелося враховувати мікроефекти там, де це недоречно, або щоб відриватися від реально можливих її значень. Наприклад, при вивченні деформації пружного тіла практично нескінченно малими розмірами варто вважати розміри, досить малі в порівнянні з розмірами тіла, але в той же час досить великі в порівнянні з молекулярними розмірами і т.п.

Нижче ми будемо користуватися визначенням, даним на початку цього пункту, і час від часу будемо згадувати про висловлені тут міркування.

Властивості нескінченно малих. Властивості нескінченно малих відразу випливають з їхнього визначення, даного раніше.

1. *Сума або різниця двох нескінченно малих є також величина нескінченно мала.* Дійсно, якщо кожен доданок безмежно наближається до нуля, то і сума теж. Аналогічним чином сума трьох, десяти і взагалі будь-якого обмеженого числа нескінченно малих є також величина нескінченно мала. Відзначимо, що бувають випадки, коли в ході розглянутого процесу число доданків у сумі безмежно росте; тоді, навіть якщо кожен з доданків є величина нескінченно мала, сума може не бути нескінченно малою. Наприклад

$$\underbrace{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}_{n\ раз}=\frac{1}{n};\quad \underbrace{\frac{3}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{3}{n}}_{n\ раз}=3;\quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}_{n\ раз}=\sqrt{n}.$$

При збільшенні n тут буде саме така ситуація; в той же час перша сума є величиною нескінченно малою, друга — сталою, а третя - навіть безмежно зростаючою.

2. *Добуток нескінченно малої величини на величину обмежену є також величина нескінченно мала.* Нехай, наприклад, перший множник увесь час розміщують в границях від 0 до 1000, а другий послідовно приймає значення 1, 0,1, 0,01, 0,001 і т.д. Тоді значення добутку в ці моменти будуть послідовно менше 1000×1=1000, 100, 10, 1, 0,1,0,01,0,001 і т.д.

З цієї властивості випливає, зокрема, що *добуток нескінченно малої на величину сталу є величина нескінченно мала. Добуток двох нескінченно малих є величина нескінченно мала,* так як нескінченно мала величина є, зазвичай, частковим випадком обмеженої величини. Аналогічно, добуток будь-якого числа нескінченно малих є величина нескінченно мала.

Відзначимо, що *частка від ділення двох нескінченно малих може не бути нескінченно малою.* Якщо, наприклад, $\alpha=1/n$, $\beta=1/n^2$, $\gamma=1/n+1/n^2$, де n приймає послідовні значення 1,2,3, ..., то величини α, β і γ — нескінченно малі. У той же час з їх відношень $\beta/\alpha=1/n$; $\gamma/\alpha=1+1/n$; $\alpha/\beta=n$ перше є нескінченно малим, друге наближається до 1, а третє навіть безмежно зростає.

Нескінченно великі величини. *Змінна величина x називається нескінченно великою у деякому процесі, якщо вона в цьому процесі безмежно зростає по абсолютній величині;* тоді пишуть $|x|\to\infty$. Нескінченно велика величина може бути додатною ($x\to\infty$, іноді пишуть $x\to+\infty$), від'ємною ($x\to-\infty$), але може також і змінювати знак: наприклад, величина $x_n=(-2)^n$ при зростанні номера приймає значення —2, 4, —8, 16,..., тобто є нескінченно великою. Докладна розшифровка поняття «безмежно зростає» аналогічна тієї, котра була дана раніше для поняття «безмежно наближається до нуля», але, зазвичай, треба розглядати нерівності вигляду $|x|>N$. Це значить, що, починаючи з деякого моменту, величина повинна напевно задовольняти нерівності $|x|>1$, починаючи з деякого іншого, більш пізнього моменту, - нерівності $|x|>10$, починаючи з третього моменту, - нерівності $|x|>100$ і т.д.

Відзначимо деякі прості властивості нескінченно великих. *Величина, обернена нескінченно великій, є нескінченно малою, а величина, обернена нескінченно малій, є нескінченна велика.* Умовно це записують так:
$1/\infty=0$, $1/0=\pm\infty$.

Такі записи, якими ми будемо користуватися, треба правильно розуміти. Наприклад, перша означає: якщо в рівності $1/x=\alpha$ величина x безмежно зростає, то в тому же процесі величина α безмежно наближається до нуля (або, якщо x «практично» нескінченно велика, то α — „практично” нескінченно мала). Аналогічно розшифровуються усі формули, що містять знак нескінченності ∞. Так, формула $\mathrm{tg}\pi/2=\pm\infty$ є умовним коротким записом наступного факту: у процесі, коли величина φ безмежно наближається до π/2, величина $x=\mathrm{tg}\,\varphi$ безмежно зростає по абсолютній величині, тобто є нескінченно великою, і т.п. Таким шляхом вдається в багатьох випадках маніпулювати зі знаком ∞, як зі звичайним числом, хоча, зазвичай, ∞ не є конкретним числом, але лише значком для змінної нескінченно великої величини, причому в різних випадках різної.

Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є величиною нескінченно великою, так як перший доданок «перетягує». Сума двох нескінченно великих однакового знака є також нескінченно велика. На відміну від цього сума двох нескінченно великих протилежного знака може і не бути нескінченно великою, нескінченності можуть «компенсуватися». Це записують так: $\infty+\infty=\infty$; $\infty-\infty$ є *невизначеність*. Останнє показує, що зі знаком ∞ не завжди можна діяти як зі звичайним числом: зовсім не завжди $\infty-\infty=0$, так як $\infty-\infty$ - це короткий запис різниці $X-Y$, де X і Y - нескінченно великі, узагалі говорячи, різні, а тоді в різних конкретних прикладах різниця буде поводитися зовсім по-різному.

Добуток двох нескінченний великих є величина нескінченно велика. Більш того, добуток нескінченно великої на величину, велику за абсолютним значенням деякої додатної сталої, є величина нескінченно велика. У той же час частка від ділення двох нескінченно великих, подібно частці від ділення двох нескінченно малих, є невизначеність.

4.5. Границі

У цьому розділі ми будемо розглядати упорядковані змінні величини, що змінюються спеціальним чином , який визначається термінами «змінна величина прагне до границі». В усьому подальшому курсі поняття границі змінної буде відігравати фундаментальну роль, так як з ним безпосередньо зв'язані основні поняття математичного аналізу - похідна, інтеграл і ін.

Означення. Говорять, *що змінна величина х у деякому процесі прагне до кінцевої границі а, якщо величина а стала і х у цьому процесі безмежно наближається до а.* Тоді пишуть *х*→ *а* або lim *х*=*а* (lim — від латинського «limes», що означає «границя»). Таким чином, кінцевою границею *змінної* величини, якщо вона є, служить величина *стала.*

Відповідно до даного визначення *нескінченно малі величини — це величини, які прагнуть до нуля,* тобто *які мають границею нуль. Нескінченно ж великі величини кінцевої границі не мають.*

Сказати «*х* безмежно наближається до *а*» — це все рівно, що сказати «різниця між *х* і *а* безмежно наближається до нуля», тобто *х*—*а*=α є нескінченно мала. Останню ж рівність можна переписати у вигляді

$$x=a+\alpha \quad \text{або} \quad x=(\lim x)+\text{н.м.}$$

У термінах геометричних визначення границі може бути сформульоване в такий спосіб:
Стале число *а* є *границя* змінної *х*, якщо для кожної наперед заданої як завгодно малого околу з центром у точці *а* і радіусом ε знайдеться таке значення *х*, що всі точки, які відповідають наступним значенням змінної будуть знаходитися в цьому околі (рис. 4.42).

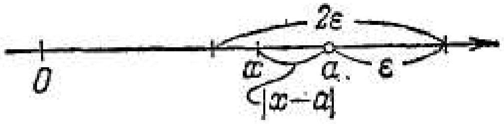


Рис. 4.42.

Розглянемо декілька прикладів змінних , які прагнуть до границі

Приклад 1. Змінна величина *х* послідовно приймає значення

$$x_1 - 1 + 1,\ x_2 = 1 + \frac{1}{2},\ x_3 = 1 + \frac{1}{3}, \ldots, x_n = 1 + \frac{1}{n}, \ldots$$

Доведемо, що ця змінна величина має границю, яка дорівнює одиниці. Маємо

$$|x_n - 1| = \left|\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{n}$$

Для будь-якого ε всі наступні значення змінної, починаючи з номера *n,* де 1/*n*<ε, або *n*>1/ε, будуть задовольняти нерівності

$$|x_n - 1| < \varepsilon,$$

Помітимо, що тут змінна величина прагне до границі, убуваючи.

Приклад 1. Змінна величина *х* послідовно приймає значення

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2},\ x_2 = 1 + \frac{1}{2^2}, x_3 = 1 - \frac{1}{2^3}, x_4 = 1 + \frac{1}{2^4}, \ldots, x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ldots$$

Ця змінна має границю, яка дорівнює одиниці. Дійсно,

$$|x_n - 1| = |(1 + (-1)^n / 2^n - 1| = 1/2^n$$

Для будь-якого ε, починаючи з номера *n,* яке задовольняє співвідношенню $1/2^n<\varepsilon$ з якого випливає:

$$2^n > 1/\varepsilon,\ n \lg 2 > \lg(1/\varepsilon) \text{ або } n > \frac{\lg(1/\varepsilon)}{\lg 2} n$$

усі наступні значення *х* будуть задовольняти співвідношенню |x_n-1|<ε. Відзначимо, що тут значення змінної величини то більше, то менше границі. Змінна величина прагне до границі, «коливаючись довкола неї». Змінна величина *х* може прагнути до своєї границі *а* залишаючись менше її, тобто з боку менших значень; тоді умовно пишуть *х*→*а*-0 або lim *х*=*а*—0 (це, зазвичай, умовний запис, так як *а*—0=*а*). Якщо *х* у процесі прагнення до *а* залишається більше *а*, то пишуть *х*→*а*+0. Нарешті, *х* може прагнути до *а,* стаючи знову і знову то більше, то менше *а,* як при загасаючих коливаннях. Усі ці випадки показані на рис. 4.43.

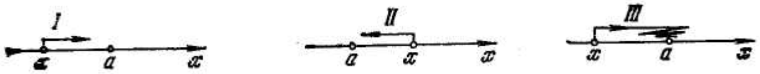


Рис. 4.43.

Можна підбити підсумок про види змінних величин. Змінна величина x у деякому процесі може бути одного з наступних виглядів:

1) Обмежена і при тому така, яка має границю; частковим випадком, якщо границя дорівнює нулеві, є величина нескінченно мала. Для протиставлення іноді обмежену величину називають *кінцевою* лише у випадку, якщо вона не є нескінченно малою; наприклад, можна говорити про нескінченно малу і кінцеву маси і т.п.

2) Обмежена, але яка не має границі; прикладом може служити відхилення маятника у випадку незатухаючих коливань. Така величина є коливною (рис. 4.44)

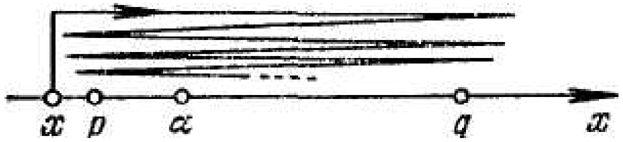


Рис. 4.44.

3) Необмежена і притому нескінченно велика. Тоді пишуть $\lim x=\pm\infty$ і говорять, що x має *нескінченну границю.*

4) Необмежена, але не нескінченно велика; прикладом може служити відхилення тіла, яке коливається, від положення рівноваги у випадку резонансу. Така величина також буде коливною і то іде «у нескінченність» все далі і далі, то повертається на близьку відстань від вихідної точки (рис. 4.45).

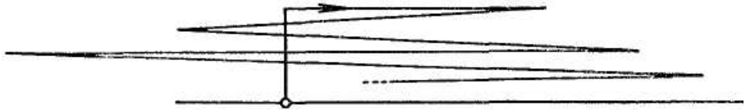


Рис. 4.45.

Зауваження 1. Як зазначалось раніше, сталу величину c часто розглядають як величину змінну, усі значення якої однакові: $x=c$.

Вочевидь, що границя сталої буде дорівнювати самій сталій, так як завжди виконується нерівність

$$|x-c|=|c-c|=0<\varepsilon \text{ при будь-якому } \varepsilon.$$

Зауваження 2. З визначення границі випливає, що змінна величина не може мати двох границь. Дійсно, якщо $\lim x=a$ і $\lim x=b$ $(a<b)$, то x повинна задовольняти відразу двом нерівностям:

$$|x-a|<\varepsilon \text{ і } |x-b|<\varepsilon$$

при довільно малому ε, а це неможливо, якщо $\varepsilon<(b-a)/2$.

Властивості границь. 1. *Якщо змінна величина, яка розглядається, має границю, то тільки одну* (очевидно з визначення).

2. *Границя сталої величини дорівнює їй самій* (очевидно).

3. *Якщо в одному і тому самому процесі* $x\to a$, а $y\to b$, то $x+y\to a+b$. Інакше це можна записати в такий спосіб:

$$\lim (x+y)=\lim x+\lim y, \quad (4.15)$$

а сформулювати так: *границя суми дорівнює сумі границь.* Для доведення запишемо

$x=a+\alpha$; $y=b+\beta$, де α і β— нескінченно малі. Тоді

$x+y=(a+b)+(\alpha+\beta)$.

Виходить, змінна величина $x+y$ представлена тут у вигляді сталої $a+b$ і нескінченно малої $\alpha+\beta$. Отже, $(x+y)\to(a+b)$. Отриманий результат дуже простий. Він говорить, власне кажучи, що якщо $3{,}002\approx3$, а $2{,}001\approx2$, то $5{,}003\approx5$.

4. *Границя алгебраїчної суми двох, трьох і узагалі визначеного числа змінних дорівнює алгебраїчній сумі границь цих змінних:*

$\lim (u_1+u_2+\ldots+u_k)=\lim u_1+\lim u_2+\ldots+\lim u_k$.

5. *Границя добутку дорівнює добуткові границь;* більш повне формулювання: *якщо співмножники мають границі, то і добуток має границю, яка дорівнює добуткові границь співмножників.* Дійсно, при старих позначеннях

$$xy=ab+(a\beta+b\alpha+\alpha\beta)\to ab,$$

тобто

$$\lim (xy)=\lim x\lim y. \quad (4.16)$$

Тут ми взяли лише дві змінні величини, але легко перевірити, що ці властивості зберігаються і для будь-якого сталого числа змінних величин.

Наприклад,

$$\lim (xyz)=\lim [(xy)z]=\lim (xy) \lim z=\lim x \lim y \lim z.$$

6. *Сталий множник можна виносити за знак границі,* тобто $\lim (Cx)=C \lim x$, де C=const..

7. *Границя частки дорівнює частці від ділення границь,* тобто $m(x/y)=\lim x/\lim y$ (4.17)
за винятком випадків, коли як чисельник, так і знаменник прагнуть до нуля, тобто в правій частині виходить невизначений вираз 0/0.

При доведенні припустимо спочатку, що $\lim y=b\neq 0$. Тоді

$$x/y=(a+\alpha)/(b+\beta)=a/b+\{(a+\alpha)/(b+\beta)-(a/b)\}=$$
$$=a/b+(\alpha b-\beta a)/b(b+\beta).$$

В останньому дробі чисельник нескінченно малий, а знаменник $\approx b^2$=const$\neq$0, тому і весь другий дріб нескінченно малий, а перший сталий, звідки і випливає наше твердження.

Якщо ж $\lim y=0$, а $\lim x\neq 0$, то $x/y=(1/y)\cdot x\to\pm\infty$

Тому по обидва боки формули (4.17) виходить $\pm\infty$.

Формули (4.15.), (4.16), і (4.17) справедливі не тільки для кінцевих (обмеженних), але для нескінченних границь, за винятком випадків, коли в правих частинах виходять невизначені вирази вигляду $\infty — \infty$, $0\cdot\infty$ і ∞/∞ про які буде розмова далі .

8. Якщо $x\to a$, причому $a>0$, то $x>0$, у всякому разі, якщо процес зайде досить далеко, тобто починаючи з деякого моменту. Це ясно з визначення границі.

9. *В нерівності можна перейти до границі:* якщо $x\leq y$, то $\lim x\leq\lim y$ (звичайно, якщо ці границі існують). Дійсно, позначимо $z=y—x$. Тоді $z\geq 0$, тому z не може безгранично наближатися до сталої від'ємної величини. Виходить, $\lim z\geq 0$, $\lim (y-x)\geq 0$, $\lim y-\lim x\geq 0$.

Помітимо, що якщо $x<y$, то в границі може вийти або $\lim x<\lim y$, або $\lim x=\lim y$, якщо різниця між x і y в границі зійде нанівець. Таким чином, поки не проведено додаткове дослідження, ту строгу нерівність $x<y$ в границі треба замінити на нестрогу $\lim x\leq\lim y$.

10. Якщо $x\leq y\leq z$ і в тому самому процесі $x\to a$ і $z\to a$, то і $y\to a$.

11. Якщо величина x монотонно зростає, то вона або зростає безмежно, тобто $x\to+\infty$, або ж вона обмежена і тоді прагне до деякої границі, $x\to a—0$. При цьому, якщо x обмежена зверху сталою величиною A, то і $\lim x=a\leq A$. Аналогічно поводиться монотонно убутна величина. Це твердження насправді є дуже глибокою властивістю «повноти» сукупності всіх дійсних чисел. Якби ми користувалися тільки раціональними числами, то всі попередні властивості границь мали би місце, але не властивість 11, так як з раціональних значень в границі можна одержати ірраціональне

Таким чином, *обмежена монотонна величина, обов'язково має кінцеву границю;* обмежена немонотонтна величина може границі не мати.

Помітимо на закінчення, що розмірність величини при переході до границі зберігається: якщо $x\to a$, то $[x]=[a]$.

Сума числового ряду. Ідея граничного переходу безпосередньо застосовується до важливого поняття суми ряду. Попередньо введемо корисне скорочене позначення:

$$a_p+a_{p+1}+a_{p+2}+\ldots+a_{q-1}+a_q=\sum_{k=p}^{q}a_k \qquad (4.18)$$

Тут $\sum\limits_{k=p}^{q}$ *знак суми,* який вказує, що в наступний за ним вираз треба підставити $k=p,\ p+1\ ,\ldots,\ q$, а результати скласти; a_k*—член суми* (доданок), k — номер цього члена («індекс»), p і q — *нижня і верхня границі підсумовування, які* вказують границі зміни індексу. Наприклад,

$$\sum_{k=p}^{q}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}(=0,2774)$$

Відзначимо відразу, що *сума не залежить від позначення індексу підсумовування, індекс підсумовування є німим,* тобто не входить у відповідь і тому може бути позначений будь-якою буквою.

Перейдемо тепер до «нескінченних сум», точніше, до поняття числового ряду. *Числовим рядом* називається нескінченний вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + \ldots + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (4.19)$$

при цьому доданки a_1, a_2, a_3,... - числа, які називають *членами ряду.* Щоб визначити поняття суми ряду (4.19), треба спочатку скласти *«окремі суми» ряду* (4.19):

$$S_1 = a_{1;};S_2 = a_1 + a_2;S_3 = a_1 + a_2 + a_3;\ldots;S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k;\ldots$$

Якщо зі зростанням номера окремі суми прагнуть до визначеної кінцевої границі, то ряд (4.19) називається збіжним, а його *сума S* покладається рівною

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Для ряду, який збіжний, окремі суми з досить великими номерами практично просто рівні одна одній і дорівнюють повній сумі ряду. Якщо кінцевої границі окремих сум нема, то ряд (4.19) називається розбіжним. Зокрема, якщо окремі суми прагнуть до нескінченності, то ряд (4.19) називається *розбіжним до нескінченності.* Тоді пишуть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty (\text{або } -\infty).$$

Розбіжний ряд кінцевої суми не має.

Подібним чином визначається добуток нескінченного числа співмножників і взагалі результат будь-якого нескінченного процесу: для цього спочатку здійснюється кінцевий процес, а потім виробляється граничний перехід.

Розглянемо, наприклад, ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} + \ldots \ (*)$$

Користуючись формулою для суми геометричної прогресії, одержимо

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Отже, ряд (*) збіжний і його сума дорівнює 1,5. Наприклад, часткова сума перших десяти членів приблизно дорівнює 1,499975. Подібним чином ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$$

при $|q|<1$ збіжний і його сума (сума *нескінченно збіжної геометричної прогресії)* дорівнює $a(1 - q)^{-1}$. Для ряду

$$1+1+1+\ldots+1+\ldots(**)$$

часткова сума S_n дорівнює n і тому прагне до нескінченності. Виходить, ряд (**) розбіжний до нескінченності. Аналогічно

$$-1-1-1-\ldots-1-\ldots=-\infty.$$

Для ряду

$$1-1+1-\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots \quad (***)$$

часткові суми послідовно дорівнюють $S_1=1, S_2=0$, $S_3=1$, $S_4=0, \ldots$ і не мають ні кінцевої , ні нескінченної границь, а залишаються безмеженими і такими що коливаються без затухання. Тобто, ряд розходиться „коливальним” чином.

Відкидання або дописування одного члена в ряді (4.19) не може порушити факту збіжності або розбіжності, тобто якщо ряд (4.19) збіжний, то він і буде сходитися, хоча сума зміниться, а якщо він розбіжний, то і буде розходитися. Дійсно, якщо поряд з (4.19) розглянути ряд $a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, то його окрема сума відрізняється від відповідної окремої суми ряду (4.19) на стале число a_1 і тому, якщо одна з цих сум прагне до границі, то й інша теж. Повторюючи таке відкидання і дописування членів, ми прийдемо до висновку, що *довільна зміна* *кінцевого числа членів ряду* (4.19) *не може порушити факту збіжності або розбіжності.*

Якщо ряд (4.19) збіжний, то і ряд $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$ збіжний; його сума називається залишком ряду (4.19).

Виведемо *необхідну ознаку збіжності ряду* (4.19). Так як

$S_{n-1}=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$, $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$, то $a_n=S_n-S_{n-1}$, і тому, *якщо ряд* (4.19) *збіжний, то*

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0 \quad (4.20)$$

тобто «загальний член» a_n *ряду* (4.19) *зі зростанням номера прагне до нуля.* Ця ознака не є достатньою для збіжності; наприклад для ряду $1+1/\sqrt{2}+1/\sqrt{3}+\ldots+1/\sqrt{n}+\ldots$ ця ознака виконана, але ряд розбіжний до нескінченності.

Ми будемо далі окремо вивчати ряди різного вигляду де, зокрема, будуть визначені строгі ознаки їхньої збіжності. Однак окремими рядами ми будемо користуватися раніш, оскільки для них питання про збіжність на практиці зазвичай з'ясовують зовсім просто, хоча і не зовсім строго, у такий спосіб. Обчислюють члени один за другим, і *якщо вони досить швидко виходять за границі прийнятої точності обчислення, причому немає підстави очікувати, що подальші члени дадуть у сумі істотний внесок, то всі подальші члени просто відкидають, тобто заміняють ряд кінцевим числом його членів (окремою сумою).*

4.6. Порівняння нескінченних величин

Порівняння нескінченно малих. Дві нескінченно малі порівнюються одна з одною за допомогою дослідження їх відношень. Нехай у деякому процесі розглядаються нескінченно малі величини $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$. Тоді

1) якщо $\beta/\alpha \to 0$, то говорять, що β *швидше прагне до нуля, чим* α, *або що* β *має вищий порядок малості, чим* α, а α *має нижчий порядок малості, чим* β, і пишуть $|\beta| \ll |\alpha|$ або $|\alpha| \gg |\beta|$.

Таким чином, у даному випадку β не просто нескінченно мала, але складає нескінченно малу частину іншої нескінченно малої α. Наприклад, якщо ω — об'єм нескінченно малого кубика, а σ — об'єм стовпчика з такою же основою, з сталою висотою a, то $\omega \ll \sigma$, так як якщо позначити через h довжину ребра, то $h \to 0$ і $\omega/\sigma = h^3/ah^2 = h/a \to 0$,

2) якщо $\beta/\alpha \to \infty$, то $\alpha/\beta = 1/(\beta/\alpha) \to 0$, тобто $|\alpha| \ll |\beta|$;

3) якщо відношення β/α має кінцеву границю, відмінну від нуля, то кажуть, що α і β мають *однаковий порядок малості;* у цьому випадку жодна з величин α, β не може стати надмірно менше іншої. Зокрема, якщо зазначена границя дорівнює одиниці, то величини α і β називаються *еквівалентними;* тоді пишуть $\alpha \sim \beta$. Наприклад, якщо $x \to 0$, то величини x і $x+x^2$ еквівалентні; величини ж $2x$ і $x+x^2$ мають у цьому процесі однаковий порядок малості, але не еквівалентні, так як $2x/(x+x^2) \to 2$. Можна перевірити наступні властивості:

1) *якщо* α *і* β *мають один порядок малості,* $a|y| \ll |\alpha|$, *то* $|\gamma| \ll |\beta|$

2) *якщо* α *і* β, *а також* β *і* γ *мають один порядок малості, то і* α *і* γ *теж;*

3) *якщо* α *і* β *мають один порядок малості і однаковий знак, то* $\alpha+\beta$ *має той же порядок малості, що* α *і* β; якщо α і β мають протилежні знаки, то $\alpha+\beta$ може вийти вищого порядку малості і т.п.

4) *Якщо* $\beta/\alpha \to \neq 0$ *і позначити* $\beta - k\alpha = \gamma$, *тобто* $\beta = k\alpha + \gamma$, *то* $|\gamma| \ll |\alpha|$. Іншими словами, величини одного порядку малості прямо пропорційні одна одній, з точністю до доданку вищого порядку малості. Це відразу випливає з того, що $\gamma/\alpha = (\beta - k\alpha)/\alpha = (\beta/\alpha) - k \to 0$.

Властивості еквівалентних нескінченно малих.

Справедливі наступні прості властивості:

1) *якщо* $\alpha \sim \beta$, *то* $\beta \sim \alpha$;

2) *якщо* $\alpha \sim \beta$ *і* $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$;

3) *якщо* $\alpha \sim \beta$, *то* $\alpha = \beta + \gamma$, де $|\gamma| \ll |\alpha|$, (і $|\gamma| \ll |\beta|$), іншими словами, *еквівалентні нескінченно малі розрізняються на величину вищого порядку малості.* Навпаки, *якщо* $\alpha = \beta + \gamma$, *де* $|\gamma| \ll |\beta|$, то $\alpha \sim \beta$; іншими словами, *додаючи до нескінченно малої величини величину вищого порядку, одержимо величину, еквівалентну першій;*

4) *якщо* $\alpha \sim \alpha_1$, і $\beta \sim \beta_1$,, *то* $\lim x\alpha/y\beta = \lim x\alpha_1/y\beta_1$, *де* x *і* y*— будь-які величини;* іншими словами, *при находжені границі можна*

нескінченно малі множники, які стоять у чисельнику і знаменнику, заміняти еквівалентними величинами.

Важливі приклади. 1. *Довжини нескінченно малої дуги і хорди, яка її стягує , є еквівалентними нескінченно малими*

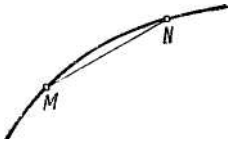


Рис. 4.46 .

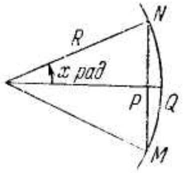


Рис. 4.47.

величинами, тобто $\overset{\smile}{MN}/MN\to 1$ при $N\to M$ (рис. 4.46). Це пояснюється тим, що мала дуга майже не встигає змінити свій напрям, тобто «скривитися». У результаті досить мала хорда, збільшена «під мікроскопом» до сталої кінцевої величини, практично невідрізнима від дуги, яка стягується цією хордою. При більш строгому дослідженні ця наочна властивість іноді приймається за аксіому, на якій засновано саме поняття довжини дуги, а іноді виводиться з аналогічних аксіом.

2. Застосовуючи цей результат до дуги кола (рис. 4.47), одержимо

$$\frac{MN}{\breve{M}\breve{N}}=\frac{2PN}{2\breve{Q}\breve{N}}=\frac{2R\sin x}{2Rx}=\frac{\sin x}{x}\underset{x\to 0}{\to}1.$$

Ми мали на увазі, що $x>0$, але при зміні знака x вираз $(\sin x)/x$ не міняється, тобто знак x не грає ролі. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (4.21)$$

Заодно ми бачимо, що $\sin x<x$ при $x>0$(так як $MN<M\breve{}N$).

3)Розглянемо рис. 4.48.

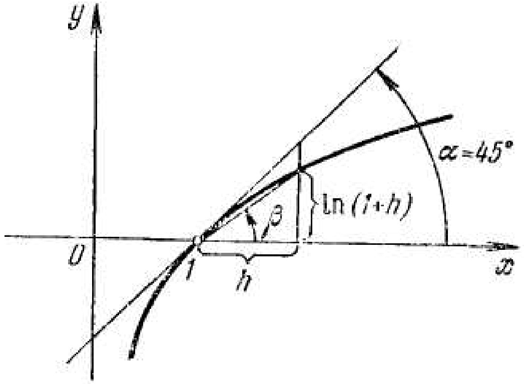


Рис. 4.48.

Ми бачимо, що $tg\beta=\frac{\ln(1+h)}{h}$

Якщо ж $h\to 0$, то β→α=45°, tgβ→tgα=1, тобто

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1 \quad (4.22)$$

На рис. 4.48 прийнято, що $h>0$, але той же результат вийде при $h<0$.

Приведемо важливу властивість з формули (4.22).

Так як

$(1+h)^{\frac{1}{h}}=e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}$, то при $h\to 0$ отримуємо і $e^{\frac{\ln(1+h)}{h}}\to e^1=e$

Таким чином,

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e \quad (4.23)$$

Остання границя часто приймається за визначення числа *e*.

З допомогою цих результатів можливо вирахувати багато інших границь.

Порядок малості. Якщо в одному процесі розглядаються дві нескінченно малі α і β, причому β має такий же порядок малості, як і α^k, то говорять, що β має *k-й порядок малості, у порівнянні з* α. Швидкість прагнення α до нуля служить як би еталоном, з яким порівнюється швидкість прагнення β до нуля.

Приклади. Нехай $x\to0$, тобто *x*—нескінченно мала величина; приймемо її за еталон. Тоді, якщо $y=2x^2$, то *y* має другий порядок малості (у порівнянні з *x)*, так як *y* і x^2 мають однаковий порядок малості; якщо $z=4x^3+x^7$, то *z* має третій порядок малості, так як z і x^3 мають однаковий порядок малості $(z/x^3\to4)$.

Узагалі порядок малості суми (або різниці) величин різного порядку визначається найменшим з порядків малості доданків. Саме член найменшого порядку малості є *головним* у такій сумі; іншими словами, всі інші члени нескінченно малі в порівнянні з ним, а головний член майже цілком вичерпує усю суму, якщо процес зайде досить далеко. Далі, якщо $u=\sqrt{x}-x^2$, то *u* має половинний порядок малості і тому є величиною нижчого порядку малості, ніж *x,* тобто $u/x\to\infty$, $u»x$. Взагалі, якщо порядок малості менше одиниці, то величина має нижчий порядок малості, ніж еталон. При зміні еталона порядок малості може змінитися, так що цей еталон необхідно вказувати. Наприклад, величина $y=x^6$ при $x\to0$ має шостий порядок у порівнянні з *x,* але лише другий порядок у порівнянні з x^3.

Порівняння нескінченне великих. Порівняння нескінченно великих виконується аналогічно порівнянню нескінченно малих. Деяка різниця є в термінах: так, якщо $x/y\to0$, де величини *x* і *y* — нескінченно великі, то говорять, що *x* має нижчий порядок у порівнянні з *y,* а *y* — вищий порядок у порівнянні з *x;* але пишуть все рівно $|x|«|y|$ або $x=o(y)$. (Ці записи застосовуються у всіх випадках, коли $x/y\to0$, навіть якщо величини *x* і *y* не є нескінченно великими; відзначимо ще запис $x=O(y)$, який означає, що відношення *x/y обмежене* **.**

4.7. Границя функції

У цьому розділі будемо розглядати деякі випадки зміни функції при прагненні аргументу *x* до деякої границі *a* або до нескінченності.

Означення 1. Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околу точки *a* або в деяких точках цього околу. *Функція y=f(x) прагне до границі b (y→b) при x, яке прагне до a (x→a),* якщо для кожного додатного числа ε, яке б мале воно не було, можна вказати таке додатне число δ, що для всіх *x,* відмінних від *a* і які задовольняють нерівність $|x-a|<\delta$,має місце нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$. Якщо *b* є *границя функції f(x)* при $x\to a$, *то пишуть*

$$\lim_{x\to a}f(x)=b \text{ або } f(x)\to b \text{ при } x\to a.$$

Якщо $f(x)\to b$ при $x\to a$, то на графіку функції $y=f(x)$ це ілюструється в такий спосіб (рис.4.49); так як з нерівності $|x—a|<\delta$ випливає нерівність $|f(x)—b|<\varepsilon$, то це значить, що для всіх точок *x,* які відстоять від точки *a* не далі ніж на δ, точки *M* графіка функції $y=f(x)$ лежать усередині смуги шириною 2ε, яка обмежена прямими $y=b—\varepsilon$ і $y=b+\varepsilon$

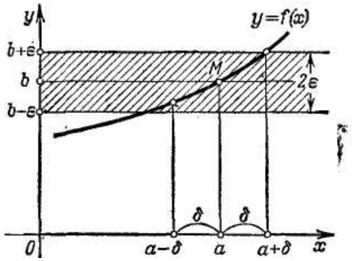


Рис. 4.49.

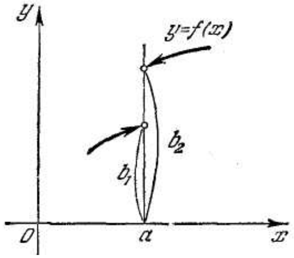


Рис. 4.50

Зауваження 1. Якщо *f(x)* прагне до границі b_1 при *x,* яке прагне до деякого числа *a* так, що *x* приймає тільки такі значення, які є менші *a,* то пишуть $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=b_1$ і називають b_1 *границею функції f(x) в точці a ліворуч.* Якщо *x* приймає тільки такі значення, які є більші, ніж *a,* то пишуть

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=b_2$$

і називають b_2 *границею функції в точці a праворуч* (рис. 4.50).

Можна довести, що якщо границя праворуч і границя з ліворуч існують і рівні, тобто $b_1=b_2$, то *b* і буде границею в поняті даного вище визначення границі в точці *a.* І зворотно, якщо існує границя функції b в точці a, то існують границі функції в точці a праворуч і ліворуч і вони рівні.

Приклад 1. Доведемо, що

$$\lim_{x\to 2}(3x+1)=7$$

Дійсно, нехай задано довільне $\varepsilon>0$; для того щоб виконувалася нерівність $|(3x+1)-7|<\varepsilon$, необхідне виконання наступних нерівностей:

$$|3x-6|<\varepsilon,\quad |x-2|<\varepsilon/3,\quad -\varepsilon/3<x-2<\varepsilon/3$$

Таким чином, при будь-якому ε для всіх значень x, які задовольняють нерівності $|x-2|<\varepsilon/3=\delta$, значення функції $3x+1$ буде відрізнятися від 7 менше ніж на ε. А це і означає, що 7 є границя функції при $x\to 2$.

Зауваження 2. Для існування границі функції при $x\to a$ не потрібно, щоб функція була визначена в точці $x=a$. При находжені границі розглядаються значення функції в околу точки a, які відмінні від a.

Приклад 2. Доведемо ,що

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)/(x-2)=4$$

Тут функція $(x^2-4)/(x-2)$ не визначена при $x=2$.

Потрібно довести, що при довільному ε найдеться таке δ, що буде виконуватися нерівність

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|<\varepsilon \quad (*)$$

якщо $|x-2|<\delta$. Але при $x\neq 2$ нерівність (*) еквівалентна нерівності

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}-4\right|=|(x+2)-4|<\varepsilon$$

Або $$|x-2|<\varepsilon \ (**)$$

Таким чином, при довільному ε нерівність (*) буде виконуватися, якщо буде виконуватися нерівність (**) (тут $\delta=\varepsilon$). А це і означає, що дана функція при $x\to 2$ має границею число 4.

Розглянемо деякі випадки зміни функції при $x\to\infty$.

Означення 2. *Функція $f(x)$ прагне до границі b при $x\to\infty$,* якщо для кожного довільно малого позитивного числа ε можна вказати таке додатне число N, що для всіх значень x, які задовольняють нерівності $|x|>N$, буде виконуватися нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Приклад 3. Доведемо, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$$

або, в іншому запису

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1.$$

Потрібно довести, що при довільному ε буде виконуватися нерівність

$$\left|\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right|<\varepsilon \qquad (***)$$

якщо тільки $|x|>N$, причому N визначається вибором ε. Нерівність (***) еквівалентна наступній нерівності: $|1/x|<\varepsilon$, яка буде виконуватися, якщо буде

$$|x|>1/\varepsilon=N.$$

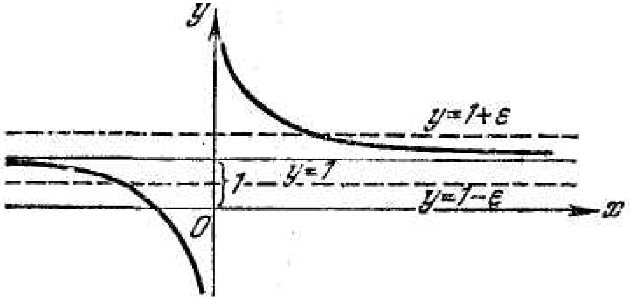


Рис. 4.51.

Це і означає, що

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)=1$$

(див. рис. 4.51).

Знаючи зміст символів $x\to+\infty$, $x\to—\infty$, очевидним є і зміст виразів:

«*f(x)* прагне до *b* при $x\to+\infty$» і

«*f(x)* прагне до *b* при $x\to—\infty$»,

які символічно записуються так:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\,,\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b.$$

Функція, яка прагне до нескінченності.

Ми розглянули випадки, коли функція *f(x)* прагне до деякої границі *b* при $x\to a$ або при $x\to\infty$.

Розглянемо тепер випадок, коли функція *y=f(x)* прагне до нескінченності при деякому способі зміни аргументу.

Означення 1. Функція *f(x)* прагне до нескінченності при $x\to a$, тобто є *нескінченно великою* величиною при $x\to a$, якщо для кожного додатного числа *M,* яким би великим воно не було, можна знайти таке $\delta>0$, яке для всіх значень *x,* відмінних від *a*, які задовольняють умові $|x-a|<\delta$, має місце нерівність $|f(x)|>M$. Якщо *f(x)* прагне до нескінченності при $x\to a$, то пишуть: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ або $f(x)\to\infty$ при $x\to a$.

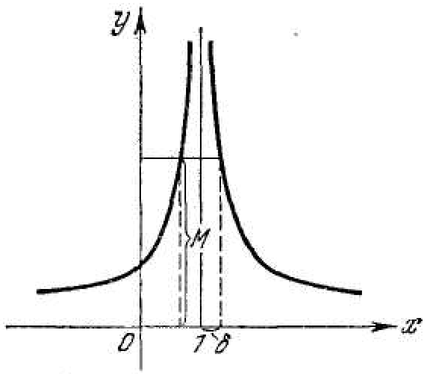


Рис. 4.52.

Якщо *f(x)* прагне до нескінченності при $x\to a$ і при цьому приймає тільки додатні або тільки від’ємні значення, відповідно пишуть

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ або } \lim_{x\to a} f(x)=—\infty.$$

Приклад. 1. Доведемо, що

$$\lim_{x\to 1}(1\text{-}x)^{-2}=+\infty$$

Дійсно, при будь-якому $M>0$ будемо мати $(1\text{-}x)^{-2}>M$,якщо тільки

$$(1\text{-}x)^2<1/M,\qquad |1\text{-}x|<1/\sqrt{M}=\delta.$$

Функція $(1\text{-}x)^{-2}$ приймає тільки додатні значення (рис. 4.52).

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}(-1/x)=\infty$.

Дійсно, при будь-якому $M>0$ будемо мати:$|—1/x|>M$, якщо тільки $|x|=|x—0|<1/M=\delta$. Тут $(-1/x)>0$ при $x<0$ і $(—1/x)<0$ при $x>0$ (рис. 4.53).

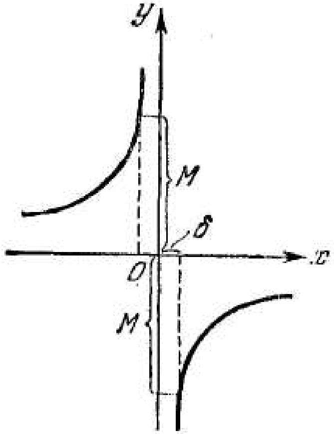


Рис. 4.53.

Якщо функція $f(x)$ прагне до нескінченності при $x\to\infty$, то пишуть:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,$$

і, зокрема, може бути: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ і т.п.

Зауваження 1. Функція $y=f(x)$ при $x\to a$ або при $x\to\infty$ може не прагнути до кінцевої границі або до нескінченності.

Приклад 3. Функція $y=\sin x$, яка визначена на нескінченному інтервалі $-\infty<x<+\infty$, при $x\to\infty$ не прагне ні до кінцевої границі, ні до нескінченності (рис. 4.54).

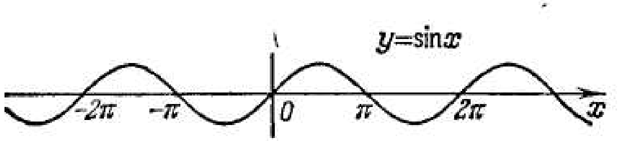


Рис.4.54.

Приклад 4. Функція $f=\sin 1/x$, яка визначена при всіх значеннях x, крім значення $x=0$, не прагне ні до кінцевої границі, ні до нескінченності при $x\to0$.

Графік цієї функції зображено на рис. 4.55

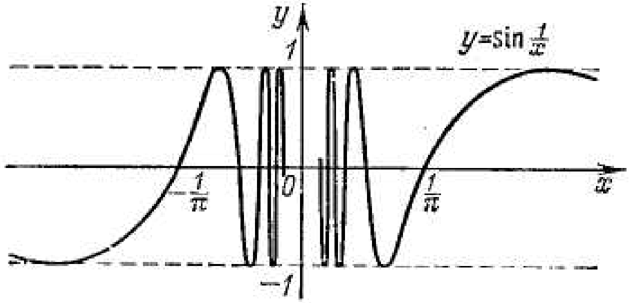


Рис. 4.55.

Означення 2. Функція $y=f(x)$ називається *обмеженою* в даній області зміни аргументу x, якщо існує додатне число M таке, що для всіх значень x, що належать області яку розглядають, буде виконуватися нерівність $|f(x)|\le M$. Якщо ж такого числа M не існує, то функція $f(x)$ називається *необмеженою* в даній області.

Приклад 5. Функція $y=\sin x$, яка визначена в нескінченному інтервалі $-\infty<x<+\infty$, є обмеженою, так як при всіх значеннях x

$$|\sin x|\le1=M$$

Означення 3. Функція $f(x)$ називається *обмеженою при* $x\to a$, якщо існує околиця з центром в точці a, в якій дана функція обмежена.

Означення 4. Функція $y=f(x)$ називається *обмеженою при* $x\to\infty$, якщо існує таке число $N>0$, що при всіх значеннях x, які задовольняють нерівності $|x|>N$, функція $f(x)$ обмежена.

Питання про обмеженість функції, яка прагне до границі, вирішується наступною теоремою.

Теорема 1. *Якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, *при цьому* b *є кінцеве число, то функція* $f(x)$ *є обмеженою при* $x \to a$.

Доведення. З рівності $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ виплває, що при будь-якому $\varepsilon>0$ найдеться таке δ, що в околу $a-\delta<x<a+\delta$ буде виконуватися нерівність.

З рівності $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ випливає, що при будь-якому $\varepsilon>0$ найдеться

$$|f(x) - b|<\varepsilon,$$

або

$$|f(x)|<|b|+\varepsilon.$$

А це значить, що функція $f(x)$ обмежена при $x\to a$.

Зауваження 2. З визначення обмеженості функції $f(x)$ випливає, що якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, тобто якщо $f(x)$ є нескінченно велика, то вона є необмеженою. Зворотне не вірно: необмежена функція може і не бути нескінченно великою.

Наприклад, функція $y=x\sin x$ при $x\to\infty$ є необмеженою, так як для будь-якого $M>0$ можна знайти такі значення x, що $|x\sin x|>M$. Але функція $y=x\sin x$ не є нескінченно великою, оскільки вона обертається в нуль при $x=0,\pi,2\pi,\ldots$ Графік функції $y = x\sin x$ зображено на рис. 4.56.

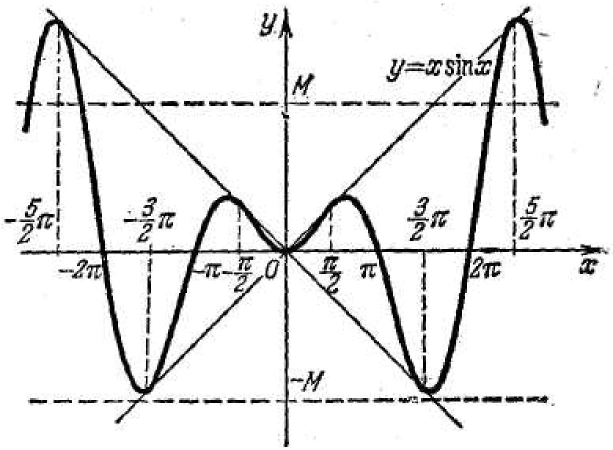


Рис. 4.56.

Теорема 2. *Якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\neq 0$, *то функція* $y=1/f(x)$ *є обмежена функція при* $x\to a$.

Доведення. З умови теореми випливає, що при довільному $\varepsilon>0$, в деякому околу точки $x=a$ будемо мати $|f(x)-b|<\varepsilon$, або $||f(x)|-|b||<\varepsilon$, або

$-\varepsilon<|f(x)|-|b|<\varepsilon$, або $|b|-\varepsilon<|f(x)|<|b|+\varepsilon$.

З останніх нерівностей випливає

$$1/|b|-\varepsilon>1/|f(x)|>1/|b|+\varepsilon;$$

взявши, наприклад, $\varepsilon=1/10|b|$, держуємо:

$$10/9|b|>1/|f(x)|>10/11|b|.$$

А це значить, що функція $1/f(x)$ обмежена.

Функції, що прагнуть до нуля

Тут будемо розглядати функції, що прагнуть до нуля при деякому характері зміни аргументу.

Означення. Функція $\alpha=\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* при $x\to a$ або при $x\to\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$. З означення границі випливає, що якщо, наприклад, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то це значить, що для кожного наперед заданого довільно малого додатного ε знайдеться таке $\delta>0$, що для всіх x які задовольняють умові $|x—a|<\delta$, буде задовольнятися умова $|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Приклад 1. Функція $\alpha=(x-1)^2$ є нескінченно мала при $x\to 1$, так як $\lim\limits_{x\to 1}\alpha=\lim\limits_{x\to 1}(x—1)^2=0$. (рис. 4.57).

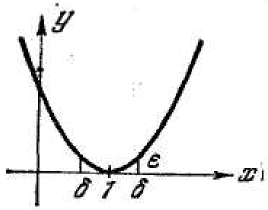


Рис. 4.57.

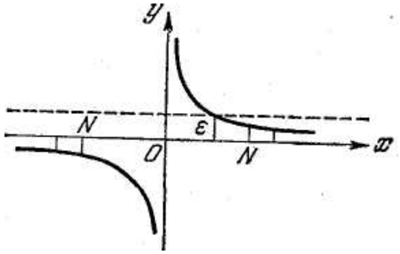


Рис. 4.58.

Приклад2. Функція $\alpha=1/x$ є нескінченно мала при $x\to\infty$ (рис. 4.58).

Установимо важливе для подальшого співвідношення:

Теорема 1. *Якщо функція $y=f(x)$ представляється у вигляді суми сталого числа b і нескінченно малої* α:

$$y=b+\alpha \quad (4.24),$$

то

$$\lim y=b \text{ (при } x\to a \text{ або } x\to\infty).$$

Зворотно, *якщо* $\lim y=b$, *то можна написати* $y=b+\alpha$, *де* α — *нескінченно мала.*

Доведення. З рівності (4.24) випливає $|y-b|=|\alpha|$. Але при довільному ε усі значення α, починаючи з якогось, задовольняють співвідношенню $|\alpha|<\varepsilon$, отже, для всіх значень y, починаючи з якогось, буде виконуватися нерівність $|y-b|<\varepsilon$. А це значить, що $\lim y=b$.

Зворотно: якщо $\lim y=b$, то при довільному ε для всіх значень y, починаючи з якогось, буде $|y—b|<\varepsilon$. Але якщо позначимо $y-b=\alpha$, то, отже, для всіх значень α, починаючи з якогось, буде $|\alpha|<\varepsilon$, а це значить, що ε—нескінченно мала.

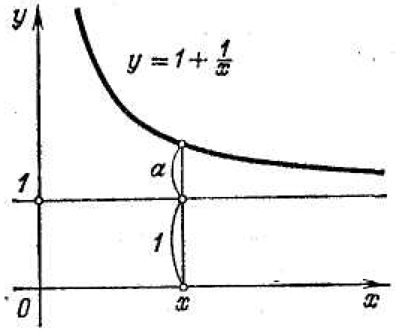


Рис. 4.59.

Приклад 3.Нехай дана функція (рис. 4.59)

$$y=1+1/x,$$

тоді $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$, і навпаки, так як $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$,то змінну y можна представити у вигляді суми границі 1 і нескінченно малої α, рівної в даному випадку $1/x$, тобто $y=1+\alpha$.

Теорема 2. *Якщо $\alpha=\alpha(x)$ прагне до нуля при $x\to a$ (або при $x\to\infty$) і не обертається в нуль, то $y=1/\alpha$ прагне до нескінченності.*

Доведення. При любому як завгодно великому $M>0$ буде виконуватися нерівність $1/|\alpha|>M$, якщо тільки буде виконуватися нерівність $|\alpha|<1/M$. Остання нерівність буде виконуватися для всіх значень α, починаючи з деякого, так як $\alpha(x)\to 0$.

Теорема 3. *Алгебраїчна сума двох, трьох і взагалі визначеного числа нескінченно малих є функція нескінченно мала.*

Доведення. Проведемо доведення для двох доданків, так як для будь-якого числа доданків воно проводиться аналогічно.

Нехай $u(x)=\alpha(x)+\beta(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$

Доведемо, що при довільному як завгодно малому $\varepsilon>0$ знайдеться $\delta>0$ таке, що при задоволенні нерівності $|x-a|<\delta$ буде виконуватися нерівність $|u|<\varepsilon$. Так як $\alpha(x)$ є нескінченно мала, то знайдеться таке δ_1, що в околу з центром в точці a і радіусом δ_1 буде $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$.

Так як $\beta(x)$ є нескінченно мала, то знайдеться таке δ_2 що в околу з центром у точці a і радіусом δ_2 буде $|\beta(x)|<\varepsilon/2$.

Візьмемо δ рівним меншому з величин δ_1 і δ_2, тоді в околу точки a з радіусом δ будуть виконуватися нерівності $|\alpha|<\varepsilon/2$; $|\beta|<\varepsilon/2$. Отже, в цьому околу буде

$$|u|=|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

тобто $|u|<\varepsilon$.

Аналогічно виконується доведення і для випадку, коли

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x)=0, \qquad \lim_{x\to\infty}\beta(x)=0.$$

Теорема 4. *Добуток функції нескінченно малої* $\alpha=\alpha(x)$ *на функцію, обмежену* $z=z(x)$, *при* $x\to a$ *(або* $x\to\infty$*) є величина (функція) нескінченно мала.*

Доведення. Проведемо доведення для випадку $x\to a$. Для деякого $M>0$ знайдеться такий окіл точки $x=a$, в якому буде задовольнятися нерівність $|z|<M$. Для всякого $\varepsilon>0$ знайдеться окіл, в якому буде виконатися нерівність $|\alpha|<\varepsilon/M$. У найменшій з цих двох обмеженостей буде виконуватися нерівність

$$|\alpha z|<(\varepsilon/M)M=\varepsilon$$

А це значить, що αz-*нескінченно* мала. Для випадку $x\to\infty$ доведення виконується аналогічно. З даної теореми випливають:

Наслідок 1. *Якщо* $\lim\alpha=0$, $\lim\beta=0$, *то* $\lim\alpha\beta=0$, так як $\beta(x)$ є величина обмежена. Це справедливо для будь-якого кінцевого числа множників.

Наслідок 2. *Якщо* $\lim\alpha=0$ *і* $c=\text{const}$, *то* $\lim c\alpha=0$.

Теорема 5. *Частка* $\alpha(x)/z(x)$ *від ділення величини нескінченно малої* $\alpha(x)$ *на функцію, границя якої відмінна від нуля, є величина нескінченно мала.*

Доведення. Нехай $\lim\alpha(x)=0$, $\lim z(x)=b\neq0$. На підставі теореми 2 попереднього розділу випливає, що $1/z\,(\alpha)$ є величина обмежена. Тому дріб $\alpha(x)/z(x)=\alpha(x)(1/z(x))$ є добуток величини нескінченно малої на величину обмежену, тобто величина нескінченно мала.

4.8. Основні теореми про границі

У цьому розділі, як і в попередньому, ми будемо розглядати сукупності функцій, що залежать від того самого аргументу x, при цьому $x\to a$ або $x\to\infty$.

Ми будемо проводити доведення для одного з цих випадків, так як для іншого доведення проводиться аналогічно. Іноді ми взагалі не будемо писати ні $x\to a$, ні $x\to\infty$, припускаючи те або інше.

Теорема 1. *Якщо між відповідними значеннями трьох функцій* $u=u(x)$, $z=z(x)$, $v=v(x)$ *виконуються нерівності* $u\le z\le v$, *при цьому* $u(x)$ *і* $v(x)$ *при* $x\to a$ *(або при* $x\to\infty$*) прагнуть до однієї і тієї ж границі* b, *то* $z=z(x)$ *при* $x\to a$ *(або при* $x\to\infty$*) прагне до тієї ж границі.*

Доведення. Для визначеності будемо розглядати як міняється функція при $x\to a$. З нерівностей $u\le z\le v$ випливають нерівності $u-b\le z-b\le v-b$; за умовою $\lim\limits_{x\to a}u=b$, $\lim\limits_{x\to a}v=b$.

Отже, при будь-якому $\varepsilon>0$ знайдеться деякий окіл з центром в точці a, в якому буде виконуватися нерівність $|u-b|<\varepsilon$; так само знайдеться деякий окіл з центром в точці a, в якому буде виконуватися нерівність $|v-b|<\varepsilon$. В меншому із зазначених околів будуть виконуватися нерівності $-\varepsilon<u-b<\varepsilon$ і $-\varepsilon<v-b<\varepsilon$, а отже, будуть виконуватися нерівності $-\varepsilon<z-b<\varepsilon$, тобто

$$\lim_{x\to a}z=b.$$

Теорема 2. *Якщо при* $x\to a$ *(або при* $x\to\infty$*) функція* y *приймає невід'ємні значення* $y\ge0$ *і при цьому прагне до границі* b, *то* b *є невід'ємне число:* $b\ge0$.

Доведення. Припустимо, що $b<0$, тоді $|y-b|\ge|b|$, тобто модуль різниці $|y-b|$ більше додатного числа $|b|$ і, отже, не прагне до нуля при $x\to a$. Але тоді y при $x\to a$ не прагне до b, що суперечить умові теореми. Виходить, припущення, що $b<0$, приводить до протиріччя. Отже, $b\geq 0$. Аналогічно доводиться, що якщо $y\leq 0$, то $\lim y\leq 0$.

Теорема 3. *Якщо між відповідними значеннями двох функцій $u=u(x)$ і $v=v(x)$, що прагнуть до границь при $x\to a$ (або при $x\to\infty$), виконується нерівність $v\geq u$, то має місце* $\lim v\geq\lim u$.

Доведення. За умовою $v—u\geq 0$, отже $\lim(v—u)\geq 0$, або $\lim v—\lim u\geq 0$, тобто $\lim v\geq\lim u$.

Приклад 1. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

З рис.4.60 випливає: якщо $OA=1$, $x>0$, то $AC=\sin x$, $A\check{}B=x$, $\sin x<x$. Очевидно, що при $x<0$ буде $|\sin x|<|x|$. З цих нерівностей випливає, що

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

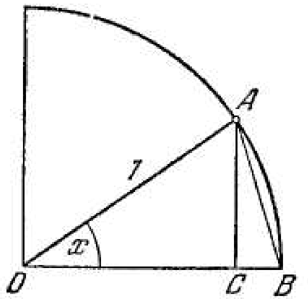


Рис. 4.60.

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x/2)=0$.

Дійсно, $|\sin(x/2)|<|\sin x|$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x/2)=0$

У деяких дослідженнях питання про границю змінних приходиться вирішувати дві самостійні задачі:

1) доводити, що границя змінної існує, і встановлювати границі, усередині яких розглянута границя знаходиться;

2) обчислювати границю яка розглядається з необхідним степенем точності.

Іноді перше питання вирішується за допомогою наступної, важливої для подальшого теореми.

Теорема. *Якщо змінна величина v зростаюча, тобто всяке її наступне значення більше попереднього, і якщо вона обмежена, тобто $v<M$, то ця змінна величина має границю $\lim v=a$, де $a\leq M$.*

Аналогічне твердження має місце і для убутної обмеженої змінної величини.

4.9. Безперервність функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена при деякому значенні x_0 і в деякому околу з центром в x_0. Нехай $y_0=f(x_0)$.

Якщо x одержить деякий додатний або від’ємний (байдуже) приріст Δx і прийме значення $x=x_0+\Delta x$, то і функція y одержить деякий приріст Δy. Нове, нарощене значення функції буде $y_0+\Delta y=f(x_0+\Delta x)$ (рис. 4.61). Приріст функції Δy визначиться формулою

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

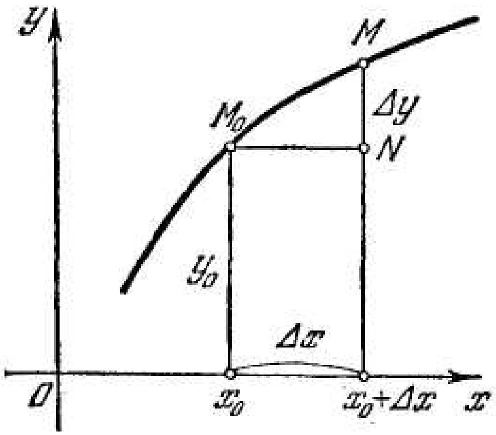


Рис. 4.61.

Означення 1. Функція *$y=f(x)$* називається *безперервною при значенні $x=x_0$* (або в точці x_0), якщо вона визначена в деякому околу точки x_0 (очевидно, і в самій точці x_0) і якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \qquad (4.24)$$

або, що те ж саме

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0 \qquad (4.25)$$

Умову безперервності (4.25) можна записати і так,

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$$

або
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \qquad (4.26)$$

але
$$x_0=\lim_{x\to x_0} x$$

Отже рівність (4.26) можна записати так

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x), \qquad (4.27),$$

тобто для того, щоб знайти границю безперервної функції при $x\to x_0$, досить у вираз функції підставити замість аргументу x його значення x_0. Описово геометрично безперервність функції в даній точці означає, що різниця ординат графіка функції $y=f(x)$ в точках $x_0+\Delta x$ і x_0 буде по абсолютній величині довільно малою, якщо тільки $|\Delta x|$ буде досить малий.

Приклад. Доведемо, що функція $y=x^2$ безперервна в довільній точці x_0. Дійсно,

$$y_0=x_0^2,\ y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2,\ \Delta y=(x_0+\Delta x)^2—x_0^2=2x_0\Delta x+\Delta x^2,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0\Delta x+\Delta x^2)=2x\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

при будь-якому способі прагнення Δx до нуля (рис. 4.62, *а* і *б*). Аналогічним чином, розглядаючи кожну основну елементарну функцію, можна довести, що кожна основна елементарна функція безперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

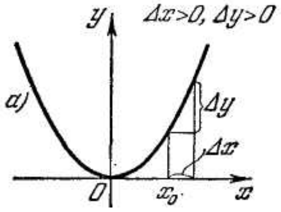


Рис. 4.62,*а.*

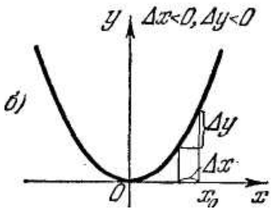


Рис. 4.62,*б.*

Доведемо далі наступну теорему.

Теорема. *Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ безперервні в точці x_0, то сума $\psi(x)=f_1(x)+f_2(x)$ також є безперервна функція в точці x_0.*

Доведення. Так як $f_1(x)$ і $f_2(x)$ безперервні, то на підставі рівності (4.26) можемо написати

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x)=f_1(x_0) \text{ і } \lim_{x\to x_0} f_2(x)=f_2(x_0).$$

На підставі теореми про границі можемо написати

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)=\lim_{x\to x_0}[f_1(x)+f_2(x)]=\lim_{x\to x_0} f_1(x)+\lim_{x\to x_0} f_2(x)=$$
$$=f_1(x_0)+f_2(x_0)=\psi(x_0).$$

Отже, сума $\psi(x)=f_1(x)+f(x)$ є безперервна функція.

Як наслідок відзначимо, що теорема справедлива для будь-якого кінцевого числа доданків.

Спираючись на властивості границь, так само можна довести наступні теореми:

a) *Добуток двох безперервних функцій є функція безперервна.*

b*) Частка двох безперервних функцій є функція безперервна, якщо знаменник в точці, яка розглядається, не обертається в нуль.*

c) *Якщо $u=\varphi(x)$ безперервна при $x=x_0$ і $f(u)$ безперервна в точці $u_0=\varphi(x_0)$, то складова функція $f[\varphi(x)]$ безперервна в точці x_0.*

Використовуючи ці теореми, сформулюємо наступну теорему без доведення.

Теорема. Всяка *елементарна функція безперервна в* *кожній точці, в якій вона визначена.* .

Приклад 1. Функція $y=x^2$ безперервна в будь-якій точці x_0 *і* тому $\lim\limits_{x\to x_0} x^2 = x_0{}^2$, $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 3^2 = 9$.

Приклад 2. Функція $y=\sin x$ безперервна в будь-якій точці і тому $\lim\limits_{x\to \pi/4} \sin x=\sin (\pi/4)=\sqrt{}\,2/2$.

Означення. Якщо функція $y=f(x)$ безперервна в кожній точці деякого інтервалу (a, b), де $a<b$, то говорять, що функція *безперервна на цьому інтервалі.*

Якщо функція визначена і при $x=a$, і при цьому $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то говорять, що $f(x)$ в точці *$x=a$ безперервна праворуч.*

Якщо $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=(b)$, то говорять, що функція $f(x)$ в точці *$x=b$ безперервна ліворуч.*

Якщо функція $f(x)$ безперервна в кожній точці інтервалу (a,b) і безперервна на кінцях інтервалу, відповідно праворуч і ліворуч, то говорять, що функція *$f(x)$ безперервна на замкнутому інтервалі* або *відрізку* $[a,b]$.

Приклад 3. Функція $y=x^2$ безперервна на будь-якому відрізку $[a,b]$, що випливає з прикладу 1.

4.10. Розривні функції

Точки розриву. Якщо x_0 — точка розриву функції f , то найчастіше саме значення $f(x_0)$ буває невизначеним, що зазвичай і не грає ніякої ролі. Важливу роль грають границі значень $f(x)$ при $x\to x_0$-0 і $x\to x_0$+0 Ці границі позначаються умовно через $f(x_0$-0) і f $(x_0$+0) (рис. 4.63).

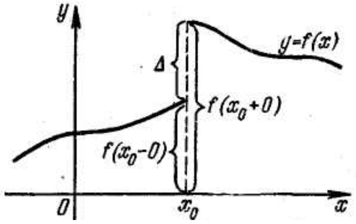


Рис. 4.63.

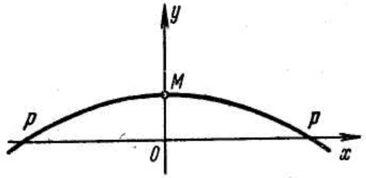


Рис. 4.64.

Буває так, що зазначені границі кінцеві і $f(x_0$-0)=$f(x_0$+0), але саме значення $f(x_0)$ не визначене або визначене, але не збігається з $f(x_0\pm 0)$. Такий розрив називається *усувним,* так як якщо покласти $f(x_0)=f(x_0\pm 0)$ (це значення називається „істиним” *значенням* функції $f(x)$ при $x=x_0$), то ніякого розриву більше не буде. Приведемо простий приклад: функція $f(x)$, яка задана формулою $f(x)=\sin x/x$, (4.28) при всіх $x\neq 0$ безперервна, але при $x=0$ не визначена, так як підставити $x=0$ в формулу (4.28) не можна, вийде невизначений вираз 0/0. Однак якщо до формули (4.28) додати, що $f(0)=1$, то в силу формули (4.21) отримана функція $f(x)$ буде визначена і безперервна для всіх x без винятку; при $x=0$ був усувний розрив. Геометрично це можна представити так, що до лінії *pp* (рис. 4.64) додали одну точку *M,* після чого лінія стала суцільною.

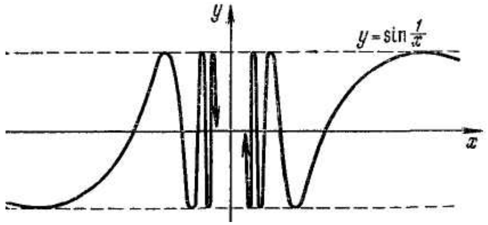
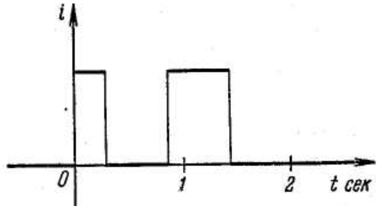


Рис. 4.65.

Якщо значення $f(x_0$-0) і $f(x_0$+0) кінцеві, але $f(x_0$—0)$\neq f(x_0$+0), то говорять, що функція f має в точці x_0 *розриви 1-го роду* x_0 або, що те ж саме, *кінцевий стрибок* $\Delta=f(x_0+0)—f(x_0—0)$ (див. рис. 4.63). Якщо з двох значень $f(x_0$-0) і $f(x_0$+0) в крайному разі одне обертається в нескінченність, то, говорячи трохи неточно, функція f в точці x_0 *обертається в нескінченність* („іде в нескінченність”); наприклад, так поводиться функція $f(x)=1/x$ при $x_0=0$.



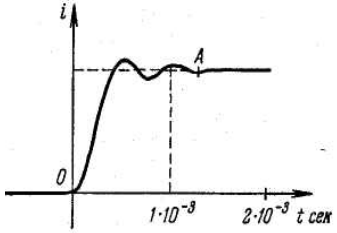


Рис. 4.66 . Рис. 4.67.

Відзначимо на закінчення, що буває, хоча і дуже рідко, що $f(x_0-0)$ або $f(x_0+0)$ не має ні кінцевого, ні нескінченного значень, так як змінна величина може не мати ні кінцевої, ні нескінченної границь. Наприклад, для функції $f(x)=\sin 1/x$ при $x\to 0$ буде $1/x\to\infty$ і $\sin 1/x$ буде знову і знову переходити від —1 до +1 і назад, не маючи границі (рис. 4.65).

Розриви у фізичних змінних величин виходять при раптовому приєднанні або від'єднанні якого-небудь впливу, при переході з одного середовища в інше (на границях розділення), при раптовій зміні закону залежності і т.п.

Так, на рис. 4.66 показана зміна струму в ланцюгу, тобто закон залежності струму *і* від часу *t*. Як бачимо, отримана функція має чотири точки розриву, в кожній з яких вона має кінцевий стрибок, отриманий за рахунок включення або відключення сталої е.д.с. в ланцюгу. Корисно звернути увагу на те, що більш ретельний аналіз (як кажуть, застосування «лупи часу», що зводиться до значного приросту масштабу по осі *t)* показує, що наростання струму насправді відбувається приблизно так, як показано на рис. 4.67. Неодмінна наявність індуктивності в ланцюзі приводить до того, що розриву функції *і*(t) *насправді немає,* струм наростає безупинно, хоча і дуже швидко! І в деяких випадках, наприклад, якщо тривалість імпульсу дуже мала, облік безперервності цього *перехідного режиму* (тобто, наприклад, ділянки *ОА* графіка) дуже важливий. Однак якщо перехідний режим значення не має, то простіше схематизувати процес, вважаючи залежність $i(t)$ розривною відповідно до рис.4.66, якщо це не приводить до істотних помилок. Отже, та ж сама залежність $i(t)$ є безперервною, або розривною в залежності від підходу (врахування або неврахування перехідного режиму)! При переході з одного середовища в інше аналогічну роль грає врахування поверхневих ефектів і т.п.

Якщо розглядається елементарна функція $f(x)$, то, розрив при $x=x_0$ може вийти тільки в тому випадку, якщо при підстановці $x=x_0$ де-небудь в $f(x_0)$ виходить вираз вигляду $a/0$, ln 0 або 0^0. При цьому виявляється що граничні значення $f(x_0-0)$ і $f(x_0+0)$, кінцеві або нескінченні, існують, якщо з відповідної сторони від x_0 функція f визначена; виключенням може бути тільки випадок, коли у виразі $f(x_0)$ є присутні sin ∞ або cos ∞.

4.11. Деякі властивості безперервних функцій

В цьому розділі розглянемо деякі властивості функцій, безперервних на відрізку. Ці властивості будуть сформульовані у вигляді теорем, що ми приводимо без доведення.

Теорема 1. *Якщо функція $y=f(x)$ безперервна на деякому відрізку $[a,b]$ $(a\leq x\leq b)$, то на відрізку $[a,b]$ знайдеться принаймні одна точка $x=x_1$ така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню $f(x_1)\geq f(x)$, де х—люба інша точка відрізка, і знайдеться принаймні одна точка x_2 така, що значення функції в цій точці буде задовольняти співвідношенню $f(x_2)\leq f(x)$.*

Значення функції $f(x_1)$ будемо називати *найбільшим значенням* функції $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$, значення функції $f(x_2)$ будемо називати *найменшим значенням* функції на відрізку $[a,b]$.

Коротко цю теорему формулюють так:

Безперервна на відрізку $a\leq x\leq b$ функція досягає на цьому відрізку щонайменше один раз найбільшого значення М і найменшого значення т. Зміст цієї теореми наочно ілюструється на рис. 4.68.

Зауваження. Твердження теореми про існування найбільшого значення функції може виявитися невірним, якщо розглядати значення функції на інтервалі $a<x<b$. Так, наприклад, якщо ми будемо розглядати функцію $y=x$ на інтервалі $0<x<1$, то серед її значень немає найбільшого і немає найменшого. Дійсно, на інтервалі немає ні найменшого, ні найбільшого значень *х*. (Немає крайньої лівої точки, тому що, яку б ми не взяли точку x^*, найдеться точка лівіше узятої, наприклад точка $x^*/2$; також немає крайньої правої, а отже, немає ні найменшого, ні найбільшого значень функції $y=x$).

Теорема 2. *Нехай функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a,b)$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, тоді між точками а і b знайдеться принаймні одна точка $x=c$, у якій функція обертається в нуль $f(c)=0$, $a<c<b$.*

Ця теорема має простий геометричний зміст. Графік безперервної функції $y=f(x)$, яка з'єднує точки $M_1[a,f(a)]$ *і* $M_2[b,f(b)]$ де $f(a)<0$ і $f(b)>0$ (або $f(a)>0$ і $(b)<0$), перетинає вісь *Ox* принаймні в одній точці (рис. 4.69).

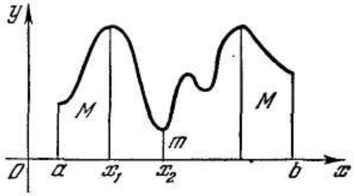


Рис. 4.68.

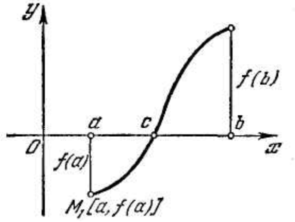


Рис. 4.69.

Приклад. Дано функцію $y=x—2$; $y_{x=1}=-1$, $y_{x=2}=6$.

На відрізку [1,2] вонабезперервна. Таким чином, на цьому відрізку є точка, де $y=x^3-2$ обертається в нуль. Дійсно, $y=0$ при $x=\sqrt[3]{2}x$ (рис. 4.70)

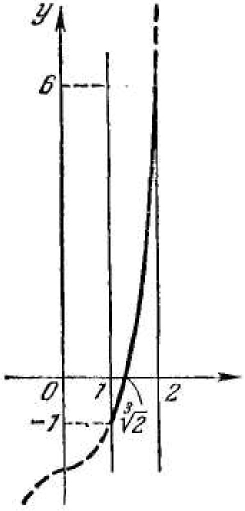


Рис. 4.70.

Теорема 3. *Нехай функція* $y=f(x)$ *визначена і безперервна на відрізку* $[a,b]$. *Якщо на кінцях цього відрізка функція приймає нерівні значення* $f(a)=A$, $f(b)=B$, *то, яке б не було число* μ, *яке розміщене між числами A і B, знайдеться така точка* $x=c$, *яка розміщена між a і b, що* $f(c)=\mu$. Зміст даної теореми чітко ілюструється на рис. 4.71. У даному випадку всяка пряма $y=\mu$ перетинає графік функції $y=f(x)$.

Зауваження. Відзначимо, що теорема 2 є частковим випадком цієї теореми, так як якщо *A і B* мають різні знаки, то в якості μ можна взяти 0 і тоді $\mu=0$ буде знаходитись між числами *A* і *B*.

Наслідок теореми 3. *Якщо функція* $y=f(x)$ *безперервна на деякому інтервалі і приймає найбільше і найменше значення, то на цьому інтервалі вона приймає принаймні один раз будь-яке значення, розміщене між її найменшими і найбільшими значеннями.*

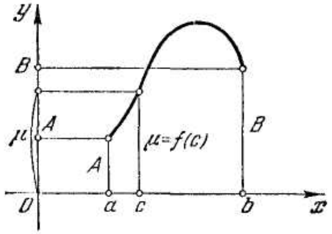


Рис. 4.71.

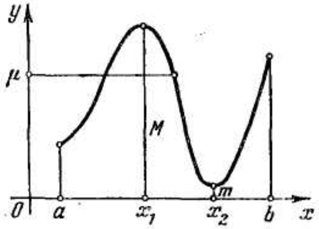


Рис. 4.72.

Дійсно, нехай $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$. Розглянемо відрізок $[x_1, x_2]$. Тоді по теоремі 3 на цьому відрізку функція $y=f(x)$ приймає будь-яке значення μ, розміщене між *M* і *m*. Але відрізок $[x_1,x_2]$ розміщено всередині розглянутого інтервалу, на якому визначена функція $f(x)$ (рис. 4.72).

Приведемо ще декілька властивостей безперервних функцій

1. Сума двох безперервних функцій є безперервною функцією. Дійсно, якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ безперервні, а $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, то при $x\to x_0$

$$\lim f(x)=\lim[f_1(x)+f_2(x)]=\lim f_1(x)+\lim f_2(x)=f_1(x_0)+f_2(x_0)=$$
$$=f(x_0)$$

що і доводить безперервність функції $f(x)$. Відзначимо, що при цьому доведенні ми спочатку скористалися властивістю границь , а потім безперервністю функцій f_1 і f_2. Аналогічне застосування інших властивостей границь показує, що: *сума, різниця і добуток будь-якого кінцевого числа безперервних функцій є знову безперервна функція; частка від ділення двох безперервних функцій є безперервна функція всюди, де знаменник відмінний від нуля.* В точках, де знаменник обертається в нуль, частка або обертається в нескінченність, або стає невизначеною вигляду 0/0, так що в обох випадках безперервність порушується.

2. *Складена функція, яка складена з безперервних функцій, сама є безперервною функцією.* Дійсно, якщо функції *z(y)* і *y(x)* безперервні і ми дамо *x* нескінченно малий приріст, то в силу безперервності другої функції приріст *y* буде також нескінченно малим, а тому в силу безперервності першої функції приріст *z* буде нескінченно малим; отже, складена функція *z(x)* безперервна.

З перших двох властивостей можна зробити наступний висновок про безперервність елементарних функцій. Огляд найпростіших елементарних функцій показує, що з них мають розрив тільки $y=x^{-m}$ для —$m<0$ при $x=0$ (коли виходить вираз вигляду 1/0) і $y=\log_a x$ при $x=0$ (коли виходить $\log 0$) і $y=\operatorname{tg} x$ при $x=\pm\pi/2$, $3\pi/2$, …(коли виходить $\sin\frac{\pi}{2}/\cos\frac{\pi}{2}=\frac{1}{0}$)

Коли утворюються складові функції з найпростіших функцій і їхні алгебраїчні комбінації, то в силу властивостей, які були розглянуті раніше, нові точки розриву можуть вийти тільки в тому випадку, якщо з'явиться вираз $a/0$ або 0^0. Цим доводиться твердження, зроблене наприкінці попереднього пункту.

Таким чином, якщо *f(x)* — елементарна функція, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, росто дорівнює $f(x_0)$, якщо в останньому виразі відсутні «небезпечні» вирази вигляду $a/0$, ln 0 і 0^0; наприклад,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\sin x)}{x^2-2x}=\frac{\ln(1+\sin 1)}{1^2-2\cdot 1}=-\ln(1+\sin 1)=-\ln 1{,}8415=-0{,}6105$$

(значення синуса і логарифма взяті з таблиць). Це правило для знаходження границі залишається в силі і при маніпуляціях з нескінченостями, якщо тільки після підстановки граничного значення аргументу не отримуємо невизначеностей вигляду 0/0, ∞-∞, ∞/∞, $0\cdot\infty$ (про які мова йшла раніше), 0^0, 1^∞, ∞^0 (про які мова піде в наступному розділі), а також вираз вигляду $\sin\infty$.

Приклад,

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{\ln x}{x}+\cos x\right)=\frac{\ln(+0)}{+0}+\cos(+0)=\frac{-\infty}{+0}+1=-\infty;$$

$$\lim_{x\to+0}\left(x^{\frac{1}{x}}+x^{-\frac{1}{x}}\right)=(+0)^{+\infty}+(+0)^{-\infty}=0+\infty=\infty.$$

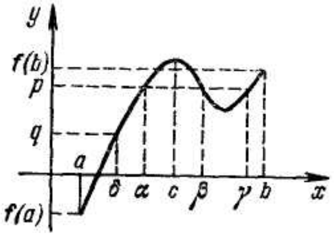


Рис. 4.73.

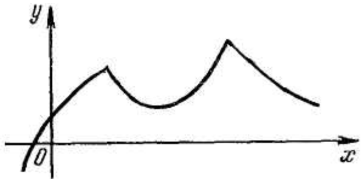


Рис. 4.74.

3. Як вказувалося раніше, графік безперервної функції *y=(x),* заданої на інтервалі $a\le x\le b$, складається з одного куска. Розгляд цього графіка (див., наприклад, рис. 4.73) показує, що *безперервна функція, яка задана на кінцевому інтервалі (включаючи кінці), обмежена і досягає найменшого в алгебраїчному змісті* (на кресленні при *x=a) і найбільшого* (при *x=c) значень.* Крім того, *вона приймає всі проміжні між f(a) і f(b) значення принаймні по одному разу;* так, на кресленні значення *y=q* приймається один раз — при $x=\delta$, а значення $y=p$ приймається три рази — при $x=\alpha$, β і ε. *Якщо вона додатна при деякому значенні* $x=x_0$, *то вона додатна і при всіх x, досить близьких до* x_0. Нарешті, з рис. 4.14 і 4.15 видно, що якщо *безперервна функція монотонна, то обернена до неї функція також безперервна* (і монотонна).

Відзначимо, що безперервна функції не зобов'язана бути *гладкою,* тобто мати графік з усюди існуючої дотичної, як на рис. 4.73. Вона може бути *кусочно-гладкою,* як на рис. 4.74, так що графік її буде складатися з декількох гладких дуг і мати злами.

Деякі додатки. 1. *Перехід до границі в степені.* Нехай $x\to a$,

$y\to b$, причому $x>0$. Представимо x^y у вигляді $x^y=(e^{lnx})^y=e^{y\ ln\ x}$.

Але $l\,n\,x\to l\,n\,a$ в силу безперервності логарифмічної функції, звідки $y\,l\,n\,x\to b\,lna$ (границя добутку) і $\exp(y\,l\,n\,x)\to\exp(bl\,n\,a)$ (безперервність показникової функції).

Таким чином, $x^y\to e^{b\ ln\ a}=(e^{ln\ a})^b=a^b$; іншими словами

$$\lim(x^y)=\lim(x)^{\lim y},$$

тобто *в степені можна переходити до границі.* Виключення складає випадок, коли добуток $bln\ a$ буде невизначеністю, тобто буде мати вигляд 0·∞. Це може вийти, якщо

$lna=0$; $b=\infty$, тобто $a=1$ і $a^b=1^\infty$;
$l\,n\,a=\infty$; $b=0$, тобто $a=\infty$ і $a^b=\infty^\circ$;
$lna=-\infty$; $b=0$, тобто $a=0$ і $a^b=0^\circ$.

Виходять саме три типи невизначеностей, про які говорилося в попередньому розділі.

Іноді здається, що повинно бути $1^\infty=1$, так як «одиниця в будь-якій степені дорівнює одиниці». Однак 1^∞ - це не одиниця в деякому визначеному кінцевому степені, а скорочений знак для границі виразу вигляду x^y, де $x\to1$, а $y\to\infty$. Припустимо, наприклад, що $x\to1+0$, тобто $x>1$. Тоді через зміну x вираз x^y «хоче» прагнути до 1, а через зміну y він «хоче» прагнути до нескінченності (так як якщо число, більше одиниці, підносити до безмежно зростаючого степеня, то вийде нескінченно велика величина). Виходить, що цей вираз «тягнуть» у різні сторони і тому в різних прикладах може вийти різний результат в залежності від того, що перетягне. Так, у прикладі (4.23), де при безпосередній підстановці $h=0$ виходить саме 1^∞, границя виявилася рівною числу e, тобто «сили, що тягнуть» виявилися в якомусь змісті рівними. Аналогічний висновок можна зробити про інші невизначеності.

2. *Розв'язання нерівностей.* Нехай функція $f(x)$ розглядається на деякому інтервалі (a,b) (зокрема, може бути, на всій осі x) і потрібно розв'язати нерівність

$$f(x)>0$$

тобто знайти всі ті значення x, для яких воно справедливе. Геометрично це означає, що необхідно знайти ділянки на осі x, для

яких графік функції $y=f(x)$ проходить вище осі x (на рис. 4.75 ці ділянки позначені штрихами); але треба мати на увазі, що якщо дана тільки функція $f(x)$, то графік ще невідомий.

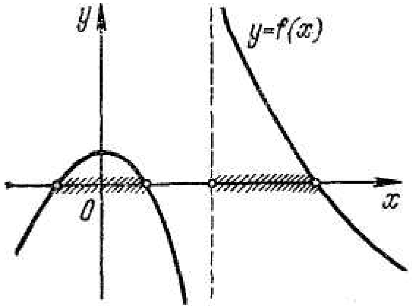


Рис. 4.75.

Розв'язання цієї задачі таке. На інтервал (a,b) наносять всі точки, в яких функція f обертається в нуль або має розрив (на рис. 4.75 чотири таких точки — три нулі й одна точка розриву). Цими точками інтервал розбивається на кілька частин (на рис. 4.75— п'ять частин), на кожній з яких функція f безперервна, так як всі точки розриву нанесені, і не обертається в нуль, так як всі нулі нанесені. Але тоді на кожній з цих частин функція зберігає знак ; щоб довідатися, який цей знак,
досить знайти знак функції в якій завгодно точці, взятої в частині інтервалу, який розглядається. Після цього, вибравши всі частини інтервалу, в яких функція додатна, одержимо розв'язання нерівності $f(x)>0$.

Приклад. Розв'яжемо нерівність

$$\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-3}>0.$$

Знаменник обертається в нуль при $x=1$ і тому ділиться на x-1. Звідси

$$y=\frac{x^3+3x^2-4}{x^2-4}=\frac{(x-1)(x^2+4x+4)}{x^2-3}=\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2-3}$$

повинно бути >0. Таким чином, функція, яка розглядається, і яка визначена на всій осі, має два нулі (x=1 і x=2) і дві точки розриву ($x=\pm\sqrt{3}$). Цими чотирма точками вісь x розбивається на п'ять частин (рис. 4.76).

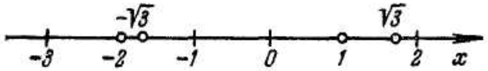


Рис. 4.76.

Беремо в кожній з них по точці і, підставляючи в останній дріб, знаходимо її знак (числове значення несуттєве); отримуємо

x	-3	-1,9	0	1,1	2
y	-	-	+	-	+

Таким чином, розв'язяння нерівності , яка розглядається,– це два інтервали

$$-\sqrt{3}<x<1 \quad \text{і} \quad \sqrt{3}<x<\infty .$$

Мікромодуль 10.
Приклади розв'язання типових задач

Обчисліть границі функцій.

$$1.\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x-1}{3x^4-2x^2+10-5.}$$

Розв 'язання. Маємо невизначеність вигляду ∞/∞.

Поділивши чисельник і знаменник на x^4, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x-1}{3x^4-2x^2+10-5.}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{10}{x^3}-\dfrac{5}{x^4}.}=\frac{2}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^3-1.}$

Розв'язання. В точці x—1 чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю, іншими словами, число x=1— корінь чисельника і знаменника. Значить, маємо невизначеність вигляду 0/0. Щоб позбутися цієї невизначеності, скористаємося таким твердженням.

Якщо $P_n(\lambda)=0$, тобто число λ - корінь многочлена

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

тоді многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на $x—\lambda$:

$$P_n(x)=(x-\lambda)Q_{n-1}(x),$$

де $Q_{n-1}(x)$ - многочлен (n-1) - го степеня.

В нашому випадку

$$4x^2+x-5=(x-1(4x+5),\quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Тоді

$$\frac{4x^2+x-5}{x^3-1.}=\frac{(x-1)(4x+5)}{(x\ \ -1)(x^2+x+1).}=\frac{4x\ \ +5}{x^2+x+1.}.$$

Функції

$$f(x)=\frac{4x^2+x-5}{x^3-1.}\ \text{і}\ g(x)\ \frac{4x\ \ +5}{x^2+x+1.}.$$

при x=1 тотожно рівні, причому функція g(x) в точці x=1 визначена

$$g(1)=\frac{4\ \ +5}{1+1+1.}=3.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не залежить від значення функції в самій точці

$$x{=}a,\text{ то } \lim_{x\to 1}\frac{4x^2+x-5}{x^3-1.}=\lim_{x\to 1}\frac{4x+5}{x^2+x+1.}=3.$$

Зауваження. Нехай $x=x_0$ – корінь многочленів

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\quad Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0}[(P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n)/(Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots$$

$$+b_{m-1}x+b_m)]=\lim_{x\to x_0}[P_{n-1}(x)/Q_{m-1}(x)]$$

де $P_{n-1}(x)$, $Q_{m-1}(x)$ результат ділення многочленів $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ на $x\text{-}x_0$ відповідно

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6}}{x^2+6x+5}.$

Розв 'язання. Підставивши у чисельник і знаменник дробу значення x—1, переконаємося, що маємо невизначеність вигляду 0/0. Щоб розкрити цю невизначеність, треба позбутися від ірраціональності, яка несе цю невизначеність: для цього домножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Дістанемо

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6}}{x^2+6x+5}.=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6})(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}{(x^2+6x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(3-x)-(2x+6)}{(x^2+6x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=\lim_{x\to -1}\frac{-3(x+1)}{(x+5)\_x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$=-3\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=-\frac{3}{4(2+2)}-\frac{3}{16}$$

Фактично у цьому прикладі, як і у попередньому, ми вилучаємо множник (x+1), оскільки x=-1 є корінь функцій, що стоять в чисельнику і знаменнику.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}.$

Розв'язання. Множення на спряжений вираз у цьому випадку не врятовує ситуацію, тому треба домножити чисельник і знаменник на такий вираз, щоб скористатися формулою

$$(a\text{-}b)(a^2+ab+b^2)=a^3\text{-}b^3.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}$$

$$\frac{(8+x^2)-8}{\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)x^2}=$$

$$\frac{(\sqrt[3]{8+x^2}-2)\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

Обчислити границі функцій

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Розв 'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}$

Розв 'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{2\sin 2x\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

7. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

Розв 'язання. Перш за все звернемо увагу на те, що в першій важливій границі аргумент $x\to 0$. Тому для зручності виконаємо заміну $\pi—x= t$. При цьому якщо $x\to\pi$, то $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(\pi-t)}{\sin 2(\pi-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5\pi-5t)}{\sin(2\pi-2t)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=$$

$$=-\frac{5}{2}$$

8. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}$

Розв'язання. Маємо невизначеність$(0\cdot\infty)$. Нехай x-2=1; при $x\to 2$, $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\frac{\pi(2+t)}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{4}\right)=$$

$$=$$

$$\lim_{t\to 0}t\left(-ctg\frac{\pi t)}{4}\right)=-\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$

Розв 'язання. Маємо невизначеність вигляду (0/0) .

Виконаємо перетворення чисельника і знаменника дробу:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2};$$

$$1-2\cos x=2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)=2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}$$

Тоді

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{4\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

При розкритті *невизначеності вигляду* 1^∞ використовують другу важливу границю або наслідки з неї.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}$

Розв 'язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-3}{x+1}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{3x-2}=\left[1^\infty\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1-3}{-3x+1}(3x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x+1}(3x-2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x+6}{x+1}}=e^{-9}.$$

Зауваження. При розв'язанні даного прикладу ми скористалися другою важливою границею, а також відомою властивістю границь

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)}=(\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

11. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}$

Розв'язання. При x=—1 маємо невизначеність (1^{∞}).
Для зручності перетворень позначимо $x+1=t$. Тоді

$$\left(\frac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}=\left(\frac{3(x+1)+3}{(x+1)+3}\right)^{\frac{2}{x+1}}=\left(\frac{3+3t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t+1}}=\left(\frac{3+t+2t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t}}=\left(1+\frac{2t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t}}.$$

Отже

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}=\lim_{t\to 0}\left|\left(1+\frac{2t}{3+t}\right)^{\frac{3+t}{2t}}\right|^{\frac{4}{3+t}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{4}{3+t}}=e^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{e^4}.$$

Розглянемо найбільш загальний випадок. Нехай потрібно обчислити границю

$\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$,   де $u(x)\to 1$, $v(x)\to\infty$ за умови $x\to x_0$.

Виконаємо перетворення:

$$\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\left((1+(u(x)-1^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{(u(x)-1)v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1))v(x)}=e^{A}.(*)$$

Таким чином, задача зведена до обчислення границі $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=e^{A..}$

Висновок. Якщо $u(x)\to 1$, $v\ (x)\to\infty$ при $x\to x_{0,}$ то $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=e^{A}$, де A= $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду (1^{∞}), для розкриття якої використаємо формулу (*). У нашому випадку

$u(x)=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$, $v(x)\dfrac{1}{x^2}$, $u(x)\to 1$, $v\ (x)\to\infty$ якщо $(x)\to 0$

Знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2\cos 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=\frac{3}{2}.$$

Таким чином $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}\sqrt{e^3}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-4^{-x}}{2^{\sin x}-1}$

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-4^{-x}}{2^{\sin x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-4^{-x}}{2^{\sin x}-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4^x-1}{x}+\frac{4^{-x}-1}{-x}}{\ln 2\cdot\frac{\sin x}{x}}=\frac{\ln 4+\ln 4}{\ln 2}=4.$$

Тут ми двічі скористалися наслідком з другої важливої границі:

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}x(\ln(x+1)-\ln x)=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=[\infty\cdot0]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$$

15. $\lim\limits_{x\to1}\frac{(2-x)^5-1}{x^2-1}$

Розв 'язания. Для зручності виконаємо заміну x-1=t; якщо x→1, то t→0. Тоді

$$\lim_{x\to1}\frac{(2-x)^5-1}{x^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{(1-t)^5-1}{(1+t^2)-1}=\lim_{t\to0}\frac{(1-t)^5-1}{t(t+2)}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{(1-t)^5-1}{-1}=-\frac{1}{2}\cdot5=-2,5.$$

Тут ми скористалися наслідком з другої важливої границі, а саме:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1-t)^k-1}{x}=k.$$

16.Обчисліть

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\sin3x+e^{x^2}-1}{arctg^2x-x+tg4x}.$$

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду 0/0. При x→0 справедливі еквівалентності:

$\ln(1+x)$ *~x;*

$$\sin3x\sim3x;\quad e^{x^2}-1\sim x^2;\quad arctg^2x;\quad tg4x\sim4x.$$

Враховуючи теореми про еквівалентності, дістанемо

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\sin3x+e^{x^2}-1}{arctg^2x-x+tg4x}.=\lim_{x\to0}\frac{x+3x+x^2}{x^2-x+4x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x+x^2}{x^2+3x}=\lim_{x\to0}\frac{4+x}{x+3}=\frac{4}{3}.$$

17. Обчисліть

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sin2x-\sin x)^3}{tgx-\sin x}.$$

Розв'язання. Як і у попередньому прикладі маємо невизначеність вигляду 0/0. Розглянемо чисельник. При x→0 sin 2x~2x, sin x~x , причому sin 2x не еквівалентний sin x. Тому, границя не зміниться, якщо (sin 2x—sin x)^3 замінити на x^3. Розглянемо тепер знаменник. При x→0 функції tg x і sin x між собою еквівалентні. Оскільки різниця еквівалентних нескінченно малих функцій α(x) і β(x) - нескінченно мала вищого порядку, ніж α*(x)* і β(x) і не дорівнює нулю, не можна у даному прикладі знаменник замінити на *x-x,* або tg x *-x,* або *x-sin x* . Перетворимо знаменник так:

$$tgx-\sin x=tgx(1-\cos x)=2tgx\sin^2\frac{x}{2}\sim2x\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^3}{2}.$$

Отже

$$\lim_{x\to0}\frac{(\sin2x-\sin x)^3}{tgx-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\frac{x^3}{2}}=2.$$

18. Порівняйте нескінченно малі функції

α(x)=x^2+3x+2 та β*(x)=tg(x*+1*)* при x→-1

Розв 'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій:

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{tg(x+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x\ \ +1)(x+4)}{x+1}=\lim_{x\to-1}(x+4)=3.$$

Отже, функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to-1$ - нескінченно малі одного порядку.

19. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x) = x$ arctg x^{-2} та $\beta(x) = (x-3)^{-1/3}$ при $x\to\infty$.

Розв 'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ arctg\ x^{-2}}{(x-3)^{-1/3}}=|\,x-3-x\,|=\lim_{x\to\infty}\frac{x\ arctg\ x^{-2}}{x^{-1/3}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{arctg\ x^{-2}}{x^{-4/3}}=|\,x^{-2}=t\,|=\lim_{t\to0}\frac{arctg\ t}{t^{2/3}}=\lim_{t\to0}\frac{1}{t^{2/3}}=\lim_{t\to0}t^{1/3}=0.$$

Отже $\alpha(x)=0(\beta(x))$ при $x\to\infty$.

20. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin x$ та $\beta(x)=|x|$ при $x\to0$.

Розв 'язання. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|\,x\,|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{|\,x\,|}$;

$$\lim_{x\to0-0}\frac{\sin x}{|\,x\,|}=\lim_{x\to0-0}\frac{x}{-x}=-1,\quad \lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{|\,x\,|}=\lim_{x\to0+0}\frac{x}{x}=1.$$

Таким чином, границя відношення даних функцій при $x\to0$ не існує. Це означає, що дані функції при $x\to0$ порівняти не можна.

21. Дослідіть на неперервність функцію $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв 'язання. Функція не визначена при $x=0$, але має в цій точці границю:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отже, $x=0$ - точка усувного розриву (рис. 4.77). В усіх інших точках дана функція неперервна.

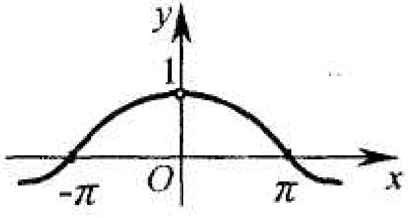


Рис. 4.77.

Якщо довизначити функцію у точці $x=0$, поклавши $y(0)=1$, то дістанемо неперервну функцію

$$y=\begin{cases}1, & якщо\ x=0\\ \dfrac{\sin x}{x}, & якщо\ x\neq0\end{cases}$$

22. Дослідіть на неперервність функцію $y=arctg\dfrac{1}{x}$ в точці $x=0$.

Розв 'язання. Очевидно, що в точці $x=0$ функція не має сенсу.

Знайдемо границі

$$\lim_{x\to0-0}arctg\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to0+0}arctg\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Згідно з класифікацією точок розриву робимо висновок, що $x=0$ - точка розриву першого роду.

23. Дослідіть на неперервність функцію $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$

в точках $x_1=0$, $x_2=1$ і $x_3=2$.

Розв'язання. В точці $x_1=0$ функція визначена: $y(0)$=—1, значить, вона неперервна як елементарна функція.Перевіримо точку $x_2=1$. В цьому випадку знаменник функції обертається в нуль, значить, $x_2=1$ — точка розриву.

Знайдемо односторонні границі.

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty,$$

Отже, x=1 - точка розриву другого роду (рис. 4.78).

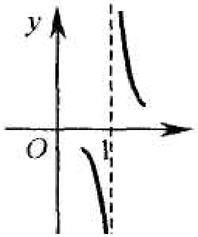


Рис. 4.78.

Мікромодуль 10

Індивідуальні тестові завдання

Знайдіть границі функцій:

10.1.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3}{\sqrt[3]{8x^9-7x^7+5x}}$, б) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$,

в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$

10.1.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x}-\sqrt{x+1}}{3x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{5x+6}-\sqrt{3x+4}}$

10.1.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+5}{4+x-2x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$

10.1.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3+3x^2}-\sqrt[3]{4x^2+7x}}{3x+5}$,

б) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+1}}{2x^2-5x+2}$

10.1.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x-7}{\sqrt[3]{16x^4-3x^3}+\sqrt[3]{2x^2-1}}$, б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$,

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{5x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}$

10.1.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+2}{1+4x-7x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$,

в) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{2x^2-x-6}$

10.1.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2-3}-\sqrt[3]{4x^4-2x^2+3}}{3x-2}$,

б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$, в) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{2(x+1)}-1}{27x^3+8}$

10.1.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2x^4-5x^3+1}}{\sqrt[4]{x^5-3x^4+7x^3}}$, б) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$,

в) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-9x+8}$

10.1.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+x-3x^3}{2x^2-x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{5}}\dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$,

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$

10.1.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-x+5}{2x^3-x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$

10.1.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5-2x^2}}{\sqrt[4]{3x^7+5x^4-2x}}$, б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$,

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

10.1.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x+5}-2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$,

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$, в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$

10.1.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{3x^7-2x^5}}{\sqrt[4]{3x^5-4x^2+x}}$, б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$,

в) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$

10.1.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^5-2x^2}}{\sqrt[4]{3x^7+5x^4-2x}}$,б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$,

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$

10.1.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x+5}-2x}{\sqrt[3]{x^3+3x^2}}$, б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$

10.2. Знайдіть границі функцій, використовуючи першу важливу границю

10.2.1 а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos2x-\cos8x}{xtgx}$, б) $\lim\limits_{x\to5}(5\text{-}x)\,tg\,\dfrac{\pi x}{10}$

10.2.2 а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin7x}{\sin3x-\sin5x}$ б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos2x+1}{1-\sin x}$

10.2.3 а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{\sin5x}$,б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\,tg\,x\dfrac{1}{x}$

10.2.4 а) $\lim\limits_{x\to0}$, $\dfrac{\sin^2 3x}{tg6x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x\sin2x-\cos2x}{x^2}$

10.2.5 а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{tg5x}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2x\sin5x}$

10.2.6 а) $\lim\limits_{x\to 0}, \dfrac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\sin^2 8x}$ б) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$

10.2.7 а) $\lim\limits_{x\to 2}, \dfrac{2-x}{\sin 3\pi x}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-3\cos 2x + \cos^2 2x}{x^2}$

10.2.8 а) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\cos 3x + 1}{tg^2 x}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 3x - tg x}{tg 2x}$

10.2.9 а) $\lim\limits_{x\to -2} (x+2)ctg\ 3\pi x$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 4x - 5\cos 4x + 4}{x \sin x}$

10.2.10 а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x+1}{\cos 3\pi x}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 8x - \sin 3x}{\sin 5x + \sin 2x}$

10.2.11 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 3x}{2x \sin x}$,б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (2x-\pi)tg\ x$

10.2.12 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg 5x}{\sin 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 4x - tg^2 2x}{x^2}$

10.2.13 а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\sin 4x}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 6x - tg^2 3x}{\sin x^2}$

10.2.14 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 4x}$,б) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 sin \dfrac{1}{x^2+1}$

10.2.15 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 2x}{tg^2 3x}$,б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin^2 x - 3\sin x + 2}{2x - \pi}$

10.2.16 а) $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)ctg\ \pi x$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \arccos x\right)}$

10.2.17 а) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 3x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x + tg 3x}{\sin x - \arcsin 2x}$

10.2.18 а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg 3x - \sin 3x}{\sin^2 x}$,б) $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 tg \dfrac{1}{x^2-4}$

10.2.19 а) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{tg^2 2x}{\cos 5x + 1}$,б) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+3)sin \dfrac{1}{x-2}$

10.2.20 а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{\sin 2\pi x}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 6\cos x + 5}{x^2}$

10.3. Знайдіть границі функцій, використовуючи другу важливу границю або її наслідки.

10.3.1 а) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+2}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$

10.3.2 а) $\lim\limits_{x\to -2} (2x+5)^{\frac{2}{x^2-4}}$,б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - e^x}{\ln \cos \sqrt{x}}$

10.3.3 а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(4x-3)}{x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5-x^2}{3-2x^2}\right)^{7-x^2}$

10.3.4 а) $\lim\limits_{x\to -4} \left(\dfrac{x+5}{2x+9}\right)^{\frac{3}{x+4}}$ б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

10.3.5 а) $\lim\limits_{x\to \infty} (2x-1)[ln(x-2)-ln(x+1)]$ б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

10.3.6 а) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+5}{2x+3}\right)^{x-1}$ б) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

10.3.7 а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{e^{x+3} - 1}{x^2 + 2x - 3}$ б) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{3x+7}{2x+6}\right)^{\frac{5}{x+1}}$

10.3.8 а) $\lim\limits_{x\to -2} (2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^x}{\sin 3x}$

10.3.9 а) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x-2}{2-x}\right)^{\frac{2}{x^2-1}}$,б) $\lim\limits_{x\to0}(x\sin\log_{1-x^2}e)$

10.3.10 а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)[\ln(2x-1)-\ln(2x+3)]$, б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x-8^x}{tg2x}$

10.3.11 а) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\ln(x-4)}{x^2-4x-5}$, б) $\lim\limits_{x\to2}(3x-5)^{\frac{4}{x^2-4}}$

10.3.12 а) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{x+7}{2x+9}\right)^{\frac{3}{x+2}}$, б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$

10.3.13 а) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{2}{x^2-1}}$, б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x^2-1)\log_x 2}$

10.3.14 а) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\dfrac{e^{5x+2}-1}{5x^2+7x+2}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x+3}$

10.3.15 а) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{2}{x^2-4}}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\log_{\cos x}(1+x^2)$

10.3.16 а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+5}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\log_{\cos 2x}(1-x^2)$

10.3.17 а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)[\ln(2x+1)-\ln(2x+5)]$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x+1}\right)^{6x+2}$

10.3.18 а) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{2}{x^2-9}}$, б) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\ln(4x-23)}{x^2-8x+12}$

10.3.19 а) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\dfrac{x+5}{2x+8}\right)^{\frac{4}{x+3}}$, б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-2^{-x}}{\sin 4x}$

10.3.20 а) $\lim\limits_{x\to7}(2x-13)^{\frac{3}{x-7}}$, б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4^{x^2-1}-1}{x^2+2x-3}$

10.4. Обчислити границі, використовуючи еквівалентності

10.4.1. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1-x)tg\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+2x)^5-1}{e^{3x}-1}$

10.4.2. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^3 2x-\sin x^4}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}}$

10.4.3. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin\sqrt[3]{x})}{tg(2\sqrt[3]{x})}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^3-2^x+3^x}{e^x-1}$

10.4.4. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{\arcsin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$

10.4.5. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1^{\sqrt{x+1}}-1}{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}$

10.4.6. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x-\arcsin 3x}{arctg2x+arctgx}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(2+x)^3-8}{\ln(1+x)^6}$

10.4.7. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+tg\sqrt{x}-2\sin x}{x+x^2+tgx}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-2x}}{tgx}$

10.4.8. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\arcsin x}\sqrt{1-\sin x}}{tgx}$ б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e+\ln(2-x^2)}{2x^2-3x+1}$

10.4.9. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^x+x\sin x)}{\ln(1+tgx)}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(tg5x-tgx)}{\arcsin tg2x}$

10.4.10. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-x}{tg\sqrt{x}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin(tgx-x)}{\ln(1+\sin x)}$

10.4.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{tgx^2\frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

10.4.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(tg5x-tgx)}{\arcsin tg2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sqrt{x}}-\cos x}{\sin\sqrt{x}}$

10.4.13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x-\sin 3x}{\left(e^{3x^2}-1\right)\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x^2-3x+2}$

10.4.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x}{\left(e^{-x}-1\right)\ln(1+\sin x)}$

10.4.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$

10.4.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x+tgx-\sin 2x}{\sin x-\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\ln(1-x)tg\pi x}$

10.4.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sin 3x+2^{2x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{tg\pi x}$

10.4.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x+1}-4}{\ln\left(1+x\sqrt{1+x2^x}\right)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)-2\sin^2 x}{arctg2x}$

10.4.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x-tg^4 x}{e^{x^2}-1+x^3}$ б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}$

10.4.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\pi(x+2)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-\sqrt{x^2+1}}$

10.5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

10.5.1. $\alpha(x)=x-x^2-\sqrt{x}$ $\beta(x)=x+x^3-3\bullet\sqrt[3]{x}$ при $x\to 0$

10.5.2. $\alpha(x)=x^3-3x+2$ $\beta(x)=x-2$ при $x\to 2$

10.5.3. $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$ $\beta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-2x}}$ при $x\to\infty$

10.5.4. $\alpha(x)=\sqrt{x}-2$ $\beta(x)=x^2-16$ при $x\to 4$

10.5.5. $\alpha(x)=x^3+x-2$ $\beta(x)=x-1$ при $x\to 1$

10.5.6. $\alpha(x)=1-\sqrt{2}\cos x$ $\beta(x)=4x-\pi$ при $x\to\dfrac{\pi}{4}$

10.5.7. $\alpha(x)=x^3+2x-12$ $\beta(x)=x^2-4$ при $x\to 2$

10.5.8. $\alpha(x)=ctg\,x$ $\beta(x)=\pi-2x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$

10.5.9. $\alpha(x)=\sin\left(\sqrt{x}-2\right)$ $\beta(x)=x-4$ при $x\to 4$

10.5.10. $\alpha(x)=ctg(x^3+x)$ $\beta(x)=x$ при $x\to 0$

10.5.11. $\alpha(x)=(x^3+2)^{-1}$ $\beta(x)=(x^{10}-15)^{-1/3}$ при $x\to\infty$

10.5.12. $\alpha(x)=\sin\left(x-\sqrt{x}\right)$ $\beta(x)=2\sqrt{x}$ при $x\to 0$

10.5.13. $\alpha(x)=\arcsin\left(2-\sqrt{x}\right)$ $\beta(x)=4-x$ при $x\to 4$

10.5.14. $\alpha(x)=e^x-1$ $\beta(x)=x^2$ при $x\to 0$

10.5.15. $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ $\beta(x)=1+\sqrt[3]{x-1}$ при $x\to 0$

10.5.16. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}-3$ $\beta(x)=27-x$ при $x\to 27$

10.5.17. $\alpha(x) = x\sin\sqrt{x} \quad \beta(x) = \sqrt{x^3}$ при $x \to 0$

10.5.18. $\alpha(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \quad \beta(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$ при $x \to 4$

10.5.19. $\alpha(x) = x - \sin x \quad \beta(x) = x$ при $x \to 0$

10.5.20. $\alpha(x) = x\sin(2/x) \quad \beta(x) = x$ при $x \to 0$

10.5.21. $\alpha(x) = x^2\cos(1/x) \quad \beta(x) = x$ при $x \to 0$

10.5.22. $\alpha(x) = \dfrac{arctgx}{x} \quad \beta(x) = \dfrac{1}{x-2}$ при $x \to \infty$

10.5.23. $\alpha(x) = arctgx - \dfrac{\pi}{2} \quad \beta(x) = 1/x$ при $x \to \infty$

10.5.24. $\alpha(x) = x^2\sin(1/x) \quad \beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ при $x \to 0$

10.5.25. $\alpha(x) = arctgx\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \beta(x) = x$ при $x \to 0$

10.5.26. $\alpha(x) = \dfrac{x^3-8}{\sqrt{x}} \quad \beta(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ при $x \to 2$

10.5.27. $\alpha(x) = \dfrac{\arcsin(x-2)}{x} \quad \beta(x) = x^3 - 8$ при $x \to 2$

10.5.28. $\alpha(x) = x + 2x^2 - \sqrt[3]{x} \quad \beta(x) = 1 - \sqrt{1-x}$ при $x \to 0$

10.5.29. $\alpha(x) = x^2+5x+4, \quad \beta(x) = x^2+3x+2$ при $x \to -1$

10.5.30. $\alpha(x) = 1-\cos x \quad \beta(x) = (3x-\pi)^2$ при $x \to \pi/3$

10.6 Дослідіть функцію *f(x)* на неперервність. В точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

10.6.1. а) $f(x) = \dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$ б) $f(x) = \dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x-2}}}$

10.6.2. а) $f(x) = \dfrac{5x^2-3x-2}{x^2+x-3}$ б) $f(x) = arctg\dfrac{x-1}{x+1}$

10.6.3. а) $f(x) = \dfrac{5x^2-x-4}{x^2+2x-3}$ б) $f(x) = 7^{\frac{2}{x+3}}$

10.6.4. а) $f(x) = \dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+4x-5}$ б) $f(x) = \dfrac{5}{tg|x+1|}$

10.6.5. а) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$ б) $f(x) = \dfrac{5^{\frac{1}{x-1}}-1}{5^{\frac{1}{x-1}}+1}$

10.6.6. а) $f(x) = \dfrac{x^2-4x=3}{2x^2+5x-7}$ б) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$

10.6.7. а)f(x)= $\frac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$ *б)f(x)=* $\frac{6}{3+2^{\frac{1}{x+4}}}$

10.6.8. а)f(x)= $\frac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$ *б)f(x)=* $\frac{1}{x}\,ln\frac{1+x}{1-x}$

10.6.9. а)f(x)= $\frac{2x^2+7x-9}{2x^2+3x-5}$ *б)f(x)=(x+1)arctg*$\frac{1}{x}$

10.6.10. а)f(x)= $\frac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$ *б)f(x)=* $\frac{1}{3^{\frac{1}{x+2}}+3^{\frac{1}{x-2}}}$

10.6.11. а)f(x)= $\frac{3x^2-7x+4}{x^2-4x+3}$ *б)f(x)=* $2^{\frac{3}{x-7}}$

10.6.12. а)f(x)= $\frac{4x^2-7x+3}{x^2-5x+4}$ *б)f(x)=* $\frac{6}{6\ +6^{\frac{1}{x-6}}}$

10.6.13. а)f(x)= $\frac{5x^2-7x+2}{x^2-6x+5}$ *б)f(x)=* $\frac{1}{4^{\frac{1}{x+1}}+4^{\frac{1}{x-1}}}$

10.6.14. а)f(x)= $\frac{2x^2-9x+7}{x^2-7x+6}$ *б)f(x)=*$2^{\frac{x}{x^2-9}}$

10.6.15. а)f(x)= $\frac{3x^2-5x+2}{x^2+3x-4}$ *б)f(x)=(2x+3) arctg*$\frac{2}{x}$

10.6.16. а)f(x)= $\frac{2x^2-x-3}{x^2-x-2}$ *б)f(x)=*$\frac{x}{tg(1+x)}$

10.6.17. а)f(x)= $\frac{2x^2-7x-9}{x^2-3x-4}$ *б)f(x)=* $\frac{2}{3+4^{\frac{1}{x-5}}}$

10.6.18. а)f(x)= $\frac{2x^2-5x-7}{x^2-4x-5}$ *б)f(x)=* $3^{\frac{x}{x^2-4}}$

10.6.19. а)f(x)= $\frac{3x^2-4x-7}{x^2-2x-3}$ *б)f(x)= (x+4) arctg*$\frac{1}{x}$

10.6.20. а)f(x)= $\frac{4x^2-x-5}{x^2-4x-5}$ *б)f(x)=* $5^{\frac{x-2}{x-1}}$

10.6.21. а)f(x)= $\frac{5x^2-x-6}{x^2-5x-6}$ *б)f(x)=* $\frac{4^{\frac{1}{x+3}}-1}{4^{\frac{1}{x+3}}+1}$

10.6.22. а)f(x)= $\frac{6x^2-x-7}{x^2-5x-6}$ *б)f(x)=* $\frac{3^{\frac{1}{x+2}}-1}{3^{\frac{1}{x+2}}+1}$

10.6.23. а)f(x)= $\frac{4x^2-3x-7}{x^2-6x-7}$ *б)f(x)=* $\frac{7^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-2}}}$

10.6.24. а)f(x)= $\frac{4x^2-5x-9}{x^2-7x-8}$ *б)f(x)=*$\frac{x}{\ln(2-x)}$

10.6.25. а)$f(x)=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-x-2}$ б)$f(x)=\dfrac{3}{2+4^{\frac{1}{2-x}}}$

10.6.26. а)$f(x)=\dfrac{7x^2-x-8}{x^2-7x-8}$ б)$f(x)=\dfrac{|x-1|}{arctg(x-1)}$

10.6.27. а)$f(x)=\dfrac{4x^2-7x-11}{x^2-3x-4}$ б)$f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-5}}}$

Модуль 5.
Похідна і диференціал

Мікромодуль 11
Похідна

Різні задачі природознавства – такі, як визначення швидкості, прискорення, сили струму, щільності речовини і багато які інші – приводять до одних і тих же математичних обчислень. Відволікаючись від конкретного змісту кожної задачі, результат відповідних математичних обчислень називають похідною. У цьому мікромодулі вивчається поняття похідної і на прикладі деяких задач показується, як воно виникає і як за допомогою похідної і родинних понять розв’язуються задачі.

5.1. Визначення похідної

1. Приклади, що приводять до поняття похідної. До одного з найважливіших у математиці понять, поняттю похідної, ми приходимо при вивченні швидкості зміни функції.

Розглянемо, наприклад, поняття миттєвої швидкості прямолінійного руху точки *(у фізичному розгляді точкою називається тіло, розмірами якого ми в даному розгляді зневажаємо;* у різних розглядах точкою може вважатися частка речовини, або літак, або навіть небесне тіло).

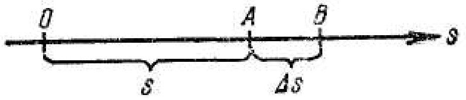


Рис. 5.1.

Нехай точка рухається по осі s зліва направо, причому нерівномірно, із змінною швидкістю. Тоді закон руху математично виражається залежністю координати s від часу: $s=f(t)$. Так як швидкість змінна, то відношення пройденого шляху до минулого часу дає тільки *середню швидкість.* Що ж стосується миттєвої швидкості (швидкості в даний момент часу), то її знаходять у такий спосіб. Нехай у деякий момент t точка, що рухається, займає *положення A* (рис. 5.1), а через час Δt перейде в положення B, пройшовши шлях Δs; таким чином,

$$s=f(t), \qquad s+\Delta s=f(t+\Delta t),$$

тобто

$$\Delta s=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Тоді відношення $v_{\text{ср}}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (тобто пройдений шлях, віднесений до одиниці минулого часу) дає середню швидкість руху за проміжок часу від t до $t+\Delta t$. *Миттєва* ж *швидкість* руху в момент t *виходить як границя середньої швидкості в процесі безмежного зменшення проміжку часу* Δt, тобто

$$v_{\text{мит}}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \qquad (5.1)$$

Говорять також, що миттєва швидкість - це середня швидкість за нескінченно малий проміжок часу (за *«елемент»* часу) або, що миттєва швидкість — це відношення нескінченно малого шляху до відповідного нескінченно малого проміжку часу (тобто нескінченно малий шлях, віднесений до одиниці минулого часу). Обидва ці визначення є скороченими формулюваннями розгорнутого визначення (5.1).

Швидкість процесу не завжди виміряється пройденим шляхом, віднесеним до одиниці минулого часу. Розглянемо, наприклад, процес наповнення судини; у даному випадку законом наповнення служить залежність $V=f(t)$ уже наповненого об'єму від часу. Середньою швидкістю наповнення за проміжок часу від t до $t+\Delta t$ служить відношення

$$w_{\text{ср}}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

тоді як миттєвою швидкістю наповнення в момент t — границя

$$w_{\text{мит}}=\lim_{\Delta t\to 0} w_{cp}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

Як бачимо, з формальної точки зору виходить такий же вираз, як у (5.1). Але швидкість можна розуміти в ще більш широкому плані, відносячи зміну деякої величини не до одиниці часу, а до одиниці якої-небудь іншої величини. Розглянемо, наприклад, поняття лінійної щільності *матеріальної лінії,* тобто тіла, розміри якого враховуються лише в одному протязі; поперечним перерізом тіла ми зневажаємо, але масою не зневажаємо. Якщо ця лінія (нитка) однорідна, то лінійна щільність виміряється відношенням маси нитки до її довжини. Якщо ж нитка неоднорідна, то її лінійна щільність у різних точках різна. Будемо відраховувати відстань від одного з кінців нитки (рис. 5.2), і нехай маса нитки, що відповідає пройденому шляхові *s,* дорівнює $M=f(s)$. Якщо тепер пройдено додатковий шлях Δs, то відношення

$$\rho_{cp}=\frac{\Delta M}{\Delta s}=\frac{f(s+\Delta s)-f(s)}{\Delta s}.$$

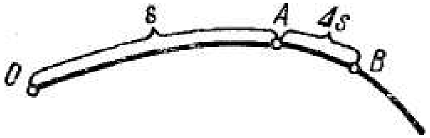


Рис. 5.2.

являє собою середню лінійну щільність нитки на ділянці *AB*. Границя ж

$$\rho=\lim_{\Delta s\to 0}\rho_{cp}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{f(s+\Delta s)-f(s)}{\Delta s}. \quad (5.3)$$

являє собою *лінійну щільність нитки в точці* (саме, у точці *A*). Можна сказати, що це — швидкість зміни маси нитки, віднесена до одиниці пройденого шляху.

Приклад. Знайти швидкість рівномірно прискореного руху в довільний момент t і в момент t=2 *сек.*, якщо залежність шляху від часу виражається формулою

$$s=\frac{gt^2}{2}.$$

Розв'язання. У момент t маємо $s=\dfrac{gt^2}{2}$ в момент $t+\Delta t$ одержимо

$$s+\Delta s=\frac{g(t+\Delta t)^2}{2}=\frac{g(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)}{2}.$$

Знайдемо Δs

$$\Delta s=\frac{g(t^2+2t\Delta t+\Delta t^2)}{2}-\frac{gt^2}{2}=\text{gt}\Delta\text{t}+\frac{g\Delta t^2}{2}$$

Складемо співвідношення $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{gt\Delta t+(g\Delta t^2/2)}{\Delta t}=\text{gt}+\frac{1}{2}g\Delta t;$$

по визначенню, маємо $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(\text{gt}+\dfrac{1}{2}g\Delta t)=gt$

Таким чином, швидкість у будь-який момент часу t дорівнює $v=gt$.

При t=2 маємо $(v)_{t=2}=g\cdot 2=9{,}8\cdot 2=19{,}6$ *м/сек.*

2. Означення похідної. Усі вирази (5.1), (5.2), (5.3) з математичної точки зору мають однакову структуру і дають підставу для наступного означення. Нехай дана функція $y=f(x)$. Тоді швидкість її зміни, що віднесена до одиниці зміни аргументу, при значенні аргументу x дорівнює

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Ця швидкість називається *похідною, узятою від змінної y по змінній x;* іншими словами, *похідна — це границя відношення приросту функції до приросту аргументу, обчислена в процесі, коли приріст аргументу прямує до нуля.* Так як при різних значеннях x зазначена швидкість, узагалі говорячи, різна, то похідна являє собою нову функцію *x,* що прийнято позначати штрихом: $y'=f'(x)$.

Таким чином, у прикладах п.1 швидкість руху — це похідна від пройденого шляху за часом, $v=s'_t$ (нижній індекс указує на змінну, по якій береться похідна) і т.д.

Підрахуємо, наприклад, похідну від функції $y=ax^2$. Додаючи аргументові приріст Δx, одержимо нове значення аргументу $x+\Delta x$ і нове значення функції $y+\Delta y=a\ (x+\Delta x)^2$, так як у виразі функції треба замість *x* підставити $x+\Delta x$. Таким чином,

$$\Delta y=a\ (x+\Delta x)^2—ax^2=2ax\Delta x+a(\Delta x)^2.$$

Звідси

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2ax\Delta x+a(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2ax+a\ \Delta x)=2ax;$$

відзначимо, що в останньому граничному переході змінювалося $\Delta x\to 0$, а *x* вважався зафіксованим. Отриманий результат можна записати так: $(ax^2)'=2ax$. Операція обчислення похідної від функції називається *диференціюванням* цієї функції.

Приклад 1. Дано функцію $y=x^2$; знайти її похідну y':

1) у довільній точці *x*,

2) при $x=3$.

Розв'язання. 1) При значенні аргументу, рівному *x,* маємо $y=x^2$. При значенні аргументу, рівному $x+\Delta x$, маємо $y+\Delta y=(x+\Delta x)^2$. Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Складаємо відношення: $\Delta y/\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$$

Переходячи до границі, знайдемо похідну від даної функції

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=2x+\Delta x=2x.$$

Отже, похідна від функції $y=x^2$ у довільній точці дорівнює $y'=2x$

2) При $x=3$ одержимо $y'|_{x=3}=2\cdot 3=6$.

3. Геометричний зміст похідної. Ми підійшли до поняття похідної, розглядаючи швидкість тіла, що рухається (точки), тобто виходячи з

механічних представлень. Тепер ми дамо не менш важливе геометричне тлумачення похідної.

Розглянемо графік функції *f(x)* (рис. 5.3). Видно, що $\Delta y/\Delta x=PN/MP=\mathrm{tg}\ \beta$, тобто це відношення дорівнює кутовому коефіцієнтові січної *mm.* Якщо $\Delta x\to 0$, то січна, повертаючись навколо точки *M,* у границі переходить у дотичну *ll*, так як *дотична є граничним положенням січної, коли точки перетинання зливаються.* (Ця наочна властивість, якою ми вже користувалися, насправді є просто визначенням дотичної.). Таким чином,

$$y'_0=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim \mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\alpha\ (y'_0=f'(x_0)),\quad (5.4)$$

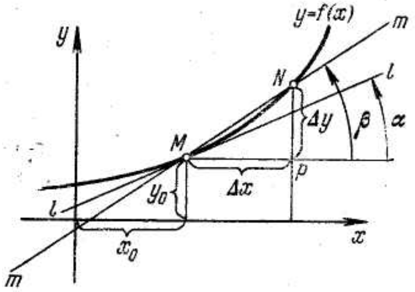


Рис. 5.3.

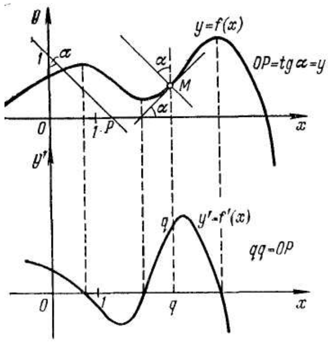


Рис. 5.4.

тобто *геометричний зміст похідної полягає в тому, що вона дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної.* Запишемо рівняння дотичної *ll:*

$$y-y_0=y'(x-x_0)\qquad (5.5)$$

де x_0, y_0 — координати точки дотику, а *x, y* - текучі координати точки дотичної прямої. Подібним чином рівняння *нормалі* до кривої, тобто перпендикуляра до дотичної в точці дотику, має вигляд

$$y-y_0=[-(1/y'_0)](x-x_0)$$

Уміння знаходити дотичну дає можливість знаходити *кут між лініями в точці їхнього взаємного перетинання*. Цей кут вимірюється кутом між дотичними до даних ліній у цій точці. Відзначимо, що цей кут може вийти нульовим, *якщо лінії дотикаються одна до одної,* тобто якщо зазначені дотичні збігаються.

Геометричний зміст похідної дає можливість, якщо дано графік функції *y=f(x),* простежити за нахилом дотичної до нього і відразу побудувати орієнтовний графік похідної (рис. 5.4). Для більш точного «*графічного обчислення похідної*» треба проводити дотичні до заданого графіка і вимірювати їхні кутові коефіцієнти стосовно осі *y*. На рис. 5.4 показано одну з таких побудов.

При формулюванні геометричного змісту (5.4) похідної ми користувалися тим, що змінні *x* і *y* — безрозмірні, а одиниці масштабу по обох осях однакові. На практиці це не завжди так; у загальному випадку випливає, що $y'_0=(l_x/l_y)tg\alpha$, однак і тоді похідна дорівнює кутовому коефіцієнтові дотичної. Відзначимо, що якщо похідна *y'* при деякому значенні *x* обертається в нескінченність (при $x=x_1$ на рис. 5.5), то у відповідній точці графіка дотична має кутовий коефіцієнт, рівний нескінченності, тобто паралельна осі *y;* якщо похідна робить стрибок, то і дотична повертається стрибком, тобто графік має злам (при $x=x_2$); якщо ж функція іде і нескінченність, то і похідна іде в нескінченність (при $x=x_3$).

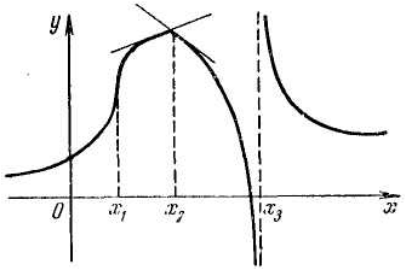


Рис. 5.5.

5.2. Диференційовність функцій

Означення. Якщо функція *y=f(x)* має похідну в точці $x=x_0$, тобто якщо існує

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то ми кажемо, що при даному значені $x=x_0$ *функція диференційовна.*

Якщо функція *диференційовна* в кожній точці деякого відрізку [*a,b*] або інтервалі (*a,b*), то кажуть, що вона *диференційовна на відрізку* [*a, b*] або, відповідно, *в інтервалі (a,b).*

Теорема. *Якщо функція y=f(x) диференційовна в деякій точці* $x=x_0$*, то вона в цій точці безперервна.*

Дійсно, якщо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta y}=f'(x_0),$$

то $\Delta y/\Delta x=f'(x_0)+\gamma$, де γ є величина, що прямує до нуля при $\Delta x\to 0$. Але тоді

$$\Delta y= f'(x_0)\,\Delta x + \gamma\,\Delta x;$$

звідси випливає, що $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$, а це значить, що функція *f(x)* безперервна в точці x_0. Ця швидкість називається *похідною, узятою від змінної y по змінній x.*

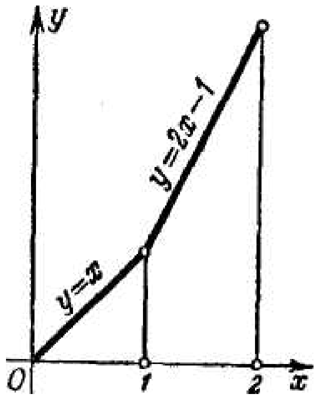


Рис. 5.6.

Таким чином, у точках розриву функція не може мати похідної. Зворотний висновок невірний, тобто з того, що в якій-небудь точці $x=x_0$ функція *y=f(x)* безперервна, ще не випливає, що в цій точці вона *диференційовна*: функція *f(x)* може і не мати похідної у точці x_0. Для того щоб переконатися в цьому, розглянемо приклад.

Приклад. Функція *f*(*x*) визначена на відрізку [0,2] у такий спосіб (рис. 5.6)

$f(x)=x$ при $0\le x\le 1$

$f(x)=2x-1$ при $1<x\le 2$

Ця функція при $x=1$ не має похідної, хоча і безперервна в цій точці.

Дійсно, при $\Delta x>0$ маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2(1+\Delta x)-1]-[2\cdot 1-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2,$$

при $\Delta x<0$ одержуємо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[1+\Delta x]-1]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Таким чином, розглянута границя залежить від того, який знак має Δx, а це значить, що в точці $x=1$ функція не має похідної. Геометрично цьому відповідає той факт, що в точці $x=1$ дана «крива» не має визначеної дотичної.

Безперервність же функції в точці $x=1$ випливає з того, що

$$\Delta y=\Delta x \quad \text{при } \Delta x<0$$

$$\Delta y=2\Delta x \quad \text{при } \Delta x>0$$

і отже, в обох випадках $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

5.3. Основні властивості похідної

1. *Похідна сталої дорівнює нулеві,* тому що швидкість у положенні спокою дорівнює нулеві. Формальне доведення: якщо

$$y=C=\text{const, то } \Delta y=C-C=0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\ \ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim 0=0.$$

2. *Похідна суми дорівнює сумі похідних.* Дійсно якщо

$y(x)=u(x)+v(x)$, то $y(x+\Delta x)=u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)$, і

$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-$

$-[u(x)+v(x)]=[u(x+\Delta u)+v(x+\Delta v)]-)=[u(x)+v(x)]=\Delta u+\Delta v,$

тобто *приріст суми дорівнює сумі приростів:* $\Delta(u+v)=\Delta u+\Delta v$.

Звідси

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'$$

(ми скористалися тим, що границя суми дорівнює сумі границь), що і потрібно. Інакше цю властивість можна записати так: $(u+v)'=u'+v'$.

Ми розглянули суму двох доданків. Ясно, що те ж буде при будь-якому числі доданків. Аналогічним чином *приріст різниці дорівнює різниці приростів, а похідна різниці дорівнює різниці похідних.*

Приклад.

$(x^3 — 3x^2+x+5)'=(x^3)'—(3x^2)'+(x)'+(5)'=3x^2—6x+1+0=3x^2—6x+1.$

3. *Сталий множник можна винести за знак похідної,* тобто

$(Cu)'=Cu'$ (де $C=$const). Дійсно, якщо $y=Cu$, то

$$\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)=Cu(x+\Delta x)Cu(x)=C[u(x+\Delta x)-u(x)]=C\Delta u;$$

іншими словами, *якщо функцію помножити на константу, то приріст збільшиться на ту ж константу:* $\Delta(Cu)=C\Delta u$.

Звідси $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{C\Delta u}{\Delta x}=\text{C}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=Cu'.$

4. Формула для похідної добутку

Нехай $y=uv$. Тоді $\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv=(\Delta u)v+u\Delta v+\Delta u\,\Delta v,$

Звідки

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\frac{(\Delta u)v}{\Delta x}+\lim\frac{u\Delta v}{\Delta x}+\lim\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}=$$

$$=\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}v+\lim u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim\frac{\Delta u}{\Delta x}\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x=u'v+uv'+u'v'\cdot 0.$$

Отже

$$(uv)'=u'v+uv'\ .\ (5.6)$$

Наприклад,

$[(3x^2+5x)(4x^2-6)]'=(3x^2+5x)'(4x^2-6)+(3x^2+5x)(4x^2-6)'=$

$=(6x+5)(4x^2-6)+(3x^2+5x)8x=48x^3+60x^2-36x-30.$

З формули (5.6) легко вивести формулу для похідної від добутку декількох функцій.

Наприклад,

$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvu'.$

Аналогічний вигляд має формула для добутку будь-якого числа множників. Відзначимо, що властивість 3 легко вивести з формули (5.6), поклавши $v=C$.

5. *Формула для похідної частки.* Нехай $y=u/v$. Тоді

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}=\frac{\Delta uv-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Звідси, підставляючи в знаменнику Δv у вигляді $(\Delta y/\Delta x)\Delta x$, одержимо

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left(v+\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\right)}=\frac{u'v-uv'}{v(v+v'\cdot 0)}.$$

Отже,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad (5.7)$$

Наприклад

$$\left(\frac{5x^2}{3x^2+4}\right)' = \frac{(5x^2)'(3x^2+4)-(5x^2)(3x^2+4)'}{(3x^2+4)^2} = \frac{10x(3x^2+4)-5x^2\cdot 6x}{(3x^2+4)^2} = \frac{40x}{(3x^2+4)^2}.$$

6. *Похідна складеної функції.* Нехай $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, тобто y є складеною функцією x. Якщо x одержить приріст Δx, то проміжна змінна u одержить приріст Δu, а тому y також одержить деякий приріст Δy. При цьому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x} \quad (5.8)$$

Нехай тепер $\Delta x \to 0$. Тоді $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'_x$, а тому$\Delta u = \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta x \to u'_x \cdot 0 = 0$

і, виходить, $\frac{\Delta y}{\Delta u} \to y'_u$.

Переходячи у формулі (5.6) до границі, одержимо

$$y'_x = y'_u\, u'_x \text{ .(5.9)}$$

Цю формулу можна записати так

$$[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x). \ (5.10)$$

Аналогічно обчислюється похідна у випадку залежностей з великим числом проміжних степенів. Так, якщо $y=y(u)$, $u=u(v)$, $v=v(x)$, то $y'x=y'_u u'_v v'_x$.

Нехай, наприклад, $y=(x^2—5x+3)^3$. Тоді можна позначити $y=u^3$, де $u=x^2—5x+3$, і по формулі (5.9) маємо

$$y'_x=y'_u\, u'_x=(u^3)'_u(x^2 — 5x+3)'_x=3u^2(2x\text{-}5)=3(x^2\text{-}5x+3)^2(2x\text{-}5);$$

це, звичайно, простіше ніж розкривати дужки. На практиці не пишуть так докладно, а оформлюють обчислення так

$$[(x^2 — 5x+ 3)^3]'=3(x^2 — 5x+ 3)^2(x^2— 5x+ 3)'= 3(x^2\text{-}5x+3)^2(2x\text{-}5);$$

тобто власне кажучи, користуються формулою (5.10). При деякій навичці відповідь можна писати безпосередньо, без проміжних перетворень. Для цього формули для похідних іноді запам'ятовують у вигляді $(u^2)'=2uu'$, $(u^3)'=3u^2u'$ (похідна береться по x) і т.п.

7. *Похідна оберненої функції.* Нехай рівність $y=y(x)$ визначає обернену залежність $x=x(y)$, для якої ми можемо знайти похідну x'_y. Тоді легко знайти похідну і від вихідної функції. Дійсно

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x/\Delta y},$$

звідки, при $\Delta y \to 0$ і $\Delta x \to 0$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \quad (5.11)$$

Нехай, наприклад, $y=\sqrt[3]{x}$, звідки $x=y^2$. Тоді

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(y^3)'_y}\;\frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

8. *Похідна неявної функції.* Якщо задано неявну функцію у формі $F(x,y)=0$, то для обчисленні похідної y'_x потрібно просто прирівняти похідні від лівої і правої частин заданого співвідношення, маючи при цьому на увазі, що y є функція від x, яка обертає це співвідношення в тотожність. Узагалі *безпосередньо прирівнювати похідні від обох частин рівності можна тільки в тому випадку, коли ця рівність є* ***тотожністю (а не рівнянням).***

Нехай, наприклад, задано співвідношення

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5.12)$$

Тоді

$$\left(\frac{x^2}{a^2}\right)'_x + \left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x = (1)'_x,$$

тобто

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0. \quad (5.13)$$

при обчисленні похідної від другого доданка користуємося властивістю 6

$$\left(\frac{y^2}{b^2}\right)'_x=\frac{1}{b^2}(y^2)'_x\cdot y'_x=\frac{1}{b^2}2yy'.$$

З (5.13) одержуємо

$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}.\quad (5.14)$$

9. Похідна від функції $y=x^n$ при n цілому і додатному.

Для обчислення похідної від даної функції *y=f(x)*, виходячи з загального визначенні похідної, необхідно зробити наступні дії:

1) дати аргументові *x* приріст *Δx*, обчислити прирощене значення функції:

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x);$$

2) знайти відповідний приріст функції:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) скласти відношення приросту функції до приросту аргументу

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

4) знайти границю даного відношення при *Δx*→0

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Ми застосуємо тут і далі цей загальний спосіб для обчислення похідних від деяких елементарних функцій.

Теорема. *Похідна функції $y=x^n$, де n — ціле додатне число, дорівнює nx^{n-1}, тобто якщо $y=x^n$, то*

$$y'=nx^{n-1}.\quad (I)$$

Доведення. Маємо функцію $y=x^n$.

1) Якщо *x* одержує приріст Δ*x*, то $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$.

2) Користуючись формулою бінома Ньютона, знаходимо

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n$$

або

$$\Delta y=nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n.$$

3) Знаходимо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}$$

4) Знайдемо границю цього відношення

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+(\Delta x)^{n-1}]=nx^{n-1},$$

отже, $y'=nx^{n-1}$, що і потрібно було довести.

Приклад 1. $y=x^5$, $y'=5x^{5-1}=5x^4$.

Приклад 2. $y=x$, $y'=1x^{1-1}$, $y'=1$. Останній результат має просте геометричне тлумачення: дотична до прямої *y=x* при будь-якому значенні *x* збігається з цією прямою і, отже, утворить з додатним напрямком осі *Ox* кут, тангенс якого дорівнює 1.

Відзначимо, що формула (I) вірна й у випадку *n* дробового і від'ємного.

5.4. Похідні основних елементарних функцій

1. *Похідна синуса.* Нехай *y=sin x.* Якщо аргумент зміниться і стане рівним *x+Δx,* то функція стане рівною sin (*x+Δx*). Звідси

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2});$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})]}{\Delta x}==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=1\cdot\cos x$$

Отже

$$(\sin x)'=\cos x.\quad (5.15)$$

2. Аналогічно доводиться, що

$$(\cos x)'=-\sin x.\quad (5.16)$$

3. Похідну тангенса обчислюємо по формулі (5.7)

(tgx)'=

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

4. Аналогічно перевіряється, що

$$(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. *Похідна арксинуса.* Нехай $y = arcsin\ x$. Тоді $x = sin\ y$, і по формулі (5.11)

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

перед радикалом узято +, тому що значення *arcsinx*, як відомо, береться в 1 і —1-й четвертях, де $cos\ y > 0$. Отже

$$(arcsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

6. Аналогічно перевіряється, що

$$(arccos\ x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (5.17)$$

при цьому використовується те, що $0 \le arccos\ x \le \pi$. Подібність двох останніх результатів пояснюється формулою

$$arcsin\ x + arccos\ x \equiv \pi/2 \quad (5.18)$$

яку одержуємо в такий спосіб. Позначимо $sin\ \alpha = x$, тоді

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = x;$$

з цих формул одержуємо, що

$$\alpha = arcsin\ x, \quad \frac{\pi}{2} - \alpha = arccos\ x.$$

Складаючи результати, приходимо до (5.18)

7. *Похідна арктангенса.* Нехай $y = arctgx$. Тоді $x = tgy$ і, застосовуючи формули для похідної оберненої функції і для похідної тангенса, одержимо

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

отже

$$(arctg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

8. *Похідна логарифмічної функції.* Нехай $y = ln\ x$. Тоді у силу формули (4.22), у якій треба покласти $h = \Delta x/x$,

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta x}{x}x} = \frac{1}{x}.$$

Отже $$(ln\ x)' = \frac{1}{x}.$$

Застосовуючи формулу для визначення $log_a x$ і з огляду на те, що $ln\ a = \text{const}$, одержимо

$$(log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(ln\ x)' = \frac{1}{x\ln a}.$$

9. *Похідна показникової функції.* Якщо $y = a^x$, то

$$x = log_a y \text{ і } y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x \ln a.$$

Отже $(a^x)' = a^x \ln a$; зокрема $(e^x)' = e^x$.

10. *Похідна степеневої функції.* Відповідно до формули для похідної складеної функції

$$(x^n)' = [(e^{\ln x})^n]' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x} n\frac{1}{x} = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}$$

Отже $$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Ця формула справедлива для любого n, цілого і нецілого, наприклад,

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

і т.п.

11) *Похідна гіперболічних функцій*. Маємо

$$(sh\ x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}(-x)'}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx;$$

аналогічно $(ch\ x)'= sh\ x;$

$$(th\ x)'=\left(\frac{shx}{chx}\right)'=\frac{(shx)'chx-shx(chx)'}{ch^2x}=\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}=\frac{1}{ch^2x};$$

$(arshx)'=$

$$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=$$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

В цих формулах виявляється аналогія з тригонометричними функціями.

12. *Похідна функції, заданої параметрично*

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\}\ t_n\le t\le T \quad (5.19)$$

Припустимо, що ці функції мають похідні і що функція $x=\varphi(t)$ має обернену $t=\Phi(x)$, що також має похідну. Тоді визначену параметричними рівняннями функцію $y=f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y=\psi(t)$, $t=\Phi(x)$, t - *проміжний* аргумент. За правилом диференціювання складеної функції одержимо:

$$y'_x=y'_t\, t'_x=\psi'_t(t)\Phi'_x(x) \quad (5.20)$$

На підставі теореми про диференціювання оберненої функції випливає:

$$\Phi'_x(x)=\frac{1}{\psi'_t(t)}.$$

Підставляючи останній вираз в рівність (5.20), одержуємо

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.\ \text{або}\ y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Виведена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від функції, заданої параметрично, не знаходячи вирази безпосередньої залежності y від x.

Приклад 1. Функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t\\ y&=a\sin t\end{aligned}\right\}\quad (0\le t\le\pi).$$

Знайти похідну: 1) при будь-якому значенні t; 2) при $t=\pi/4$.

Розв'язання.

1) $y'_x=\dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'}=\dfrac{a\cos t}{-a\sin t}=-ctgt;$

2) $(y'_x)_{t=\pi/4}=-ctg(\pi/4)=-1.$

13. Виведені формули *(табличні похідні)* потрібно знати напам'ять, тому що вони будуть застосовуватися систематично. З їхньою допомогою, користуючись правилами п.4, можна вивести похідну будь-якої елементарної функції.

Наприклад

$$\left(\sqrt[3]{x}\,2^{tg5x}\right)'=\left(\sqrt[3]{x}\right)'2^{tg5x}+\sqrt[3]{x}\left(2^{tg5x}\right)';$$

але

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$

а по формулі для похідної складеної функції

$$(2^{tg5x})'=2^{tg\,5x}ln2(tg\ 5x)'=2^{tg\,5x}\ ln2\frac{1}{\cos^2 5x}(5x)'=2^{tg5x}\ ln2\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5.$$

Звідси після винесення загального множника за дужки одержимо

$$\left(\sqrt[3]{x}\,2^{tg5x}\right)'=\frac{2^{\mathrm{tg}\,5\mathrm{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(1+15\ln 2\frac{x}{\cos^2 5x}\right).$$

Після деякої навички ці викладення здійснюються значно швидше, без проміжних перетворень. У деяких випадках перед обчисленням похідної корисне *попереднє логарифмування.*

Нехай, наприклад треба знайти похідну

$$(x^{\sin x})'.$$

Тоді пишемо

$$y=x^{\sin x}; \ln y=\sin x \ln x; (\ln y)'_x=(\sin x \ln x)';$$

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x};$$

у лівій частині ми застосували формулу для похідної складеної функції. Звідси остаточно

$$y'=(\mathrm{x}^{\sin x})'=\mathrm{x}^{\sin x}(\cos\ln x+\sin x\frac{1}{x}).$$

Цей метод іноді застосовується також, якщо потрібно знайти похідну добутку декількох множників: після логарифмування виходить сума, від якої знайти похідну буває легше.

Таблиця основних формул диференціювання

Об'єднаємо тепер в одну таблицю всі основні формули і правила диференціювання, виведені в попередніх розділах мікромодуля .

$$y=\text{const},\ y'=0.$$

Степенева функція

$$y=x^{\alpha},\ y'=\alpha x^{\alpha-1};$$

зокрема,

$$y=\sqrt{x},\ y'=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y=\frac{1}{x},\quad y'=-\frac{1}{x^2}.$$

Тригонометричні функції

$$y=\sin x,\ y'=\cos x;$$

$$y=\cos x,\ y'=-\sin x;$$

$$y=\operatorname{tg} x,\quad y'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y=\operatorname{ctg} x,\ y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Обернені тригонометричні функції:

$$y=\arcsin x,\quad y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y=\arccos x,\ y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y=\operatorname{arctg} x,\quad y'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$y=\operatorname{arcctg} x,\ y'=-\frac{1}{1+x^2}$$

Показникова функція: $y=a^x,\ y'=a^x\ln a;$

зокрема

$$y=e^x,\ y'=e^x;$$

Логарифмічна функція:

$$y=\log_a x,\ y'=\frac{1}{x}\log_a e;$$

зокрема,

$$y=\ln x,\ y'=\frac{1}{x}.$$

Загальні правила диференціювання:

$$y=Cu(x),\ \ y'=Cu'(x)\ (C=const),$$

$$y=u+v-w,\ y'=u'+v'-w',$$

$$y=uv,\ y'=u'v+uv',$$

$$y=\frac{u}{v},\qquad y'=\frac{u'v-uv'}{v^2},$$

$$y=\left.\begin{matrix}f(u)\\ \varphi(x)\end{matrix}\right\},\quad y'_x=f'_u(u)\varphi'_x(x),$$

$$y=u^v,\ \ y'=vu^{v-1}u'+u^v v'\ln u.$$

Якщо $y=f(x)$, $x=\varphi(y)$, де f і φ взаємно обернені функції, то

$$f'(x)\frac{1}{\varphi'(y)},\ \text{де } y=f(x).$$

Мікромодуль 11

Приклади розв’язання типових задач.

1. Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції $y=x^2$.

Розв 'язання. Згідно з означенням похідної маємо

$$(x^2)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-(x)^2}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

2. Знайдіть за означенням похідну функції $y=\cos x$.

Розв'язання. Запишемо приріст даної функції $\Delta y=cos(x+\Delta x)-cox\ x$.

Використовуючи першу важливу границю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1$$

а також формулу розкладу різниці косинусів у добуток

$$cox\ x- cox\ y= -\ 2\frac{\sin x-y}{2}\,\frac{\sin x+y}{2},\quad \text{дістанемо}$$

$$(cosx)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\frac{\sin\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}sin(x+\frac{\Delta x}{2})=-1\cdot sin\ x=-sin\ x.$$

3. Покажіть, що похідна функції $y={}^3\sqrt{x}$ в точці $x=0$ не існує.

Розв'язання. Для функції $y={}^3\sqrt{x}$, визначеної на всій числовій прямій, для $x=0$ маємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}=\infty.$$

Отже, границя при $\Delta x\to 0$ нескінченно зростає. Тому похідна функції $y={}^3\sqrt{x}$ в точці $x=0$ не існує. Так само можна показати, що

неперервна на всій числовій прямій функція $y=|x|$ також не має похідної в точці $x=0$.

Висновок. Якщо функція неперервна в точці *x,* то не обов'язково вона має похідну в цій точці. Проте, якщо функція диференційовна (існує похідна) в точці *x,* то вона і неперервна в цій точці.

Знайти похідні функцій:

4. $y=4x^5-3x^4+1.$

Розв'язання.

$$y'=(4x^5-3x^4+1)'=(4x^5)'-(3x^4)'+(1)'=(4x^5)'-(3x^4)'=4\cdot 5x^4-3\cdot 4x^3=20x^4-12x^3.$$

5. $y=\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$y'=\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'=(3x^{-2}-x^{-1/2})'=3(x^{-2})'-(x^{-1/2})'=3\cdot(-2)x^{-2-1}-(1/2)x^{-1/2-1}=$$

$$=-6x^{-3}+(1/2)x^{-3/2}=-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

6. $y=\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)$

Розв'язання.

$$y'=\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)'=\frac{(x^2)'\sin x-x^2(\sin x)'}{(\sin x)^2}=\frac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}.$$

7. $y=arcsin\ x\cdot tg\ x.$

Розв'язання.

$$y'=(arcsinx\cdot tgx)'=(arcsinx)'\cdot tgx+arcsinx\cdot(tgx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot tgx+arcsin\ x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

8. Знайдіть $y'(0)$, якщо $y=e^x\cdot x$.

Розв 'язання.

$$y'=(e^x)'x+e^x\cdot x'=e^x\cdot x+e^x;\ y'(0)=e^0\cdot 0\ e^0=1$$

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знайдіть похідні функцій:

9. $y=(x^2+1)^3$

Розв 'язання. Позначимо $u=x^2+1$, тоді $y=(u(x))^3$. За правилом диференціювання складеної функції маємо

$$y'=(u^3)'=3u^3\cdot u'=3(x^2+1)^2\cdot(x^2+1)'=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2\cdot$$

10.$y=\sin^3 x$.

Розв 'язання. Позначимо $u=\sin x$, тоді $y=(u(x))^3$. Далі маємо

$$y'=(u^3)'=3u^3\cdot u'=3\sin^2 x(\sin x)'=3\sin^2 x\cdot\cos x.$$

11.$y=\sqrt{x^4+x^3+1.}$

Розв'язання. У даному випадку $y=\sqrt{u}$, де $u=x^4+x^2+1$. Тоді

$$y'=(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{(x^4+x^3+1)'}{2\sqrt{x^4+x^3+1}}=\frac{4x^3+3x^2}{2\sqrt{x^4+x^3+1}}.$$

12. $y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $y\cos^{-2} x$. Тоді

$$u=\cos x,\ y=u^{-2},\ y'=(u^{-2})'=-2u^{-3}\cdot u'=-2\cos^{-3} x\cdot(\cos x)'=2\cos^{-3} x\cdot\sin x.$$

13.$y=5^{\sin x}$.

Розв 'язання. Маємо складену функцію $y=5^u$, де $u=\sin x$. Тоді

$$y'=(5^u)'=5^u\ln 5\cdot u'=5^{\sin x}\ln 5(\sin x)'=5^{\sin x}\ln 5\cdot\cos x.$$

14. $y=\operatorname{tg} e^x$

Розв 'язання. Маємо складену функцію $y=\operatorname{tg} u$, де $u=e^x$. Тоді

$$y'=(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}u'=\frac{1}{\cos^2 e^x}\,(e^x)'=\frac{e^x}{\cos^2 e^x}.$$

15. $y=\arcsin\sqrt{x}\bullet\sqrt{\arcsin x}$

Розв'язання. Скориставшись правилом для знаходження похідної від добутку двох функцій, дістанемо

$$y'=(\arcsin\sqrt{x})'\bullet\sqrt{\arcsin x}+\arcsin\sqrt{x}\bullet(\sqrt{\arcsin x})'=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\bullet\sqrt{\arcsin x}+\arcsin\sqrt{x}\bullet\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}}(\arcsin\sqrt{x})'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\bullet\sqrt{\arcsin x}+\arcsin\sqrt{x}\bullet\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

16.$y=\ln(x^2+1)$

Розв 'язання. Маємо складену функцію $y=\ln u$, де $u=x^2+1$. Тоді

$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{x^2+1}(x^2+1)'=\frac{2x}{x^2+1}.$$

17.$y=\operatorname{arctg}(\log_2(x+\cos x))$.

Розв 'язання. Маємо складену функцію $y=\operatorname{arctg} u$, де проміжна функція

$u=\log_2(x+\cos x)$ також є складеною, тобто $u=\log_2 w$, $w=x+\cos x$.

В цьому випадку похідну знаходимо так:

$$y'=(\operatorname{arctg} u)'=\frac{1}{1+u^2}u'=\frac{1}{1+u^2}(\log_2 w)'=\frac{1}{1+u^2}\frac{1}{w\ln 2}w'=$$

$$\frac{(x+\cos x)'}{(1+(\log_2(x+\cos x))^2(x+\cos x)\ln 2}=\frac{1-\sin x}{(1+(\log_2(x+\cos x))^2(x+\cos x)\ln 2}$$

18.$y=\operatorname{arctg}(x^2-2)$.

Розв 'язання.

$$y'=2\operatorname{arctg}(x^3-2)\cdot(\operatorname{arctg}(x^3-2))'=2\operatorname{arctg}(x^3-2)\frac{-1}{1+(x^3-2)^2}(x^3-2)'=$$

$$=-\frac{6x^2\,2\operatorname{arctg}(x^3-2)}{1+(x^3-2)^2}.$$

19.Знайдіть похідну y_x', якщо $x=y^3+3y$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_y=3y^2+3;\ y_x'=\frac{1}{x'_y}=\frac{1}{3(y^2+1)}.$$

20. Знайдіть похіду x'_y,, якщо $y=x+e^x$.

Розв'язання. Похідна $y'=1+e^x>0$ при довільному x строго монотонна. Тому для функції $y(x)$ існує обернена функція $x=x(y)$, її похідна

$$x'_y=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{1+e^x}.$$

21. Доведіть, що $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доведення. Функція $y=\arcsin x$, де $x[-1;1]$, є оберненою до функції $x=\sin y$, $y[-\pi/2;\pi/2]$. Оскільки на інтервалі $(-\pi/2,\pi/2)$ функція

$x=\sin y$ зростає і похідна $x'_y=\cos y>0$, тобто всі умови теореми виконуються, то дістанемо

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

22. Знайдіть похідну y', якщо $x^2+y^2=1$.

Розв'язання Маємо $2x+2yy'=0$, звідси дістаємо $y'=-\frac{x}{y}$.

При диференціюванні враховуємо, що y^2- складена функція змінної x.

23. Знайдіъ похідну y', якщо

$$x^2+2xy-y^2=2x.$$

Розв'язання. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння, не забуваючи, що y є функцією від x

$$2x+2(y+xy')-2yy'=2 \text{ або } x+y+xy'-yy'=1$$

Звідси $y'(x-y)=1-x-y$, тобто

$$y'=\frac{1-x-y}{x-y}.$$

24. Знайдіъ y', якщо

$$arctg\frac{y}{x}=ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Розв'язання. Послідовно маємо

$$\frac{d}{dx}(arctg\frac{y}{x})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\,lnx^2+y^2)),$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{2(x^2+y^2)}(x^2+y^2)',$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{y'x\ \ -y}{x^2}{}'=\frac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)},\quad y'x-y=x+yy',\quad y'(x-y)=x+y.$$

Звідси $y'=\frac{x+y}{x-y}$.

---

25. Знайдіть y'_x, якщо

$$\begin{cases} y=a\sin t \\ x=b\cos t \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $y'(t)=a\cos t$, $x'(t)=-b\sin t$,

то $$y'_x=\frac{a\cos t}{-b\sin t}=-\frac{a}{b}ctgt.$$

26. Знайдіть y'_x , якщо

$$\begin{cases} y=t^2-2t^3 \\ x=2t+t^2 \end{cases}$$

Розв 'язання. Знаходимо похідні

$$y'(t)=2t-6t^2,\ x'(t)=2+2t,$$

тоді

$$y'_x=\frac{a\cos t}{-b\sin t}=-\frac{a}{b}ctgt.\quad \frac{y'}{y}=-\sin x\ \ln x+\cos x$$

27. Знайдіъ похідну функції $y=x^{\cos x}$

Розв 'язання. Перший спосіб

Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо:

$\ln y=\ln x^{\cos x}$; $\ln y=\cos x\ \ln x$; $(\ln y)'=(\cos x\ \ln x)'$;

$\frac{y'}{y}=-\sin x\ \ln x+\cos x\frac{1}{x}$; $y'=y(-\sin x\ \ln x+\cos x\frac{1}{x})$,

тобто $$y'=x^{\cos x}(-\sin x\ \ln x+\cos x\frac{1}{x}).$$

Другий спосіб. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю $a^{\log_a b}=b$, запишемо дану функцію у вигляді

$$y=x^{\cos x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\cos x}=e^{\cos x\ln x}.$$

Тоді

$$y'=\left(e^{\cos x\ln x}\right)'=e^{\cos x\ln x}(\cos x\ln x)'=e^{\cos x\ln x}\,(-sinxlnx+cosx\frac{1}{x})=$$

$$=x^{cosx}\,(-sin\ x\ ln\ x+\ cos\ x\frac{1}{x}).$$

Мікромодуль 11.
Індивідуальні тестові завдання

1.1.Знайдіть похідні першого порядку функції *y=f(x)*.

11.1.1. а) $y=cos^2x+sin(tg\,x)$; б) $y=ln^2arcsin\sqrt{x}$;
в) $y=2^{\sin x+\cos^2 x}$; г) $y=\sqrt[5]{(2x+1)arctg\sqrt{x}}$

11.1.2. а) $y=\sqrt[3]{ctgx+tgx^2}$; б) $y=log_3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
в) $y=10^{\sqrt{\ln x}}\bullet 3^{tg\,x}$; г) $y=arctg(ln^2x)-1$

11.1.3. а) $y=sin\sqrt{x}-2sin^3x$; б) $y=ln\ arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$
в) $y=e^{arctg\,x}cos2^x$; г) $y=\sqrt[4]{\log_3\sin\left(x^3+1\right)}$

11.1.4. а) $y=x^2/(1+cos^2 2x)$; б) $y=\sqrt[3]{\ln\cos\frac{x-2}{5}}$
в) $y=ln\ sin(3^xx^2)$; г) $y=3^{\sqrt{x}}cos^3(tgx)$

11.1.5. а) $y=cos^5(sin3x)$; б) $y=(1+cos^2x)^5\ sin4x$
в) $y=ln\ (x+arccos\sqrt{1-x^2}\ )$; г) $y=ln^5\ arctg\frac{1}{x}$

11.1.6. а) $y=e^{x^2}\bullet\sqrt{x}\,/sin\ x^2$; б) $y=\frac{arctg\ln x}{\ln arctgx}$

в) $y=10^{2-\lg^4 x}$; г) $y=\sqrt[6]{e^{-x}+1}\cdot\sin\left(4x+1\right)$

11.1.7. а) $y=tg^2x-2ctg\ x^2$; б) $y=(2+ln^2\ sin\ x)^3$
в) $y=2^{5^x}\bullet 4^{cos\,x}$; г) $y=log^3{}_2\ arcsin(x^2)ln\ sin\ 2x$

11.1.8. а) $y=x\ cos^2\ x-ctg\ 4x$; б) $y=arcsin^3$
в) $y=arctg^5(e^{2x}x)$; г) $y=\frac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x^3+2}$

11.1.9. а) $y=x^3/(1+sin^4\ x)$; б) $y=log^2\ arctg(1-x^2)$
в) $y=3^{\ln^2\sin 5x}+\sqrt{2^x}$; г) $y=\sqrt{1+sh\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

11.1.10 а) $y=sin\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; б) $y=lg\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{3x}$
в) $y=e^{-x^2}\ sin(3x-2)$; г) $y=cos\ (sin^3(x\ tg\ x))$

11.1.11. а) $y=\sqrt{2+\sin\frac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=\frac{1-arctg\sqrt{x}}{\ln^2 x}$
в) $y=2^{\sqrt[3]{\ln x}}\bullet x^3$; г) $y=tg^4(ch\ x)-ch(tg\ x^2)$

11.1.12. а) $y=\frac{5ctg^2\left(5+1/x\right)}{x}$; б) $y=ln\ arcos(2x-5)$
в) $y=tg(2^{cos\,x})\ ln\ (x3^x)$; г) $y=ch^2(x^2-1)-ch\sqrt{x}$

11.1.13. а) $y=\frac{\sec^2\left(1+x^2\right)}{\cos x}-1$; б) $y=log^4{}_2\ arcsin(3x^3)$;
в) $y=5^{\sqrt{1-tg^2x}}ctg\ 3^x$; г) $y=\sqrt[4]{2^{-x}+1}\bullet cos\ 4\sqrt{x}$

11.1.14. а) $y= tg(cos(5ctg));$ б) $y=\sqrt[3]{\ln arctg\sqrt{x}}$

в) $y=3^{\sin x} \sin^3 x+3;$ г) $y=\frac{\log_2\left(x+1/x\right)}{2x^3}$

11.1.15. а) $y=cos(sin\sqrt{xtgx}\ );$ б) $y=ln^5 arctg\frac{x+1}{x-1}$

в) $y=6^{arctg\sqrt{x}}-2^{tg\, x}$; г) $y=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}}$

11.1.16. а) $y=tg^2\frac{1}{x^2}$ -5 ctg 3x; б) $y= log^4{}_3 \sin\sqrt{1+x^2}$

в) $y=x^3e^{-x^2/2}-\cos 2^x;$ г) $y= arctg^2(x\ ln\ x)$

11.1.17. а) $y=(tg\sqrt{3x}\,/sin\sqrt{x}$; б) $y= arc\ sin^4\ ln\ ln\ x$

в) $y=2^{arctg\, x} \cos^2 x;$ г) $y= ln(x+ ln (x+\sqrt{1-x^2}\ ))$

11.1.18. а) $y=\sqrt[4]{tg\left(x/4\right)+ctg4x}$; б) $y=arc\ cos^2\ ln\ sin\ x$

в) $y=tg(4^{\ln x}+3^{tg\, x});$ г) $y=\frac{2-arcctg\sqrt{x}}{\log^4{}_3 x}$

11.1.19. а) $y= cos^2 5x-8\ sin^3 4x;$ б) $y= ln\ ln\ cos\ ln\ tg\ x$

в) $y=2^{x^2}/x^2;$ г) $y=\sqrt[7]{\log^3{}_3 \sin\sqrt{1+x}}$

11.1.20. а) $y=\sqrt[5]{\sin^4 x-\cos\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{\sqrt{\ln(1+\ln^2 x)}}{\log_2 x}$

в) $y= 2^{\ln \arcsin\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{sh^2\left(1+x^2\right)}{chx}-2th2x$

11.2. Знайдіть похідну функції $\frac{dy}{dx}$, заданої неявно

11.2.1. $x^2y+y^2x=x^3y^3$ 11.2.2. $y=arctg\ x- arctg\ y$

11.2.3. $sin(xy)= x^2+y^2$ 11.2.4. $ycos\ x=sin(x-y)$
11.2.5. $3^x+3^y=3^{x+y}$ 11.2.6. $x^3+y^3-4axy=0$
11.2.7. $ln(x+y)+ x^2y=1$ 11.2.8. $x\ sin\ y= x^2+y^2$
11.2.9. $y^3-4y +1$ 11.2.10. $sin\ x- cos\ y=x-y$
11.2.11. $cos\ (xy) + sin\ (xy)=y$ 11.2.12. ctg 2y= ctg 2x
11.2.13. $x^3y+y^3+xy^2=1$ 11.2.14. $x^4+y^4=x^3y^3$
11.2.15. $y=x-arcsin\ y$ 11.2.16. $x^3y+y^3x=x-y^2$
11.2.17. $x^2y^2+2yx+x^3=y^3$ 11.2.18. $sin\ (x+y)=x-y$
11.2.19. $x^3+y^4x=x^3-2y$ 11.2.20. $x\ tg\ y- y\ tg\ x=yx$
11.2.21. $x^3y-y^3x=(x-y)^3$ 11.2.22. $arctg(x+y) =x-y^2$
11.2.23. $5^x-5^y=5^{x+y}$ 11.2.24. $y\ sin\ x+x\ \ sin\ y=y$
11.2.25. $3y\ ln\ y=x^2(y+5)$ 11.2.26. $y^3-5y+6ax=0$
11.2.27. $x^3y^2+2^{x-y}=y$ 11.2.28. $3^{x+y}+3^{x-y}= y^3$
11.2.29. $y=x+e^{1+xy}$ 11.2.30. $arcsin(x/ y)+yx=y$

11. 3. Знайдіть похідну функції $\frac{dy}{dx}$, заданої параметрично

11.3.1. $y= arccos\ t,\ x= arcsin\ t$ 11.3.2. $y= 1/cos^2\ t,\ x=ln\ tg\ t$
11.3.3. $y= 5sin^3\ t\ ,x= 2cos^3\ t$ 11.3.4. $y=1/sin^2\ t,\ x=ln\ ctg\ t$

11.3.5. $y= ln\sqrt{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\ ,x=arc\ tg\ t^2$ 11.3.6. $y=e^{-t^2}\ ,x= e^{-t}$

11.3.7. $y= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ ,x= (arcsin\ t)^2$ 11.3.8. $y= e^t\ sin\ t,\ x= e^t\ cos\ t$

11.3.9. $y=\frac{1}{\sin^2 t},\quad x=ln\ cos\ t$ 11.3.10. $y=\frac{2t^2}{1+t^3},\ x=\frac{3t}{1+t^3}$

11.3.11. $y= 4(1-\cos 2t),\ x=4(2t-sin\ 2t)$
11.3.12. $y=3(sin\ t-cos\ t),\ x=3(t\ sin\ t+cos\ t)$
11.3.13. $y= arcsin(t-1),\ x= \sqrt{2t-t^2}$
11.3.14. $y=t\sqrt{t^2-1}\ ,x=ln(t+\sqrt{t^2-1}\ )$
11.3.15. $y= \sqrt[3]{\ln tgt}\ ,\ x=\sqrt{arctgt}$ 11.3.16. $y=t-arctg\ t,\ x=ln\ ctg\ t$

11.3.17.$y=\frac{\cos t}{\sin^2 t}$, $x=(1+\cos t)^2$ 11.3.18.$y=\frac{tgt}{1-t^2}$, $x=\frac{ctg2t}{\sqrt{3}}$

11.3.19.$y=ln\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$,$x=\frac{1}{\ln^2 t}$.

11.3.20.$y=\frac{t}{1+t^2}$,$x=\frac{t^2}{1+t^2}$

11.3.21.$y=2\sin^2 t+\sin 2t$, $x=3\ tg\ 2t$. 11.3.22.$y=ln\ ctg\ e^x$, $x=tg(2e^{-t})$

11.3.23.$y=\arcsin\sqrt{1-t^2}$, $x=arctg(t^2-1)$

11.3.24.$y=\sqrt{1+\sqrt{t^2}-1}$,$x=\sqrt[3]{1-\ln t}$

11.3.25.$y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $x=\frac{1}{1+t^2}$

11.3.26.$y=t-arctg\frac{1}{t}$, $x=t^3-arctg\frac{1}{t^2}$

11.3.27.$y=(2+3\ln t)/t$, $x=6\cos^3 t$

11.3.28.$y=arctg\sqrt{1+t^2}$,$x=\arccos 1/t^2$

11.3.29.$y=tg^3\ 2t+ctg^3\ 2t$, $x=\cos 2t-\sin 2t$

11.3.30.$y=\arcsin\sqrt{1-t}$, $x=\arccos\sqrt{1-t^2}$

11. 4. Знайдіть похідну функції $\frac{dy}{dx}$, користуючись правилом логарифмічного диференціювання

11.4.1. $y=x^{\arcsin x}$ 11.4.2. $y=(lg\ x)^{x/2}$

11.4.3. $y=(x^3+1)^{\sin x}$ 11.4.4. $y=(\cos 2x)^{ln\ tgx/2}$

11.4.5. $y=(\sin\sqrt{x})^{1/x}$ 11.4.6. $y=x^{x^x}$

11.4.7. $y=(ctg\ 5x)^{5x-1}$ 11.4.8. $y=(x^5+1)^{ctg\ x}$

11.4.9. $y=x^{e^{-tgx}}$ 11.4.10. $y=(x^8+1)^{tg\ x}$

11.4.11. $y=\frac{(x-5)^2\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}{e^x(x+2)^5}$ 11.4.12. $y=\frac{3^x(2x-1)(x+1)^4}{\sqrt{x}(x-3)^6}$

11.4.13. $y=\frac{(x-1)^3\cdot\sqrt[4]{x^2+x}}{4^x(3x-2)^3}$. 11.4.14. $y=\frac{2^x(x-5)(x+1)^3}{\sqrt{x}(4x-3)^5}$

11.4.15. $y=(x^3-x)^{x^2+1}$ 11.4.16. $y=(2x-3)^{\cos x}$ 11.4.17. $y=x^{arctg\ x}$

11.4.18. $y=(x\sin x)^{x^2}$ 1.4.19. $y=(x\cos x)^{\ln x}$ 11.4.20. $y=x^{2^x}$

11.4.21.$y=(\mathrm{tg}\ x)^{ctg\ x}$ 11.4.22. $y=(\arcsin x)^{\sin x}$

11.4.23. $y=(\cos x)^{tgx}$ 11.4.24. $y=x^{4^x}$

11.4.25. $y=(4x-3)^{\arccos x}$ 11.4.26. $y=(ln(x+1))^{\ln^2 x}$

11.4.27. $y=(ctg\ 2x)^{ctg\ x}$ 11.4.28. $y=x^{\sin x}+(\sin x)^2$

11.4.29. $y=(5x+2)^{\sin x}$ 11.4.30. $y=x^{arctg\sqrt{x}}$

Мікромодуль 12

Диференціал

5.5. Визначення диференціала і зв'язок його з приростом

7. Фізичні приклади. Поняття диференціала, яке тісно зв'язане з поняттям похідної, є також одним з найважливіших у математиці. Ми його проілюструємо на тих же прикладах, що були розглянуті нами в п.1.

Нехай при прямолінійному русі точки за законом $s=f(t)$ вона мала в деякий момент t швидкість $v=s'_t=f'(t)$. Якщо тепер пройде додатковий час Δt, то точка пройде додатковий шлях Δs, що у випадку нерівномірності руху залежить від Δt складним чином, тому що швидкість руху увесь час міняється. Однак якщо минулий час Δt невеликий, то і швидкість не встигне істотно змінитися і тому рух у проміжку часу від t до $t+\Delta t$ є «майже рівномірним». У цьому випадку при підрахунку шляху не буде великої помилки, якщо вважати рух рівномірним, тобто таким , який відбувається зі сталою швидкістю, саме тою, яку точка мала в момент t.

Шлях, що виходить при такому підрахунку, дорівнює $v\Delta t=s'_t\Delta t=f'(t)\Delta\ t$; він прямо пропорційний минулому часові Δt, називається *диференціалом шляху* і позначається *ds* (цей символ треба розуміти як єдиний, а не як добуток *d* на *s*), $ds=s'_t\Delta t$. Звичайно, фактичний шлях Δs відрізняється від цього «примисленого» шляху *ds*, тому що за час Δt, навіть малий , швидкість усе-таки встигає змінитися. Однак у силу сказаного, якщо цей проміжок часу досить малий, можна приблизно вважати

$$\Delta s\approx ds, \qquad (5.21)$$

причому з тим більшою підставою, чим менше Δt, так як тим менше встигне змінитися швидкість руху. Якщо ж проміжок Δt нескінченно малий, то, як ми побачимо далі, Δs і *ds* відрізняються один від одного на величину вищого порядку малості. У багатьох випадках такими величинами можна зневажати; тоді говорять, що *диференціал це* не що інше, як *нескінченно малий шлях,* тобто шлях, пройдений за нескінченно малий проміжок часу. Утім, звичайно, диференціал шляху може і не бути нескінченно малим, але чим він більше, тим формула (5.21) менш точна. У той же час обчислити *ds* як шлях при рівномірному русі набагато легше, ніж фактичний шлях Δs; цим пояснюється те, що формулою (5.21) користуються і при не дуже малих Δt.

У такий же спосіб у другому прикладі диференціал об’єму *d* — це той об’єм , що наповнився б, якби в проміжку часу від *t* до $t+\Delta t$ швидкість наповнення залишалася сталою, рівній швидкості в момент *t* тобто $d=V'_t\,\Delta t$.

У третьому прикладі диференціал маси— це маса, якою володів би відрізок *AB* лінії (див. рис. 5.2), якби лінійна щільність на цьому відрізку була сталою, рівній щільності в точці *A*, тобто $d=\rho\Delta S=M'_s\,\Delta s$**.**

В усіх випадках заміна дійсної зміни будь-якої величини її диференціалом означає перехід від нерівномірних процесів, неоднорідних об'єктів і т.п. до рівномірним, однорідним. Ця заміна заснована на тім, що протягом малого проміжку часу всякий процес «майже рівномірний», на малій довжині всякий об'єкт «майже однорідний» і т.п.

8. Визначення диференціала.

Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна на відрізку $[a,b]$.

Похідна цієї функції в деякій точці *x* відрізка $[a,b]$ визначається рівністю

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

Відношення $\Delta x/\Delta y$ при $\Delta x\to 0$ прямує до визначеного числа $f'(x)$

і, отже, відрізняється від похідної $f'(x)$ на величину нескінченно малу:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha, \qquad \text{де } \alpha\to 0 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, одержимо:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x. \qquad (5.22)$$

Так як в загальному випадку $f'(x)\neq 0$, то при сталому *x* і змінному $\Delta x\to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx. Добуток же $\alpha\Delta x$ є завжди величина нескінченно мала вищого порядку відносно Δx, тому що

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

Таким чином, приріст Δy функції складається з двох доданків, з яких перший доданок є [при $f'(x)=0$], так називана головна частина приросту, лінійна відносно Δx. Добуток $f'(x)\Delta x$ називають диференціалом функції і позначають через *dy* або *df(x).* Таким чином, якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)$ у точці *x,* то добуток похідної $f'(x)$ на приріст Δx аргументу називається *диференціалом* функції і позначається символом *dy:*

$$dy=f'(x)\Delta x. \qquad (5.23)$$

Знайдемо диференціал функції $y=x$; у цьому випадку $y'=(x)'=1$ і, отже, $dy=dx=\Delta x$ або $dx=\Delta x$. Таким чином, диференціал *dx* незалежного змінного *x* збігається з його приростом Δx. Рівність $dx=\Delta x$ можна було б розглядати також як визначення диференціала незалежної змінної, і тоді розглянутий приклад показував би, що це не суперечить визначенню диференціала функції. У будь-якому випадку формулу (5.23) ми можемо записати так, $dy=f'(x)dx$.

Але з цього співвідношення випливає, що $f'(x)=dy/dx$

Отже, похідну $f'(x)$ можемо розглядати як відношення диференціала функції до диференціала незалежного змінного.

Дамо тепер загальне визначення диференціала.

Нехай $y=f(x)$, і аргумент, який спочатку приймав деяке значення *x*, одержав приріст Δx. Тоді *диференціалом функції називається добуток*

$$dy = df(x)=y'\Delta x=f'(x)\,\Delta x; \qquad (5.24)$$

це — той приріст, який одержала би функція, якби вона на інтервалі від *x* до $x+\Delta x$ змінювалася з тією же швидкістю, що і при значенні *x* аргументу.

Обчислення диференціала функції називається її *диференціюванням;* воно дуже просто здійснюється по формулі (5.24).

Нехай, наприклад, $y=sinx$; тоді $dy=(sinx)'\Delta x=\cos x\Delta x$, тобто

$$dsinx=cosx\ \Delta x.$$

Аналогічно $dtgx=(1/cos^2x)\Delta x$; $d(x^3)=3x^2\Delta x$ **і** т.п. Таким чином, при диференціюванні функції треба обчислити її похідну, а результат помножити на Δx; тому процес обчислення похідної теж часто називають диференціюванням. Однак *ні в якому разі не можна плутати похідну і диференціал один з одним.* Похідна функції $y=f(x)$ залежить тільки від x, тоді як диференціал залежить також від Δx; у додатках диференціал звичайно вважається величиною нескінченно малою, тоді як похідна— величиною кінцевою; якщо величини x і y розмірні, то

$$[dy]=[\Delta y]=[y];\ [y'_x]=\frac{[\Delta y]}{[\Delta x]}=\frac{[y]}{[x].}$$

Відзначимо, зокрема, що $dx=x'_x\Delta x=1\Delta x=\Delta x$, тобто *диференціал незалежної змінної дорівнює її приросту.* Це дає можливість представити формулу (5.24) у вигляді

$$dy=f'(x)dx=y'dx \quad (5.25)$$

і, з іншого боку, записати похідну у вигляді відношення диференціалів

$$y'_x=\frac{dy}{dx}$$

або, що теж саме, $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$

Повернемося до виразу (5.22), який з урахуванням (5.23) перепишемо так:

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x, \qquad (5.26)$$

Таким чином, приріст функції відрізняється від диференціала функції на величину нескінченно малу вищого порядку відносно Δx. Якщо $f'(x)\neq 0$, то $\alpha\Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку і відносно dy і

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{f'(y)\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{f'(x)}=1.$$

Тому в наближених обчисленнях іноді користуються наближеною рівністю

$$\Delta y\approx dy \qquad (5.27)$$

Задача знаходження диференціала функції рівносильна знаходженню похідної, тому що, помноживши останню на диференціал аргументу, одержимо диференціал функції. Отже, більшість теорем і формул, що відносяться до похідних, зберігають свою силу і для диференціалів. Так, наприклад:

Диференціал суми двох диференційовних функцій u і v дорівнює сумі диференціалів цих функцій: $d\ (u+v)=du+dv$.

Диференціал добутку двох диференційовних функцій u і v визначається формулою $d\ (uv)=u\ dv+v\ du$.

Доведемо, наприклад, останню формулу. Якщо $y=uv$, то $dy=y'$ $dx=(uv'+vu')dx=uv'dx+vu'dx$, але $v'dx=dv$, $u'dx=du$, тому $dy=udv+vdu$.

Аналогічно доводяться й інші формули, наприклад формула, що визначає диференціал частки:

якщо $y=\dfrac{u}{v}$, то $dy=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

Розв'яжемо кілька прикладів на обчислення диференціала функції

Приклад 1. $y=tg^2\,x$, $dy=2\ tg\ x\dfrac{1}{\cos^2 x}dx$.

Приклад 2. $y=\sqrt{1+\ln x}$, $dy=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\dfrac{1}{x}dx$.

Знайдемо вирази для диференціала складеної функції. Нехай

$$y=f(u),\ u=\varphi(x),\text{ або } y=f\,[\varphi(x)]$$

Тоді за правилом диференціювання складеної функції

$$dy/dx=f'_i(u)\ \varphi'(x),$$

отже $dy=f'_i(u)\ \varphi'(x))\ \varphi'(x)\ dx$, але $\varphi'(x)\ dx=du$, тому $dy=f'\ (u)\ du$

Таким чином, *диференціал складеної функції має той же вигляд, який він мав би в тому випадку, якби проміжний аргумент и був незалежною змінною.* Інакше кажучи, *форма диференціала не залежить від того, є аргумент функції незалежної змінної або функцією іншого аргументу.* Це важлива властивість диференціала, яка називається *інваріантістю форми диференціала,* буде широко використана надалі.

Приклад 3. Дано функцію $y=\sin\sqrt{x}$. Знайти dy.

Розв'язання. Представивши дану функцію як складену: $y=sin\ u$, $u=\sqrt{x}$, знаходимо $dy=\cos u\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$; але $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=du$, тому можна записати $dy=\cos u\,du$ $dy=\cos(\sqrt{x})\,d(\sqrt{x})$.

Геометричний зміст диференціала функції показано на рис. 5.7: він дорівнює приросту ординати дотичної. Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометрично означає, що графік функції заміняється відрізком дотичної до нього в точці *А.*

Ясно, що для такої заміни є підстави, якщо Δx досить малий. Для з'ясування зв'язку диференціала з приростом помітимо, що

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{} y'$, тобто $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, де $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

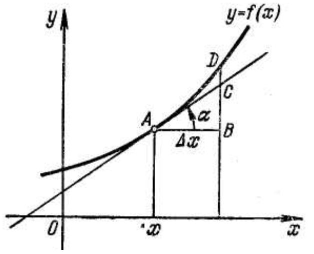
Звідси

$$\Delta y=y'\,\Delta x+\alpha\Delta x=dy+\beta \quad (5.28).$$

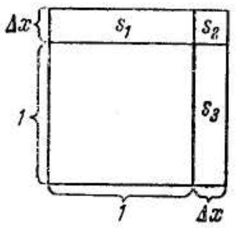
де $\beta=\alpha\Delta x$ — величина вищого порядку малості в порівнянні з Δx (на рис. 5.7 вона зображується відрізком *CD).* Цю рівність виражають словами *«диференціал є головна лінійна частина приросту функції»:* головна — тому що він відрізняється від приросту на величину β вищого порядку, а лінійна — тому що він прямо пропорційний Δx**.** Якщо $y'\neq 0$, то dy і $dx=\Delta x$ мають однаковий порядок малості, а тому β у формулі (5.28) має вищий порядок малості, чим dy, тобто dy і Δy— нескінченно малі еквівалентні .

Покажемо на прикладі, яка похибка виходить при заміні приросту функції її диференціалом. Нехай $y=x^2$ і аргумент, приймаючи первісне значення $x=1$, одержить приріст Δx. Тоді

$$\Delta y=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+\Delta x^{\,2};$$
$$dy=y'\,\Delta x=2\cdot 1\Delta x=2\Delta x.$$



$BD=\Delta y;\ BC=AB\,\mathrm{tg}\,\alpha=\Delta x\cdot y'=dy$



$\Delta y=s_1+s_2+s_3;\ dy=s_1+s_3;\ (\Delta x)^2=s_2$

Рис. 5.7.   Рис. 5.8.

Таким чином, Δy і dy відрізняються один від одного на величину $(\Delta x)^2$ другого порядку малості (рис. 5.8).

Зокрема,

при $\Delta x=0{,}1$ $\Delta y=0{,}21$; $dy=0{,}2$ похибка 5%
при $\Delta x=0{,}01$ $\Delta y=0{,}0201$; $dy=0{,}2$ похибка 0,5%
при $\Delta x=-0{,}001$ $\Delta y=-0{,}001999$; $dy=-0{,}2$ похибка 0,05%

Добре видно, що при заміні Δy на dy відносна похибка при зменшенні $|\Delta x|$ швидко зменшується.

Функція, що володіє диференціалом, називається *диференційовна.* Іншими словами, диференційовна функція - це функція, малий приріст якої має головну лінійну частину, тобто функція, яку на будь-якій малій ділянці зміни аргументу можна приблизно замінити на лінійну (така заміна називається *лінеаризацією).* У диференційовній функції похідна повинна бути кінцевою, а сама функція повинна бути безперервною при розглянутих значеннях аргументу, тому що з (5.28) видно, що при нескінченно малому Δx і Δy буде нескінченно малим. У той же час безперервна функція може бути не завжди диференційовна, наприклад, функція, яка зображена на рис.5.5, перестає бути диференційовною не тільки в точці розриву $x=x_3$, але й у точках безперервності $x=x_1$ і $x=x_2$.

9. Властивості диференціала. Так як диференціал функції виходить у результаті простого множення її похідної на диференціал незалежного змінного, то з кожної властивості похідної легко вивести відповідну властивість диференціала. Наприклад, помноживши обидві частини рівності $(u+v)'=u'+v'$ на dx, одержимо $(u+v)'dx=u'dx+v'dx$ або, що те ж саме, $d(u+v)=du+dv$ *(диференціал суми дорівнює сумі диференціалів).* Аналогічно одержуємо формулу

$$d(uv)=(du)v+udv \qquad (5.29)$$

і т.п. Далі ми побачимо, що ці формули справедливі і для випадку будь-якого числа незалежних змінних. Особливо важливий висновок випливає з формули для похідної складеної функції. Нехай $y=f(x)$ і x спочатку є незалежною змінною. Тоді для обчислення dy можна користуватися кожною з формул (5.24) або (5.25), тому що в цьому випадку $\Delta x=dx$. Нехай тепер x залежить від деякої третьої величини, наприклад $x=x(t)$. Тоді вже $\Delta x\neq dx$, але виявляється, що *формула* (5.25) *усе рівно залишається справедливою* (а формула (5.24), узагалі говорячи, порушується). Дійсно, $dy=y'_t dt=y'_x x'_t\ dt=y'_x\ dx$, що і потрібно. Тому при обчисленні диференціалів зазвичай користуються формулою (5.25) (а не (5.24)), тому що вона залишається справедливою, інваріантною (незмінною) у всіх випадках.

Застосуємо цю властивість інваріантості для обчислення *похідної від функції, заданої параметрично*. Нехай $x=x(t)$, $y=y(t)$, (t- параметр).

Тоді $dx=\dot{x}\,dt$; $dy=\dot{y}\,dt$, (точкою зверху зазвичай позначається похідна по параметру), звідки

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}. \qquad (5.30)$$

Усі ці властивості диференціалів застосовуються, зокрема, при лінеаризації залежностей між величинами, тобто при переході від загальної, нелінійної залежності до лінійної залежності між приростами цих величин. Така лінеаризація можлива при малих змінах розглянутих величин і заснована на відкиданні величин вищого порядку малості.

Так, наприклад, рівняння (5.30) визначає нелінійний зв'язок між координатами точки $M\ (x;y)$ лінії другого порядку. Однак нехай точка M міняється поблизу деякої фіксованої точки $M_0\ (x_0\ y_0)$, тобто прирости $x\text{-}x_0=\xi$, y—$y_0=\eta$ малі. Диференціюючи рівняння (5.30), а потім заміняючи диференціали приростами, приходимо до лінеаризованого рівняння

$$2Ax_0\xi+2By_0\xi+2Bx_0\eta+2Cy_0\eta+D\xi+E\eta=0, \quad (5.31)$$

яке визначає лінійну залежність між ξ і η . Так як при виведенні рівняння (5.31) ми заміняли диференціали dx, dy на приріст ξ, η , то цьому рівнянню точка M лінії задовольняє лише з точністю до величини вищого порядку малості. Точно рівнянню (5.31) задовольняють точки дотичної до лінії (5.30), проведеної в точці M_0. Лінеаризація широко застосовується у фізиці, зокрема, при складанні диференціальних рівнянь.

10. **Застосування диференціала в наближених обчисленнях**. Диференціал широко застосовується в наближених обчисленнях. Насамперед *досить часто приріст функції заміняють її диференціалом, який звичайно обчислювати простіше.*

Припустимо, що дано функцію $y=f(x)$, для якої відомо деяке значення $f(a)$; нехай після цього аргумент одержав малий приріст $\Delta x=h$. Тоді можна покласти

$$f(a+h)-f(a)=\Delta y\approx dy=f'(a)h,$$

тобто

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h, \qquad (5.32)$$

Вибираючи в якості $f(x)$, конкретні функції $\sqrt[n]{x}$, $\sin x$, $\ln x$ і т.д. отримаємо наближені формули

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[n]{a+h} &\approx \sqrt[n]{a}+\frac{h}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}} \\ \sin(a+h) &\approx \sin a+h\cos a \\ \ln(a+h) &\approx \ln a+\frac{h}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (5.33)$$

і т.д., придатні для досить малих $|h|$.

Іноді перед застосуванням формул (5.33) потрібне попереднє перетворення величини, яку потрібно обчислити.. Наприклад, обчислення $\sqrt[3]{2}$ не зовсім зручно проводити так:

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{1+1}\approx\sqrt[3]{1}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}}=1+\frac{1}{3}=1{,}333,$$

тому що значення h=l у даному випадку навряд чи можна вважати малим у порівнянні з a=1. Тут зручно покласти $\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2m^3}/m$ і підібрати ціле m так, щоб $2m^3$ виявилося по можливості ближче до якого-небудь повного куба. Можна взяти m=4, так як $2\cdot4^3=128$ близьке до $125=5^3$; тоді одержимо, обчислюючи з точністю до 0,0001,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{2\cdot4^3}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{128}=\frac{1}{4}\sqrt[3]{125+3}\approx\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{125+3}+\frac{3}{3\sqrt[3]{125^2}}\right)=\frac{1}{4}\left(5+\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{4}\cdot5{,}0400=1{,}26.$$

Диференціали застосовуються також при оцінці похибки. Припустимо, що величини x і y зв'язані функціональною залежністю f=(x) і відомо наближене значення $\overline{x}$ величини x із граничною абсолютною похибкою α_x. Тоді в якості наближеного значення y треба взяти, зазвичай, $\overline{y}=f(\overline{x})$. Для підрахунку граничної абсолютної похибки α_y помітимо, що насправді $x=\overline{x}+h$, де $|h|<\alpha_x$, звідки, якщо α_x, а отже і h, мале, то

$$y=\overline{y}+\Delta y\approx\overline{y}+dy=\overline{y}+f'(\overline{x})h,$$

тобто

$$|y-\overline{y}|\approx|f'(\overline{x})||h|<|f'(\overline{x})|\alpha_x.$$

Отже, можна покласти $\alpha_y=|n|x^{n-1}\,\alpha_x$.(5.34)

Нехай, наприклад, $y=x^n$. Тоді $\alpha_y=\frac{1}{10,7}0,1\approx 0,01$, а відповідні граничні відносні похибки зв'язані простою формулою:

$$\delta_y=\frac{\alpha_y}{y}=\frac{|n|\,\bar{x}^{n-1}\alpha_x}{\bar{x}^n}=\frac{|n|\,\alpha_x}{\bar{x}}=|n|\,\delta_x.$$

5.6. Похідні і диференціали вищих порядків

Похідні вищих порядків. Нехай $y=f(x)$. Тоді похідна $y'=f'(x)$, називається *похідною першого порядку.* Вона у свою чергу є функцією x і тому від неї можна взяти похідну, що називається *похідною другого порядку* від вихідної функції: $y''=(y')'=f''(x)$.

Аналогічно визначається *похідна третього порядку* $y'''=(y'')'=f'''(x)$.

Наприклад,

$(x^3)'=3x^2$, $(x^3)''=(3x^2)'=6x$; $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin x)''=(\cos x)'=— \sin x$ і т.п.

Приклад 1. Дано функцію $y'=e^{kx}(k=\text{const})$.

Знайти вирази її похідної будь-якого порядку n.

Розв'язання $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, …, $y^{(n)}=k^ne^{kx}$.

Приклад 2. $y=\sin x$. Знайти $y^{(n)}$.

Розв'язання.

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV}=\sin x=\sin x\left(x+4\frac{\pi}{2}\right) y^{(n)}=\sin x\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$

Похідна другого порядку часто має безпосередній фізичний зміст: так, похідна другого порядку від шляху за часом — це швидкість зміни

миттєвої швидкості, тобто миттєве прискорення. Про застосування похідних вищих порядків буде сказано далі.

Формула для похідної суми дуже проста. Якщо $y=u+v$, то

$$y'=u'+v',\ y''=(u'+v')'=u''+v'' \text{ і т.д.}$$

Узагалі $(u+v)^{(n)}=u^{(n)}+v^{(n)}$.

Що стосується формули для похідної добутку, то

$(uv)'=u'v+uv'$;

$(uv)''=(u'v+uv')'=u''v+u'v'+u'v'+uv''=u''v+2u'v'+uv''$;

$(uv)'''=(u''v+2u'v'+uv'')'=u'''v+2u''v'+u'v''+u''v'+2u'v''+uv'''=$

$=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''$ і т.д.; (5.35)

при цьому, обчислюючи чергову похідну, ми спочатку у всіх членах диференціюємо перший множник, а потім у всіх членах — другий. Ці обчислення йдуть по тій же схемі, як при послідовному розкладанні виразів

$(a+b)^2$,$(a+b)^3$ і т.д.:

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^{2;}$

$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ і т .д. (5.36)

Тому у формулах (5.35) виходять такі ж коефіцієнти, як і у формулах (5.36). У загальному випадку можна написати *(формула Лейбніца)*

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\ldots+uv^{(n)} \quad (5.37)$$

де $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ ...- це так називані *біноміальні коефіцієнти,* тобто коефіцієнти, що виходять при розкладанні степеня $(a+b)^{n.}$

Подібним чином обчислюються подальші похідні.

Приклад 3.

Дано $=e^{ax}x^2$. Знайти похідну $y^{(n).}$

Розв'язання

$u=e^{ax}$, $v=x^2$,

$u'=ae^{ax}$, $v'=2x$,

$u''=a^2e^{ax}$, $v''=2$,

…………………………

$u^{(n)}=a^ne^{ax}$, $v'''=v^{IV}=\ldots=0$,

$y^{(n)}=a^n e^{ax}x^2+na^{n-1}e^{ax}2x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2$, або

$y^{(n)}=e^{ax}[a^n x^2+2\,na^{n-1}x+n(n\text{-}1)a^{n-2}]$.

11. Диференціали вищих порядків.

Нехай $y=f(x)$. Тоді

$$dy=f'(x)dx. \quad (5.38)$$

Це — *диференціал першого порядку. Диференціал другого порядку* d^2y— це диференціал від диференціала першого порядку; при цьому, якщо x—незалежна змінна, то при такому вторинному диференціюванні dx вважається незалежним від x і виноситься як стала величина:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=(f'(x))'dx\,dx=f''(x)\,dx^2, \quad (5.39)$$

де прийнято позначення $dx^2=(dx)^2$. Аналогічно одержимо

$$d^2y=d(d^2y)=f'''(x)dx^3 \quad (5.40)$$

і т.д. Це дає можливість записати похідні вищих порядків у вигляді відношення диференціалів

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2},\ y'''=\frac{d^3y}{dx^3} \text{ і т .д.} \quad (5.41)$$

Крім того, видно, що якщо dy має перший порядок малості в порівнянні з dx, то d^2y має другий порядок малості, d^3y—третій і т.д.

Приклад 1. Знайти dy і d^2y складеної функції $y=\sin u$, $u=\sqrt{x}$.

Розв'язання.

$$dy=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\cos u\,du.$$

Далі, використовуючи формулу визначення диференціала другого порядку, одержуємо

$$d^2y=-\sin u(du)^2+\cos u\,d^2u=-=-\sin u(du)^2+\cos u\cdot u''(dx)^2=$$

$$=-\sin u\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2(dx)^2+\cos u\left(\frac{1}{4x^{3/2}}\right)(dx)^2.$$

Далі відзначимо, що

$$d^2x=d(dx)=d(1dx)=dxd(1)=0$$

другий диференціал незалежної змінної дорівнює нулеві; звичайно, нулеві рівні і подальші диференціали незалежної змінної.

Якщо x не є незалежної змінною (або нам невідомо, чи є вона такою), то, як ми бачили раніше, формула (5.38) усе рівно справедлива. Однак при її подальшому диференціюванні dx уже не можна вважати

сталим, а треба користуватися правилом диференціювання добутку [формула (5.29)]:

$$d^2y=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx+f'(x)d(dx)=f''(x)\,dx^2+f'(x)d^2x; \quad (5.42)$$

аналогічно знаходяться

$$d^3y=f'''(x)dx^3+3f''(x)dxd^2x+f'(x)d^3x; \quad (5.43)$$

і подальші диференціали. Якщо тепер виявиться, що x — незалежна змінна, то $d^2x=d^3x=0$ і формула (5.42) переходить у формулу (5.29), а (5.43) — у (5.30). Отже, *формулами* (5.29)—(5.31) *можна користуватися, тільки якщо x— незалежна змінна.*

12. Похідні різних порядків від неявних функцій і функцій, заданих параметрично

1. Покажемо на прикладі спосіб обчислення похідних різних порядків від неявних функцій.

Нехай неявна функція y від x визначається рівністю

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,. \quad (5.44)$$

Диференціюємо по x усі члени цієї рівності, пам'ятаючи , що y є функція від x

$$\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

звідси знаходимо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y} \quad (5.45)$$

Останню рівність знову диференціюємо по x (маючи на увазі, що y є функція від x):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b^2}{a^2}\frac{y-x\dfrac{dy}{dx}}{y^2}.$$

Підставляємо сюди замість похідної $\frac{dy}{dx}$ її вираз з рівності (5.45),

одержуємо: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{y + x\frac{b^2}{a^2}\frac{y}{x}}{y^2}$,   або після спрощення

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3}.$$

З рівняння (5.44) випливає, $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, тому другу похідну можна представити у вигляді

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Диференціюючи по x останню рівність, знайдемо d^3y/dx^3 і т.д.

2. Розглянемо тепер задачу про обчислення похідних вищих порядків від функції, заданої *параметрично.*

Нехай функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad t_0 \le t \le T, \quad (5.46)$$

причому функція $x=\varphi(t)$ на відрізку $[t_0, T]$ має обернену функцію $t=\Phi(x)$. У цьому випадку похідна dy/dx визначається рівністю

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \qquad (5.47)$$

Для обчислення другої похідної d^2y/dx^2 диференціюємо по x рівність (5.47), маючи на увазі, що t є функція від x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}, \quad (5.48)$$

але

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}.$$

Підставляючи останні вирази у формулу (5.48), одержимо:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

Останній формулі можна придати наступний, більш компактний вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(y)]^3}.$$

Аналогічним шляхом можна знайти похідні $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ і т.д.

Приклад. Функція y від x задана параметрично $x=a\cos t,\ y=b\sin t.$

Знайти похідну

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$$

Розв'язання.

$$\frac{dx}{dt}=a\sin t,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=b\cos t,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-b\sin t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}ctgt,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-a\sin t)(-b\sin t) - (b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

13. Механічне значення другої похідної

Шлях s, пройдений поступально тілом яке рухається, у залежності від часу t виражається формулою

$$s=f(t). \qquad (5.49)$$

Як уже відомо, швидкість v тіла в даний момент дорівнює першій похідній від шляху за часом:

$$v=\frac{ds}{dt}\ . \qquad (5.50)$$

Нехай у деякий момент t швидкість тіла дорівнювала v. Якщо рух не є рівномірним, то за проміжок часу Δt, який минув з моменту t, швидкість зміниться й одержить приріст Δv.

Середнім прискоренням за час Δt називається відношення приросту швидкості Δv до приросту часу:

$$a_{\text{ср}}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Прискоренням у даний момент називається границя відношення приросту швидкості до приросту часу, коли останній прямує до нуля:

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t};$$

інакше кажучи, прискорення (у даний момент) дорівнює похідній від швидкості за часом $a=\frac{dv}{dt}$, але так як $v=\frac{ds}{dt}$, то, отже

$$a=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}$$

тобто *прискорення прямолінійного руху дорівнює другій похідній від шляху за часом.* Виходячи з рівності (5.49), одержуємо $a=f''(t)$.

Приклад. Знайти швидкість v і прискорення a вільно падаючого тіла, якщо залежність відстані s від часу t дається формулою

$$s=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0 \quad (5.51)$$

де g=9,8 $м/сек^2$ — прискорення земного тяжіння, а $s_0=s_{t=0}$ — значення s при $t=0$.

Розв'язання.

Диференціюючи, знаходимо:

$$v=\frac{ds}{dt}=gt+v_0 \quad (5.52)$$

з цієї формули випливає, що $v_0=(v)_{t=0}$.

Диференціюючи ще раз, знаходимо:

$$a=\frac{ds}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}=g.$$

Помітимо, що, зворотно, якщо прискорення деякого руху стале і дорівнює g, то швидкість виражається рівністю (5.52), а відстань — рівністю (5.51) за умови, що $(v)_{t=0}=v_0$ і $(s)_{t=0}=s_0$.

14. Рівняння дотичної і нормалі. Довжини піддотичної і піднормалі

Розглянемо криву, рівняння якої є $y=f(x)$. Візьмемо на цій кривій точку $M(x_1, y_1)$ (рис. 5.9) і напишемо рівняння дотичної до даної кривої в точці M, припускаючи, що ця дотична не паралельна осі ординат.

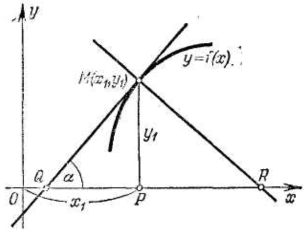


Рис. 5.9.

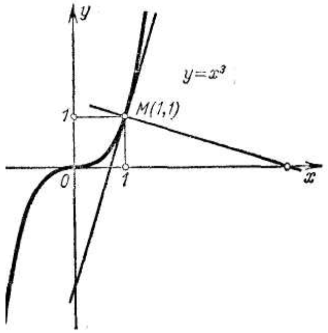


Рис. 5.10.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через точку M, має вигляд $y-y_1=k(x-x_1)$.

Для дотичної $k=f'(x_1)$, тому рівняння дотичної має вигляд

$$y-y_1=f'(x_1)\ (x-x_1).$$

Поряд з дотичною до кривої в даній точці дуже часто приходиться розглядати нормаль.

Означення. *Нормаллю* до кривої в даній точці називається пряма, що проходить через дану точку, перпендикулярну до дотичної в цій точці.

З визначення нормалі випливає, що її кутовий коефіцієнт k_n зв'язаний з кутовим коефіцієнтом k_t дотичної рівністю

$$k_n = -\frac{1}{k_t}\text{, тобто } k_n = -\frac{1}{f'(x_1)},$$

Отже, рівняння нормалі до кривої $y=f(x)$ у точці $M(x_1,y_2)$ має вигляд

$$y\text{-}y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}\ (x\text{-}x_1).$$

Приклад 1. Написати рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3$ у точці $M(1, 1)$.

Розв'язання. Так як $y'=3x^2$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$(y')_{x=1} = 3$$

Отже, рівняння дотичної: $y—1=3\ (x—1)$ або $y=3x— 2$.

Рівняння нормалі: $y\text{-}1=\text{-}\ (x\ \text{-}1)/3$, або $y=\text{-}1/3x+4/3$ (див. рис. 5.10).

Довжина T відрізка QM (рис.5.9) дотичної, яка заключена між точкою торкання і віссю Ox, називаєте *довжиною дотичної.* Проекція цього відрізка на вісь Ox, тобто відрізок QP, називається *піддотичною;* довжина піддотичної позначається через $S_т$. Довжина N відрізка MR називається *довжиною нормалі,* а проекція RP відрізка RM на вісь Ox називається *піднормалю;* довжина піднормалі позначається через S_N.

Знайдемо величини T, $S_т$, N, S_N для кривої $y=f(x)$ і точки $M(x_1, y_1)$.

З рис. 5.9 видно, що

$$QP=|y_1\text{ctg } \alpha|=\left|\frac{y_1}{tg\alpha}\right|=\left|\frac{y_1}{y_1'}\right|,$$

$$\text{Тому } S_T=\left|\frac{y_1}{y_1'}\right|, \quad T=\sqrt{y^2{}_1+\frac{y_1{}^2}{y_1'^2}}=\left|\frac{y_1}{y_1'}\sqrt{y_1'^2+1}\right|.$$

Далі, з цього ж рисунку ясно, що $PR=|y_1\text{tg } \alpha|=|y_1y_1'|$, тому

$$S_N=|y_1y'_1|,\ \ N=\sqrt{y_1{}^2+(y_1y_1')^2}=|y_1\sqrt{1+y_1'^2}\ \ |.$$

Ці формули виведені в припущенні, що $y_1>0$, $y'_1>0$.Однак вони зберігаються й у загальному випадку.

Приклад 2. Знайти рівняння дотичної і нормалі, довжини дотичної і піддотичної, довжини нормалі і піднормалі для еліпса:

$$x=a\ cos t, y=b\ sin t\ (5.52),$$

у точці $M(x_1, y_1)$, для якої $t=\pi/4$ (рис. 5.11).

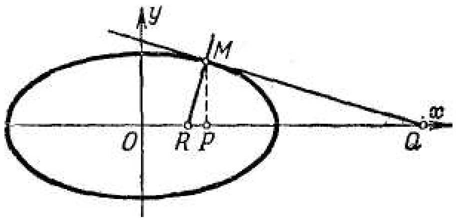


Рис. 5.11.

Розв'язання. З рівнянь (5.52) знаходимо:

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=b\cos t,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}ctgt.\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\pi/4}=-\frac{b}{a}.$$

Знаходимо координати точки дотику M

$$x_1=(x)_{\ t=\pi/4}=a/\sqrt{2},\ y_1=(y)_{\ t=\pi/4}=b/\sqrt{2}.$$

Рівняння дотичної

$$y\text{-}\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{b}{a}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

або $$bx+ay\text{-}ab\sqrt{2}=0$$

Рівняння нормалі:

$$y\text{-}\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{a}{b}\left(x-\frac{a}{\sqrt{2}}\right),$$

або $$(ax\text{-}by)\sqrt{2}\text{-}a^2+b^2=0$$

Довжини піддотичної і піднормалі:

$$S_T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad S_N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\left(-\frac{b}{a}\right)\right|=\frac{b^2}{a\sqrt{2}}.$$

Довжини дотичної і нормалі:

$$T=\left|\frac{\frac{b}{\sqrt{2}}}{-\frac{b}{a}}\sqrt{\left(-\frac{b}{a}\right)^2+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2},\quad N=\left|\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\right|=\frac{b}{a\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}.$$

15. Геометричне значення похідної радіуса-вектора по полярному кутові.

Нехай маємо рівняння кривої в полярних координатах:

$$\rho=f(0). \qquad (5.53)$$

Напишемо формули переходу від полярних координат до прямокутних декартових:

$$x=\rho\cos\Theta,\ y=\rho\sin\Theta.$$

Підставляючи сюди замість ρ його вираз через Θ з рівняння (5.53), будемо мати:

$$x=f(\Theta)\cos\Theta,\ y=f(\Theta)\sin\Theta. \qquad (5.54)$$

Рівняння (5.54) є параметричними рівняннями даної кривої, причому параметром є полярний кут Θ (рис. 5.12). Якщо через φ позначимо кут, утворений дотичною до кривої в деякій точці $M(\rho,\ \Theta)$ з додатним напрямом осі абсцис, то будемо мати:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}},\ \text{або}\ \operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta}{\frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta}. \qquad (5.55)$$

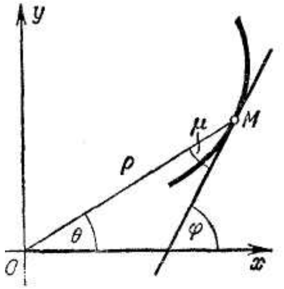


Рис. 5.12.

Позначимо через μ кут між напрямком радіус-вектора і дотичною. Вочевидь, що μ=φ - Θ,

$$tg\,\mu=\frac{tg\varphi-tg\theta}{1+tg\varphi tg\theta}.$$

Підставляючи сюди замість $tg\varphi$ його вираз (5.55) і виконуючи перетворення, одержимо

$$tg\mu=\frac{\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\cos\theta-(\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\sin\theta}{\rho'\cos\theta-\rho\sin\theta)\cos\theta+(\rho'\sin\theta+\rho\cos\theta)\sin\theta}=\frac{\rho}{\rho'},\ (5.56)$$

або $\rho'_\theta=\rho\ ctg\ \mu$.

Таким чином, похідна радіуса-вектора по полярному кутові дорівнює довжині радіуса-вектора, помноженої на котангес кута між радіусом-вектором і дотичною до кривої в даній точці.

Приклад. Показати, що дотична до логарифмічної спиралі $\rho=e^{a\theta}$ перетинається з радіусом-вектором під сталим кутом.

Розв'язання. З рівняння спиралі знаходимо: $\rho'=ae^{a\theta}$. На підставі формули (5.56) одержуємо:

$$ctg\ \mu=\frac{\rho'}{\rho}=a,\ \text{тобто}\ \mu=arctg\ a=\text{const}.$$

Мікромодуль 12
Приклади розв'язання типових задач

1. Знайдіть диференціал функції $y=x^2+2x$ в точці $x=2$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки диференціал - це головна, лінійна відносно Δx ,частина приросту функції в точці x, знайдемо пріріст даної функції в точці $x=2$, тобто

$$\Delta y=y(2+\Delta x)-y(2)=(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)-8=6\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Лінійною частиною приросту є вираз $6\Delta x$. Таким чином, $dy(2)=6\Delta x$.

Другий спосіб. Оскільки $dy=f'(x)dx$, то маємо

$$y'=2x+2,\ y'(2)=6,\ dy(2)=6dx$$

2. Знайдіть диференціал функції $y=\sqrt{}y-x^2+lnsinx$

Розв'язання. Маємо

$$dy = d(\sqrt{1-x^2} + \ln\sin x) = (\sqrt{1-x^2} + \ln\sin x)'dx = \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + ctgx\right)dx.$$

3. Обчисліть наближено (за допомогою диференціала) значення √15

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$. Покладемо $x=16$, $x+\Delta x=15$, $\Delta x=-1$.

Тоді

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x,$$

або $\sqrt{15} \approx 4 + \frac{1}{2\cdot 4}(-1) = \frac{31}{8}$. Отже $\sqrt{15} \approx \frac{31}{8} = 3{,}875$.

4. Обчистіть наближено значення tg 54°.

Розв 'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\text{tg}\, x$.

Тоді $tg(x+\Delta x) \approx tgx+(tgx)'tg\Delta x;\ tg(x+\Delta x) \approx tgx+\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\Delta x$.

Переведемо градуси у радіани (обов'язкова дія для Δx!):

$54^{o}=\frac{54\pi}{180}=\frac{3\pi}{10}$. Нехай $x=\frac{\pi}{4}$, $x+\Delta x=\frac{3\pi}{10}$, $\Delta x=\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{20}$

Тоді $\text{tg}\frac{3\pi}{10} \approx tg\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{\pi}{20}=1+\frac{\pi}{10}\approx 1{,}314$.

Отже, tg54°≈ 1,314

Розглянемо приклади на застосування похідної.

5. Знайдіть рівняння дотичної та нормалі, проведених до кривої $y = x \ln x +1$ у точці з ординатою 1.

Розв 'язання. За умовою $y_0=1$. Визначаємо абсцису точки дотику.

Маємо $1=x \ln x+1$, $x \ln x=0$; $x\neq 0$, тому $\ln x=0$, тобто $x_0=1$.

Знайдемо похідну $y'=(x \ln x+1)'= \ln x+(\ln x)'\cdot x= \ln x+1$.

Тоді $y'(l)=\ln 1+1=1$. Підставивши значення x_0, y_0 та y'_0 у формули дотичної $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$, та нормалі $y-y_0=[(1/f'(x_0)](x-x_0)$, , дістанемо рівняння дотичної $y-1=1\cdot(x-1)$,тобто $y=x$, та рівняння нормалі

$y — 1=— (1/1)(x — 1)$, або $y=2 - x$.

6. Знайдіть кут між дотичною, проведеною до кривої $y=x^3- 2x^2- 5x$

у точці $x = 1$, і додатним напрямом осі Ox.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'=3x — 4x — 5$. Тоді $y'(2)=12-8-5= —1$. Згідно з геометричним змістом похідної розв′язуємо рівняння tgα= — 1, звідки дістаємо α=3π— (зауважимо, що 0≤α<π).

7.Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^3+2y^3=5xy$ в точці $M(2;\ 1)$.

Розв'язання. Підставивши у рівняння кривої координати точки M, дістанемо вірну рівність: 10=10. Отже, точка M належить даній кривій і

$x_0 =2$, $y_0 = 1$.

Знайдемо похідну функції y в точці в x_0 . Маємо

$(x^3 +2y^3)' = (5xy)'$, $3x^2 +6y^2y'=5(y+xy')$, $(6y^2-5x)y'=5y-3x^2$,

$$y' = \frac{5y-3x^3}{6y^2-5x}, \qquad y'(2) = \frac{5\cdot 1-3\cdot 8}{6\cdot 1-5\cdot 2} = \frac{19}{4}.$$

Тоді $y-1=\frac{19}{4}(x-2)$, або $19x-4y-34=0$ – рівняння дотичної,

$y-1=-\frac{4}{19}(x-2)$, або $4x+19y-27=0$ – рівняння нормалі.

8. Складіть рівняння дотичної до еліпса, заданого рівняннями $x=2 \sin t$, $y=3 \cos t$, в точці $M_o\ (1; y_0)$, де $y_0 > 0$.

Розв'язання. Рівняння дотичної $y — y_0=f'(x_0)(x — x_0)$. За умовою $x_0=1$. Знайдемо ординату точки дотику y_0. Розв'язками рівняння $1=2 \sin t$ за умови $t\in[0;2\pi)$ є значення $t=\pi/6$ та $t=5\pi/6$. Враховуючи обмеження $y_0>0$, тобто

cos $t>0$, дістаємо $t=\pi/6$. Тоді $y_0=cos(\pi/6)=\sqrt{3}/2$.

Визначаємо похідну $f'(x_0)$ параметрично заданої функції:

$y'(t)= -3 \sin t$, $x'(t)=2 \cos t$.

Тоді $y'_x=\frac{-3\sin t}{2\cos t.}=-\frac{3}{2}tg\ t;\ f'(1)=-\frac{3}{2}tg\ t\ \frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Рівняння дотичної має вигляд $y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1)$, або $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$.

9. Знайдіть похідну другого порядку функції $y=x^4-2x^2+3x-5$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$y'=3x^3-4+3$, $y''=12x^2-4$, $y'''=24x$.

10. Знайдіть похідну другого порядку функцій:

$$y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right),\ a=\text{const}.$$

Розв'язання. Для розв'язання даного прикладу використовуємо правила диференціювання різниці функцій, добутку, похідної складеної функції, а також табличні похідні:

$$y'=$$

$$\frac{1}{2}\left(x'+\sqrt{x^2-a^2}\right)+x(\sqrt{x^2-a^2})'-\frac{a^2}{2}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\right)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}2x\right)-\frac{a^2}{2}\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left(x'+\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)'\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)-\frac{a^2}{2\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)=$$

$$=\frac{x^2-a^2+x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{a^2\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}{2\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)\sqrt{x^2-a^2}};$$

$$y''=(\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}(\sqrt{x^2-a^2})'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

11. Знайдіть похідну n- го порядку функцій:

а) $y=e^x$; б) $y=a^x$; в) $y=\sin x$;г) $y=\dfrac{1}{x}$.

Розв'язання

а) $y'=e^x,\ \ y''=e^x,\ \dots,\ y^{(n)}=e^x;$

б) $y'=a^x \ln a,\ y''=a^x \ln^2 a,\dots,\ y^{(n)}=a^x \ln^n a;$

в) $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),\ y''=-\sin x=\sin\left(x+2\dfrac{\pi}{2}\right);$

$y'''=\cos x=\sin\left(x+3\dfrac{\pi}{2}\right),\dots,y^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right);$

г) $y'=-x^{-2},\ y''=2x^{-3},\ y'''=-2\cdot 3x^{-4},\ \ y^{(IV)}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5},\ \dots,$
$y^{(n)}=(-1)^n 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot nx^{-(n+1)}=(-1)^n n!x^{-(n+1)}.$

12. Знайдіть похідну n — го порядку функції

$$y=\frac{3x+1}{x^2+2x-3.}$$

Розв'язання. Розкладемо дану функцію у суму елементарних дробів:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3}=\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

Отже $(3x+1)=a(x+3)+B(x-1)$.

Нехай $x=1$, тоді остання рівність набуває вигляду: 4=4A , звідки дістаємо A=1. Якщо x=—3 , тоді - 8=—4B, B=2. Таким чином,

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}.$$

Тоді згідно з випадком г) попереднього прикладу маємо

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+2(-1)^n n!\frac{1}{(x+3)^{n+1}}.$$

13. Знайдіть похідну п'ятого порядку $y^{(5)}$ функції $y=(x^2-3x+4)\ e^{2x}$.

Розв'язання. Покладемо $u=e^{2x}$, $v=x^2-3x+4$. За формулою Лейбніца маємо

$$y^{(5)}=((x^2-3x+4)e^{2x})^{(5)}=(e^{2x})^{(5)}(x^2-3x+4)+C^1{}_5(e^{2x})^{(4)}(2x-3)+C^2{}_5(e^{2x})^{(3)}\cdot 2$$

Тут ми врахували, що $(x^2-3x+4)^{(n)}=0$ при $n>2$.

Далі дістанемо $y^{(5)}=32\ e^{2x}(x^2-3x+4)+5\cdot 16\ e^{2x}(2x-3)+10\cdot 8e^{2x\cdot}2=$
$=e^{2x}[32(x^2-3x+4)+80(2x-3)+160]=e^{2x}(32x^2+64x+48).$

14. Знайдіть $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x=2\cos t,\ y=3\sin t$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(3\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t}=\frac{3\sin t}{-2\sin t}=-\frac{3}{2}ctgt\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(-\frac{3}{2}ctgt\right)'_t}{(2\cos t)'_t}=\frac{\frac{3}{2\sin^2 t}}{-2\sin t}=-\frac{3}{4\sin^3 t}.$$

15. Знайдіть y'', якщо

$$x^2y^2+y=1\ .$$

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність по x і знайдемо y':

$$2x+2yy'+y'=0,\ y'(2y+1)=-2x,\ y'=\frac{-2x}{2y+1}.$$

Диференціюємо одержане співвідношення по x:

$$y''=-2\,\frac{x'(2y+1)-x(2y+1)'}{(2y+1)^2}=-2\,\frac{2y+1-2y'x}{(2y+1)^2}$$

Враховуючи, що

$$y'=\frac{-2x}{2y+1},$$

остаточно дістаємо

$$y''=-2-2\,\frac{2y+1-2\dfrac{-2x}{2y+1}x}{(2y+1)^2}=-2\,\frac{(2y+1)^2+4x^2}{(2y+1)^3}.$$

16. Знайдіть d^3y якщо

$$y=\cos 3x$$

Розв'язання . Знайдемо похідні

$$y'=-3\sin 3x,\ y''=-9\cos 3x,\ y'''=27\sin 3x.$$

Тоді

$$d^3y=27\sin 3x(dx)^3.$$

17. Знайдіть d^2y якщо

$$y=4^{-x^2}\ .$$

Розв 'язання. Знайдемо похідну другого порядку в точці x=0. Маємо

$$y'=4^{-x^2}\ln 4(-2x).\ y''=-2\ln 4[(4^{-x^2})'x+4^{-x^2}]=-2\ln 4\cdot 4^{-x^2}[-2x^2\ln 4+1].$$

Отже, $d^2y(0)=y''(0)dx^2=-\ 2\ln 4dx^2$.

Мікромодуль 12.
Індивідуальні тестові завдання

1. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразу

12.1.1.cos 61^o 12.1.2. $e^{0,2}$ 12.1.3.sin 33^o 12.1.4.arctg 1,05

12.1.5 $\sqrt{120}$ 12.1.6.$\sqrt[3]{340}$ 12.1.7. $\sqrt[3]{66}$ 12.1.8$\sqrt[5]{33}$ 12.1.9. $\sqrt[6]{70}$

12.1.10. cos 85^o 12.1.11 sin8^o 12.1.12. sin 28^o 12.1.13. arctg 0,95

12.1.14 arctg 0,9 12.1.15 $e^{0,3}$ 12.1.16. ln 1,05 12.1.17 ln 0,97

12.1.18. ln 1,08 12.1.19. tg 47^o 12.1.20 ctg 50^o 12.1.21.$(1{,}02)^5$ 12.1.22. arccos 0,45 12.1.23 arcsin 0,52

12.1.24. $(1{,}97)^6$ 12.1.25. $(2{,}04)^4$ 12.1.26 ln tg 48^o .

12.1.27. ln tg 43^o12.1.28. *cos* 86^o 12.1.29 sin 26^o 12.1.30. tg 40^o

12.2. Розв'яжіть задачі на складання рівняння дотичної і нормалі кривої

12.2.1. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої

$$y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}$$

в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.

12.2.2. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{2}$.

12.2.3. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x=3\cos t$, $y=2\sin t$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y=\frac{2}{3}x+4$

12.2.4. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=3x^3+5x^2+5x+4$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y=4x-2$.

12.2.5. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\frac{2}{3}x^3+5x^2+9x+\frac{2}{3}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y=x-2.$

12.2.6. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 + 15x + \frac{1}{3}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 2.

12.2.7. Складіть рівняння дотичної і нормалі кривої $y = x^3 + 7x^2 + 11x + \frac{8}{27}$ в точках, в яких дотична паралельна до прямої $y = 3x - 4$.

12.2.8. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{5}{3}x^3 + 11x^2 + +13x + \frac{8}{75}$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{5}$.

12.2.9. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{4}{3}x^3 + 5x^2 + 3x + \frac{4}{3}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю абсцис кут 135°.

12.2.10. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 5x^2 + x + 3$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт нормалі дорівнює $\frac{1}{2}$.

12.2.11. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 + 10x + 130$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -3x + 2$.

12.2.12. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^3 + 6x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{27}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -3x + 1$.

12.2.13. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 + 6x^2 - x + +\frac{1}{9}$ в точках, в яких дотичні мають кутовий коефіцієнт рівний —4.

12.2.14. Складіть рівняння дотичних і нормалі до кривої

$y = 3x^3 + 6x^2 - 6x + \frac{25}{9}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут 135°.

12.2.15. Складіть рівняння дотичної і нормалі до лінії $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^3}$ в точці з абсцисою $x_0 = 3$.

12.2.16. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = (x+1)^3\sqrt{3 - x}$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

12.2.17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до астроїди $x = 2\sqrt{2}\cos^3 t$, $y = 2\sqrt{2}\sin^3 t$, проведених в точці, для якої $t = \frac{\pi}{4}$.

12.2.18. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, проведених в точці, для якої $t = \frac{\pi}{2}$.

12.2.19. Складіть рівняння дотичної і нормалі до параболи $y^2 - y + 2x - 4 = 0$ в точках з абсцисою $x_0 = -4$

12.2.20. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2 + 2xy + 2y^4 = 5$ в точці $M_o\ (1; 1)$.

12.2.21. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, проведених в точці, для якої $t = \frac{3}{2}\pi$.

12.2.22. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 - 6x^2 - 6x + \frac{7}{9}$ в точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут 135°.

12.2.23. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 3x^3 - 6x^2 - x + 1$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої $y = -4x + 5$.

12.2.24. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^4 + 3xy^2 + 3y^4 = 1$ в точці $M_o(-1; 1)$.

12.2.25. Складіть рівняння дотичних і нормалей до кривої

$y = \frac{2}{3}x^3 — 5x^2 + 9x + \frac{3}{4}$ в точках, в яких дотичні паралельні до бісектриси першого координатного кута.

12.2.26. Складіть рівняння дотичних і нормалі до кривої

$y = \frac{1}{3}x^3 —3x^2 + 6x + \frac{1}{3}$ в точках, в яких дотичні паралельні до прямої

$y = -2x + 3$.

12.2.27. Складіть рівняння дотичної і нормалі до півкубічної параболи

$x = t^2$, $y = t^3$, проведених в точці, для якої $t = 2$.

12.2.28. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = \frac{4}{3}x^3 — 5x^2 + 3x + \frac{1}{3}$ в точках, в яких дотичні паралельні до бісектриси другого координатного кута.

12.2.29. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої

$x^3 - 3xy^2 + y^3 = -3$ в точці M_o (1; 2).

12.2.30. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої

$y = x^3 — 5x^2 + x - \frac{1}{27}$ - в точках, в яких нормалі паралельні до прямої

$y = \frac{1}{2}x + 1$

12.3. Знайдіть диференціал d^2y у точці x_0 .

12.3.1. $y = x \bullet \sqrt{x-3}$, $x_0=12$ 11.3.2. $y = x^2 \bullet \sqrt{x-5}$, $x_0=6$

12.3.3. $y = x^2 \bullet \sqrt{2x+3}$, $x_0=11$ 11.3.4. $y = (2x-1)^2 \bullet \sqrt{x+2}$, $x_0=7$

12.3.5. $y = (\ln x) \bullet \sqrt{2x-1}$, $x_0=5$ 11.3.6. $y = (\ln x) \bullet \sqrt{2x+1}$, $x_0=12$

12.3.7. $y = \sin^3 x \bullet \cos^5$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$ 11.3.8. $y = \sin^2 x \bullet \cos^4$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

12.3.9. $y = \sin^3 x \bullet \cos^7$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 11.3.10. $y = \sin^2 x \bullet \cos^4$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

12.3.11. $y = \sin^3 x \bullet tg^5$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 11.3.12. $y = \sin^2 x \bullet tg^4$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$

12.3.13. $y = (x-1) \bullet \sqrt[3]{5x+2}$, $x_0=5$ 11.3.14. $y = (2x-1) \bullet \sqrt[4]{3x+4}$, $x_0=4$

12.3.15. $y = (x+1)^2 \bullet \sqrt[3]{3x+5}$, $x_0=1$ 11.3.16. $y = (3x-1)^3 \bullet \sqrt[4]{7x+2}$, $x_0=2$

12.3.17. $y = (x-1)^5 \bullet \sqrt[3]{2x-2}$, $x_0=5$ 11.3.18. $y = (4x-1)^3 \bullet \sqrt[5]{x-2}$, $x_0=3$

12.3.19. $y = \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{x^5}$, $x_0=2$ 11.3.20. $y = \frac{\sqrt{x+5}}{(x-2)^3}$, $x_0=4$

12.3.21. $y = \frac{\sqrt[5]{x^2-4}}{x}$, $x_0=6$ 11.3.22. $y = \frac{\sqrt[4]{x^2-9}}{x^2}$, $x_0=5$

12.3.23. $y = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 11.3.24. $y = \frac{\cos^4 x}{\sin x}$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$

12.3.25. $y = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 11.3.26. $y = tg^4\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

12.3.27. $y = ctg^5\, x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ 11.3.28. $y = (x+1)^3 \bullet \sqrt[3]{x+2}$, $x_0=6$

12.3.29. $y = x^4 \bullet \sqrt{2x+7}$, $x_0=9$ 11.3.30. $y = (2x-3)^2 \bullet \sqrt{x+3}$, $x_0=1$

12. 4. Знайдіть похідну іншого порядкові d^2y/dx^2 функції, заданої параметрично:

12.4.1. $x = 5(2t - \sin 2t)$, $y = 10 \sin^2 t$ 12.4.2. $x = \frac{1}{\cos t}$, $y = tg\, t + t$

12.4.3. $x = \frac{1}{\sin t}$, $y = ctg\, t + t$ 12.4.4. $x = lg \sin t$, $y = lg \cos t$

12.4.5. $x = \sin lg\, t$, $y = tglg\, t$ 12.4.6. $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$

12.4.7. $x = \cos 2t + 2t \sin 2t$, $y = \sin 2t - 2t \cos 2t$,

12.4.8. $x = \ln (1+t^2)$, $y = t - arctg\, t$

12.4.9. $x = \arcsin e^t$, $y = \sqrt{1-e^{2t}}$. 12.4.10. $x = \sin e^t$, $y = \cos e^t$

12.4.11. $x = \ln ctg\, t$, $y = \frac{1}{\sin 2t}$ 12.4.12. $x = \ln t$, $y = \frac{t-1}{t+1}$

12.4.13. $x= \ln (1+t), y= \mathrm{arctg}\sqrt{t}$ 12.4.14. $x= \mathrm{arctg}\, e^t, y=\frac{1}{e^{2t}+1}$
12.4.15. $x= \ln (1+4t^2), y=2t- \mathrm{arctg}\, 2t$ 12.4.16. $x=\sin^3 e^t, y= \cos^3 e^t$
12.4.17. $x= 3^t \cos t, y=3^t \sin t$ 12.4.18. $x= \mathrm{arcctg}\, t, y=\log_3(t^2+1)$
12.4.19. $x= \cos 2t- \ln \mathrm{ctg}\, t, y= \sin 2t$ 12.4.20. $x=\mathrm{tg}2^t, y=\ln \cos^2 2^t$
12.4.21. $x= \arccos 2t, y=\sqrt{1-4t^2}$ 12.4.22. $x=\arcsin t, y=\sqrt{1-t^2}$
12.4.23. $x= \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 t, y=\frac{1}{\cos t}$ 12.4.24. $x= \mathrm{ctg}^2 e^t, y=\frac{1}{\sin e^t}$
12.4.25. $x=\sqrt{t^2+1}, y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})$ 12.4.26. $x=\ln(1+t^4), y= \mathrm{arctg}\, t^2$
12.4.27. $x= \ln \mathrm{ctg}\, (1+t), y=\frac{1}{\sin(1+t)}$ 12.4.28. $x=\mathrm{tg}\, e^t, y= \ln \cos^2 e^t$
12.4.29. $x= \mathrm{arctg}\, t, y= \log_2(t^2+1)$ 12.4.30. $x= \ln(1+t^6), y= \mathrm{arctg}\, t^3$

12.5. Знайдіть похідну $y^{(n)}$ функції, використовуючи формулу Лейбніца:

12.5.1. $y=e^{2x-1}(x^3-3x+4), n=10$
12.5.2. $y=(x^3-2x+1)\sin 2x, n=12$
12.5.3. $y= 2^x(3x^3-7x+5)\ln x, n=15$
12.5.4. $y=(x^3+2x^2+3) \ln x, n=8$
12.5.5. $y=(x^2+4x-5) \ln x, n=10$
12.5.6. $y=(x^2+5x-12) 2^x, n=9$
12.5.7. $y=(x^3+5x^2-2) \sin x, n=11$
12.5.8. $y=(x^3-2x^2-3) \cos x, n=9$
12.5.9. $y=(x^3-4x^2-x) \cos 2x, n=8$
12.5.10. $y=(x^3+2x+3) \ln x, n=7$
12.5.11. $y=(x^2-5x) \ln(x+1), n=8$
12.5.12. $y=(2x^2-7x) \ln(x-2), n=10$
12.5.13. $y=(4x^2-9x) \ln(x-2), n=6$
12.5.14. $y=(2x^2-3x-11) 3^x, n=9$
12.5.15. $y=(4x^2-x+8) 4^{-x}, n=10$
12.5.16. $y=(2x^3-4x^2-1) 5^{-x}, n=7$
12.5.17. $y=(x^2+3x-7) 6^{-x}, n=8$
12.5.18. $y=e^{-x-1}(x^3- x^2+2), n=10$
12.5.19. $y= 2^{-x-1} (x^3-6x+3), n=7$
12.5.20. $y=3^{-x} (2x^2+x+3), n=8$
12.5.21. $y=(4x^3-x^2-1) \cos 2x, n=10$

12.5.22. $y=(3x^2-4x+1) \cos (x+1), n=12$
12.5.23. $y=(5x^2-3x+2) \sin(x-2), n=11$
12.5.24. $y=(6x^3-1) \sin(x+3), n=15$
12.5.25. $y=(2x^3-4x-1)\ln (x-3), n=10$
12.5.26. $y=(3x^3+2x+3)\ln (x+3), n=8$
12.5.27. $y=(x^2-2x-1)\ln (2x-1), n=11$
12.5.28. $y=(x^3+2x-3) \ln (2x+1), n=10$
12.5.29. $y=e^{-2x} (x^3-6), n=8$
12.5.30. $y=2^{-x}(x^3-4), n=10$

Модуль 6.
Застосування похідної і диференціала

Мікромодуль13
Основні теореми диференціального числення

6.1. Теорема про корені похідної (теорема Ролля)

Теорема Ролля. *Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку* $[a,b]$, *диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка і на кінцях $x=a$ і $x=b$ обертається в нуль* $[f(a)=f(b)=0]$, *то існує усередині відрізка* $[a, b]$ *принаймні одна точка $x=c$, $a<c<b$, у якій похідна $f'(x)$ обертається в нуль, тобто* $f'(c)=0$.

(Число c називається *коренем функції* $\varphi(x)$, якщо $\varphi(c)=0$.)

Доведення. Так як функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a, b]$, то вона має на цьому відрізку найбільше значення M і найменше значення m. Якщо $M=m$, то функція $f(x)$ стала, тобто при всіх значеннях x має стале значення $f(x)=0$. Але тоді в будь-якій точці відрізка буде $f'(x)=0$, і теорема доведена.

Припустимо, що $M\neq m$. Тоді принаймні одне з цих чисел не дорівнює нулеві. Припустимо для визначеності, що $M>0$ і що функція приймає своє найбільше значення при $x=c$, тобто $f(c)=M$. При цьому помітимо, що c не дорівнює ні a, ні b, так як за умовою $f(a)=0$, $f(b)=0$. Так як $f(c)$*-найбільше* значення функції, то $f(c+\Delta x)—f(c)\leq 0$ як при $\Delta x >0$, так і при $\Delta x < 0$.

Звідси випливає, що

$$\frac{f(c+\Delta x-f(c)}{\Delta x}\leq 0 \quad \text{при } \Delta x>0, \ (6.1)$$

$$\frac{f(c+\Delta x-f(c)}{\Delta x}\geq 0 \quad \text{при } \Delta x<0, \quad (6.2)$$

Так як за умовою теореми похідна при $x=c$ існує, то, переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leq 0 \quad \text{при } \Delta x>0,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c+\Delta x-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geq 0 \quad \text{при } \Delta x<0.$$

Але співвідношення $f'(c)\leq 0$ і $f'(c)\geq 0$ сумісні лише в тому випадку, якщо $f'(c)=0$. Отже, усередині відрізка $[a,b]$ є точка c, у якій похідна $f'(x)$ дорівнює нулеві. Теорема про корені похідної має просте геометричне тлумачення: якщо безперервна крива, яка має в кожній точці дотичну, перетинає вісь Ox у точках з абсцисами a і b, то на цій кривій найдеться принаймні одна точка з абсцисою c, $a<c<b$, у якій дотична паралельна осі Ox.

Зауваження 1. Доведена теорема залишається справедливою і для такої диференційовної функції, яка на кінцях відрізка $[a,b]$ не обертається в нуль, але приймає рівні значення $f(a)=f(b)$ (рис. 6.1). Доведення у цьому випадку проводиться точно так само, як і раніше.

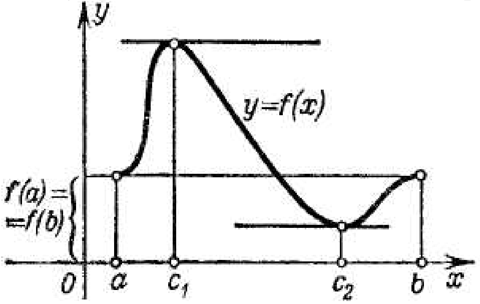


Рис. 6.1.

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ така, що похідна існує не у всіх точках усередині відрізка $[a,b]$, то твердження теореми може виявитися невірним (тобто в цьому випадку на відрізку $[a,b]$ може не виявитися такої точки c, у якій похідна $f'(x)$ обертається в нуль).

Так, наприклад, функція $y=f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 6.2) безперервна на відрізку [—1,1] і обертається в нуль на кінцях відрізка, однак похідна

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

усередині проміжку в нуль не обертається. Це відбувається тому, що усередині проміжку існує точка $x=0$, у якій похідна не існує (обертається в нескінченність).

Графік, зображений на рис. 6.3, дає нам ще однин приклад функції, похідна якої не обертається в нуль на відрізку [0, 2],

Для цієї функції також не виконані умові теореми Ролля, так як в точці $x=1$ функція не має похідної.

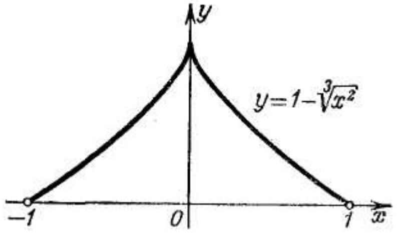


Рис. 6.2.

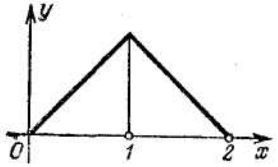


Рис. 6.3.

6.2. Теорема про скінченні прирости (теорема Лагранжа)

Теорема Лагранжа. *Якщо функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна у всіх внутрішніх точках цього відрізка, то усередині відрізка $[a,b]$ найдеться принаймні одна така точка c, $a<c<b$, що*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \quad (6.3)$$

Доведеня. Позначимо буквою Q число

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

тобто покладемо

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (6.4)$$

і розглянемо допоміжну функцію $Ff(x)$, визначену рівністю

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)Q. \quad (6.5)$$

З'ясуємо геометричний зміст функції $F(x)$. Для цього напишемо спочатку рівняння хорди AB (рис. 6.4), з огляду на те, що її кутовий коефіцієнт дорівнює

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$$

і що вона проходить через точку *(a; f(a))*:

$$y - f(a)=Q(x-a),$$

звідси $y=f(a)+Q(x-a),$

але $F(x)= f(x)- [f(a)+Q(x-a)].$

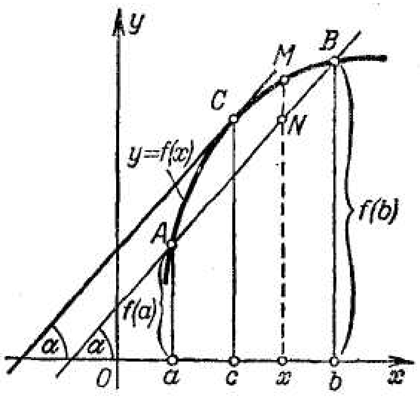


Рис. 6.4.

Отже, *F(x)* для кожного значення *x* дорівнює різниці ординат кривої *y=f(x)* і хорди *y=f(a)+Q(x — a)* для точок з однаковою абсцисою.

Легко бачити, що *F(x)* безперервна на відрізку [*a*,*b*], диференційовна усередині цього відрізка і обертається в нуль на кінцях відрізка, тобто *F(a)*=0, *F(b)*=0. Отже, до функції *F(x)* може бути застосована теорема Ролля. Відповідно до цієї теореми усередині відрізка існує точка *x=c* така, що *F'(c)*=0.

Але $F'(x)=f'(x) – Q$.

Значить $F'(c)=f'(c) – Q=0$.

Звідки $Q=f'(c)$.

Підставляючи значення Q у рівність (6.4), будемо мати

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \quad (6.6)$$

звідки безпосередньо випливає формула (6.3). Таким чином, теорема доведена.

Щоб з'ясувати геометричний зміст теореми Лагранжа, звернемося до рис.6.4. З рисунка безпосередньо ясно, що величина

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

являє собою тангенс кута α нахилу хорди, що проходить через точки *A* і *B* графіка з абсцисами *a* і *b*.

З іншого боку, *f'*(*c*) є тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці з абсцисою *c*. Таким чином, геометричний зміст рівності (6.6) або рівносильній їй рівності (6.3) полягає в наступному: якщо у всіх точках дуги *AB* існує дотична, то на цій дузі найдеться точка *C* між *A* і *B,* у якій дотична паралельна хорді, що з'єднує точки *A* і *B*. Помітимо, далі, наступне. Так як значення *c* задовольняє умові *a<c<b>,* то *c — a<b — a*, або *c — a*=θ*(b—a),* де θ є деяке число, яке заключене між 0 і 1, тобто 0<θ<1. Але тоді *c=a*+θ*(b — a),* і формулі (6.3) можна придати наступний вигляд:

$$f(b)- f(a)=(b-a) f'[a+ \theta(b-a)], \quad 0< \theta <1. \quad (6.7)$$

6.3. Теорема про відношення приростів двох функцій (теорема Коші)

Теорема Коші. *Якщо f(x) і φ(x) — дві функції, які безперервні на відрізку* [*a,b*] *і диференційовні усередині нього, причому φ'(x) ніде усередині відрізка не обертається в нуль, то усередині відрізка* [*a, b*] *найдеться така точка x=c, a<c<b, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}. \quad (6.8)$$

Доведення. Визначимо число *Q* рівністю

$$Q=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}. \quad (6.9)$$

Відзначимо, що $\varphi(b) — \varphi(a)\neq 0$,

так як в противному випадку φ*(b)* дорівнювала б φ(*a*), і тоді по теоремі Ролля похідна *φ'(x)* оберталася б у нуль усередині відрізка, що суперечить умові теореми.

Складемо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x) –f(a)-Q[\varphi(x) — \varphi(a)]$$

Очевидно, що *F(a)*=0 і *F(b)*=0 (це випливає з визначення функції *F(x)* і визначення числа *Q)*. Помітивши, що функція *F(x)* задовольняє на відрізку $[a,b]$ всім умовам теореми Ролля, виконуємо заключення, що між a і b існує таке значення $x=c$ $(a<c<b)$, що $F'(c)=0$. Але

$$F'(x)=f'(x)-Q\varphi'(x),$$

отже,

$$F'(c)=f'(c)-Q\varphi'(c).$$

Звідки

$$Q=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Підставляючи значення Q у рівність (6.4), одержимо рівність (6.3).

Зауваження. Теорему Коші не можна довести, як це може показатися з першого погляду, застосуванням теореми Лагранжа до чисельника і знаменника дробу

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Дійсно, ми одержали б у цьому випадку (після скорочення дробу на $(b - a)$) формулу

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)},$$

у якій $a<c_1<b$, $a<c_2<b$. Але так як, узагалі говорячи, $c_1\neq c_2$, то отриманий результат, мабуть, не дає ще теореми Коші.

6.4. Правило Лопіталя

Невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$

Раніше ми говорили, що при обчисленні границі відношень двох нескінченно малих можуть виходити різні результати. У першому друкованому підручнику по диференційному численню, було опубліковано знайдене Бернуллі просте правило для обчислення такої границі, придатне в багатьох випадках. Нехай шукається границя

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, \qquad (6.10)$$

причому

$$\varphi(t_0)=\psi(t_0)=0, \qquad (6.11)$$

тобто ми маємо справу з невизначеністю вигляду $\frac{0}{0}$. Нехай якимось способом знайдена границя

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}=k, \quad (6.12)$$

кінцева або нескінченна. Тоді стверджують, що і границя (6.10) дорівнює k, тобто *для невизначеностей вигляду* $\frac{0}{0}$

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\lim_{t\to t_0}\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}$$

— границя відношення функцій дорівнює границі відношення похідних.

Для доведення розглянемо лінію $y=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ на площині x, y; тоді при $t\to t_0$ згідно (6.11) ця лінія наближається до початку координат. Щоб довідатися, як саме вона наближається (на зразок спіралі або з визначеного напряму і з якого саме), помітимо, що згідно (6.12)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi'(t)dt}=\frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)}\to k \quad (\text{при } t\to t_0).$$

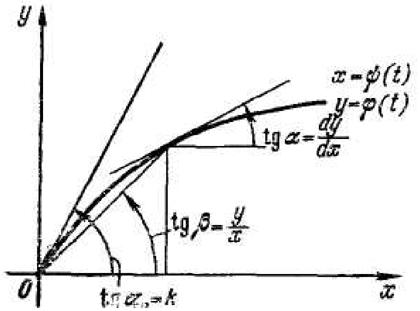


Рис. 6.5.

Значить (рис. 6.5), при наближенні до початку координат дотична, повертаючись, у границі стає під таким кутом α_0 до осі x, що $\operatorname{tg}\alpha_0=k$. Але тоді і «кут піднесення» β (див. рис. 6.5) при наближенні до початку координат прагне до α_0, тобто

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}=\frac{y}{x}=tg\,\beta \xrightarrow[t\to t_0]{} tg\,\alpha_0=k\ ,\ (6.14)$$

що і потрібно було довести.

Іноді при застосуванні правила Лопіталя виявляється, що відношення похідних знову є невизначеністю вигляду $\frac{0}{0}$; тоді це правило може бути знову застосоване і т.д.

Наприклад,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6x}=\frac{1}{6};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-4\cdot 2^{-x}}{(x-1)^2}=(\frac{0}{0})=\lim_{x\to 1}\frac{2^x\ln 2+4\cdot 2^{-x}\ln 2}{2(x-1)}=\frac{4\ln 2}{0}=\pm\infty;$$

у першому прикладі правило Лопіталя було застосовано три рази, а в другому один раз.

Розглянемо ще кілька прикладів

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5}{3}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2\cdot$$

Правило Лопіталя для невизначеності вигляду (6.10) завжди приводить до мети, якщо t_0— кінцеве число, а чисельник або знаменник мають *цілий* порядок малості в порівнянні з t — t_0 . Дійсно, з того ж правила Лопіталя можна вивести, що при кожнім диференціюванні порядок малості знижується на одиницю, а тому після декількох кроків

ми одержимо в чисельнику або знаменнику «нульовий порядок малості», тобто кінцева границя, яка не дорівнює нулеві, і невизначеності не буде.

Невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$

Правило Лопіталя (6.13) зберігається і для невизначеностей вигляду $\frac{\infty}{\infty}$, тобто коли замість умови (6.11) ставиться умова $\varphi(t_0)|=|\psi(t_0)|=\infty$

Доведення аналогічне проведеному раніше, однак тепер при $t\to t_0$, лінія $y=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ не наближається до початку координат, а іде в нескінченність.

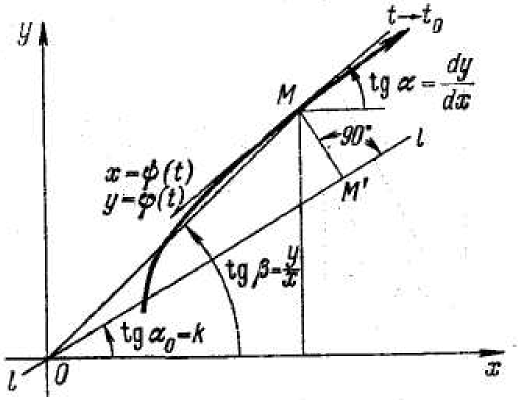


Рис. 6.6.

При цьому відповідно до умови (6.12) ця лінія повертається так, що кут α, який вона (тобто її дотична) складає з віссю x, прагне до α_0, де tg α_0= k. Але тоді шлях, пройдений точкою M цієї лінії уздовж прямої ll (див. рис. 6.6), буде нескінченно великою величиною більш високого порядку, чим шлях пройдений поперек цього напряму, точніше кажучи, MM'«OM. Виходить, при віддаленні точки M на нескінченність $\angle MOM'\to 0$ і тому «кут піднесення» β прагне до α_0 і ми можемо написати ті ж формули (6.14), чим доведення і завершується.

Приведемо кілька важливих прикладів:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^k}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{kx^k}=\frac{1}{\infty}=0 \ (k>0);$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{a^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a^x\ln a}=\frac{1}{\infty}=0 \ (a>0);$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{b^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\left(\sqrt[k]{b}\right)^x}\right)^k=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a^x}\right)^k=0^k=0 \ (k>0),\ b>1).$$

Таким чином, при прагненні аргументу до нескінченності *логарифмічна функція прагне до нескінченності повільніше, ніж будь-яка степенева* (з додатним показником степеня), *а степенева— повільніше, ніж будь-яка показникова* (з основою, яка більше одиниці).

До невизначеностей іншого вигляду правило Лопіталя застосовується після перетворення їх до вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$

Це можна робити за схемою

$$0\cdot\infty=0\frac{1}{0}=\frac{0}{0},\quad \infty-\infty=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\frac{0-0}{0\cdot 0}=\frac{0}{0}$$

(це, звичайно, умовний запис, що говорить тільки про вигляд розглянутих величин). До степеневих невизначеностей можна застосовувати правило Лопіталя після їхнього логарифмування.

Розглянемо ряд прикладів

Приклад 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{cx^2-d}=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{2cx}=\frac{a}{c}.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tgx}{tg3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\frac{2\cdot 3\cos 3x\sin 3x}{2\cos x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin 3x}{\sin x}\cdot\frac{(-1)}{1}=3\frac{(-1)}{1}\cdot\frac{(-1)}{1}=3$$

Приклад 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Узагалі при будь-якому цілому $n>0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots 1}{e^x}=0.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 0}(x\ ln\ x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

Приклад 6. Потрібно знайти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Поклавши $y=x^x$, знаходимо

$\ln\lim y=\lim\ln y=\lim\ln(x^x)=\lim(x\ln x);$

6.5. Формула і ряд Тейлора

Формула Тейлора. Раніше ми бачили, що заміна приросту функції її диференціалом дає можливість одержати багато наближених формул. Виявляється, що ці формули можна значно уточнити, якщо застосувати диференціали вищого порядку; про це і буде говорити формула Тейлора.

Припустимо спочатку, що нам дано многочлен *P(x).* Зазвичай він вважається розкладеним по степенях *x,* але його без труднощів можна розкласти і по степенях *x-a*, де *a* — будь-яке число.

Нехай, наприклад, ми хочемо розкласти многочлен $P(x)=5—3x+2x^3$ по степенях $x—4$. Для цього треба в $P(x)$ підставити $x=[4+(x—4)]$ і потім розкрити квадратні дужки, не розкриваючи круглих:

$P(x)=5-3[4+(x-4)]+2[4+(x-4)]^3=5-12-3(x-4)+128+96(x-4)+24(x-4)^2+2(x-4)^3=$
$=121+93(x-4)+24(x-4)^2+2(x-4)^3$.

У загальному випадку для многочлена степеня n можна написати

$$P(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+a_3(x-a)^3+\ldots+a_n(x-a)^n\ . \quad (6.15)$$

Коефіцієнти тут можна знайти так. Поклавши спочатку $x=a$, одержимо $P(a)=a_0$. Продиференціюємо формулу (6.15):

$$P'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}.$$

Якщо тут покласти $x=a$, одержимо $P'(a)=a_1$. Продиференціюємо ще раз

$$P''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-a)+\ldots+(n-1)\,na_n\,(x-a)^{n-2}.$$

Звідси $P''(a)=1\cdot 2a_2$. Далі аналогічно одержимо $P'''(a)=1\cdot 2\cdot 3a$ і т.д., у загальному випадку$P^{(k)}(a)=k!a_k$ (де $k!=1\cdot 2\ldots k$. Звідки $a_k=P^{(k)}(a)/k!$ Отже, формулу (6.15) можна переписати в такому вигляді:

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=$$

$$=P(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k, \quad (6.16)$$

Так, у приведеному прикладі

$P'(x)=-3x+6x^2,\ P''(x)=12x,\ \ P'''(x)=12,$

$P(4)=5-3\cdot 4+2\cdot 4^3=121, \frac{P'(4)}{1!}=-3+6\cdot 4^2=93, \frac{P''(4)}{2!}\frac{12\cdot 4}{2}=24,$

$\frac{P'''(4)}{3!}=\frac{12}{6}=2,$

тобто одержуємо ті ж значення коефіцієнтів, що і вище.

Приклад. Покладемо $P(x)=(s+x)^n$, $a=0$ і застосуємо формулу (6.17). Тоді

$P'(x)=n(s+x)^{n-1};$

$P''(x)=n(n-1)(s+x)^{n-2};$

…………………………..

$P^{(n)}(x)=n(n-1)\ \ldots\ 1$

і тому по формулі (6.16)

$$(s+x)^n=s^n+\frac{n}{1!}s^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}s^{n-2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{n!}x^n.$$

Таким чином, ми одержуємо явний вираз для біноміальних коефіцієнтів. Якщо тепер замість многочлена $P(x)$ узяти довільну функцію $f(x)$, то формула (6.16) уже не буде справедлива; але якщо позначити відмінність лівої частини формули (6.16) від правої через $R_n(x)$ *(залишковий член),* то можна написати

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+R_2(x). \quad (6.17)$$

Це і є *формула Тейлора.* Істотно, що в ній *при* $x\to a$ *залишковий член має принаймні* $(n+1)$*-й порядок малості в порівнянні з* $x — a$, тобто більш високий порядок, чим останній з виписаних «точних» членів у формулі (6.17). Для доведення цього покладемо для простоти, що, наприклад, $n=2$, тобто

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Виражаючи звідси $R_2(x)$ і застосовуючи правило Лопіталя (п.13), одержимо

$$\lim_{x\to a}\frac{R_2(x)}{(x-a)^3}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)-\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}{(x-a)^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)-f''(a)(x-a)}{3(x-a)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-f''(a)}{3\cdot 2(x-a)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'''(x)}{3!}=\frac{f'''(a)}{3!}. \qquad (6.18)$$

(кінцева границя). Звідси і випливає твердження про порядок малості $R_2(x)$, а аналогічно - і $R_n(x)$.

Якщо позначити $x=a+h$, то, обриваючи формулу (6.17) усе далі і далі, одержимо усе більш точні (при малих $|h|$) формули:

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h \quad (6.19)$$

з точністю до величини порядку h^2

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2 \quad (6.20)$$

з точністю до величини порядку h^3,

$$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2}h^2+\frac{f'''(a)}{6}h^3 \quad (6.21)$$ і т.д.

Многочлени (відносно $h=x—a$), які стоять у правих частинах, називаються *многочленами Тейлора.* Вони дають у деякому змісті найкращий наближений вираз функції $f(x)$ у вигляді многочлена даного степеня поблизу значення $x=a$. А саме, серед усіх многочленів цього степеня многочлен Тейлора відрізняється від $f(x)$ на величину найвищого порядку малості при $x\to a$. Наприклад, якщо в правій частині формули (6.20) змінити хоча б один коефіцієнт, то відмінність буде уже у величинах 0,1 або 2-го порядку малості, а не 3-го, як для многочлена Тейлора.

Ряд Тейлора. Так як похибки формул (6.19), (6.20) , (6.21) і т.д. стають усе більш високого порядку малості, то природно припустити, що при малих $|h|$ можна перейти до границі й одержати *точне* представлення $f(a+h)$ у вигляді суми нескінченного ряду

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\ldots=$$

$$=f(a)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.\ (6.22)$$

Цей ряд називається *рядом Тейлора.*

Далі будуть систематично вивчатися такі ряди, і як ми побачимо, що це припущення виправдується; зокрема, тоді буде з'ясованим питання, для яких саме h у принципі можна користуватися формулою (6.22). Виявляється, що це можна робити завжди, якщо ряд «практично сходиться» (однак при цьому функція, що розкладається в ряд Тейлора, не повинна задаватися різними формулами на різних ділянках зміни аргументу). На підставі цього ми будемо застосовувати ряди Тейлора вже зараз.

Формулу (6.22) можна переписати у вигляді $(a+h=x,\ h=x—a)$:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots\quad(6.23)$$

(розкладання по степенях $x—a$). Зокрема, якщо $a=0$, одержимо *розкладання по степенях x*

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots\quad(6.24)$$

яке іноді історично неправильно називається «*рядом Маклорена*». Ряд Тейлора можна переписати в іншому вигляді, якщо позначити

$$x — a = \Delta x;\ f(x) — f(a)= \Delta f;\ f'(a)\,(x — a)=f'(a)\Delta x=df;$$

$$f''(a)(x — a)^2=f''(a)(\Delta x)^2=d^2f \text{ і т.д.}$$

Одержимо з (6.23)

$$\Delta f= df+\frac{d^2f}{2!}+\frac{d^3f}{3!}+\ldots+\frac{d^nf}{n!}+\ldots\ (6.25)$$

Обриваючи цю формулу, одержимо усе більш і більш точні (при малих Δx) формули: $\Delta f\approx df$ з точністю до величини порядку $(\Delta x)^2$;

$\Delta f\approx df+1/2\, d^2f$ точністю до величини порядку $(\Delta x)^3$ і т.д.

6.6. Розкладання по формулі Тейлора функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$

1. Розкладання функції $f(x)=e^x$.

Знаходячи послідовні похідні від $f(x)$, одержимо:

$f(x)=e^x,\quad f(0)=1,$

$f'(x)=e^x,\quad f'(0)=1,$

…………………..

$f^{(n)}(x)=e^x,\quad f^{(n)}(0)=1.$

Підставляючи отримані вирази у формулу Тейлора будемо мати:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\quad 0<\theta<1.$$

Якщо $|x|\le 1$, то, узявши $n=8$, одержимо оцінку залишкового члена:

$$R_8<\frac{1}{9!}3<10^{-5}.$$

При $x=1$ одержимо формулу, яка дозволяє знайти наближене значення числа e.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{8!};$$

виконуючи обчислення в десяткових дробах із шістьма (інакше сумарна похибка округлення при розрахунках може значно перевищити R_8, наприклад, при кількості доданків, рівному 10 похибка може досягти величини $5\cdot10^{-6}$) десятковими знаками, а потім округляючи результат до п'яти десяткових знаків, знайдемо $e = 2{,}71828$.

Тут похибка не перевершує числа 3/9! або 0,00001. Відзначимо, що, яке б не було x, залишковий член

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0,\text{при } n\to\infty.$$

Дійсно, так як 0<1, то величина $e^{\theta x}$ при фіксованому x обмежена (вона менше, ніж e^x, при $x>0$, і менше, ніж 1, при $x<0$). Доведемо, що, яке б не було фіксоване число x,

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}\to 0, \text{ при } n\to\infty.$$

Дійсно, $\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|$.

Якщо x є фіксоване число, то найдеться таке ціле додатне число N, що $|x|<N$.

Введемо позначення $|x|/N=q$; тоді, помітивши, що $0<q<1$, можемо написати при $n=N+1$, $N+2$, $N+3$ і т.д.:

$$\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|=\left|\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{n}\cdot\frac{x}{n+1}\right|=\left|\frac{x}{1}\right|\cdot\left|\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\frac{x}{3}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{N-1}\right|\cdot\left|\frac{x}{N}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x}{n}\right|\cdot\left|\frac{x}{n+1}\right|<$$

$$<\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{x}{N-1}\cdot q\cdot q\cdot\ldots\cdot q=\frac{x^{N-1}}{(N-1)!}q^{n-N+2},$$

тому що $\left|\frac{x}{N}\right|=q$, $\left|\frac{x}{N+1}\right|<q$, $\cdots$ $\left|\frac{x}{n+1}\right|<q$.

Але величина $(x^{N-1})/(N-1)!$ стала, тобто не залежить від n, а q^{n-N+2} прагне до нуля при $n\to\infty$. Тому

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Отже, і $R_n(x)=e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ при $n\to\infty$.

З попереднього випливає, що при будь-якому x, узявши достатнє число членів, ми можемо обчислити e^x з будь-яким степенем точності.

2. Розкладання функції *f(x)*=sin *x*. Знаходимо послідовні похідні від $f(x)=\sin x$:

$f(x)=\sin x$, $\qquad f(0)=0$,

$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f'(0)=1$,

$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f''(0)=0$,

$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f'''(0)=-1$,

$f^{(IV)}(x)=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f^{(IV)}(0)=0$,

……………………………………………..

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, $\qquad f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$,

$f^{(n+1)}(x)=\sin\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(n+1)}(\xi)=\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$.

Підставляючи отримані значення у формулу Тейлора, одержимо розкладання функції $f(x)=\sin x$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Так як

$$\left|\sin\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

при всіх значеннях x.

Застосуємо отриману формулу для наближеного обчислення sin 20°. Покладемо $n=3$, тобто обмежимося двома першими членами розкладання:

$$\sin 20^\circ=\sin\frac{\pi}{9}\approx\frac{\pi}{9}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3=0{,}342.$$

Оцінимо зроблену похибку, що дорівнює залишковому членові:

$$|R_3|=\left|\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\sin(\xi+\pi)\right|\le\left(\frac{\pi}{9}\right)^4\frac{1}{4!}\approx 0{,}00062<0{,}001.$$

Отже, похибка менше, ніж 0,001, тобто $\sin 20^\circ=0{,}342$ з точністю до 0,001.

На рис. 6.7 дано графіки функції *f(x)=sin x* і перші три наближння

$$S_1(x)=x,\quad S_2(x)=x-\frac{x^3}{3!},\quad S_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}-\frac{x5}{5!}.$$

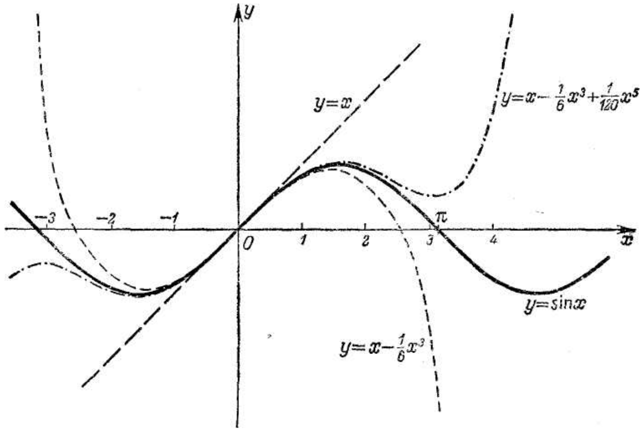


Рис. 6.7

3. Розкладання функції *f(x)=cosx.* Знаходячи значення послідовних похідних при x=0 від функції *f(x)=cosx* і підставляючи у формулу Маклорена, одержимо розкладання:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$|\xi|<|x|$.

Тут також $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ при всіх значеннях x.

Мікромодуль 13.
Приклади розв'язання типових задач

1. Розкладіть за формулою Маклорена функції:

а) $f(x)=\dfrac{1}{4-x^2}$;   б) $f(x)=ln(2x^2+7x+3)$.

Розв 'язання.

а) Запишемо функцію у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

Тоді за формулою елементарної функції маємо

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^4-\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+R_n(x)\right].$$

б)Виконаємо перетворення

$$ln(2x^2+7x+3)=ln(1+2x)(x+3)=ln(1+2x)+ln(x+3)=ln(1+2x)+ln(1+\frac{x}{3})+ln3$$

Скориставшись двічі формулою для розкладання логарифмічної функції, дістанемо

$$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+R_n^{\,1}(x),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^n)'}{(a^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}.$$

Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя.

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-e^x}{x}$.

Розв 'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}-e^{x}}{1}=3-1=2$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{2}}$.

Розв 'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}.$$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка x=0 дає невизначенність $\frac{0}{0}$.

Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}.$$

Знову маємо невизначенність $\frac{0}{0}$. Правило Лопіталя застосовуємо повторно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}\frac{1+1}{1}=2.$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}\quad (n\in N, a>0, a\neq 1)$.

Розв'язання. Тут невизначенність $\frac{\infty}{\infty}$.

Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^{n}\right)'}{\left(a^{x}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^{x}\ln a}.$$

Знову одержали невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Повторюючи процес *n* разів, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^{x}\ln a}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^{x}\ln^{2}a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{a^{x}\ln^{n}a}=\frac{n!}{\infty}=0$$

6. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 0}=x^{2}\ln x$.

Розв язання. В даному випадку маємо невизначеність $0\cdot\infty$

Перейдемо до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$, і знову застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to +0}x^{2}\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{1/x^{2}}=\lim_{x\to +0}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(1/x^{2}\right)'}=\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{-2/x^{3}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to +0}x^{2}=0.$$

7. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

Розв 'язання. Маємо невизначенність $\frac{\infty}{\infty}$. Знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sin x\right)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}\cos x.$$

Остання границя не існує. Тоді як

$$\frac{f(x)}{g(x)}\ \frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1.$$

Висновок. Границя відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ може існувати і тоді, коли відношення похідних $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ границі не має. Існування границі $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ є лише достатньою умовою існування границі $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

8. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x-\sec x)$.

Розв 'язання. Тут невизначеність ∞-∞. Зведемо її до невизначеності $\frac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x-\sec x)=\lim_{x\to\pi/2}\left(tgx-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\sin x-1}{\cos x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

9. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз значення $x=\frac{\pi}{4}$, переконаємося, що маємо невизначеність 0^0. Для зручності виконаємо заміну $\pi-2x=t$, тоді $t\to0$, $x=\frac{\pi-t}{2}$, $\cos x=sin\frac{t}{2}$.

Отже,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}=\lim_{t\to0}t^{sin(t/2)}=\lim_{t\to0}e^{sin(t/2)ln}=\quad e^{\lim\limits_{t\to o}\sin(t/2)\ln t}\quad=\lim_{t\to0}e^{A},$$

$$A=\lim_{t\to0}\sin(t/1)ln\ t=[0\cdot\infty]=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}t\ ln\ t=[0\cdot\infty]=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{\ln t}{1/t}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{(\ln t)'}{(1/t)'}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{1/t}{-1/t^2}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to0}t=0.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}=e^0=1.$

Мікромодуль 13.

Індивідуальні тестові завдання

Знайдіть границі, використовуючи правило Лопіталя

13.1. а) $\lim\limits_{x\to0}x\bullet ln^2x$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3^x}{x^2-5x+2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^x$

13.2. а) $\lim\limits_{x\to0}\sin x\bullet ln^2x$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2+3x+1}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}tg^x$

13.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2e^{-x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{x-\sin x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$

13.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1)4^{-x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(ctg)^{\sin x}$

13.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x-2)3^{-x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

13.6. а) $\lim\limits_{x\to0}[(1-\cos x)ctg\,x]$; *б)* $\lim\limits_{x\to1}1\frac{1}{\ln x}-x$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

13.7. а) $\lim\limits_{x\to0}[\ln x\ ln(x-1)]$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^2$

13.8. а) $\lim\limits_{x\to0}x^2e^{x^{\frac{1}{2}}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-arctgx}{x^3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^2$

13.9. а) $\lim\limits_{x\to0}x^4\bullet2^{x^{\frac{1}{2}}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\cos x-x\cos}{x^2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{\lg x}$

13.10. а) $\lim\limits_{x\to0}x^{-2}\bullet2^{x^{\frac{1}{2}}}$; *б)* $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln\cos4x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{ctg^2x}$

13.11. а) $\lim\limits_{x\to0} x^{-4}\cdot5^{x^{\frac{1}{2}}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(\cos2x)^{x^{-2}}$

13.12. а) $\lim\limits_{x\to0} x^{-4}\cdot6^{x^{\frac{1}{4}}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^4}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x)^{x}$

13.13. а) $\lim\limits_{x\to2} \ln(5-2x)\cdot\ln(4-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x}{x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to1}(\sin x)^2$

13.14. а) $\lim\limits_{x\to3} \ln(x-3)\cdot\ln(7-2x)$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{ctgx}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}(tgx)^{tg\,2x}$

13.15. а) $\lim\limits_{x\to1} \ln(2x-1)\cdot\ln(2-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$; в) $\lim\limits_{x\to1} x^{\frac{1}{1-x}}$

13.16. а) $\lim\limits_{x\to0} (1-\cos x)ctg^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 7x)}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^{x}$

13.17. а) $\lim\limits_{x\to0} (\cos^2 x-3\cos x+2)\cdot e^{x^{\frac{1}{2}}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(tg^3x)}{\ln(\sin 4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to0} x^{tg\,x}$

13.18. а) $\lim\limits_{x\to0} (\cos^2 x-1)\cdot e^{x^{\frac{1}{2}}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{2x-\pi}$

13.19. а) $\lim\limits_{x\to0} (1-\cos^2 x)\cdot e^{x^{\frac{1}{2}}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{arctgx}{x}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}$

13.20. а) $\lim\limits_{x\to0} \arcsin x\cdot\ln^2(2x)$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}$

13.21. а) $\lim\limits_{x\to0} x^3\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3^x}{x^3-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to0} x^{\arcsin x}$

13.22. а) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x-3^x}{x^2-6x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to0} (-\ln x)^x$

13.23. а) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt[4]{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-6}{(1,1)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to0} (ctg\,x)^{\sin x}$

13.24. а) $\lim\limits_{x\to0} x^{8}\cdot2^{x^{\frac{1}{4}}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-x-2}{(1,5)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{tgx}{x}\right)^{x^{\frac{1}{2}}}$

13.25. а) $\lim\limits_{x\to0} \sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+10x-20}{(1,5)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$

Мікромодуль14.

Застосування похідної при дослідженні функцій

Постановка задачі

Вивчення кількісної сторони різних явищ природи проводять для встановлення і вивчення функціональної залежності між змінними величинами, які використовуються у даному явищі. Якщо таку функціональну залежність можна виразити аналітично, тобто у вигляді однієї або декількох формул, то ми одержуємо можливість досліджувати цю функціональну залежність засобами математичного аналізу. Наприклад, при дослідженні явища польоту снаряда в порожнечі виходить формула, що дає залежність дальності польоту *R* від кута піднесення α і початкової швидкості v_0:

$$R=\frac{v_0^{\,2}\sin 2\alpha}{g}$$ (g – прискорення сили тяжіння)

Одержавши цю формулу, ми маємо можливість з'ясувати, при якому α дальність *R* буде найбільшою, при якому - найменшою, які повинні бути умови, щоб при збільшенні кута α збільшувалася дальність і т.д.

Розглянемо інший приклад. У результаті вивчення коливання вантажу на ресорі (вагон, автомобіль) одержали формулу, що показує, як відхилення *y* вантажу від положення рівноваги залежить від часу *t*

$$y=e^{-kt}(A\cos\omega t+B\sin\omega t).$$

Величини *k, A, B,* ω, що входять у цю формулу, мають цілком визначене значення для даної коливальної системи (вони залежать від пружності ресори, від величини вантажу і т.д., але не змінюються з часом *t)* і тому розглядаються нами як сталі. На підставі приведеної формули можна з'ясувати, при яких значеннях *t* відхилення *y* збільшується з приростом *t*, як міняється величина найбільшого відхилення в залежності від часу, при яких значеннях *t* спостерігаються ці найбільші відхилення, при яких значеннях *t* виходять найбільші швидкості руху вантажу і ряд інших питань.

Усі перераховані питання входять у поняття «досліджувати поводження функції». Очевидно, з'ясувати всі ці питання, обчислюючи значення функції в окремих точках (подібно тому, як ми це робили раніше), досить важко. Метою цього мікромодуля є встановлення більш загальних прийомів дослідження поводження функцій.

6.7. Зростання і спадання функції

Раніше було дане визначення зростаючої й спадної функцій. Тепер ми застосуємо поняття похідної для дослідження зростання й спадання функції.

Теорема. 1) *Якщо функція f(x), що має похідну на відрізку* [*a,b*], *зростає на цьому відрізку, то її похідна на відрізку* [*a,b*] *не від'ємна, тобто* $f'(x)\ge 0$.

2) *Якщо функція f(x) безперервна на відрізку [a,b] і диференційовна в проміжку (a,b), причому* $f'(x)>0$ *для* $a<x<b$, *то ця функція зростає на відрізку* [*a,b*].

Доведення. Доведемо спочатку першу частину теореми. Нехай *f(x)* зростає на відрізку [*a,b*]. Придамо аргументові *x* приріст Δx і розглянемо відношення

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad (6.26).$$

Так як *f(x)* - функція зростаюча, то

$$f(x+\Delta x) > f(x) \quad при\ \Delta x > 0$$

$$f(x+\Delta x) < f(x) \quad при\ \Delta x < 0$$

В обох випадках

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0, \quad (6.27)$$

а отже,

$$\lim_{\Delta x\to o}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0$$

тобто $f'(x)\ge 0$, що і потрібно було довести. (Якби було $f'(x)<0$, то при досить малих значеннях Δx відношення (6.26) було б від'ємним , що суперечить співвідношенню (6.27)).

Доведемо тепер другу частину теореми. Нехай $f'(x)>0$ при всіх значеннях *x,* які належать проміжкові (*a*, *b*). Розглянемо два будь-яких значення x_1 і x_2, $x_1 < x_2$, які належать відрізкові [*a,b*].

По теоремі Лагранжа про скінченні прирости маємо:

$$f(x_2) — f(x_1) = f'(\xi)(x_2-x_1), \qquad x_1<\xi< x_2 .$$

За умовою $f'(\xi)>0$, отже, $f(x_2) — f(x_1)>0$, а це і значить, що *f(x)*-зростаюча функція. Аналогічна теорема має місце і для спадної (диференційовної) функції, а саме.

Якщо f(x) спадає на відрізку [*a,b*], *то* $f'(x)\le 0$ *на цьому відрізку. Якщо* $f'(x)<0$ *у проміжку (a, b), то f(x) спадає на відрізку* [*a,b*]. (Звичайно, ми і тут припускаємо, що функція безперервна у всіх точках відрізка [*a, b*] і диференційовна усюди на *(a, b).)*

Зауваження. Доведена теорема виражає наступний геометричний факт. Якщо на відрізку [*a,b*] функція *f(x)* зростає, то дотична до кривої *y=f(x)* у кожній точці на цьому відрізку утворить з віссю *Ox* гострий кут φ або — в окремих точках — горизонтальна; тангенс цього кута не від'ємний: $f'(x)=\mathrm{tg}\varphi\ge 0$ (рис. 6.8, *а).*

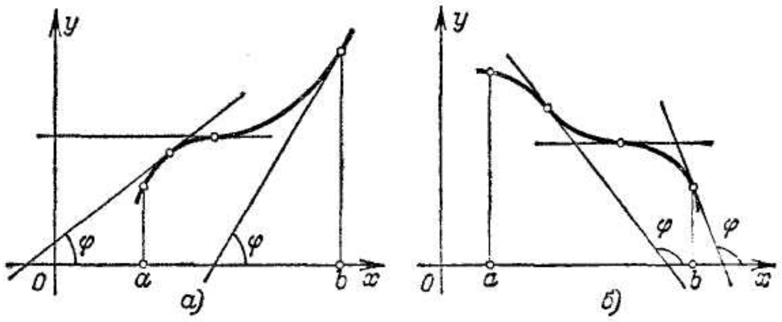


Рис. 6.8.

Якщо функція *f(x)* спадає на відрізку [*a,b*], то кут нахилу дотичної - тупий (або - в окремих точках - дотична горизонтальна); тангенс цього кута не додатний (рис.6.8.б). Аналогічно ілюструється і друга частина теореми. Теорема дозволяє судити про зростання або спадання функції за знаком її похідної.

Приклад. Визначити області зростання й спадання функції $y=x^4$

Розв'язання. Похідна дорівнює $y'=4x^3$; при $x>0$ маємо $y'>0$ - функція зростає; при $x<0$ маємо $y'<0$ - функція спадає (рис.6.9).

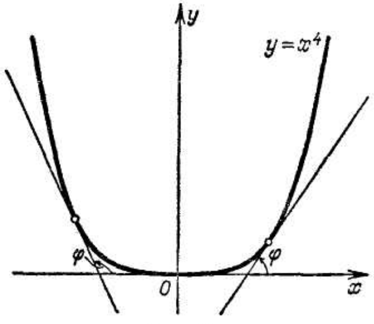


Рис. 6.9.

6.8. Інтервали монотонності і екстремум

Знак похідної. Нехай розглядається функція $y=f(x)$; *у цьому пункті ми будемо припускати, що як вона сама, так і її похідна не мають розривів.* Орієнтовний графік цієї функції показаний на рис. 6.10.

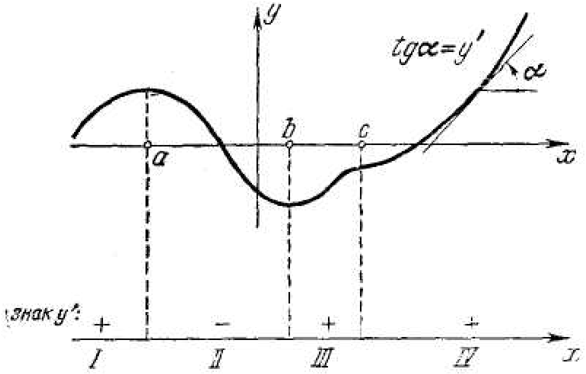


Рис. 6.10.

Так як $y'=tg\alpha$, то *функція зростає в кожнім інтервалі, у якому її похідна додатна, і спадає в кожнім інтервалі, у якому її похідна від'ємна.* Іншими словами, якщо швидкість зміни якої-небудь величини додатна, то ця величина зростає, а якщо швидкість від'ємна, то величина спадає.

Так як похідна, переходячи безупинно від додатних значень до від'ємних, повинна пройти через нульове значення, то в точках, у яких інтервал зростання змінюється інтервалом спадання, буде $y'=0$. Точки x, у яких $f'(x)=0$, називаються *стаціонарними точками* функції f: у них миттєва швидкість зміни функції дорівнює нулеві, тобто це як би точки миттєвого спокою.

На рис. 6.10 показані три стаціонарні точки: a, b і c. Відповідні значення функції називаються її *стаціонарними значеннями.*

Зі сказаного випливає, що для находження інтервалів монотонності функції $f(x)$ треба на вісь x нанести всі стаціонарні точки цієї функції, після чого перевірити знак f' на кожнім з інтервалів між сусідніми стаціонарними точками. Інтервали, на яких $f'>0$, будуть інтервалами зростання, а інтервали, на яких $f'<0$, будуть інтервалами спадання функції f. При цьому якщо на двох сусідніх інтервалах знак f' однаковий, то вони складають єдиний інтервал монотонності; так, на рис. 6.10 інтервали *III* і *IV* складають єдиний інтервал зростання функції $f(x)$.

Очевидно також, що *інтервалами сталості функції f служать ті і тільки ті інтервали, на яких* $f'(x)\equiv0$, тому що на цих інтервалах функція f не може ні зростати, ні спадати.

Точки екстремуму. *Якщо при деякому* $x=x_0$ *значення* $f(x_0)$ *більше всіх «сусідніх» значень функції* (тобто значень $f(x)$ при x, досить близьких до x_0), *то точка* $x=x_0$ *називається точкою максимуму функції* f, *а значення* $f(x_0)$ *- її максимальним значенням.* Аналогічно визначаються *точка мінімуму* і *мінімальне значення* функції. Так, на рис.6.10 функція має точку максимуму при $x=a$ і точку мінімуму при $x=b$. В інших прикладах функція може мати

іншу кількість точок максимуму і мінімуму, причому в безперервній функції вони обов'язково чергуються. Так, на рис. 6.11 функція має три точки максимуму і два — мінімуми.

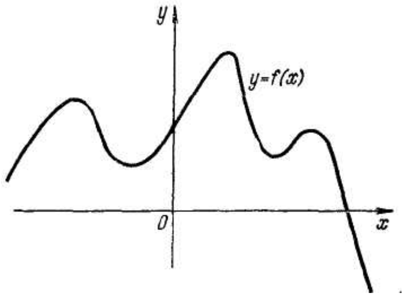


Рис. 6.11.

Як максимум, так і мінімум поєднуються словом *«екстремум»* від латинського extremus, що значить «крайній». З попереднього пункту випливає, що *точками екстремуму служать точки, при переході через які похідна змінює знак.* Більш конкретно: *якщо при переході* x *через точку* $x=a$ *в додатному напряму знак* $f'(x)$ *змінюється з + на —, то при* $x=a$ *функція* f *має максимум,* так як при цьому переході функція f змінює зростання на спадання (див. рис. 6.10). Аналогічно *при переході через точку мінімуму похідна змінює знак з — на +.* З попереднього пункту випливає також, що в зазначених там припущеннях *усі точки екстремуму функції будуть її стаціонарними точками.* Цю необхідну ознаку екстремуму одержав Ферма. Як видно з рис. 6.10, ознака не є достатньою, тобто стаціонарна точка може і не бути точкою екстремуму.

Достатніми ознаками користуються рідше, ніж необхідними, так як в багатьох конкретних задачах часто буває заздалегідь ясно, що екстремум повинен бути, і навіть приблизно, де він буде, тільки точне його значення невідоме. Якщо при цьому необхідна ознака дасть лише одну можливу точку, то, виходить, там і буде екстремум. Якщо екстремумів декілька, то їх можна знаходити одночасно з відшуканням інтервалів монотонності, як про це говорилося в попередньому пункті.

Так як поблизу стаціонарної точки значення функції міняються досить повільно, то з ознаки Ферма випливає, що якщо точка екстремуму знайдена з деякою похибкою, то похибка у відповідному екстремальному значенні буде вищого порядку малості. Тому вигідно, якщо тільки це можливо, приводити задачу про находження тієї або іншої величини до задачі про находження екстремального або просто стаціонарного значення деякої функції. Тоді навіть грубе відшукання точки екстремуму дасть добрий остаточний результат.

Умови екстремуму можна одержати також за допомогою формули Тейлора. Будемо досліджувати точку $x=a$ для функції $f(x)$. Тоді з формули (6.19) бачимо, що якщо $f'(a)\neq0$, то екстремуму при $x=a$ нема, так як, змінюючи знак у h, ми змінимо знак і в $f'(a)h$, тобто в різниці $f(a+h)$—$f(a)$ (тому що величини порядку h^2 при малих h незначні в порівнянні з величиною $f'(a)h)$.

Якщо $f'(a)=0$, $f''(a)\neq0$, то з формули (6.20) аналогічним чином знаходимо, *що екстремум при* $x=a$ *буде: мінімум, якщо* $f''(a)>0$ (тоді $f(a + h)>f(a)$ при малих $|h|$), *і максимум, якщо* $f''(a)<0$. Якщо $f'(a)=0$, $f''(a =0$, $f'''(a)\neq0$, то з формули (6.21) випливає, що екстремуму при $x=a$ не буде; якщо $f'(a)=0$, $f''(a)=0$, $f'''(a)=0$, $f^{iv}(a)\neq0$, то екстремум буде і т.д.

Найбільше і найменше значення функції. Нехай, як і вище, функція $f(x)$ безперервна разом зі своєю похідною на деякому замкнутому інтервалі $a\leq x\leq b$ і потрібно знайти на ньому *найбільше і найменше значення цієї функції.* Тоді поряд з розглянутими в попередньому пункті *внутрішніми* екстремумами треба взяти до уваги також *крайові* екстремуми: так, на рис. 6.12 функція має крайовий мінімум при $x=a$ і крайовий максимум при $x=b$ поряд із двома внутрішніми екстремумами. Звичайно, у точках крайового екстремуму похідна не повинна обов'язково дорівнювати нулеві.

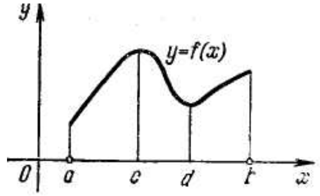


Рис. 6.12.

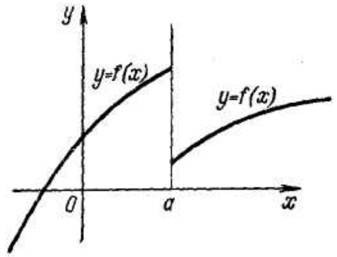


Рис. 6.13.

Далі треба мати на увазі, що в попередньому пункті розглядалися *локальні* (місцеві, від латинського locus — місце) екстремуми, а тут нас цікавлять *тотальні* (від латинського totalis — усеосяжний) максимум і мінімум. Тому для знаходження найбільшого значення функції на інтервалі $a \le x \le b$ треба знайти всі її внутрішні і скінченні максимуми на цьому інтервалі, а потім порівняти між собою усі відповідні максимальні значення: найбільший з максимумів і дасть найбільше значення функції. Аналогічно знаходиться найменше значення функції на замкнутому інтервалі. Для спрощення роботи можна просто порівняти всі стаціонарні і крайові значення функції: найбільше з них дасть тотальний максимум, а найменше — тотальний мінімум. Якщо функція $f(x)$ безперервна, але f' може мати розриви, то зміна зростання f на її спадання може відбуватися не тільки в точках, де f'=0, але й у точках, де f' має розрив. Для находження інтервалів монотонності функції f, тобто для з'ясування знака f', треба робити аналогічно тому, як раніше з'ясовувався знак f. Якщо при переході через деяке значення $x=a$ похідна $f'(x)$ змінює знак, при цьому перетинаючи розриви, то при значенні $x = a$ функція $f(x)$ має *гострий екстремум*. Поблизу гострого екстремуму функція f, звичайно, уже не буде такою яка повільно змінюється, як це є поблизу стаціонарних екстремумів, розглянутих у попередньому пункті.

Отже, повне формулювання необхідної умови екстремуму для безперервної функції така: *у точці екстремуму похідна обертається в нуль або терпить розрив.* Природно, що для точок гострого екстремуму умови, засновані на застосуванні формули Тейлора, відпадають; залишається умова, заснована на зміні знака похідної.

Якщо сама функція $f(x)$ має розриви, то точки розриву можуть служити кінцями інтервалів монотонності цієї функції, навіть якщо по обидві сторони від точки розриву f' має однаковий знак. Так, на рис. 6.13 усюди при $x \neq a$ буде $y'>0$ і в той же час є два інтервали зростання f: $-\infty<x<a$ і $a<x<\infty$, які не можна об'єднати в один. Тому при находжені інтервалів монотонності на вісь x треба нанести також усі точки розриву функції.

При находжені найбільшого значення функції, яка має розриви, треба мати на увазі, що така функція може вийти необмеженою зверху і тоді найбільшого значення, звичайно, не буде. Таке ж ускладнення може виникнути при розгляді функції, навіть безперервної, але на нескінченному інтервалі.

Але навіть якщо така обмеженість і буде, то про досягнення найбільшого значення при наявності точок розриву або у випадку необмеженості інтервалу часто можна говорити тільки в граничному змісті. Так, на рис. 6.13 найбільшим значенням є $f(a-0)$, причому

щонайменший перехід через точку a приводить до різкого зменшення цього значення, яке, таким чином, є «нестійким». У цьому випадку краще говорити не про найбільше значення, а про *«верхню границю»* значень функції, розуміючи під цим терміном найбільше з усіх значень функції і з усіх її границь.

Приклад 1. Нехай функція $y=f(x)=(1+x^2)/(1+x^4)$ розглядається на всій осі x. Точок розриву ні вона, ні її похідна

$$y' = \frac{2x(1+x^4)-4x^3(1+x^2)}{(1+x^4)^2} = 2x\frac{1-2x^2-x^4}{(1+x^4)^2}$$

не мають, і тому для находження інтервалів монотонності треба прирівняти y'=0, що дасть рівняння

$$x(1-2x^2-x^4)=0,$$

тобто

$$x_1=0, \quad x^4-2x^2-1=0, \quad (x^2)^2+2x^2-1=0, \quad x^2=-1\pm\sqrt{2},$$

беремо тільки +, тобто $x^2=\sqrt{2}-1$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}=\pm0{,}644$ (рис. 6.14). Таким чином, вісь x розбивається на чотири інтервали.

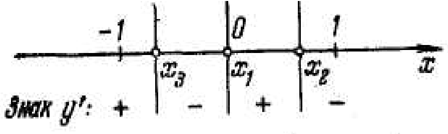


Рис. 6.14.

Підстановка в y' значень $x=-10$; $-0{,}1$; $0{,}1$; 10 з цих інтервалів дає відповідно знаки +, —, +, —. Виходить, ці інтервали послідовно є інтервалами зростання, спадання, зростання і спадання. При $x=x_3,x_2$ функція має максимуми, а при $x=x_1$ - мінімум. Максимальні значення

$$f(x_2)=f(x_3)=\frac{1+(\sqrt{2}-1)}{1+(\sqrt{2}-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = 1{,}207,$$

а мінімальне значення $f(x_1) = 1$.

Крім того, «кінцеві» граничні значення $f(\infty)=f(+\infty)=0$, так як при $x\to\pm\infty$ в чисельнику в $f(x)$ виходить нескінченно велика величина другого порядку в порівнянні з x, а в знаменнику — четвертого. Виходить, найбільше значення 1,207 функції досягається при $x=\pm$ 0,644, а найменше значення тільки в границі при $x\to\pm\infty$. Приблизний графік функції показано на рис. 6.15.

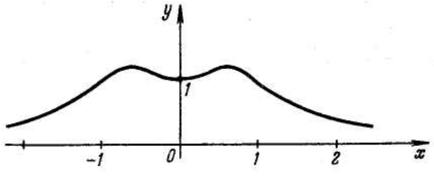


Рис. 6.15.

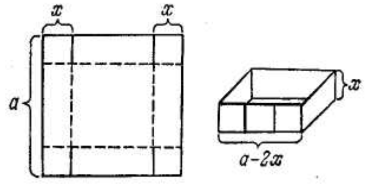


Рис. 6.16.

Приклад 2. Нехай із квадратної жерстини зі стороною *a* потрібно викроїти коробку найбільшої місткості. (Див. рис. 6.16; лінії згину проведені пунктиром, а лінії розрізу — суцільні.)

Ясно, що якесь розв'язання ця задача має, але неясно, де проводити розріз (тобто яке *x)* і який вийде об'єм . Якщо спочатку прийняти *x* якимсь невизначеним, то об'єм вираховується за формулою $V=(a - 2x)^2x$, причому за змістом задачі *x* повинний бути між 0 і $a/2$ Застосування необхідної ознаки екстремуму дає

$$\frac{dV}{dx}=2(a-2x)(-2)x+(a-2x)^2 1=(a-2x)(a-6x)=0,$$

звідки $x_1= a/2$, $x_2=a/6$. За змістом задачі підходить тільки $x_2=a/6$, тобто там і буде максимум. Максимальний об'єм

$$V_{\max}=\left(a-2\cdot\frac{a}{6}\right)^2\frac{a}{6}=\frac{2}{27}a^3.$$

Приклад 3. Розглянемо задачу про *переломлення світла* на границі розділу двох *однорідних* (тобто однакових у всіх своїх точках) *ізотропних* (тобто однакових у всіх напрямках) середовищ. Припустимо спочатку, що границя розділу плоска; проведемо через промінь світла площину (рис. 6.17) і виберемо на промені точки A_1 і A_2.

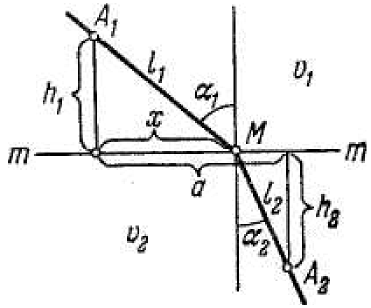


Рис. 6.17.
v_1—швидкість світла в першому середовищу;
v_2 — швидкість світла в другому середовищу;
mm — границя розділу середовищ.

Скористаємося, далі, *принципом Ферма в оптиці,* що говорить: із усіх можливих шляхів, що йдуть з A_1 в A_2, промінь світла вибирає такий, котрий він проходить за мінімальний час. Тому точка *M* при заданих A_1 і A_2 повинна бути розташована так, щоб

$$t=t_1+t_2=\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}=\frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}{v_2}$$

було мінімально можливим. Застосовуючи необхідну умову мінімуму, одержимо

$$\frac{dt}{dx}=\frac{x}{v_1\sqrt{h_1^2+x^2}}-\frac{a-x}{v_2\sqrt{h_2^2+(a-x)^2}}=0,$$

звідки

$$\frac{x}{l_1v_1}=\frac{a-x}{l_2v_2},\quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{x}{l_1}:\frac{a-x}{l_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

Отже, одержуємо закон переломлення: відношення синуса кута падіння до синуса кута переломлення є величина стала, яка рівна відношенню швидкостей світла в обох середовищах. Якщо тепер поверхня розділу не плоска, то так як закон переломлення залежить лише від ситуації в нескінченній близькості від точки переломлення, а в такій близькості поверхню розділу можна вважати плоскою, то і у цьому випадку закон переломлення залишається тим же.

Таким чином, ми бачимо, *що закон фізики удалося за допомогою розв'язання задачі на екстремум вивести з загального фізичного принципу, що має екстремальний характер, тобто стверджуюче екстремальне значення визначеної величини в реальних умовах.*

Більш докладне дослідження показує, що в принципі Ферма, як і в ряді інших аналогічних принципів, істотні не мінімальність і навіть не екстремальність часу проходження світлом шляху, а стаціонарність часу. У такій формі цей принцип можна вивести з хвильової теорії світла.

6.9. Схема дослідження диференційовної функції на максимум і мінімум за допомогою першої похідної

На підставі попередніх розділів можна сформулювати наступне правило для дослідження диференційовної функції $y=f(x)$ на максимум і мінімум:

1. Шукаємо першу похідну функції, тобто $f'(x)$.

2. Знаходимо критичні значення аргументу x; для цього:

а) прирівнюємо першу похідну нулеві і знаходимо дійсні корені отриманого рівняння $f'\{x)= 0$;

б) знаходимо значення x, при яких похідна $f'(x)$ терпить розрив.

3. Досліджуємо знак похідної зліва і справа від критичної точки. Так як знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома критичними точками, то для дослідження знака похідної зліва і справа, наприклад, від критичної точки x_2 (рис. 6.18) досить визначити знак похідної в точках α і β ($x_1<\alpha<x_2$, $x_2<\beta<x_3$, де x_1 і x_3 — найближчі критичні точки).

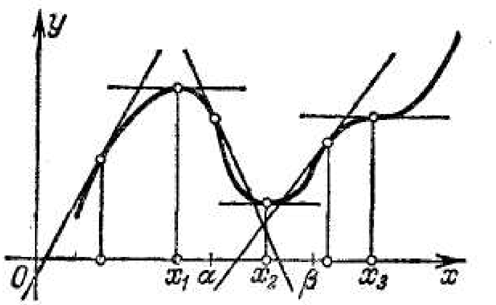


Рис. 6.18.

4.Обчислюємо значення функції $f(x)$ при кожному критичному значенні аргументу. У такий спосіб маємо наступне схематичне зображення можливих випадків

Знаки похідної $f'(x)$ при переході через критичну точку x_1,			Характер критичної точки
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ або має розрив	–	Точка максимуму
-	$f'(x_1)=0$ або має розрив	+	Точка мінімуму
+	$f'(x_1)=0$ або має розрив	+	Немає ні максимуму, ні мінімуму (функція зростає)
—	$f'(x_1)=0$ або має розрив	–	Немає ні максимуму, ні мінімуму (функція спадає)

Приклад 1. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Розв'язання. 1) Знаходимо першу похідну $y'=x^2-4x+3$.

2) Знаходимо дійсні корені похідної: $(y)_{x=1}=\frac{7}{3}$. Отже, $x_1=l$, $x_2=3$.

Похідна усюди безперервна. Виходить, інших критичних точок немає.

3) Досліджуємо критичні значення і результати дослідження фіксуємо на рис. 6.19.

Досліджуємо першу критичну точку $x_1=l$. Так як $y'=(x—1)\ (x—3)$, то

при $x<1$ маємо $y'=(—)\bullet(—)>0$;

при $x>1$ маємо $y'=(+)\bullet(—)<0$.

Виходить, при переході (зліва на право) через значення x_1=1 похідна змінює знак із плюса на мінус. Отже, при x=1 функція має максимум, а саме: $(y)_{x=1}$=7/3

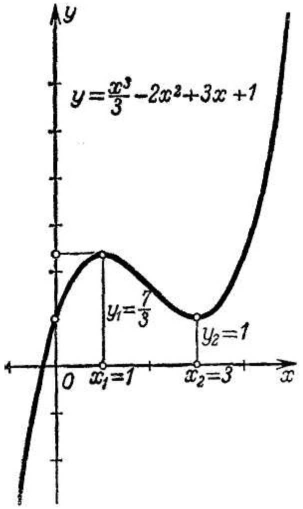


Рис. 6.19.

Досліджуємо другу критичну точку x_2=3;

при x<3 маємо y'=(+)• (—)<0;

при x>3 маємо y'=(+) • (+)>0.

Виходить, при переході через значення x=3 похідна змінює знак з мінуса на плюс. Отже, при $x=3$ функція має мінімум, а саме: $(y)_{x=3}$=1.

На підставі проведеного дослідження будуємо графік функції (рис. 6.19).

Приклад 2. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$$y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}\ .$$

*Розв'язання***.** 1) Знаходимо першу похідну:

$$y'=\sqrt[3]{x^2}+\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}\ .$$

2) Знаходимо критичні значення аргументу:

а) знаходимо точки, у яких похідна обертається в нуль

$$y'=\frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}=0,\ x_1=\frac{2}{5}\ ;$$

б) знаходимо точки, у яких похідна терпить розрив (у даному випадку обертається в нескінченність). Такою точкою буде, мабуть, точка x_2=0. (Відзначимо, що при x_2=0 розглянута функція визначена і безперервна.)

Інших критичних точок немає.

3) Досліджуємо характер отриманих критичних точок. Досліджуємо точку x_1=2/5. Помітивши, що $(y')_{x<2/5}<0,\quad (y')_{x>2/5}>0$, відмічаємо, що при x=2/5 функція має мінімум. Значення функції в точці мінімуму дорівнює

$$(y)_{x=2/5}=\left(\frac{2}{5}-1\right)\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=-\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}\ .$$

Досліджуємо другу критичну точку x=0.

Помітивши, що $(y')_{x<0}>0,\quad (y')_{x>0}<0$, відмічаємо, що при x=0 функція має максимум, причому $(y)_{x=0}$=0. Графік досліджуваної функції зображений на рис. 6.20.

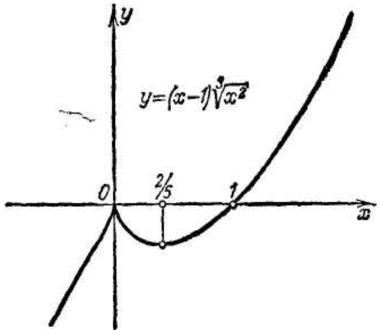


Рис. 6.20.

6.10. Дослідження функції на максимум і мінімум за допомогою другої похідної

Нехай при $x=x_1$ похідна функції $y=f(x)$ обертається в нуль, тобто $f'(x_l)=0$. Нехай, крім того, друга похідна $f''(x)$ існує і безперервна в деякому околі точки x_1. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема. *Нехай* $f'(x_1)=0$*; тоді при* $x=x_1$ *функція має максимум, якщо* $f''(x)<0$, *і мінімум, якщо* $f''(x)>0$.

Доведення. Доведемо спочатку першу частину теореми. Нехай

$$f'(x_1)=0 \text{ і } f''(x)<0.$$

Так як, за умовою, $f''(x)$ безперервна в деякому околі точки $x=x_1$, то, мабуть, найдеться деякий малий відрізок, що оточує точку $x=x_1$ у всіх точках якого друга похідна $f''(x)$ буде від'ємна.

Так як $f''(x)$ є перша похідна від першої похідної, $f''(x)=(f'(x))'$, то з умови $(f'(x))'<0$ випливає, що $f'(x)$ спадає на відрізку, що містить точку $x=x_1$. Але $f'(x_1)=0$, отже, на цьому відрізку при $x<x_1$ маємо $f'(x)>0$, а при $x>x_1$ маємо $f'(x)<0$, тобто похідна $f'(x)$ при переході через точку $x=x_1$ змінює знак із плюса на мінус, а це значить, що у точці x_1 функція $f(x)$ має максимум. Перша частина теореми доведена.

Аналогічним чином доводиться друга частина теореми, а саме: якщо $f''(x_1)>0$, то $f''(x)>0$ у всіх точках деякого відрізка, що оточує точку x_1, але тоді на цьому відрізку $f''(x)=(f'(x))'>0$ і, отже, $f'(x)$ зростає. Так як $f'(x_1)=0$, то, виходить, що при переході через точку x_1 похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, тобто функція $f(x)$ має мінімум при $x=x_1$.

Якщо в критичній точці $f''(x_1)=0$, то в цій точці може бути або максимум, або мінімум або не бути ні максимуму, ні мінімуму. У цьому випадку дослідження потрібно вести першим способом .

Схему дослідження екстремуму за допомогою другої похідної можна зобразити в наступній таблиці:

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	Характер критичної точки
0	–	Точка максимуму
0	+	Точка мінімуму
0	0	Невідомий

Приклад 1. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$y=2\sin x+\cos 2x$.

Розв'язання. Так як функція є періодичною з періодом 2π, то досить дослідити функцію на відрізку [0, 2π].

1) Знаходимо похідну:

$y'=2\cos x-2\sin 2x=2(\cos x-2\sin x\cos x)=2\cos x(1-2\sin x)$.

2) Знаходимо критичні значення аргументу:

$2\cos x(1-2\sin x)=0$,

$x_1=\pi/6,\ x_2=\pi/2,\ x_3=5\pi/6,\ x_4=3\pi/2$.

3) Знаходимо другу похідну: $y''=-2\sin x-4\cos 2x$.

4) Досліджуємо характер кожної критичної точки

$$(y'')_{x1=\pi/6}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0,$$

Отже, у точці $x_1=\pi/6$ маємо максимум: $(y)_{x=\pi/6}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Далі $(y'')_{x=\pi/2}=-2\cdot1+4\cdot1=2>0$. Отже, у точці $x_2=\pi/2$ маємо мінімум: $(y)_{x=\pi/2}=2\cdot1-1=1$.

У точці $x_3=5\pi/6$ маємо: $(y'')_{x=5\pi/6}=-2\cdot\frac{1}{2}-4\cdot\frac{1}{2}=-3<0.$,

Отже, при $x_3=5\pi/6$ функція має максимум

$(y)_{x=5\pi/6}=2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Нарешті $(y'')_{x=3\pi/2}=-2(-1)-4(-1)=6>0$.

Отже, у точці $x_4=3\pi/2$ маємо мінімум: $(y)_{x=3\pi/2}=2(-1)-1=-3$.

Графік досліджуваної функції зображений на рис. 6.21.

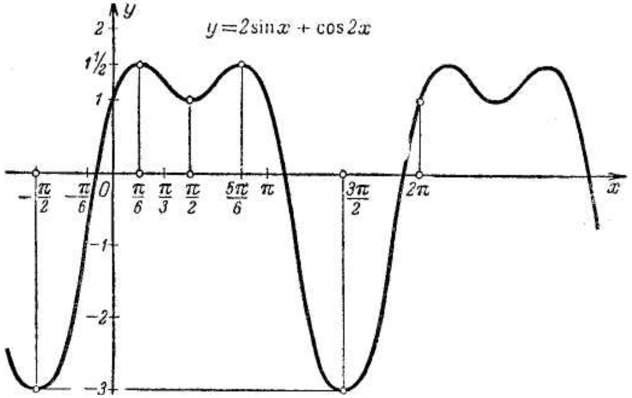


Рис. 6.21.

Покажемо, далі, на прикладах, що якщо в деякій точці $x=x_1$ маємо $f'(x_1)=0$ і $f''(x)=0$, то в цій точці функція $f(x)$ може мати або максимум, або мінімум, або не мати ні максимуму, ні мінімуму.

Приклад 2. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=1-x^4$.

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки: $y'=-4x^3$, $-4x^3=0$, $x=0$.

2) Визначаємо знак другої похідної при $x=0$:

$$y''=-12x^2,\ (y'')_{x=0}=0.$$

Отже, з'ясувати характер критичної точки за допомогою знака другої похідної у даному випадку не можна.

3) Досліджуємо характер критичної точки першим способом

$$(y')_{x<0}>0,\ \ (y')_{x>0}<0.$$

Отже, при $x=0$ функція має максимум, а саме: $(y)_{x=0}=1$.

Графік розглянутої функції зображено на рис. 6.22.

Приклад 3. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=x^6$.

Розв'язання. По другому способу знаходимо

1) $y'=6x^5$, $y'=6x^5=0$,$x=0$; 2) $y''=30x^4$, $(y'')_{x=0}=0$.

Отже другий спосіб відповіді не дає. Прибігаючи до першого способу, одержуємо $(y')_{x<0}<0$, $(y')_{x>0}>0$. Отже, при $x=0$ функція має мінімум (рис. 6.23).

Приклад 4. Дослідити на максимум і мінімум функцію $y=(x-1)^3$.

Розв'язання. Другий спосіб:

$$y'=3(x-1)^2,\ 3(x-1)^2=0,\ x=1;\ y''=6(x-1),\ \ (y'')_{x=1}=0;$$

таким чином, другий спосіб відповіді не дає. По першому способу знаходимо: $(y')_{x<1}>0,\ \ (y')_{x>1}>0$.

Отже, при $x=1$ функція не має ні максимуму, ні мінімуму (рис. 6.24).

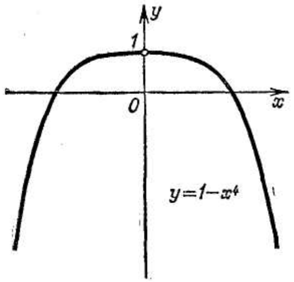


Рис.6.22.

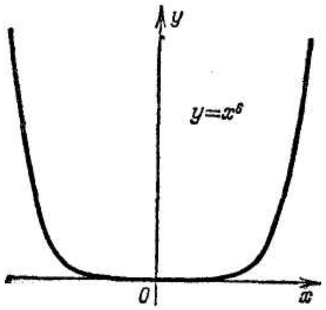


Рис.6.23.

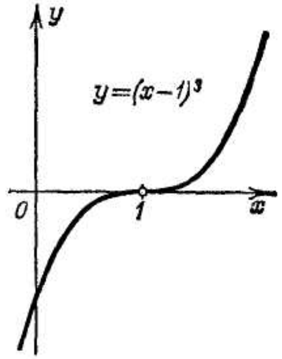


Рис. 6.24.

6.11. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $y=f(x)$ безперервна на відрізку $[a,b]$. Тоді на цьому відрізку функція досягає найбільшого значення. Будемо припускати, що на даному відрізку функції $f(x)$ має кінцеве число критичних точок. Якщо найбільше значення досягається усередині відрізка $[a,b]$, то очевидно, що це значення буде одним з максимумів функції (якщо є кілька максимумів), а саме, найбільшим максимумом. Але може статися, що найбільше значення буде досягатися на одному з кінців відрізка.

Отже, функція на відрізку $[a,b]$ досягає свого найбільшого значення або на одному з кінців цього відрізка, або в такій внутрішній точці цього відрізка, що є точкою максимуму.

Те ж саме можна сказати і про найменше значення функції: воно досягається або на одному з кінців даного відрізка, або в такій внутрішній точці, що є точкою мінімуму.

З попереднього випливає наступне правило: якщо потрібно знайти найбільше значення безперервної функції на відрізку $[a,b]$, то треба:

1) знайти всі максимуми функції на відрізку;

2) визначити значення функції на кінцях відрізка, тобто обчислити $f(a)$ і $f(b)$;

3) із всіх отриманих вище значень функції вибрати найбільше; воно і буде являти собою найбільше значення функції на відрізку.

Аналогічним чином варто вчиняти і при визначенні найменшого значення функції на відрізку.

Приклад. Визначити на відрізку [—3;3/2] найбільше і найменше значення функції

$$y=x^3—3x+3.$$

Розв'язяння. 1) Знаходимо максимуми і мінімуми функції на відрізку [- 3; 3/2]:

$$y'=3x^2-3,\ 3x^2-3=0,\ x_1=1,\ x_2=-1,\ y''=6x.$$

Тоді

$$(y'')_{x=1}=6>0.$$

Отже, у точці $x=1$ має місце мінімум $(y)_{x=1}=1$.

Далі

$$(y'')_{x=-1}=-6<0.$$

Отже, у точці $x=-1$ має місце максимум $(y)_{x=-1}=5$.

2) Визначимо значення функції на кінцях відрізка

$$(y)_{x=3/2}=15/8,\ (y)_{x=-3}=-15\ .$$

Таким чином, найбільше значення розглянутої функції на відрізку [-3; 3/2] є $(y)_{x=-1}=5$, а найменше є $(y)_{x=-3}=-15$.

Графік розглянутої функції зображений на рис. 6.25.

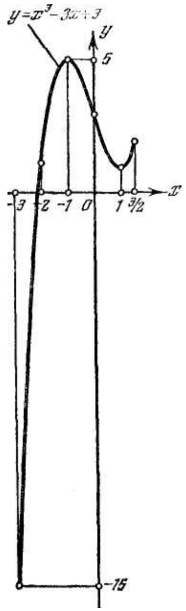


Рис. 6.25.

6.12. Застосування теорії максимуму і мінімуму функцій при розв'язянні задач

За допомогою теорії максимуму і мінімуму розв'язується багато задач геометрії, механіки і т.д. Розглянемо деякі з таких задач.

Задача 1. Дальність $R=OA$ (рис. 6.26) польоту снаряда (у порожнечі), випущеного з початковою швидкістю v_0 з гармати, нахиленої під кутом φ до обрію, визначається формулою

$$R=\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{g}$$

(g — прискорення сили тяжіння). Визначити кут φ, при якому дальність R буде найбільшою при даній початковій швидкості v_0.

Розв'язяння. Величина R являє собою функцію змінного кута φ. Досліджуємо цю функцію на максимум на відрізку $0\leq\varphi\leq\pi/2$:

$$\frac{dR}{d\varphi}=\frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g},\quad \frac{2v_0^2 \cos 2\varphi}{g}=0,$$

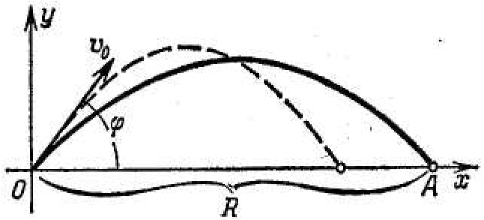


Рис. 6.26.

критичне значення φ = π/4;

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2}=-\frac{4v_0^{\,2}\sin 2\varphi}{g},\quad \left(\frac{d^2R}{d\varphi^2}\right)_{\varphi=\pi/4}=-\frac{4v_0^{\,2}}{g}<0.$$

Отже, при значенні φ=π/4 дальність польоту *R* має максимум $(R)_{\varphi=\pi/4}=\frac{v_0^{\,2}}{g}$.

Значення функції *R* на кінцях відрізка [0; π/2] рівні:

$$(R)_{\varphi=0}=0,\quad (R)_{\varphi=\pi/2}=0.$$

Таким чином, знайдений максимум і є шукане найбільше значення *R*.

Задача 2. Які розміри треба придати циліндрові, щоб при даному об’ємові *v* його повна поверхня *S*, була найменшою?

Розв’язяння. Позначимо через *r* радіус основи циліндра і через *h* висоту циліндра, будемо мати: $S=2\pi r^2+2\pi rh$.

Так як об’єм циліндра заданий, то при даному *r* величина *h* визначається формулою $v=\pi r^2h$, звідки $h=\frac{v}{\pi r^2}$.

Підставляючи цей вираз *h* у формулу для *S*, одержимо:

$$S=2\pi r^2+2\pi r\frac{v}{\pi r^2},\ \text{або}\ S=2\left(\pi r^2+\frac{v}{r}\right).$$

Тут *v* - задане число. Таким чином, ми представили *S* як функцію одного незалежного змінного *r*.

Знайдемо найменше значення цієї функції в проміжку $0<r<\infty$:

$$\frac{dS}{dr}=2\left(\pi r-\frac{v}{r^2}\right),$$

$$2\pi r-\frac{v}{r^2}=0,\ r_1=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}},$$

$$\left(\frac{d^2S}{dr^2}\right)_{r=r_1}=2\left(2\pi+\frac{2v}{r^3}\right)_{r=r_1}>0.$$

Отже, у точці $r=r_1$ функція *S* має мінімум. Помітивши, що

$$\lim_{r\to 0}S=\infty \ \text{та}\ \lim_{r\to\infty}S=\infty,$$

тобто що при прагненні *r* до нуля або до нескінченності поверхня *S* необмежено зростає, ми дійдемо висновку, що в точці $r=r_1$ функція *S* має найменше значення.

Але якщо $r=\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}$, то $h=\frac{v}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{v}{2\pi}}=2r$.

Таким чином, для того щоб при даному об’ємі *v* повна поверхня *S* циліндра була найменшої, висота циліндра повинна дорівнювати його діаметрові.

6.13. Дослідження функції на максимум і мінімум за допомогою формули Тейлора

Раніше було замічено, що якщо в деякій точці $x=a$ маємо $f'(a)=0$ і $f''(a)=0$, то в цій точці може бути або максимум, або мінімум, або немає ні того, ні іншого. При цьому вказувалося, що для розв’язання питання в цьому випадку потрібно вести дослідження першим способом, тобто шляхом дослідження знака першої похідної ліворуч і праворуч від точки $x=a$.

Тепер ми покажемо, що можна в цьому випадку дослідження вести і за допомогою формули Тейлора.

Для більшої спільності припустимо, що не тільки $f''(a)$, але і всі похідні до *n*-го порядку включно від функції $f(x)$ обертаються в нуль при $x=a$:

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0,\quad (6.28)$$

а

$$f^{(n+1)}(a)\neq 0.$$

Припустимо, далі, що *f(x)* має безперервні похідні до (n+1)-го порядку включно в околі точки $x — a$.

Напишемо формулу Тейлора для *f(x),* приймаючи до уваги рівності (6.28):

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ ,\ (6.29)$$

де ξ — число, яке заключене між a і x.

Так як $f^{(n+1)}(x)$ безперервна в околі точки a і $f^{(n+1)}(a)\neq 0$, то знайдеться таке мале додатне число h, що при будь-якому x який задовольняє нерівності $|x — a|<h$, буде $f^{(n+1)}(x)\neq 0$. При цьому якщо $f^{(n+1)}(a)>0$, то і у всіх точках інтервалу *(a-h, a+h)* буде $f^{(n+1)}(x)>0$; якщо $f^{(n+1)}(a)<$ 0, то у всіх точках цього інтервалу буде $f^{(n+1)}(x)<0$. Перепишемо формулу (6.29) у вигляді

$$f(x)-f(a)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ ,\ (6.30)$$

і розглянемо різні окремі випадки.

Перший випадок, n— непарне.

а) Нехай $f^{(n+1)}(a)<0$. Тоді знайдеться інтервал $(a — h,\ a+h)$, у всіх точках якого (n+1)-а похідна від'ємна. Якщо x є точка цього інтервалу, то ξ теж знаходиться між a-h і a+h і, отже, $f^{(n+1)}(\xi)<0$. Так як n+1-парне число, то $(x — a)^{n+1} > 0$ при $x\neq a$, і тому права частина у формулі (6.30) від'ємна.

Отже, при $x\neq a$ у всіх точках інтервалу *(a-h, a+h)* маємо: $f(x)$ - $f(a)<0$, а це значить, що при $x=a$ функція має максимум.

б) Нехай $f^{(n+1)}(a)>0$. Тоді при досить малому значенні h у всіх точках x інтервалу $(a — h,\ a+h)$ має місце $f^{(n+1)}(\xi)>0$. Отже, права частина формули (6.30) буде додатна, тобто при $x\neq a$ у всіх точках зазначеного інтервалу буде: $f(x)$ -$f(a)>0$, а це значить, що при $x=a$ функція має мінімум.

Другий випадок, n - парне.

Тоді n+1-непарне і величина $(x — a)^{n+1}$ має різні знаки при $x<a$ і $x>a$.

Якщо h досить мале по абсолютній величині, то (n+1)-а похідна у всіх точках інтервалу $(a — h\ ,\ a+h)$ зберігає той же знак, що й у точці

a. Отже, $f(x)—f(a)$ має різні знаки при $x<a$ і при $x>a$. Але це значить, що при $x=a$ немає ні максимуму, ні мінімуму.

Відмітимо, якщо при n парному $f^{(n+1)}(a)>0$, то $f(x)<f(a)$ для $x<a$ і $f(x)>f(a)$ для $x>a$. Якщо ж при n парному $f^{(n+1)}(a)<0$, то $f(x)>f(a)$ для $x<a$ і $f(x)<f(a)$ для $x>a$.

Отримані результати можна сформулювати в такий спосіб.

Якщо при $x=a$ маємо: $f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n)}(a)=0$, і перша похідна $f^{(n+1)}(a)$, яка не обертається в нуль, є похідна парного порядку, то в точці a

$f(x)$ має максимум, якщо $f^{(n+1)}(a)<0$;

$f(x)$ має мінімум, якщо $f^{(n+1)}(a)>0$.

Якщо ж перша похідна $f^{(n+1)}(a)$, яка не обертається в нуль, є похідна непарного порядку, то функція не має ні максимуму, ні мінімуму в точці a . При цьому

$f(x)$ росте, якщо $f^{(n+1)}(a)>0$;

$f(x)$ убуває, якщо $f^{(n+1)}(a)<0$.

Приклад. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$$f\ (x)=x^4—4x^3+6x^2—4x+1$$

Розв'язання. Знайдемо критичні значення функції

$$f'(x)=4x^3— 12x^2+12x — 4=4(x^3 — 3\ x^2 + 3\ x — 1).$$

З рівняння $4(x^3 — 3x^2+3x— 1)=0$ одержуємо єдину критичну точку x=1 (так як дане рівняння має лише один дійсний корінь). Досліджуємо характер критичної точки x=1:

$$f''(x)=12x^2\text{-}24x+12=0 \quad \text{при } x=1,$$
$$f'''(x)=24x\text{-}24=0 \quad \text{при } x=1,$$
$$f^{IV}(x)=24>0 \quad \text{при будь якому } x.$$

Отже, при x=1 функція $f\ (x)$ має мінімум.

6.14. Побудова графіків

Диференціальне числення дає загальний метод виявлення індивідуальних особливостей графіка заданої функції $y=f(x)$, що дозволяє будувати цей графіка швидше і точніше, ніж «по точках». Так, знаходження інтервалів монотонності функції і точок її екстремуму, яке описане раніше, істотне при цій побудові. Крім цього, корисними виявляються ще деякі дослідження; про них ми зараз будемо говорити.

Інтервали опуклості графіка і точки перегину. Нехай графік $y=f(x)$ такий, як показано на рис. 6.27. Ми бачимо, що ліворуч точки A і праворуч точки *B* графік опуклий догори, а між *A* і *B*- опуклий донизу . Точки *A* і *B,* у яких опуклість в одну сторону змінюється опуклістю в іншу сторону, є точками перегину; у цих точках графік перетинає дотичну, хоча і під нульовим кутом.

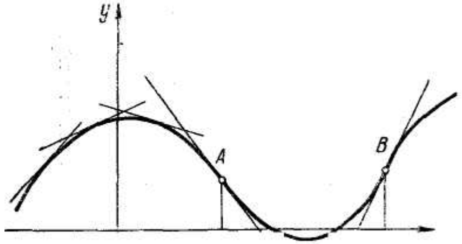


Рис. 6.27.

Для находження інтервалів опуклості догори і донизу помітимо, що на інтервалі опуклості догори (наприклад, на рис. 6.27 при $x<a$) з ростом x дотична до графіка повертається по годинновій стрілці, тобто її кутовий коефіцієнт спадає. Але цей коефіцієнт дорівнює y' і, таким чином, графік буде опуклим догори і донизу для тих інтервалів осі x, для яких y' відповідно спадає або зростає. Ці інтервали знаходяться за допомогою дослідження знака y'' у точності так само, як раніше інтервали спадання і зростання y знаходилися за допомогою дослідження знака y'. Отже, *графік буде опуклим догори і донизу для тих інтервалів осі x, для яких відповідно* $y''<0$ *і* $y''>0$; *точки перегину виходять при тих значеннях x, при переході через які* y'' *змінює знак. У самій же точці перегину похідна* y'' *дорівнює нулеві.* При цьому передбачається, що y, y' і y'' не мають розривів. Якщо такі розриви є, то інтервали опуклості догори і донизу графіка будуються після нанесення на вісь x усіх розривів, оскільки вони також можуть служити кінцями названих інтервалів.

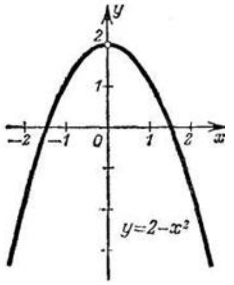


Рис. 6.28.

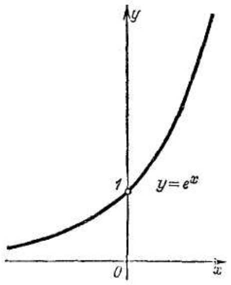


Рис. 6.29.

Приклад 1. Установити інтервали опуклості і вгнутості кривої, заданої рівнянням $y=2-x^2$.

*Розв'язання***.** Друга похідна $y''=-2<0$ для всіх значень x. Отже, крива усюди обернена опуклістю нагору (рис. 6.28).

Приклад 2. Крива задана рівнянням $y=e^x$.

Так як $y''=e^x>0$ для всіх значень x, то, отже, крива усюди вгнута, тобто обернена опуклістю вниз (рис. 6.29).

Приклад 3. Крива визначається рівнянням $y=x^3$,так як $y''=6x$, то $y''<0$ при $x<0$ і $y''>0$ при $x>0$. Отже, при $x<0$ крива обернена опуклістю нагору, а при $x>0$ - опуклістю вниз (рис. 6.30).

Приклад 4. Знайти точки перегину і визначити інтервали опуклості й вгнутості кривої $y=e^{-x^2}$ (крива Гаусса).

Розв'язання. 1) Знаходимо першу і другу похідні

$$y'=-2xe^{-x^2},\ y''=2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

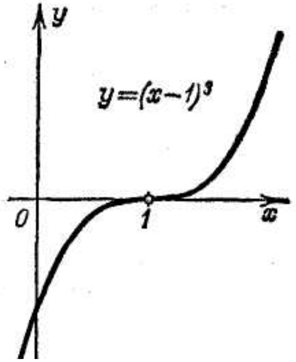


Рис. 6.30.

2) Перша і друга похідні існують усюди. Знаходимо значення *x,* при яких $y''=0$: $2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$, $x_1=-1/\sqrt{2}$, $x_2=1/\sqrt{2}$.

3)Досліджуємо отримані значення:

при $x<-1/\sqrt{2}$ маємо $y''>0$,

при $x>-1/\sqrt{2}$ маємо $y''<0$;

друга похідна змінює знак при переході через точку x_1 отже,

при $x_1 = — 1/\sqrt{2}$ на кривій є точка перегину; її координати $(1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$;

при $x<1/\sqrt{2}$ маємо $y''<0$,

при $x>1/\sqrt{2}$ маємо $y''>0$.

Отже, при $x_2=1/\sqrt{2}$ на кривій також є точка перегину, її координати $(-1/\sqrt{2}, e^{-1/2})$. Утім, існування другої точки перегину випливає безпосередньо із симетрії кривої щодо осі *Oy.*

4) З попереднього випливає, що

при $-\infty<x<-1/\sqrt{2}$ крива вгнута,

при $-1/\sqrt{2}< x<1/\sqrt{2}$ крива опукла,

при $1/\sqrt{2}< x<+\infty$ крива вгнута.

5) З виразу першої похідної $y'=-2xe^{-x^2}$, випливає, що

$y'>0$ при $x<0$, тобто функція росте,

$y'<0$ при $x>0$, тобто функція убуває,

$y'=0$ при $x=0$.

У цій точці функція має максимум, а саме: $y=1$.

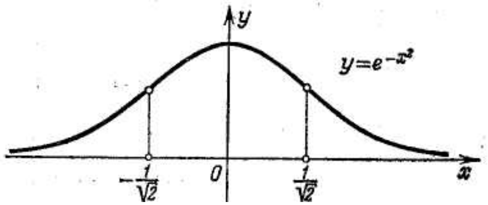


Рис. 6.31.

На підставі проведеного дослідження легко побудувати графік кривої (рис. 6.31.).

Приклад 5. Знайти точки перегину кривої $y=x^4$.

Розв'язання. 1) Знаходимо другу похідну: $y''=12x^2$.

2) Визначаємо точки, у яких $y'' = 0$: $12x^2=0$, $x=0$

3) Досліджуємо отримане значення $x=0$:

$y''>0$ при $x<0$ - крива вгнута,

$y''>0$ при $x>0$ - крива вгнута.

Отже, крива не має точок перегину (рис. 6.32).

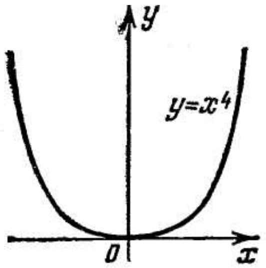


Рис. 6.33.

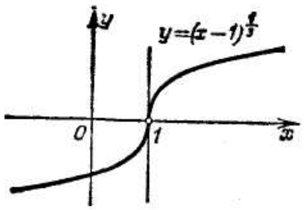


Рис. 6.32.

Приклад 6. Знайти точки перегину кривої $y=(x-1)^{1/3}$.

Розв'язання. 1) Знаходимо першу і другу похідні:

$$y'=\frac{1}{3}(x-1)^{-2/3}, \qquad y''=-\frac{2}{9}(x-1)^{-5/3}.$$

2) Друга похідна ніде не обертається в нуль, але при $x=1$ вона не існує ($y''=\pm\infty$).

3) Досліджуємо значення $x=1$:

$y''>0$ при $x<1$ - крива вгнута,

$y''<0$ при $x>1$ - крива опукла.

Отже, при $x=1$ є точка перегину; це точка (1; 0). Помітимо, що $y'=\infty$ при $x=1$, тобто крива в цій точці має вертикальну дотичну (рис. 6.33).

Асимптоти графіка. Асимптоти графіка $y=f(x)$ можуть бути вертикальні (паралельні осі *y)* і невертикальні (рис.6.34). Перших може бути скільки завгодно, навіть нескінченне число (тангенсоїда), і вони знаходяться так: якщо $|y|\to\infty$ при $x\to a$ (*a* кінцеве), то пряма $x=a$ служить вертикальною асимптотою.

Невертикальних асимптот не може бути більше двох (однієї при $x\to\infty$ і однієї при $x\to-\infty$) , і вони знаходяться так: нехай пряма $y=kx+b$ служить асимптотою графіка $y=f(x)$ при $x\to\infty$. Тоді (див. рис. 6.34) різниця $\delta=y_{\text{асимптоти}}— y_{\text{графика}}$ дорівнює $\delta = (kx + b)-f(x)$ (6.31) і прагне до нуля при $x\to\infty$.

Звідки

$$\frac{f(x)}{x}=k+\frac{b}{x}-\frac{\delta}{x}\to k,$$

тобто

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Крім того, у силу (6.31)

$$f(x)-kx=b-\delta\to b,$$

тобто

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx].$$

Кожна з цих двох границь повинна існувати і бути кінцевою, в протилежному випадку асимптоти при $x\to\infty$ немає. *Якщо ж ці скінченні границі існують, то й асимптота існує,* тому що з останньої рівності видно, що величина $[f(x)-kx]-b\to b$, тобто $f(x)-(kx+b)\to 0$ при $x\to\infty$.

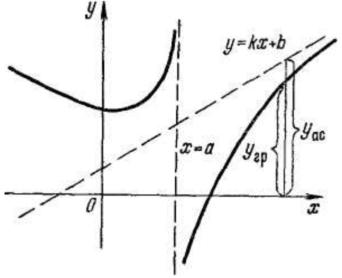


Рис. 6.34.

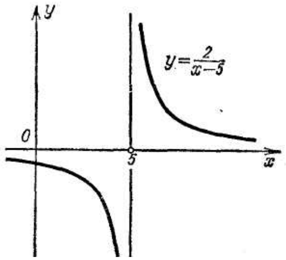


Рис. 6.35.

Приклад 1. Крива $y=2/(x-5)$ має вертикальну асимптоту $x=5$, так як $y\to\infty$ при $x\to5$ (рис. 6.35).

Приклад 2. Крива $y=tgx$ має нескінченно багато вертикальних асимптот

$$x=\pm\pi/2,\ x=\pm3\pi/2,\ x=\pm5\pi/2,\ \ldots$$

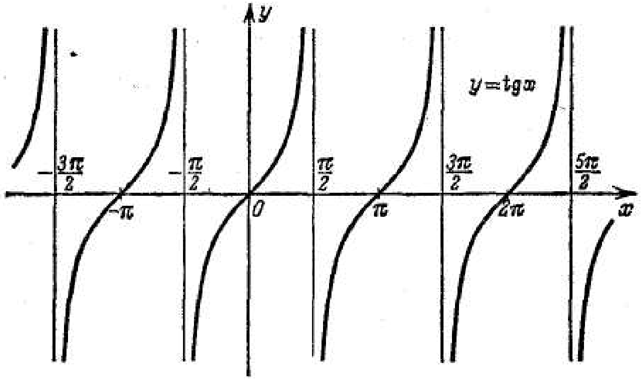


Рис. 6.36

Це випливає з того, що $tg\ x\to\infty$, коли x прагне до значень $\pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$, .. або $-\pi/2, -3\pi/2, -5\pi/2, \ldots$ (рис. 6.36).

Приклад 3. Крива $y=e^{1/x}$ має вертикальну асимптоту $x=0$, так як $\lim\limits_{x\to+0} e^{1/x}=\infty$ (див. рис. 6.37)

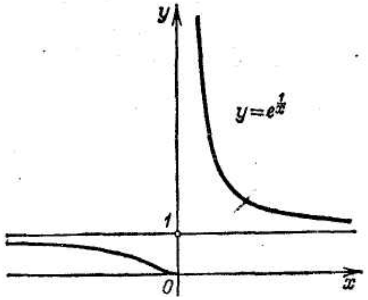


Рис. 6.37.

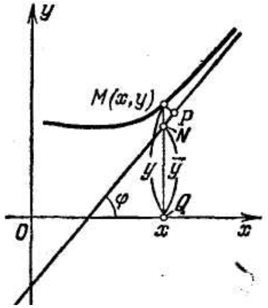


Рис. 6.38.

Нахил асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту, рівняння якої має вигляд

$$y = kx + b \qquad (6.32)$$

Визначимо числа k і b (рис. 6.38). Нехай $M(x, y)$— точка, що лежить на кривій, і $N(x, y)$ — точка, що лежить на асимптоті.

Довжина відрізка MP дорівнює відстані від точки M до асимптоти. За умовою

$$\lim_{x\to+\infty} MP=0. \quad (6.33)$$

Якщо позначимо через φ кут нахилу асимптоти до осі Ox, то з ΔNMP знайдемо:

$$NM=\frac{MP}{\cos\varphi}.$$

Так як φ—сталий кут (не рівний π/2), то в силу попередньої рівності

$$\lim_{x\to+\infty} NM=0, \quad (6.34)$$

і навпаки, з рівності (6.34) випливає рівність (6.33). Але

$$NM=|QM-QN|=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b)|,$$

і рівність (6.34) приймає вигляд $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$, (6.35)

Отже, якщо пряма (6.32) є асимптота, то виконується рівність (6.35), і навпаки, якщо при сталих k і b виконується рівність (6.35), то пряма $y=kx+b$ є асимптота. Визначимо тепер k і b. Виносячи x за дужки в рівності (6.35), одержуємо:

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Так як $x\to+\infty$, то повинна виконуватися рівність

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

При b сталому $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$.

Таким чином $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0$,

або $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. (6.36)

Знаючи k, з рівності (6.35) знаходимо b:

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \quad (6.37).$$

Отже, якщо пряма $y=kx+b$ є асимптота, то k і b знаходяться по формулах (6.36) і (6.37). Зворотно, якщо існують границі (6.36) і (6.37), то виконується рівність (6.35) і пряма $y=kx+b$ є асимптота. Коли хоча б одна з границь (6.36) або (6.37) не існує, то крива асимптоти не має. Відмітимо, що ми проводили дослідження стосовно до рис. 6.38 при $x\to+\infty$, але всі міркування справедливі і для випадку $x\to-\infty$.

Приклад 4. Знайти асимптоти кривої

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}.$$

*Розв'язання***.** 1) Шукаємо вертикальні асимптоти:

$y\to+\infty$ при $x\to-0$,

$y\to-\infty$ при $x\to+0$,

Отже, пряма $x=0$ є вертикальна асимптота даної кривої.

2) Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right]=1, \text{ тобто, } k=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[x-]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[2-\frac{1}{x^2}\right]=2,$$

тобто $b=2$.Отже, пряма $y=x+2$ є похила асимптота даної кривої.

Для дослідження взаємного розташування кривої і асимптоти розглянемо різницю ординат кривої і асимптоти при тому самому значенні x

$$\frac{x^2+2x-1}{x}-(x+2)=-\frac{1}{x}.$$

При $x > 0$ ця різниця від'ємна, а при $x<0$ - додатна; отже, при $x>0$ крива лежить нижче асимптоти, при $x<0$ — вище асимптоти (рис. 6.39).

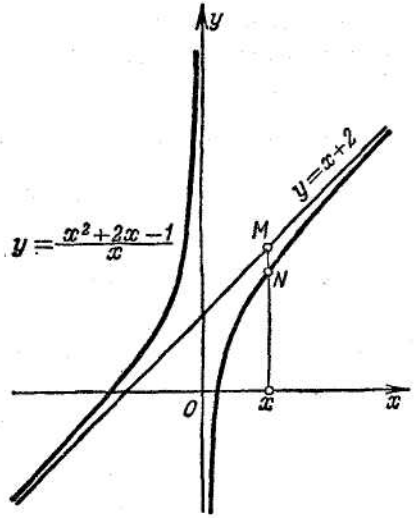


Рис. 6.39.

Приклад 5. Знайти асимптоти кривої $y=e\text{-}^{x}\sin x+\text{-}x$.

Розв'язання. 1) Вертикальних асимптот, мабуть, немає.

2) Шукаємо похилі асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin x+x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}\sin x}{x}+1\right]=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[\,e^{-x}\sin x+x-x\,]=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\sin x=0.$$

Отже, пряма $y=x$ є похила асимптота при $x\to+\infty$.

Задана крива не має асимптоти при $x\to -\infty$.

Дійсно $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}$ не існує, так як $\frac{y}{x}=\frac{e^{-x}}{x}\sin x+1$.

(Тут перший доданок необмежено зростає при $x\to-\infty$ і значить, границі не має.)

Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка.

Ця схема для функції $y=f(x)$ включає наступне:

1) Шукається область визначення функції, точки розриву і нулі, після чого з'ясовуються інтервали додатності і від'ємності функції.

З'ясовується поводження функції при наближенні до її точок розриву і до кінців інтервалів, на яких функція визначена (у тому числі поводження функції на нескінченності). Знаходяться асимптоти графіка. З'ясовується, чи не буде функція парною, непарною, періодичною і т.п.

2) Шукаються точки розриву і нулі похідної, після чого з'ясовуються інтервали зростання й спадання функції, точки екстремуму й екстремальні значення. З'ясовується поводження похідної при наближенні до її точок розриву, до точок розриву функції (якщо функція в них має кінцевий стрибок) і до країв інтервалів, на яких функція визначена (якщо ці краї скінченні і функція там має кінцеве значення).

3) Шукаються точки розриву і нулі другої похідної, після чого з'ясовуються інтервали опуклості догори і донизу графіка, а також точки перегину, у яких корисно знайти напрямок дотичної.

Усі знайдені точки наносяться на координатну площину, після чого будується сам графік, у поводженні якого повинні бути відтворені всі знайдені індивідуальні особливості. Якщо з них поводження графіка недостатньо ясне, то треба побудувати ще кілька точок графіка, обчисливши значення y для окремих значень x; бажано також, обчисливши значення y', знайти в цих точках напрямок дотичної.

Наведемо як приклад дослідження графіка функції

$$y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}$$

У даному випадку областю визначення служить уся вісь $—\infty<x<\infty$; точок розриву немає. Прирівнювання $y=0$ показує, що функція має два нулі, $x_1=0$ і $x_2=2$, тобто виходить три інтервали знакосталості: $—\infty<x<0$, $0<x<2$, $2<x<\infty$. Підстановка довільних значень з цих інтервалів показує, що на першому і другому функція від'ємна, а на третьому - додатна. Вертикальних асимптот немає. Обчислення невертикальних асимптот, яке проведене відповідно до правил обчислення невертикальних асимптот, показує , що одна і та сама пряма $y=x—2/3$ є асимптотою графіка як при $x\to\infty$, так і при $x\to-\infty$. Обчисливши похідну

$$y'=\frac{3x^2-4x}{3\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}}=\frac{3x\ \ -4}{3\sqrt[3]{(x\ \ -2)^2x}},$$

бачимо, що вона має розриви (обертається в нескінченність) при $x=0$ і $x=2$ і дорівнює нулеві при $x=4/3$. Виходить чотири інтервали монотонності: $—\infty<x<0$; $0<x<4/3$; $4/3<x<2$; $2<x<\infty$, і підстановка в y' довільних значень з цих інтервалів показує, що інтервалом спадання служить тільки другий, а інші служать інтервалами зростання; тому третій і четвертий утворюють єдиний інтервал зростання. Таким чином, зміна характеру монотонності відбувається при x=0 (максимум з максимальним значенням y=0) і при x=4/3 (мінімум з мінімальним значенням y= —2($^3\sqrt{4/3}$)= —1,058).

Обчисливши другу похідну, одержимо після перетворень

$$y'' = -\frac{8}{9\sqrt[3]{(x\ -2)^5 x^4}}\,.$$

Вона має розрив там же, де перша похідна (при x=0 і x=2), і зовсім не має нулів. Виходять три інтервали «однакової опуклості»:—∞<x<0, 0<x<2, 2<x<∞.

Підстановка показує, що на першій і другій ділянках опуклість спрямована донизу, а на третій — догори. Обчислимо ще

при x=—1:

$$y=-\sqrt[3]{3} = -1{,}44\,;\ y' = \frac{7}{3\sqrt[3]{9}} = 1{,}12;$$

при x=1

$$y=-1;\ \ y' = -\frac{1}{3} == 0{,}33;$$

при x=3

$$y=\sqrt[3]{9} = 2{,}08\,;\ y' = \frac{5}{3\sqrt[3]{3}} = 1{,}16\,.$$

Графік, що виходить, зображено на рис. 6.40. Обчислені його точки показані кружками .

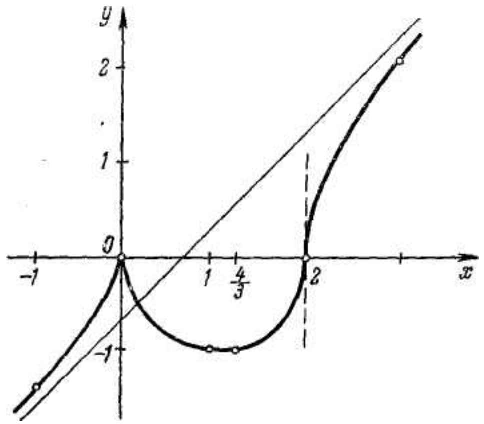


Рис. 6.40.

Розташування графіка щодо своєї асимптоти легко вивести з *асимптотичного розкладання* розглянутої функції, тобто розкладання, справедливого при досить великих |x|; це розкладання у свою чергу випливає з формули

$$(1+x)^a=1+\left(\frac{a}{1}\right)x+\left(\frac{a}{2}\right)x^2+\left(\frac{a}{3}\right)x^3+\ldots \quad (6.38)$$

а саме

$$y=\sqrt[3]{x^3-2x^2}=\sqrt[3]{x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)}=x\left(1-\frac{2}{x}\right)^{1/3}=$$

$$=x\left[1+\frac{\frac{1}{3}}{1!}\left(-\frac{2}{x}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(-\frac{2}{x}\right)^2+\ldots\right]=x-\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+ \qquad (6.39)$$

+ члени вищого порядку малості.

Таким чином, при великих x>0 буде y<x—2/3=y_{ac}, а при великих x<0 буде y>y_{ac}. Крім того, з рівності (6.39) безпосередньо випливає, що

$$y-\left(x-\frac{2}{3}\right)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0\,. \quad (6.40)$$

Виходить, якби ми раніше не знали рівняння асимптоти $y=x—2/3$, ми вивели б його із співвідношення (6.40). Таким чином, ми одержали ще один метод находження асимптоти.

Розглянемо ряд прикладів

Приклад 1. Функція $y=x^2$— парна, так як $(—x)^2=(x^2)$.

Приклад 2. Функція $y=cosx$— парна, тау як $cos\ (—x)=cosx$ **.**

Приклад 3. Функція $y=x^3$ - непарна, так як $(-x)^3=—x^3$.

Приклад 4. Функція $y =sinx$—непарна, так як $\sin\ (-x)=—\sin x$.

Зауваження. Так як знання одних властивостей функції дозволяє зробити висновок про інші її властивості, то іноді порядок дослідження доцільно вибирати, виходячи з конкретних особливостей даної функції. Так, наприклад, якщо ми з'ясували, що задана функція безперервна і диференційовна, і знайшли точки максимуму і мінімуму цієї функції, то тим самим ми уже визначили і області зростання і спадання функції.

Приклад 5. Дослідити функцію

$$y=\frac{x}{1+x^2}$$

і побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Область існування функції — інтервал $—\infty<x<+\infty$. Відразу відзначимо, що при $x<0$ маємо $y<0$, а при $x>0$ маємо $y > 0$.

2) Функція усюди безперервна.

3) Досліджуємо функцію на максимум і мінімум: з рівності

$$y' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

знаходимо критичні точки:

$$x_1=-1\ ,x_2=1.$$

Досліджуємо характер критичних точок:

при $x<1$ маємо $y'>0;$

при $x>1$ маємо $y'<0.$

Отже, при $x=—1$ функція має мінімум:

$$y_{\min}=(y)_{x=-1}=-0{,}5.$$

Далі

при $x<-1$ маємо $y'<0;$

при $x>-1$ маємо $y'>0.$

Отже, при $x=1$ функція має максимум

$$y_{\max}=(y)_{x=1}=0{,}5.$$

4) Визначимо області зростання й спадання функції

при $-\infty <x<-1$ маємо $y'<0$ – функція убуває,

при $-1<x<1$ маємо $y'>0$ - функція зростає,

при $1<x<+\infty$ маємо $y'>0$ - функція убуває.

5) Визначимо області опуклості й вгнутості кривої і точки перегину: з рівності

$$y''=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}=0$$

одержимо

$$x_1=-\sqrt{3},\ x_2=0,\ x_3=\sqrt{3}.$$

Досліджуючи y'' як функцію від x, знаходимо:

при $-\infty<x<-\sqrt{3}$ $y''<0$ – крива опукла,

при $-\sqrt{3}<x<0$ $y''>0$ - крива вгнута,

при $0<x<\sqrt{3}$ $y''<0$ – крива опукла,

при $\sqrt{3}<x<+\infty$ $y''>0$ - крива вгнута.

Отже, точка з координатами $x=—\sqrt{3}$, $y=—\sqrt{\ 3/4}$ є точка перегину; точно так само точки (0, 0) і $(\sqrt{3}\ ,\sqrt{3/4})$ є точки перегину.

6) Визначимо асимптоти кривої :

при $x\to+\infty$ $y\to0,$

при $x\to-\infty$ $y\to0.$

Отже, пряма $y=0$ є єдина похила асимптота.

Вертикальних асимптот крива не має, тому що ні для одного кінцевого значення x функція не прагне до нескінченності.

Графік досліджуваної кривої зображено на рис. 6.41.

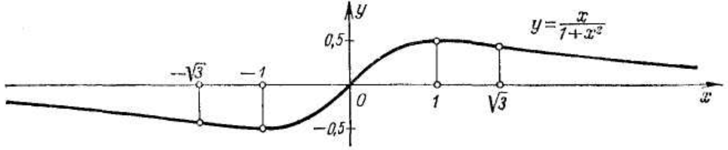


Рис. 6.41.

Приклад 6. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$

і побудувати її графік.

Розв'язання. 1) Функція визначена при всіх значеннях x.

2) Функція усюди безперервна.

3) Досліджуємо функцію на максимум і мінімум:

$$y'=\frac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}.$$

Похідна існує усюди, за винятком точок $x_l=0$ і $x_2=2a$.

Досліджуємо граничні значення похідної при $x\to-0$ і при $x\to+0$:

$$\lim_{x\to-0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=-\infty,\ \lim_{x\to+0}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{(2a-x)^2}}=+\infty.$$

при $x<0$ буде $y'<0$, при $x>0$ буде $y'>0$. Отже, при $x=0$ функція має мінімум. Значення функції в цій точці дорівнює нулеві.

Досліджуємо тепер функцію в іншій критичній точці $x_2=2a$. При $x\to2a$ похідна також прагне до нескінченності. Однак у даному випадку для всіх значень x, близьких до $2a$ (які знаходяться як праворуч, так і ліворуч від точки $2a$), похідна від'ємна. Отже, у цій точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму. У точці $x_2=2a$, так само як і поблизу цієї точки, функція спадає; дотична до кривої в цій точці вертикальна.

При $x=4a/3$ похідна обертається в нуль. Досліджуємо характер цієї критичної точки. Розглядаючи вираз першої похідної, зауважуємо, що

при $x<4a/3$ буде $y'>0$,

при $x>4a/3$ буде $y'<0$.

Отже, при $x=4a/3$ функція має максимум

$$y_{\max}=\frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

4) На підставі проведеного дослідження одержуємо області зростання й спадання функції:

при $-\infty<x<0$ функція убуває,

при $0<x<4a/3$ функція зростає,

при $4a/3<x<+\infty$ функція убуває.

5) Визначаємо області опуклості й вгнутості кривої і точки

перегину: друга похідна $y''=-\dfrac{8a^2}{9x^{4/3}(2a-x)^{5/3}}$

в жодній точці не обертається в нуль. Однак існують дві точки, у яких друга похідна терпить розрив: це точки $x_l=0$ і $x_2=2a$.

Досліджуємо знак другої похідної поблизу кожної з цих точок:

при $x<0$ маємо $y''<0$ - крива обернена опуклістю вгору;

при $x>0$ маємо $y''<0$ - крива обернена опуклістю вгору.

Виходить, точка з абсцисою $x=0$ не є точкою перегину.

При $x<2a$ маємо $y''<0$ - крива обернена опуклістю вгору;

при $x>2a$ маємо $y''>0$ - крива обернена опуклістю вниз.

Виходить, точка $(2a;\ 0)$ на кривій є точкою перегину.

6) Визначаємо асимптоти кривої:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{2ax^2-x^3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{\frac{2a}{x}-1}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}$$

$$\frac{2ax^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}-x\sqrt[3]{2ax^2-x^3}+x^2}=\frac{2a}{3}.$$

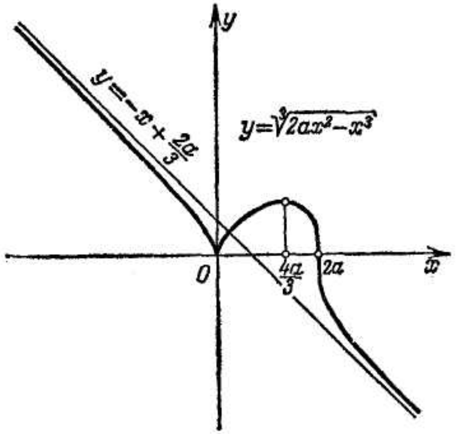


Рис. 6.42.

Отже пряма $y=-x+\dfrac{2a}{3}$ є похила асимптота кривої $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$.

Графік досліджуваної функції зображено на рис. 6.42.

6.15. Дослідження кривих, заданих параметрично

Нехай крива задана параметрично і рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (6.41)$$

В цьому разі дослідження і побудова кривої проводяться аналогічно тому, як це було зроблено для кривої, заданої рівнянням

$$y=f(x).$$

Обчислюємо похідні

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varphi'(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \psi'(t) \end{aligned}\right\} \quad 6.42)$$

Для тих точок кривої, поблизу яких крива є графіком деякої функції $y=f(x)$, обчислюємо похідну

$$\left.\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right\} \quad (6.43)$$

Знаходимо значення параметра $t=t_1, t_2, ..., t_k$. при яких хоча б одна з похідних $\varphi'(t)$ або $\psi'(t)$ обертається в нуль або терпить розрив. (Такі значення t ми будемо називати критичними значеннями.) По формулі (6.43) у кожнім з інтервалів (t_1, t_2), (t_2, t_3),... (t_{k-1}, t_k) а отже, і в кожнім з інтервалів (x_1, x_2), (x_2, x_3),..., $(x_{k-1}\ x_k)$ (де $x_i=\varphi(t_i)$ визначаємо знак dy/dx, тим самим визначаємо області зростання й спадання. Це дає також можливість визначити характер точок, що відповідають значенням параметра $t_1\ \ t_2,..., t_k$. Далі, обчислюємо:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}. \quad (6.44)$$

На підставі цієї формули визначаємо напрям опуклості кривої у кожній точці.

Для находження асимптот знаходимо такі значення t, при наближенні до яких або x, або y прагнуть до нескінченності, і такі

значення t, при наближенні до яких і x, і y прагнуть до нескінченності. Потім робимо дослідження звичайним способом.

Деякі особливості, що з'являються при дослідженні кривих, заданих параметрично, з'ясуємо на прикладах.

Приклад 1. Дослідити криву, задану рівняннями

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= \mathrm{a} \cos^3 \mathrm{t}, \\ \mathrm{y} &= \mathrm{a} \sin^3 \mathrm{t} \end{aligned}\right\} \quad (6.45)$$

Розв'язання. Величини x і y визначені для всіх значень t. Але так як функції $\cos^3 t$ і $\sin^3 t$ — періодичні, з періодом 2π, досить розглянути зміну параметра t в границях від 0 до 2π; при цьому областю зміни x буде відрізок $[-a, a]$ і областю зміни y буде відрізок $[-a, a]$. Отже, розглянута крива асимптот не має. Далі, знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a\cos^2 t \sin t, \\ \frac{dy}{dt} &= 3a\sin^2 t \cos t. \end{aligned}\right\} \quad (6.46)$$

Ці похідні обертаються в нуль при t=0, π/2, π, 3π/2, 2π. Визначаємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t} - tgt. \quad (6.47)$$

На підставі формул (6.46), (6.47) складаємо наступну таблицю:

Область зміни t	Відповідна область зміни x	Відповідна область зміни y	Знак dy/dx	Характер зміни y як функції від x ($y = f(x)$)
$0 < t < \pi/2$	$a > x > 0$	$0 < y < a$	—	Спадає
$\pi/2 < t < \pi$	$0 > x > -a$	$a > y > 0$	+	Зростає
$\pi < t < 3\pi/2$	$-a < x < 0$	$0 > y > -a$	—	Спадає
$3\pi/2 < t < 2\pi$	$0 < x < a$	$-a < y < 0$	+	Зростає

З таблиці випливає, що рівняння (6.45) визначають дві безперервні функції вигляду $y=f(x)$, при $0 \le t \le \pi$, буде $y \ge 0$ (див. два перші рядки таблиці), при $\pi \le t \le 2\pi$ буде $y \le 0$ (див. два останні рядки таблиці). З формули (6.47) випливає: $\lim\limits_{t\to\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty$ і $\lim\limits_{t\to 3\pi/2} \frac{dy}{dx} = \infty$.

У цих точках дотична до кривої вертикальна. Далі знаходимо

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\pi} = 0,\quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=2\pi} = 0.$$

У цих точках дотична до кривої горизонтальна. Потім знаходимо

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a\cos^4 t \sin t}$$

Звідси випливає $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $0<t<\pi$ - крива вгнута,

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } \pi<t<2\pi \text{ - крива опукла.}$$

На підставі результатів дослідження можемо побудувати криву (рис. 6.43). Ця крива називається *астроїдою.*

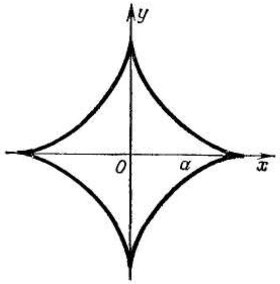


Рис. 6.43.

Приклад 2. Побудувати криву, задану рівняннями (*декартовий лист)*

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}. \quad (6.48)$$

Розв'язання. Обидві функції визначені при всіх значеннях *t,* крім $t = —1$ при цьому

$$\lim_{t\to-1-0} x = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1+t^3} = +\infty,\ \lim_{t\to-1-0} y = \lim_{t\to-1-0} \frac{3at}{1+t^3} = -\infty;$$

$$\lim_{t\to-1+0} y = -\infty,\ \lim_{t\to-1+0} y = +\infty.\ \infty \lim_{t\to-1-0}$$

Помітимо, далі, що
$x=0,\ y=0$ при $t=0$,
$x\to 0,\ y\to 0$ при $t\to+\infty$,
$x\to 0,\ y\to 0$ при $t\to-\infty$.
Знайдемо $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} + t^3\right)}{(1+t^3)^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{3at(1-t^3)}{(1+t^3)^2}. \quad (6.49)$$

Для параметра *t* одержуємо наступні чотири критичні значення:

$$t_1=-1,\ t_2=0,\ t_3=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\ t_4=\sqrt[3]{2}.$$

Далі, знаходимо: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}$. (6.50)

На підставі формул (6.48), (6.49), (6.50) складаємо таблицю

Область зміни t	Відповідна область зміни x	Відповідна область зміни y	Знак dx/dy	Характер зміни y як функції від x ($y=f(x)$)

$-\infty<t<-1$	$0<x<+\infty$	$0>y>—\infty$	-	Спадає
$1<t<0$	$-\infty<x<0$	$+\infty>y>0$	-	Спадає
$0<t<1/\sqrt[3]{2}$	$0<x<a\sqrt[3]{4}$	$0<y<a\sqrt[3]{2}$	+	Зростає
$1/\sqrt[3]{2}<t<\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{4}>x>a\sqrt[3]{2}$	$a\sqrt[3]{2}<y<a\sqrt[3]{4}\ a$	-	Спадає
$\sqrt[3]{2}<t<+\infty$	$a\sqrt[3]{2}>x>0$	$\sqrt[3]{4}>y>0$	+	Зростає

З формули(6.50) знаходимо $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=0\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=0,\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{\substack{t=\infty\\ \left(\substack{x=0\\ y=0}\right)}}=\infty$.

Отже, початок координат крива перетинає двічі, з дотичної, паралельної осі *Ox,* і з дотичної, яка паралельна осі *Oy*.

Далі, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=\infty$ при $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $(x=a\sqrt[3]{4}\,,\ y=a\sqrt[3]{2}\,)$.

У цій точці дотична до кривої вертикальна.

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=0$ при $t=\sqrt[3]{2}$ $(x=a\sqrt[3]{2}\,,\ y=a\sqrt[3]{4}\,)$.

У цій точці дотична до кривої горизонтальна. Досліджуємо питання про існування асимптоти:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1-0}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at\ (1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y\text{-}kx)=\lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}-(-1)\frac{3at}{1+t^3}\right]=\lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at(t+1)}{1+t^3}\right]=$$

$$\lim_{t\to-1-0}\left[\frac{3at}{1-t+t^3}\right]=-a$$

Отже, пряма $y=-x-a$ є асимптотою гілки кривої при $x\to+\infty$

Аналогічним чином знайдемо

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=-1,b=\lim_{x\to-\infty}(y\text{-}kx)=a.$$

Таким чином, знайдена пряма є асимптотою для гілки кривої при $x\to-\infty$. На підставі проведеного дослідження будуємо криву (рис. 6.44)

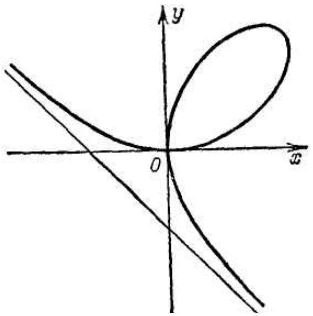


Рис. 6.44.

Мікромодуль 14.
Приклади розв'язання типових задач

1. Знайдіть інтервали зростання та спадання функції

$$f(x)=(x^2+1)/(x-1)$$

Розв'язання. Область визначення (—∞, 1 ; 1,∞). Знайдемо похідну

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю в точці $x=—1$ і не існує, якщо $x=1$. Отже, $x=—1$; 1 - критичні точки даної функції.

Відмічаємо ці точки на числовій прямій (при цьому пам'ятаємо про область визначення функції) і визначаємо знак похідної на кожному з інтервалів (рис. 6.45):

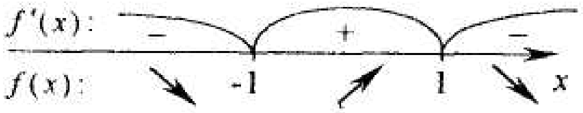


Рис. 6.45.

Таким чином, функція спадає, якщо x знаходиться в області визначення (—∞, 1; 1,∞), і зростає на інтервалі (— 1; 1).

2. Знайдіть локальні екстремуми функції $f(x)=x-x^5/5$.

Розв'язання. Область визначення (—∞;∞) . Знайдемо критичні точки:

$$f'(x)=1-x^4,\ f'(x)=0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x)(1+x^2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Отже, точки $x=\pm1$- критичні (стаціонарні) точки. Визначаємо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис. 6.46):

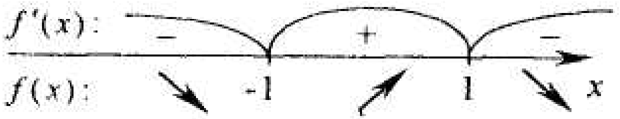


Рис. 6.46.

Як видно з рис. 6.46 на інтервалах (—∞;—1),(1;∞) функція спадає, а на інтервалі (—1; 1) — зростає. За теоремою про першу достатню умову локального екстремума робимо висновок, що x=—1 - точка локального мінімуму; x=1- точка локального максимуму, причому $y_{\min}=y(-1)=-4/5$, $y_{\max}=y(1)=4/5$.

3. Знайдіть локальий екстремуми функції

$$f(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}.$$

Розв'язання. Область визначення (—∞;— 2) (—2;∞).

Знайдемо критичні точки: $f'(x)= \dfrac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+2)-x^{2/3}}{(x+2)^2}=$

$$=\frac{2x^{-1/3}(x+2)-3x^{2/3}}{3(x+2)^2}=\frac{2x+4-3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}=-\frac{x-4}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$$

Рівняння $f'(x)=0$ має єдиний корінь $x=4$. Похідна не існує в точках $x=-2$ і $x=0$. При цьому в точці $x=-2$ функція невизначена, а в точці $x=0$ — визначена. Визначаємо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис. 6.47):

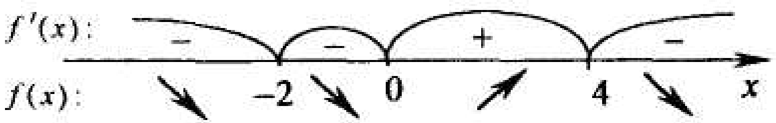


Рис. 6.47.

При переході через точку $x=0$ зліва направо похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тобто, на інтервалі (—2;0) функція спадає, а на інтервалі (0; 4) функція зростає. Враховуючи, що в точці $x=0$ функція неперервна, робимо висновок, що x=0— точка локального мінімуму. Аналогичним чином переконуємося, що x=4 — точка локального максимуму. Відмітимо, що точка x=—2 не є критичною точкою (в цій точці функція невизначена).

4. Дослідіть функцію $y=3x^4-4x^3—12x^2+2$ на екстремум.

Розв'язання. Область визначення (—∞;∞). Похідна даної функції

$$y'=12x^3—12x^2—24x .$$

Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$:

$$12x^3—12x^2—24x=0;\ 12x(x^2—x—2)=0;$$

$x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$ - стаціонарні точки.

Друга похідна

$$y''=36x^2—24x—24=12(3x^2—2x— 2).$$

Визначаємо знак y'' в стаціонарних точках:

$$y''(-1)=12(3+2-2)=36>0,\ y''(0)=-24<0,\ y''(2)=72>0.$$

За теоремою про другу достатню умову локального екстремуму робимо висновок, що $x_1=-1$ та $x_3=2$ - точки локального мінімуму, а $x_2=0$ - точка локального максимуму.

5. Дослідіть на екстремум в точці $x = 0$ функцію

$$f(x)=\sin^2 x-x^2+1.$$

Розв'язання . Маємо

$f'(x)=\sin 2x-2x,\quad f'(0)=0;$

$f''(x)=2\cos 2x-2,\quad f''(0)=0;$

$f'''(x)=-4\sin 2x,\quad f'''(0)=0;$

$f^{(4)}(x)=-8\cos 2x,\quad f^{(4)}(0)=-8<0.$

Отже, задана функція має в точці $x=0$ локальний максимум.

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y=x^2\ln x$ на відрізку [1; e].

Розв'язання. Знайдемо похідну $y'=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

Оскільки функція визначена при $x>0$, то критичну точку знаходимо з умови $2\ln x+1=0$, тобто

$$x=e^{-0,5}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Ця точка не належить проміжку [1; e]. Тому обчислюємо лише значення функції на кінцях відрізка. Маємо: $y(1)=0$, $y(e)=e^2$

Таким чином. $\max\limits_{x\in[1;e]} f(x)=f(e)=e^2$, $\min\limits_{x\in[1;e]} f(x)=f(1)=0$.

7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ на проміжку [0;3].

Розв 'язання. Знайдемо критичні точки:

$$y'=\frac{x^2+3-2x(x+1)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$-x^2-2x+3,\ x_1=-3,\ x_2=1.$$

Точка $x_1=$—3 не належить проміжку [0;3]. Обчислюємо значення

$$f(x_2)=f(1)=\frac{1}{2};\ f(0)=\frac{1}{3};\ f(3)=\frac{1}{3}.$$

Таким чином $\max\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f(1)=\dfrac{1}{2}$, $\min\limits_{x\in[0;3]} f(x)=f(0)=f(3)=\dfrac{1}{3}$.

8. Знайдіть інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої

$$f(x)=3x^4-4x^3+1.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$f'(x)=12x^3-12x^2,\ f''(x)=36x^2-24x=36x(x-\frac{2}{3}).$$

Розв'язуємо рівняння $f''(x)=0$, $36x(x-2/3)=0$, $x_1=0$; $x_2=2/3$ - критичні точки другого роду. Визначаємо знак другої похідної: якщо $x<0$, то $f''(x)>0$— крива вгнута; якщо $x\,(0;2/3)$, то $f''(x)<0$ - крива опукла; якщо $x>2/3$, то $f''(x)>0$-крива вгнута. При переході через точки $x_1=0$ і $x_2=2/3$ друга похідна змінює знак. Звідси

випливає, що точки (0; f(0)) та (2/3;f(2/3)), тобто (0;1) та (2/3, 11/27) є точками перегину даної кривої.

9. Знайдіть асимптоти кривої $y=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$

Розв'язання. Запишемо рівняння даної кривої так: $y=x\ \ +1+\dfrac{1}{x^2}$.

Рівняння похилої асимтоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$. Маємо:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1+1/x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(x+1+1/x^2-x)=\lim_{x\to\infty}(1+1/x^2)=1.$$

Отже, $y=x+1$- рівняння похилої асимптоти. Далі, оскільки функція

$$y=x\ \ +1+\frac{1}{x^2}$$

в точці $x=0$ має розрив другого роду, то пряма $x=0$ - вертикальна асимптота даної кривої. Горизонтальних асимптот крива не має

$$(\lim_{x\to\infty}(x+1+1/x^2)=\infty)$$

10. Дослідіть функцію $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область існування - вся числова пряма, крім точки $x=1$, тобто $D(y)=(-\infty;\ 1)\ (1;\ \infty)$.

2) Графік функції $y=f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці (0;f(0)). У нашому випадку $y(0)=-1$, отже, $A(0;$—$1)$ - точка перетину кривої з віссю Oy . Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y=0$,тобто

$$\frac{x^2+1}{x-1}=0$$

Це рівняння не має дійсних коренів, тому дана функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{-x-1}=\frac{x^2+1}{-x-1},$$

таким чином $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$.

Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального вигляду.

4)Функція в точці x=1 має розрив другого роду, причому

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x-1}-+\infty$$

В усіх інших точках функція неперервна.

Знаходимо похідну

$$y'=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y'=0$, або x^2—$2x$—1=0, звідки дістаємо стаціонарні точки x_1=1—√2 та x_2=1+√2 . Крім того, похідна невизначена при x=1. Отже, x_1= 1—√2, x_2=1+√2, x_3=1— *критичні точки* або точки можливого екстремуму даної функції. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали (—∞; 1-√2), (1-√2; 1), (1; 1+√2), (1+√2; ∞). На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за *методом інтервалів* або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах (—∞;1 —√2) та (1+√2;∞) похідна додатна, отже функція зростає; для $x\in$(1-√2; 1) та (1; 1+√2) функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку x_1=1—√2 (рух вібувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці функція має локальний максимум. Тоді

$$y_{\max}=y(1-\sqrt{2})=\frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1}=2-2\sqrt{2}.$$

При переході через точку x_2=1+√2 похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min}=y(1+\sqrt{2})=\frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1}=2+2\sqrt{2}.$$

Точка x=1 не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y''=\left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot(2x-1)}{(x-1)^4}=\frac{4}{(x-1)^3}.$$

На інтервалі (-∞; 1) $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x\in(1;\infty)$, то $y''>0$ - крива вгнута. В точці x=1 функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) З результатів п.4 випливає, що пряма x=1 - вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty,$$

То горизонтальні асимптоти відсутні.

Знайдемо границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1.$$

Отже

$$k=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Таким чином, пряма $y=x+1$ - похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Обчислимо додатково (хоча це зовсім необов'язково) кілька значень функції: $y(3)=5$, $y(-1)=-1$. Отже, точки $B(3;5)$, $C(-1;-1)$ належать графіку.

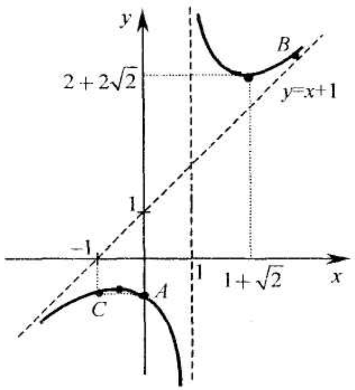


Рис. 6.48.

9) Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік (див. рис. 6.48).

Мікромодуль 14.

Індивідуальні тестові завдання

14.1.Знайдіть проміжки зростання та спадання функції

14.1.1. $y=x^2\text{-}\ln x^2$.   14.1.2. $y=\sqrt{x-1}\,(x\text{-}2)$.

14.1.3. $y=(x\text{-}1)^2(x+1)^3$ 14.1.4. $y=\arcsin(1+x)$

14.1.5. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ 14.1.6. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+24}$

14.1.7. $y=\dfrac{x^2}{2^x}$ 14.1.8. $y=\ln x\text{-}arc\ x$.

14.1.9. $y=\dfrac{x5}{3^x}$ 14.1.10. $y=x^4\bullet\ln x$

14.1.11. $y=\ln(x^2+1)\text{-}x$ 14.1.12. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$.

14.1.13. $y=9^{-x}\text{-}3^{-x}$ 14.1.14. $y=x\bullet\ln^3 x$

14.1.15. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\text{-}\dfrac{4}{x3}$ 14.1.16. $y=(x\text{-}5)^2(x+4)^2$

14.1.17. $y=x^2\bullet\ln x$ 14.1.18. $y=x\bullet\ln^2 x$

14.1.19. $y=x^2\bullet e^{-x^2}$ 14.1.20. $y=2^x\text{-}4^x$

14.1.21. $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x-5}$ 14.1.22. $y=(x\text{-}4)^2(x+5)^2$

14.1.23. $y=\sqrt{2x-x^2}$ 14.2.4. $y=\sqrt{x}\ \ln x$

14.1.25. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$ 14.1.26. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

14.1.27. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$ 14.1.28. $y=\dfrac{x^2}{x^4+4}$

14.1.20. $y=e^{-x}\text{-}e^{-2x}$ 14.1.30. $y=x+\dfrac{1}{x}$

14.2 .Знайдіть точки перегину, інтервали опуклості та вгнутості функції:

14.2.1. $y=x^2\bullet\ \sqrt{x+1}$ 14.2.2. $y=\sqrt{2x-x^2}$

14.2.3. $y=(x\text{-}4)^4(x+7)^3$ 14.2.4. $y=x^x$

14.2.5. $y=\ln(1+x^2)$ 14.2.6. $y=x+\sin x$.

14.2.7. $y=3x^2\text{-}x^3$ 14.2.8. $y=xe^{-x}$

14.2.9. $y=x+x^{5/3}$ 14.2.10. $y=3x^2\text{-}4x\sqrt{x}$

14.2.11. $y=\ln(1+x^2)$ 14.2.12. $y=\ln x+\ln^2 x$

14.2.13. $y=e^{-x^4}$ 14.2.14. $y=x^4+8x^3+18x^2+8$

14.2.15. $y= (x-1)^2 \bullet \sqrt{x}$

14.2.16. $y= x^3-3x^2+6x+7$

14.2.17. $y= \frac{x+1}{x^2+1}$

14.2.18. $y=\frac{x}{x^2-2x+2}$

14.2.19. $y= \frac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$

14.2.20. $y=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2-x}$

14.2.21. $y= \frac{x^2}{(x-1)^3}$

14.2.22. $y=\frac{x^2+2x+1}{x^3}$

14.2.23. $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$

14.2.24. $y=x\sqrt{x} \bullet (4-x)^{-1/2}$

14.2.25. $y= \frac{x^3}{x^2+1}$

14.2.26. $y=\frac{x^3-x^2-1}{x^2}$

14.2.7. $y= x+7/x-3/x^2$

14.2.28. $y= x^4+6x^3+12x^2$

14.2.29. $y=\frac{x^3}{4x^2+1}$

14.2.30. $y=\sqrt[3]{x(x+1)^2}$

14.3.Проведітъ повне дослідження функції $y=f(x)$ та побудуйте її графік.

14.3.1. $y=x^2+ \frac{2}{x}$

14.3.2. $y=\frac{1}{x^2+3}$

14.3.3. $y= \frac{16}{x^2(x-4)}$

14.3.4. $y=\frac{1}{1+x^2}$

14.3.5. $y=\frac{x^3}{3-x^2}$

14.3.6. $y=\frac{x^2-5}{x-3}$

14.3.7. $y= \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$

14.3.8. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

14.3.9. $y=\frac{4x-`12}{(x-2)^2}$

14.3.10. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$

14.3.11. $y=\frac{x}{x^2-4}$

14.3.12. $y=\frac{x^4}{x^3-1}$

14.3.13. $y= \frac{x}{(1-x^2)^2}$

14.3.14. $y=\frac{4x^2}{3-x}$

14.3.15. $y= x+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}$

14.3.16. $y=\frac{8}{x^2-4}$

14.3.17. $y= \frac{x^2-1}{x^2+1}$

14.3.18. $y=\frac{x^4}{(1+x^2)^3}$

14.3.19. $y= \frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$

14.3.20. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$

14.3.21. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ 14.3.22. $y=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

14.3.23. $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ 14.3.24. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

14.3.25. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ 14.3.26. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

14.3.27. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 14.3.28. $y=\dfrac{2x^2+1}{x-1}$

14.3.29. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ 14.3.30. $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$.

14.4. Проведітъ повне дослідження функції $y=f(x)$ та побудуйте її графік.

14.4.1. $y=(x+2)\bullet e^{1/x}$ 14.4.2. $y=x-5\,arctg\,x$ 14.4.3. $y=\ln x/\sqrt{x}$

14.4.4. $y=x+e^{-x}$ 14.4.5. $y=e^x/(1+x)$ 14.4.6. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$

14.4.5. $y=e^x/(1+x)$ 14.4.6. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$ 14.4.7. $y=x^2\bullet\ln x$

14.4.8. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ 14.4.9. $y=x^3\bullet e^{1/x}$ 14.4.10. $y=x+\ln(x^2-8)$

14.4.11. $y=(x+12)\bullet e^{1/x}$ 14.4.12. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ 14.4.13. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$

14.4.14. $y=\dfrac{e^x}{x-2}$ 14.4.15. $y=\dfrac{e^x}{x^2}$ 14.4.16. $y=(x+4)\bullet e^{2/x}$

14.4.17. $y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ 14.4.18. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 14.4.19. $y=\dfrac{x^3}{3}-2arctg\,x$

14.4.20. $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x-1)^2}$ 14.4.21. $y=\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$ 14.4.22. $y=\sqrt[3]{x}\,\ln x$

14.4.23. $y=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$ 14.4.24. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 14.4.25. $y=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x-2}$

14.4.26. $y=\dfrac{x}{\ln x}$ 14.4.27. $y=(3x^4+1)/x^3$ 14.4.28. $y=(1+1/x)^2$

14.4.29. $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$ 14.4.30. $y=\dfrac{x^3-2}{x}$

Модуль 7

Кривизна кривої і функції декількох змінних

Мікромодуль 15

Кривизна кривої

7.1. Довжина дуги і її похідна

Нехай дуга кривої M_0M (рис. 7.1) є графік функції

$$y=f(x)$$

визначеної на проміжку (a, b). Визначимо довжину дуги кривої. Візьмемо на кривій AB точки

$$M_0, M_1, M_2, ..., M_{i-1}, M_i, . ., M_{n-1}, M.$$

З'єднавши взяті точки відрізками, одержимо ламану лінію

$$M_0M_1\, M_2, ..., M_{i-1}\, M_i, . ., M_{n-1}\, M.$$

вписану в дугу M_0M. Позначимо довжину цієї ламаної через P_n.

Довжиною дуги M_0M називається границя (позначимо її через s), до якої прагне довжина ламаної, при прагненні до нуля найбільшого з довжин відрізків ламаної $M_{i-1}M_i$, якщо ця границя існує і не залежить від вибору точок ламаної

$$M_0M_1M_2 .. .M_{i-1}M_i... M_{n-1}M.$$

Відзначимо, що це визначення довжини дуги довільної кривої аналогічне визначенню довжини кола.

Далі буде доведено, що якщо на відрізку [a, b] функція $f(x)$ і її похідна $f'(x)$ безперервні, то дуга кривої $y=f(x)$, яка заключена між точками [$a; f(a)$] і [$b;f(b)$], має цілком визначену довжину, причому буде приведено спосіб обчислення цієї довжини. Там же буде встановлено (як наслідок), що в зазначених умовах відношення довжини будь-якої дуги цієї кривої до довжини стягуючої її хорди прагне до 1, коли довжина хорди прагне до 0:

$$\lim_{M_0M\to 0}\frac{дов.\breve{M_0}\breve{M}}{дов.\overline{M_0M}}=1.$$

Ця теорема легко може бути доведена для кола , однак у загальному випадку ми поки що приймемо її без доведення.

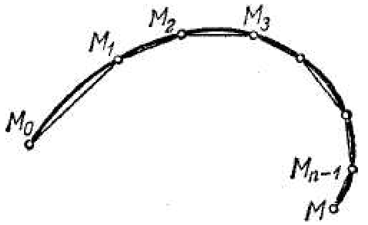


Рис. 7.1.

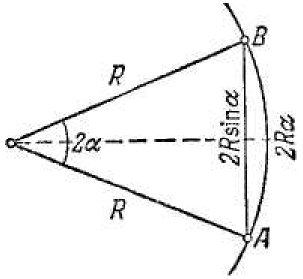


Рис. 7.2.

Розглянемо дугу AB, центральний кут якої дорівнює 2α (рис. 7.2). Довжина цієї дуги дорівнює $2R\alpha$ (R — радіус кола), а довжина стягуючої її хорди дорівнює $2R\sin\alpha$. Тому

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{дов.\breve{A}\breve{B}}{дов.\overline{AB}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2R\alpha}{2R\sin\alpha}=1.$$

Розглянемо наступне питання. Нехай ми маємо на площині криву, задану рівнянням $y=(x)$. Нехай $M_0(x_0, y_0)$— деяка фіксована точка кривої, а $M(x,y)$ - змінна точка цієї кривої. Позначимо через s довжину дуги M_0M (рис. 7.3).

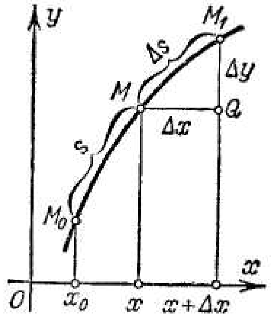


Рис. 7.3.

При зміні абсциси x точки M довжина s дуги буде змінюватися, тобто s є функція x. Знайдемо похідну s по x.

Дамо x приріст Δx. Тоді дуга s одержить приріст

$$\Delta s = дов.\breve{M}\breve{M}_1.$$

Нехай $\overline{MM_1}$ - хорда, що стягає цю дугу. Для того щоб знайти $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta x}$, поступимо наступним чином, з ΔMM_1Q знаходимо $\overline{MM_1}^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$.

Помножимо і розділимо ліву частину на Δs^2

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\Delta s^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2.$$

Розділимо всі члени рівності на Δx^2

$$\left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta s}\right)^2\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2=1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Знайдемо границю лівої і правої частин при $\Delta x \to 0$. З огляду на те, що

$$\lim_{MM_1 \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta s} = 1 \text{ і що } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

одержимо

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \text{або} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (7.1).$$

Для *диференціала дуги* одержимо наступний вираз:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (7.2)$$

або

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad (7.3)$$

(Взагалі, формула (7.3) вірна лише для того випадку, коли $dx > 0$. Якщо

$dx < 0$, то $ds = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Тому, у загальному випадку цю формулу

більш правильно записати так: $|\, ds \,| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ *).*

Ми одержали вираз диференціала довжини дуги для того випадку, коли крива задана рівнянням *y=f(x).* Однак формула (7.3) зберігається й у тому випадку, коли крива задана параметричними рівняннями.

Якщо крива задана параметрично:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{то } dx = \varphi'(t)dt, \quad dy = \psi'(t)dt,$$

і вираз (7.3) приймає вигляд

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi(t)]^2}\, dt.$$

7.2. Кривизна і її обчислення

Одним з елементів, що характеризують форму кривої, є степінь її викривленості, зігнутості.

Нехай ми маємо криву, що не перерізає саму себе і має визначену дотичну в кожній точці.

Проведемо дотичні до кривої в яких-небудь двох її точках *A* і *B* і позначимо через α кут, утворений цими дотичними, точніше — кут повороту дотичної при переході від точки *A* до точки *B* (рис. 7.4). Цей кут називається *кутом суміжності* дуги *AB.* У двох дуг, що мають однакову довжину, більше вигнута та дуга, у якої кут суміжності більший (рис. 7.4 і 7.5).

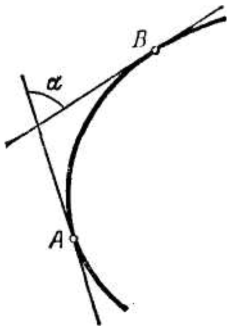


Рис. 7.4.

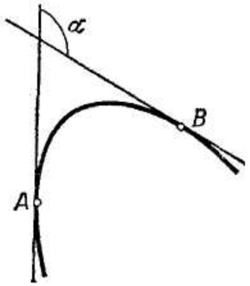


Рис. 7.5.

З іншого боку, розглядаючи дуги різної довжини, ми не можемо оцінити степінь їхньої викривленості тільки відповідним кутом суміжності. Звідси випливає, що повною характеристикою зігнутості кривої буде відношення кута суміжності до довжини відповідної дуги.

Означення 1. *Середньою кривизною* K_{cp} *дуги* $A\breve{\ }B$ називається відношення відповідного кута суміжності α до довжини дуги:

$$K_{cp} = \frac{\alpha}{\breve{A}\breve{B}}.$$

Для однієї і тієї ж кривої середня кривизна її різних частин (дуг) може бути різною; так, наприклад, для кривої, показаної на рис. 7.6,

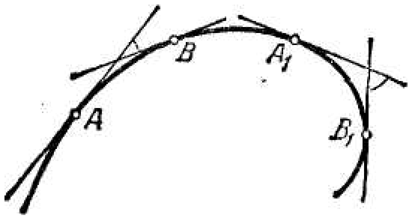


Рис. 7.6.

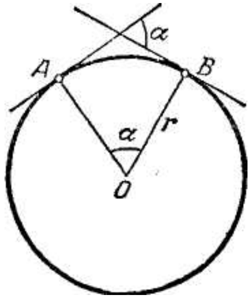


Рис. 7.7.

середня кривизна дуги $A\breve{}B$ не дорівнює середній кривизні дуги $A_1\breve{}B_1$, хоча довжини цих дуг рівні між собою. Більш того, поблизу різних точок крива скривлена по-різному. Для того щоб охарактеризувати степінь викривленості даної лінії в безпосередній близькості до даної точки *A,* введемо поняття кривизни кривої у даній точці.

Означення 2. *Кривизною* K_A лінії в даній точці *A* називається границя середньої кривизни дуги *AB,* коли довжина цієї дуги прагне до нуля (тобто коли точка *B* наближається до точки *A):*

$$K_A = \lim_{B\to A} K_{cp} = \lim_{AB\to 0} \frac{\alpha}{\breve{A}\breve{B}}.$$

(Ми припускаємо, що величина границі не залежить від того, з якої сторони від точки *A* ми беремо змінну точку *B* на кривій).

Приклад. Для кола радіуса *r:* 1) визначити середню кривизну дуги *AB,* яка відповідає центральному кутові α (рис. 7.7); 2)визначити кривизну в точці *A*.

***Розв'язання*.** 1) Очевидно, що кут суміжності дуги $A\breve{}B$ дорівнює α, довжина дуги дорівнює α*r*. Отже,

$$K_{cp} = \frac{\alpha}{\alpha r},$$

або

$$K_{cp} = \frac{1}{r}.$$

2) Кривизна в точці *A*

$$K = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\alpha r} = \frac{1}{r}.$$

Таким чином, середня кривизна дуги кола радіуса *r* не залежить від довжини і положення дуги, для всіх дуг вона дорівнює 1/*r*. Кривизна кола в будь-якій її точці також не залежить від вибору цієї точки і дорівнює 1/*r*.

Зауваження. Відзначимо, що для довільної кривої кривизна в різних її точках, узагалі говорячи, буде різна. Це ми побачимо нижче.

7.3. Обчислення кривизни

Виведемо формулу для обчисленні кривизни даної лінії в будь-якій її точці *M(x, y).* При цьому ми будемо припускати, що крива задана в декартовій системі координат рівнянням вигляду

$$y=f(x) \quad (7.4)$$

і що функція *f(x)* має безперервну другу похідну.

Проведемо дотичні до кривої в точках *M* і M_1 з абсцисами *x* і $x+\Delta x$ і позначимо через φ і φ +Δφ кути нахилу цих дотичних (рис. 7.8).

Довжину дуги $M\breve{}_0M$, яку будемо відраховувати від деякої сталої точки M_0, позначимо через *s;* тоді $\Delta s = M_0\breve{}M_1 - M_0\breve{}M$, а $|\Delta s| = M\breve{}M_1$. Як безпосередньо видно з рис. 7.8, кут суміжності, що відповідає дузі $M\breve{}M_1$, дорівнює абсолютній величині різниці кутів φ і φ+Δφ, тобто дорівнює |Δφ|. (Для кривої, зображеної на рис. 7.8 очевидно що |Δφ| =Δφ ,так як Δφ> 0).

Відповідно до визначення середньої кривизни кривої на проміжку MM_1 маємо:

$$K_{cp} = \frac{|\Delta\varphi|}{|\Delta s|} = \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

Щоб одержати кривизну в точці *M,* потрібно знайти приріст отриманого виразу за умови, що довжина дуги $M\breve{}M_1$ прагне до нуля:

$$K = \lim_{\Delta s\to 0} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|.$$

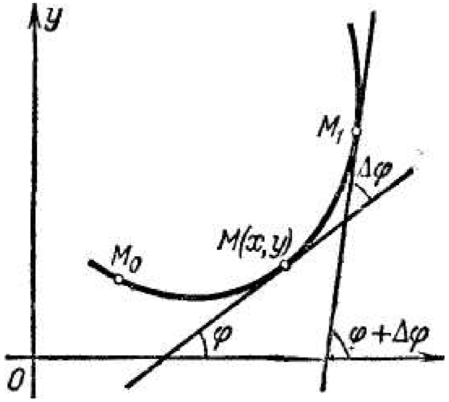


Рис. 7.8.

Так як величини φ і s обидві залежать від *x* (є функціями від *x),* то, отже, φ можна розглядати як функцію від s. Ми можемо вважати, що ця функція задана параметрично за допомогою параметра *x.* Тоді

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\frac{d\varphi}{ds}$$

і, отже,

$$K_{cp}=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|.\quad (7.5)$$

Для обчислення *dφ/ds* використовуємо формулу диференціювання функції, заданої параметрично:

$$\frac{d\varphi}{ds}=\frac{d\varphi}{dx}/\frac{ds}{dx}.$$

Щоб виразити похідну *dφ/ds* через функцію *y=f(x),* згадаємо, що tgφ= *dy/dx* і , отже , φ=tg *dy/dx.*

Диференціюючи по *x* останню рівність, будемо мати:

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Що ж стосується похідної *ds/dx ,* то раніше ми знайшли

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Тому

$$\frac{ds}{dx}=\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}}=\frac{\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}},$$

або, так як $K=\left|\frac{d\varphi}{ds}\right|$, остаточно одержуємо

$$K=\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\quad (7.6)$$

Отже, у будь-якій точці кривої, де існує і є безперервною друга похідна d^2y/dx^2, можна обчислити кривизну. Для її обчислення служить формула (7.6). Помітимо, що при обчисленні кривизни кривої варто брати тільки арифметичне (тобто додатне) значення кореня в знаменнику, тому що кривизна лінії по визначенню не може бути від’ємною.

Приклад 1. Визначити кривизну параболи $y^2=\sqrt{2px}$:

а) у її довільній точці *M (x, y);*

б) у точці $M_1(0, 0)$;

в) у точці $M_2(p/2, p)$.

Розв’язання. Знаходимо перші і другу похідні функції $y=\sqrt{2px}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{(2px)^{3/2}}.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (7.6.), одержимо;

а) $K = \dfrac{p^2}{\left(2px+p^2\right)^{3/2}}$;

б) $K_{x=0,y=0} = 1/p;$

в) $K_{x=p/2,y=p} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}p}$.

Приклад 2. Визначити кривизну прямої $y=ax+b$ у її довільній точці (x, y).

Розв'язання.

$$y' = a, \quad y'' = 0.$$

Звертаючись до формули (7.6), одержуємо:

$$K = 0.$$

Таким чином, пряма являє собою «лінію нульової кривизни». Цей же результат легко можна одержати безпосередньо з визначення кривизни.

7.4. Обчислення кривизни лінії, заданої параметрично

Нехай крива задана параметрично: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

Тоді

$$dx=\varphi'(t)dt, \quad dy=\psi'(t)dt, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''\varphi' - \psi'\varphi''}{(\varphi')^3}.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (7.6) одержуємо:

$$K = \frac{\left|\psi''\varphi' - \psi'\varphi''\right|}{\left[\varphi'^2 + \psi'^2\right]^{3/2}}. \quad (7.7)$$

Приклад. Визначити кривизну циклоїди

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ у її довільній точці (x,y)

Розв'язання.

$$\frac{dx}{dt} = a(1-\cos t), \quad \frac{d^2x}{dt^2} = a\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a\sin t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = a\cos t.$$

Підставляючи отримані вирази у формулу (7.6),знаходимо

$$K = \frac{\left|a(1-\cos t)a\cos t - a\sin t\cdot a\sin t\right|}{\left|a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t\right|^{3/2}} = \frac{\left|\cos t - 1\right|}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}a(1-\cos t)^{1/2}} = \frac{1}{4a\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|}.$$

7.5. Обчислення кривизни лінії, заданої рівнянням у полярних координатах

Нехай крива задана рівнянням вигляду

$$\rho=f(\theta) \quad (7.8)$$

Напишемо формули переходу від полярних координат до декартових:

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (7.9)$$

Якщо в ці формули підставити замість ρ його вираз через θ, тобто $f(\theta)$, то одержимо:

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\theta)\cos\theta \\ y &= f(\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (7.10)$$

Останні рівняння можна розглядати як параметричні рівняння кривої (7.8), причому параметром є θ .

Тоді

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\cos\theta - \rho\sin\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta + \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}\cos\theta - 2\frac{d\rho}{d\theta}\sin\theta - \rho\cos\theta,$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\sin\theta+2\frac{d\rho}{d\theta}\cos-\rho\sin\theta\ .$$

Підставляючи останні вирази у формулу (7.7) , одержуємо формулу для обчислення кривизни кривої в полярних координатах:

$$K=\frac{\left|\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''\right|}{(\rho^2+\rho'^2)^{3/2}}\ . \quad (7.11)$$

Приклад. Визначити кривизну спіралі Архімеда ρ=*a*θ (*a*>0) у довільній точці (рис. 7.9).

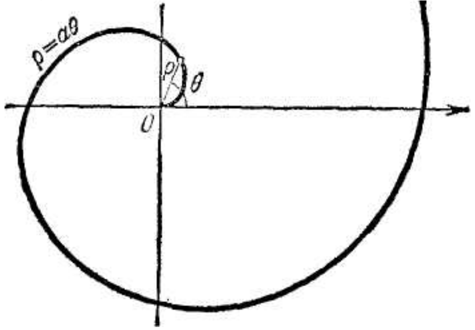


Рис. 7.9.

Розв'язання.

$$\frac{d\rho}{d\theta}=a\,,\ \ \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=0$$

Отже,

$$K=\frac{\left|a^2\theta^2+2a^2\right|}{(a^2\theta^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a}\ \frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}\ .$$

Помітимо, що при великих значеннях θ мають місце наближені рівності:

$$\frac{\theta^2+2}{\theta^2}\approx 1,\ \ \frac{\theta^2+1}{\theta^2}\approx 1$$

тому, замінюючи в попередній формулі θ^2+2 на θ^2 і θ^2+1 на θ^2, одержуємо наближену формулу (для великих значень θ):

$$K\approx\frac{1}{a}\ \frac{\theta^2}{(\theta^2)^{3/2}}=\frac{1}{a\theta}\ .$$

Таким чином, при великих значеннях θ спіраль Архімеда має приблизно ту ж кривизну, що і коло радіуса *aθ.*

7.6. Радіус і коло кривизни. Центр кривизни. Еволюта і евольвента

Означення. Величина *R* , яка обернена (зворотна) кривизні *K* лінії в даній точці *M,* називається *радіусом кривизни* цієї лінії в точці , яку розглядаємо:

$$R = 1/K, \qquad \mathbf{(}7.12\mathbf{)}$$

Або

$$R=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}\ . \quad (7.13)$$

Побудуємо в точці *M* нормаль до кривої (рис. 7.10), спрямовану в бік вгнутості кривої, і відкладемо на цій нормалі відрізок *MC,* який дорівнює радіусові *R* кривизни кривої в точці *M.* Точка *C* називається *центром кривизни* даної кривої в точці *M,* коло радіуса *R* з центром у точці *C* (що проходить через точку *M)* називається *колом кривизни* даної кривої в точці *M.*

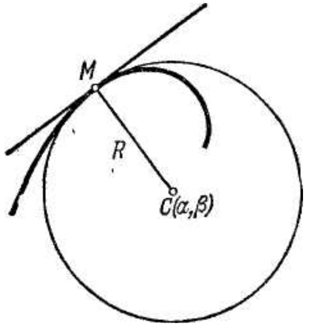


Рис. 7.10.

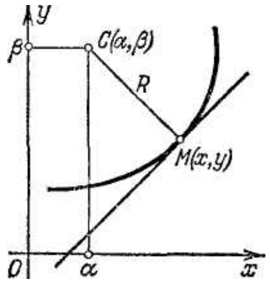


Рис. 7.11.

З визначення кола кривизни випливає, що в даній точці кривизна кривої і кривизна кола кривизни рівні між собою.

Виведемо формули, що визначають координати центра кривизни. Нехай крива задана рівнянням

$$y=f(x) \quad (7.14)$$

Зафіксуємо на кривій точку $M(x, y)$ і визначимо координати α і β центра кривизни, що відповідає цій точці (рис. 7.11). Для цього напишемо рівняння нормалі до кривої в точці M:

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x). \quad (7.15)$$

(Тут X і Y - *поточні* координати точки нормалі.)

Так як точка $C(\alpha, \beta)$ лежить на нормалі, то її координати повинні задовольняти рівнянню (7.15):

$$\beta-y=-\frac{1}{y'}(\alpha-x). \quad (7.16)$$

Далі, точка $C(\alpha, \beta)$ знаходиться від точки $M(x, y)$ на відстані, яка дорівнює радіусові кривизни R:

$$(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2=R^2. \quad (7.17)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (7.16) і (7.17), визначимо α і β:

$$(\alpha-x)^2+\frac{1}{y'^2}(\alpha-x)^2=R^2,$$

$$(\alpha-x)^2=\frac{y'^2}{1+y'^2}R^2.$$

Звідси

$$\alpha=x\pm\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}R, \quad \beta=y\mp\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}R,$$

а так як

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''\right|},$$

то

$$\alpha=x\pm\frac{y'\left(1+y'^2\right)}{\left|y''\right|}, \quad \beta=y\mp\frac{1+y'^2}{\left|y''\right|}.$$

Щоб розв'язати питання про те, верхні або нижні знаки варто брати в останніх формулах, потрібно розглянути випадок $y''>0$ і випадок $y''<0$.

Якщо $y''>0$, то в цій точці крива вгнута і, отже, $\beta>y$ (рис. 7.11) і тому варто брати нижні знаки. З огляду на те, що в цьому випадку $|y|=y''$, формули координат центра кривизни будуть:

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{y'\left(x'^2+y'^2\right)}{x'y''-x''y'}\\ \beta&=y+\frac{x'\left(x'^2+y'^2\right)}{x'y''-x''y'}\end{aligned}\right\} \quad (7.18)$$

Аналогічним чином можна показати, що формули (7.18) будуть справедливі і у випадку $y''<0$.

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то координати центра кривизни легко одержати з формул (7.18), підставляючи в них замість y' і y'' їхні вирази через параметр

$$y'=\frac{y'_t}{x'_t}, \; y''=\frac{x'_t y''_t-x''_t y'}{x'^3_t}$$

Тоді

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\\ \beta&=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{aligned}\right\} \quad (7.19)$$

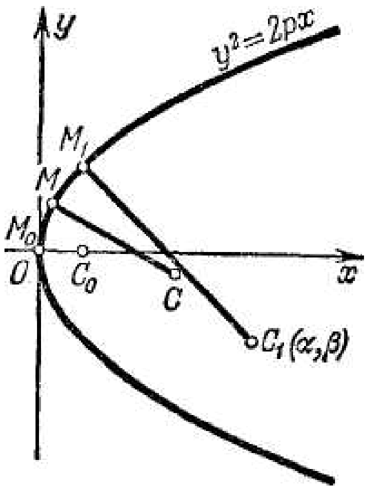


Рис. 7.12.

Приклад 1. Визначити координати центра кривизни параболи $y^2=2px$

а) у довільній точці $M\ (x, y)$; б) у точці $M_0(0, 0)$; в) у точці $M_1(p/2, p)$.

*Розв'язання***.** Підставляючи значення

$$\frac{dy}{dx} \text{ і } \frac{d^2y}{dx^2}$$

у формули (7.18), одержимо (рис. 7.12)

$$\text{а) } \alpha=3x+p,\ \beta=-\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}};$$

б) при $x = 0$ знаходимо: $\alpha = p,\ \beta = 0$;

в) при $x = p/2$ маємо: $\alpha = 5p/2,\ \beta=-p$.

Якщо в точці $M_1\ (x, y)$ даної лінії кривизна відмінна від нуля, то цій точці відповідає цілком визначений центр кривизни $C_1\ (\alpha,\ \beta)$. Сукупність усіх центрів кривизни даної лінії утворить деяку нову лінію, яку називають еволютою стосовно першої.

Таким чином, геометричне місце центрів кривизни даної лінії називається її *еволютою.* Стосовно своєї еволюти дана лінія називається *евольвентою* або *інволютою* (або *розгорненням).*

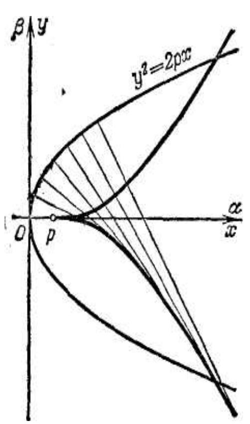


Рис. 7.13

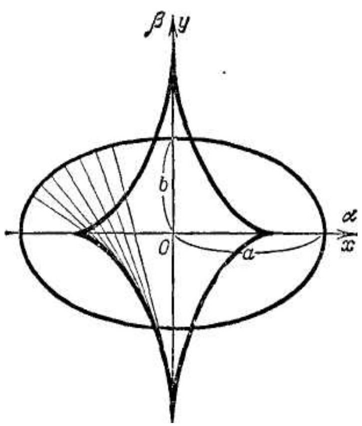


Рис. 7.14.

Якщо дана крива визначається рівнянням $y=f(x)$, то рівняння (7.18) можна розглядати як параметричні рівняння еволюти з параметром x. Виключаючи із цих рівнянь параметр x (якщо це можливо), одержимо безпосередню залежність між поточними координатами еволюти α і β. Якщо ж крива задана параметричними рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то рівняння (7.19) дають параметричні рівняння еволюти (так як величини x, y, x', y', x'', y'' є функціями від t).

Приклад 2. Знайти рівняння еволюти параболи $y^2 = 2px$.

Розв'язання. На підставі прикладу 1 маємо для будь-якої точки (x, y) параболи:

$$\alpha=3x+p,\ \beta=-\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}$$

Виключаючи із цих рівнянь параметр x, одержимо:

$$\beta^2=\frac{8}{27p}(\alpha-p)^3.$$

Це — рівняння напівкубової параболи (рис. 7.13).

Приклад 3. Знайти рівняння еволюти еліпса, заданого параметричними рівняннями: $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

Розв'язання. Обчислюємо похідні від x і y по t

$$x'=-a\sin t,\quad y'=b\cos t,$$
$$x''=-a\cos t,\quad y''=-b\sin t$$

Підставляючи вирази похідних у формули (7.19), одержимо:

$$\alpha = a\cos t - \frac{b\cos t(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)}{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t} =$$

$$= a\cos t - a\cos t\sin^2 t - \frac{b^2}{a}\cos^3 t = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Таким чином,

$$\alpha = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t.$$

Аналогічно одержуємо

$$\beta = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\sin^3 t.$$

Виключивши параметр t, одержуємо рівняння еволюти еліпса у вигляді

$$\left(\frac{\alpha}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{\beta}{a}\right)^{2/3} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{2/3}$$

Тут α і β - поточні координати еволюти (рис. 7.14),

Приклад 4. Знайти параметричні рівняння еволюти циклоїди

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Розв'язання.

$$x' = a(1 - \cos t),\quad y' = a\sin t,$$
$$x'' = a\sin t,\quad y'' = a\cos t$$

Підставивши отримані вирази у формулу (7.19), знаходимо:

$$\alpha = a(t + \sin t),$$
$$\beta = -a(1 - \cos t).$$

Зробимо перетворення змінних, поклавши

$$\alpha = \xi - \pi a,$$
$$\beta = \eta - 2a,$$
$$t = \tau - \pi;$$

тоді рівняння еволюти приймуть вигляд

$$\xi = a(\tau - \sin\tau),$$
$$\eta = a(1 - \cos\tau);$$

вони визначають у координатах ξ, η циклоїду з тим же виробляючим колом радіуса *a*. Таким чином, еволютою циклоїди є така ж циклоїда, але зміщена по осі *Ox* на величину — πα і по осі *Oy* на величину—2*a* (рис. 7.15).

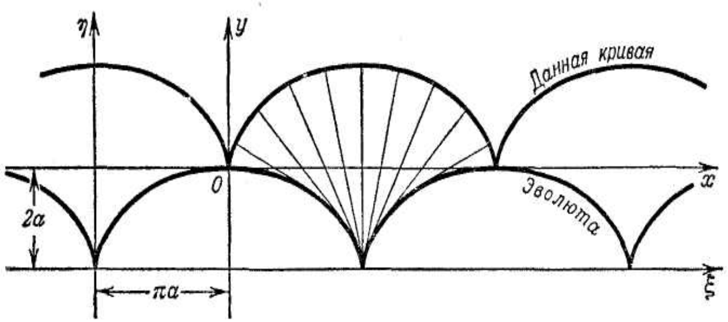


Рис. 7.15

7.7. Властивості еволюти

Теорема 1. *Нормаль до даної кривої є дотичною до її еволюти.*

Доведення. Кутовий коефіцієнт дотичної до еволюти, який розв'язується параметричними рівняннями (7.18), дорівнює

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\frac{d\beta}{dx}}{\frac{d\alpha}{dx}}.$$

Помітивши, що (у силу тих же рівнянь (7.18))

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\frac{3y''^2y'^2 - y'y''' - y'^3y'''}{y''^2} =$$

$$= -y'\frac{3y'^2y''^2 - y''' - y'^2y'''}{y''^2},\quad (7.20)$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3y''^2y' - y''' - y'^2y'''}{y''^2}.\quad (7.21)$$

одержуємо співвідношення

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{y'}.$$

Але y' є кутовий коефіцієнт дотичної до кривої у відповідній точці, тому з отриманого співвідношення випливає, що дотична до кривої і дотична до її еволюти у відповідній точці взаємно перпендикулярні, тобто нормаль до кривої є дотичною до еволюти.

Теорема 2. *Якщо на деякому проміжку M_1M_2 кривої радіус кривизни змінюється монотонно (тобто або тільки зростає, або тільки убуває), то приріст довжини дуги еволюти на цьому проміжку кривої дорівнює (по абсолютній величині) відповідному приросту радіуса кривизни даної кривої.*

Доведення. На підставі формули (7.3) маємо $ds^2= d\alpha^2+d\beta^2$, де ds — диференціал довжини дуги еволюти; звідси

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2.$$

Підставляючи сюди вирази (7.20) і (7.21), одержимо:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (7.22)$$

Знайдемо, далі,

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2$$

Так як

$$R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''},\ \text{то}\ R^2=\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}$$

Диференціюючи по x обидві частини цієї рівності, одержимо після відповідних перетворень

$$2R\frac{dR}{dx}=\frac{2(1+y'^2)^3\left(3y'y''^2-y'''-y'^2y'''\right)}{\left(y''\right)^3}$$

Розділивши обидві частини рівності на

$$2R=\frac{2(1+y'^2)^{3/2}}{y''},$$

одержимо

$$\frac{dR}{dx}=\frac{(1+y'^2)^{1/2}\left(3y'y''^2-y'''-y'^2y'''\right)}{y''^2}.$$

Підносячи до квадрату , одержимо:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=(1+y'^2)\left(\frac{3y'y''^2-y'''-y'^2y'''}{y''^2}\right)^2. \quad (7.23)$$

Порівнюючи рівності *(7.22)* і (7.23), знаходимо:

$$\left(\frac{dR}{dx}\right)^2=\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

звідки

$$\frac{dR}{dx}=\mp\frac{ds}{dx}.$$

За умовою *dR/dx*— не змінює знак *(R* тільки зростає або тільки убуває), отже, і *ds/dx* — не змінює знак. Приймемо для визначеності

$$\frac{dR}{dx}\le 0,\quad \frac{ds}{dx}\ge 0.$$

(що відповідає рис. 7.16). Отже $\frac{dR}{dx}=-\frac{ds}{dx}$.

Нехай точка M_1 має абсцису x_1, а M_2 — абсцису x_2. Застосуємо теорему Коші до функцій *s(x)* і *R(x)* на відрізку $[x_1\ x_2]$.

$$\frac{s(x_2)-s(x_1)}{R(x_2)+R(x_1)}=\frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)_{x=\xi}}{\left(\frac{dR}{dx}\right)_{x=\xi}}=-1.$$

де – ξ число, яке заключене між x_1 і x_2 $(x_1<\xi<x_2)$.

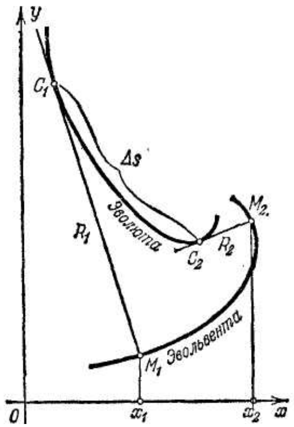


Рис. 7.16.

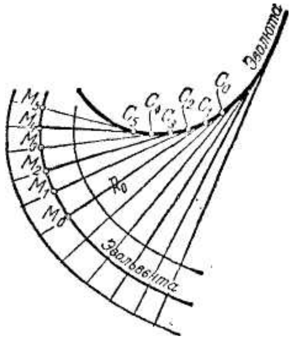


Рис. 7.17.

Введемо позначення (рис.7.16)

$$s(x_2)=s_2, s(x_1)=s_1, R(x_2)=R_2, R(x_1)=R_1.$$

Тоді $\dfrac{s_2-s_1}{R_2-R_1}=-1$, або $s_2-s_1=-(R_2-R_1)$.

Але це значить, що $|s_2-s|_1=|R_2-R_1|$.

Зовсім так же само доводиться ця рівність і при зростанні радіуса кривизни. Ми довели теореми 1 і 2 для того випадку, коли крива задана рівнянням у явному вигляді *y=f(x).* Якщо крива задана параметричними рівняннями то ці теореми залишаються в силі, причому їхнє доведення виконується зовсім аналогічно.

Зауваження. Укажемо наступний простий механічний спосіб для побудови кривої (евольвенти) по її еволюті.

Нехай гнучка лінійка зігнута за формою еволюти C_0C_5 (рис. 7.17). Припустимо, що нерозтяжна нитка, одним кінцем укріплена в точці *С,* огинає цю лінійку. Якщо ми будемо цю нитку розгортати, залишаючи її увесь час натянутою, то кінець нитки опише криву M_5M_O— евольвенту. Звідси пішла і назва «евольвента»—розгорнення. Доведення того, що отримана крива дійсно є евольвентою, може бути проведений за допомогою установлених вище властивостей еволюти. Відзначимо, що одній еволюті відповідає незліченна безліч різних евольвент (рис. 7.17).

Приклад. Нехай маємо коло радіуса *а* (рис. 7.18). Візьмемо ту з евольвент цього кола, яка проходить через точку M_0 *(а,* 0).

Враховуючи, що $CM=C\breve{}M_0=at,$ легко одержати рівняння евольвенти кола: $OP=x=a(\cos t+t\sin t),$

$$PM=y=a(\sin t+t\cos t).$$

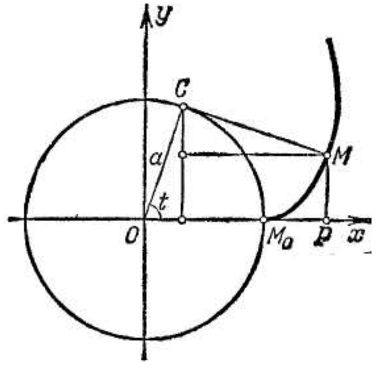


Рис. 7.18.

Відзначимо, що профіль зуба зубчастого колеса має найчастіше форму евольвенти кола.

7.8. Лінії в просторі

Лінія, яка належить площині *Оху*, може бути задана параметричними рівняннями *x=x(t), y=y(t).* Точно так же параметричними рівняннями можуть бути задані і лінії в просторі:

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t).(*)$$

Із зміною параметра *t* точка *M(x,y,z),* координати якої знаходяться по формулам (*), опише деяку лінію.

Якщо всі три рівняння (*) лінійні:

$$x=mt+a,\ y=nt+b,\ z=pt+c,$$

то виходять відомі з аналітичної геометрії параметричні рівняння прямої. Крім параметра *t,* одержимо її канонічні рівняння

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}.$$

Дотична до просторової лінії визначається так само, як і для плоскої лінії, тобто як *граничне положення січної, яка проходить через дану точку M і близьку до неї точку M′, за умови, що точка M′ прагне до даної точки M.*

Виведемо рівняння дотичної до лінії, заданої параметричними рівняннями (*), у її точці $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$, що відповідає значенню параметра t_0. Рівняння січної прямої, що проходить через точки $M_0(x_0 y_0 z_0)$, і $M'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$, будуть

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

Розділивши всі знаменники на відповідний приріст Δt параметра і переходячи до границі при $\Delta t\to 0$, одержимо шукані рівняння

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},\quad (**)$$

де $x_0=x(t_0),\ y_0=y(t_0), z_0=z(t_0)$.

При цьому ми вважаємо, що хоча б одна з похідних $x'(t_0)$, $y'(t_0), z'(t_0)$ не дорівнює нулеві. У противному випадку точка (x_0, y_0, z_0) називається *особою;* такі точки лінії ми не розглядаємо.

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику, так само як і в плоскому випадку, називається *нормаллю* до лінії в точці $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Лінія в кожній своїй точці має, мабуть, нескінченне число нормалей; усі вони лежать в одній площині, перпендикулярної до дотичній і яка проходить через точку дотику.

Означення. *Площина, яка перпендикулярна до дотичної прямої в точці дотику лінії, називається нормальною площиною до лінії в даній точці.*

Відповідно до відомої умови з аналітичної геометрії рівнянням нормальної площини як площини, перпендикулярної до прямої (**) і яка проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, буде

$$x'(t_0)\ (x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

Приклад. Нехай лінія задана рівняннями

$$x=t^2-1,\ y=t^2+2,\ z=3t-1.$$

Складемо рівняння дотичної прямої і нормальної площини до цієї лінії в точці M_0 (0, 3, 2), яка відповідає значенню параметра t=1. Так як $x'_{t=1}=2,\ y'_{t=1}=2,\ z'_{t=1}=3$, то рівняння дотичної будуть

$$\frac{x}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{3},$$

а нормальної площини $2x+2y+3z-12=0$.

Для подальшого нам знадобиться формула для диференціала довжини дуги просторової лінії, заданої рівняннями (*); вона зовсім аналогічна відповідній формулі для плоскої кривої. Як і раніш, будемо розглядати гладкі лінії; це значить, що функції (*) мають безперервні похідні. Для таких ліній відношення довжини Δs дуги, яка заключена між точками $M(x,\ y,\ z)$ і $M'(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$, до довжини хорди, що з'єднує ці точки, прагне до одиниці коли точка M' прагне до точки M. Довжина хорди дорівнює

$$\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2};$$

тому

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}}\to 1.$$

Розділивши чисельник і знаменник на приріст параметра Δt, що відповідає приростам координат $\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z$, одержимо

$$\frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}\to 1.$$

Переходячи до границі при $\Delta t\to 0$, знаходимо

$$\frac{\dfrac{ds}{dt}}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=1,$$

$$x=t^2-1,\quad y=t^2+2,\quad z=3t-1.$$

$$x=t^2-1,\quad y=t^2+2,\quad z=3t-1.$$

тобто $$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

або $$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

Напрямлений вектор *T* дотичної до лінії в точці *M* має проекції $\{x', y', z'\}$, де для стислості x' означає $x'(t)$ і т.д. Напрямлені косинуси вектора *T* дорівнюють

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \cos\beta=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}},\ \cos\gamma=\frac{z'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

Скориставшись формулою для диференціала довжини дуги, можна формули для напрямлених косинусів переписати у вигляді

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \cos\beta=\frac{dy}{ds},\ \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Гвинтова лінія. Як приклад розглянемо просторову лінію, визначену наступними кінематичними умовами: точка *M* рухається з сталою лінійною швидкістю v_1 по колу радіуса *a,* а саме коло одночасно поступально переміщується в напряму, перпендикулярному до її площини з сталою швидкістю v_2.

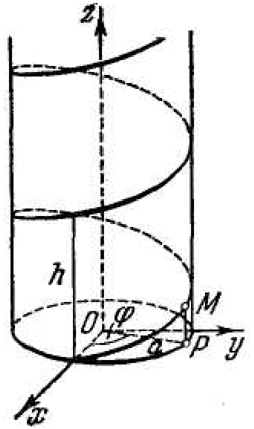


Рис. 7.18-*а*.

При цьому точка *M* опише лінію, яка цілком лежить на круглому циліндрі (рис. 7.18-*а*); вона називається *циліндричною гвинтовою лінією.* У тому випадку, коли точка *M* рухається по колу проти руху годинної стрілки, якщо дивитися з боку, куди спрямовано поступальний рух, гвинтова лінія називається *правою* або просто *правим гвинтом* (як на рис. 7.18-*а*). У противному випадку вона називається *лівою гвинтовою лінією* або *лівим гвинтом.*

Виведемо рівняння гвинтової лінії в припущенні, що віссю циліндра служить вісь *Oz* і поступальний рух відбувається в додатному напрямлені осі *Oz,* причому в момент $t=0$ точка *M* знаходиться в точці $(a, 0, 0)$.

Кутова швидкість обертального руху точки *M* дорівнює v_1/a, і тому її абсциса й ордината в момент *t* будуть дорівнювати

$$x=a\cos\frac{v_1}{a}t,\ y=a\sin\frac{v_1}{a}t.$$

Що стосується аплікати *z,* то вона дорівнює висоті, на яку піднялася точка до моменту *t*, тобто $z=v_2t$. Якщо за параметр узяти не час *t,* а полярний кут φ точки *P*—проекції точки *M* на площину

$$Oxy(\varphi=\frac{v_1}{a}t),$$

то рівняння гвинтової лінії запишуться так:

$$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=c\varphi,\ \text{де } c=\frac{v_2}{v_1}a.$$

Це — рівняння правого гвинта; рівняння лівого гвинта відрізняються від них тільки знаком перед коефіцієнтом *c*.

Після того як кут φ зміниться на 2π, точка *M* повернеться на ту ж твірну циліндра, піднявшись при цьому на висоту *h,* рівну $2\pi c$. Ця величина називається *кроком гвинта.* Вносячи крок *h* в рівняння, одержимо практично зручний вигляд параметричних рівнянь гвинтової лінії:

$$x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ z=\frac{h}{2\pi}\varphi.$$

Тут обидва коефіцієнти рівняння (*a* і *h)* мають простий геометричний зміст.

Гвинтова лінія має ряд цікавих властивостей. Відзначимо два з них:

1) Напишемо рівняння дотичної до гвинтової лінії в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{-a\sin\varphi_0}=\frac{y-y_0}{a\cos\varphi_0}=\frac{z-z_0}{\frac{h}{2\pi}},$$

де φ_0 - значення кута, що відповідає точці M_0. Звідси

$$\cos\gamma=\frac{h}{2\pi\sqrt{a^2+\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}=.\frac{h}{\sqrt{(2\pi a)^2+h^2}},$$

тобто косинус кута γ, утвореного дотичною з віссю *Oz,* а значить, і сам кут γ залишаються сталими у всіх точках гвинтової лінії. Але твірні циліндра паралельні осі *Oz,* тому *гвинтова лінія перетинає твірні циліндра під сталим кутом,* що залежить тільки від радіуса циліндра і кроку гвинта.

2) Циліндр, на якому накреслена гвинтова лінія, розгорнемо на площину навколо який-небудь твірної й обмежимося відрізком циліндра, рівним по висоті кроку гвинта (на ньому знаходиться один виток гвинтової лінії) (рис. 7.18-*б*). Основа циліндра і перерізи циліндра, які паралельні основі, перейдуть у паралельні відрізки довжиною 2π*a,* а твірні — в інші відрізки, які перпендикулярні до перших, довжиною *h.* Зазначене розгортання не спотворить ні кутів між лініями, проведеними на циліндрі, ні довжин ліній. Унаслідок цього гвинтова лінія повинна розгорнутися в таку лінію, що перетинає паралельні відрізки в одній площині під тим самим кутом. Але такою лінією є тільки пряма. Отже, гвинтова лінія при нашій побудові перейде в діагональ прямокутника зі сторонами 2π*a* і *h.* Рис. 7.18-*б* наочно демонструє знайдену вище величину косинуса кута γ перетинання гвинтової лінії з твірною циліндра.

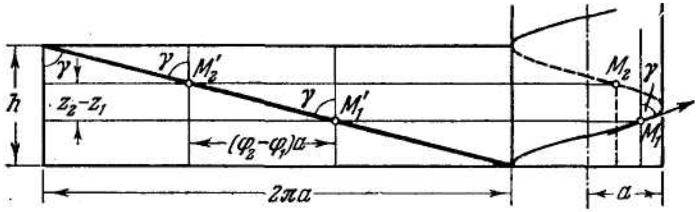


Рис. 7.18-*б*.

Візьмемо які-небудь дві точки гвинтової лінії M_1 і M_2. Відстань між ними, яка обміряна по гвинтовій лінії, дорівнює відрізкові прямої $M'_1M'_2$, у який перейде дуга гвинтової лінії, укладена між точками M_1 і M_2. Звідси можемо заключити, що *гвинтова лінія дає найкоротшу відстань між двома точками циліндра.*

Лінія на поверхні, що проходить через дві задані точки і яка дає найкоротшу відстань між ними, називається *геодезичною.* Так, геодезичною лінією на площині служить пряма, на сфері - коло великого кола. На циліндрі геодезичною лінією є гвинтова лінія.

Мікромодуль 15.
Індивідуальні тестові завдання

Знайти кривизну кривих у зазначених точках:

1. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ в точках (0, *b*) і (*a*, 0). *Від.* b/a^2 в точці (0, *b*); a/b^2 в точці (*a*, 0).

2. xy=12 в точці (3, 4). *Від.* 24/125.

3. $y=x^3$ в точці (x_1, y_1). *Від.* $\frac{6x_1}{\left(1+9x^4{}_1\right)^{3/2}}$.

4. $16y^2=4x^4-x^6$ в точці (2, 0). *Від.* 1/2

5. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ в довільній точці. *Від.* $1/\left(3\sqrt[3]{|axy|}\right)$.

Знайти радіус кривизни нижченаведених кривих у зазначених точках; накреслити кожну криву і побудувати відповідне коло кривизни.

6. $y^2 = x^3$ у точці (4, 8). *Від*. R=80(√10)/3.

7. $x^2=4ay$ в точці (0,0). *Від.* $R=2a$.

8. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ в точці (x_1, y_2). *Від.* $R=\dfrac{\left(b^4x_1+a^4y_1\right)^{3/2}}{a^4b^4}$.

9. $y=\ln x$ у точці (1, 0). *Від.* $R=2\sqrt{2}$. 10. $y=\sin x$ у точці ($\pi/2$, 1). *Від.* $R=1$.

11. $\left.\begin{aligned} x&=a\cos^3 t\\ y&=a\sin^3 t\end{aligned}\right\}$ при $t=t_1$. *Від.* $R=3a\sin t_1\cos t_1$

Знайти радіус кривизни кривих:

12. $\left.\begin{aligned} x&=3t^2\\ y&=3t-t^3\end{aligned}\right\}$ при t=1. *Від.* R=6

13. Коло $\rho=a\sin\theta$. *Від.* $R=a/2$.

14 . Спіраль Архімеда $\rho=a\theta$. *Від.* $R=\dfrac{\left(\rho^2+a^2\right)^{3/2}}{\rho^2+2a^2}$.

15. Кардіоїда $\rho=a(1—\cos\theta)$. *Від.* $R=(2/3)\sqrt{2a\rho}$

16. Лемніската $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. *Від.* $R=a^2/3\rho$

17. Парабола $\rho=a\sec^2(\theta/2)$. *Від.* $R=2a\sec^3(\theta/2)$.

18. $\rho=a\sin^3\dfrac{\theta}{3}$. *Від.* . $R=\dfrac{3}{4}a\sin^2\dfrac{\theta}{3}$.

Знайти точки кривих, в яких радіус кривизни має найменше значення:

19. $y=\ln x$. *Від.* $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$.

20. $y=e^x$. *Від.* $\left(-\dfrac{1}{2}\ln 2,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

21. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. *Від.* $(a/4, a/4)$.

22. $y=a\ln[(1-(x^2/a^2)]$. *Від.* В точці (0, 0) $R=a/2$.

23. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. *Від.* $\alpha=x+3x^{1/3}y^{2/3}, \beta=y+3x^{2/3}+y^{1/3}$.

24. $y^3=a^2x$. *Від.* $\alpha=\dfrac{a^4+15y^4}{6a^2y};\ \beta=\dfrac{a^4y-9y^5}{2a^4}$.

Знайти координати центра кривизни (α, β) і рівняння еволюти для кожної з наступних кривих:

25. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. *Від.* $\alpha=\dfrac{\left(a^2+b^2\right)x^3}{a^4}$; $\beta=-\dfrac{\left(a^2+b^2\right)y^3}{b^4}$

26. $\begin{cases} x=3t,\\ y=t^2-6\end{cases}$. Від. $\alpha=-4/3t^3$, $\beta=3t^2-3/$

27. $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-\cos t).\end{cases}$ Від. $\alpha=a\cos t$; $\beta=a\sin t$.

28. $\begin{cases} x=k\ln ctg(t/2)-k\cos t,\\ y=k\sin t.\end{cases}$ Від. $y=\dfrac{k}{2}\left(e^{x/k}+e^{-x/k}\right)$

29. $\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$

Від. $\alpha=a\cos^3 t+3a\cos t\sin^2 t$; $\beta=a\sin^3 t+3a\cos^2 t\sin t$.

30. Обчислити з точністю до 0,001 корні рівняння $x^3—4x+2=0$. *Від.* $x_1=1,675$, $x_2=0,539$, $x_3=—2,214$.

Різні задачі

31. Показати, що в кожній точці лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ кривизна пропорційна радіус-вектору цієї точки.

32. Знайти найбільше значення радіуса кривизни кривої $\rho=a\sin^3(\varphi/3)$. *Від.* $R=3a/4$.

33. Знайти координати центра кривизни кривої $y=x\ln x$ в точці де $y'=0$. *Від.* $(e^{-1}, 0)$.

34. Довести, що для точок спіралі Архімеда $\rho=a\varphi$ при $\varphi\to\infty$ величина різниці між радіусом-вектором і радіусом кривизни

прагне до 0.

35. Знайти параболу $y = ax^2+bx+c$, яка має із синусоїдою $y=\sin x$ у точці (π/2, 1) загальні дотичну і кривизну. Зробити креслення.

Від. $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi x}{2}+1-\frac{\pi^2}{8}$.

36. Функція $y = f(x)$ визначена так:

$f(x) = x^3$ в проміжку $-\infty < x<1$, $f(x) =ax^2+bx+c$ в проміжку $1<x<+\infty$.

Які повинні бути a, b, c для того, щоб лінія $y = f(x)$ мала скрізь безперервну кривизну? Зробити креслення. *Від.* $a = 3$, $b=- 3$, $c=1$.

37. Написати рівняння кола кривизни кривої $y=\operatorname{tg} x$ в точці (π/4; 1).

Від. $\left(x-\frac{\pi-10}{4}\right)^2+\left(y-\frac{9}{4}\right)^2=\frac{125}{16}$.

38.Показати, що радіус кривизни циклоїди в будь-якій її точці вдвічі більший довжини нормалі в тій же точці.

39.Написати рівняння кола кривизни параболи $y = x^2$ в точці (1,1)

Від. $(x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{125}{4}$

40. Знайти довжину всієї еволюти еліпса, півосі якого рівні a і b.
Від. $4\,(a^3 — b^3)/ab$.

Мікромодуль 16

Функції декількох змінних

Розглядаючи функції одного змінного, ми вказували, що при вивченні багатьох явищ приходиться зустрічатися з функціями двох і більше незалежних змінних. Приведемо кілька прикладів.

Приклад 1. Площа S прямокутника зі сторонами, довжини яких рівні x і y, виражається формулою

$$S = xy.$$

Кожній парі значень x і y відповідає визначене значення площі S. Тут S є функція двох змінних.

Приклад 2. Об'єм V прямокутного паралелепіпеда з ребрами, довжини яких дорівнюють x,y,z, виражається формулою

$$V=xyz.$$

Тут V є функція трьох змінних x, y, z.

Приклад 3. Дальність R польоту снаряда, випущеного з початкової швидкістю v_0 з гармати, жерло якої нахилено до обрію під кутом φ, виражається формулою

$$R=\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{g}$$

(якщо зневажити опором повітря). Тут g - прискорення сили тяжіння. Для кожної пари значень v_0 і φ ця формула дає визначене значення R, тобто R є функцією двох змінних v_0 і φ.

Приклад 4.

$$u=\frac{x^2+y^2+z^2+t^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Тут u є функція чотирьох змінних x, y, z, t.

7.9. Функції двох змінних

Означення 1. Якщо кожній парі (x, y) значень двох, незалежних одна від одної, змінних величин x і y, з деякої області їхньої зміни D, відповідає визначене значення величини z, то ми говоримо, що z є *функція двох незалежних змінних x і y*, яка визначена в області D.

Символічно функція двох змінних позначається так:

$$z=f(x,y),\ z=F(x,y) \text{ і т.д.}$$

1. Способи задання.

Аналітичний спосіб задання функції $z=f(x,y)$ двох змінних не відрізняється істотно від того, як це робиться для функцій одної змінної. У той же час табличний спосіб оформлюється значно більш громіздко: так як потрібно задавати значення двох незалежних змінних, то з‘являється потреба застосовувати таблицю з двома входами.Значення функції тут приходиться позначати двома індексами (подвійна нумерація). Ясно, що якщо число значень для x і y велике, то таку таблицю важко скласти.

Таблиця з двома входами

z=f(x,y)

y / x	y_1	y_2	y_3	…	y_N
x_1	$z_{11}=f(x_1y_1)$	$z_{12}=f(x_1y_2)$	$z_{13}=f(x_1y_3)$	…	$z_{1N}=f(x_1y_N)$
x_2x_2	$z_{21}=f(x_2y_1)$	$z_{22}=f(x_2y_2)$	$z_{23}=f(x_2y_3)$	…	$z_{2N}=f(x_2y_N)$
… … …	… … …	… … …	… … …	… … …	… … …
x_Mx_M	$z_{M_1}=f(x_My_1)$	$z_{M_2}=f(x_My_2)$	$z_{M_3}=f(x_My_3)$	…	$z_{MN}=f(x_My_N)$

При складанні таблиці можна також користуватися тим, що якщо фіксувати значення однієї з незалежних змінних, наприклад *x*, то *z* стане функцією тільки *y*. Тоді вийде система таблиць з одним входом, що, звичайно, рівнозначно таблиці з двома входами.

Система таблиць з одним входом

$x=x_1$

y	y_1	y_2	…	y_N
z	$z_{11}=f(x_1y_1)$	$z_{12}=f(x_1y_2)$	…	$z_{1N}=f(x_1y_N)$

$x=x_2$

y	y_1	y_2	…	y_N
z	$z_{21}=f(x_2y_1)$	$z_{22}=f(x_2y_2)$	…	$z_{2N}=f(x_2y_N)$

і т.д.

Такий же принцип фіксування значень однієї із змінних може бути використаний при графічному зображенні функції двох змінних, в результаті чого вийде система графіків, наприклад, такого вигляду, як показано на рис. 7.26.

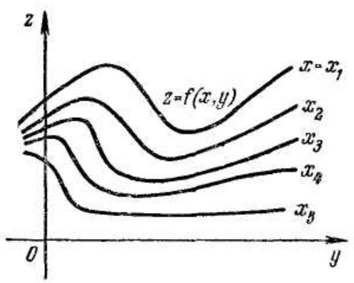


Рис. 7.26.

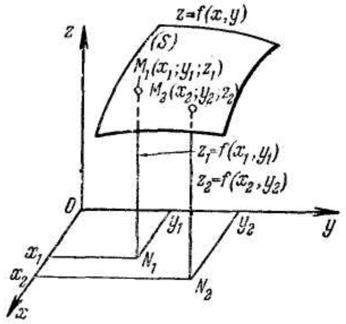


Рис. 7.27.

У теоретичних розглядах зустрічається ще наступний спосіб графічного зображення функції *z=f(x, y).* Розглянемо декартові координати *x, y, z* у просторі (можна застосовувати і інші системи координат). Придаючи незалежним змінним які-небудь числові значення $x=x_1$, $y=y_1$ одержимо точку N_1 (рис. 7.27) в *площині аргументів xOy.* Обчисливши відповідне значення функції $z_1=f(x_1, y_1)$, ми зможемо побудувати відповідну точку M_1 у просторі. Придаючи незалежним змінним іншого значення, ми зможемо побудувати точку M_2 і т.д.

Якщо тепер теоретично представити, що незалежні змінні приймають усі можливі значення, то побудовані точки *N* заповнять усю площину *xOy* або частину її, а так як над (або під, в залежності від знака функції) кожною точкою *N* є відповідна точка *M,* то всі точки *M* заповнять деяку поверхню *(S).* Ця поверхня і буде служити «графіком» розглянутої функції.

Ми будемо користуватися цим методом, щоб подумки уявити собі характер зміни розглянутої функції; однак значення цього методу обмежене труднощами практично виконати поверхню в просторі.

Тепер розглянемо спосіб, що застосовується на практиці. Придаючи *z* сталі значення h_1, h_2, h_3, ..., ми одержимо в площині аргументів лінії $f(x,y)= h_1$, $f(x,y)= h_2$, ..., які називають *лініями рівня* функції *f.* Геометрично їх можна одержати (рис. 7.28), якщо перерізати поверхню *z=f(x,y)* площинами, паралельними площині *xOy,* і проектувати лінії перерізу на цю площину. Цей спосіб, зокрема, широко застосовується при кресленні географічних карт; там функцією служить висота над рівнем океану. Отримана система ліній рівня може мати вигляд, наприклад, який зображено на рис. 7.29; маленькі риски вказують напрямлення убування функції від лінії рівня, для географічної карти це — напрямлення стоку води.

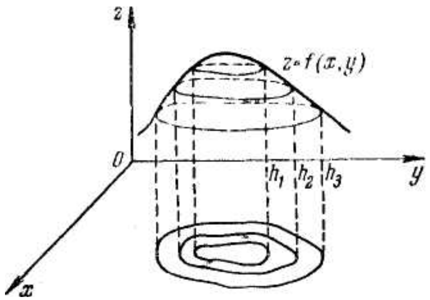


Рис. 7.28.

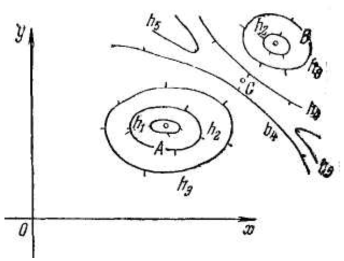


Рис. 7.29.

З рис. 7.29 видно, що розглянутий графік має «вершини» у точках *A* і *B* (причому в *A* більш високу), у точці *C* - *перевал* і т.п.

2. Область визначення. *Область визначення функції z = f(x, y)* — це область зміни незалежних змінних *x, y.* Якщо незалежні змінні безперервні, то нею служить або вся площина аргументів, або деяка її область, або, нарешті, сукупність деякого числа областей на площині *x, y.* При цьому під *областю* на площині *x, y* розуміють сукупність точок, яка *зв'язна,* тобто яка складається з одного шматка, і *яка не вироджується,* тобто ні лінія і, тим більше, ні точка. Іноді розрізняють області *замкнуті,* якщо гранична лінія зараховується до області, і *відкриті* — у противному випадку; можна сказати, що області на площині грають ту ж роль, як проміжки на прямій .

Наприклад, для функції $z=x+y$ область визначення — це вся площина *x, y.* Для функції $z=\sqrt{y-x}$, якщо допускати тільки дійсні значення *x*, область визначення виходить з нерівності $y\text{-}x\geq0$, тобто $y\geq x$. Для функції

$$z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

область визначення виходить з нерівності $x^2+y^2< 1$ і т.п. Ці області показані на рис. 7.30.

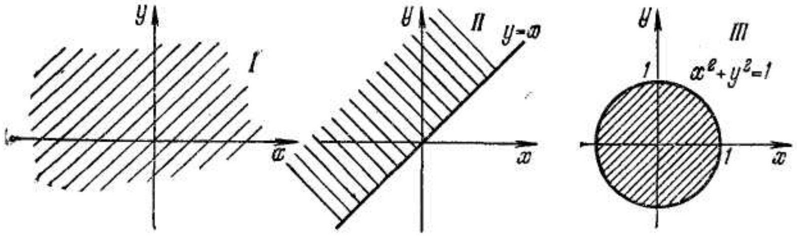


Рис. 7.30.

Як і у випадку однієї незалежної змінної, функція двох змінних існує, узагалі говорячи, не при будь-яких значеннях *x* і *y*.

Приклад 1. Визначити дійсну область визначення функції

$$z = 2x—y.$$

Аналітичний вираз 2*x* — *y* має сенс при будь-яких значеннях *x* і *y*. Отже, дійсною областю визначення функції є вся площина *Oxy*.

Приклад 2.

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Для того щоб *z* мало дійсне значення, потрібно, щоб під коренем стояло неневід'ємне число, тобто *x* і *y* повинні задовольняти нерівності

$$1-x^2-y^2\geq0 \text{ або } x^2+y^2\leq1.$$

Всі точки *M (x, y),* координати яких задовольняють зазначеній нерівності, лежать у колі радіуса 1 з центром на початку координат і на границі кола.

Приклад 3.

$$z=\ln(x+y).$$

Так як логарифми визначені тільки для додатних чисел, то повинна задовольнятися нерівність $x+y> 0$ або $y>-x$. Це значить, що областю визначення функції z є половина площини, яка розташована над прямою $y = -x$, не включаючи самої прямої (рис. 7.31).

Приклад 4. Площа трикутника S являє собою функцію основи x і висоти y:

$$S = xy/2.$$

Областю визначення цієї функції є область $x>0$, $y>0$ (так як основа трикутника і його висота не можуть бути ні від'ємними, ні нулем). Помітимо, що область визначення розглянутої функції не збігається з природною областю визначення того аналітичного виразу, за допомогою якого задається функції, тому що природною областю визначення виразу $xy/2$ є, вочевидь, уся площина Oxy.

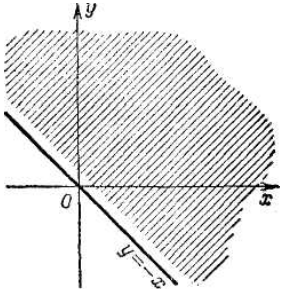


Рис. 7.31.

3. Лінійна функція. *Лінійна функція двох змінних* має вигляд

$$z=ax+by+c. \quad (7.29)$$

де a, b, c — сталі коефіцієнти. Запишемо формулу для її приросту

$$\Delta z=a\Delta x+b\Delta y;$$

аналогічна формула справедлива для лінійної функції будь-якого числа змінних.

Так як формула (7.29) має три коефіцієнти, то при *лінійній апроксимації,* тобто при наближеній заміні деякої функції на лінійну, потрібно три умови. Нехай, наприклад, відомі значення деякої функції $f(x, y)$:

$$f(x_1, y_1)=z_1, f(x_2, y_2)=z_2, f(x_3, y_3)=z_3.$$

Якщо ми хочемо побудувати лінійну функцію (7.29), яка приймає такі ж значення, тобто зробити лінійну *інтерполяцію*, замінивши функцію f на (7.29), то повинно бути

$$\left.\begin{aligned} ax_1+by_1+c=z_1 \\ ax_2+by_2+c=z_2 \\ ax_3+by_3+c=z_3 \end{aligned}\right\} \quad (7.30)$$

З цієї системи рівнянь ми знаходимо коефіцієнти. Така заміна f на (7.29) дає непогані результати усередині трикутника з вершинами (x_1; y_1), (x_2; y_2) і (x_3; y_3) (рис. 7.32), якщо він невеликий, щоб не занадто виявлялася нелінійність функції f, і не має занадто гострих кутів. (В границі, коли один з кутів дорівнює нулеві, трикутник вироджується у відрізок, а визначник системи (7.30) обертається в нуль і обчислення застосовувати не можна.)

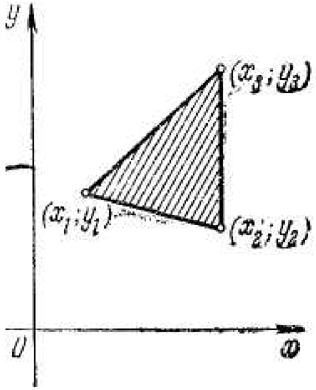


Рис. 7.32.

При заміні f на (7.29) поза зазначеним трикутником *(лінійна екстраполяція)* похибка при віддаленні від нього, узагалі говорячи, зростає.

Аналогічно виконується лінійна інтерполяція у випадку будь-якого числа змінних.

Геометричне зображення функції двох змінних

Розглянемо функцію

$$z=f(x, y), \quad (7.31)$$

визначену в області G на площині Oxy (ця область може бути, зокрема, і всією площиною), і систему прямокутних декартових координат $Oxyz$ (рис. 7.33). У кожній точці (x, y) проведемо перпендикуляр до площини Oxy і на ньому відкладемо відрізок, який дорівнює $f(x, y)$.

Геометричне місце точок P, координати яких задовольняють рівнянню (7.31), називається графіком функції двох змінних.

З курсу аналітичної геометрії ми знаємо, що рівняння (7.31) у просторі визначає деяку поверхню. Таким чином, графіком функції двох змінних є поверхня, яка проектується на площину Oxy в область визначення функції.

Кожен перпендикуляр до площини Oxy перерізає поверхню $z=f(x,y)$ не більш ніж в одній точці.

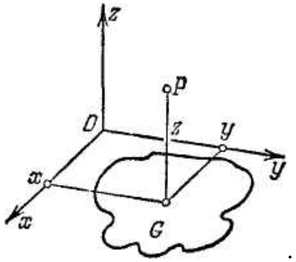


Рис. 7.33.

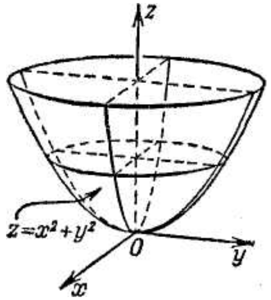


Рис. 7.34.

Тоді ми одержимо в просторі точку P з координатами

$$x,\ y,\ z=f(x,y).$$

Геометричне місце точок P, координати яких задовольняють рівнянню (7.31), називається графіком функції двох змінних.

З курсу аналітичної геометрії ми знаємо, що рівняння (7.31) у просторі визначає деяку поверхню. Таким чином, графіком функції двох змінних є поверхня, яка проектується на площину Oxy в область визначення функції.

Кожен перпендикуляр до площини Oxy перерізає поверхню $z=f(x,y)$ не більш ніж в одній точці.

Приклад. Графіком функції $z= x^2 + y^2$, як відомо з аналітичної геометрії, є параболоїд обернення (рис. 7.34).

Зауваження. Функцію трьох або більш змінних зобразити за допомогою графіка в просторі неможливо.

Частковий і повний приріст функції

Розглянемо лінію PS перерізу поверхні $z=f(x, y)$ з площиною y = const, яка паралельна площині Oxz (рис. 7.35).

Так як в цій площині y зберігає стале значення, то z уздовж кривої PS буде змінюватися тільки в залежності від зміни x. Дамо деякій змінній x приріст Δx, тоді z одержить приріст, який називають *частковим приростом* z по x і позначають через $\Delta_x z$ (на рисунку відрізок SS'), так що

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,\ y)-f(x,\ y).\quad (7.32)$$

Аналогічно, якщо x зберігає стале значення, а y одержує приріст Δy, то z одержує приріст, який називають *частковим приростом* z по y. Цей приріст позначають символом $\Delta_y z$ (на рисунку відрізок TT'):

$$\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,\ y).\quad (7.33)$$

Приріст $\Delta_y z$ функція одержує «уздовж лінії» перерізу поверхні $z=f(x,\ y)$ із площиною x=const, яка паралельна площині Oyz. Нарешті, придавши аргументові x приріст Δx, а аргументові y — приріст Δy, одержимо для z новий приріст Δz, який називається *повним приростом* функції z і визначається формулою

$$\Delta z=f(x + \Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y).\quad (7.34)$$

На рис. 7.35 Δz зображується відрізком QQ'

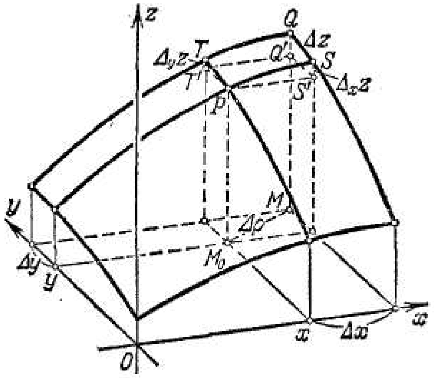


Рис. 7.35.

Треба відмітити, що, взагалі кажучи, повний приріст не дорівнює сумі часткових приростів, тобто $\Delta z\neq \Delta_x z+\Delta_y z$.

Приклад. $z=xy$.

$\Delta_x z=(x+\Delta x)y-xy=y\ \Delta x,$

$\Delta_y z=x(y+\Delta y)-xy=x\ \Delta y,$

$\Delta z=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+ x\Delta y+\Delta x\Delta y.$

При $x=1$, $y=2$, $\Delta x=0{,}2$, $\Delta y=0{,}3$ маємо $\Delta_x z=0{,}4$, $\Delta y_x z=0{,}3$, $\Delta z=0{,}76$. Таким же чином визначаються часткові і повний прирости функції якого завгодно числа змінних. Так для функцій трьох змінних

$u=f(x, y ,t)$ маємо:

$\Delta_x u=f(x+\Delta x,y,t)-f(x,y,t)$,

$\Delta_e u=f(x,y+\Delta y,t)-f(x,y,t)$,

$\Delta_t u=(x,y,t+\Delta t)-f(x,y,t)$,

$\Delta u=(x+\Delta x,y+\Delta y, t+\Delta t)-f(x,y,t)$.

Безперервність і розриви. Поняття безперервності функції $z=f(x, y)$ зовсім аналогічне тому, яке було дано для випадку функції однієї змінної. Приведемо, наприклад, таке визначення безперервності: функція f називається *безперервною* при значеннях аргументів $x=x_0$, $y=y_0$, якщо в процесі, коли $x\to x_0$, $y\to y_0$ (довільним чином), буде $f(x, y)\to f(x_0, y_0)$. У протилежному випадку функція f називається *розривною* при зазначених значеннях аргументу, а точка з координатами (x_0; y_0) на площині аргументів називається *точкою розриву* цієї функції. Функція, яка безперервна в кожній точці деякої області, називається *безперервною в цій області.*

Приклад 1. Функція

$$z=x^2+y^2$$

безперервна при будь-яких значеннях x і y, тобто в будь-якій точці площини Oxy. Дійсно, які б не були числа x і y, Δx і Δy, маємо:

$$\Delta z=[(x+\Delta x)^2+(y+\Delta y)^2]-(x^2+y^2)=2x\Delta x+2y\Delta y+\Delta x^2+\Delta y^{2,}$$

Отже

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

Відзначимо, що поряд з окремими точками розриву функції можуть мати цілі *лінії розриву, тобто* лінії, що цілком складаються з точок розриву. Наприклад, із двох функцій

$$z=\frac{1}{x^2+y^2} \text{ і } z=\frac{1}{(x-y)^2}$$

перша має єдину точку розриву (0; 0), а друга — цілу лінію розриву (пряму) $(y-x)^2=0$, тобто $y=x$. Лінії рівня цих функцій показані на рис. 7.36.

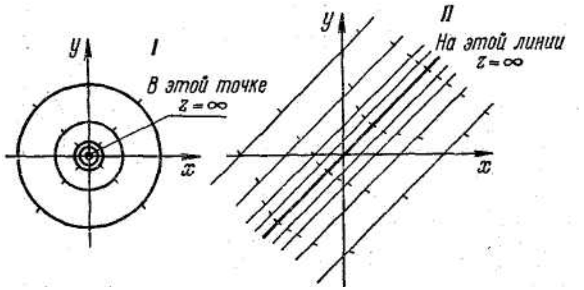


Рис. 7.36.

В обох випадках у самих точках розриву функції обертаються в нескінченність. Однак, як і у випадку функцій однієї змінної, бувають і інші вигляди розривів. У практичних задачах досить часто зустрічаються такі лінії розриву, що при наближенні до будь-якої точки цієї лінії з однієї сторони функція має одну кінцеву границю, а при наближенні до тієї ж точки з іншого боку — іншу кінцеву границю. У цьому випадку функція має при переході через цю лінію кінцевий стрибок; приблизний графік такої функції зображено на рис. 7.37. Поводження функції при наближенні до точки розриву може істотно залежати від способу цього наближення: так, при наближенні по одним шляхам може існувати границя функції, що залежить від вибору шляху, при наближенні по інших шляхам може не існувати ні кінцевої, ні нескінченної границі т.д. Так як способів наближення до точки розриву є нескінченне число (тоді як для функцій однієї змінної є лише два основних способи наближення до точки розриву — справа або зліва), то в цілому точки розриву функцій декількох змінних мають більш складний вигляд, ніж для функцій однієї змінної. Наприклад, функція

$$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

має єдину точку розриву там, де знаменник обертається в нуль, тобто при $x=0$, $y=0$. Якщо тепер $x\to 0$, $y\to 0$ і позначити $y/x=k$, тобто $y=kx$, то одержимо

$$z=\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}=const,$$

тобто границя залежить від співвідношення між y і x (рис. 7.38).

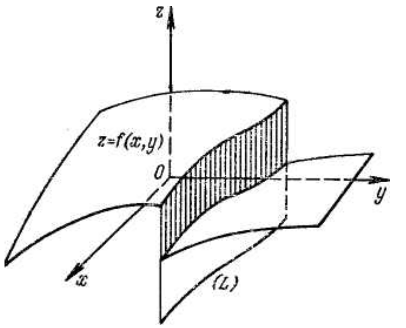


Рис. 7.37. (L)-лінія розриву функції *f* — лежить у площині *xOy*.

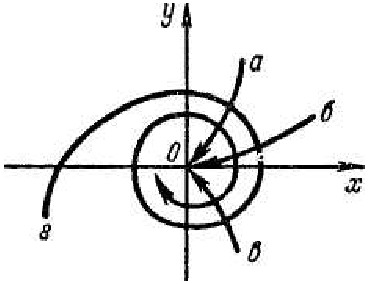


Рис. 7.38.

При наближенні по напрямленню *а* границя z дорівнює 1; по напрямленню *б* - дорівнює 0; по напрямленню *в* — дорівнює —1; по спіралі *г* границі не існує.

Приклад 2. Функція

$$z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

визначена усюди, крім точки $x = 0$, y=0 (рис. 7.39, 7.40).

Розглянемо значення z уздовж прямої $y=kx$ (k = const). Очевидно, уздовж цієї прямої

$$z=\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}=const,$$

тобто функція z уздовж всякої прямої, яка проходить через початок координат, зберігає стале значення, яке залежить від кутового коефіцієнта k прямої. Тому, підходячи до початку координат різними шляхами, ми будемо одержувати різні граничні значення, а це значить, що функція $f(x, y)$ не має границі, коли точка (x, y) на площині Oxy прагне до початку координат. Отже, функція розривна в цій точці. Цю функцію не можна довизначити на початку координат так, щоб вона стала безперервною. Легко бачити, з іншого боку, що в інших точках ця функція безперервна.

Властивості безперервних функцій двох змінних на замкнутій кінцевій області аналогічні тим, які були описані для функцій однієї змінної на замкнутому кінцевому проміжку, і тому ми на них зупинятися не будемо.

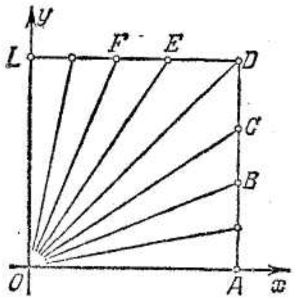


Рис. 7.39.

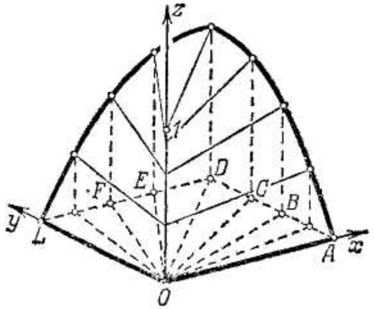


Рис. 7.40.

Іноді виникає задача про розв'язання нерівностей вигляду $f(x, y)>0$. Це робиться аналогічно розв'язанню нерівності вигляду $f(x)>0$ **,** а саме: на площину x, y треба нанести лінію $f(x,y)=0$ і лінії розриву функції f, якщо вони є. Усі ці лінії розіб'ють площину на частини, у кожній з яких функція f зберігає знак; який це знак, можна довідатися, визначаючи знак функції в якій-небудь точці кожної з цих частин.

Розв'яжемо, наприклад, нерівність

$$\frac{x^2+y^2-4}{x+y}>0. \quad (7.35)$$

Тут *лінією нулів* функції служить коло $x^2 + y^2$—4 =0, а лінією розриву - пряма $x + y = 0$. Разом вони ділять площину на чотири частини (рис. 7.41). Беручи в кожній з цих частин по точці, наприклад (—3; 0), (—1; 0), (1; 0) і (3; 0), визначаємо знак функції (—, +, — і +). На рис. 7.41 області, у яких нерівність (7.35) справедлива, заштриховані.

Неявні функції. Визначення неявної функції двох змінних аналогічне тому, яке було дано для функцій однієї змінної. Неявна функція *z (x, y)* задається рівнянням

$$F\,(x\ \ y\ \ z) = 0. \qquad (7.36)$$

Тут функція *z (x, y)* може вийти багатозначною, і тоді приходиться розглядати її однозначні гілки.

Рівняння (7.36) може визначати поверхню будь-якої форми, тоді як поверхня, задана рівнянням *z(x, y),*протикається будь-якою прямою, яка паралельна осі z , не більш ніж в одній точці (див. рис. 7.27).

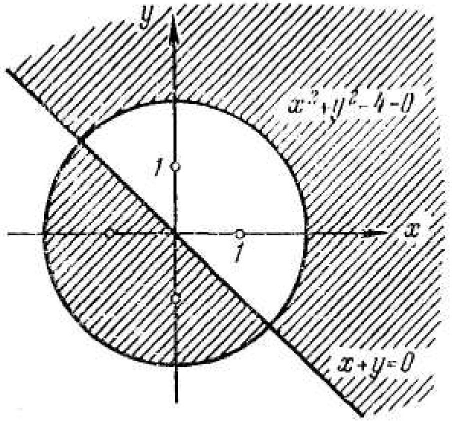


Рис. 7.41.

7.10. Функції будь-якого числа змінних

Визначення функції двох змінних легко узагальнити на випадок трьох або більше змінних.

Означення. Якщо кожній розглянутій сукупності значень змінних *x,y, z, . .., u, t* відповідає визначене значення змінної *w,* то будемо називати *w функцією незалежних змінних x, y, z, . .., u, t* і писати *w= F(x, y, z, ..., u, t)* або *w=f(x, y, z, .. ., u, t)* і т.п.

Так само як і для функції двох змінних, можна говорити про області визначення функції трьох, чотирьох і більше змінних.

Так, наприклад, для функції трьох змінних областю визначення є деяка сукупність трійок чисел *(x, y, z).* Помітимо відразу, що кожна трійка чисел задає деяку точку *M(x, y, z)* у просторі *Oxyz.* Отже, областю визначення функції трьох змінних є деяка сукупність точок простору.Аналогічно цьому можна говорити про області визначення функції чотирьох змінних *u=f(x, y, z, t)* як про деяку сукупність четвірок чисел *(x, y, z, t).* Однак область визначення функції чотирьох або більшого числа змінних уже не допускає простого геометричного тлумачення.

Приклад.

$$w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - u^2}$$

Тут *w*-функція чотирьох змінних *x, y, z, u,* визначена при значеннях змінних, які задовольняють співвідношенню $1\text{-}\,x^2\text{-}y^2\text{-}\,z^2\text{-}u^2 \geq 0$.

Способи задання. Основні поняття, що відносяться до аналітичного вигляду функції, до її властивостей, переносяться і на функції будь-якого числа змінних. У той же час при дослідженні таких функцій є додаткові труднощі. Насамперед табличний і графічний способи задання цих функцій стають надзвичайно громіздкими. Правда, функцію трьох змінних можна задавати за допомогою системи таблиць із двома входами або набору картинок вигляду рис. 7.26 або 7.29, але і це дуже важко.

Однак в окремих випадках обчислення значення функції великого числа змінних може бути зведене до обчислення значення декількох функцій меншого числа змінних. Тоді можна широко застосовувати способи, описані раніше. Наприклад, функція чотирьох змінних вигляду *u=f(x, y)+*φ(z, *t)* вимагає для свого обчислення або наочного представлення таблиць або графіків для функцій *f* і φ, кожна з яких залежить лише від двох змінних. Аналогічно функція чотирьох змінних вигляду *u= f*[φ *(x)+y,* ψ*(z)—t*] вимагає завдання однієї функції двох змінних і двох функцій однієї змінної і т.п. В цих випадках обчислення і дослідження функції значно полегшуються. На жаль, далеко не всяку функцію можна представити в подібному вигляді.

Функції трьох змінних. Великі труднощі виникають при геометричному тлумаченні функції більше трьох змінних, так як в просторі «не вистачає розмірності». Декілька краще обстоїть справа для функцій трьох змінних *u=f(x, y, z).* У цьому випадку областю визначення служить або весь *простір аргументів x, y, z,* або деяка його частина, тобто одна або кілька *областей* у просторі *x, y, z* , і тому цю область визначення можна представити цілком наочно. Наприклад, для функції $u = x^2+y^2— z$ областю визначення служить весь простір, тоді як функція

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

визначена, тільки якщо

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \text{ або } x^2+y^2+ z^2\leq 1,\ |r|\leq 1,$$

тобто у даному випадку областю визначення служить куля радіуса 1 з центром на початку координат.

Аналогічно можна розглядати *поверхні рівня* функції $f(x, y, z)$, тобто такі поверхні в просторі x, y, z, на яких ця функція стала, $f(x, y, z) =$ const.

Точки розриву, якщо вони є, знаходяться в просторі аргументів і тому їх також можна представити наочно. При цьому для функції трьох змінних можуть бути окремі точки, лінії і навіть цілі *поверхні розриву,* тобто поверхні, що цілком складаються з точок розриву. Наприклад, при вивченні різних середовищ багато із величин ,які розглядаються, мають розриви на поверхнях розподілу (вода — повітря, скло — повітря і т.п.).

Укажемо без доведення деякі важливі властивості функції багатьох змінних, яка безперервна в замкнутій і обмеженій області. Ці властивості аналогічні властивостям функції однієї змінної, безперервної на відрізку .

Властивість 1. Якщо функція $f(x, y, ...)$ визначена і безперервна в замкнутій і обмеженій області D, то в області D знайдеться принаймні одна точка $N(x_0, y_0, ...)$ така, що для всіх інших точок області буде виконуватися співвідношення

$$f(x_0, y_0, ...)\geq f(x, y ...)...$$

і принаймні одна точка $\overline{N}(\overline{x}_0, \overline{y}_0, „,)$ така, що для всіх інших точок області буде виконуватися співвідношення

$$f(\overline{x}_0, \overline{y}_0, ...)\leq f(x, y ...)...$$

Значення функції $f(x_0, y_0, ...)=M$ будемо називати *найбільшим значенням* функції $f(x, y, ...)$ в області D, а значення $f(\overline{x}_0, \overline{y}_0, ...)=m$ *найменшим значенням.*

Цю властивість формулюють і так.

Безперервна функція в замкнутій обмеженій області D досягає принаймні один раз найбільшого значення M і найменшого значення m.

Властивість 2. Якщо функція $f(x, y, ...)$ безперервна в замкнутій і обмеженій області D і якщо M і n—найбільше і найменше значення функції $f\ (x,\ y,\ .\ .\ .)$ в області, то для будь-якого числа μ, що задовольняє умові $m<\mu<M$, знайдеться в області така точка $N^*(x_0{}^*, y_0{}^*, ...)$, що буде виконуватися рівність $f(x^*, y^*, ...)= \mu$.

Наслідок властивості 2. Якщо функція $f(x, y, ...)$ безперервна в замкнутій обмеженій області і приймає як додатні, так і від'ємні значення, то усередині області знайдуться точки, в яких функція $f(x, y, ...)$ обертається в нуль.

Загальний випадок. Поняття про простір аргументів дуже наочне, тому бажано зберегти представлення про цей простір і для випадку функцій будь-якого числа незалежних змінних, навіть більшого трьох. Це робиться за допомогою багатомірного числового простору . Нехай, наприклад, розглядається функція чотирьох змінних $w=f(x, y, z, u)$. Тоді кожен набір значень x, y ,z, u визначає точку в просторі E_4, строго говорячи, він і є такою точкою. Таким чином, *простором аргументів* у даному випадку служить E_4, областю визначення функції f служить область простору E_4 або сукупність деякого числа таких областей. Ця функція може бути безперервною або мати окремі точки, лінії, двовимірні поверхні або тривимірні гіперповерхні розриву.

«Графік» функції $u = f(x, y, z, t)$ уже вимагає п'ятивимірного простору аргументів і функції x, y, z, t, u; для знаходження точок цього графіка треба придавати x, y, z, t довільні значення і знаходити відповідні значення u. [Наприклад, легко перевірити, що графік функції $u=xz\text{-}2y^2t$ проходить через точки (1; 1; 2; 0; 2), (-1; 2; 0; -2; 1.) і т.п.]. Тому , коли ми говорили про функції трьох змінних, наочне геометричне тлумачення допускало тільки простір аргументів, але не графік: він знаходиться в чотиривимірному просторі E_4, якому ми безпосередньо наочного тлумачення не даємо.

Поле. Говорять, що в *просторі задане поле деякої величини, якщо в кожній точці простору* або деякої його області *визначено значення цієї величини.* Наприклад, при розгляді потоку газу доводиться досліджувати температурне поле (у кожній точці температура має визначене значення), поле щільностей, поле швидкостей і т.д. Поле може бути *скалярним* або *векторним* в залежності від характеру досліджуваної величини: наприклад, поля температур або щільностей є скалярними, а поля швидкостей або сил — векторними. Поле може бути *стаціонарним (сталим),* якщо в кожній точці простору воно не міняється з часом, або *нестаціонарним (несталим),* якщо така зміна має місце.

Позначимо розглянуту, для визначеності, скалярну величину буквою *u,* а довільну (поточну) точку простору буквою *M.* Тоді кожному положенню точки *M* відповідає числове значення величини *u*, тобто *u* можна вважати *функцією точки M, u=f(M).* Звичайно, це — функція іншого роду, ніж ті, котрі ми розглядали раніше, так як точка не є величиною. Але виявляється, що про функції, у розширеному розумінні цього терміна, можна говорити завжди, коли є визначений закон, відповідно до якого об'єктам одного «сорту» (у даному випадку точкам простору) відповідають, підходять об'єкти іншого «сорту» (у даному випадку значення величини *u).* Якщо поле нестаціонарне, то *u=f(M, t).*

Легко перейти від функції точки до функції трьох змінних — трьох просторових координат. Для цього досить ввести декартову систему координат *x, y, z* в простір. Тоді положення точки *M* в просторі буде цілком характеризуватися значеннями *x, y, z,* тобто можна написати *u = u (x, y, z);* навпаки, в заданій системі координат *x, y, z* будь-яку функцію від *x, y, z* можна розглядати як функцію точки. Однак треба мати на увазі, що поле *u=f(M)* (функція точки *M)* має сенс і може бути досліджене без усяких систем координат. Крім того, якщо вводити системи координат різним способом, то залежності *u(x, y,z)* вийдуть, узагалі говорячи, різними для однієї і тієї ж функції точки *u= u(M),* тобто при розгляді поля функція точки є *первинною* стосовно функції координат цієї точки.

Якщо досліджувана величина по своєму змісту задана в площині, то відповідне поле називається *плоским;* такі поля отримують, наприклад, при дослідженні теплових процесів у пластинці, товщиною якої ми зневажаємо.

Якщо поле величини *u* просторове, але в деякій декартовій системі координат *x, y, z* ця величина виявиться незалежною від z, то поле називається *плоскопаралельним.* У таких випадках часто можна відволіктись від координати z і розглядати поле тільки в площині *x, y,* тобто розглядати плоскопаралельне поле як плоске, пам'ятаючи про те, що у всіх паралельних площинах поле має в точності той же вигляд.

7.11. Часткові похідні і диференціали першого порядку

Основні означення. Нехай дана функція декількох, наприклад трьох, змінних *u=f(x, y, z).* Якщо зафіксувати значення всіх незалежних змінних, крім однієї, то *u* стане функцією цієї однієї змінної і по ній можна брати похідну або диференціал. Такі *похідні* і *диференціали* називаються *частковими.* Іншими словами,

$$u'_x = f'_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x},\ u'_y = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}$$

$$u'_z = f'_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z},$$

де $\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) — f(x, y, z)$, $\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) — f(x,y,z)$, $\Delta_z u = f(x, y, z + \Delta z) — f(x,y,z)$ — *часткові прирости* функції, які отримані за рахунок зміни одного лише змінного при фіксованих інших. Підкреслимо, що *символи u' або f' (x, y, z) для функцій декількох змінних не мають змісту,* так як треба обов'язково вказувати, по якій саме змінній виконується диференціювання.

Обчислення часткових похідних від конкретних елементарних функцій здійснюється за правилами, які приведені для функцій однієї змінної, причому в процесі диференціювання по якій-небудь змінній до інших змінних треба відноситися як до сталих.

Приклад 1.

Нехай $u=x^2z^3 — y^2$, тоді $u'_x=2xz^3$, $u'_y=—zy^{z}\text{-}^{1}$, $u'_z= 3x^2z^2—y^2 \ln y$.

Приклад 2.

Дано функцію $z=x^2 \sin y$; потрібно знайти часткові похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ і } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Приклад 3.

$$z=x^y$$

Тут $$\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^{y}\ln x.$$

Часткові похідні функції будь-якого числа змінних визначаються аналогічно.

Так, якщо маємо функцію *u* чотирьох змінних *x, y, z, t:* *u=f(x, y, z, t),* то

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z,t)-f(x,y,z,t)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z,t)-f(x,y,z,t)}{\Delta y}\ \text{і т.д.}$$

Приклад 4. $u=x^2+y^2+xtz^3.$

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+tz^3,\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial u}{\partial z}=3\ xtz^2,\ \frac{\partial u}{\partial t}=xz^3.$$

Геометрична інтерпретація часткових похідних функції двох змінних.

Нехай рівняння *z=f(x,y)* є рівняння поверхні, яка зображена на рис. 7.42.

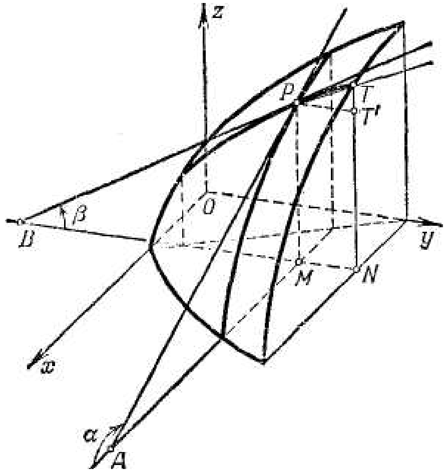


Рис. 7.42.

Проведемо площину *x*= const. У перерізі цієї площини з поверхнею вийде лінія *PT*. При даному *x* розглянемо на площині *Oxy* деяку точку *M (x, y)*. Точці *M* відповідає точка *P(x, y, z),* яка належить поверхні *z=f(x, y)*. Залишаючи *x* незмінною, дамо змінній *y* приріст $\Delta y=MN=-PT'$. Тоді функція *z* одержить приріст $\Delta_y z=TT'$ (точці $N\ (x,\ y+\Delta y)$ відповідає точка $T\ (x,y+\Delta y,\ z+\Delta_y z)$ на поверхні *z=f(x, y)).* Відношення $\Delta_y z\ /\Delta y$ дорівнює тангенсові кута, утвореного *січною PT* із додатним напрямленням осі *Oy:*

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=tg\,T\hat{P}T'\ .$$

Отже, границя

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\frac{\partial z}{\partial y}$$

дорівнює тангенсові кута β, утвореного дотичною *PB* до кривої *PT,* у точці *P* з додатним напрямленням осі *Oy:*

$$\frac{\partial z}{\partial y}=tg\beta.$$

Отже, часткова похідна *∂z/∂y* чисельно дорівнює тангенсові кута нахилу дотичної до кривої, що виходить у перерізі поверхні

$z=f(x, y)$ площиною x = const.

Аналогічно часткова похідна $\partial z/\partial x$ чисельно дорівнює тангенсові кута нахилу α дотичної до перерізу поверхні $z=f(x, y)$ площиною y = const.

Частковий диференціал позначається символом ∂ зі значком (індексом), який вказує, по якій змінній відбувається диференціювання. Таким чином,

$$\partial_x u=u'_x\Delta x;\ \ \partial_y u=u'_y\Delta y;\ \partial_z u=u'_z\Delta z;$$

Якщо тут, зокрема, покласти $u=x$, то одержимо

$$\partial_x x=\Delta x;\ \ \partial_y x=\partial_z x=0 \ \ (\text{так як } x'_x=1,\ x'_y=x'_z=0).$$

Таким чином, $\partial_x u = u'_x\partial_x x$, звідки $u'_x = \partial_x u/\partial_x x$. У цій формулі, зазвичай, не пишуть індексів у правій частині, тобто пишуть $u'_x=\partial u/\partial x$ оскільки зі знаменника видно , по якій змінній береться диференціал. Аналогічним чином $u'_y = \partial u/\partial y$, $u'_z = \partial u/\partial z$. Однак у цих формулах різняться не тільки знаменники, але і чисельники: у першій чисельник дорівнює $\partial_y u$, а в другій $\partial_z u$. Це правило запису диференціалів, про яке треба пам'ятати, іноді не дуже зручне. Наприклад, замість $(\partial u/\partial x)^{-1}$ не можна написати $\partial x/\partial u$, так як в цих виразах диференціали мають різний сенс: у першому вони беруться по x, а в другому — по u.

При застосуванні часткових похідних треба ретельно стежити за вибором незалежних змінних. Наприклад, якщо записати вираз для потужності електричного струму у вигляді $P=U^2/R$, де U-напруга, а R — опір ланцюга, ми одержуємо $\partial P/\partial R = -(U^2/R^2)= -(P/R)$; якщо ж формулу для потужності записати у вигляді $P=I^2R$, де I—сила струму, то одержуємо $\partial P/\partial R=I^2=P/R$. Ці результати зовсім не суперечать один одному.

7.12. Повний приріст і повний диференціал

Повний приріст. По приведеному раніше визначенню повного приросту функції $z=f(x, y)$ маємо

$$\Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y). \quad (7.37)$$

Припустимо, що $f(x, y)$ у точці (x, y), яку розглядаємо , має безперервні часткові похідні.

Виразимо Δz через часткові похідні. Для цього в правій частині рівності (7.37) додамо і віднімемо $f(x, y+\Delta y)$:

$$\Delta z=[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y+\Delta y)]+[f(x,\ y+\Delta y) - f(x,y)].\ (7.38)$$

Вираз $f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$, який стоїть в другій квадратній дужці, можна розглядати як різницю двох значень функції однієї змінної y (значення x залишається сталим). Застосовуючи до цієї різниці теорему Лагранжа, одержимо:

$$f(x,\ y+\Delta y) - f(x,y)=\Delta y\frac{\partial f\left(x,\bar{y}\right)}{\partial y},\ (7.39)$$

де $\bar{y}$ знаходиться між y і $y+\Delta y$.

Точно так само вираз, який стоїть в першій квадратній дужці рівності (7.38), можна розглядати як різниця двох значень функції однієї змінної x (другий аргумент зберігає те саме значення $y+\Delta y$). Застосовуючи до цієї різниці теорему Лагранжа, одержимо:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y) - f(x,y+\Delta y)=\Delta x\frac{\partial f\left(\bar{x},y+\Delta y\right)}{\partial x},\ (7.40)$$

де $\bar{x}$ знаходиться між x і $x+\Delta x$.

Вносячи вирази (7.39) і (7.40) у рівність (7.38), одержимо:

$$\Delta z=\Delta x\frac{\partial f\left(\bar{x},y+\Delta y\right)}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial f\left(x,\bar{y}\right)}{\partial y}.\ (7.41)$$

Так як, по припущенню, часткові похідні безперервні, то

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f\left(\bar{x},y+\Delta y\right)}{\partial x}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x},\\ &\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial f\left(x,\bar{y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}\end{aligned}\right\}\ (7.42)$$

(так як $\bar{x}$ і $\bar{y}$ знаходяться, відповідно, між x і $x+\Delta x$, y і $y+\Delta y$, то при $\Delta x\to 0$ і $\Delta y\to 0$ $\bar{x}$ і $\bar{y}$ прагнуть, відповідно, до x і y). Рівності (7.42) можна переписати у вигляді

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial f\left(\bar{x},y+\Delta y\right)}{\partial x}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}+\gamma_1,\\ &\frac{\partial f\left(x,\bar{y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}+\gamma_2\end{aligned}\right\},(7.43)$$

де величини γ_1 і γ_2 прагнуть до нуля, коли Δx і Δy прагнуть до нуля (тобто коли $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0$).

В силу рівності (7.43) співвідношення (7.41) приймає вигляд

$$\Delta z = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y. \quad (7.44)$$

Сума двох останніх доданків правої частини є нескінченно малою вищого порядку відносно

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

Дійсно, відношення $(\gamma_1\Delta x/\Delta\rho) \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$ так як γ_1 є нескінченно малою величиною, а $\Delta x/\Delta\rho$ - обмеженою

$$\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta\rho}\right| \le 1\right).$$

Аналогічно перевіряється, що $(\gamma_2\Delta x/\Delta\rho) \to 0$.

Сума перших двох доданків є вираз лінійний відносно Δx і Δy. При $f'_x(x, y) \neq 0$ і $f'_y(x, y) \neq 0$ цей вираз являє собою головну частину приросту, відрізняючись від Δz на нескінченно малу вищого порядку відносно

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

Повний диференціал.

Означення. Функція $z=f(x,y)$, повний приріст Δz якої в даній точці (x, y) може бути представлений у вигляді суми двох доданків: виразу, лінійного відносно Δx і Δy, і величини нескінченно малої вищого порядку відносно $\Delta\rho$, називається *диференційованною в даній точці,* а лінійна частина приросту називається *повним диференціалом* і позначається через du, dz або df.

Повний диференціал du функції u=f(x, y, z) по визначенню *дорівнює сумі всіх її часткових диференціалів:*

$$du=\partial_x u+\partial_y u+\partial_z u=u'_x\Delta x+u'_y\Delta y+u'_z\Delta z=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\ .(7.45)$$

Якщо, зокрема, покласти $u=x$, то в силу формули $\partial_x x=\Delta x$, $\partial_y x=\partial_z x=0$, одержимо $dx=\partial_x x+\partial_y x+\partial_z x=\Delta x$, тобто *повний диференціал незалежної змінної дорівнює його приросту.* Тому формулу (7.45) можна переписати так:

$$du= u'_x\,dx+ u'_y\,dy+u'_z\,dz= \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}\ dz\ . \quad (7.46)$$

Наприклад

$$d\left(x^2\sin\frac{x}{y}\right)=\left(2x\sin\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y}\cos\frac{x}{y}\right)dx-\frac{x^3}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy\,.$$

Зв'язок повного диференціала з повним приростом функції аналогічний тому, котрий описано в пункті «Визначення диференціала і зв'язок його з приростом». Нехай незалежні змінні одержали приріст Δx, Δy , в результаті чого u одержить приріст

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y+\ z+\Delta z) — f(x,y,z).$$

Цей *повний приріст* можна представити у вигляді суми трьох приростів, кожний з яких отриманий за рахунок зміни тільки однієї змінної :

$$\Delta u=[f(x+\Delta x,\ y,\ z) — f(x,y,z)]+[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,z) — f(x+\Delta x,\ y,\ z)]+$$
$$+[f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,z+\Delta z)\text{--}\ f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,z)]. \quad (7.47)$$

Прирости, які стоять у квадратних дужках, являють собою часткові прирости і тому зв'язані з частковими диференціалами так, як описано у формулі (5.28):

$$f(x+\Delta x,\ y,\ z) — f(x,y,z)=f'_x(x,y,z)\ \Delta x+\alpha_1\,\Delta x;$$
$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,z)\text{-}\ f(x+\Delta x,\ y,\ z)= f'_y(x+\Delta x,y,z)\ \Delta y+\alpha_2\,\Delta y=$$
$$= [f'_y(x,y,z)+\alpha_3\ ]\Delta y+\ \alpha_2\,\Delta y= f'_y(x,y,z)\ \Delta y+\alpha_4\,\Delta y;$$
$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,z+\Delta z)\text{-}\ f(x+\Delta x,\ y+\ \Delta y,\ z)=(\text{аналогічно})=$$
$$= f'_z(x,y,z)\ \Delta z+\alpha_5\,\Delta z,$$

де усі величини α прагнуть до нуля, коли $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ і $\Delta z\to 0$. Підставляючи в (7.47), одержимо

$$\Delta u=u'_x\Delta x+u'_y\,\Delta y+u'_z\Delta z+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z=du+\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\gamma\Delta z\ , \quad (7.48)$$

де $(\alpha, \beta,\gamma)\to 0$ при $(\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z)\to 0$. Таким чином, і тут можна сказати, що *повний диференціал являє собою головну лінійну частину приросту функції:* головну, так як він відрізняється від приросту на величини вищого порядку малості (у порівнянні з приростами аргументів), а лінійну, так як він являє собою суму доданків, пропорційних приростам аргументів . Заміна приросту функції на її диференціал, як і для функцій однієї змінної, означає заміну нелінійної функції на лінійну.

Формула (7.48) для випадку двох незалежних змінних проілюстрована на рис. 7.43, де поруч із точками площини аргументів зазначені значення функції з відкинутими членами вищого порядку малості.

Приклад 1. Знайти повний диференціал і повний приріст функції $z=xy$ в точці (2; 3) при $\Delta x= 0,1$, $\Delta y= 0,2$.

Розв'язання.

$$\Delta z= (x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x +x\Delta y +\Delta x\Delta y,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy =ydx+xdy= y\Delta x+x\Delta y.$$

Отже,

$\Delta z=3\bullet 0,1+2\bullet 0,2+0,1\bullet 0,2=0,72$,

$dz=3\bullet 0,1+2\bullet 0,2=0,7$.

На рис. 7.44 приведена ілюстрація до цього приклада.

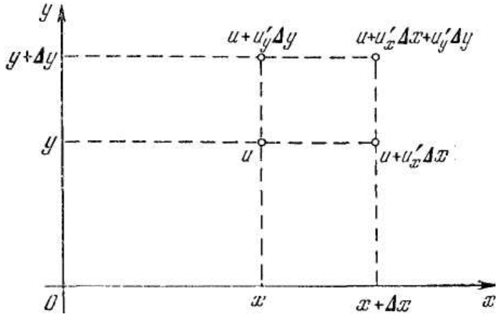


Рис. 7.43.

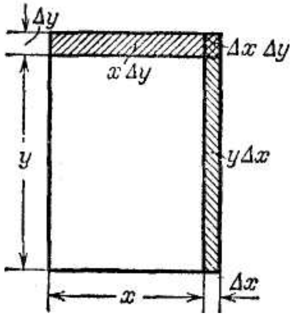


Рис. 7.44.

Попередні міркування і визначення відповідним чином узагальнюються на функції будь-якого числа аргументів.

Якщо маємо функцію будь-якого числа змінних $w=f(x,y,z,u,...,t)$, причому всі часткові похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y},...,\ \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

безперервні в точці $(x,y,z,u,...,t)$, то вираз

$$dw=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+...+\frac{\partial f}{\partial t}dt$$

є головною частиною повного приросту функції і називається повним диференціалом. Доведення того, що різниця $\Delta w\text{-}dw$ є нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+...+(\Delta t)^2}$, виконується так само, як і для функції двох змінних.

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції $u=e^{x^2+y^2}\sin^2 z$ трьох змінних x,y,z.

Розв'язання. Помітивши, що часткові похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{x^2+y^2}2x\sin^2 z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=e^{x^2+y^2}2y\sin^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=e^{x^2+y^2}2\sin z\cos z=e^{x^2+y^2}\sin 2z$$

безперервні при всіх значеннях x, y, z, знаходимо:

$$u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 zdx+2y\sin^2 zdy+\sin 2zdz).$$

7.13. Застосування повного диференціала в наближених численнях

Нехай функція $z=f(x, y)$ диференційовна в точці (x, y). Знайдемо повний приріст цієї функції $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)\text{-} f(x, y)$, звідки

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)= f(x, y)+ \Delta z. \quad (7.49)$$

Ми мали наближену формулу

$$\Delta z\approx dz. \quad (7.50)$$

Де

$$dz=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \quad (7.51)$$

Підставляючи у формулу (7.49) замість Δz розгорнутий вираз для dz, одержимо наближену формулу:

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y. \quad (7.52)$$

вірну з точністю до нескінченно малих вищого порядку відносно Δx і Δy.

Покажемо, як використовуються формули (7.50) і (7.52) для наближених обчислень.

Задача. Обчислити об’єм матеріалу, потрібного для виготовлення циліндричної склянки наступних розмірів (рис. 7.45): радіус внутрішнього циліндра *R*, висота внутрішнього циліндра *H*, товщина стінок і дна склянки *k*.

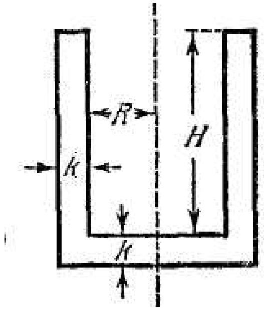


Рис. 7.45.

*Розв’язання***.** Дамо два розв’язання цієї задачі : точне і наближене.

а) Точне розв’язання. Об’єм *v*, який обчислюється, дорівнює різниці об’ємів зовнішнього циліндра і внутрішнього циліндра . Так як радіус зовнішнього циліндра дорівнює *R*+*k*, а висота *H*+*k*, то

$$v=\pi(R+k)^2(H+k)-\pi R^2H,$$

або

$$v=\pi(2RHk+R^2k+Hk^2+2Rk^2+k^3)\ (7.53)$$

б) Наближене розв’язання. Позначимо через *f* об’єм внутрішнього циліндра, тоді $f=\pi R^2H$. Це — функція двох змінних *R* і *H*. Якщо збільшимо *R* і *H* на *k*, то функція *f* одержить приріст Δf; але це і буде шуканий об’єм *v*, тобто $v=\Delta f$.

На підставі співвідношення (4.49) маємо наближену рівність $v\approx d\,f$, або

$$v\approx\frac{\partial f}{\partial R}\,\Delta R+\frac{\partial f}{\partial H}\,\Delta H.$$

Але так як

$$\frac{\partial f}{\partial R}=2\pi RH,\ \frac{\partial f}{\partial H}=\pi R^2,\ \Delta R=\Delta H=k,$$

то одержуємо:

$$v\approx\pi(2RHk+R^2k).\ (7.54)$$

Порівнюючи результати (7.53) і (7.54), бачимо, що вони відрізняються на величину $\pi(Hk^2+2Rk^2+k^3)$, яка складається з членів другого і третього порядку малості відносно *к*.

Застосуємо ці формули до числових прикладів.

Нехай *R* =4 *см*, *H* = 20 *см*, *k* = 0,1 *см.*

Застосовуючи (7.53), одержимо точно:

$$v=\pi\ (2\bullet4\bullet20\bullet0,1+4^2\bullet0,1+20\bullet0,1^2+2\bullet4\bullet0,1^2+0,1^3)=17,881\pi.$$

Застосовуючи формулу (7.54), одержимо приблизно

$$v\approx\pi\ (2\bullet4\bullet20\bullet0,1+4^2\bullet0,1)=17,6\pi$$

Отже, наближена формула (7.54) дає відповідь з похибкою меншою, ніж 0,3π, що складає $100\bullet\frac{0,3\pi}{17,881\pi}\%$, тобто менше 2% обмірюванної величини.

Додаток диференціала до оцінки похибки при обчисленнях

Нехай деяка величина *u* є функцією величин *x, y, z, ..., t:*

$$u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t),$$

причому, визначаючи якимось чином значення величин *x,y,z, ...,t*, ми припускаємось похибок Δx, Δy, ..., Δt. Тоді значення *u*, обчислене за неточними значеннями аргументів, вийде з похибкою

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y + \Delta y,\ \ldots, z + \Delta z,\ t + \Delta t)—f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t).$$

Нижче ми займемося оцінкою похибки Δu, якщо відомі похибки Δx, Δy,……, Δt.

При досить малих абсолютних значеннях величин Δx, Δy,……, Δt можемо приблизно замінити повний приріст повним диференціалом

$$\Delta u\approx\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\ldots+\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t.$$

Тут значення часткових похідних і значення похибок аргументів можуть бути як додатними, так і від'ємними. Заміняючи їхніми абсолютними величинами, одержимо нерівність

$$|\mathit{\Delta} u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta t| \quad (7.55)$$

Якщо через $|\Delta^* x|, |\Delta^* y|, \ldots, |\Delta^* t|$ позначимо *максимальні абсолютні* похибки відповідних величин (границі для абсолютних величин значень похибок), то можна, вочевидь, прийняти:

$$|\mathit{\Delta}^* u| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |\Delta^* y| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right| |\Delta^* t|. \quad (7.56).$$

Приклади

1. Нехай $u=x+y+z$ тоді

$|\mathit{\Delta}^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y| + |\Delta^* z|$

2.Нехай $u=x-y$, тоді

$|\mathit{\Delta}^* u| = |\Delta^* x| + |\Delta^* y|$

3. Нехай $u=xy$, тоді

$|\mathit{\Delta}^* u| = |x||\Delta^* y| + |y||\Delta^* \mathrm{x} y|$

4. Нехай $u=x/y$, тоді

$$|\mathit{\Delta}^* u| = \left|\frac{1}{y}\right| |\Delta^* x| + \left|\frac{x}{y^2}\right| |\Delta^* y| = \frac{|y||\Delta^* x| + |x||\Delta^* y|}{y^2}.$$

5. Гіпотенуза c і катет a прямокутного трикутника ABC, які визначені з максимальними абсолютними похибками $|\mathit{\Delta}^* c| = 0{,}2$, $|\mathit{\Delta}^* a| = 0{,}1$, відповідно дорівнюють $c=75$, $a=32$. Визначити кут A по формулі $\sin A = a/c$; максимальну абсолютну похибку $\left|\overline{\Delta A}\right|$ при обчисленні кута A.

Розв'язання.

$\sin A = \dfrac{a}{c}$, $A = \arcsin \dfrac{a}{c}$, таким чином

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}}, \quad \frac{\partial A}{\partial c} = -\frac{a}{c\sqrt{c^2 - a^2}}$$

По формулі (7.56) одержимо:

$$\left|\overline{\Delta A}\right| = \frac{1}{\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}1 + \frac{32}{75\sqrt{(75)^2 - (32)^2}} \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}00273 \textit{ радіанів} = 9'24''.$$

Таки чином,

$A = \arcsin \dfrac{32}{75} \pm 9'24''.$

6. Нехай у прямокутному трикутнику ABC катет $b = 121{,}56$ *м,* кут $A = 25^{\circ}21'40''$, при цьому максимальна абсолютна похибка при визначенні катета b дорівнює $|\Delta^* b| = 0{,}05$ *м,* максимальна абсолютна похибка при визначенні кута A дорівнює $|\Delta^* A| = 12''$.

Визначити максимальну абсолютну похибку при обчисленні катета a по формулі $a = b\,tg\,A$.

Розв'язання. По формулі (7.56) знаходимо:

$$|\Delta^* a| = |tg\,A|\,|\Delta^* b| + \frac{|b|}{\cos^2 A}\,|\Delta^* A|.$$

Підставляючи відповідні значення (і пам'ятаючи, що $|\mathit{\Delta}^* A|$ потрібно виразити в радіанах), одержимо:

$$|\Delta^* a| = tg 25^{\circ}21'40'' \bullet 0{,}05 + \frac{121{,}56}{\cos^2 25^{\circ}21'40''}\frac{12}{206265} = 0{,}0237 + 0{,}0087 = 0{,}0324\textit{м}$$

Відношення похибки Δx деякої величини до наближеного значення x цієї величини називається *відносною похибкою* величини. Будемо його позначати δx,

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x}.$$

Максимальною відносною похибкою величини x називається відношення максимальної абсолютної похибки до абсолютної величини x і позначається $|\delta^* x|$,

$$|\delta^* x| = \frac{|\Delta^* x|}{|x|}. \quad (7.57)$$

Для оцінки максимальної відносної похибки функції u розділимо всі числа (7.56) на $|u| = |f(x,y,z,..,t)|$

Тоді

$$\frac{|\Delta * u|}{|u|}=\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}\right||\Delta * x|+\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}\right||\Delta * y|+\ldots+\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}\right||\Delta * t|, \quad (7.58)$$

але

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f}=\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f}=\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|, \ldots, \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{f}=\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|$$

Тому рівність (7.57) можна переписати так:

$$|\delta * u|=\left|\frac{\partial}{\partial x}\ln|f|\right||\Delta * x|+\left|\frac{\partial}{\partial y}\ln|f|\right||\Delta * y|+\ldots\ldots\left|\frac{\partial}{\partial t}\ln|f|\right||\Delta * t|\ldots, \quad (7.59)$$

або коротко:

$$|\delta * u|=\left|\Delta * \ln|f|\right| \quad (7.60)$$

З формул як (7.57), так і (7.59) випливає, що максимальна відносна похибка функції дорівнює максимальній абсолютній похибці логарифма цієї функції.

З формули (7.60) випливають правила, які застосовуються в наближених обчисленнях.

1. Нехай $u=xy$. Користуючись результатами приклада 3, держимо:

$$|\delta * u|=\frac{|y||\Delta * x|}{|xy|}+\frac{|x||\Delta * y|}{|xy|}=\frac{|\Delta * x|}{|x|}+\frac{|\Delta * y|}{|y|}=|\delta * x|+|\delta * y|,$$

тобто максимальна відносна похибка добутку дорівнює сумі максимальних відносних похибок співмножників.

2. Якщо $u=x/y$, то, користуючись результатами приклада 4, знаходимо:

$$|\delta * u|=|\delta * x|+|\delta * y|,$$

Зауваження. На підставі приклада 2 випливає, що якщо $u=x-y$, то

$$|\delta * u|=\frac{|\Delta * x|+|\Delta * y|}{|x-y|}$$

Якщо x і y близькі, то може виявитися, що $|\delta * u|$ буде дуже велика у порівнянні з обумовленою величиною $x-y$. Цю обставину необхідно враховувати при виконувані обчислень.

Приклад 7. Період коливання маятника дорівнює $T=2\pi\sqrt{l/g}$, де l- довжина маятника, g — прискорення сили тяжіння.

Яку відносну похибку у визначенні T ми допустимо по цій формулі, приймаючи $\pi\approx3{,}14$ (з точністю до 0,005), $l=1$ *м* (з точністю до 0,01 *м*), $g= 9{,}8$ *м/сек*^{2} (з точністю до 0,02 *м/сек*^{2}).

*Розв'язання***.** По формулі (7.60) максимальна відносна похибка дорівнює

$$|\delta * T|=|\Delta * \ln T|.$$

Але

$$\ln T= \ln 2+ \ln \pi+\frac{1}{2}\ln l-\frac{1}{2}\ln g.$$

Обчислимо $|\Delta * \ln T|$.

Ми знаємо, що $\pi\approx3{,}14$, $\Delta*\pi=0{,}005$, $l=1$*м* , $\Delta* l=0{,}01$*м*, $g=9{,}8$*м/сек*^{2},

$\Delta* g=0{,}02$ *м/сек*^{2},

отримаємо

$$\Delta * \ln T=\frac{\Delta * \pi}{\pi}+\frac{\Delta * l}{2l}+\frac{\Delta * g}{2g}=\frac{0{,}005}{3{,}14}+\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}02}{2\cdot 9{,}8}=0{,}0076$$

Отже, максимальна відносна похибка дорівнює $\delta * T=0{,}0076=0{,}76\%$.

7.14. Похідна складеної функції. Повна похідна. Повний диференціал складеної функції

Припустимо, що в рівнянні

$$z = F(u, v) \quad (7.61)$$

u і v є функціями незалежних змінних x і y:

$$u = \varphi(x, y),\ v =\psi (x, y). \quad (7.62)$$

У цьому випадку z є складена функція від аргументів x і y.

Звичайно, z можна виразити і безпосередньо через x, y, а саме:

$$z = F[\varphi(x, y), \psi(x, y)]. \quad (7.63)$$

Приклад 1. Нехай

$$z = u^3v^3+u+1,\ u = x^2+y^2,\ v = e^{x+y}+1,$$

тоді

$$z = (x^2+v^2)^3(e^{x+y}+1)^3+(x^2+y^2)+1.$$

Припустимо, що функції $F(u, v)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ мають безперервні часткові похідні по усіх своїх аргументах і поставимо задачу, обчислити $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ виходячи з рівнянь (7.61) і (7.62) і не користуючись рівнянням (7.63).

Дамо аргументові x приріст Δx, зберігаючи значення y незмінним. Тоді, у силу рівняння (7.62), u і v одержать приріст $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$.

Але якщо u і v одержують приріст $\Delta_x u$ і $\Delta_x v$, то і функція $z = F(u, v)$ одержить приріст Δz, який обчислюється формулою (7.44)

$$\Delta z = \frac{\partial F}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial F}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1\Delta_x u + \gamma_2\Delta_x v.$$

Розділимо всі члени цієї рівності на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \gamma_1\frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \gamma_2\frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta_x u \to 0$ і $\Delta_x v \to 0$ (у силу безперервності функції u і v). Але тоді γ_1 і γ_2 теж прагнуть до нуля. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_1 = 0,\ \lim_{\Delta x\to 0}\gamma_2 = 0$$

і, отже

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7.64)$$

Якби ми дали приріст Δy змінній y, а x залишили незмінною, то за допомогою аналогічних міркувань знайшли б:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \quad (7.65)$$

Приклад 2.

$$z = ln(u^2+v),\ u = e^{x+y^2},\ v = x^2+y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2u}{u^2+v},\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2},\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x+y^2},\ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 1.$$

Використовуючи формули (7.64) і (7.65), знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{u^2+v}\ e^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v}2x = \frac{2}{u^2+v}\ (ue^{x+y^2}+x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{u^2+v}\ 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u^2+v} = \frac{1}{u^2+v}\ (2uye^{x+y^2}+1),$$

В останні вирази замість u і v необхідно підставити e^{x+y2} і x^2+y відповідно.

Для випадку більшого числа змінних формули (7.64) і (7.65) природним чином узагальнюються.

Наприклад, якщо $w = F(z, u, v, s)$, є функція чотирьох аргументів z, u, v, s, а кожний з них залежить від x і y, то формули (7.64) і (7.65) приймають вигляд

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \quad (7.66)$$

Якщо задано функцію $z = F(x, y, u, v)$, де y, u, v у свою чергу залежать від одного аргументу x:

$$y = f(x),\ u = \varphi(x), v = \psi(x),$$

то по суті справи, z є функцією тільки однієї змінної x і можна ставити питання про знаходження похідної dz/dx .

Ця похідна обчислюється по першій з формул (7.66):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x};$$

але так як *y, u, v* - функції тільки одного *x*, то часткові похідні обертаються в звичайні, крім того, $\partial x/\partial x$=1; тому

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Ця формула носить назву формули для обчислення *повної похідної* dz/dx (на відміну від часткової похідної $\partial x/\partial x$).

Приклад 3.

$z=x_2+\sqrt{}y,\ y=sin\ x,$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2\sqrt{y}},\ \frac{\partial y}{\partial x}=cos\ x.$$

Формула (7.67) дасть у цьому випадку наступний результат:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=2x+\frac{1}{2\sqrt{y}}\ cos\ x=2x+\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\ cos\ x$$

Знайдемо далі повний диференціал складеної функція, визначеної рівностями (7.61) і (7.62).

Підставляємо вирази dz/dx і dz/dy ,які визначені рівностями (7.64) і (7.65), у формулу повного диференціала

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy. \quad (7.67)$$

Одержуємо:

$$dz=\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dy.$$

Зробимо наступні перетворення в правій частині:

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right). \quad (7.68)$$

Але

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=du,\\ \frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=dv\end{aligned}\right\}. \quad (7.69)$$

Рівність (7.68) з урахуванням рівностей (7.69) можна переписати так;

$$dz=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv. \quad (7.70)$$

або

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv. \quad (7.71)$$

Порівнюючи (7.67) і (7.71), можемо сказати, що вираз повного диференціала функції декількох змінних (диференціала першого порядку) має той же вигляд, тобто форма диференціала інваріантна, чи є *u* і *v* незалежними змінними або функціями незалежних змінних.

Приклад 4. Знайти повний диференціал складеної функції

$z=u^2v^3,\ u=x^2sin\ y,\ \ v=x^3e^y$

*Розв'язання***.** По формулі (7.71) маємо

$dz=2uv^3du+3u^2v^2dv=2uv^3(2xsinydx+x^2cos\ ydy)+3u^2v^2(3x^2e^ydx+x^3e^y\ dy)$

Останній вираз можна переписати і так:

$dz=(2uv^3\bullet 2xsiny+3u^2v^2\bullet 3x^2e^y)dx+(2uv^3x^2cosy+3u^2v^2x^3e^y)dy=$

$=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}\ dy.$

7.15. Похідна від функції, заданої неявно

Почнемо розгляд цього питання з неявної функції однієї змінної. Нехай деяка функція *y* від *x* визначається рівнянням

$$F(x,y)=0.$$

Доведемо наступну теорему.

Теорема. *Нехай безперервна функція у від х задається неявно рівнянням*

$$F(x,y)=0 \quad (7.72)$$

де $F(x,y),\ F'_x(x,y),\ F'_y(x,y)$ *- безперервні функції в деякій області D,* *яка містить точку* (x, y), *координати якої задовольняють рівнянню (7.72)*; *крім того, у цій точці* $F_y(x, y)\neq 0$. *Тоді функція* y *від* x *має похідну*

$$y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \quad (7.73)$$

Доведення. Нехай деякому значенню x відповідає значення функції y. При цьому

$$F(x, y)=0.$$

Дамо незалежній змінній x приріст Δx. Функція y одержить приріст Δy, тобто значенню аргументу $x+\Delta x$ відповідає значення функції $y=\Delta y$.

В силу рівняння $F(x, y) = 0$ будемо мати

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0.$$

Отже

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y) = 0 .$$

Ліву частину останньої рівності, що є повним приростом функції двох змінних по формулі (7.44) , можна переписати так:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y)=\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y$$

де γ_1 і γ_2, прагнуть до нуля при Δx і Δy, які прагнуть до нуля. Так як ліва частина останнього виразу дорівнює нулеві, можна написати;

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y+\gamma_1\Delta x+\gamma_2\Delta y=0.$$

Розділимо останню рівність на Δx і обчислимо $\Delta y/\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\gamma_1}{\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma_2}$$

Спрямуємо Δx до нуля. Тоді, з огляду на те, що при цьому γ_1 і γ_2 також прагнуть до нуля і що $\partial F/\partial y\neq 0$, в границі одержимо:

$$y'_x=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \quad (7.74)$$

Ми довели існування похідної y'_x від функції, заданої неявно, і знайшли формулу для її обчислення.

Приклад 1. Рівняння $x^2+y^2-1=0$ визначає y як неявну функцію x. Тут

$$F(x, y) = x^2+y^2-1,\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Отже, по формулі (7.72)

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2y}{2x}-\frac{y}{x}.$$

Помітимо, що задане рівняння визначає дві різні функції (так як кожному значенню x у проміжку (—1, 1) відповідають два значення y); однак знайдене значення y'_x справедливе як для однієї, так і для іншої функції.

Приклад 2. Дано рівняння, що зв'язує x і y:

$$e^y-e^x+xy=0$$

Тут

$$F(x, y) = e^y-e^x+xy,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-e^x+y,\ \frac{\partial F}{\partial y}=e^y+x.$$

Отже, по формулі (7.72) одержуємо:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{-e^x+y}{e^y+x}=\frac{e^x-y}{e^y+x}.$$

Нехай неявна функція $z=z(x,y)$ визначена з рівняння

$$F(x, y, z)=0. \quad (7.75)$$

Для обчислення часткової похідної z'_x треба зафіксувати y і диференціювати формулу (7.75), маючи на увазі, що z залежить від x. За правилом диференціювання складеної функції одержимо

$$F'_x x'_x+F'_z z'_x=0, \text{ тобто } F'_x+F'_z z'_x=0. \quad (7.76)$$

Звідки

$$z'_x=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \quad (7.77)$$

Аналогічно, $z'_y=-F'_y/F'_z$. Якщо ми хочемо, щоб ця похідна приймала визначене кінцеве значення, то треба вимагати, щоб

$$F'_z(x, y, z)\neq 0. \quad (7.78)$$

Це – так називана *умова існування неявної функції z=z(x,y),* яка визначена з рівняння (7.75); геометричний зміст цієї умови ми покажемо далі.

Аналогічним чином визначаються неявні функції будь-якого числа змінних і знаходяться їхні часткові похідні.

Приклад 3.

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}.$$

Диференціюючи цю функцію як явну (після розв’язання рівняння відносно z), ми одержали б той же результат.

Приклад 4.

$$e^z+x^2y+z+5=0.$$

Тут

$$F(x,y,z)=e^z+x^2y+z+5,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial F}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial F}{\partial z}=e^z+1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2xy}{e^z+1},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2}{e^z+1}$$

Неявні функції можуть бути визначені із системи рівнянь. Нехай дано *m* рівнянь, *сумісних* (тобто несуперечливих) і *незалежних* (тобто таких, що жодне з цих рівнянь не є наслідком інших), які зв'язують *n* змінних. Тоді якщо $m < n$ (рівнянь менше, ніж змінних), то $n— m$ змінних можна прийняти за незалежні, тобто їх значення задавати, а інші *m* змінних виражати із заданих *m* рівнянь у вигляді функцій від цих незалежних змінних. (Якщо число рівнянь більше або дорівнює числу невідомих, то для невідомих отримуються дискретні значення і функцій не буде). Розглянемо, наприклад, випадок двох рівнянь з п'ятьма змінними:

$$f(x,y,z,u,v)=0,$$

$$\varphi(x,y,z,u,v)=0.\quad(7.79)$$

Тут можна три змінні прийняти за незалежні, а дві за їхні функції. Приймемо для визначеності $u=u(x,y,z)$; $v=v(x,y,z)$ і спробуємо знайти похідні u'_x і v'_x, для цього виконаємо диференціювання обох рівнянь (7.79) при фіксованих *y* і *z*. Одержимо

$$\left.\begin{aligned}f'_x\cdot 1+f'_uu'_x+f'_vv'_x&=0;\\ \varphi'_x\cdot 1+\varphi'_uu'_x+\varphi'_vv'_x&=0\end{aligned}\right\},\ \text{тобто}\ \left.\begin{aligned}f'_uu'_x+f'_vv'_x&=-f'_x;\\ \varphi'_uu'_x+\varphi'_vv'_x&=-\varphi'_x\end{aligned}\right\}.\ (7.80)$$

Таким чином, відносно u'_x і v'_x вийшла система двох рівнянь першого степеня з двома невідомими. Для можливості її розв'язання потрібно, щоб визначник системи був відмінний від нуля:

$$\begin{vmatrix}f'_uf'_v\\ \varphi'_u\varphi'_v\end{vmatrix}\neq 0.\ (7.81)$$

Аналогічно знаходяться похідні по *y* і *z*; визначник системи буде той же (зміняться праві частини). Таким чином, (7.81) — це *умова існування неявних функцій u =u(x, y, z)* і *v = v(x, y, z),* які визначені із системи рівнянь (7.79). Аналогічний вигляд має умова для будь-якого числа рівнянь і змінних.

Функціональний визначник (тобто визначник, складений з функцій) вигляду (7.81) часто зустрічається в математиці і має спеціальну назву «*якобіан*» (по імені німецького математика К. Якобі)) і символічне позначення

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(u,v)};$$

такий символ треба розуміти як єдиний, так як чисельник і знаменник у окремості поки що для нас не мають змісту.

Аналогічні питання виникають при розв’язанні *систем рівнянь, які включають параметри.* Нехай, наприклад, розглядається система двох рівнянь із двома невідомими *x, y:*

$$\left.\begin{aligned}f\,(x,y;\alpha,\beta,\gamma,...)&=0;\\ \varphi\,(x,y;\alpha,\beta,\gamma,...)&=0\end{aligned}\right\}$$

де α, β, γ,… - параметри. Якщо при деяких значеннях α_0, β_0, γ_0,… цих параметрів система має розв’язання x_0, y_0 і якщо при цих значеннях

$$\frac{D(f,\varphi)}{D(x,y)}\neq 0,$$

то в силу сказаного система визначає *x* і *y* як функції α, β, γ, тобто при зміні параметрів система буде продовжувати мати цілком визначене розв’язання. Правда, як буде пояснено далі, це твердження має локальний характер, тобто при значній зміні параметрів система може перестати мати розв'язання. Підкреслимо, що для такої «стійкості» розв'язання щодо зміни параметрів число m рівнянь в системі повинне дорівнювати числу n невідомих. Якщо $m<n$, то $n—m$ невідомих залишаються довільними, а якщо $m>n$, то для можливості розв'язання потрібне виконання $m—n$ співвідношень між параметрами.

7.16. Часткові похідні і диференціали різних порядків

Нехай маємо функцію двох змінних:

$$z=f(x,y).$$

Часткові похідні $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x,y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x,y)$, взагалі-то, є функціями змінних x і y. Тому від них можна знову знаходити часткові похідні. Таким чином, часткових похідних другого порядку від функції двох змінних чотири, так як кожну з функцій $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна диференціювати як по x, так і по y.

Другі часткові похідні позначають так:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{xx}(x,y)$, тут f диференціюється послідовно два рази по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=f''_{xy}(x,y)$, тут f спочатку диференціюється по x, а потім результат диференціюється по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=f''_{yx}(x,y)$, тут f диференціюється спочатку по y, а потім результат диференціюється по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{yy}(x,y)$, тут f диференціюється послідовно два рази по y.

Похідні другого порядку можна знову диференціювати як по x так і по y. Одержимо часткові похідні третього порядку. Їх буде, мабуть, уже вісім:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Узагалі, *часткова похідна n-го порядку* є перша похідна від похідної (n —1)-го порядку. Наприклад, $\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$ є похідна n-го порядку; тут функція z спочатку p раз диференціювалася по x, а потім n-p раз по y.

Для функції будь-якого числа змінних часткові похідні вищих порядків визначаються аналогічно.

Приклад 1. Обчислити часткові похідні другого порядку від функції

$$f(x,y)=x^2y+y^3$$

***Розв'язання*.** Послідовно знаходимо

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial f}{\partial y}=x^2+3y^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial(2xy)}{\partial y}=2x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial\left(x^2+3y^2\right)}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Приклад 2. Обчислити $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ і $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$, якщо $z=y^2e^x+x^2y^3+1$.

***Розв'язання*.** Послідовно знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}=2ye^x+6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x+3x^2y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=2ye^x+6xy^2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}=2ye^x+6y^2.$$

Приклад 3. Обчислити

$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$, якщо $u=z^2e^{x+y^2}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z^2e^{x+y^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=z^2e^{x+y^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=2yz^2e^{x+y^2},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z}=4yze^{x+y^2}.$$

Природно задати питання, чи залежить результат диференціювання функції декількох змінних від порядку диференціювання по різним змінним, тобто чи будуть, наприклад, тотожно рівні похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{ і }\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

або

$$\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial x\partial y\partial t}\text{ і }\frac{\partial^3 f(x,y,t)}{\partial t\partial x\partial y}\text{ і т.д.}$$

Виявляється, що справедлива наступна теорема.

Теорема. *Якщо функція $z = f(x, y)$ і її часткові похідні f'_x, f'_y, f'_{xy} і f'_{yx} визначені і безперервні в точці $M(x,y)$ і в деякому її околі, то в цій точці*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\quad (f''_{xy}=f''_{yx}).$$

З теореми як наслідок виходить , що якщо часткові похідні

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}\text{ і }\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\partial x^k}$$

безперервні, то

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^k\partial y^{n-k}}=\frac{\partial^n f}{\partial y^{n-k}\partial x^k}.$$

Аналогічна теорема має місце і для функції будь-якого числа змінних.

Приклад 4. Знайти

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}\text{ і }\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x},\text{ якщо } u=e^{xy}\sin z.$$

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\,e^{xy}\sin z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{xy}\sin z+xye^{xy}\sin z=e^{xy}(1+xy)\sin z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=e^{xy}(1+xy)\cos z,\ \frac{\partial u}{\partial y}=xe^{xy}\sin z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=xe^{xy}\cos z,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x}=e^{xy}\cos z+xye^{xy}\cos z=e^{xy}(1+xy)\cos z$$

Отже

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial z\partial x}$$

Нехай для визначеності $u=f(x, y, z)$; аналогічно розглядаються функції будь-якого числа змінних. Тоді, як ми бачили, є три часткові похідні першого порядку: $u'_x=f'_x(x, y, z)$, u'_y і u'_z. Кожну з них можна знову диференціювати по x, y і z, так що виходить *дев'ять часткових похідних другого порядку:*

$$u''_{xx}=f''_{xx}(x, y, z),\ u''_{xy}=f''_{xy}(x, y, z),\ u''_{xz},\ u''_{yx},\ u''_{yy},\ u''_{yz},\ u''_{zx},\ u''_{z,y}\ u''_{zz}.$$

Диференціювання елементарних функцій, заданих у явному вигляді, здійснюється за правилами диференціювання елементарних функцій , а неявних функцій — за допомогою подальшого диференціювання рівностей (7.76), (7.77) або (7.80) і т.п. Похідні більш високого порядку визначаються аналогічно.

Подібним чином визначаються часткові диференціали вищих порядків

$$\partial^2{}_{xx}\,u=u''_{xx}dx^2;\ \partial^2{}_{xy}\,u=u''_{xy}dxdy\text{ і т.д.}\qquad(7.82)$$

де диференціал незалежної змінної $dx=\Delta x=\partial_x x$ і т.п.

Звідси

$$u''_{xx}=\frac{\partial^2{}_{xx}u}{(\partial_x x)^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ u''_{xy=}\frac{\partial^2{}_{xy}u}{\partial_x x\partial_y y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y};\ u''_{xz}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}.$$

Можна визначити *часткові різності* для функції декількох змінних, однак при цьому неодмінно треба вказувати, по якій саме змінній береться різність, причому по різним змінним крок може бути різним. Нехай наприклад, $z= f(x, y)$; тоді можна позначити крок по x через h і під Δ_h розуміти часткову різність по x, тобто

$$\Delta_h^z=f(x+h, y)—f(x, y),$$

а крок по y позначити через k і під Δk розуміти часткову різність по y, тобто

$$\Delta_k^z=f(x, y+k)—f(x, y),$$

Тоді природно позначати $\Delta_{hh}^2 z= \Delta_h(\Delta_h z)$, $\Delta_{hk}^2 z= \Delta_k(\Delta_h z)$, і т.п.
Зв'язок між роздільними різностями і похідними виражається формулами

$$z'_x=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h z}{h},\ z'_y=\lim_{k\to 0}\frac{\Delta_k z}{k},\ z''_{xx}=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta^2{}_{hh}z}{h^2},z''_{xy}=\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\Delta^2{}_{hk}z}{hk}$$

і т.д.

Рівність змішаних похідних. Нехай $z= f(x, y)$. Тоді в цій функції є чотири часткові похідні другого порядку: z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yx}, z''_{yy}. Виявляється, що дві середні похідні, які називаються *змішаними,* рівні між собою:

$$z''_{xy}= z''_{yx} \qquad (7.83)$$

тобто *змішані добутки не залежать від того, у якому порядку виконується диференціювання.*

Для доведення досить помітити, що

$$z''_{xy}= \lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\Delta^2{}_{hk}z,\ z''_{yx}= \lim_{h,k\to 0}\frac{1}{hk}\Delta^2{}_{kh}z\ .\ (7.84)$$

У той же час

$$\Delta^2{}_{hk}z=\Delta_k(\Delta_h z)=\Delta_k[f(x+h,y)-f(x,y)]=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]-[f(x+h,y)-f(x,y)]=$$
$$=[f(x+h,y+k)- f(x,y+k)]- [f(x+h,y)+ f(x,y)];$$

$$\Delta^2{}_{kh}z=\Delta_h(\Delta_k z)=\Delta_h[f(x,y+k)-f(x,y)]=[f(x+h,y+k)- f(x+h,y]-[f(x,y+k)-f(x,y)]=$$
$$=[f(x+h,y+k)- f(x+h,y)]- [f(x,y+k)+ f(x,y)],$$

тобто

$\Delta^2{}_{hk}z=\Delta^2{}_{kh}z$ - *змішані різності не залежать від того, у якому порядку беруться різності.* Звідси з (7.84) і випливає формула (7.83).

Якщо тепер розглядаються похідні ще більш високого порядку, то відповідно до формули (7.83) можна змінювати порядок будь-яких двох диференціювань, які стоять поруч, в результаті чого можна від будь-якого порядку диференціювання перейти до будь-якого іншого; істотно тільки те, скільки разів по якому змінному виконується диференціювання, але не те, у якому порядку.

Наприклад,
$u^{IV}{}_{xxyz}= u^{IV}{}_{xyxz}= u^{IV}{}_{xyzx}= u^{IV}{}_{xzyx}= u^{IV}{}_{zxyz}$ і т.д., але $\neq u^{IV}{}_{xyyz}$.

Часткові диференціали [див. формулу (7.82)] також не залежать від порядку, у якому виконується диференціювання.

Повний диференціал вищого порядку. Повний диференціал будь-якого порядку — це повний диференціал від повного диференціала попереднього порядку. Як і раніше , при наступних диференціюваннях диференціали незалежних змінних треба розглядати як сталі величини.

Нехай, наприклад,

$$z = f(x, y).$$

Тоді

$$dz=z'_x dx+ z'_y dy;$$

$$d^2z =d(dz)=(z'_x dx+ z'_y dy)'_x dx+(z'_x dx+ z'_y dy)'_y dy=$$
$$=z''_{xx}dx^2+z''_{yx}dydx+z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2 (7.85$$

при цьому ми використовували формулу (7.83). Далі

$$d^3z =(z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+ z''_{yy}dy^2)\ '_x dx+(z''_{xx}dx^2+ 2z''_{xy}dxdy+ z''_{yy}dy^2)\ '_y dy=$$
$$=(z'''_{xxx}dx^3+2z'''_{xxy}dx^2dy+z'''_{xyy}\ dxdy^2)+(z'''_{xxy}dx^2dy+2z'''_{xyy}dxdy^2+z'''_{yyy}\ dy^3)=$$
$$= z'''_{xxx}dx^3+3z'''_{xxy}dx^2dy+ 3z'''_{xyy}\ dxdy^2+ z'''_{yyy}\ dy^3.$$

Як і при виведенні формули (5.37), ми бачимо, що обчислення йдуть по тій же схемі, якщо послідовно розкривати дужки у виразах $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ і т.д. У загальному випадку

$$d^nz=\frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n+\binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}\ dy+\binom{n}{2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}\ dy^2+\ldots+\frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n$$

Цей результат можна записати у вигляді символічної формули

$$d^nz=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z\ .$$

де в правій частині треба розкрити дужки так, ніби ∂, ∂x, ∂y, dx і dy були звичайними алгебраїчними множниками. Подібним чином, якщо

$$u=f(x,y,z)\text{ ,то } d^n u=\left(dx\frac{\partial}{\partial x}+dy\frac{\partial}{\partial y}+dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n u \text{ і т.п.}$$

Якщо z=*f (x, y),* але *x* і *y* не є незалежними змінними, то формулу (7.85) треба змінити:

$$d^2z = d(z'_x dx+ z'_y dy)=d(z'_x dx)+d(z'_y dy)=d(z'_x)dx+ z'_x d(dx)+ d(z'_y)dy+ z'_y d(dy)=$$
$$=(z''_{xx}dx+ z''_{xy}dy)dx+ z'_x d^2x + (z''_{yx}dx+ z''_{yy}dy)dy+ z'_y d^2y=$$
$$=(z''_{xx}dx^2+ 2z''_{xy}\,dxdy+ z''_{yy}dy^2+ z'_x d^2x + z'_y d^2y \qquad (7.86)$$

Аналогічно змінюється вираз для подальших диференціалів.

Мікромодуль 16.

Індивідуальні тестові завдання

Знайти часткові похідні наступних функцій

1. $z=x^2\sin^2 y$. 2. $z=x^{y^2}$ 3. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$. 4. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

5. $z=arctg(xy)$ .6. $z=arctg\dfrac{y}{x}$. 7. $z=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$

8. $u=e^{x/y}+e^{z/y}$. 9. $z=\arcsin(x+y)$. 10. $z=arctg\dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Найти повні диференціали від наступних функцій:

11. $z=x^2+xy^2+\sin y$. 12.$z=\ln(xy)$. 13. $z=e^{x^2+y^2}$.

14. $u=tg\,(3x-y)+6^{y+z}$. 15. $w=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

16. Обчислити $f'_x(2,3)$ і $f'_y(2,3)$, якщо $f(x,y)=x^2+y^3$.

17. Обчислити $df(x,y)$ при $x=1$, $y=0$, $dx=1/2$, $dy=1/4$, якщо $f(x,y)=\sqrt{}x^2+y^2$.

18. Скласти формулу, яка дає при малих абсолютних значеннях величин *x, y* і *z* наближений вираз для

$$\sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$$

19. То же для $\sqrt{\dfrac{1+x}{1+y+z}}$

20. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=u+v^2$, $u=x^2+\sin y$, $v=\ln(x+y)$.

21. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, якщо $z=\sqrt{\dfrac{1+u}{1+v}}$, $u=-\cos x$, , $v= \cos x$.

22.Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=e^{u-2v}$, $u= \sin xy$, $v=x^3+y^2$.

23. Знайти повні похідні даних функцій $z=\arcsin(u+v)$, $u=\sin x\cos\alpha$, $v= \cos x\sin\alpha$.

24. $u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $y=a\sin x$, $z= \cos x$

25. $z=\ln(1-x^4)$, $x=\sqrt{xin\theta}$ 26. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

27. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 28. $y^x=x^y$. 29. $\sin(xy)-e^{xy}-x^2y=0$

30. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$; знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$,

31.$u-v\,tg\,aw=0$; знайти $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ і $\dfrac{\partial w}{\partial v}$,

32. $z^2+\dfrac{2}{x}=\sqrt{y^2-z^2}$; показати, що $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{z}$.

33. $\frac{z}{x}$=F$\left(\frac{y}{z}\right)$; показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$, яка б не була функція *F*, яка диференціюється.

Обчислити часткові похідні другого порядку

34. $z=x^3-4x^2y+5y^2$. 35. $z= e^x \ln y+\sin y \ln x$.

36. Довести, що якщо $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

37. Довести, що якщо $z=\frac{x^2y^2}{x+y}$, то $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\frac{\partial z}{\partial x}$.

38. Довести, що якщо $z=\ln (x^2+y^2)$, то $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

39. Довести, що якщо $z=\varphi(a+ax)+\psi(y-ax)$, то $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

при будь-яких двічі диференційовних φ і ψ.

Мікромодуль 17
Застосування часткових похідних

7.17. Скалярне поле

Похідні по напрямленню. Розглянемо в області *D* функцію $u=u(x, y, z)$ і точку $M(x,y, z)$. Проведемо з точки *M* вектор ***S***, напрямляючі косинуси якого cos α, cos β, cos γ (рис. 7.48).

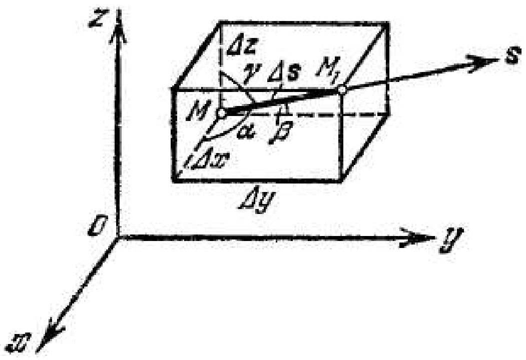


Рис. 7.48 .

На векторі **S,** на відстані Δ*s* від його початку, розглянемо точку

$$M_1(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z).$$

Таким чином,

$$\Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$$

Будемо припускати, що функція *u(x,y,z)* безперервна і має безперервні похідні по своїх аргументах в області *D*.

Повний приріст функції представимо так:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z. \quad (7.90)$$

де ε_1, ε_2 і ε_3 прагнуть до нуля при $\Delta s\to 0$. Розділимо всі члени рівності (7.90) на Δ*s:*

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s}+\varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s}+\varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s}+\varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s}. \quad (7.91)$$

Очевидно, що

$$\frac{\Delta x}{\Delta s}=\cos\alpha,\ \frac{\Delta y}{\Delta s}=\cos\beta,\ \frac{\Delta z}{\Delta s}=\cos\gamma$$

Отже, рівність (7.91) можна переписати так:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma+\varepsilon_1\cos\alpha+\varepsilon_2\cos\beta+\varepsilon_3\cos\gamma. \quad (7.92)$$

Границя відношення $\Delta u/\Delta s$ при $\Delta s \to 0$ називається *похідною від функції $u=u(x, y, z)$ у точці (x, y, z) по напрямленню вектора **S*** і позначається $\partial u/\partial s$, тобто

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial s}. \quad (7.93)$$

Таким чином, переходячи до границі в рівності (7.92), одержимо:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma. \quad (7.94)$$

З формули (7.94) випливає, що, знаючи часткові похідні, легко знайти похідну по будь-якому напрямленню **S**. Самі часткові похідні є частковим випадком похідної по напрямленню. Так, наприклад, при $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=\pi/2$ одержуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos 0 + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\frac{\pi}{2} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Приклад. Задано функцію

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

Знайти похідну $\partial u/\partial s$ в точці $M(1, 1, 1)$:

а) по напрямленню вектора $\mathbf{S_1}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;

б) по напрямленню вектора $\mathbf{S_2}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

Розв'язання.

а) Знаходимо напрямляючі косинуси вектора $\boldsymbol{S_1}$:

$$\cos\alpha = 2/\sqrt{4+1+9} = 2/\sqrt{14},\ \cos\beta = 1/\sqrt{14},\ \cos\gamma = 3/\sqrt{14},$$

Отже,

$$\partial u/\partial s_1 = (\partial u/\partial x)(2/\sqrt{14}) + (\partial u/\partial y)(1/\sqrt{14}) + (\partial u/\partial y)(3/\sqrt{14}).$$

Часткові похідні $\partial u/\partial x=2x$, $\partial u/\partial y=2y$, $\partial u/\partial z=2z$ в точці $M(1, 1,1)$ будуть

$$(\partial u/\partial x)_M = 2,\ (\partial u/\partial y)_M = 2,\ (\partial u/\partial z)_M = 2.$$

Отже,

$$\partial u/\partial s_1 = 2\bullet(2/\sqrt{14}) + 2\bullet(1/\sqrt{14}) + 2\bullet(3/\sqrt{14}) = 12/\sqrt{14}.$$

б) Знаходимо напрямляючі косинуси вектора $\boldsymbol{S_2}$:

$$\cos\alpha = 1/\sqrt{3},\ \cos\beta = 1/\sqrt{3},\ \cos\gamma = 1/\sqrt{3}.$$

Отже $$\partial u/\partial s_2 = 2\bullet(1/\sqrt{3}) + 2\bullet(1/\sqrt{3}) + 2\bullet(1/\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

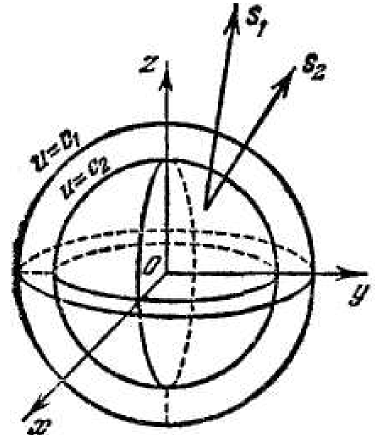


Рис. 7.49.

Помітимо для подальшого, що $2\sqrt{3} > 12/\sqrt{14}$ (рис. 7.49).

Градієнт. Нехай у просторі задана декартова система координат *x, y, z;* тоді стаціонарне скалярне поле можна розглядати просто як функцію $u= u(x,y, z)$. (Для нестаціонарного поля подальші розгляди треба проводити в будь-який, але фіксований момент часу.) Нехай, крім того, у просторі дана деяка точка *M*. Нехай лінія (*L*) виходить із точки *M* по напрямленню *l* (рис. 7.50). Тоді *похідною* від *u* по цьому *напрямленню* називається швидкість зміни поля в даному напрямленні, яка віднесена до одиниці довжини:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{u(N) - u(M)}{\Delta s}. \quad (7.95)$$

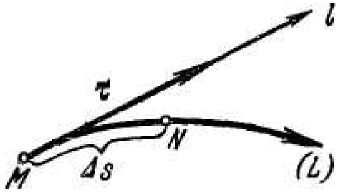


Рис. 7.50.

Для обчислення цієї похідної припустимо, що лінія *(L)* задана в параметричному вигляді $\mathrm{r} = \mathrm{r}(s)$, причому за параметр взята довжина дуги вздовж *(L)*. Тоді значення *u* вздовж *(L)* буде представляти собою складену функцію довжини дуги: *u (s)=u(x(s), y*

$(s), z(s))$. Шукана похідна (7.95) якраз дорівнює похідній du/ds, тобто за правилом диференціювання складеної функції

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Праву частину зручно представити у вигляді скалярного добутку двох векторів :

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\bullet(\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k})$$

Перший з них називається *градієнтом* поля u і позначається

$$\text{grad } u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (7.96)$$

його зміст буде розкритий трохи пізніше. Другий вектор

$\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k}=[d(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})/ds]=dr/ds=\boldsymbol{\tau}$ - це одиничний вектор напрямлення l . Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad } u\bullet \boldsymbol{\tau}. \quad (7.97)$$

Перший множник у правій частині при заданому полі залежить лише від вибору точки M; другий множник залежить лише від напрямлення l. Зокрема, ми бачимо, що $\partial u/\partial l$ не залежить від вибору конкретної лінії (L) серед усіляких ліній, що мають у M задане напрямлення l. (Відзначимо, до речі, що похідна $\partial^2u/\partial l^2$ уже залежить від такого вибору).

Відповідно до формули (7.97) одержуємо

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{пр}_l\,(\text{grad } u)=\text{grad}_l\, u \quad (7.98)$$

(це позначення для проекції градієнта на напрямлення l).

Відзначимо, що похідні u'_x, u'_y і u'_z також є похідними по напрямленню: наприклад, u'_x — це похідна по напрямленню, паралельному осі x.

Приведемо ще корисну формулу, що містить градієнт і засновану на визначенні повного диференціала:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=(\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k})\bullet(dx\mathbf{i}+dy\,\mathbf{j}+dz\,\mathbf{k})=$$

$$=\text{grad } u\bullet d\,(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=\text{grad } u\bullet dr.$$

Нехай задано поле u і точка M; поставимо питання: по якому напрямленню l похідна $\partial u/\partial l$ найбільша? Відповідно до формули (7.98) це питання зводиться до наступного: на якому напрямленні проекція вектора grad u найбільша? Очевидно, що будь-який вектор при проектуванні на різні напрямлення дає саму велику проекцію, яка дорівнює його модулеві, при проектуванні на його власне напрямлення. Таким чином, *вектор* grad *u у точці M вказує у бік найшвидшого зростання поля «u», причому ця найбільша швидкість у розрахунку на одиницю довжини дорівнює* |grad u|; чим швидше міняється поле, тим цей модуль більше.

На рис. 7.51 показані вектори градієнта температури в окремих точках теплопровідного середовища, яке підігрівається зсередини, із заштрихованої зони, і охолоджуваної зовні. Градієнт температури спрямований «до грубки».

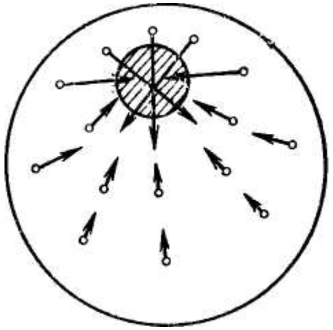


Рис. 7.51.

Отриманий фізичний зміст градієнта показує також, що *градієнт інваріантно зв'язаний з полем, яке ми розглядаємо,* тобто залишається незмінним (інваріантним) при заміні декартових осей. (Цього не було видно з визначення градієнта (7.96), даного в «неінваріантній» формі, «прив'язаної» до якоїсь однієї системи координат.) Більше того, якщо задано поле u, то в кожній точці простору можна знайти напрямлення і швидкість найшвидшого зростання поля u; так можна знайти вектор grad u, не прибігаючи до координат і до завдання $u(x, y, z)$. Отже, градієнт скалярного поля утворить цілком визначене векторне поле.

Аналогічна вимога інваріантості ставиться для всіх основних понять теорії векторного поля. Справа в тому, що при заміні осей декартової системи координат, хоча вектори залишаються незмінними, інваріантними, але їхні проекції міняються. Таким чином, якщо яке-небудь поняття теорії векторного поля сформульовано за допомогою координат або проекцій цього поля, то треба перевірити, як це поняття задовольняє вимозі інваріантості щодо зміни цих координат і проекцій при повороті осей координат.

Покажемо застосування поняття градієнта до обчислення *швидкості зміни поля вздовж траєкторії.* Нехай задано поле u, взагалі говорячи, нестаціонарне, тобто $u=u(x, y, z, t)$. Нехай, далі, задано закон руху $r=r(t)$ деякої частиці M. Якщо розглядати значення u в M по міру руху, то це значення буде являти собою складену функцію часу: $u=u(x(t), y(t), z(t), t)$. Для обчислення шуканої швидкості зміни цього значення можна застосувати перетворення, аналогічні приведеним вище, що дасть значення *повної похідної*

$$\frac{du}{dt}=\text{crad } u\bullet\mathbf{v}+\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{du}{d\tau}v+\frac{du}{dt}.$$

де $\mathbf{v}=\frac{dr}{dt}$ - вектор швидкості руху частиці, а $\frac{du}{d\tau}$ - похідна по напрямленню дотичної до траєкторії.

Якщо поле стаціонарне $\left(\frac{\partial u}{\partial t}=0\right)$, то праворуч залишається тільки перший доданок. Таким чином, воно дає швидкість зміни поля, отриману тільки за рахунок переходу точки M уздовж траєкторії від одних значень u до інших; наприклад, якщо u — температура, то за рахунок переходу з менш нагрітої частини простору в більш нагріту і т.п. Ця швидкість називається *переносною (конвективною).* Другий доданок дає швидкість зміни поля в нерухомій точці, отриману через нестаціонарність поля; ця швидкість називається *місцевою (локальною).* У загальному випадку діють обидва зазначених фактори і швидкість зміни поля уздовж траєкторії складається з переносної і місцевої швидкостей зміни поля.

Встановимо деякі властивості градієнта.

1. *Похідна в даній точці по напрямленню вектора* **S** *має найбільше значення, якщо напрямлення вектора* **S** *збігається з напрямленням градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює* |grad u|.

Справедливість цього твердження безпосередньо випливає з рівності:

$$|\text{grad } u|\cos\varphi=\partial u/\partial s; \quad (7.97)$$

найбільше значення $\partial u/\partial s$ буде при $\varphi=0$, і в цьому випадку

$$\partial u/\partial s=|\text{grad } u|$$

2. *Похідна по напрямленню вектора, перпендикулярного до вектора* grad u, *дорівнює нулеві.*

Це твердження випливає з формули (7.97). Дійсно, у цьому випадку

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\ \cos\varphi=0 \text{ і } \partial u/\partial s=|\text{grad } u|\cos\varphi=0$$

Приклад 1. Задано функцію $u=x^2+y^2+z^2$.

а) Визначимо градієнт у точці $M(1, 1, 1)$. Вираз градієнта цієї функції в довільній точці буде grad $u=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$.

Отже, $(\text{grad } u)_M=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $|\text{grad } u|_M=2\sqrt{3}$.

б) Визначимо похідну від функції u у точці $M(1, 1, 1)$ в напряму градієнта.

Напрямляючі косинуси градієнта будуть

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже,

$$\partial u/\partial s=2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}+2\frac{1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}, \text{ тобто } \partial u/\partial s=|\text{grad } u|.$$

Зауваження. Якщо функція $u=u(x,y)$ є функція двох змінних, то вектор

$\text{grad } u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}$ лежить в площині Oxy.

Приклад 2. Визначити градієнт функції $u=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}$ (рис. 7.52) у точці $M(2,4)$.

Розв'язання. Тут $\partial u/\partial x=x|_M=2$, $\partial u/\partial y=\frac{2}{3}y|_M=\frac{8}{3}$.

Отже

$$\text{grad } u=2\boldsymbol{i}+\frac{8}{3}\boldsymbol{j}$$

Рівняння лінії рівня (рис. 7.53), що проходить через дану точку, буде

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=\frac{22}{3}$$

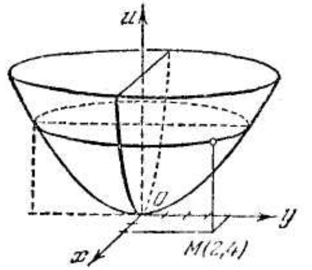


Рис. 7.52.

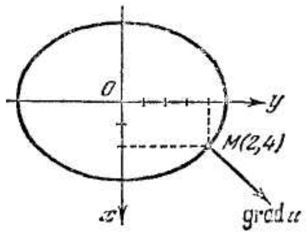


Рис. 7.53.

Поверхні рівня для поля. Поверхні рівня для поля $u(x,y, z)$ — це поверхні, на яких поле має стале значення, $u(x, y, z)$=const; в залежності від фізичного змісту поля вони можуть називатися ізотермічними, ізобаричними і т.п. поверхнями. Між цими поверхнями і градієнтом поля є простий зв'язок: *у кожній точці M градієнт поля нормальний* (тобто перпендикулярний до дотичної площини) *до поверхні рівня, яка проходить через M.*

Дійсно (рис. 7.54), якщо ΔC мале, то поблизу M поверхні $u=C$ і $u=C+\Delta C$ можна вважати майже плоскими і

$$\frac{\partial u}{\partial l}\approx\frac{\Delta u}{\Delta s}=\frac{\Delta C}{\Delta s}$$

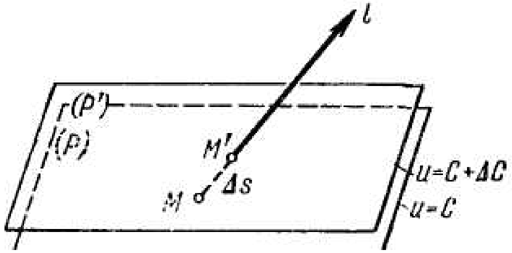


Рис. 7.54.

Але ясно, що Δs буде самим малим, а тому похідна $\partial u/\partial l$– самою великою, якщо l спрямовано по нормалі до поверхні. Звідси і випливає це твердження.

З нього, зокрема, одержуємо розв'язання наступної задачі: знайти *рівняння дотичної площини, проведеної в точці* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до поверхні* (L), *яка має рівняння* $F(x, y, z)=0$. Для розв'язання цієї задачі розглянемо на хвилину поле в просторі, яке визначене по формулі $u=F(x, y, z)$. Тоді (L) буде однієї з поверхонь рівня цього поля, так як на ній u=0. Але тоді вектор

$$(\text{grad } u)_{M_0}=(\partial F/\partial x)_0\,\boldsymbol{i}+(\partial F/\partial y)_0\,\boldsymbol{j}+(\partial F/\partial z)_0\,\boldsymbol{k}$$

(індекс «нуль» вказує, що розглянуті похідні беруться в точці M_0) перпендикулярний до шуканої дотичної площини. Складемо рівняння цієї площини:

$$(\partial F/\partial x)_0(x—x_0)+(\partial F/\partial y)_0\,(y-y_0)+(\partial F/\partial z)_0\,(z-z_0)=0. \quad (7.98)$$

Останнє рівняння можна записати у формі dF=0.

Рівняння поверхні, до якої треба провести дотичну площину, може бути задане у формі $z=f(x, y)$. Тоді досить це рівняння переписати у вигляді $z—f(x, y) = 0$, позначити ліву частина через $F(x, y, z)$ і застосувати результат (7.98):

$$—(\partial f/\partial x)_0\,(x — x_0)\,—(\partial f/\partial y)_0\,(y-y_0)+(z-z_0)=0,$$

тобто

$$z-z_0=(\partial f/\partial x)_0\,(x — x_0)+(\partial f/\partial y)_0\,(y-y_0)\,. \qquad (7.99)$$

Права частина дорівнює повному диференціалові df, і ми одержуємо, таким чином, геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних: він дорівнює приросту третьої координати дотичної площини (рис. 7.55).

Обчислимо як приклад градієнт центрально-симетричного поля

$$u=f(r)\text{ де } r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{s^2+y^2+z^2}$$

У цьому випадку поверхнями рівня служать сфери з центром на початку координат. Якщо взяти дві сфери, радіуси яких відрізняються на dr, то значення функції f на них будуть відрізнятися на df. Тому швидкість зміни поля поперек поверхонь рівня (тобто уздовж радіусів) дорівнює df/ dr, а тому

$$\text{grad}\, u\,(\text{r})= \frac{df}{dr}\,\mathbf{r}^{\circ}=\frac{1}{r}\,\frac{df}{dr}\,\boldsymbol{r}\ ,(7.100),$$

де $\mathbf{r}^{\circ} = \mathbf{r}/\text{r}$ - орт вектора $\boldsymbol{r}$.

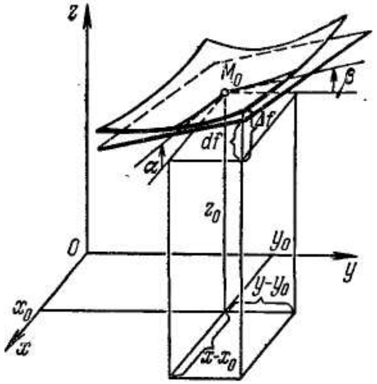


Рис. 7.55.

$\text{tg}\alpha=(df/dx)_0$, $\text{tg}\beta=(df/dy)_0$

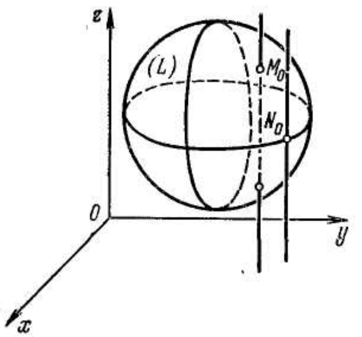


Рис. 7.56.

Неявні функції двох змінних. Неявні функції двох змінних, про які мова йшла раніше, одержують тепер нове висвітлення. Нехай рівняння

$$F(x,y,z) = 0 \qquad (7.101)$$

розглядається поблизу точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, у якій воно задовольняється. Це рівняння визначає в просторі поверхню *(L),* яка проходить через точку M_0. Якщо при цьому $(\partial F/\partial z)_0 \neq 0$, то $(\text{grad}\, F)_{M0}$ у силу формули (7.88) має складову по осі *z*. Тоді перпендикулярна до градієнта дотична площина до *(L)* проходить не вертикально, а значить (рис. 7.56), і прилягаюча до неї поблизу M_0 поверхня *(L)* утворить з віссю *z* додатний кут. Тому *поблизу* M_0 *рівняння* (7.101) *визначає залежність z (x, y).* Ця залежність визначається тільки *локально* (тобто поблизу M_0 або, як говорять, «*в малому»),* так як якщо відійти подалі від M_0, то може виявитися, що при деяких значеннях *x, y* вийде кілька значень *z* або жодного значення *z* (див. рис. 7.56). Відзначимо, що умова існування системи неявних функцій, розглянута раніше, також гарантує існування цих функцій, узагалі говорячи, лише локально.

Якщо $(\partial F/\partial z)_0=0$, то дотична площина до (*L*) розташована в розглянутій точці вертикально, як у точці N_0. Тоді може вийти, що навіть у надзвичайній близькості від N_0 рівняння (7.101) не визначає однозначної функції z *(x, y);* так, поблизу N_0 при одних *x, y* виходить два значення *z*, а при других - ні одного, так як поверхня (*L*) «загортається».

Однак, якщо в N_0, наприклад, $\partial F/\partial y \neq 0$, то поблизу цієї точки рівняння (7.101) визначає функцію *y (x,z).* Тільки в тих точках поверхні *(L),* в яких

$$\partial F/\partial x=0,\ \partial F/\partial y=0,\ \partial F/\partial z=0 \qquad (7.102)$$

може статися, що рівняння (7.101) не визначає, навіть локально, одну з координат як функцію інших.

Точки, у яких задовольняються умови (7.102), називаються *особливими точками* поверхні (*L*). Більшість поверхонь не має особливих точок так як одержувана для їхнього відшукання система чотирьох рівнянь, (7.101) і (7.102), із трьома невідомими, як правило, несумісна. З найбільш відомих поверхонь особливою точкою володіють тільки конічні поверхні: у них особлива точка у вершині.

Плоскі поля. Всі поняття, які введені для просторового поля, переносяться з відповідними спрощеннями на плоскі поля .

Так, градієнт поля *u(x,y),* grad $u=(\partial u/\partial x)\boldsymbol{i}+(\partial u/\partial y)\boldsymbol{j}$ представляє собою вектор, що лежить у площині *x, y.* У кожній точці градієнт поля нормальний до лінії рівня поля, тобто лінії $u(x, y)=\text{const}$, яка проходить через цю точку (рис. 7.57). При цьому зі змісту градієнта випливає, що його модуль приблизно обернено пропорційний відстані між лініями рівня: там, де лінії зближаються, градієнт довше. Рівняння дотичної до лінії

$$f(x,y)=0 \quad (7.103)$$

має вигляд (7.98), але, природно, без третього доданка.

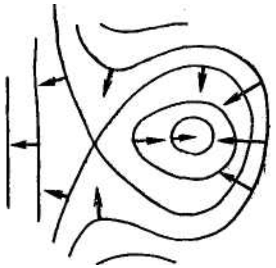


Рис. 7.57 .

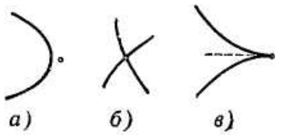


Рис. 7.58.
а)ізольована точка

б) точка самоперерізу
в) точка повернення.

Рівняння (7.103) локально визначає функцію *y(x),* якщо $f'_y \neq 0$. *Особливі точки* на лінії (7.103) - це точки, у яких

$$f'_x=0 \text{ і } f'_y=0. \qquad (7.104)$$

Якщо на хвилину уявити собі поверхню (*L*) з рівнянням *z=f (x, y),* то лінія (7.103) виходить у результаті перерізу *(L)* із площиною z=0. Якщо в якій-небудь точці виконані умови (7.103) і (7.104), то з формули (7.99) випливає, що в цій точці зазначена площина дотикається поверхні *(L).* Далі буде показано, який вигляд має лінія перерізу поверхні зі своєю дотичною площиною поблизу точки дотику. Виявляється, що зазвичай особливі точки лінії є *ізольованими точками, точками самоперерізу* або, рідше, *точками повернення (возврата)* (рис. 7.58).

Огинаюча однопараметричного сімейства ліній. Нехай розглядається сімейство ліній, що залежать від одного параметра *С (однопараметричне сімейство).* Рівняння цих ліній можна записати в загальному вигляді

$$F(x,y;C) = 0, \quad (7.105)$$

причому при кожній конкретній *С* виходить індивідуальна лінія із сімейства. Часто буває, що в деяких частинах площини ці лінії розташовані на зразок того, як показано на рис. 7.59; у цьому випадку сімейство має *огинаючу,* тобто *лінію* (яка, як правило, в сімейство не входить), *кожної точки якої дотикається одна з ліній сімейства.* Щоб знайти рівняння огинаючої, помітимо, що кожна її точка належить одній з ліній сімейства, тобто в кожній такій точці задовольняється рівняння (7.105), однак величина *С* буде в міру руху по огинаючій мінятися, *C=C(x).* Диференціюючи по *x* рівність (7.105) «вздовж огинаючої», одержимо

$$F'_x+F'_y y'_{огин}+F'_C C'_x=0. \quad (7.106)$$

Тут $y'_{огин}$ — кутовий коефіцієнт огинаючої в її довільній точці *М.* Але в цій точці огинаючої дотикається одна з ліній сімейства, яка має такий же кутовий коефіцієнт, тобто $y'_{лінії} = y'_{огин}$; $y'_{лінії}$ знаходиться з рівняння (7.105) диференціюванням при фіксованій С;

$$F_x+F'_y y'_{лінії}=0. \quad (7.107)$$

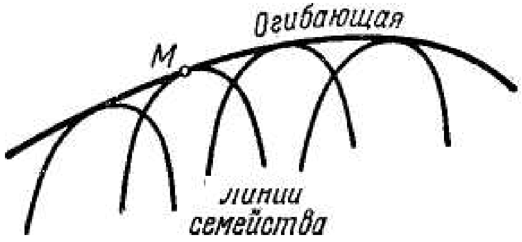


Рис. 7.59.

З (7.106) і (7.107) бачимо, що $F'_C C'_x=0$, але , як було сказано, величина *С (х)* змінна, тобто $C'_x \neq 0$, а тому

$$F'_C(x,y;C)=0. \quad (7.108)$$

Отже, для точок огинаючої поряд з (7.105) виконується співвідношення (7.108). Виключаючи із цих двох рівнянь *С*, одержимо рівняння огинаючої.

Приклад. Розглянемо сімейство траєкторій польоту снаряда при заданій початковій швидкості v_0 і різних кутах пострілу α. Тут параметром сімейства служить α, і тому для знаходження огинаючої (рис. 7.60) продиференціюємо рівняння сімейства

$$y=(tg\alpha)\, x-\frac{gx^2}{2v^2{}_0\cos^2\alpha};$$

по α:

$$0=\frac{x}{\cos^2\alpha}-\frac{gx^2\sin\alpha}{v^2{}_0\cos^3\alpha}$$

Якщо звідси виразити tg α і підставити його в рівняння сімейства, то вийде рівняння огинаючої

$$y=\frac{v_0{}^2}{2g}-\frac{g}{2v^2{}_0}x^2$$

Це означає, що огинаючою служить парабола, яку називають *параболою безпеки* .

Приведемо ще приклад. Так як всі нормалі до евольвенти дотикаються еволюти , то *еволюта є огинаючою сімейства всіх нормалей до евольвенти.* Звідси випливає спосіб наближеної побудови еволюти: треба побудувати кілька нормалей до евольвенти, а потім навести їх огинаючу.

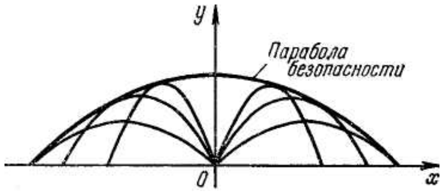


Рис. 7.60.

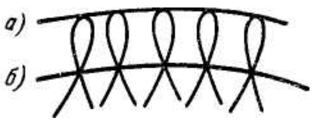


Рис. 7.61.
а) огинаюча;
б)лінія точок самоперерізу.

Треба мати на увазі, що якщо лінії розглянутого сімейства мають особливі точки , то, виключаючи *C* з (7.105) і (7.108), ми поряд із огинаючою одержимо *лінію особливих точок* (рис. 7.60).

Дійсно, як ми бачили , для таких точок $F'_x=F'_y=0$, а тому з (7.106) випливає (7.108), навіть якщо

$$y'_{\text{лінії ос. точок}} \neq y'_{\text{лінії сімейства.}}$$

7.15. Екстремум функції декількох змінних

Формула Тейлора для функції декількох змінних. Розглянемо для визначеності функцію $f(x,\ y)$ двох змінних, хоча аналогічні результати справедливі для будь-якого числа змінних. Виявляється, що формула (6.25), яка має вигляд

$$\Delta f = df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \ldots + \frac{d^n f}{n!} + \ldots,$$

без якої-небудь зміни залишається справедливою і для такої функції f.

Для доведення виберемо довільне напрямлення, що виходить із точки (a; b) у площині аргументів і позначене на рис. 7.62 стрілкою.

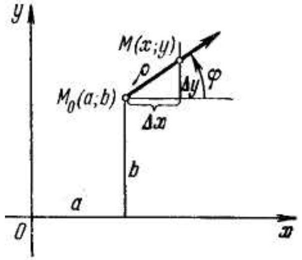


Рис. 7.62,

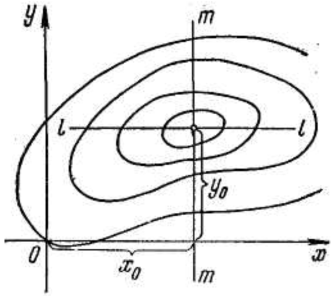


Рис. 7.63.

Вздовж цього напрямлення функція f залежить від одного аргументу ρ, тобто $f(x,\ y) = f^*(\rho)$. До функції f^* можна застосувати формулу(6.25). При цьому $\Delta f^*=\Delta f$, але при з'ясуванні зв'язку між диференціалами функцій f^* і f, треба врахувати наступне. Так як (рис. 7.62)

$$x=a+\rho\cos\varphi;\ y=b+\rho\sin\varphi \quad (a,b,\varphi = \text{const}), \ (7.109)$$

то

$$f^*(\rho)=f(x,y)=f(a+\rho\cos\varphi,\ b+\rho\sin\varphi).$$

Таким чином, якщо при складанні $df,\ d^2f$ ... змінні x і y вважаються незалежними, то при складанні $df^*,\ d^2f^*$, ... вони вважаються залежними від ρ. Як відомо , для диференціала першого порядку це несуттєво, тобто $df^*=df$, але для наступних диференціалів це, узагалі говорячи, істотно. Однак у розглянутому випадку з формул (7.106) бачимо, що

$$d^2x = d^3x = \ldots = 0;\ d^2y = d^3y = \ldots = 0;$$

Тому з формул (7.85) і (7.86) випливає, що $d^2f^* = d^2f$, і аналогічно $d^3f^* = d^3f$ і т.д.

Таким чином, з формули (6.25) для функції f^* автоматично випливає справедливість цієї ж формули для функції $f\ (x,\ y)$.

При застосуваннях цієї формули її зазвичай обривають, залишаючи лише один або два члени. Тоді виходить

$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a,b)h+f'_y(a,b)k+$члени не менш другого порядку малості (у порівнянні з h і k) . (7.110)

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+f'_x(a,b)h+f'_y(a,b)k+\frac{1}{2}\,[f''_{xx}(a,b)h^2+2\,f''_{xy}\,(a,b)hk+$$

$+f''_{yy}(a,b)k^2]$+члени не менш третього порядку малості. (7.111)

Як і для функцій одного змінного, формулами (7.110) і (7.111) можна користуватися, якщо $|h|$ і $|k|$ малі, у протилежному випадку формули можуть призвести до помилкових висновків. В усіх випадках застосування формули Тейлора, зазвичай, передбачається, що розглянуті похідні існують і вони є кінцеві.

Екстремум. Як і в попередньому пункті, ми будемо для простоти вважати, що розглядається функція двох змінних $z=f(x, y)$. Визначення *екстремума* дається аналогічно випадкові функцій одного змінного . Наприклад, ми говоримо, що функція має *максимум* «у точці» (тобто при значеннях) $x=x_0$, $y=y_0$, якщо значення $f(x_0, y_0)$ більше всіх «сусідніх» значень функції f, тобто значень $f(x, y)$ при x, досить близьких до x_0, і y, досить близьких до y_0.

У цьому пункті ми будемо розглядати тільки *внутрішні екстремуми,* тобто точки екстремума, що лежать усередині області визначення функції f, причому будемо вважати, що сама функція f і її часткові похідні не мають розривів. Приблизний вигляд сімейства ліній рівня біля точки екстремума показано на рис. 7.63.

Легко вивести необхідну умову екстремума: якщо зафіксувати $y=y_0$ і змінювати x, тобто на рис. 7.63 проходити вздовж прямої ll, то функція f буде мати при $x=x_0$ екстремум. Але при такому розгляді функція $f = f(x, y_0)$ буде залежати тільки від x і тому $f'_x(x_0, y_0)=0$; похідна часткова, так як вона береться при фіксованому y. Аналогічно розглядається випадок проходження по прямій при $x=x_0$, і ми одержуємо *необхідні умови екстремума:*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \qquad (7.112)$$

(для функцій більшого числа змінних треба прирівняти нулеві *всі* часткові похідні першого порядку). Точка (в площині аргументів), в якій виконуються умови (7.112), називається *стаціонарною точкою* функції f. Таким чином, в припущеннях, зазначених в попередньому абзаці, *усі точки екстремума функції f є її стаціонарними точками.*

Зворотно, нехай у функції $f(x, y)$ знайдена яка-небудь стаціонарна точка $(x_0;y_0)$; чи буде вона точкою екстремума? Якщо в якій-небудь області стаціонарна точка є тільки одна, а існування там екстремума випливає з фізичних або яких-небудь інших розумінь, то ясно, що відповідь стверджувальна. В інших випадках приходиться звертатися до достатніх умов екстремума, до яких ми і переходимо.

Як відомо, для функції $f(x)$ однієї змінної необхідна умова $f'(x_0)=0$ екстремума є «майже достатньою»: наприклад, якщо $f''(x_0)\neq 0$, то в точці $x=x_0$ обов'язково буде екстремум. Можна було б очікувати, що і для функції двох змінних при виконанні умови (7.112) екстремум у точці $(x_0; y_0)$ обов'язково буде, якщо в ній часткові похідні другого порядку відмінні від нуля. Це , узагалі говорячи, не обов'язково: так, функції декількох змінних представляють випадки принципово нового типу.

Так, «графік» функції $z=f(x, y)=x^2+y^2$ показаний на рис. 3.71. Умови (7.112) дають єдину стаціонарну точку (0; 0). Ясно, що в ній буде мінімум, так як $z(0, 0) = 0$, а в інших точках $z>0$. Принципово інший випадок буде для функції $z = -x^2+y^2$, «графік» якої показано на рис. 3.72. І тут єдиною стаціонарною точкою служить початок координат. При $x=0$ одержуємо $z = y^2$, тобто від початку координат вздовж осі y функція в обидва боки зростає, а на самому початку має мінімум. Якщо ж $y=0$, то $z=-x^2$, тобто вздовж осі x функція в обидва боки убуває, а на самому початку має максимум. Якщо розглядати інші прямі, які проходять через початок координат, то вздовж одних з них функція має на початку максимум, а вздовж інших — мінімум. Такий випадок називається *мінімакс,* і тут екстремума на початку координат не буде, хоча необхідні умови (7.112) виконуються і часткові похідні другого порядку не всі дорівнюють нулеві.

Перейдемо від розглянутих прикладів до функцій загального вигляду. Припустимо, що в деякій точці $(x_0; y_0)$ виконуються умови (7.112), і ми хочемо з'ясувати, чи дійсно функція f має в цій точці екстремум. Тоді варто скористатися формулою Тейлора (7.111), поклавши в ній $a=x_0$, $b=y_0$; одержимо

$$\Delta f=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)hk+f''_{yy}(x_0,y_0)k^2]$$

+ члени не менш третього порядку малості.

Члени першого порядку відсутні через умови стаціонарності (7.112). Так як при малих $|h|$, $|k|$ члени третього порядку значно менше членів другого порядку, то знак всієї правої частини визначається знаком суми членів другого порядку малості, тобто знаком квадратичної форми

$$P(h,k)=f''_{xx}(x_0,y_0)h^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)hk+f''_{yy}(x_0,y_0)k^2. \quad (7.113)$$

Ми не пишемо коефіцієнт 1/2, так як він для з'ясування знака несуттєвий. Таким чином, *якщо ця сума додатна при всіх h, k* (звичайно, крім значень $h=k=0$, коли вона дорівнює нулеві), *то в точці (x_0; y_0) буде мінімум,* так як тоді при досить малих $|h|$, $|k|$ буде $\Delta f>0$, тобто $f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$. *Якщо ця сума від'ємна, то в точці (x_0; y_0) буде максимум. Якщо ця сума може приймати значення обох знаків, то в точці (x_0; y_0) буде мінімакс і екстремума не буде.* Єдиний випадок, коли по сумі членів другого порядку не можна судити про наявність екстремума, той, коли ця сума знака змінювати не може, але може обертатися в нуль (зокрема, якщо вона цілком відсутня). Тоді формулу Тейлора треба продовжити, виписавши члени третього порядку, і провести аналогічне дослідження суми цих членів при тих значеннях *h, k,* при яких сума членів другого порядку дорівнює нулеві. Ми не будемо тут цього робити.

Отримані висновки формулюються зовсім аналогічно для функцій будь-якого числа змінних. Однак для функцій двох змінних легко піти далі й одержати достатні ознаки екстремума, виражені безпосередньо через значення похідних другого порядку в точці (x_0; y_0). Для цього винесемо в правій частині (7.113) h^2 за дужки і позначимо $k/h = t$. Тоді одержимо

$$P(h,k)= [(f''_{xx})_0+2 (f''_{xy})_0 t+ (f''_{yy})_0 t^2]\, h^2 \quad (7.114)$$

(індекс «нуль» вказує на те, що значення похідних беруться в розглянутій стаціонарній точці (x_0; y_0)). З елементарної алгебри відомо, що якщо дискримінант

$$(f''_{xy})^2_0-(f''_{xx})_0(f''_{yy})_0>0, \quad (7.115)$$

то многочлен відносно t, який стоїть в квадратних дужках, має два дійсних нулі, при переході через які він змінює знак. Виходить, це — випадок *мінімакса.* Якщо ж $(f''_{xy})^2_0-(f''_{xx})_0(f''_{yy})_0<0$, то зазначений многочлен має уявні нулі і тому знака не змінює. Виходить, це - випадок екстремума. Щоб дізнатися, який саме знак має права частина (7.114), покладемо $t=0$. Ми бачимо, що якщо

$$(f''_{xy})^2_0-(f''_{xx})_0(f''_{yy})_0<0,\ (f''_{xx})_0>0, \quad (7.116)$$

то права частина (7.114) додатна при всіх t і тому в силу попереднього абзацу функція f має в точці (x_0; y_0) *мінімум.* Якщо ж

$$(f''_{xy})^2_0-(f''_{xx})_0(f''_{yy})_0<0,\ (f''_{xx})_0<0, \quad (7.117)$$

то функція f має *максимум.* Нарешті, якщо

$$(f''_{xy})^2_0-(f''_{xx})_0(f''_{yy})_0=0, \quad (7.118)$$

то многочлен (7.114) має подвійний корінь, а тому знака не змінює, але може обернутися в нуль; це — *невизначений випадок.*

Розглянемо ряд прикладів

Приклад 1. Дослідити на максимум і мінімум функцію

$$z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1.$$

Розв'язання. 1) Знаходимо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y+3,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y-2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned} 2x-y+3=0 \\ -x+2y-2=0 \end{aligned}\right\}$$

одержуємо: $x=—4/3$, $y=1/3$.

2) Знаходимо похідні другого порядку в критичній точці (— 4/3; 1/3) і визначаємо характер критичної точки:

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\ B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\text{-}1,\ C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\ \ AC\text{-}B^2=2\bullet 2\text{-}(\text{-}1)^2=3>0.$$

Отже, у точці (—4/3,1/3) дана функція має мінімум, а саме: z_{min}=-4/3.

Приклад 2. Дослідити на максимум і мінімум функцію $z=x^3+y^3-3xy$.

Розв'язання. 1)Знаходимо критичні точки:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y=0, \\ \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x=0. \end{aligned}\right\}$$

Звідси одержуємо дві критичні точки: $x_1=1$, $y_1 = 1$ *і* $x_2 = 0$, $y_2 = 0$.

2) Знайдемо похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y.$$

3) Досліджуємо характер першої критичної тічки:

$$A=0,\ B=-3,\ C=0;\ AC-B^2=-9<0.$$

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6,\ B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=-3,\ C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=1\\y=1}}=6,$$

$$AC-B^2=36-9=27>0;\ A>0.$$

Отже, у точці (1;1) дана функція має мінімум, саме: z_{min}=-1.

4) Досліджуємо характер другої критичної точки $M_2(0,0)$:

$$A=0,\ B=-3,\ C=0;\ AC-B^2=-9<0.$$

Отже, у другій критичній точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму (мінімакс).

Кривизна поверхонь. Класифікація стаціонарних точок, яка визначена в попередньому пункті, безпосередньо зв'язана з класифікацією поверхонь.Розглянемо довільну поверхню (S) і на ній деяку точку M (рис. 7.64). Якщо провести через цю точку нормаль *пп* до поверхні, а потім через цю нормаль довільну площину *(P),* то ця площина перетне (S) по деякій лінії *ll*, *нормальному перерізу,* що має в точці M визначену кривизну k. Якщо тепер повертати площину *(P)* навколо нормалі *пп,* то нормальний переріз буде мінятися і тому величина k теж, узагалі говорячи, буде мінятися. Щоб з'ясувати закон цієї зміни, виберемо систему декартових координат так, щоб початок координат знаходився в точці M, а вісь z пішла по нормалі *пп.* Тоді поблизу M рівняння поверхні *(S)* можна представити у вигляді $z=z\ (x, y)$, причому значення z (0, 0) буде стаціонарним . Розмірковуючи, як і в кінці попереднього пункту, ми одержимо, що після деякого повороту осей координат навколо *пп* рівняння поверхні (S) прийме вигляд

$$z=1/2\ (\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2)+\text{члени вищого порядку малості.} \qquad (7.119)$$

Нехай площина *(P)* утворить із площиною $x'Mz$ кут φ; тоді, переходячи до полярних координат, одержимо

$$x'=\rho\ cos\ \varphi,\quad y'=\rho\ sin\ \varphi,$$

звідки

$$z=1/2\ (\lambda_1 cos^2\varphi+\lambda_2 sin^2\varphi)\ \rho^2+...,$$

тобто в точці M буде

$$dz/d\rho=0,\ d^2z/d\rho^2=\lambda_1 cos^2\varphi+\lambda_2 sin^2\varphi.$$

Використовуючи формулу $k=|y''|/(1+y'^2)^{3/2}$

одержуємо шуканий вираз для кривизни $k=|\lambda_1 cos^2\varphi+\lambda_2 sin^2\varphi|$.

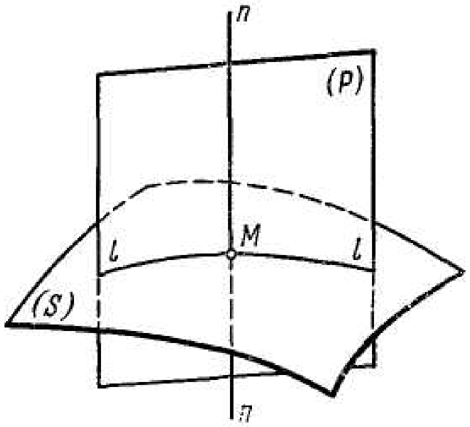


Рис. 7.64.

При цьому можливі наступні випадки *(три типу точок у поверхонь):*

1. Нехай $\lambda_1\lambda_2>0$, тобто λ_1 і λ_2 мають однаковий знак. Тоді всі нормальні перерізи поблизу M вигнуті в одну сторону, причому величина k знаходиться між $|\lambda_1|$ і $|\lambda_2|$, причому $k=|\lambda_1|$ для φ=0, тобто для площини $x'Mz$, і $k=|\lambda_1|$ для φ=π/2 тобто для площини $y'Mz$ (це — *головні нормальні перерізи).* Така точка M називається *еліптичною* (а при $|\lambda_1|=|\lambda_2|$—*сферичною)* точкою поверхні (S); наприклад, у еліпсоїда або у двополостного гіперболоїда всі точки еліптичні. Як видно з рівняння (7.119), дотична площина до (S) у точці M має поблизу M з *(S)* тільки одну загальну точку M; паралельні їй площини спочатку дають у перерізі з *(S)* нескінченно малий еліпс, осі якого розташовані по головних нормальних перерізах, а потім форма перерізу може стати більш складною (рис. 7.65, *а).*

2. Нехай $\lambda_1\lambda_2<0$. Тоді деякі нормальні перерізи вигнуті поблизу M в одну сторону і мають в M додатну кривизну, а деякі— в іншу сторону і також мають в M додатну кривизну; так буде, наприклад, для точок однополостного гіперболоїда. Серед перших нормальних перерізів один має найбільшу кривизну $|\lambda_1|$, а серед других— один має найбільшу кривизну $|\lambda_2|$. Ці головні нормальні перерізи також взаємно перпендикулярні. Точка M називається *гіперболічною.* Дотична площина до (S) у точці M перерізає (S) по двох лініях, які пересікаються в M під додатним кутом; нескінченно близькі паралельні до неї площини дають в

перерізі в нескінченній близькості *M* гіперболи з осями по головним нормальним перерізам (рис. 7.65, б).

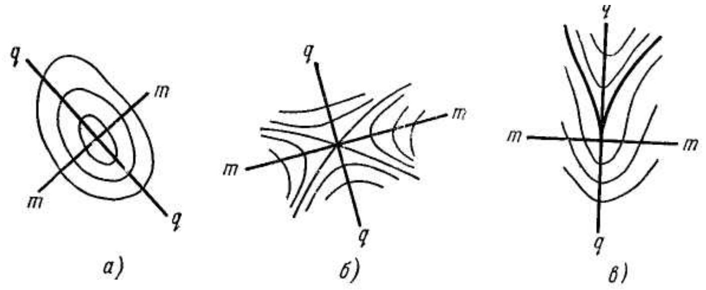


Рис. 7.65.
mm і *qq* — головні нормальні перерізи.

3. Нехай $\lambda_1\lambda_2=0$. Тоді якщо λ_1 і λ_2 не обидві дорівнюють нулеві, то всі нормальні перерізи вигнуті поблизу *M* в одну сторону і мають у *M* додатну кривизну, але один має нульову кривизну в *M,* а перпендикулярний переріз має в *M* найбільшу кривизну. Точка називається *параболічною;* наприклад, у циліндричної або конічної поверхні всі точки параболічні. Типова картина перерізів *(S)* із площинами, паралельними дотичної площини в *M,* показана на рис. 7.65, *в*, але досить часто бувають і інші картини. До цього ж типу належить і той випадок, коли $\lambda_1=\lambda_2=0$, тобто $k=0$ при всіх φ. Такі точки називаються *точками сплощення* поверхні (*S*), так як зрозуміло, що у площини всі точки будуть такими. У приведених прикладах поверхонь всі точки мали однаковий тип. Але це необов'язково, наприклад, у *тора,* тобто бублика ідеальної форми, є точки всіх трьох типів. В усіх випадках добуток $\lambda_1\lambda_2$ називається *повною (гауссовою) кривизною поверхні (S) в точці M.* Повна кривизна володіє тією чудовою властивістю, що коли поверхня вигинається без розтягнень, то ця кривизна не міняється. Наприклад, якщо лист паперу зігнути довільним способом, то отримана поверхня буде мати в кожній своїй точці нульову повну кривизну. По цій же причині ніякий шматок сфери не можна розкласти на площині без деформації, тобто неможливі географічні карти без похибок.

Поверхня може мати *особливі точки* (ними зазвичай служать або *ізольовані точки,* або «*конічні*» *точки,* як вершини у кругового конуса, хоча бувають особливі точки і набагато більш складного

вигляду), а також цілі *особливі лінії* (це найчастіше *ізольовані лінії* або *лінії самоперерізу;* бувають також «*ребра повернення (возврата)*» і інші види). Часто розглядаються *поверхні* «*із краєм*», тобто вирізані з більш повної поверхні на зразок шматка площини або шматка сфери.

7.16. Максимум і мінімум функції декількох змінних, зв'язаних даними рівняннями (умовні максимуми і мінімуми)

У багатьох задачах на пошук найбільших і найменших значень функції питання зводиться до пошуку максимумів і мінімумів функції від декількох змінних, котрі не є незалежними, а зв'язані одні з одними деякими додатковими умовами (наприклад, вони повинні задовольняти даним рівнянням).

Розглянемо, наприклад, таку задачу. З даного шматка жерсті площею $2a$ треба зробити закриту коробку у формі паралелепіпеда, який має найбільший об'єм .

Позначимо довжину, ширину і висоту коробки через *x, y,* z Задача зводиться до пошуку максимуму функції $v=xyz$ за умови, що

$$2xy+2xz+2yz = 2a.$$

Тут ми маємо задачу на *умовний екстремум:* змінні *x, y, z* зв'язані умовою $2xy+2xz+2yz=2a$. В цьому розділі ми розглянемо методи розв'язання таких задач.

Розглянемо спочатку питання про умовний екстремум функції двох змінних, якщо ці змінні зв'язані однією умовою.

Нехай потрібно знайти максимуми і мінімуми функції

$$u=f(x\,,y) \qquad (7.120)$$

за умови, що *x* і *y* зв'язані рівнянням

$$\varphi\,(x,\,y) = 0. \quad (7.121)$$

При наявності умови (7.121) із двох змінних *x* і *y* незалежною буде тільки одна, наприклад *x,* так як *y* визначається з рівності (7.121) як функція від *x.* Якби ми розв'язали рівняння (7.121) відносно *y,* то, вставляючи в рівність (7.120) замість *y* знайдений вираз, одержали би функцію однієї змінної *x* і звели би задачу до задачі про дослідження на максимум і мінімум функції однієї незалежної змінної *x.*

Але можна розв'язати поставлену задачу, не розв'язуючи рівняння (7.121) відносно *x* або *y.* При тих значеннях *x,* при яких функція *u* може мати максимум або мінімум, похідна від *u* по *x* повинна обертатися в нуль.

З (7.120) знаходимо du/dx, пам'ятаючи, що y є функція від x:

$$du/dx=(\partial f/\partial x)+(\partial f/\partial y)(dy/dx).$$

Отже в точках екстремума

$$(\partial f/\partial x)+(\partial f/\partial y)(dy/dx)=0. \quad (7.122)$$

З рівності (7.121) знаходимо

$$\partial\varphi/\partial x+[(\partial\varphi/\partial y)(dy/dx)]=0. \quad (7.123)$$

Ця рівність задовольняється для всіх x і y, які задовольняють рівнянню (7.121).

Помноживши члени рівності (7.123) на невизначений поки коефіцієнт λ і склавши їх з відповідними членами рівності (7.122), одержимо:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

або

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0. \quad (7.124)$$

Остання рівність виконується у всіх точках екстремума. Підберемо λ так, щоб для значень x і y, які відповідають екстремуму функції u, друга дужка в рівності (7.124) обернулася в нуль:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}=0$$

(Для визначеності будемо припускати, що в критичних точках $\frac{\partial\varphi}{\partial y}\neq 0$)

Але тоді при цих значеннях x і y з рівності (7.124) випливає рівність

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

Таким чином, виходить, що в точках екстремума задовольняються три рівняння:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\end{aligned}\right\} \quad (7.125)$$

з трьома невідомими x, y, λ. З цих рівнянь визначаємо x, y і λ, яке грало тільки допоміжну роль і нам надалі не потрібне.

З висновку випливає, що рівняння (7.125) є *необхідними умовами умовного екстремума,* тобто в точках екстремума задовольняються рівняння (7.125). Але не при всяких x і y (і λ), які задовольняють рівнянням (7.125), буде мати місце умовний екстремум. Потрібне додаткове дослідження характеру критичної точки. При розв'язані конкретних задач іноді вдається установити характер критичної точки на підставі суті задачі. Відмітимо, що ліві частини рівнянь (7.125) суть часткові похідні функції

$$F(x,y,z)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y) \quad (7.126)$$

по змінним x, y, λ.

Таким чином, для того щоб знайти значення x і y, які задовольняють умові (7.121), при яких функція $u=f(x, y)$ може мати умовний максимум або умовний мінімум, потрібно скласти допоміжну функцію (7.126), прирівняти нулеві її похідні по x, y і λ і з отриманих трьох рівнянь (7.125) визначити шукані x, y (і допоміжний множник λ). Розглянутий метод поширюється на дослідження умовного екстремума функції будь-якого числа змінних.

Нехай потрібно знайти максимуми і мінімуми функції n змінних $u=f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умови, що змінні $x_1, x_2,\ldots, x_n$ зв'язані m $(m<n)$ рівняннями:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_1(x_{1,}x_2,\ldots,x_n)=0,\\ &\varphi_2(x_{1,}x_2,\ldots,x_n)=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\varphi_m(x_{1,}x_2,\ldots,x_n)=0\end{aligned}\right\} \quad (7.127)$$

Для того щоб знайти значення $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при яких можуть бути умовні максимуми і мінімуми, потрібно скласти функцію

$$F(x_1, x_2,\ldots, x_{n,}\, \lambda_{1,\ldots}\, \lambda_m)=f(x_1, x_2,,\ldots, x_n)+\lambda_1\varphi_1(x_1, x_2,\ldots, x_n)+$$
$$+\lambda_2\varphi_2(x_1, x_2,\ldots, x_n)+\ldots+\lambda_m\varphi_m(x_1, x_2,\ldots, x_n),$$

прирівняти нулеві її часткові похідні по $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1}=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}+\lambda_1\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}+...+\lambda_m\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n}=0,\end{array}\right\} \qquad (7.128)$$

і з $m+n$ рівнянь (7.127) і (7.128) визначити $x_1, x_2, ..., x_n$ і допоміжні невідомі $\lambda_1, ...,\lambda_m$. Так само як і для функції двох змінних, питання про те, чи буде при знайдених значеннях функція мати максимум або мінімум або не буде мати ні того, ні іншого, ми в загальному випадку залишаємо відкритим. Це питання ми будемо вирішувати на підставі допоміжних міркувань.

Приклад 1. Повернемося до задачі, сформульованої на початку цього розділу: знайти максимум функції $v=xyz$ за умови, що

$$xy+xz+yz-a=0 \qquad (x>0,\ y>0,\ z>0). \qquad (7.129)$$

Складемо допоміжну функцію

$$F(x,y,z)= xyz+\lambda(xy+xz+yz-a)$$

Знайдемо її часткові похідні і прирівняємо їх нулеві:

$$\left.\begin{array}{l}yz+\lambda(y+z)=0,\\ xz+\lambda(x+z)=0,\\ xy+\lambda(x+y)=0.\end{array}\right\} \qquad (7.130)$$

Задача зводиться до розв'язання системи чотирьох рівнянь (7.129) і (7.130) з чотирма невідомими (x, y, z і λ). Для розв'язання цієї системи помножимо перше з рівнянь (7.130) на x, на y, на z і складемо їх; приймаючи до уваги рівність (7.129), знаходимо $\lambda=-3xyz/2a$. Вставляючи в рівняння (7.130) знайдене значення λ, одержимо:

$$\left.\begin{array}{l}yz\left[1-\dfrac{3x}{2a}(y+z)\right]=0,\\ xz\left[1-\dfrac{3y}{2a}(x+z)\right]=0\\ xy\left[1-\dfrac{3z}{2a}(x+y)\right]=0\end{array}\right\}$$

Так як x, y, z за змістом задачі відмінні від нуля, то з останніх рівнянь маємо:

$$\frac{3x}{2a}(y+z)=1,\ \frac{3y}{2a}(x+z)=1,\ \frac{3z}{2a}(x+y)=1,$$

З перших двох рівнянь знаходимо $x= y$, із другого і третього рівнянь $y=z$. Але в такому випадку з рівняння (7.129) одержуємо $x=y=z=\sqrt{a/3}$. Це— єдина система значень x, y і z, при яких може бути максимум або мінімум.

Можна довести, що отримане розв'язання дає максимум. Утім, це ясно і з геометричних міркувань (в умовах задачі об'єм коробки не може бути необмежено великим; отже, природно очікувати, що при якихось визначених значеннях сторін цей об'єм буде найбільшим).

Отже, для того щоб об'єм коробки був найбільшим, ця коробки повинна бути кубом, ребро якого дорівнює $\sqrt{a/3}$.

Приклад 2. Визначити найбільше значення кореня n-го степеня з добутку чисел $x_1, x_2, ...,x_n$ за умови, що їхня сума дорівнює даному числу a. Отже, задача ставиться так: потрібно знайти максимум функції

$$u=\sqrt[n]{x_1...x_n}$$

за умови

$$x_1+x_2+...+x_n-a=0 \quad (x_1>0,\ x_2>0,...,\ x_n>0)\ . \ (7.131)$$

Утворимо допоміжну функцію

$$F(x_1+x_2+...+x_n,\lambda)= \sqrt[n]{x_1...x_n}+\lambda(x_1+x_2+...+x_n-a).$$

Знаходимо її часткові похідні:

$$F'_{x_1}=\frac{1}{n}\,\frac{x_2x_3\ldots x_n}{\left(x_1\ldots x_n\right)^{\frac{n-1}{n}}}+\lambda=\frac{1}{n}\,\frac{u}{x_1}+\lambda=0 \quad \text{або } u=-n\lambda x_1,$$

$$F'_{x_2}=\frac{1}{n}\,\frac{u}{x_2}+\lambda=0 \qquad \text{або } u=-n\lambda x_2$$

………………………………………………………….

$$F'_{x_n}=\frac{1}{n}\,\frac{u}{x_n}+\lambda=0 \qquad \text{або } u=-n\lambda x_n$$

З останніх рівностей знаходимо: $x_1=x_2=\ldots=x_n$, а на підставі рівняння (7.131) одержуємо: $x_1=x_2=\ldots=x_n=a/n$.

За змістом задачі ці значення дають максимум функції $\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}$ рівний a/n.

Таким чином, для будь-яких додатних чисел x_1 x_2 ...,x_n, зв'язаних співвідношенням $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, виконується нерівність

$$\sqrt[n]{x_1\ldots x_n}\le a/n. \quad (7.132)$$

(так як, по доведеному, a/n є найбільшим значенням цієї функції). Підставляючи тепер у нерівність (7.132) замість a її значення, яке отримано з рівності (7.131), знайдемо;

$$\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}\le\frac{x_1+\ldots+x_n}{n} \quad . \qquad (7.133)$$

Ця нерівність справедлива для будь-яких додатних чисел x_1, x_2, ... x_n. Вираз, який стоїть в лівій частині співвідношення (7.133), називається *середнім геометричним* цих чисел. Таким чином, середнє геометричне декількох додатних чисел не більше їх середнього арифметичного.

Розв'язання задач на умовний екстремум лежить в основі одного з методів чисельного знаходження безумовних екстремумів, а саме, *методу найшвидшого спуску.* Ми опишемо один з варіантів цього методу на прикладі функції двох змінних, хоча в принципі він може бути застосований для будь-якого числа змінних. Нехай потрібно знайти точку мінімуму функції $f(x, y)$. Виявляється, що для скільки-небудь складеної функції f розв'язати систему рівнянь (7.112) досить важко, тай до того ж при цьому виконується зайва робота на пошук стаціонарних точок, що не є точками мінімуму. Тому можна застосувати наступний ітераційний метод.

Починаємо з якого-небудь нульового наближення M_0 (x_0; y_0). У цій точці функція убуває швидше всього по напрямленню

$$-\text{grad}\, f=-f'x(x_0,y_0)\mathbf{i}-f'y(x_0,y_0)\mathbf{j}\ .$$

Через точку M_0 проводимо промінь в цьому напряму, тобто розглядаємо значення $f(x_0-f'_{x0}t,\ y_0-f'_{y0}t)$ як функцію від $t>0$ і знаходимо значення t, при якому ця функція одної змінної має мінімум. Це значення визначає точку M_1 (x_1; y_1), через яку проводимо промінь в напряму —(grad $f)_{M1}$, шукаємо на ньому точку умовного мінімуму f і т.д. В багатьох випадках після декількох кроків ми одержуємо шукану точку безумовного мінімуму з необхідною точністю. Подібні методи пошуку екстремумів без звернення до необхідних умов називаються *прямими методами.*

Екстремум з обмеженнями. На незалежні змінні можуть бути накладені одне або кілька співвідношень, що мають вигляд нерівностей; такі співвідношення називаються *обмеженнями* . Нехай, наприклад, шукається екстремум функції $f(x, y)$, причому незалежні змінні зв'язані обмеженням $F(x, y)\geq 0$, яке визначає в площині x, y деяку область *(S)* із границею *(L)* (рис. 7.66), на якій $F\equiv 0$. Функція f може мати як *внутрішні* екстремуми, які досягаються всередині *(S)*, так і граничні екстремуми, які досягаються на *(L)*.

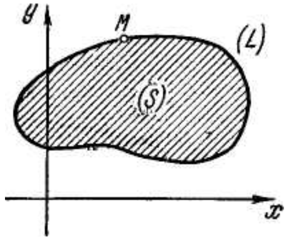


Рис. 7.66.

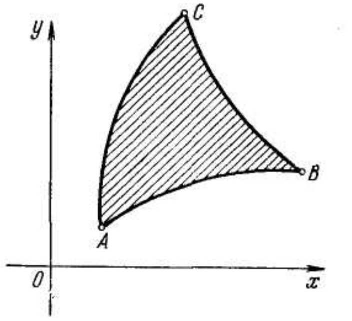


Рис. 7.67.

Для пошуку перших можна скористатися умовами стаціонарності (7.112); однак для граничних екстремумів ці умови не діють. Для пошуку граничних екстремумів можна помітити, що якщо в деякій точці M (рис. 7.66) функція f має екстремум, наприклад мінімум, то значення $f(M)$ менше всіх значень f на *(L)* поблизу M. Тому в точці M одночасно досягається мінімум f за умови $F=0$.

Отримані результати можна застосувати *для пошуку найбільшого і найменшого значень функції декількох змінних.* Наприклад, нехай функція $z=f(x, y)$ розглядається в області, яка зображена на рис. 7.67, причому припустимо, що ні функція, ні її похідні не мають у цій області розривів.

Якщо точка, в якій функція приймає найбільше значення, знаходиться всередині області, то в цій точці буде безумовний максимум функції. Якщо ця точка знаходиться на контурі, але не в вершинах *A, B,* C, то в ній буде умовний максимум, при цьому шукається максимум функції $z=f(x,y)$ за умови, що змінні x і y зв'язані співвідношенням $F(x,y)=h$. За це співвідношення потрібно взяти рівняння відповідної дуги контуру. Нарешті, найбільше значення може досягатися у вершинах *A, B* або *C.*

Таким чином, для відшукання цього значення треба знайти всі точки безумовного максимуму всередині області і всі точки умовного максимуму (або навіть усі точки можливого умовного екстремуму, якщо заздалегідь важко сказати, які саме з цих точок будуть точками максимуму) на контурі і порівняти значення функції f у всіх цих точках і в точках *A, B* і *C.* Найбільше з цих значень *(найбільший максимум)* і дасть найбільше значення функції. Аналогічно шукається найменше значення функції; зручно шукати найбільші і найменші значення одночасно.

Якщо область містить точки розриву похідних першого порядку, то значення функції в таких точках повинне бути «прийняте до порівняння», так як може виявитися, що найбільше значення функції досягається саме там. Якщо є точки розриву функції, то треба додатково досліджувати граничні значення функції при наближенні до таких точок. Якщо є лінії розриву функції або її похідних першого порядку, то треба дослідити значення функції уздовж таких ліній, що приводить до задачі про умовний екстремум. Нарешті, якщо область, на якій розглядається функція, простирається в нескінченність, то треба додатково досліджувати граничні значення функції, коли точка в площині аргументів віддаляється в нескінченність.

Подібним чином розглядаються функції більшого числа змінних. Але при цьому треба мати на увазі, що якщо, наприклад, функція $u=f(x, y ,z)$ розглядається в області, яка зображена на рис. 7.68, то треба шукати безумовні максимуми всередині «кривого тетраедра», умовні максимуми з одною умовою на його «гранях» (при цьому умовою служить рівняння відповідної грані) і умовні максимуми з двома умовами на «ребрах», при цьому умовами служать рівняння ребер, якщо їх записати у формі (3.47).

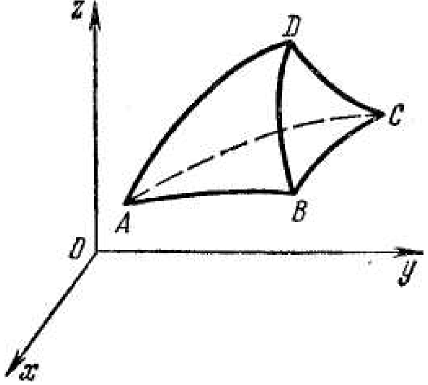


Рис. 7.68.

Подібним чином поверхні розриву приводять до дослідження умовного максимуму з одною умовою, а лінії розриву — до умовного максимуму з двома умовами.

Якщо застосовується ітераційний метод типу метода найшвидшого спуску, описаного в попередньому розділі, то при наявності декількох максимумів ми можемо прийти не до найбільшого. Тут корисно застосувати метод кілька разів, починаючи від різних, які обрані навмання, нульових наближень. Після таких повторних обчислень і порівняння результатів є можливість збільшити максимум, отриманий при першому обчисленні, а в багатьох задачах одержати і найбільший максимум.

Числове розв'язання систем рівнянь. Розглянемо деякі методи числового розв'язання системи двох рівнянь із двома невідомими; випадок системи n рівнянь з n невідомими розглядається аналогічно.

Метод ітерацій. Для його застосування задана система записується у вигляді

$$\left.\begin{aligned} x &= f(x,y), \\ y &= g(x,y). \end{aligned}\right\} \quad (7.134)$$

Потім обирається деяке нульове наближення $x=x_0,\ y=y_0$. Наступні наближення будуються по формулам

$$\left.\begin{aligned}x_1&=f(x_0,y_0),\\ y_1&=g(x_0,y_0).\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}x_2&=f(x_1,y_1),\\ y_2&=g(x_1,y_1).\end{aligned}\right\}\ \text{і т.д.}$$

Якщо процес сходиться, то в границі вийде розв'язання системи (7.134); збіжність процесу тим краще, чим повільніше змінюються функції f і g при зміні їхніх аргументів, тобто чим менше абсолютна величина похідних від цих функцій.

Іноді деяке прискорення збіжності вдається одержати, якщо на кожнім ітераційному кроці використовувати результати, які отримані вже на цьому кроці, тобто обчислювати так (це *метод Зайделя):*

$$x_1=f(x_0,y_0),\quad y_1=g(x_1\,y_0),\ x_2=f(x_1,y_1),\quad y_2=g(x_2\,y_1),\ \text{і т.д.}$$

Метод Ньютона складається в заміні заданих функцій лінійними на основі значень цих функцій і їхніх похідних при значеннях аргументів, які приблизно дорівнюють шуканим розв'язанням. Нехай ми розв'язуємо систему рівнянь

$$\left.\begin{aligned}P(x,y)&=0,\\ Q(x,y)&=0.\end{aligned}\right\}\ (7.135)$$

відправляючись від деякого нульового наближення $x = x_0$, , $y = y_0$ (його можна знайти з фізичного змісту системи або з орієнтованого начерку ліній (7.135) на площині x, y і т. п.) до шуканого розв'язання . Застосовуючи розкладання (7.110) функцій P і Q по степенях $h=x-x_0$ і $k=y-y_0$ і відкидаючи члени вищого порядку малості, одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{aligned}P(x_0,y_0)+P'_x(x_0,y_0)\big(x-x_0\big)+P'_y(x_0,y_0)\big(y-y_0\big)=0,\\ Q(x_0,y_0)+Q'_x(x_0,y_0)\big(x-x_0\big)+Q'_y(x_0,y_0)\big(y-y_0\big)=0.\end{aligned}\right\}\ (7.136)$$

яка приблизно заміняє систему (7.135). Розв'язуючи систему (7.136), яка являє собою систему *лінійних* рівнянь, одержуємо значення першого наближення $x=x_1$, $y=y_1$ Друге наближення знаходиться із системи (7.136), якщо в ній x_0, y_0 замінити на x_1, y_1 і т.д. Зв'язок між n-м і (n+1)-м наближеннями має вигляд

$$\left.\begin{aligned}P(x_n,y_n)+P'_x(x_n,y_n)\big(x_{n+1}-x_n\big)+P'_y(x_n,y_n)\big(y_{n+1}-y_n\big)=0,\\ Q(x_n,y_n)+Q'_x(x_n,y_n)\big(x_{n+1}-x_n\big)+Q'_y(x_n,y_n)\big(y_{n+1}-y_n\big)=0.\end{aligned}\right\}$$

Якщо процес сходиться, то в границі при $n\to\infty$ в кожній з цих рівностей два останні доданки відпадають, тобто виходить розв'язання системи (7.135). Можна перевірити, що збіжність наближень має місце, якщо нульове наближення лежить у достатній близькості від шуканого розв'язання і якобіан

$$\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}\neq 0$$

Можна скористатися також тим, що розв'язання системи (7.135) одночасно реалізує мінімум функції $V(x,\ y)=[P(x,\ y)]^2+[Q(x,\ y)]^2$; іноді перед квадратами ставляться додатні коефіцієнти, щоб у визначеному змісті зрівняти «значимість» обох рівнянь (7.135). Після цього точка мінімуму функції V шукається по одному з прямих методів, про які говорилося раніше. Якщо відповідне мінімальне значення дорівнює нулеві, то точка мінімуму і дасть розв'язання системи (7.135).

7.17. Пошук вигляду функції на підставі експериментальних даних по методу найменших квадратів

Нехай на підставі експерименту потрібно встановити функціональну залежність величини y від величини x:

$$y=\varphi(x)\quad (7.137)$$

Нехай в результаті експерименту отримано n значень функції y при відповідних значеннях аргументу. Результати записані в таблицю:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Вигляд функції $x=\varphi(x)$ встановлюється або з теоретичних міркувань, або на підставі характеру розташування на координатній площині точок, що відповідають експериментальним значенням. (Ці точки будемо називати «експериментальними точками».) Нехай, наприклад, експериментальні точки розташовані на координатній площині так, як зображено на рис. 7.69. З огляду на те, що при проведенні експерименту мають місце похибки, природно припустити, що шукану функцію $y=\varphi(x)$ можна шукати у вигляді лінійної функції $y=ax+b$. Якщо експериментальні точки розташовані так, як позначено на рис. 7.70, то природно шукати функцію $y = \varphi(x)$ у вигляді $y = ax^b$ і т.д.

При обраному вигляді функції $y=\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ залишається підібрати параметри які в неї входять $a, b, c, \ldots$ так, щоб вона в якомусь розумінні щонайкраще описувала розглянутий процес.

Широко розповсюдженим методом розв'язання даної задачі є *метод найменших квадратів.* Цей метод полягає в наступному. Розглянемо суму квадратів від'ємностей значень y_i, які визначенні при проведені експерименту, і функції $\varphi(x, a, b, c, \ldots)$ у відповідних точках:

$$S(a,b,c,\ldots)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]^2. \quad (7.138)$$

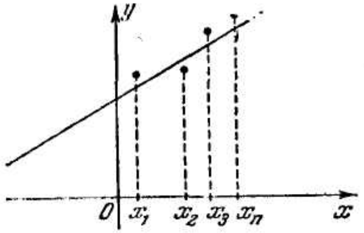


Рис. 7.69.

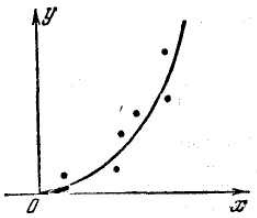


Рис. 7.70.

Підбираємо параметри $a, b, c, \ldots$ так, щоб ця сума мала найменше значення:

$$S(a,b,c,\ldots)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]^2=min. \quad (7.139)$$

Отже, задача звелася до знаходження значень параметрів $a, b, c, \ldots$, при яких функція $S(a, b, c)$ має мінімум.

Скористаємося наступною теоремою.

Теорема (необхідні умови екстремума). *Якщо функція $z=f(x,y)$ досягає екстремума при $x=x_0$, $y=y_0$, то кожна часткова похідна першого порядку від z або обертається в нуль при цих значеннях аргументів, або не існує.*

На підставі приведеної теореми випливає, що ці значення $a, b, c, \ldots$ задовольняють системі рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial a}=0,\ \frac{\partial S}{\partial b}=0,\ \frac{\partial S}{\partial c}=0,\ldots, \quad (7.140)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial a}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial b}=0\\
&\sum_{i=1}^{n}[y_i-\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)]\frac{\partial\varphi(x_i,a,b,c,\ldots)}{\partial c}=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (7.141)$$

Тут є стільки рівнянь, скільки і невідомих. В кожному конкретному випадку досліджується питання про існування розв'язання системи рівнянь (7.141) і про існування мінімуму функції $S(a, b, c, \ldots)$.

Розглянемо кілька випадків визначення функції $y = \varphi(x, a, b, c, \ldots)$.

1. Нехай $y=ax+b$. Функція $S(a, b)$ у цьому випадку має вигляд (див. вираз (7.138)):

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]^2 \quad (7.142)$$

Це функція з двома змінними a і b (x_i і y_i — задані числа; див. приведену вище таблицю). Отже,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial a}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]x_i=0,\\
\frac{\partial S}{\partial b}&=-2\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i+b)]=0,
\end{aligned}\right\}$$

тобто система рівнянь (7.141) у цьому випадку приймає вигляд:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}[y_ix_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-b\sum_{i=1}^{n}x_i=0,\\
&\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i-bn=0.
\end{aligned}\right\} \quad (7.143)$$

Одержали систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими, *a* і *b*. Очевидно, що система має визначений розв’язок і що при знайдених значеннях *a* і *b* функція *S(a, b)* має мінімум. Це легко встановлюється на підставі достатніх умов наступної теореми.

Теорема. *Нехай у деякій області, яка містить точку $M_0(x_0, y_0)$, функція f(x, y) має безперервні часткові похідні до третього порядку включно; нехай, крім того, точка $M_0(x_0, y_0)$, є критичною точкою функції f(x, y),тобто*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

Тоді при $x = x_0$, $y=y_0$

1) *f(x, y)* має максимум, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0 \text{ і } \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}<0;$$

2) *f(x, y)* має мінімум, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2>0 \text{ і } \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}>0;$$

3) *f(x, y)* не має ні максимуму, ні мінімуму, якщо

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2<0;$$

4)*якщо*

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}\right)^2=0,$$

то екстремум може бути і може не бути (у цьому випадку потрібне подальше дослідження). Дійсно, тут (виходячи з умов приведеної вище теореми)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}=2\sum_{i=1}^{n} x^2_{i,} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a\partial b}=2\sum_{i=1}^{n} x_{i,} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2}=2n.$$

Отже

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\frac{\partial^2 S}{\partial b^2}-\left(\frac{\partial^2 S}{\partial a\partial b}\right)^2=4n\sum_{i=1}^{n} x^2_i-(2\sum_{i=1}^{n} x_i)^2=4\sum_{\substack{i,j\\ i<j}}\left(x_i-x_j\right)^2>0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}>0.$$

2. Нехай за апроксимуючу функцію взято тричлен другого степеня

$$y=ax^2+bx+c.$$

У цьому випадку вираз (7.138) має вигляд:

$$S(a,b,c)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax_i^2+bx_i+c)]^2. \quad (7.144)$$

Це функції трьох змінних *a, b, c*. Система рівнянь (7.141) приймає вигляд**:**

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax^2_i+bx_i+c)]x^2_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax^2_i+bx_i+c)]x_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n}[y_i-(ax^2_i+bx_i+c)]=0,\end{aligned}\right\}$$

або в розгорнутому вигляді

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} y_ix^2_i-a\sum_{i=1}^{n} x^4_i-b\sum_{i=1}^{n} x^3_i-c\sum_{i=1}^{n} x^2_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n} y_ix_i-a\sum_{i=1}^{n} x^3_i-b\sum_{i=1}^{n} x^2_i-c\sum_{i=1}^{n} x_i=0,\\&\sum_{i=1}^{n} y_i-a\sum_{i=1}^{n} x^2_i-b\sum_{i=1}^{n} x_i-cn=0.\end{aligned}\right\} (7.145)$$

Одержуємо систему лінійних рівнянь для визначення невідомих *a, b, c.* З характеру задачі випливає, що система має визначене розв’язання і що при отриманих значеннях *a, b, c* функція *S(a, b, c)* має мінімум.

Приклад. Нехай на підставі експерименту отримані чотири значення шуканої функції *y*=φ(*x*) при чотирьох значеннях аргументу (*n*=4), що записані в таблиці:

x	1	2	3	4
y	3	4	2,5	0,5

будемо шукати функцію φ у вигляді лінійної функції $y=ax+b$. Складаємо вираз

$$S\ (a,\ b):\ S(a,b)=\sum_{i=1}^{4}\ [y_i-(ax_i+b)]^2.$$

Для складання системи (7.143) для визначення коефіцієнтів a і b попередньо обчислюємо

$$\sum_{i=1}^{4} y_ix_i=21,\ \sum_{i=1}^{4} x^2{}_i=39,\ \sum_{i=1}^{4} x_i=11,\ \sum_{i=1}^{4} y_i=10.$$

Система (7.138) має вигляд:

$$\left.\begin{aligned}21-39a-11b=0,\\ 10-11a-4b=0.\end{aligned}\right\}$$

Розв’язуючи цю систему, знаходимо a і b: a = —26/35, b=159/35.

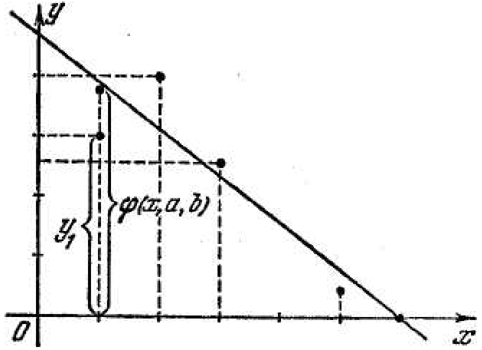


Рис. 7.71.

Шукана пряма (рис.7. 71) є y=$-35\dfrac{26}{35}x+\dfrac{159}{35}$.

7.18. Особливі точки кривої

Поняття часткової похідної використовується при дослідженні кривих.

Нехай крива задана рівнянням

$$F(x,y)=0$$

Кутовий коефіцієнт дотичної до кривої визначається по формулі

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}$$

Якщо в даній точці $M(x,y)$ кривої ,яка розглядається , в крайньому випадку одна з часткових похідних $\partial F/\partial x$ і $\partial F/\partial y$ не обертається в нуль, то в цій точці цілком визначається або dx/dy або dy/dx. Крива $F(x,y)$=0 в такій точці має цілком визначену дотичну. У цьому випадку точка $M(x, y)$ називається *звичайною* точкою.

Якщо ж у деякій точці $M_0(x_0, y_0)$ маємо:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0 \text{ і } \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=0,$$

то кутовий коефіцієнт дотичної стає невизначеним.

Означення. Якщо в точці $M_0(x_0, y_0)$ кривої $F(x,y)$ = 0 обидві часткові похідні $\partial F/\partial x$ і $\partial F/\partial y$ обертаються в нуль, то така точка називається *особливою точкою* кривої. Отже, особлива точка кривої визначається системою рівнянь

$$F=0,\ \frac{\partial F}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Природно, що не всяка крива має особливі точки. Так, наприклад, для еліпса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

очевидно,

$$F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1,\ \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$$

похідні $\partial F/\partial x$ і $\partial F/\partial y$ обертаються в нуль тільки при x=0, y=0, але ці значення x і y не задовольняють рівнянню еліпса. Таким чином, еліпс не має особливих точок.

Мікромодуль 17

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Дослідити особливі точки кривої

$y^2-x(x-a)^2=0 \quad (a>0)$.

Розв'язання. У даному випадку $F(x,y) = y^2-x(x-a)^2$,тому

$$\frac{\partial F}{\partial x}=(x-a)(a-3x),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

Розв'язуючи спільно три рівняння:

$$F(x,y)=0,\quad \frac{\partial F}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

знаходимо єдину задовольняючу їм систему значень x і y: $x_0=a,\ y_0=0$.

Отже, точка $M_0(a,0)$ є особлива точка кривої.

Досліджуємо поводження кривої поблизу особливої точки і побудуємо криву. Перепишемо дане рівняння у вигляді $y=\pm(x-a)\sqrt{x}$.

З цієї формули випливає, що крива:

1) визначена лише при $x>0$;

2) симетрична щодо осі Ox;

3) перерізає вісь Ox у точках (0, 0) і (a, 0). Остання точка, як було зазначено, є особливою.

Ми розглянемо спочатку ту частину кривої, що відповідає знакові +:

$$y=(x-a)\sqrt{x}.$$

Знайдемо першу і другу похідні від y по x:

$$y'=\frac{3x-a}{2\sqrt{x}},\quad y''=\frac{3x+a}{4x\sqrt{x}}$$

При $x=0$ маємо $y'=\infty$. Отже, крива дотикається осі Oy на початку координат. При $x=a/3$ маємо $y'=0$, $y''>0$, тобто при $x=a/3$ функція y має мінімум:

$$y=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

На відрізку $0<x<a$ маємо $y<0$; при $x>a/3$ буде $y'>0$; при $x\to\infty$ буде $y\to\infty$. При $x=a$ маємо $y'=\sqrt{a}$, тобто в особливій точці $M_0\ (a,\ 0)$ гілка кривої $y=+(x-a)\sqrt{x}$ має дотичну $y=\sqrt{x}\ (x-a)$.

Так як друга гілка кривої $y=-(x-a)\sqrt{x}$ симетрична з першою відносно осі Ox , то, отже, в особливій точці крива має і другу дотичну (до другої гілки)

$$y=-\sqrt{x}\ (x-a)\ .$$

Через особливу точку крива проходить двічі. Така точка називається *вузловою точкою.* Розглянута крива зображена на рис. 7.71.

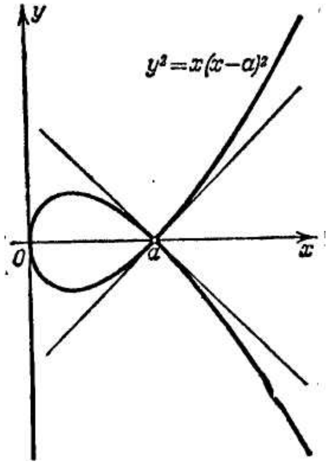


Рис. 7.71.

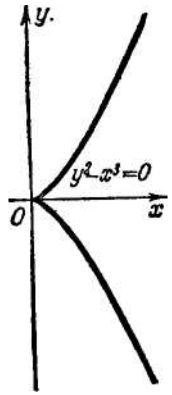


Рис. 7.72.

Приклад 2. Дослідити на особливі точки криву (напівкубова парабола)

$$y^2-x^3=0.$$

Розв'язання. Координати особливих точок визначаються із системи рівнянь:

$$y^2-x^3=0,\ 3x^2=0,\ 2y=0.$$

Отже $M_0(0,0)$ є особлива точка.

Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$y=\pm\sqrt{x^3}\ .$$

Для побудови кривої досліджуємо спочатку гілку, якій у рівнянні відповідає знак плюс, гілка кривої, що відповідає знакові мінус, симетрична з першою відносно осі Ox.

Функція y визначена тільки при $x\geq0$, невід'ємна і зростає при зростанні x.

Знайдемо першу і другу похідні від функції $y=\sqrt{x^3}$;

$$y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,,\ \ y''=\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

При x=0 маємо y=0, y' =0. Отже, розглянута гілка кривої має на початку координат дотичну y=0. Друга гілка кривої $y= —\sqrt{}\ x^3$ також проходить через початок координат і має ту ж дотичну y=0. Таким чином, дві різні гілки кривої зустрічаються на початку координат, мають ту саму дотичну і розташовані від дотичної по різні сторони. Така особлива точка називається *точкою повернення (возврата) першого роду* (рис. 7.72).

Зауваження. Криву y^2-x^2=0 можна розглядати як граничний випадок кривої $y^2=x(x-a)^2$ (яка розлянута в прикладі 1), коли $a\to 0$, тобто коли петля кривої стягується в точку.

Приклад 3. Дослідити криву $(y-x^2)^2-x^5=0$.

Розв'язання. Координати особливих точок визначаються системою рівнянь

$$-4x(y-x^2)-5x^4=0,\quad 2(y-x^2)=0$$

яка має єдине розв'язання: x=0, y=0. Отже, початок координат є особлива точка.

Перепишемо дане рівняння у вигляді $y=x^2\pm\sqrt{x^5}$. З цього рівняння випливає, що x може приймати значення від 0 до +∞

Визначимо похідні першого і другого порядку:

$$y'=2x\pm\frac{5}{2}\sqrt{x^3}\,,\ \ y''=2\pm\frac{15}{4}\sqrt{x}$$

Досліджуємо гілки кривої, що відповідають знакам плюс і мінус, окремо. В обох випадках при x=0 маємо: y=0, y'=0, тобто для обох гілок вісь Ox є дотичною. Розглянемо спочатку гілку

$$y=x^2+\sqrt{x^5}\ .$$

При зростанні x від 0 до ∞ y зростає від 0 до ∞. Друга гілка

$$y=x^2-\sqrt{x^5}\ .$$

При x= 16/25 функція $y = x^2—\sqrt{}\ x^5$ має максимум. Якщо $x\to+\infty$, то $y\to-\infty$.

Таким чином, у даному випадку на початку координат зустрічаються дві гілки кривої; обидві гілки мають ту саму дотичну і

розташовані по одну сторону від дотичної поблизу точки дотику. Така особлива точка називається *точкою повернення (возврата) другого роду*. Графік розглянутої функції зображено на рис. 7.73.

Приклад 4. Дослідити криву y^2-x^4+ x^6 =0**.**

Розв'язання. Початок координат є особлива точка. Для дослідження кривої поблизу цієї точки перепишемо рівняння кривої у вигляді

$$y=\pm x^2\sqrt{1-x^2}\ .$$

Так як рівняння кривої містить тільки парні степені змінних, то крива симетрична щодо осей координат і, отже, досить дослідити частину кривої, що відповідає додатним значенням x і y. З останнього рівняння випливає, що x може змінюватися на відрізку від 0 до 1, тобто $0\le x\le 1$.

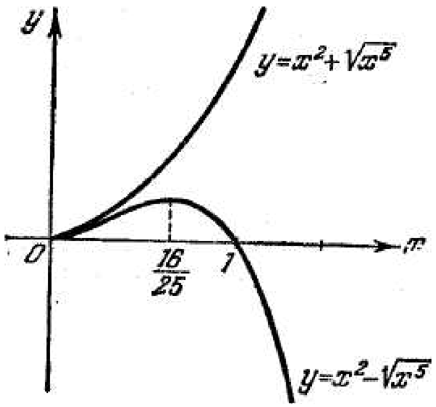


Рис. 7.73.

Обчислимо першу похідну для тієї гілки кривої, що є графіком функції

$$y=+x^2\sqrt{1-x^2}\ :$$

$$y'=\frac{x\left(2-3x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

При x = 0 маємо y=0, y' = 0. Отже, на початку координат крива торкається осі Ox.

При $x=1$ маємо $y=0$, $y'=\infty$; отже, у точці (1, 0) дотична паралельна осі Oy. При $x=\sqrt{2/3}$ функція має максимум (рис. 7.74).

На початку координат (в особливій точці) дві гілки кривої, що відповідають знакам плюс і мінус перед коренем, взаємно дотикаються. Така особлива точка називається *точкою дотику.*

Приклад 5. Дослідити криву $y^2 — x^2 (x—1) = 0$.

Розв'язання. Напишемо систему рівнянь, що визначають особливі точки:

$$y^2\text{-}x^2(x—1)=0, \quad —3x^2+2x=0, \quad 2y=0.$$

Ця система має розв'язок $x=0$, $y=0$. Отже, точка (0, 0) є особлива точка кривої. Перепишемо дане рівняння. Очевидно, що x може змінюватися від 1 до $+\infty$, а також приймати значення 0 (в останньому випадку $y=0$).

Досліджуємо гілку кривої, що відповідає знакові плюс перед коренем. При збільшенні x від 1 до ∞ y збільшується від 0 до ∞. Похідна

$$y'=\frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

При $x=1$ маємо $y'=\infty$. Отже в точці (1,0) дотична паралельна осі Oy.

Друга гілка кривої, що відповідає знакові мінус, симетрична з першою відносно осі Ox. Точка (0, 0) має координати, що задовольняють рівнянню, і, отже, належить кривій, але поблизу неї немає інших точок кривої (рис 7.75). Така особлива точка називається *ізольованою особливою точкою.*

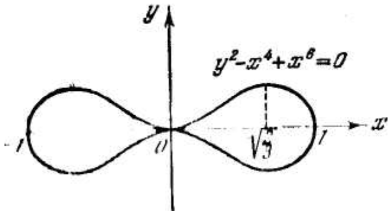


Рис. 7.74.

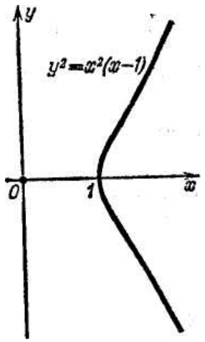


Рис. 7.75.

Мікромодуль 17
Індивідуальні тестові завдання

1. Довести, що якщо $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

2. Довести, що якщо $z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$, то $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2\dfrac{\partial z}{\partial x}$

3. Довести, що якщо $z=ln(x^2+y^2)$, то $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

4. Довести, що якщо $z=\varphi(y+ax)+\psi\ (y-ax)$, то $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

при любих двічі диференційованих φ і ψ

Дослідити на максимум і мінімум функції:

5. $z=x^3y^2(a-x-y)$. 6. $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

7. $z=sin\ x+ sin\ y+ sin(x+y)\ (0\le x\le\pi/2;\ 0\le y\le\pi/2)$.

8. $z=sin\ x\ sin\ y\ sin(x+y)\ (0\le x\le\pi;\ 0\le y\le\pi)$.

Найти особливі точки наступних кривих, дослідити їх характер і скласти рівняння дотичних в них.:

9. $x^3+y^3-3axy=0$. 10. $a^4y^2=x^4(a^2-x^2)$. 11. $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$;12. $y^2=x^2(9-x^2)$.

13.$x^4-2ax^2y-axy^2+a^2x^2=0$. 14. $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$. 15. $b^2x^2+a^2y^2=x^2y^2$.

16. Показати, що крива $y=x\ ln\ x$ має кінцеву точку в початку координат і дотичну – вісь Oy.

17. Показати, що крива $y=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

має вузлову точку в початку координат і що дотичні в цій точці: праворуч $y=0$, ліворуч $y=x$.

18. $f(x,y)=x^3+3x^2+4xy+y^2$. Показати , що в точці M(2/3, -4/3) похідна в якому завгодно напрямленні дорівнює нулеві .

19. Найти прямокутний паралелепіпед, котрий має найбільший об'єм при даній повній поверхні S. *Від*. Куб з ребром $\sqrt{S/6}$.

Список літератури

1.Боровков А.А. Теория вероятностей. М: Наука, 1976.-352с.
2.Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков. Издательство Харьковского университета.1972.-256с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика.-К: А.С.К. , 2001. - 648с.
4. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г. О. Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. -К.: Видавничий центр "Академія", 2002,— 624 с.(Альма-матер).
5. Денисюк В.П., Репета В.К. Вища математика (модульна технологія навчання). К.: НАУ, 2004. -276с.
6. Козлов В.Н.,Максимов Ю.Д., Хватов Ю.А. Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов /для студентов технических направлений бакалаврата /:Учеб. пособие. Пб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.-56С.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М: Наука, 1971.-432с.
8. Мовчан В. Т., Репета В.К., Бойко О.М., Пічкуров О.В. Диференціальне числення функції однієї змінної: Задачник-практикум. К.: НАУ, 2001.-96с.
9.Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М: Наука, 1969.-640с.
10. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія.
Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення.-К.: Техніка, 2000.—592 с.
11. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика: Підручник.- Д.: "Видавництво Сталкер", 2003.- 496 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М: Наука, 1985.-Т. 1.-456с.
13. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М: Наука, 1966.-Т. 3.-656с.

Навчальне видання

КОНОНЮК Анатолій Юхимович

ВИЩА МАТЕМАТИКА
(Модульна технологія навчання)

Частина 1

Навчальний посібник

Навчальне видання

А.Ю. Кононюк

ВИЩА МАТЕМАТИКА

(Модульна технологія навчання)

Книга 1

Навчальний посібник

Керівник видавничих проектів Кривенко О.А.
Оригінал-макет виготовлено видавництвом «КНТ»
Редагування авторське
Відповідальний за випуск Пашутинський Є.К.

Підписано до друку 15.07.2008 р.
Гарнітура SchoolBookAC. Формат 60x84/16 .
Папір офсетний. Друк офсетний.
Обл.-видав. арк. 28,33. Умов. друк. арк. 39,53.
Тираж 1000 пр. Замовлення № 23

Видавництво «КНТ»
04210, м. Київ, пр. Героїв Сталінграда, 8, корпус 8, оф. 1.
Тел./факс (044) 581-21-38, 331-91-53. E-mail: knt2003@ukr.net
Свідоцтво: ДК № 581 від 03.08.2001.
Надруковано в друкарні ПП „Діса Плюс”
м. Харків, вул. Леніна, 29, кв. 5
тел. 8(057)759-70-84