Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

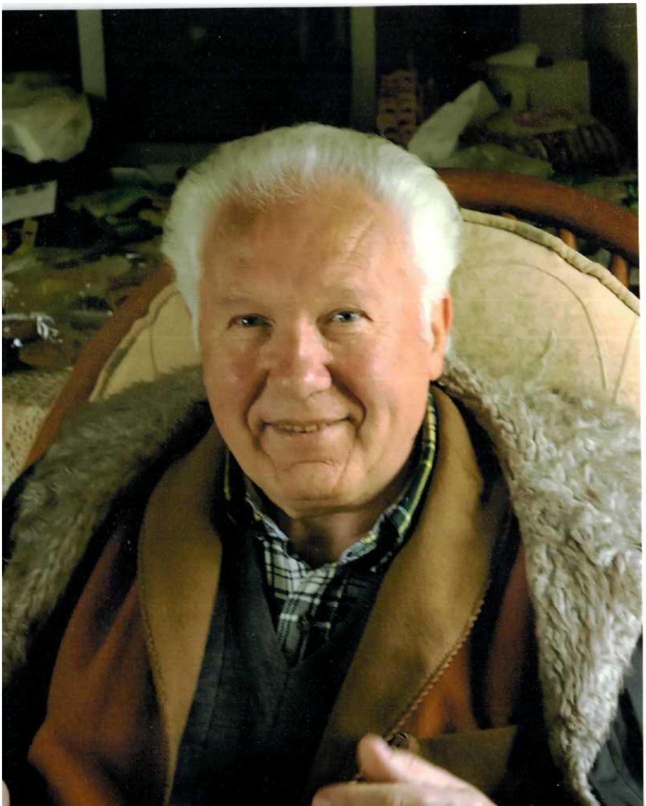
А.Е. Кононюк

ИНФОРМАЦИОЛОГИЯ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИИ

Книга 1

Киев
«Освіта України »
2011



УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7
К65.
Рецензент: *Н.К. Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Нацинальный авиационный университет).

Кононюк А.Е.
К65 Информациология. Общая теория информации
К.:"Освіта України ", 2011. - 476 с.
ISBN 978-966-7699-50-8

В настоящей работе в последовательной систематизированной форме излагаются основы информациологии как всеобъемлющей теории о естественной и искусственной информации – информации природы Вселенной и информации, созданной человеком. Дается формализация понятий информации и информационных процессов как абстрактных понятий познания и формализация самой теории информациологии. Концепция информациологии дается в аспекте социальной и природной значимости информации для отдельного человека, коллектива и общества в целом, а также – в свете информационного единства человека и природы, единства всех форм и типов информации, всех процессов информационного взаимодействия, процессов самоинформацизации Вселенной и процессов социальной (государственной) информатизации. Изложены методологические основы информациологии, базирующиеся на фундаментальном принципе информациологического подхода, на системном сочетании интеграционного и дифференцированного подходов к исследованию. Монография может быть полезной для людей самых различных специальностей – филологов, информациологов, математиков, лингвистов, правоведов, методистов, преподавателей ВУЗов, научных работников, магистров, аспирантов, докторантов, всех, кто интересуется проблемами информации, информатики, информатизации и информациологии в целом.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7699-50-8


Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук
I. Группа междисциплинарных наук
ПН Теория понятий
ЛГ Теория лингвистики
ПЗ Теория познания
СЗ Теория созидания
ПТ Общая теория понятоведения
II. Группа наук познания (фундаментальных наук)
ИН Теория информации
СТ Теория систем
РС Теория распознавания
КС Теория консалтинга (консультирования)
ПР Теория принятия решения
РР Теория реализации принятых решений
III. Группа наук созидания (прикладных наук)
СС Теория социальных систем
ЖО Теория жизнеобеспечения
КМ Теория коммуникаций и транспортирования
ОБ Теория образования (обучения)
СР Теория сохранения (защиты и охраны)
РЗ Теория развития
IV. Группа общедисциплинарных наук (обеспечивающих наук)
ДМ Теория дискретно-непрерывной математики (четкая и нечеткая)
НИ Теория научных исследований
ММ Теория моделей и моделирования
ОМ Теория оптимизации

Оглавление

Предисловие

В двадцать первом веке говорят о том, что общество вступило в новый этап своего развития, для которого характерен новый способ производства - информационный. Это связано, прежде всего, с процессами информатизации, внедрения информационных технологий в различные сферы жизни. Информация становится основой генерирования знаний, основой коммуникаций, производства и т.д. Само понятие информации все шире используется в различных областях знания, тем самым вызывая повышенный интерес со стороны ученых самых различных областей науки. Осмысление феномена информации началось сравнительно недавно. Между тем, сегодня понятие информации является одним из фундаментальных не только в информациологии (науке об информации), но и в математике, физике и других науках.

В последнее время на роль метадисциплины, рассматривающей проблемы различных отраслей знаний (и естественнонаучных, и гуманитарных) с единых информационных позиций, претендует информациология. С точки зрения этой дисциплины, информатика − ее основная составная часть, представляющая “процесс взаимозависимости и взаимодополнения информации, человека, вычислительной техники и средств связи”.

Следует отметить, что структура теории информации как научной дисциплины складывалась постепенно. На протяжении более полувека в ней неоднократно возникали и исчезали те или иные направления. Возможность расширения области интересов информации диктовалась, главным образом, развитием средств вычислительной техники (СВТ) и накоплением моделей и методов их применения при решении задач различного типа. В настоящее время в нее входят следующие основные области исследования:

− теория алгоритмов (формальные модели алгоритмов, проблемы вычислимости, сложность вычислений и т.п.);

− логические модели (дедуктивные системы, сложность вывода, нетрадиционные исчисления: индуктивный и абдуктивный вывод, вывод по аналогии, правдоподобный вывод, немонотонные рассуждения и т.п.);

− базы данных (структуры данных, поиск ответов на запросы, логический вывод в базах данных, активные базы и т.п.);

− искусственный интеллект (представление знаний, вывод на знаниях, обучение, экспертные системы и т.п.);

− бионика (математические модели в биологии, модели поведения, генетические системы и алгоритмы и т.п.);

− распознавание окружающего мира и обработка зрительных сцен (статистические методы распознавания, использование различных пространств, теория распознающих алгоритмов, трехмерные сцены и т.п.);

− теория роботов (автономные роботы, представление знаний о мире, децентрализованное управление, планирование целесообразного поведения и т.п.);

− инженерия математического обеспечения (языки программирования, технологии создания программных систем, инструментальные системы и т.п.);

− теория компьютеров и вычислительных сетей (архитектурные решения, многоагентные системы, новые принципы переработки информации и т.п.);

− компьютерная лингвистика (модели языка, анализ и синтез текстов, машинный перевод и т.п.);

− числовые и символьные вычисления (компьютерно-ориентированные методы вычислений, модели переработки информации в различных прикладных областях, работа с естественно-языковыми текстами и т.п.);

− системы человеко-машинного взаимодействия (модели дискурса, распределение работ в смешанных системах, организация коллективных процедур, деятельность в телекоммуникационных системах и т.п.);

− нейроматематика и нейросистемы (теория формальных нейронных сетей, использование нейронных сетей для обучения, нейрокомпьютеры и т.п.);

− использование компьютеров в замкнутых системах (модели реального времени, интеллектуальное управление, системы мониторинга и т.п.).

Информация обладает рядом свойств, основными среди которых являются достоверность, полнота и актуальность (оперативность). С точки зрения общей теории информации для этих свойств можно предложить следующие толкования:

1. Информация достоверна, если она отражает истинное состояние сущности в текущий момент времени.

2. Информация полна, если ее достаточно для понимания и принятия эффективных решений (рекомендаций).

3. Информация актуальна (оперативна), если получение ее своевременно для принятия эффективных решений (рекомендаций).

Информация − важнейший компонент (объект) любого информационного процесса. **Под <u>информационным процессом</u> будем понимать процесс сбора (отражения, восприятия), фиксирования, отображения на различные носители, передачи, обработки (преобразования), хранения и использования информации.** Информационный процесс может состояться только при наличии информационной системы, обеспечивающей все его составляющие − источник информации, канал связи, соглашения (правила) интерпретации сигналов и приемник информации.

Информация <u>от источника к приемнику передается в материально- энергетической форме</u> (например, в виде вокально-знаковых отображений, визуально-знаковых, аккустических, оптических, тактильных, обанятельных, органолептических электрических, световых, звуковых и других сигналов). Информация может быть представлена <u>аналоговыми (т.е. непрерывными) или дискретными сигналами</u> (лат. discretus − прерывистый, состоящий из отдельных частей).

Информация, переносимая сигналами, имеет смысл, отличный как от смысла самого факта поступления сигналов, так и от формы их передачи. Следовательно, источник и потребитель информации должны “договориться” о конкретной форме передачи информации, а также выработать некоторое соглашение относительно расшифровки (интерпретации) полученных сигналов.

В общем случае источник информации, восприняв некоторое явление (факт, изменение состояния и т.д.), шифрует (кодирует) его в виде последовательности сигналов с последующей пересылкой их в канал связи. Канал связи выступает как внешняя (по отношению как к источнику, так и приемнику) среда, отражающая состояния источника и воздействующая каким-либо образом на приемник.

При передаче сигналов по каналу связи на них воздействуют помехи (“шумы”), приводящие к изменению первоначальной формы и, возможно, смысла первоначального сигнала. Приемник (адресат, потребитель) информации при получении сигналов должен выполнить предварительную их обработку, цель которой заключается в исключении “шумов” и интерпретации (расшифровке), т.е. в извлечении смыслового содержания, заключенного в сигналах. После этого он может использовать полученную информацию по своему усмотрению.

Существование и развитие человеческого общества невозможно без осуществления информационных процессов. Определяющую роль в информационной системе, обеспечивающей составляющие информационного процесса, играет язык. Действительно, в какой бы форме и какими бы средствами не передавалась информация, **она всегда передается с помощью некоторого языка**.

Применяя язык как способ представления информации, а также различные формы и средства передачи информации, человек рассчитывает на ее восприятие, анализ и использование и, следовательно, активно участвует в информационных процессах, происходящих в обществе.

Структура общей теории информации представлена как система самостоятельных научно значимых систем, объединяющихся на единой информационной основе и фундаментальном информациологическом подходе познания. Успешное овладение настоящей работой предполагает предварительное изучение теории множеств, теории алгебр, теории матриц, теории пространств, математической логики, теории графов, теории кодирования, теории формальных грамматик и алгоритмов.

Настоящая работа будет интересна и полезна самым различным категориям читателей – и ученым, и обучающимся, и всем людям, интересующимся проблемами информации, информациологии, информатизации, информациологических процессов и технологий, структурой и методикой информациолого-познавательной деятельности.

1. Сущность как источник информации

(Введение в теорию информации)

1.1. О понятии «информация».

Историко-философский генезис и современные интерпретации.

В данном подразделе ставится задача рассмотреть историко-научное и философское становление содержания понятия "информация".

Первоначальное (донаучное) представление об информации сложилось в сфере обыденного языка на основе повседневно-бытовой социально-коммуникативной практики. Согласно данному пониманию информация - это сообщения или сведения, которыми люди обмениваются между собой. В этом смысле слово "информация" употреблялось в юриспруденции еще в начале XIX века. А уже в 20-е годы XX века это понятие использовалось гуманитарными науками, в частности, теорией журналистики, где информация трактовалась как описание фактов. Известны также указания на использование представлений об информации в логико-семиотических построениях. Затем развитие технических средств коммуникаций расширило возможности человеческого общения. Данное обстоятельство послужило почвой для появления многих вопросов, касающихся как природы информационных процессов в рамках социальной коммуникации в плане их содержательных характеристик (вопросы о ценности, значимости, новизне информации в обществе), так и рациональной организации технической базы передачи сообщений. К последним, в частности, относятся вопросы о связи информации с энергетическими параметрами приемо-передающих устройств, вопросы изменения количественных параметров информации и др. Так или иначе к середине 20-х годов XX века сложилась качественно иная ситуация, когда начинается процесс развития информации как сугубо научного понятия.

Следует отметить, что представления о природе и сущности информации весьма противоречивы, что в известной мере связано с существующими физическими трактовками информации и математическими методами измерения количества информации.

В физике понятие "информация" появилось при обосновании статистической механики в 1929 году. В то время Сциллард предпринял попытки связать это понятие с повышением уровня организации определенной термодинамической системы (напомним, что до этого в термодинамике существовало понятие энтропии, введенное Клаусисом, описывающее уровень хаоса в системе). Параллельно с разработкой сциллардовской трактовки информации происходит становление теории информации как теории каналов коммуникации и связи (К. Шеннон). Рост объема передаваемых сообщений вызывал необходимость их измерения для улучшения условий передачи.

Математическая теория связи была создана в 1948 году, когда К. Шеннон и У. Уивер в статье "Математическая теория связи" (1949 год), предложили количественную меру информации. В частности, была предложена абстрактная схема связи, включающая следующие компоненты: источник информации, передатчик, линию связи, приемник, адресата и источника помех, а также теорема о пропускной способности, помехоустойчивости, кодирования и т.п. Причем в шенноновской теории под информацией понимались не любые сообщения, которыми обмениваются люди или передают их по техническим каналам связи, а лишь те, которые уменьшают неопределенность у получателя, неизбежно возникающую в том случае, когда из-за недостаточной полноты информации необходим выбор лишь одной из двух или большего числа возможностей. Согласно Шеннону информация может оцениваться как степень упорядоченности или организованности систем, как отрицательная энтропия или негэнтропия. Следует заметить, что в шенноновскую концепцию информации не входят такие характеристики, как осмысленность или бессмысленность, полезность или бесполезность и т.п. Другими словами, **<u>информация</u> есть параметр, характеризующий динамику системного бытия любого фрагмента материального мира.**

Простота и элегантность математического аппарата, опирающегося на теорию вероятности, во многом определили успех формирования классической теории информации. Представление об энтропии сообщений К. Шеннона, было развито рядом других авторов.

Итак, для классической теории информации характерны как минимум два утверждения: во-первых, утверждение о "всюдности" информации (**информация содержится во всех объектах и явлениях окружающего нас мира, представляя тем самым некую <u>третью ипостась материи</u> наряду с массой и энергией**); во-вторых, утверждение о том, что "мерой количества информации, связанной с тем или иным объектом или явлением, может служить редкость его встречаемости или сложность его структуры". Иными словами, вычислив количество информации, содержащейся в том или ином объекте, можно получить сведения о присущей ему негэнтропни, то есть степени сложности его организации и т. п. Справедливо и обратное: зная энтропию системы, можно рассчитать, сколько в ней содержится информации (какой информацией она обладает).

Последующее совершенствование математической теории связи К.Шеннона, ее математического аппарата позволило построить общую теорию информации, сформировать так называемый "негэнтропийный принцип информации", приложить уже сформулированные обстоятельства к различным областям человеческой деятельности.

Следует отметить, что многочисленные попытки приложить теорию Шеннона к самым различным областям человеческой деятельности <u>встречаются, по мнению многих исследователей, с явными трудностями</u>. Во-первых, в таких попытках под информацией понимались определенные элементы сообщений, связанные лишь с закономерностями передачи различных сигналов, но ни в коей мере **<u>не связанные с семантикой сообщения как такового</u>**. Действительно, если переставить все буквы осмысленного сообщения, то, как известно, осмысленность исчезнет, а количество информации (по формуле К. Шеннона) останется прежней. Получившееся в результате перестановок бессмысленное "нечто" информацией, видимо, называться не может. Во-вторых, определенную неясность заключает вопрос и о сопоставлении количества информации данного сообщения при переходе на другой язык, иную систему.

Таким образом, можно констатировать наличие как минимум двух черт, характерных для классической теории информации. С одной стороны, это отсутствие определения самого понятия "информация", что, впрочем, не является преградой для теоретиков, **которые фактически развивали не теорию информации, а теорию связи**; с другой - это использование термина "количество информации" в качестве синонима статистических характеристик букв, составляющих сообщение. Передаваемые по каналам связи буквы (сигналы), не несут той информации, для обмена которой существуют сигналы связи, то есть формула измерения количества информации не учитывает осмысленность сочетания букв (сигналов) передаваемой информации. Иными словами, **классическая теория информации, раскрывая количественный аспект феномена информации, не раскрывает ее сущностной характеристики**. Это понимал и сам К. Шеннон, справедливо отмечая, что "очень редко удается открыть одновременно несколько тайн природы одним и тем же ключом. Здание нашего несколько искусственно созданного благополучия слишком легко может рухнуть, как только в один прекрасный день окажется, что при помощи нескольких магических слов, таких как информация, энтропия, избыточность... нельзя решить всех нерешенных проблем". **Количественная интерпретация информации не в состоянии ответить на вопрос, что такое информация; это и привело к появлению так называемых качественных теорий информации**.

Новый этап теоретического расширения понятия информации связан с кибернетикой. Оставаясь на позициях шенноновского подхода, кибернетика формирует принцип единства процессов управления и переработки информации в сложных самоуправляющихся, самоорганизующихся биологических и социальных системах (Н. Винер). Информация, по Н. Винеру, - это "обозначение содержания, полученного из внешнего мира в процессе нашего приспособления к нему и приспособления к нему наших органов чувств". Развитая в работах Винера концепция предполагает, что процесс управления в упомянутых системах является процессом переработки (преобразования) некоторым центральным устройством информации, получаемой от источников первичной информации (сенсорных рецепторов), и передачи ее в те участки системы, где она воспринимается ее элементами как приказ для выполнения того или иного действия. По совершении самого действия сенсорные рецепторы готовы к передаче информации об изменившейся ситуации для выполнения нового цикла управления. Таким образом, организуются циклы, алгоритм (последовательность действий) управления и циркуляции информации в системе. При этом важно, что главную роль играет здесь **содержание информации**, передаваемой рецепторами и центральным устройством.

В этом смысле, по всей видимости, можно выделить некоторые типы информации по отношению к окружающей среде (или к использующей ей среде). В частности, **входную информацию (которую система (сущность) воспринимает от окружающей среды), выходную информацию (которую система (сущность) выдает в окружающею среду) и внутреннюю или внутрисистемную информацию (которая хранится, перерабатывается, используется только внутри системы (сущности))**. В данном отношении показателен пример с человеком, который, воспринимая и обрабатывая входную информацию (например, данные о погоде), формирует соответствующую выходную реакцию - насколько тепло нужно одеваться. При этом используется еще и внутренняя информация (генетически заложенная или приобретенная информация о подобной реакции).

Исходя из сказанного, можно выделить, по крайней мере, **три объекта**, которые предполагает понятие "информация": **источник информации, потребитель информации и передающая среда.** Возникает **общая схема процесса управления**: **информация об окружающей среде и целях перерабатывается в информацию об управляющем воздействии (управляющий сигнал), снимающую неопределенность поведения системы, обеспечивая практическое достижение поставленной цели.**

В рамках обсуждаемой проблемы особый интерес представляет так называемый **содержательный аспект информации**, представленный, в частности, в определении информации Винера. Дело в том, что информация не может быть передана, принята или хранима, что называется, в чистом виде. Ее носителем является сигнал, понятый как кодированный эквивалент сообщения, который фиксируется источником информации и выражается посредством некоторой последовательности условных физических символов (например, алфавита), образующих некоторую упорядоченную целостность, совокупность (например, текст, речь, изображение). **Информации вне формы сигнала не существует**. Содержанием, так сказать, сигналов является информация, а вот, что является содержанием информации, как справедливо отмечает А.С. Митрофанов, этому "кибернетика не может дать количественного определения", так как понятие "**содержание информации не имеет количественного определения**".

Так или иначе, кибернетика вскрыла информационную природу управления сложноорганизованнымн системами. Однако сама практика управления потребовала выработку новых критериев информации, таких как осмысленность, ценность и др. Между тем, кибернетика смогла лишь поставит подобные вопросы.

Так начинается новый этап развития научного понятия "информация", связанный с **исследованием сущности социальной информации в единстве ее <u>семантических, синтаксических и прагматических характеристик</u>.** По мнению многих исследователей, социальная информация является наиболее сложной и совершенной формой информации. По утверждениям В.Г. Афанасьева и А.Д. Урсула социальная информация являет собой аспект и результат отражения обществом всех форм движения материи, в частности, социальной формы. Причем информационный аспект характерен не только для сферы общественного сознания, но и для сферы общественного бытия. Поэтому имеет смысл выделять две формы существования социальной информации - **материальную и идеальную**. Причем обе формы диалектически взаимосвязаны и имеют свойство взаимно перекодироваться из одной в другую. В процессе взаимодействия человека с действительностью, в ходе его познавательной деятельности материальная информация трансформируется в идеальную и обратно - идеальная информация объективируется в процессе материально-производственной, социально-политической и духовной деятельности людей, которые и опредмечивают имеющуюся у них идеальную информацию. При этом информация, являясь продуктом деятельности общества, выступает и "как аспект, и как результат взаимодействия общества и природы, **отражения многообразия всех общественных отношений**". Само получение информации о социальной действительности, ее оценка, передача и хранение, приводят к специфическому духовному явлению - созданию некой картины социально-информационного мира как формы, в которой функционирует общественное сознание.

Обращение к качественной стороне информации вызвало целый ряд подходов к ее определению. Один из таких подходов - **аксиологический** - связывает понятие информации с ценностью и практической значимостью. В самом деле, **информация**, в зависимости от изучаемой области природы, может быть **физической, биологической, психологической, общественной и т.п.** И каждая такая информационная линия должна содержать **прагматический аспект и свои <u>критерии</u> значимости и ценности**. Ценной является та информация, которая помогает достижению цели. Ценность информации прямо зависит от цели, которую ставит перед собой потребитель информации. **Однако говорить о целеполагании можно лишь применительно к человеческому миру**. По отношению же к неживой и органической природе мы вряд ли можем говорить о каком-то целеполагании и заключать, что там присутствует информация как ценность.

По достижении человеком определенной цели использованная для этого информация утрачивает свою первоначальную ценность. Некоторые авторы полагают, что ценность проявляет себя не только субъективно, то есть с позиции отдельного человека, но и объективно (в плане общезначимости содержания информации). В этом случае, как полагают они, информация содержит в себе объективную истину об окружающей действительности. Аксиологический подход, подчеркивая ценностный аспект информации, по сути, утверждает, что информация является феноменом, присущим лишь человеческому обществу. Содержательный аспект понятия информации так и остается пока не ясным.

Прагматический аспект информации изучается таким разделом семиотики, как прагматика: сущность информации заключается в ее нацеленности на инициирование определенного образа мыслей, определенное поведение; реципиенту передается информация, способная формировать негативное или положительное отношение к какому-либо явлению.

Другой подход - **семантический**, - выявляет, прежде всего, смысловую сторону информации, рассматривает информацию не только со стороны **формы**, но и с точки зрения **содержания**. Данный аспект информации чрезвычайно важен для нас и заслуживает более пристального внимания и прежде всего вот почему. Как известно, в теории информации под информацией понимают сведения, являющиеся объектом хранения, передачи, преобразования. Из изложенного выше можно было понять, что как такового математического выражения самой по себе информации нет, а есть лишь математическое определение именно количества информации, которая понимается как мера уменьшения неопределенности системы. Как отмечают некоторые исследователи, в связи с неразличением в философской литературе понятий "информация" и "количество информации", возникло много непонятного, касающегося, например, того, что многие приписывают понятию "информация" значение знания и по аналогии говорят о количестве знания. В частности, А.С.

Митрофанов совершенно справедливо замечает, что даже Г. Клаус (один из ведущих представителей кибернетики) не избегает подобного казуса, заявляя: "Информация, содержание информации и т. д., стали количественно определяемыми". По замечанию того же Митрофанова, здесь имеет место и другого рода отождествление, а именно: "содержание информации отождествляется с содержанием сознания (знания)". Здесь следует иметь в виду, что **теория информации, в известной мере, делает определенное различие между информацией как сведением и информацией как сообщением.** Как уже было замечено несколько ранее, **под сообщением следует понимать форму представления знания** (текст, речь, цифровые данные), а **под носителем сообщения, соответственно, сигнал**. Содержанием сигнала является информация, а вот выявление значения информации - это глубоко человеческий, мыслительный акт, в ходе которого выявляется смысл содержания информации. Так вот, **на выявление этого смысла информации и нацелена семантика.**

С точки зрения **семантики информация выступает как бы в двух измерениях: в виде определенного содержания и формы, в которую это содержание заключено**. В частности, на этом аспекте акцентирует внимание М. К. Бочаров, выделяя в понятии "информация" содержание (сведения о предметах, явлениях природы, общества и мышления) и форму (любые системы знаков или сигналов). По его мнению, единство этих составляющих образует самостоятельность информации как феномена. Правда, еще задолго до М. К. Бочарова, со времен Г. Фреге, в логике было принято различать смысл и значение языкового выражения. Совершенно очевидно, что под языковым выражением следует понимать и сообщение, в том числе речь, текст. В свою очередь текст может рассматриваться и как знак. Напомним в связи с этим, что знак (слово, предложение, сообщение) имеет свое значение (предмет, денотат) и смысл (мысль, концепт). Не будем пока вдаваться во все сложности соотношений понятий знак - значение - смысл. Для нас более существенно на данный момент отметить **знаковость как общее системообразующее свойство информации.** Ему могут удовлетворять различные отношения. Хоть мы и различаем такие объекты, как мысль, предмет, слово, подчеркнем ту, может быть тривиальную, но важную мысль, что **коммуникация представляет собой не что иное, как обмен значениями, в ходе которого рождаются новые смыслы.** Проблема, таким образом, состоит в выяснении гносеологической и психологической природы значения механизмов и процессов интерпретации знака человеком по выявлению смысла. Следует заметить, что совокупность знаков, взятых в их связях и отношениях, и правила построения из этих знаков некоторых сообщений изучается разделом семиотики **синтактикой**. Таким образом, **семантическая информация не снимает синтаксическую, а использует ее в качестве своей основы**. Когда говорится о семантике какого-то сообщения, всегда подразумевается, **что говорящий вложил в этот знак, так как один и тот же знак может отображать разные предметы, события или ситуации**.

В рамках семантического подхода была разработана концепция информации, связанная в определенной степени с уровнем знания того, кто получает информацию (понятие "тезаурус"). Согласно этой концепции в тексте содержится какая-либо семантическая информация только в том случае, если под ее воздействием тезаурус приемника увеличивается. **Термин "<u>тезаурус</u>" означает "информацию более низкого уровня, которая необходима для генерации или рецепции информации на верхнем уровне, качественно отличном от нижнего**". Очевидно, в этом случае сообщение ценно для получателя в том случае, если она изменяет его предыдущие знания об объектах и их соотношениях (связях) с другими объектами. **Структура знаний может быть описана как "тезаурус" получателя.** Такого рода представление об информационных взаимодействиях развивалось и в теории научных коммуникаций (А.И. Михайлов, А.И. Черный, Р.С. Гиляревский).

Необходимо отметить, что индивидуум, обладающий определенным "тезаурусом", получает сообщения от окружающего мира по различным каналам **("<u>канал</u>" - любой материальный проводник, с помощью которого сообщение передается от передатчика "А" к приемнику "Б")**. Эти сообщения могут носить различный характер (зрительный, звуковой, осязательный...). Передача сообщения также может происходить в пространстве (зрительные и звуковые сообщения) и во времени (печатный текст, фотографии...), или и в пространстве, и во времени. Все это говорит о том, что сообщение может быть самым разнообразным, и все это знаковое разнообразие преломляется сквозь призму личностного "тезауруса".

Особо в рамках семиотического подхода к информации следует отметить современную, достаточно активно развивающуюся так называемую **когнитивную концепцию информации**. В рамках данной концепции **информация представляется как <u>отчужденное</u> и <u>закрепленное</u> на материальном носителе знание**. Буквально это означает, что **информация есть <u>превращенная форма знания</u>, в которой это знание представлено**.

С точки зрения семиотического подхода информация должна быть представлена в знаковой форме. Универсальной формой ее выражения выступает, прежде всего, естественный язык. Информация есть общественное достояние, которое может быть воспринято и оценено только в обществе.

Исследование понятия информации с использованием качественных критериев явилось перспективным направлением, намечающим путь к объяснению сущности этого феномена. Однако и качественные критерии информации, как отмечают исследователи, также оказались ограничены, так как все они, в той или иной степени объясняя информационные процессы в социальной сфере, не могут быть применены к объяснению информационных явлений в функциональных системах досоциального уровня. Попытка вывести исследования за рамки ограниченной сферы социальной действительности была предпринята в связи с анализом соотношения понятия информации с другими научными и философскими категориями. В частности, была установлена связь информации с "**многообразием**", что существенно расширило представления о содержании понятия "информация". Это создало повод для установления связи понятия "количество информации" и **категории различия (многообразия)**, что позволило **использовать понятие информации применительно к <u>объектам неживой природы</u>**. Так, А. Д. Урсул достаточно убедительно проводит мысль, что **информация является всеобщим <u>свойством материи</u>, <u>мерой многообразия</u> материальных систем.** А. Д. Урсул положил в основу общего определения информации **два**, по его мнению, важнейших ее **признака**: во-первых, информация связана с **многообразием различия**, во-вторых, с **отражением**. В соответствии с этим **информация** определяется им как **отраженное многообразие**. Такого рода многообразие, передающееся от предмета к предмету в процессе отражения, рассматривается А. Д. Урсулом как сущность информационного движения материи.

Примечательно, что рассмотрение понятия "информация" в связи с понятием "отражение" представляет новый качественный этап в изучении феномена информации. Этот этап сопровождается многолетней дискуссией онтологического и гносеологического подходов к пониманию феномена информации, которая особенно разгорелась в восьмидесятые годы XX века.

В связи с этим были предприняты попытки дать удовлетворительную материалистическую интерпретацию понятия "информация" с позиций теории отражения. Исходя из диалектико-материалистической теории познания, отражение является таким же всеобщим свойством материи, как, например, движение. Так, информация стала рассматриваться как философская категория наряду с такими понятиями, как пространство, время, материя. Вопрос, однако, заключался в том, что же понимать под самим отражением. И здесь мнения разделились. Одни авторы - атрибутисты (Б. В. Ахлибинский, Ю.Ф. Абрамов, Л. Б. Баженов, Б. В. Бирюков, К. Е. Морозов, И. Б. Новик, Л. А. Петрушенко, А.Д. Урсул, Н.М. Чуринов и др.) - утверждали, что отражение объективно существует даже в неорганической материи, и приходили к выводу, вслед за А.Д. Урсулом, что "информация свойственна всем видам и формам движения материи, в том числе и неорганической природе...". Другие - функционалисты (В. В. Вержбицкий, Г. Г. Вдовиченко, И. И. Гришкин, Д. И. Дубровский, Н. И. Жуков, А. М. Коршунов, М. И. Сетров, Г. И. Царегородцев и др.) - считали, что отражение должно рассматриваться лишь как нечто "потенциальное" и связывали информацию лишь с уровнем кибернетических систем, и поэтому, по их мнению, неорганическая природа не обладает информацией. Наличие информационных процессов в неживых искусственно созданных информационных системах сторонники последней интерпретации объясняли как заранее заданное и спланированное человеком. Именно человек в данном случае выступает в качестве организующего начала. Без его активного участия информации в такого рода системах быть не может.

Сторонники атрибутивного понимания информации, естественно, считают такую точку зрения ограниченной. К примеру, А. Д. Урсул справедливо замечает: "**Концепция возникновения информации на уровне жизни оказывается методологически неплодотворной для естествознания и поэтому ограниченной, неспособной объяснить все расширяющееся применение методов теории информации в физике, химии, геологии и т. д.**". Отвечая на критику данного им определения информации, А.Д. Урсул поясняет: "**Информация <u>не тождественна отображению</u>, а есть лишь та инвариантная часть, которая поддается опредмечиванию, объективированию, передаче**", поскольку отражение не всегда можно перекодировать и переносить с одного материального объекта на другой. Информация же перекодируется и передается, создавая образы, в которых инвариантом является она сама".

Нетрудно видеть, что **методологические трудности определения <u>сущности информации</u> связаны с <u>многомерностью</u> этого феномена**. При этом разные интерпретации имеют, очевидно, право на существование, отражая различные аспекты этого явления. **По-видимому, почва для синтеза должна видеться в раскрытии природы сложности и полифункциональности понятия "информация", что является выражением этапа бурного становления концепции информации в современном обществе.**

Вместе с тем, следует сказать, что, по мнению ряда авторов, в частности Ю. А. Абрамова, "такое многообразие вполне преодолимо за счет развития средств атрибутивного подхода к информации, включения в него элементов функционального подхода с расширенной интерпретацией". Это преодолимо за счет **логико-теоретического размежевания "информации" и "информационного процесса" и проекции последнего на неживую природу.** Данное "разведение" понятий существенным образом связано с акцентированием внимания на исследовании **системных и структурных характеристик** понятия информации".

Видимо, именно в этом плане следует рассматривать предложенную В. И. Кремянским **концепцию "<u>инфа</u>" как некоторой <u>единицы информации</u>.** Представление об "инфах" как единицах информации позволяет в исследовании теоретико-информационных процессов сместить акценты с количественных аспектов на качественные. Стержневой идеей исследования В. И. Кремянского является использование принципа историзма в выявлении содержательной стороны информации, что обеспечивает возможность воспроизведения исторической динамики перехода от невыраженного ("связанного") типа в информации неживой природе к объектам собственно психическим и социальным. **Концепция "инфа" как некоторой организационной формы информации существенно дополняет понимание разноуровневой природы организации информационных процессов.**

По мнению сторонников функционального подхода, например, Д.И. Дубровского, атрибутивная концепция теоретически неправомерна. При этом Д.И. Дубровский рассматривает самоорганизующиеся системы, как справедливо отмечают многие исследователи, в отрыве от предшествующей эволюции, нарушая тем самым принцип историзма. Это выглядит не совсем убедительным, поскольку Дубровский, связывая появление самоорганизующихся систем с появлением лишь жизни на Земле, по сути, исключает возможность процессов самоорганизации в неживой природе и тем самым фактически утверждает наличие эволюционной пропасти между живой и неживой природой. Между тем, как замечает Р.Ф. Абдеев, благодаря пассивной форме отражения в неживой природе при определенных условиях также возникают процессы стихийной, медленно текущей самоорганизации. Известно, что уже на этом уровне отражения проявляются негэнтропийные тенденции в виде авторегуляции.

С возникновением **синергетики** (работы И. Пригожина, Г. Хаккена), явления самоорганизации в неорганической природе получили естественнонаучное обоснование. Именно в синергетике "идеи о всеобще-универсальном характере процессов самоорганизации материи прочно связаны с представлениями об атрибутивной природе феномена информации, ее организационно-конструктирующем участии в процессе порождения из хаоса устойчивых материальных структур уже на ранних (предбиологических) этапах эволюции мира". Феномен **информации** предстает как "**многостадийный, необратимый процесс становления структуры в открытой неравновесной системе, начинающийся со случайного запоминаемого выбора, который эта система делает, переходя от хаоса к порядку, и завершающийся целенаправленным действием согласно алгоритму или программе, отвечающим семантике выбора".**

Все сказанное позволяет говорить об **информации как фундаментальном <u>свойстве материи</u>, в той или иной форме обнаруживающем себя на разных уровнях ее организации**. Не трудно увидеть взаимодополнительный характер атрибутивного и функционального подходов к пониманию природы информационных процессов, что являет собой весьма важный аргумент для признания существования различных уровней и форм организации информации.

Развивая данную мысль, можно проследить прямую зависимость уровней организации информации от уровней организации материи: **чем сложнее организация материи, тем больше и многообразнее она содержит информации, и наоборот.**

Дискуссия о природе и сущности информации, в ходе которой был рассмотрен широкий комплекс категорий и принципов, послужила основой для разработки общей теории информации, которая, по предложению Э.П. Семенюка и В.И. Сифорова, получила название **информологии**. **Информология мыслится как наука об информации, как наука о законах передачи, распределения, обработки и преобразования информации**.

В 1990 году Н.М. Чуринов, продолжая лучшие традиции атрибутивной концепции информации, предложил свой вариант информологии как теории информационной реальности. По мнению Н.М. Чуринова, "философские основания информологии составляет тот теоретический фактор, который не ограничивает ее изучением информации и поднимает до уровня познания информационной реальности и законов информациогенеза".

Понятие "информационная реальность", по сути, порождено многочисленными дискуссиями о природе и сущности информации, в ходе которых, в частности, были выявлены такие понятия, как "метаинформация", "коинформацня", "движение информации", "паттерн информации", "инф" и др., что и создало предпосылки для появления наиболее общего понятия -"информационная реальность".

Согласно Н. М. Чуринову **информационная реальность** характеризуется такими параметрами своего бытия, как **многообразие, организованность, упорядоченность, сложность, системность**. Информация предстает как явление отражения этого многообразия, упорядоченности, сложности, системности, как особое **состояние информационной реальности.**

Понятие "информационная реальность" позволяет выделить информационный аспект **структурных** (как генетических, так и функциональных) **отношений**, присущих всем формам движения материи, в качестве **самостоятельного объекта познания**. Кроме того, по аналогии с полевой концепцией физических взаимодействий (развитие идей А.Берга, И.Новика, А.Суханова) позволяют представить **информационное взаимодействие** в виде **информационного поля**, а **информацию** в виде **информационной волны**, **разные состояния которой описываются дискретными значениями переменных в аспекте пространственно-временных координат.** Это дает возможность не только констатировать наличие и дать описание особенных (специфических) видов информационных полей, присущих различным формам движения материи, но и выделить (это, видимо, самое существенное) локальные формы системной организации информации (паттерн, ннформоген, информационный ряд, информатив) и на этой основе исследовать динамику становления и функционирования информации в границах реального (текущего) времени и пространства. В результате бытие **информационной реальности** предстает как **сложный, многоуровневый** (в плане конкретных форм организации информации) **процесс**.

Такое понимание информационной реальности, а также динамики ее движения, развития, создает определенную методологическую основу для рассмотрения места и роли информационных процессов в познании.

В самом деле, **<u>процесс познания</u>** может быть представлен в виде **<u>информационного поля</u>** (комбинации, взаимодействия информационных полей), **пространственные и временные параметры которого выражают, в известной мере, структуру и динамику познавательного процесса.** Видимо можно, таким образом, согласиться с тем, что в указанном смысле процесс познания есть и процесс информациогенеза. Означает ли это тождество знания и информации? Вопрос, ответ на который требует более детального рассмотрения соотношения знания и информации.

Подводя некоторые итоги, связанные с детальным и всесторонним изучением определений понятий «информация», сформулированных многими авторами, сделаем некоторые выводы.

- Изложенное многообразие определений информации не позволяет остановиться на одном из определений понятия «информация».

- Рассмотренное многообразие определений информации связано с необычайной многомерностью данного феномена, определяемой спецификой исследования. Исходя из многомерности данного феномена (информации) необходимо определиться с многими аспектами описания информации в различных структурных образованиях. Понятие "информация" являются основополагающим в теории информации. Но, как мы в этом убедились, довольно сложно дать точное определение, что есть «информация». Понятие "информация" окружено десятками других схожих по своему содержанию понятий. На сегодняшний день ясно, пожалуй, одно: среди исследователей содержания этого понятия нет единого мнения. Это обусловлено еще и тем, что исследователи подходят к данной проблеме с позиций различных ее аспектов - гносеологического, логико-семантического, лингвистического, психологического и т.п.

Мы остановимся на нескольких определениях понятие "информация".

Информация - нематериальная сущность, при помощи которой с любой точностью можно описывать реальные (материальные), виртуальные (возможные) и понятийные сущности. Информация - противоположность неопределенности.

Информация – это история. Не существут информации в настоящем и будущем, она (информация) есть только и только **в прошлом**.

Информация – это свойства сущностей, их взаимосвязей и взаимодействий, проявлять (отображать) себя через (посредством) отличительные признаки (в знаковой форме).

Общая теория информации – это, прежде всего, методы описания (представления) сущностей (их прообразов) в **знаковой форме** и их (знаковых форм) преобразований в автоматизированных системах.

1.2. Общенаучные аспекты информациологии

В последние годы мы все чаще говорим о том, что общество вступило в новый этап своего развития, для которого характерен новый способ производства - информационный. Это связано, прежде всего, с процессами информатизации, внедрения информационных технологий в различные сферы жизни. Информация становится основой генерирования знаний, основой коммуникаций, производства и т.д.

Практически ни у кого не вызывает сомнения характеристика современного общества как общества информационного. Исследователи дают различные определения информационного общества, но сходятся в главном: информация в информационном обществе становится доминирующей ценностью; "генерирование, обработка и передача информации стали фундаментальными источниками производительности и власти"; информация превратилась в главный стратегический ресурс.

Однако исторический опыт показывает, что информация или ее отсутствие всегда играли важную роль в развитии как общества в целом, так и отдельного человека. А потому изучение информационного общества должно включать и анализ исторической ретроспективы, понимание роли информации в истории развития социума.

Как мы уже отмечали, понятие информации является одним из основных в современной науке. Становясь предметом изучения многих наук, в каждой из них оно конкретизируется и обогащается. Отсюда - множество определений информации, толкований ее сути: от полного отрицания ее реального существования до крайней апологетики; от философского понимания ("отражение реального мира") до практического, обыденного ("все сведения, являющиеся объектом хранения, передачи и обработки").

С осмыслением роли информации в развитии человечества связана институциализация новых научных направлений, среди которых все более заметное место занимает *информациология*, под которой следует понимать науку об информации, о способах и каналах ее передачи, влияния на развитие человека и общества.

Информациология, по определению основоположника этой науки академика И.И. Юзвишина, - "генерализационно-единая наука о всех информационных явлениях, микро- и макродинамических процессах природы, общества и Вселенной в целом". Иными словами, информациология - это наука об информации, наука, изучающая природу информации, информационные потоки в обществе, все процессы и явления в живой и неживой природе. Информациология - "это единая теория на единой фундаментальной информационной основе; это всеобщая методология и всеобщий информационный метаязык для ученых, специалистов, государственных и общественных деятелей".

Информациология появилась как результат междисциплинарных исследований, на стыке физики, химии, математики, астрономии, биологии, информатики, философии, истории и других фундаментальных наук и вобрала в себя как общенаучные методы, так и специфические методы всех тех наук, с которыми она контактирует. Становясь одной из центральных в ряду наук об обществе, информациология сегодня формулирует и собственные законы, методы, определяет методологию информатизации и информацизации. При этом под *информатизацией* понимается внедрение средств вычислительной техники и массовой информации во все сферы человеческой деятельности, а под *информацизацией* - расширение потоков и каналов информации, усиление информационного обмена, информационных взаимодействий. Информатика, как наука, "изучающая процессы приема, обработки, запоминания, хранения и передачи информации", является лишь составной частью информациологии.

Информациология базируется на фундаментальном принципе информациологического подхода, суть которого связана с изучением внутренних механизмов и закономерностей движения информации во Вселенной. При таком подходе сначала исследуются отношения внутри вещей, предметов или их элементов и их отношения с внешним окружающим миром, а лишь затем производится анализ и синтез их свойств. После классификации внутренних отношений свойств и их внешних отношений по признакам последних анализируются и синтезируются свойства на базе информации. Иными словами, главным при информациологическом подходе становится "изучение скрытых (внутренних) отношений структурированных элементов, их свойств и признаков", а также изучение отношений внутренней информации с внешней информацией, с внешним миром. Т.о., главным объектом изучения становится информация "внутри нас, между нами и вне нас".

Своим предметом информациология называет исследование "информационных микро- и макродинамических процессов и явлений, происходящих во Вселенной". При этом важным для информациологии остается изучение и практической стороны функционирования информации - процессов возникновения, передачи, хранения, обработки информации, что, по существу, составляет предмет информатики. Методом познания и отображения информации, по мнению информациологов, является практика, подкрепленная теоретическими исследованиями и расчетами.

В категориях информациологии, "информационная сфера, образуемая информационно-познавательной деятельностью людей, становится фундаментальной основой" развития. На нее опираются экономика и социальная сфера, оборона и национальная безопасность, наука и образование; более того, все стороны человеческой жизни сами становятся частью информационной сферы. Информация, способы управления ею, отношения по поводу информации определяют состояние общества, его жизнь, процессы, тенденции и перспективы развития.

Информациология определяет информацию как новое универсальное средство для объяснения мироздания, всех процессов и явлений природы. Информация рассматривается как первооснова существования Вселенной. Если в популярном толковании под информацией понимаются сообщения или сведения о природе и обществе, о явлениях и процессах, протекающих во Вселенной, то информациологи определяют информацию как "всеобщие самоотношения, самоотображения и их соотношения, представляющие универсальную генеративную информационногенную среду, являющуюся основой проявления и функционирования вакуумных и материальных сфер вселенной"; под информацией понимается "единая фундаментальная сущность проявления всех объектов, предметов, явлений и процессов природы", "всеобщая генеративная основа природы и общества", "универсальное генеративное поле Вселенной и универсальное начало всех начал".

Данное понимание сути информации - максимально расширительное, выходящее за пределы и функциональной, и атрибутивной концепций информации, которые сложились в философской науке на основе противоположных подходов к феномену информации. Как мы уже отмечали, сторонники атрибутивной концепции квалифицируют информацию как свойство, присущее всем материальным объектам, как атрибут материи. Сторонники функциональной концепции, напротив, связывают информацию с функционированием самоорганизующихся систем, считая, что информация появилась лишь с возникновением жизни. Информациологи же, определяя информацию как основу природы и общества, по существу, объединяют оба эти подхода и вводят собственную классификацию информации, разделяя ее на абсолютную и относительную, естественную и искусственную. При этом под естественной информацией понимаются "все безусловные самоотношения, соотношения и отображения в природе и обществе", а под искусственной информацией - "все не безусловные отношения и отображения материальных объектов и предметов, придуманных и реализованных человеком". Т.о., естественная информация больше укладывается в рамки атрибутивной концепции информации, а искусственная информация - в рамки функциональной концепции.

При этом естественная информация может проявляться как электрическая, магнитная, акустическая, ядерная, электромагнитная, осязание, обоняние и т.д. Искусственная же информация - это все виды проявления создаваемой человеком информации (материзованной и дематеризованной): предметы домашнего обихода, те-лепередача, стихотворение, музыка, идея, теория и т.д.

С позиций такой классификации история занимается изучением преимущественно искусственной информации, в то время как естественная информация обычно является объектом исследования естественных наук. Информациология позволяет объединить подходы к изучению информации и начать исследование в историческом ракурсе не только искусственной, но и естественной информации.

Не ставя задачи критики информациологии, согласимся с тем, что информация действительно играет огромную (определяющую - ?) роль в развитии общества, что убедительно подтверждается историческим опытом. От глубокой древности до современности "восприятие человеком пространства и времени, осознание себя в пространственно-временной метрике бытия было и остается до сих пор по своим механизмам и средствам сугубо информационным процессом". Роль информации в развитии общества состоит в том, что она управляет этим развитием.

В истории развития человечества информационные процессы изначально играли важную роль, уходя своими корнями в механизмы поведения и общения, постоянства и развития. Взаимовлияние человека и информации огромно. С одной стороны, развитие человечества, человеческие способности вызывают к жизни многообразные и сложные процессы накопления, запоминания, передачи и обработки информации, увеличения ее объемов. С другой стороны, нарастание объемов информации вызывает обратный эффект - усиливает потребность в новых средствах коммуникации, что неизменно влечет переизбыток информации и возникновение информационных барьеров. Выход из информационных барьеров находит человек, в очередной раз усовершенствуя информационные процессы, создавая новые механизмы накопления, передачи и обработки информации.

Исторические истоки информатизации прослеживаются в создании искусственных средств хранения и передачи информации. Главными вехами на этом пути стало появление письменности, кни-гопечатания, почты, периодической печати, телеграфа, телефона, фотографии, радио, телевидения и, наконец, персонального компьютера и телекоммуникаций. При этом качественные изменения в способах хранения информации, передачи ее оказывались всякий раз связаны с техническими открытиями: от возникновения письменности до появления персональных компьютеров.

История человечества тесно связана с историей развития и накопления информации. Все переломные моменты в истории общества связаны с накоплением информации и появлением новых способов и средств информационного обмена. Накопление информации ведет к расширению информационных полей и изменению механизмов их формирования. С течением времени изменяется и система социокультурного восприятия информации. Ускорение информационных потоков оказывает влияние на темпы и характер развития общества.

Исторический опыт показывает, что общественное развитие невозможно вне информации и каналов ее распространения. Расширение информационных каналов всегда приводит к ускорению темпов развития общества. Однако степень усвоения информации зависит от множества факторов, которые формируют информационное поле (пространство): социокультурных, профессиональных, половозрастных и т.д.

Как уже отмечалось, именно информация - естественная или искусственная, правдивая или намеренно искажающая факты, официальная или обыденная, экономическая, производственная, экологическая и др. - оказывается главным источником движения общества, развития человека. Информация лежит в основе принятия решений, формирования мировоззрения, коммуникативных отношений в обществе. Так, в терминах информациологии, создание картины мира представляет собой процесс систематизации информации, ее упорядочивания в единую схему.

В обществе постоянно циркулирует огромное количество информации, которая оказывает влияние на сознание, поведение людей, формирует их досуг, определяет мировоззрение. Информация представляет собой фактор, управляющий общественным развитием. Непредсказуемость информации позволяет ставить, с одной стороны, вопрос о непредсказуемости истории, а с другой - вопрос о возможности информационного моделирования в истории человечества.

Чем продиктована столь значительная роль информации в развитии общества? Вероятно, прежде всего, тем, что одной из интегративных потребностей человека выступает потребность в информации, информационная потребность, которая включается во все виды человеческой деятельности. Информационная деятельность составляет основу механизма развития социальной инфраструктуры и потому предваряет, сопровождает и завершает любую деятельность субъекта.

Информация в обществе выполняет различные функции, среди которых можно выделить функции коммуникации в обществе, управления или целенаправленного воздействия на характер принятия решений, адаптации системы к внешней среде, социальной памяти.

Особое значение имеет коммуникативная функция информации, поскольку именно она оказывается ядром социокультурного развития, диалогичного по своей сути. Культуры, по существу, формируются на основе коммуникативных процессов, в результате коммуникативной деятельности. Если признать, что динамика культурного развития определяется взаимодействием традиций и инноваций, то легко убедиться в том, что в основе культурного развития лежат информационные процессы: возникновение, распространение, усвоение, передача и хранение информации. При этом традиция может рассматриваться как форма закрепления информации о прошлых состояниях общества, значимой для программирования его последующей жизнедеятельности; инновация - это форма распространения новой информации, степень усвоения которой зависит от характера информационных полей, в которые она попадает, от воздействия внешних факторов и т.д.

Информация выступает как источник культурного развития и основной канал этого развития. Она наследуется в форме социального опыта и способствует возникновению социальной памяти. Место и роль информации в структуре социальной памяти определяется ее регулятивным началом в процессе взаимодействия традиций и инноваций в культурном развитии.

Исторически сложились различные источники информации: мифы, слухи, законы, указы, книги, фотографии, Интернет и т.д. Для их распространения используются различные каналы, которые могут рассматриваться как каналы культуры. Усложнение источников и каналов информации, появление новых связано, во-первых, с накоплением информации и, во-вторых, с новыми техническими открытиями, которые направлены на ускорение процессов информационного обмена.

Информационные потоки становятся основой диахронного и синхрон-ного развития культуры. Обмен информацией с обратной связью обеспечивает синхронное движение информации, а диахронное движение гарантирует передачу информации от поколения к поколению.

При этом для информациологии наиболее важным становится синхронное измерение культуры, поскольку именно оно дает возможность понять отношения между информационными потоками, отношения внутри информации и вне ее. Историки же больше внимания уделяют диахронному измерению истории.

Пониманию механизмов взаимодействия информационных потоков в истории и культуре способствует теория массовых коммуникаций, в терминах которой каждый факт культуры прошлого может рассматриваться как некоторое сообщение, информация. Тогда все взаимодействия в истории выступают как коммуникационные отношения, основанные на передаче информации по различным каналам.

Открытый информациологами закон сохранения информации - мечта историков. Если информация действительно не исчезает, а лишь изменяет формы, механизмы трансляции и др., можно предположить, что историческая истина универсальна, а потому достижима. Необходимо лишь научиться не только управлять информационными потоками современности, но и распознавать (раскодировать) информацию о прошлом и из прошлого, выявлять скрытую информацию из общего ее потока.

Как соотносятся информациология и история? Применимы ли методы информациологии в исторических исследованиях? И, напротив, что может дать изучение истории для развития информациологии?

Информациология трактует историю как "информациологическую летопись и информациометрическую идентификацию глобальных общественно-государственных процессов возникновения и развития человечества". При этом все отрасли исторической науки (историография, источниковедения, экономическая история, историческая география и др.) рассматриваются как составляющие единого информациологического комплекса, а все исторические источники являются источниками информационными, или информациологическими, т.е. несущими, хранящими и передающими в себе информацию.

Т.о., информация играет важнейшую роль и в истории, и в информациологии. Каждый исторический источник представляет собой источник информации, к изучению которого применимы, в первую очередь, источниковедческие методы, направленные на извлечение информации из источника, ее переработку и хранение. Но, вместе с тем, исторический источник - это результат движения определенных информационных потоков, лишь та часть информации, которая по каким-то причинам оказалась зафиксирована в текстах. Ее, как правило, и изучают историки. Но тогда возникает ряд вопросов: какая информация являлась первоисточником? Что обусловило отбор информации, сохраненной во времени? Какой объем информации оказался зафиксирован? Каковы механизмы возникновения и движения исторической информации?

Историки уже начали поиск решения подобных вопросов. Характер взаимодействия информации и исторического источника, механизмы распространения исторической информации, закономерности ее фиксирования в письменных источниках - далеко не полный круг проблем информационного источниковедения, поставленных еще на рубеже 1970-х - 1980-х годов И.Д. Ковальченко и В.И. Бовыкиным, чьи работы по данной проблеме были опубликованы лишь в конце 1990-х годов .

В последнее время интерес историков к проблеме информации и ее роли в истории усилился. Подтверждением этого стала инициированная К.В. Хвостовой и Л.И. Бородкиным и организованная 22 марта 2002 г. историческим факультетом МГУ и Институтом всеобщей истории научная конференция "Роль информации в формировании и развитии социума в историческом прошлом", которая зафиксировала первые шаги на пути решения конкретных вопросов, связанных с пониманием информационной сущности развития общества.

Однако, решение практических вопросов требует усиления внимания к проблемам теоретического осмысления роли информации в развитии социума, механизмов влияния информации на общественное развитие, соотношения понятий "информация" и "история", "информация" и "исторический источник". Необходим поиск новых методов исследования информации - методов, позволяющих изучать не только зафиксированную в историческом источнике информацию, но и ее природу, механизмы возникновения и движения информации в исторических событиях и процессах.

И здесь историкам должна помочь информациология, которая также проявляет интерес к подобным вопросам. С точки зрения понимания информациологии как науки об информации изучение истории развития информации в обществе должно стать одним из ее приоритетных направлений.

В поле зрения истории оказываются закономерности возникновения и функционирования всех видов информации, закономерности и последствия информационных процессов в обществе; в поле зрения информациологии - внутренняя сущность информации. По существу, **если <u>история</u> изучает содержание информации, то <u>информациология</u> - ее природу, механизмы движения, организации и самоорганизации, что связано с характером коммуникативных связей в обществе.** Изучение информационных процессов прошлого позволит проследить динамику развития общества, глубже понять причины и характер социального поведения, социальных взаимодействий. Выявление механизмов возникновения информации, источников и каналов ее распространения, структуры информационных полей и динамики их развития, определение роли информации в различных исторических ситуациях - все это даст возможность выявить информационную природу исторического развития и определить его результат.

Объединение усилий историков и информациологов позволит применять и адаптировать методы информациологии для изучения истории, и, наоборот, методы исторических исследований - для развития науки об информации.

1.3. Кибернетическая концепция информации

(Когнитивная и кибернетическая концепции информации и проблема соотношения информации и знания.)

В данном подразделе ставится задача дать анализ основных концепций информации в аспекте соотношения "информации" и "знания".

Как уже было отмечено выше, известное многообразие определений информации связано с необычайной многомерностью данного феномена, определяемой спецификой исследования.

Общим для когнитивной и кибернетической концепций **информации** является понимание ее как **сообщения**, передаваемого по каналам связи в рамках такой специфической формы бытия, как социум. При этом под **<u>сообщением</u> понимается кодированный элемент <u>события</u>, зафиксированный источником информации и выраженный с помощью последовательных условных физических символов, образующих некоторую упорядоченную совокупность.**

Для представителей когнитивной концепции информации, информация есть феномен, присущий исключительно социуму, человеческому обществу. Язык при этом в своих многообразных построениях выступает естественной (исторически сложившейся в процессе антропосоциогенеза) формой хранения и передачи (в процессе общения) информации.

Традиционная концепция познания, как известно, напрямую связывает знание как ставший результат (итог) познавательного процесса с его воплощением в содержании понятий (системы понятий) языка (знание как целостная, систематизированная совокупность понятий, система высказываний и т. п.). Это означает, что так понимаемое **знание** в своей изреченной (устной или письменной) форме - **упорядоченная система физических знаков, имеющих инвариантное, общезначимое для всех или многих людей значение** - представляет собой уже иную, чем знание, информационную реальность. Видимо, именно это обстоятельство дает когнитивистам основание для понимания **информации как превращенной формы знания.**

Знание есть итог познавательной деятельности, оно личностно. Социальная же информация выступает как общественное достояние, которое может быть воспринято (передано другим) и оценено только в обществе. С точки зрения такого соотношения знания и информации, знание, очевидно, можно передавать от одного субъекта к другому по каналам коммуникативных связей. **Информация есть превращенная форма знания. Знание суть превращенная форма информации**.

Основатель кибернетики Н. Винер определил информацию как обозначение содержания, полученного из внешнего мира в процессе нашего приспособления к нему и приспособления к нему наших чувств. Наиболее содержательное свое воплощение информация получает в языке как культурно-историческом продукте. Какой-либо иной формы объективации знания человечество не выработало. Поэтому процесс **познания (знание),** утверждает представитель данного подхода в когнитивной психологии Р. Л. Солсо, **представляет собой не что иное, как упорядоченное накопление информации**. В соответствии с этим приращение информации квалифицируется как приращение знания. При этом представители кибернетического подхода, признавая социальный статус информации, функционирующей в обществе, отказывают в социальной природе самому субъекту познания, связывая знание с процессом информированности общества, а не со структурой сознания. Действительно, многообразные формы объективации процессов познания представляют в своей совокупности мир бытия социальной информации, по выражению К. Поппера, - "**третий мир**" (который существует наряду с объективным и субъективным мирами). **Это мир объективного знания, в котором, как было показано, приращение информации означает приращение знания, но только без субъекта, без личности.** И все было бы прекрасно, если бы не одно фундаментальное обстоятельство: знание (процесс познания) по своей сути некумулятивно не складываем, не суммируем из прирастающей информации. В этой связи следует отметить критику концепции "третьего мира" К. Поппера М. А. Розовым, согласно которой мир объективного знания не может функционировать самостоятельно, если исключить передаваемые в культуре как эстафета образцы понимания текстов, хранящих знание. Само исходное **знание** о том, как обращаться с текстами, извлекая из них знание (как понимание знаниевых атомов текста), **можно получить только через образцы**. Вместе с тем вызывает сомнение положение, что именно через передачу образцов осуществляется передача знания. Справедливо возникает вопрос, через образцы чего: понятия, рассуждения? Но ведь это не передача знания. Это скорее передача способа, каким знание может быть обретено субъектом, передача образцов, происходящая в процессе коммуникации. Это, как уже было отмечено выше, способ существования знаниевой системы (системы смыслов, значений и т.п.). **Само же знание передать нельзя, как, например, информацию по тем или иным каналам связи**. И здесь следует вспомнить слова М. К. Мамардашвили: "Знание не пересаживаемо из головы в голову... никто вместо другого не может ничего понять, понять должен сам..., и этот акт понимания "самим" не выводим ни из какой цепи обусловливания этого понимания, он должен совершиться или не совершиться...". По мнению М.А. Розова, попперовское объективное знание - это не что иное, как мир книг (текстов), хранящийся на полках библиотек, который, очевидно, будет существовать. даже тогда, когда исчезнет сам человек. В самом деле, **мир книг (текстов) - это не та, видимо, "материя", которая образует знание. Это скорее информация, представленная определенной семиотической организацией, заметим, именно организацией, особой знаковой системой. Необходимо отличать знание от его материального носителя** (текста в данном случае). Такого рода информация нуждается в дешифровке, в понимании, наконец, которое всегда личностно, неповторимо ("понять должен сам..."). Теперь, наверное, уже можно заключить, что **знание в объективированной форме, то есть определенная система логически организованных высказываний и предложений, выраженных в языке, зафиксированных в текстах и функционирующих в обществе как продукт человеческой деятельности, есть не что иное, как информация.**

Некоторые исследователи высказывают мысль о том, что коммуникация не сводится только к передаче информации, а информирование - к аккумуляции информации. Для осуществления этих процессов необходима креативность получателя, дающая ему возможность творческого соучастия в коммуникационных процессах. Эта позиция весьма близка к точке зрения М. К. Мамардашвили. В самом деле, информация с позиции передающего, представляет собой зафиксированное сообщение о событии, а с позиции принимающего - управляющий сигнал, побуждающий к определенным действиям. Но возможна и ситуация, когда речь идет о сообщении, указывающим на образец того, как нужно действовать в определенной ситуации. В этом смысле формулировка физического закона или инструкция для проведения того или иного эксперимента устроены одинаково, то есть они прямо или косвенно задают способ действия в определенных ситуациях. Но знание о том, что имеет место та или иная ситуация, передается как информация. Например, к информации такого типа относится каждый конкретный знак уличного движения. Он обозначает ту или иную ситуацию и предупреждает о ней. Информацией другого типа будет инструкция о знаках уличного движения. Она уже указывает на способ действования при виде тех или иных знаков на улице. Иными словами, к **информации первого типа** относится всякого рода **статистическая, справочная информация**, а к **информации второго типа**, так сказать, **содержательная информация**. В первом случае информация выступает в качестве информационного **сигнала**, а во втором - в виде **особой знаковой формы**, отчужденной от непосредственного носителя и тем самым доступной тем, кто обладает умением извлекать смысл из информации.

Так или иначе, для того, **чтобы информация "превратилась" в <u>знание</u>, она должна быть <u>усвоена (освоена) сознанием субъекта</u>**. В этом плане, справедливо замечание Ю.А. Шрейдера, подчеркивающего, что информация, которая для кого-либо представляет определенную ценность, должна обязательно пройти через его (субъекта) "когнитивный экран". Субъект выбирает из потока информации то, что ему нужно. **Только <u>субъект</u>, обладая определенным уровнем знания, способен <u>осмыслить и понять</u> информацию.** Даже новейшие автоматизированные информационные системы не в состоянии вложить в пользователя готовое знание. Они лишь доставляют ему определенную информацию. Таким образом, **"информационно-знаниевые процессы включают преобразование человеческих (в значительной мере личностных) знаний, существующих "здесь" и "теперь", в социальную информацию, доступную "везде" и "всегда" (своеобразный "<u>третий мир</u>" К. Поппера), которая предполагает возможность извлечения из нее знания".** По сути, здесь речь идет о процессах переработки информации, что, в известной мере, составляет основу всякого процесса познания. В этом смысле этапы процесса познания (начиная с формирования чувственного образа и заканчивая процессами аналитического и синтетического мышления) могут рассматриваться как определенные ступени преобразования информации. Иначе говоря, каждому уровню познавательного процесса предшествует соответствующая определенно организованная информация. К примеру, уровню чувственного познания, на этапе которого формируется определенный образ (как целостность), предшествует, видимо, некая чувственная информация в виде ощущения и восприятия. Ведь ощущая, мы также перерабатываем поступающую к нам информацию. Очевидно, на уровне аналитического и синтетического мышления мы имеем дело с иной, качественно отличной информацией. В этом отношении **содержания понятий, которыми мы оперируем в языковой коммуникации, могут быть представлены как информация (своего рода "третий мир" К. Поппера**). Не случайно различают научно-техническую информацию, эстетическую информацию и т.п.

Ранее было отмечено, что организация информации может быть представлена в форме так называемых "паттернов", "инфов", "информогенов", "информативов" и т.п. как элементах, формах разноуровневой организации информационного процесса (информационной реальности), позволяющих, кстати, оценивать информацию, и с количественной, и с качественной стороны. Иными словами, **информация на разных этапах познавательного процесса организуется и функционирует по-разному**.

Важно подчеркнуть значение психологических механизмов закрепления информации (память и т.п.) и самого мышления (как фиксируемой в памяти связи элементов познавательного процесса относительно целостности, точнее, в рамках целостности познаваемого объекта). Исследователям в области психологии давно известно, что информация хранится в памяти в виде определенных смысловых структур. Вот что, например, говорит И. Хофман: "**Для построения образа объективной реальности требуется интеграция разделенных в пространстве и времени, но объективно связанных между собой сведений. Такая интеграция осуществляется в форме семантической организации разрозненных данных в целостные структуры".** По мнению АЛО. Агафонова, Хофман здесь говорит о том, что всегда имеет место перевод информации, содержащейся в сенсорном воздействии, в ее смысловой аналог. В этом плане информация имеет смысловую природу и никакую другую, что позволяет объяснить и феномен понимания. С таким выводом можно согласиться, если речь идет о социальной информации (информации, функционирующей в обществе), ибо **в информации самой по себе никакого смысла нет. Социальная информация потенциально имеет смысл, что предусматривает процесс ее "раскрытия**". Очевидно, что и само осмысление (как процесс понимания) может носить различный характер и будет зависеть, в том числе, и от уровня организации представленной информации. В этой связи интересны представления относительно структуры памяти так называемых когнитивноориентированных психологов. В частности, Норман считает, что знания структурируются в памяти в виде определенных смысловых блоков. В "семантической цепи" (каждого из таких блоков) все разрозненные смысловые данные объединяются в целое. Иначе говоря, ранее полученная информация хранится в памяти. В этом смысле **память представляет собой многомерное семантическое пространство, которое в содержательном аспекте заполнено разными семантическими элементами**. Очевидно, такие представления о памяти вполне можно соотнести с понятием "когнитивный экран", о котором упоминалось ранее.

Мысль о зависимости уровня знания (его глубины) от определенного уровня организации информации подтверждается и в рамках соотношения двух определений информации, соответствующих когнитивной и кибернетической концепциям. Поясним данную мысль. **Что такое сигнал? Это определенный знак, физический процесс (или явление), который несет сообщение, информацию о чем-либо**. **В этом смысле сигнал есть сообщение в том числе**. Очевидно, виды сигнала, его уровни могут носить различный характер. Это может быть конкретный раздражитель, например, свет, звук, боль, или то, что, в частности, формирует первую сигнальную систему как систему условно-рефлекторных связей. Это может быть и непосредственный раздражитель (речевой сигнал), формирующий уже вторую сигнальную систему. Так или иначе, первая и вторая сигнальные системы являются теми или иными формами отражения действительности. Заметим при этом, что **информация**, как уже было отмечено ранее, **есть отраженное многообразие, содержащее такие типы многообразия, как "сложность", "упорядоченность", "организация"**. Нетрудно предположить, что **первый сигнал будет характеризовать менее сложный уровень организации, чем второй**. Становится очевидной и другая взаимосвязь: чем более высок по составу уровень организации информации, тем, очевидно, потенциально более глубок уровень знания. При этом понимание информации как управляющего сигнала, снимающего неопределенность в поведении управляемой системы, свидетельствует о том, что **информация не есть еще знание**, и, вместе с тем, подтверждает коммуникативную природу той формы ее функционирования, которая реализуется в социуме.

По мнению многих исследователей, информация как управляющий сигнал может превратиться в качественно иные информационные образования, с иными функциональными свойствами. В этом отношении показательна ситуация выбора, в которой порой оказывается человек. Получив от системы информацию о запрещении по каким-либо объективным причинам того или иного варианта поведения, мы оказываемся в положении управляемой извне системы. Тогда выбор становится исключительно личностным поступком. Из сказанного напрашивается вывод о том, что информация в данном случае представляет собой нечто качественно иное, чем информация как управляющий сигнал. И это качественное различие обусловливается присутствием человека. **Только человек способен извлечь из информации, закрепленной на каком-либо материальном носителе (бумаге, ЭВМ и т.д.), реализовать человеческую свободу выбора.** На это обстоятельство указывают Ю. А. Шрейдер и А.А. Лазаревич, полемизируя с основными положениями кибернетических установок. Подобные превращения, по свидетельству А. А. Лазаревича, воспроизводящего основные установки когнитивной концепции, характеризуются постепенной нейтрализацией информационно-управляющей составляющей собственно личностным осмыслением поступающей информации. Причем в результате этого процесса "увеличивается доля информации, которая превращается в знание в результате личностного преломления", но отчужденное от непосредственного владельца и объективированное на материальных носителях оно вновь превращается в информацию. С точки зрения А.А. Лазаревича, преимущество когнитивной концепции состоит в учете человеческих личностных качеств. "Информация, - пишет А.А. Лазаревич, - потому и является информацией, что она может быть воспринята и оценена". Кроме того, это, по его мнению, подчеркивает социальные параметры информации. Нетрудно видеть, что в приведенном высказывании А. А. Лазаревича "результат личностного преломления" (знание) и "информация как превращенная форма знания", отчужденная от своего носителя, по сути, тождественны. Но что такое превращенная форма? Это некое отождествление знака и предмета. В научно-теоретической деятельности это есть отождествление "неосознаваемой абстракции с объектом, то есть нерасчлененность объекта и способа деятельности, объекта и знания". Иначе говоря, это есть отождествление понятий (как некоторых слоев языковой деятельности) и объектов. Такого рода отождествление позволяет перевести понятия в область лингвистического автоматизма в процессах коммуникации. В этом случае знаковая система замещает некоторые моменты содержательной деятельности сознания посредством понятий, слов и т. п. В мышлении, "понятие замещения, осуществляемого превращенной формой, описывает те образования, которые не требуют для своего действия теоретического осознания и расчленения всех их элементов на уровне понятия...". В контексте нашей проблемы очевидно (как это уже отмечалось), что в когнитивной концепции информации под самим **знанием понимается определенное содержание понятия, слова=знака. Однако, видимо, знание не есть содержание понятия, хотя без понятия, слова=знака знание не функционирует.** В этом смысле знание не является неким окончательным, раз и навсегда ставшим итогом, результатом процесса познания, хотя, опять - таки, и без него нет знания. Знание есть некоторая функциональная система, существующая в форме познавательного процесса и существенно связанная с коммуникативной (общественной) предметно-практической (деятельностной) природой человеческого индивида, личности. Из этого следует, что "личностное преломление информации" представляется неким особым состоянием сознания, возникающего в момент "понимательного усилия" по извлечению смысла, являясь всякий раз неким "мерцающим", постоянно возникающим результатом процесса осмысления. **<u>Знание</u> - это всегда момент <u>понимания</u>**, и, следовательно, "личностное преломление информации" не может выражать некоего автоматического процесса "превращения знания в информацию" и обратно.

Современные процессы информатизации общества включают широкий спектр проблем. **Основополагающее значение среди них имеют собственно <u>информационные процессы, их структура и содержание</u>**. Какова структура и содержание этих информационных процессов? Являются ли их основой чисто информационные компоненты или же в их основе имеют место быть "трансформации функциональных свойств информации и ее переходы в знание и обратно"? В философской литературе данный круг вопросов получил свое обсуждение в связи с понятием информационно-когнитивного продукта, который при желании может быть "расчленен" в соответствии с определенными оценками - критериями, предъявляемыми к информации и знанию как сущностям разной природы". Информация потому и есть общественное достояние, что может быть воспринята и оценена. Так вот, такого рода информационный продукт, якобы, имеет **информационно-знаниевую структуру, то есть состоит из знания и информации**. Он воспринимается сознанием пользователя, для которого, прежде всего, важны те его качества, на основании которых может быть индуцировано его (пользователя) личностное знание. Для авторов, таким образом, совершенно очевидно, что "не всякая информация является знанием, в то время как знание по своей природе информативно". Проецируя такого рода мысли на реальные условия функционирования "интеллектуальных систем", мы, действительно, вслед за автором, обнаруживаем рядом человека с его собственным "тезаурусом" знания и компьютер с определенным информационно-знаниевым "продуктом", в качестве которого могут выступать как объективированные формы знания, так и менее организованные сведения и факты. Все это по отношению к пользователю "является некоторым "**информационным продуктом**", в отличие от реконструируемого на основании его личностного знания". При этом знания пользователя (личностные знания), социализировавшись, могут выступать в качестве нового информационного продукта. "В основе создания информационных продуктов лежат информационно-когнитивные процессы, позволяющие дать пользователю такое представление знаний, на основе которого он может получить нужное ему знание". Иначе говоря, **информационный продукт создается на основе информации, возникающей в информационно-когнитивном процессе.** Однако информационный продукт не только возникает, но и служит материалом для последующего информационного когнитивного процесса, в результате чего опять-таки возникает личностное знание, которое, социализировавшись, рождает новый информационный продукт. Далее уточняется само представление о структуре информационного продукта, состоящего не только из превращенного знания, но и из информации, которая, в свою очередь, имеет объективные и субъективные стороны. Действительно, с одной стороны, нужно признать наличие в природе **объективной информации**, то есть что **любая сущность информационно нагружена**; с другой - функционирование функциональных систем основывается на субъективных (человеческих) оценках восприятия объективно существующей информации. Таким образом, в информационно-когнитивном процессе мы имеем дело с **личностным знанием** и **объективированным знанием**, а также с некоторыми другими данными как-то прошедшими через сознание человека, но знанием не являющимися, в силу наличия у последнего (знания) определенных критериальных оценок. **Движение информационного продукта имеет <u>циклическую</u> природу**. Первый цикл - это цикл использования объективированных форм знания и данных, то есть наличной информации; второй - воссоздание личностных знаний пользователя. Два других цикла связаны с превращением потенциального продукта в актуальный, то есть с представлением личностных знаний и включением в движение неизвестных ранее объективных источников и видов информации. В конце концов, "с этой "границей" (моментом актуализации информации) и связано принципиальное различие информации и знания".

В соответствии с изложенными ранее представлениями о знании и информации, это сущности разной природы. Возникает вопрос: можно ли объединять "знание" и "информацию" в некий единый движущийся информационный продукт? Правомерно ли, в рамках нашей проблемы, само понятие информационного продукта? Если да, то в каком смысле?

На наш взгляд, движение так называемого информационно-когнитивного продукта следует соотнести не с чем иным, как с самим, в известной мере, познавательным процессом (только в несколько ином представлении), а циклы движения информационно-когнитивного продукта - со стадиями развития познавательного процесса.

В познавательном процессе, понимаемом как процесс "раскрытия" информации, по всей видимости, можно выделить **два плана**. Первый план - "схватывание" пустой еще формы, подлежащего познанию феномена (информация как сообщение, как некоторая совокупность знаков, их значений); и второй план - выявление функциональной связи между знаками, иными словами, усмотрение их "смысла" и, стало быть, понимания. Последнее и позволяет говорить нам о знании. При этом следует иметь в виду, что без наличия той или иной формы так называемого "предзнания" (или "тезауруса" знания) ни сам факт фиксации информации, ни последующий процесс ее осмысления (что, собственно, и представляет собой процесс познания) очевидно невозможны. Наличие новой информации, на наш взгляд, представляет собой некую пусковую (запускающую) фазу познавательного процесса. Вместе с тем, необходимо иметь в виду, как уже было отмечено, что информация и знание пребывают и функционируют на разных этапах познания по-разному. Причем без той или иной информации как базы данных и без знания в различных его формах (предзнания и т.п.) нет процесса познания. Тогда, всякий раз, познавательный процесс действительно имеет информационно-знаниевую природу и может быть представлен, в известной мере, диалектикой: **информация - знание - информация - знание и т.д.** И, наконец, механизмом перехода информации в знание и наоборот не может служить механизм превращения некоего потенциального продукта в актуальный, как это считает А.А. Лазаревич, проясняя смысл понятия информационного продукта и информации как превращенной формы знания. **Знание не может быть "превращено" в информацию, а только, в известной мере, выражено в некоторой символической форме, в знаках, точнее, в системе знаков, их значений и смыслов.** В этом отношении **знание в интересующем нас смысле есть категория, относящаяся и к личности, и к обществу, поскольку оно может функционировать как феномен личностного сознания только в рамках социума (человеческого общества).** Социальная информация же в принципе принадлежит только обществу и выполняет посреднические функции в межличностной коммуникации. Только **такого рода информация**, циркулирующая в социальных системах, в социальном управлении, в формах, выработанных в процессе социализации последующей истории человеческого общества, **может быть понята как отраженное в обществе многообразие природных и социальных явлений и обладает такими характеристиками, как достоверность, полнота, доказательность и т.п.**

Сказанное позволяет уточнить представление о **социально-информационной реальности**. **Как социальная форма движения материи информационная реальность субъективна и объективна одновременно.** Ее объективность проявляется в том, что она существует вне и независимо от сознания человека и представляет собой, говоря словами Н.М. Чуринова, "своеобразное инобытие информационной реальности". Ее субъективность заключается в том, что сама информационная реальность субъективно вовлекается в человеческий мир, где обнаруживает **специфические свойства, функции и законы**. В этом отношении **социальная информация** несет на себе глубинный след всех **связей и отношений**, характерных для общества, которые отражаются в информации. Человек как основное звено социальной системы, как основной субъект и объект управления, как субъект предметно-практической деятельности пользуется информацией. И прежде всего для того, чтобы познавать окружающий мир.

Социально-информационная реальность может рассматриваться как та **семиотическая среда, или семиотическое информационное пространство**, через которое любой человеческий индивид, прошедший социализацию, может получить информацию, которую, однако, еще следует (подобно знаку) дешифровать и, наконец, понять (наполнить смыслами), позволив тем самым субъекту в соответствии с его личностным ее пониманием (знанием) активно (то есть сознательно) включиться в социальный процесс своей жизнедеятельности, пополняя информационное многообразие социально-информационной реальности. При различных процессах коммуникации, имеющих место в обществе, информация становится доступной для других, выполняя тем самым роль (функцию) запускающего фактора познавательных процессов в сознании других субъектов коммуникации. Знание потому и нельзя вычленить из познавательного процесса и рассматривать как некоторое самостоятельное явление, что оно возникает в форме субъективного процесса, порождающего момент понимания, который, в силу предметно-практического характера и социальной формы реализации познавательных отношений, постоянно стремится выйти за границы своего сиюминутного существования. Вот с этой-то "границей" и связано, видимо, принципиальное отличие "информации" и "знания". **Такая концепция предполагает под знанием в том числе определенное умение использовать информацию, имеющуюся у человека в форме данных, для ее активного применения и переработки в целях получения нового знания.** В самом деле, компьютер как компонент интеллектуальной системы знанием не обладает. В него человек закладывает информацию, причем ту ее часть, которую удается формализовать в степени, достаточной для представления в виде данных. **Но исходные данные осуществления интеллектуальной деятельности (целеполагание, задание приоритетов, оценок и т. п.) остаются безусловной прерогативой человека, который организует (задает) целостность интеллектуальной деятельности**. При этом на компьютер возлагается лишь часть интеллектуальной деятельности алгоритмизированные логические операции, которые поддаются **полной формализации**. Очевидно, что работа компьютера в данном случае гораздо эффективнее, чем работа человека. Но только с помощью человека столь интенсивная переработка информации приводит к основной цели работы интеллектуальной системы - **к пониманию информации, а значит и к знанию**. Исходя из вышеизложенного, сделаем следующие выводы:

- отождествление "знания" и "информации" представляется весьма неудовлетворительным прежде всего на том основании, что знание в объективированной форме (как определенная система логически организованных высказываний и предложений, выраженных в языке, зафиксированных в текстах и функционирующих в обществе как продукт человеческой деятельности) есть не что иное, как инвариант культуры - информация доступная всем и каждому. Знание же в отличие от информации имеет личностную природу;

- весьма спорно и положение, что информация есть "превращенная форма знания". Тем более, что данное положение отнюдь не утверждает и обратного (знание как превращенная форма информации). Данная точка зрения также неявно основывается на понимании знания как некоего итога (результата) процесса познания, зафиксированного в содержании понятия. Однако, как следует из первой части исследования, знание следует относить не столько к содержанию понятия (образа), сколько к процессу понимания как процессу выявления функционального назначения образа в конкретном контексте его системного образования и функционирования, организованного целями познавательной деятельности (в конечном счете, целями жизнедеятельности);

- в качестве механизма взаимоперехода информации в знание и обратно не может выступать "превращение". "Превращение" информации в знание и "возникновение" (порождение) знания (понимания) на основе информации - это не одно и то же. Ключевым моментом такого перехода может служить процесс понимания ("раскрытия") информации;

- знание не может быть "превращено" в информацию, а только в известной мере выражено посредством знака, в системе знаков (их значений,смыслов и т.п.);

- знание есть категория, относящаяся и к личности, и к обществу. Отнесенность к обществу предполагает возможность функционирования личностного знания (как феномена личностного сознания) только в рамках социума (человеческого общества). Информация же (как атрибут материи) в принципе характеризует не только бытие общества;

- диалектика взаимоперехода информации в знание и наоборот, ошибочно намеченная с точки зрения когнитивных установок (как превращение одного в другого), в действительности есть диалектика формы и содержания процесса познания, имеющего информационно-знаниевую природу. Познание есть процесс "раскрытия" информации (системы знаков), где центральным звеном "раскрытия" является процесс понимания, что и порождает знание (личностное знание). Основу (всего лишь основу) этого процесса образует инвариантное содержание форм культуры, освоенной субъектом познания в процессе своей социализации;

- уровни процесса познания следует рассматривать как определенные ступени преобразования информации, которая организуется и функционирует на каждом таком этапе по-разному. При этом очевидна и другая взаимосвязь: чем более высок уровень организации информации (звуковой сигнал, световой сигнал, речевой сигнал или научная статья, монография) тем, потенциально, более глубок уровень знания (ситуация личностного преломления, раскрытия информации, то есть понимания). Последнее также зависит от уровня так называемого "тезауруса" знаний познающего субъекта;

- сказанное позволяет заключить, что "информация" и "знание" предстают и функционируют на разных уровнях познания по-разному. Но верно и другое: без той или иной информации (как запускающего фактора и базы данных) и без знания, зафиксированного в различных его формах памятью человека вследствие предшествующей работы мышления, познавательный процесс невозможен.

1.4. Семиотический и герменевтический аспекты соотношения информации и знания.

В данном подразделе ставится задача выявить герменевтические и семиотические аспекты соотношения "информации" и "знания".

Процесс формирования человека как социального существа вне языка просто невозможен. Все, что человек может сказать (высказать, утверждать) о мире, он может делать только посредством языка. Такова природа антропосоциогенеза. Процесс формирования способности к предметно-практической деятельности и сознания неотделим (в силу специфической деятельности и обобщенного характера процесса) от процесса формирования языка как специфического способа (средства) социального общения (коммуникации), как средства хранения и передачи (трансляции) социального опыта и, следовательно, информации. Именно с появления языка начинается подлинная история познания мира. Не случайно М. Хайдеггер истолковывает реальность "жизненного мира" как **языковую реальность**. Язык становится тем историческим горизонтом понимания, который определяет судьбу бытия. Говоря словами самого Хайдеггера, **язык - это "дом бытия**".

Нас окружает языковая реальность, а значит - **знаковая реальность**. Уже исходя из этого становится понятно, почему в качестве языкового текста можно рассматривать не только различного рода литературные произведения, а любой фрагмент реальности, выраженный в языковой форме. Также становится понятным, насколько глубинный методологический смысл заключается в галилеевских словах о познании Вселенной как чтении "книги природы". Отсюда, в контексте всего сказанного ранее, следуют основания для рассмотрения семиотических и герменевтических аспектов соотношения знания и информации.

Мышление человека неизмеримо расширяет познавательные возможности человека, позволяет проникнуть в закономерности природы, общества и т. п. **<u>Орудием (средством) мышления</u> является язык и другие знаковые системы**. В этом смысле размышление (мышление) есть движение мысли в форме движения структурных элементов языка - слов (внутренняя речь); объективированная форма - речь изреченная, или записанная в определенном знаковом выражении. Этим и объясняется наш интерес к **<u>семиотике</u>, как науке о знаковых системах**. Причем заметим, что мы **относим язык к знаковой сфере**, а саму **знаковую сферу**, в соответствии с изложенными ранее выводами, - **к сфере информации**. В этом смысле, напомним, информация представляется нам определенной семиотической организацией, системой логически организованных высказываний и предложений, выраженных в языке, зафиксированных в текстах и функционирующих в обществе как продукте человеческой деятельности. Говоря иначе, **<u>информация</u> - сообщение, некоторая совокупность знаков и их значений**. Так или иначе, именно сообщения реализуются в коммуникативных (диалоговых) отношениях людей посредством внешней и внутренней речи. Это лишний раз объясняет наше внимание к языку, в частности, к вопросу, как и в каких формах информация (сообщение, выраженное в языке) реализует и представляет себя.

Многие из объектов, попадающих в сферу научных интересов, поддаются какому-либо изучению лишь посредством знака, который заменяет этот объект в процессе познания. В данной ситуации многое зависит от свойств знака, как опосредующего элемента, от особенностей отношения знака с представленным им объектом и от самого умения правильно интерпретировать знаковую информацию. Поэтому в подобных ситуациях наиболее результативными оказываются опосредованные аспекты познания, в частности, семиотический (знаковый) аспект. Более того, все чаще говорят о **семиотическом методе исследования**, для которого характерно выделение некой **структурной триады**:

1) объект познания;

2) представляющий его знак, заменитель объекта;

3) субъект познания - интерпретатор.

В связи с этим сфера применения семиотического метода исследования становится очень широкой. Мы не будем излагать всю суть семиотического метода исследования, а попытаемся отметить, в рамках нашей проблемы, лишь некоторые важные семиотические аспекты (понятия знака и значения, смысла и т.п.)

Понятия знака и значения являются основополагающими для **семиотики**. Но довольно сложно дать точное определение, что есть знак. По справедливому замечанию А. Ф. Лосева, понятие "знака" окружено десятками других схожих по своему содержанию понятий. Аналогично дело обстоит и с понятием "значения". На сегодняшний день ясно, пожалуй, одно: **среди исследователей содержания этих понятий нет единого мнения**. Это обусловлено еще и тем, что исследователи подходят к данной проблеме с позиций различных ее аспектов - гносеологического, логико-семантического, лингвистического, психологического и т.п. В силу отсутствия самой возможности подробного рассмотрения проблемы знака и значения мы не будем претендовать на историко-философскую полноту освещения данного вопроса. Эта проблема весьма широко представлена в работах О.С. Ахмановой, Э. Геллнера, Э. Бенвениста, В. В. Иванова, А. Г. Волкова, А. А. Ветрова, А. Ф. Лосева и др. Мы лишь остановимся на тех позициях, которые, на наш взгляд (в рамках нашей основной проблемы), представляются нам наиболее значимыми.

Исследователи, выявляющие **гносеологическую сущность знака, подчеркивают его репрезентативную, фиксирующую, индикативную, коммуникативную и другие функции языка.** В центре их внимания **<u>две проблемы</u>: проблема определения знака и проблема его соотношения со значением**. И здесь мнения раздваиваются. Одни считают, что знак является материальным образованием и не включает в себя значения (Е. К. Войшвилло, Б. И. Востоков). Другие видят в знаке двустороннюю сущность - своего рода "союз" носителя и значения (О. С. Ахманова, Б. В. Бирюков, В. И. Мальцев, И. С. Нарский). В частности, И. С. Нарский считает, что антиномию знака и значения следует искать в самом знаке, который представляет собой, с одной стороны, знаковый экспонент, а с другой - значение. Иначе говоря, всякий материал знака, не обладающий значением, утрачивает всякую знаковую характеристику. Первая же точка зрения, согласно которой значение характеризуется как нечто отличное от знака и не входящее в его структуру, отстаивается по преимуществу теми исследователями, которые рассматривают в качестве объекта исследования лингвистический или логический знак (Е.К. Войшвилло). **Здесь вся проблема заключается во взаимоотношении слова как знака и понятия как значения**. При таком понимании значение оказывается чем-то внешним по отношению к знаку.

Многие представители второй точки зрения в качестве значения выделяют отнесенность лингвистического знака к понятию и, таким образом, **значением оказывается отношение между словом и понятием**. Данное отношение одновременно рассматривается и как определенное свойство знака. При таком подходе к значению знак не сводится просто к некоторой вещи. По нашему мнению, представленная точка зрения удачно характеризует процесс становления знака. Предмет, входящий в знаковую ситуацию, приобретает свойство "обозначать" (через "репрезентацию"). Думается, что само свойство "обозначать", взятое в общем виде, не может выступать в качестве значения, так как это свойство является функцией репрезентирования чего-либо независимо от конкретного содержания передаваемой информации. Ведь в определенной знаковой ситуации знак не только репрезентирует предметы, но несет в себе информацию определенного содержания, что, очевидно, и можно рассматривать в качестве значения. **<u>Значением</u>, таким образом, является выраженное посредством знака какое-либо <u>содержание</u>**. Одновременно знак выступает как объективация значения, ибо без знака информация не может циркулировать, так что реальность ее как бы коренится в знаке. По всей видимости, в этом и состоит **качественное различие и одновременно единство знака и значения**. Следует отметить, что решение проблемы значения осложнено многоплановостью самого исследуемого объекта. Функционирование значения в разных сферах знаковых систем (в познавательной человеческой деятельности, в поведении животных и в кибернетических устройствах) проявляется весьма неодинаково. По мнению И. С. Нарского, обнаружить всеобъемлющего определения "значения" вообще невозможно. Он предлагает рассматривать значения соответственно уровням их функционирования, вследствие чего **значения распадаются на частные виды значений**. Вместе с тем, частные виды значений обладают некой своей отвлеченной общностью, и она имеется в каждом из частных значений: **значение как десигнат, как отношение, ассоциируемые образы, взаимозаменяемые знаки, способ употребления знаков и т. п.**

Видимо, что для того, чтобы глубже понять, что есть знак, следует обратиться к другому понятию - "**знаковая ситуация**". Имеется в виду ситуация, в которой есть что-то обозначаемое, и есть знак для обозначения этого. <u>**Знаковая ситуация**</u> **- это всегда пара, состоящая из знака и обозначаемого (денотата)**. Можно привести множество примеров знаковых ситуаций:

- имя собственное - человек, который носит это имя;

- заголовок статьи, книги и т.п. - документ;

- буква - число (в алгебре).

Примеры можно продолжать до бесконечности. Совершенно очевидно, что **слева стоят знаки, а с правой стороны денотаты, то есть обозначаемое знаками**.

Можно выделить также некоторые черты знака, которые проявляются в большинстве знаковых ситуаций:

- в ряде случаев знак способен замещать хоть и не полностью обозначаемое;

- многозначность соответствия "знак - денотат".

Из приведенных основных черт знака видно, что, например, математическая символика (буква) позволяет оперировать с буквенными обозначениями вместо того, чтобы преобразовывать числовые выражения. Но также очевидно, что знак не полностью адекватен денотату. Так, например, чтение автореферата в ряде случаев заменяет изучение исходной диссертации. При этом, очевидно, что автореферат не равносилен диссертации. Многозначность соответствия "знак - денотат" проявляется в способности знака обозначать разные объекты (омонимия и полисемия знака), а также в том, что денотат может определяться разными знаками. В этом смысле одно и то же заглавие может соответствовать разным статьям.

Знак - это условное обозначение, как правило, он не является обязательным. В этом смысле один и тот же денотат может обозначаться по-разному. Например, кроме официальных фамилии, имени и отчества, существуют прозвища (клички), которыми называют человека в кругу близких друзей. В этом связи Ю. А. Шрейдер пишет: "Нет неразрывной причинно-следственной связи между именами и обозначаемым. Эта связь определяется в конкретной ситуации более или менее свободным выбором называющего...". Заглавие статьи может быть обусловлено рядом самых разнообразных причин. Это означает, что принятый способ обозначения вовсе не является обязательным и зависит от конкретной знаковой ситуации.

В знаковых ситуациях кроме условности и конвенциальности знака проявляется и его противоположное свойство - **системность употребления**. Например, имена обычно выбираются из сравнительно небольшого перечня, специфичного для той или другой социальной среды. Имя может отмечать семейную традицию, национальность и т. п. Имя, помимо предмета обозначает и признак. Например, древнее значение слова "живот" - жизнь. В силу этого современное употребление слова "животное" указывает на наличие жизни. Иными словами, **знак не только обозначает конкретный денотат, но и указывает на его место в мире**. Знак - "это не только условная метка обозначаемого (как номерок от пальто), но и ярлык, определяющий какие-то свойства обозначаемого".

Вообще процесс формирования отображающей функции языка был длительным и сложным. Известно, что наиболее древним типом звуковой речи является "слово-монолит", назначение которого заключалось в выражении говорящим своей потребности (воли, желания). Такого рода слова (знаки) еще не содержали никаких элементов логического суждения. Номинативную функцию они приобретают позднее, когда из знаков воли перерастают в знаки представления, в знаки предметов мысли. Человеческий язык постепенно превращается в предметный, и вскоре уже слово становится обозначением той или иной вещи (процесс именования вещей). За тем или иным словом закрепляется чувственный образ того или иного фрагмента объективной действительности, который, в известной мере, создает **обобщенный образ предмета** (нечто единое). Более глубокий уровень познания, характеризующийся более высоким уровнем абстракции и обобщения (синтеза) и обусловленный способностью человека к речевому общению, приводит к тому, что чувственный образ (уже связанный с тем или иным словом) "становится теперь его смысловым значением, образуя **понятие**. **Знак, следовательно, обладает не только предметным, но и так называемым образным значением, то есть чувственно-наглядным образом предмета, который на более глубоком уровне познания принимает форму "гносеологического образа" - понятия. Что такое понятие? Это тоже имя, но оно уже формируется как мысль, отражающая отличительные и специфические свойства предметов объективной действительности, а также отношения между ними.** Это уже более высокий уровень организации содержания имени (знака). Одним словом, **мысль, выраженная в слове (понятие), заключает в своем содержании абстрактно-всеобщие определения познаваемой вещи.** Логическими формами языкового выражения этой работы мышления являются такие **формы мышления**, как **понятия, суждения, умозаключения, строящиеся по определенным грамматическим формам.**

В свою очередь **грамматика выступает как логическое отражение в структуре языка системного характера существования самого объекта познания:** целостность (имя), обнаруживающая свою определенную сущность в единстве многообразных внешних своих определений (свойств), - один уровень языкового выражения; целостность (система), образованная взаимодействием своих элементов, - другой, более высокий (глубокий) уровень создания образа исходной целостности (сущность, идея); и, наконец, уровень языкового выражения действительности, обозначенной именем, - третий.

Таким образом, имя (слово, понятие) в процессе познания представляется различными формами языкового выражения движения мысли, а значит и различной содержательной "глубиной". Сказанное объясняет разноуровневую понятийную систему языка, в которой имеются понятия с различными уровнями абстракции и степенью обобщения (синтеза).

Рассмотрим более подробно метод формирования понятия и его содержания

Понятие – логически законченная (оформленная) общая мысль о предмете; представление сведения о чем-нибудь.

Иными словами, **понятие** — это форма (любая) мышления, которое отображает общие и важные признаки предмета, которые взяты в их единстве.

Содержание понятия — это совокупность отображенных в нем важных признаков предмета. Так, содержание понятия «коррупция» содержит такие важные признаки: «подкупность и продажность государственных, политических и общественных деятелей, государственных чиновников и должностных лиц» и «сращивания государственных структур со структурой преступного мира в сфере экономики».

Понимания содержания понятия имеет важное значение для научной деятельности, теории и практики познания. Пока не будет установлено содержание понятия, которое нас интересует, которым мы хотим оперировать, до тех пор не будет изложена сущность предмета, которая отображается этим понятием, до тех пор нельзя будет точно и четко отделить его от других. Отсюда вытекает, что кроме мысли о содержании понятия необходимо отличать мысль о совокупности тех предметов, которые охватываются данным понятием. Это достигается через понимание объема понятия.

Объем понятия — это определенное множество предметов, которые имеют те признаки, которые отображены в содержании. Например, в объем понятия «банк» войдет множество, элементами которого есть отдельные банки, которые есть в мире, в том числе «Укрсоцбанк», «Родовидбанк», «Аваль» и др. Знания объема понятия необходимы для того, чтобы правильно осуществлять деление понятий, их классификацию, типизацию, выделять определенный вид данного рода и т.п.

Между содержанием и объемом каждого понятия существуют определенные взаимоотношения и взаимосвязи. Рассмотрим это на примере. Объем понятия «банк» охватывает все виды банков, в том числе: «сберегательный», «инновационный», «инвестиционный» и др. Итак, объем понятия «банк» более широкий от каждого из объемов понятий, которые выражают виды банков. Но за количеством признаков, которые входят в содержание этих понятий, понятие «банк» уже от каждого понятия вида, так как, кроме общих признаков, которые имеет понятие «банк» (финансовое учреждение, посредник во взаимных оплатах и расчетах, кредитор и др.), они имеют свои отличительные признаки. Например, сберегательный банк имеет свой отличительный признак (специализируется на обслуживании населения), а инновационный имеет свой (специализируется на финансировании и кредитовании инновационных проектов). Этими признаками «сберегательный банк» и «инновационный банк» отличаются от всех других банков и выделяются в отдельные виды.

Таким образом, понятие более широкое по объему, и в тоже время, есть более узким по смыслу. Такая зависимость выражает **закон обратного отношения**: ***с расширением содержания понятия уменьшается его объем и, наоборот, с увеличением объема понятия суживается его содержание***. Этот закон распространяется лишь на те понятия, из которых одно входит в объем другого.

Зависимость между содержанием и объемом понятия раскрывается через действия ограничения и обобщения.

Ограничить понятие — это значит перейти от более общего (рода) к менее общему (виду). Если к данному понятию прибавлять признаки, которые касаются лишь части предметов, то тем самым мы ограничиваем данное понятие.

Пусть к понятию «метод менеджмента» прибавляются постепенно признаки: «административный», «распорядительный», «содержит приказную часть», то придем к понятию «приказ». Итак, ограничение дает возможность перейти от общего понятия к индивиду, который есть границей ограничения, то есть к таким понятиям, которые не подлежат дальнейшему ограничению.

Обобщить понятие *— это означает перейти от менее общего (вида) к более общему (роду).* **Обобщение — это действие, которое по своему характеру противоположно ограничению**. Процесс обобщения осуществляется на основе того, что круг предметов, которые рассматриваются, расширяется за счет новых, отличных по своим свойствам, предметов. Например, от понятия «заработная плата» путем обобщения можно перейти к понятию «мотивация», а дальше — к понятию «функция менеджмента», а потом — к понятию «управленческое воздействие». В процессе обобщения в конечном результате приходим к предельно широким по объему понятиям, которые уже не подлежат дальнейшему обобщению. Такие понятия называются ***категориями.*** Примерами категорий могут быть: «время», «движение», «природа», «действие», «материальные ценности» и др.

Итак, расширение объема понятия достигается отбрасыванием признаков, которые принадлежат только тем предметам, которые входят в объем обобщенного понятия.

Обобщением понятий широко пользуются в теории информации, когда стараются найти в предметах наиболее общие их признаки, свойства.

ВИДЫ ПОНЯТИЙ

Все понятия можно разделить по таким признакам: по ***характеру признаков***, по ***числу элементов объема понятий***, по ***характеру элементов объема понятий***.

ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПОНЯТИЯМИ

В процессе мышления каждое понятие не существует в отдельности, а вступает в определенные связи и отношения с другими понятиями. Это объясняется тем, что в природе все сущности находятся во взаимосвязях и взаимозависимостях, поэтому и понятия, которые являются **копией, образом сущностей**, также находятся в определенных отношениях между собой. Познавая отношение между понятиями, человек познает объективно существующие отношения сущностей.

Между некоторыми понятиями либо нет связи, либо она есть довольно далекой, очень слабой, незаметной, одним словом - размытой. Какая, например, связь между понятиями «мотивация» и «молекула»? **<u>Мотивация</u> — это функция менеджмента**, а **<u>молекула</u> — наименьшая частичка какого-то вещества, которое сохраняет основные химические свойства этого вещества.** Поэтому понятия на основе сравнения их содержания и объема разделяют на две больших группы — **сравнимые и несравнимые**. Понятия, объемы которых совпадают полностью или частично или которые относятся к одному и тому же ближайшему роду называются *сравнимыми.* Все другие понятия будем считать *несравнимыми.* Примерами сравнимых понятий есть: «руководитель» и «лидер», «менеджер» и «предприниматель», «верблюд» и «олень», «черное» и «белое»..

ДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ И ВИДЫ ДЕЛЕНИЯ

Часто из объема определенного понятия (кроме пустых и единичных) выделяют подмножество предметов, которое отличается каким-то образом от других предметов этого объема. Например, объем понятия «адаптивная структура» (одна из групп комбинированных структур управления) включает в себя все структуры, которые способны быстро приспособиться к изменениям окружающей среды. Если выбрать какой-то признак (признаки) и соответственно его (их) выделить часть структур, то этим самим будет осуществлено определенное деление. Пусть этими признаками будут сложность и комплексность формируемых рекомендаций. На основе таких признаков объем понятия «адаптивная структура» делится на видовые понятия: «матричная», «программно-целевая», «координационная». По признаку «национальность» родовое понятие «люди» разделится на видовые: «украинцы», «россияне», «белорусы», «болгары», «узбеки», «китайцы» и прочие.

Деление понятия — это логическое действие, с помощью которого объем (род) понятия распределяется на подмножества (виды) на основе некоторых признаков.

ПРАВИЛА ДЕЛЕНИЯ

Чтобы деление понятия был правильным, необходимо придерживаться определенных правил. Выделм *пять правил деления.*

1. *Деление понятий должно осуществляться по одной основе.* То есть, какой бы признак или признаки мы не приняли за основу деления, ее нельзя изменять в процессе деления. Нарушения этого правила приводит к ошибке, которая носит название «подмена основы деления».

2. *Деление должно быть соразмерным.* Это означает, что члены деления в сумме должны составлять весь объем делимого понятия. В случае нарушения этого правила могут возникнуть ошибки по названиям «неполное деление» или «деление с лишними членами».

3. *Основой деления должен быть четко определенный признак.* Это правило говорит, что за основу деления нельзя брать случайный или надуманный признак. Нельзя осуществить логического деления, например, понятия «студент» по признаку «занятый» или «чужой».

4. *Члены деления должны исключать друг друга.* Это правило требует, чтобы члены деления не находились в отношении пересечения. Примером нарушения этого правила есть деление понятия «предприятие» на большие, средние, малые, государственные, акционерные, общие. Нарушение правила состоит в потому, что, например, среди средних могут быть и акционерные, среди малых — общие и др.

5. *Деление должно быть последовательным и равномерным (не должно быть «прыжка»).* Это означает, что при делении нельзя допускать прыжков, каждое видовое понятие должно быть ближайшим видом данного рода, а не отдаленным. Так, деление понятия «предложения» на простые и сложноподчиненные будет ошибочным, так как здесь пропущено одно из ближайших видовых понятий — «сложные предложения» и включенные предложения (сложноподчиненные), которые являются видом относительно сложного предложения. Деление понятия «предложения» является правильным, последовательным, если сначала его поделить на два вида

— простые и сложные, а потом осуществить дальнейшее деление каждого из этих видов.

Деление понятий надо отличать от расчленения предметов. Это отличие состоит в характерах отношений «род — вид» (для деления) и «целое — часть» (для расчленения). Так, банки делятся на центральные, коммерческие, сберегательные и др., расчленяются — на управление, отделы, службы.

ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОНЯТИЙ

Сам процесс образования понятий сложный, он требует больших умственных, эмоциональных, чувственных напряжений.

Чтобы правильно сформировать то или другое понятие о предмете, нужно из бесконечного количества признаков этого предмета определить те, которые составляют его сущность, то есть важные признаки. Такое определение человек осуществляет с помощью логических приемов: *сравнения, анализа, синтеза, абстрагирования* и *обобщения.*

Перечисленные приемы используются при формировании понятий в теории познания, при овладении знаниями в процессе обучения.

СРАВНЕНИЯ

Сравнения *— это логический прием, с помощью которого на основе определенных признаков устанавливается сходство или отличие предметов действительности.* Сравнение один из самых важных логических приемов, оно присуще всем формах человеческого мышления.

Рассмотрим пример. В практике международного бизнеса сложились четыре основных стратегических профиля международных компаний: **этноцентризм, полицентризм, регионоцентризм и геоцентризм**. Чтобы отличить один профиль от другого, надо найти признак, по которому их можно отличить. Этим признаком есть их политика по отношению к внешнему рынку, уровень их восприятия своей международной активности.

Этноцентризм внешний рынок воспринимает как второстепенное по отношению к внутреннему рынку, внешний рынок для таких предприятий выступает «поглотителем» излишка продукции и имеет тенденцию воссоздавать на внешних рынках политику и процедуры, которые сначала использовались на внутреннем рынке.

Полицентризм признает международную деятельность и воспринимает ее как такую, которая влияет на обращение капитала и рентабельность.

Регионоцентризм рассматривает мир как определенную совокупность рынков, которые имеют некоторые общие характеристики.

Геоцентризм воспринимает мир как единый рынок.

Для того, чтобы в результате сравнения получить достоверную информацию, надо придерживаться правил сравнения:

1. Сравнивать надо такие предметы, которые в действительности имеют какие-то связи один с другим.

2. Правильность любого сравнения определяется тем, что взято за основу сравнения. Сравнивать надо важнейшие, наиболее существенные признаки, или такие, которые хотя и не являются важными, но вытекают из существенных или предопределяют их.

Сравнение, как и любой другой прием, само собой не может дать исчерпывающей информации о сущности. Сравнение осуществляется на основе взаимодействия анализа и синтеза.

АНАЛИЗ

Сущности возникают перед человеком во всей своей сложности и таинственности. Для того, чтобы раскрыть эти сложности, познать неизвестные свойства сущности, человек должен подойти к познанию ее отдельных частей, элементов.

Анализ (от *грец.* analysis, что означает *разложение, расчленение) — это мысленное расчленение сущности, выделение отдельных ее частей, свойств для исследования их как определенных элементов целого.*

Логический анализ — это прием мышления, который имеет абстрактный характер, и его нельзя путать с механическим, физическим или химическим разложением сущности. Логический анализ предусматривает определенную практическую и теоретическую подготовленность человека к его осуществлению. Такой анализ опирается на определенную сумму знаний о сущности или даже о множестве сущностей, к которой данный предмет принадлежит, на правильное использование логических приемов, в частности деления, классификации, определения и др. Примером логического анализа есть анализ ситуаций или результатов действий, анализ условий разнообразных задач при их решении.

В теории информации, в зависимости от специфики исследуемой сущности, выделяют разные виды анализов. Наиболее распространенным среди них есть системный, где сущность рассматривается как структурно-организованная система, в которой все элементы взаимосвязаны и вытекают один из другого. Например, в любом предприятии как целостной системе можно выделить экономический, юридический или социальный аспект и исследовать их в отдельности. Но какой бы вид анализа не использовался, логическому всегда отводится ведущая роль.

СИНТЕЗ

Извлеченных в процессе анализа знаний об отдельных признаках сущности недостаточно для получения полного понятия о сущности как о едином целом. Рассмотрение сущности в ее единстве достигается человеком с помощью синтеза.

Синтез (от *греч.* synthesis, что означает *соединения, сложение, сочетание) — это мысленное объединение тех частей целого, которые были вычленены и изучены в процессе анализа, установление взаимодействия и связи их и исследование сущности как единого целого.*

Анализ и синтез — это два неразрывно связанных между собой логических приема, это две стороны одного и того же процесса. Синтез невозможен, если сущность не был проанализирована, а любой анализ должен проводиться на основе познания сущности как целого.

Кроме того, синтез, на основе осмысленного объединения отдельных, уже проанализированных частей, дает возможность создавать, конструировать новые сущности, модели. Таким образом, синтез выступает не только как логический прием познания, а и как логическая форма отображения, моделирования предметов, процессов.

АБСТРАГИРОВАНИЕ

Анализ и синтез сами по себе еще не являются достаточными для формирования понятия о сущности. Познание является более сложным. В каждой сущности много признаков, свойств. Одни из них существенные, более важные, а вторые менее существенные, менее важные. Поэтому, чтобы образовать понятие, необходимо отобрать из массы выделенных признаков важные, определяющие. Этого достигается в процессе абстрагирования.

Абстрагирование (от *латин.* abstractio, что означает *отвлечениея) — это мысленное отделение наиболее существенных, наиболее характерных признаков сущности от самой сущности и превращение их в объект самостоятельного рассмотрения.*

Результат абстрагирования называется абстракцией.

Без абстракции невозможные ни психические акты, ни процессы коммуникации и познания, ни информационные процессы. В процессе познания люди оперируют с абстрактными понятиями так, словно они существуют независимо от материальных носителей, от которых эти понятия отделены.

ОБОБЩЕНИЯ

При образовании понятия изучаются не все элементы множества, а лишь отдельные. Потом эти знания распространяются на все оставшиеся элементы множества, на множество в целом. Продолжением и вместе с тем завершением процесса формирования понятия являются обобщения.

Обобщения *— это мисленное распространения существенных признаков части сущностей определенного класса, выделенных в процессе абстрагирования, на каждую сущность этого класса.* В процессе обобщения осуществляется переход от единичного, частного к общему. С помощью обобщения сущности, на основе их общих признаков, объединяются в классы, множества. Обобщение выступает как высший уровень абстракции на основе выявления общих для этих сущностей признаков, свойств, отношений, тенденций развития и т.п.. Так, изучив результаты деления и специализации управленческой деятельности на определенном множестве организаций, исследователями было сделано обобщение, что всем организациям присущи такие основные функции менеджмента, как планирование, организация, взаимодействие, мотивация, контроль.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ (ДЕФИНИЦИЯ) ПОНЯТИЙ И ВИДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Понятное, доступное, полное содержание понятия есть обязательным условием научного выражения мысли, делового общения, ведения дискуссий или просто обмена информацией между людьми. Часто ставится задача — раскрыть содержание того или другого понятия. Что это значит? Раскрыть содержание понятия — это значит указать на важные признаки сущностей, которые входят в объем данного понятия.

Логическое действие, в процессе которого раскрывается содержание понятия, называется определением (дефиницией) понятия.

Каждая сущность имеет бесконечное множество информационных признаков и указать все эти признаки практически невозможно. Определение содержит в себе лишь существенные признаки, которые дают возможность отличить данную сущность от других. Конечный результат определения находит свое выражение в средствах языка — в виде предложений или совокупности предложений естественного или искусственного языков. **Ни одна наука не обходится без определений тех или иных понятий или ссылок на них.**

В теории информации существуют разные подходы относительно деления определений на виды. Наиболее распространенными являются подходы, когда определения делятся на такие две группы: или на *реальные* и *номинальные* (за функциями, которые выполняют определения в познании), или на *явные* и *неявные* (по форме определения).

В **реальных** определениях приводятся существенные признаки самой сущности, в **номинальных** — раскрывается содержание самого слова, которым обозначается сущность.

Реальные определения подаются в энциклопедиях, специальных научных словарях, а номинальные — в разных толковых словарях.

В структуре явных определений четко очерчены левая и правая части определения, то есть понятие, содержание которого раскрывается и понятия, благодаря которым раскрывается это содержание. В явных определениях такие понятия должны быть равны за объемами. В неявных определениях отсутствует четкая очерченность правой и левой частей.

ВИДЫ РЕАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Среди реальных определений чаще всего выделяют: *классическое, генетическое, функциональное, структурное, сущностное, смешанное.*

Классическое определение. Классическое определение — это определение *через ближайший род и видовой признак.* Такое определение предусматривает, что первым называется ближайший род, к которому принадлежит определяемое понятие, затем — важный (важные) признак данного понятия, которое характеризует его как один из видов указанного рода.

Состав классического определения можно изобразить так: *«вид»* есть *«род и видовое отличие».* Таких определений есть много в таких разделах науки, как математика, физика, языки, экономика, консалтинг и др.

Рассмотрим для примера определение *кассового ордера*. Для этого прежде всего указываем ближайший род ордера — бухгалтерский документ. Итак, кассовый ордер — это *бухгалтерский документ.* Но кроме кассового ордера, есть еще другие виды бухгалтерских документов. Поэтому необходимо еще указать такой важный признак кассового ордера, который его отличает от других видов бухгалтерских документов, то есть надо указать видовое отличие. Таким отличием будет то, что он служит *основанием для кассы предприятий, организаций и учреждений для приема или выдачи денежной наличности.* В результате получим: «Кассовый ордер — это бухгалтерский документ, на основании которого кассы предприятий, организаций и учреждений принимают или выдают денежную наличность».

В приведенном примере понятие «кассовый ордер» — определяемое понятие, «бухгалтерский документ» — понятие, которое определяет.

В классических определениях правая и левая части являются тождественными понятиями.

Генетическое определение. Существуют понятия с таким объемом, для которых невозможно отыскать родового понятия или отобразить в понятии видовое отличие. Поэтому определения таких понятий часто дается *по способу образования, возникновения* или *построения сущности*. Такое определение называется *генетическим.*

Примерами генетических определений есть: «Территориальная структура управления — это такая структура управления, которая формируется за географическим расположением предприятия»; «Страховой фонд — это фонд, создаваемый предприятиями для обеспечения их деятельности в условиях ухудшения конъюнктуры, задержки заказчиками платежей за поставленную продукцию, выполненные работы или предоставленные услуги, недостатка средств для уплаты займов или покрытия возможных убытков предприятий в процессе финансово-хозяйственной деятельности и т.п.».

Генетические определения часто используются в разных инструкциях, которые имеют целью научить что-то изготовить, составить, построить. В пособиях для домашней кухни определения пищи есть генетическим, здесь к каждому виду пищи сообщается способ приготовления, приводятся рецепты.

Функциональное определение. В таком определении раскрывается назначение предмета, его роль и функция. Такое определение может быть дано многим предметам, которые созданы людьми для решения тех или иных вопросов, для удовлетворения определенных потребностей, в частности приборам, средствам труда, определенным формам, действиям и т.д. Например, «жетон — кружок, который заменяет монету определенного номинала».

Структурное определение (или определение по составу). В таком определении раскрываются элементы системы, виды какого-либо рода, перечень предметов, которые входят в определяемое понятие. Например: «Государственная контрольно-ревизионная служба — это контрольная служба в системе Министерства финансов Украины, которая состоит из Главного контрольно-ревизионного управления, контрольно-ревизионных управлений Республики Крым, областей, городов Киева и Севастополя, контрольно-ревизионных подразделений (отделов, групп) в районах, городах и районах в городах».

Сущностное определение (или определение качества предмета). Оно широко применяется во всех науках. В нем раскрывается сущность предмета, его природа или качество. Например, «Граница бедности — это определенный государством нижний предельный уровень личного благосостояния, вне которого человек не в состоянии поддерживать физическое существование».

Смешанное определение. Кроме приведенных видов реальных определений часто встречаются смешанные определения, то есть такие, которые содержат в себе по крайней мере два вида из вышеперечисленных, как, например, «кредитная карточка — именной денежный платежно-расчетный банковский документ, который выдают вкладчикам банков для безналичной оплаты приобретенных ими товаров или услуг». В приведенном определении приведены явные классическое и функциональное виды определений.

ВИДЫ НОМИНАЛЬНЫХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В номинальном определении дается объяснение определяемого слова, имени сущности, которое не касается самой сути сущности. Различают следующие номинальные определения.

Объяснение значения имени сущности. Так, номинальное определение понятия «карат» будет таким: «Мера, которую применяют в ювелирном деле для определения массы драгоценного камня».

ПРАВИЛА ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В теории информации и практической деятельности человека определения играют чрезвычайно важную роль. Определение раскрывает суть сущности, выделяет ее из множества ей подобных. Определение завершает изучение сущности, воссоздает сущность в ее закономерных и необходимых связях. Правильно сформулированное, оно оказывает содействие получению новых выводных знаний, изучению новых предметов и формированию определений новых понятий.

Чтобы определение было правильно сформулированно, необходимо придерживаться соответствующих правил. Приведем основные из них.

1. ***Определения должно быть соизмеримым***. Из этого явствует, что определяемое понятие и понятие, которое определяет, должны быть равные по объему. Рассмотрим определение — «Понятие — это форма мышления, которое отображает общие и важные признаки сущности, которые взяты в их единстве». Как проверить его на соизмеримость? Для этого нужно определенное понятие поставить на место определяемого и прибавить слово «всякий», «любой», сделав так называемое обращение. Если получим истинное высказывание, то объемы определенного и определяемого понятий будут равные, а само определение — соизмеримым. Так, вышеприведенное определение понятия есть соизмеримым, так как можем сказать, что «Любая форма мышления, которая отображает общие и важные признаки сущности, которые взятые в их единстве — это понятие» является истинным утверждением.

В случае нарушения этого правила возможны логические ошибки, которые носят название *«весьма широкое определение»* (когда некоторые признаки опускаются) или *«весьма узкое определение»* (когда приписываются некоторые признаки). Если в приведенном примере определения понятия опустить то, что «отображает общие и важные признаки сущности, которые взятые в их единстве», то получим определение «Понятие — это форма мышления», которое будет весьма широким, поскольку формой мышления есть не только понятие. Примером весьма узкого определения будет определение — «Ромб — это параллелограмм, в котором стороны и углы равны», такое определение включает лишь квадраты и выключает ромбы, которые не являются квадратами.

При нарушении этого правила, можно прийти и к определению понятий несуществующих сущностей.

Ошибки такого характера случаются довольно часто и есть результатом невнимательности при определении понятий или недостаточного знания сущности. Во всех случаях такие ошибки наносят ущерб практике человеческого мышления.

2. ***Определение, как правило, не должно быть лишь отрицательным***. То есть следует стремиться, чтобы определение не содержало лишь тех признаков, которые не принадлежат данному понятию или были просто отрицанием другого. Примерами нарушений этого правила есть определения: «Круг — это геометрическая фигура, которая не имеет углов и отрезков»; «Демократический стиль — это стиль, который не является авторитарным».

Правда, иногда в математике встречаются определения понятий через отрицание, в частности, определения параллельных прямых, иррационального числа.

3. ***Определение не должно включать в себя логического круга.*** Под логическим кругом здесь понимается такой способ определения, когда определяемое понятие стараются раскрыть через определенное, которое лишь есть повторением определяемого или может быть выяснено лишь через определяемое, как здесь: «дееспособность — это способность к действиям», «доказательство — это процесс в котором что-то доказывается». Разновидностью такой ошибки в определении есть *тавтологическое* определение, которое еще называют *«одно и то же через одно и то же».* Например, «свобода — это свобода», «истина — это истина».

4. ***Определение должно быть четким и однозначным.*** Это правило требует четкости и однозначности в выражении важных признаков сущностей. Нарушение этого правила приводит к двусмысленности, а то и многозначности определения.

Нельзя использовать в роли определений образных выражений, как например: «собака — это друг человека», «логика — это мой любимый предмет».

5. *В определения должны входить лишь термины, значения которых уже приняты, признанны.* Нарушение этого правила ведет к ошибке под названием *«определение неизвестного через неизвестное».* Такая ошибка часто встречается в учебном процессе, в публичных выступлениях некоторых лекторов, которые используют непонятные для аудитории термины или «модные слова».

ПРИЕМЫ, КОТОРЫЕ ДОПОЛНЯЮТ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Поскольку определение понятия не может охватить все свойства, особенности сущности, то для обеспечения более полной и всесторонней информации часто прибегают к приемам, которые дополняют определение: *указания, объяснения, описания, характеристики, сравнения, различия.* С другой стороны, если не полностью сформировалось понятие о сущности, то также прибегают к этим же приемам и называют их приемами, которые подобны определениям. Раскроем содержание этих приемов.

1. ***Указания*** — это прием, когда демонстрируется сама сущность, которая обозначается данным термином, указывает на нее и ее признаки. Это простейший прием ознакомления с сущностью, который непосредственно нами воспринимается. Указания на признаки сущности часто называют *остенсивным определением.*

2. *Объяснения* — это выяснение содержания слова или термина. Оно подобно к номинальному определению.

3. ***Описание*** — это воспроизведения наглядного образа сущности через перечень ее признаков с целью установления отличий от других, ей подобных сущностей. Описание базируется на чувствительном восприятии сущности.

4. ***Характеристика*** — это подчеркивание того, что сущности присущи или не присущи те или иные конкретные важные признаки. Указанные в характеристике признаки в своей совокупности дают возможность установить индивидуальность сущности. В отличие от описания, характеристика используется для раскрытия внутренних признаков, свойств сущности.

5. ***Сравнения*** — это ознакомление с сущностью через сопоставление ее с другой сущностью. Сравнения являются одним из наиболее распространенным приемом в информационном процессе.

6. ***Различия*** — это ознакомления с сущностью путем сопоставления ее с другой сущностью, при этом указывают не на похожесть их признаков, а на их различение, отличие. Например, «Данная фирма отличается от других фирм города видами услуг, которые она

предоставляет населению», «Изделия фирмы *A* отличаются от таких же изделий фирмы *B* более высокой огнестойкостью и более низкой ценой».

В заключение отметим, что такое детальное рассмотрение вопроса формирования понятий и определений, с нашей точки зрения, является очень важным и позволит сформировать понятия и определения общей теории информации, руководствуясь вышеизложенными правилами и рекомендациями в части формирования понятий и определений .

В контексте всех предыдущих рассуждений можно заключить, что содержание понятия - и есть значение знака (имени), это не что иное, как информация, доступная всем и каждому (как определенная система логически организованных высказываний и предложений, выраженных в языке, зафиксированных в текстах и функционирующих в обществе как продукте человеческой деятельности). Различные же формы организации информации - это различные формы языкового выражения мысли. Содержание понятий (их инвариантное содержание) есть продукт общественный и потому общезначимый. К слову сказать, сама "социализация личности как раз и заключается во "вращивании", интериоризации в сознание индивида определенных социальных значений и связанных с ним "кодов" поведения и мышления". Поэтому таким продуктом и можно пользоваться как средством общения (коммуникации). Не случайно Н. М. Чуршюв выделяет такие локальные формы системной организации информации, как паттерн, информоген, информационный ряд, информатив. В результате этого бытие информационной реальности и предстает как сложный, многоуровневый (в плане конкретных форм организации информации) процесс.

Таким образом, в контексте сказанного выше, можно заключить, что структурной единицей информации в языке является определенное слово, понятие.

Сам процесс познания начинается, очевидно, тогда, когда эти формы организации информации (языковые, знаковые формы) приходят в движение. Очевидно и то, что приводит их в движение лишь субъект познания. Только будучи вовлеченным в контекст его жизненного опыта и целей жизнедеятельности движение содержательно нейтральных (в силу своей всеобщности) значений единиц информации приобретает определенный смысл, личностный смысл, а с ним и понимание.

Сказанное позволяет заключить, что информация есть непременный, обязательный и необходимый компонент (структурный элемент) познавательного процесса. Причем именно элемент, и не более того. Кроме того, следует указать еще на один аспект знака. Знак несет понятие о денотате, называемое концептом этого знака. Если обратиться к ранее рассмотренному примеру, то слово "животное" будет являться знаком. Концептом будет само понятие живого существа, а денотатом любое живое существо, которое имеется в виду в знаковой ситуации. Знак может означать конкретный денотат и выражать концепт. Отношение знака к своему денотату символически выражает треугольник Г. Фреге:

ЗНАК

КОНЦЕПТ

ДЕНОТАТ

На основе сказанного можно сделать вывод, что концепт есть не что иное, как информация, которую несет знак о всевозможных денотатах. Выбор того или иного денотата определяется конкретной ситуацией, между тем как концепт имманентно присущ самому знаку. В алгебре конкретная буква может обозначать любое число. Это значит, что ее денотат определяется условиями конкретной знаковой ситуации. Но концепт этой буквы обусловлен самим языком алгебры. Иными словами, он показывает, насколько отношение знака к денотату не случайно, а обусловлено стремлением определить денотат в том или ином направлении. Но может быть и обратное, когда сами особенности знаковой ситуации диктуют тот или иной выбор знака с учетом присущего ему концепта. Описывая разные стороны связи концепта и денотата, можно прийти к выводу, что эти две стороны взаимно дополняют друг друга. Таким образом, "знак имеет две знаковые функции: он обозначает денотат и выражает концепт данного знака" .

Теперь уместно остановиться на другом не менее важном понятии - **понятии смысла**, которое также имеет непосредственное отношение к данному семиотическому треугольнику. Г. Фреге отмечает, что **естественный язык в устах пользователя содержит мысли о**

реальности. Человеческие суждения являются либо ложными, либо истинными, так как ими часто обозначают и указывают на части этой действительности, которые являются значениями соответствующих выражений. Согласно Г. Фреге, каждое имя (любое выражение) имеет значение и смысл. Причем под значением имени Г. Фреге понимает предмет реальности, то есть денотат, носящий данное имя. Смыслом же имени он называет содержание самого имени. Таким образом, имя (слово, знак, сочетание знаков, выражение) выражает свой смысл и обозначает, или называет, свой денотат. А. Черч несколько развил теорию смысла Г. Фреге. В частности, А. Черч утверждает, что денотат знака определяется смыслом, выступающим по отношению к этому денотату в качестве его "концепта", фиксирующего только определенные свойства денотата. По А. Черчу, самой данностью смысла определяется существование и единственность денотата, хотя он и не обязательно должен быть известен каждому, знающему смысл.

Понятия **экстенсионала и интенсионала** также имеют непосредственное отношение к треугольнику Г. Фреге. Дело в том, что один и тот же знак имеет определенный объем поля денотатов, то есть обозначает разные денотаты. Например, объем знака "животное" составляет множество классов живых существ. Подобный "протяженный" подход к характеристике знака является экстенсиональным. **Экстенсионал знака - это класс всех его допустимых денотатов**. Иными словами, разные знаки могут иметь один и тот же экстенсионал и по-разному характеризовать тот же самый денотат. В данном случае мы имеем дело с ситуацией, когда одни и те же предметы именуются разными способами по разным признакам. **Но знаки не характеризуются только по объему, то есть по своему экстенсионалу**. Например, понятие "красный" включает в себя не только свойства, которыми обладают гладиолус или роза. В противном случае данное понятие обозначало бы цветок вообще. Существует еще и выражаемое знаком общее понятие, то есть **интенсиональный аспект знака**. **Интенсионал знака - это смысл знака, содержание понятия или характеристика концепта, то есть характеристика содержания знака**. Основное различие между экстенсионалом и интенсионалом - это различие **объема и содержания понятия.** Иначе говоря, экстенсионал относится к конкретному состоянию действительности, то есть предполагает конкретное **время и пространство**, а интенсионал предполагает совпадение знаков **в любых ситуациях**. Местоимения "я" и "ты" с точки зрения экстенсионального подхода неразличимы, но с интенсиональной точки зрения они указывают различное отношение обозначаемого к говорящему. В терминах "экстенсионал" и "интенсионал" можно также разграничить понятия "смысл" и "значение". **Экстенсионал знака - это его <u>значение</u>. Интенсиональное же содержание тяготеет к <u>мысленному содержанию, смыслу</u>**.

Вообще существует множество различных дефиниций понятия "смысл". В культурологии, семиотике, лингвистике, психологии "смысл" трактуется настолько по-разному, что сама попытка как-то согласовать различные, зачастую противоречащие друг другу варианты понимания заранее обречена на провал. Строя определенное представление о смысле, включим в теоретическое поле нашего анализа те позиции относительно понятия "смысл", которые, на наш взгляд, являются наиболее убедительными. "**<u>Смысл</u>", по Э. Гуссерлю, - это и онтологическая характеристика самого бытия, с одной стороны, и конституирующий сознание элемент, с другой**. При таком понимании **человек есть носитель <u>смысловой информации</u>**. Говоря иначе, **мир, взятый в своей объективной данности (то есть независимо от человека) есть совершенно иное, чем мир, в котором. действует, живет познающий человек**. Обладание смысло.м, по Э. Гуссерлю, - "это основной характер сознания вообще, которое благодаря этому есть не только переживание, но и переживание, обладающее смыслом". По Л. Бинсвангеру, также стоящему на позициях феноменологического подхода, смысл есть тот способ, при помощи которого реальный мир открывается человеку.

На выявление соотношения понятий "значение" и "смысл", на разведение этих понятий были направлены исследовательские усилия многих отечественных ученых психологов (Л.С. Выготского, А.Н. Леонтьева, А.Р. Лурии, С.Л. Рубинштейна и др.) Так, Л.С. Выготский справедливо замечает: "Смысл представляет собой совокупность всех психологических фактов, возникающих в нашем сознании...смысл слова (читай знака)...оказывается всегда динамическим, текучим, сложным образованием, которое имеет несколько зон различной устойчивости. Значение есть только одна из зон...и притом...наиболее устойчивая...и точная... Значение есть тот неподвижный и неизменный пункт, который остается устойчивым при всех изменениях смысла слова в различном контексте: значение...является только камнем в здании смысла". Значит, **смысл слова (=знака=информации) в принципе неисчерпаем**. Точнее, в потенции неисчерпаем, так как смысл рождается при сознательной (индивидуальной, личностной) обработке информации, а такого рода осмысление и приводит к рождению знания, природа которого, очевидно, совершенно отлична от природы информации как некой изначальной данности в ряду других данностей. Из слов А.С. Выготского следует, что "смысл", в отличие от "значения", несколько отделим от знака, то есть неразрывно не связан с определенной знаковой формой. Один и тот же смысл может быть выражен через различного рода знаки, а семантическая свобода знака обусловлена его положением в том или ином контексте. А.Н. Леонтьев отмечает по этому поводу: "смысл выражается в значениях (как мотив в целях), а не значение в смыслах". С.Л. Рубинштейн отмечает, что "смыслы" производны от устоявшихся в языке значений. Говоря иначе, обобщенные значения, фиксируемые в языке, лишь отражают общественный опыт, однако в контексте индивидуального сознания они приобретают смысл, отражающий личностный аспект познавательной деятельности. Видимо, именно поэтому-то информация как некоторая знаковая система, имеющая свою систему значений, зафиксированных в языке, не может быть отождествлена с результатом ее личностного осмысления, с процессом ее раскрытия, в ходе которого и рождается смысл, а с ним и понимание.

Как уже было сказано, термины "значение" и "смысл" имеют множество дефиниций. Порой то, что одни считают "смыслом" (Г. Фреге, А. Черч), другие называют значением (Л. С. Выготский, А. Н. Леонтьев, М. М. Бахтин). Но несмотря на большое разнообразие определений имеет место некоторое "разведение" понятий "смысл" и "значение": "значение" больше относят к сфере культурных конвенций, а "смыслы" к психической сфере субъектов, которые участвуют в процессе познания, деятельности и знаковой коммуникации.

Отметим еще одно важное отличие значения от смысла. Оно заключается в том, что **смысл, в принципе, осознается одномоментно, то есть он не складывается, что называется, по частям. Значения же, к примеру, языкового выражения, буквально наслаиваются друг на друга**. В этой связи примечательно замечание В.П. Зинченко: "Смысл, в отличие от значения, складывается (извлекается) не последовательно, линейно из различных уровней языка..., а схватывается нами комплексно, симультанно". Говоря иначе, **значение** предполагает некоторую **дискретность**, а **смысл - континуальность, синтез**. Вот почему значение может быть осмысленно многовариантно. Так, с точки зрения современных представлений психологии "на каждом уровне иерархической организации психики смысл выступает в различных формах своей модификации.... В силу этого смысл - это и содержание сенсорно-перцептивного образа, и содержание вторичного образа представления, и, конечно, содержание мысли как конечного продукта мышления". Можно, таким образом, предположить, что тот или иной смысл будет иметь место на каждом уровне познавательного процесса. В этом плане познание предстает как процесс смыслопорождающей активности сознания, осуществляемый на основе полученной информации. **Смысл, как уже было замечено, не складывается по частям. Он неразложим**. **Он может быть только целостным**. В лингвистике убедительно показано, что смысл фразы не состоит из значений слов, которые ее составляют. Очевидно, что смысл текста также не составляет сумма значений его частей, которые образуют текст. Однако это вовсе не значит, что смысл может рассматриваться как некоторая изолированная, автономная сущность. **Смысл существует только в отношении с другим смыслом.** М. Бахтин в связи с этим замечал, что "смысл может актуализироваться, лишь соприкоснувшись с другим смыслом".

Семантика любого сообщения всегда предполагает то, что вкладывает говорящий в тот или иной знак, так как один и тот же знак может изображать различные предметы, события и т.п. Иными словами, семантика изучает, как значения отдельных знаков связаны со смыслом целого текста. Следует уточнить, что слова "сообщение" и "текст" мы употребляем приблизительно в том же значении, что и термины "язык" и "знак". Заложенный в тексте смысл не всегда лежит на поверхности и, порой, не доступен каждому, кто владеет соответствующим языком. Например, научные тексты характеризуются, прежде всего, одноплановостыо семантики. Но уже церковно-культурные тексты, по свидетельству Ю.М. Лотмана, чаще строятся по принципу многоярусной семантики. В данных текстах одни и те же знаки несут различное содержание на различных структурно-смысловых уровнях. Человек непосвященный часто понимает поверхностное содержание такого текста, которое маскирует другой, тайный смысл, доступный лишь достигшему соответствующего уровня. Одним словом, для профана текст имеет один смысл, а для посвященного - другой. Причем вместе они не образуют чего-то целого.

Особенностью художественного текста является то, что его структурные элементы включены в разные системы отношений. Они одновременно участвуют в образовании различных смыслов, которые принадлежат различным уровням, но все эти смыслы при погружении в глубь текста взаимодействуют друг с другом, образуя сложное единство, систему. Таким образом, **текст - это сложно-иерархическая**

система смыслов, между которыми существуют определенные связи и отношения. Все это, как правило, затрудняет понимание текстов. Например, наличие тайных смыслов ("тайных преданий") в религиозных и некоторых древне-философских текстах сильно затрудняет их адекватное понимание. В основном глубинные смыслы возникают путем "превращения элементов сообщения в знаки, с помощью которого строится сообщение следующего более глубокого уровня". К примеру, описание корабля, плывущего по бурным волнам моря, дается в тексте средствами обычного языка. Конечно, современный обыватель кроме описания поэтической картинки в данном тексте ничего более не находит. Однако раннехристианское сознание зашифровало в образе корабля мысль о церкви, являющейся надежной опорой для всех верующих. При этом вторичный, глубинный смысл текста выражается и возникает не лексикой обычного языка, а средствами вторичной моделирующей системы, путем превращения образа корабля в знак чего-то другого. Таким образом, текст строится как сложно-иерархическая структура, как целостная система, и "свойство линейности, которое обычно подчеркивается во многих определениях текста, является лишь моментом этой структуры". Имеется в виду, что при восприятии текста наша **мысль движется не только по горизонтали, но и по вертикали,** стремясь проникнуть на более глубокие уровни, устанавливая связи и отношения как внутри каждого смыслового уровня, так и между элементами, знаками различных уровней.

Таким образом, все сказанное ранее подводит нас к мысли о том, что **познание (процесс "раскрытия" информации, процесс по выявлению ее смысла) все больше предстает как процесс понимания.** В свою очередь, познание как понимание выводит гносеологию в тематическое поле герменевтики, где категория "понимание" выполняет ведущую роль.

Проблема понимания представляет собой комплексную методологическую и гносеологическую проблему, которая с разных сторон изучается герменевтикой и семиотикой, теорией систем и аксиологией, психологией и логикой и т.п. Методология, задающая основные направления изучения понимания конкретными науками, разрабатывается в основном современной философией, где проблема понимания предстает как философско-герменевтическая. Обратимся к собственно герменевтическим аспектам проблемы понимания.

Сам термин "герменевтика" трактуется по-разному. К примеру, **<u>герменевтикой</u> называют искусство интерпретации (толкования) текстов.** При этом под текстами здесь понимают любые и литературные произведения - художественные, исторические, философские, религиозные и т.п. В современном смысле герменевтика трактуется как теория понимания, постижения смысла. Такое понимание герменевтики можно найти в более современном по отношению к древним герменевтическим традициям философском контексте, например у В. Дильтея. Существует истолкование герменевтики и как искусства постижения чужой индивидуальности (Ф. Шлейермахер). Можно найти определение герменевтики как учения о принципах гуманитарных наук. Здесь герменевтика приобретает уже функции онтологические и социально-философские, то есть претендуют на роль философской дисциплины.

Мы считаем, что проблема понимания должна изучаться и рассматриваться в контексте материально и духовно преобразующей деятельности человека как социального (общественного) существа, личности.

Важнейшим рубежом в развитии общей герменевтики явилась концепция Ф.Д. Шлейермахера. Общий теоретический изъян предшествующей герменевтики Шлейермахер видел в ее логико-гносеологической аморфности. В связи с этим он стремился выработать общее представление о понимании как о единой гносеологической и методологической задаче, независимо от предметной области, где эта задача ставится. Понимание, по Ф.Д. Шлейермахеру, - это "эманация познавательной активности субъекта, эту активность надлежит теоретически и методологически дисциплинировать и ориентировать". Ф.Д. Шлейермахер исходил из идеи взаимосвязи языка, истории и сознания в процессах филологической интерпретации, а также в процессах взаимопонимания и речевого общения. Проблема понимания носит всеобщий характер. Она возникает там, где нам нужно воспринять мысли или их последовательность из слов. Именно Ф.Д. Шлейермахер ввел и узаконил основные идеи и формулировки современной герменевтики:

1) герменевтика - это искусство понимания;

2) герменевтический круг: целое может быть понято только из частей, а частное - только из целого;

3) всякое понимание какой-либо речи основывается на предварительном знании (идея предварительного понимания);

4) задача герменевтики - понять речь так же хорошо как автор, а затем лучше, чем он сам ее понимает.

На наш взгляд, перечисленные положения современной герменевтики имеют самое прямое отношение к пониманию природы и сущности информационно-знаниевых процессов.

Следует особо остановиться на принципе герменевтического круга Ф. Шлейермахера, так как он несколько иной, чем у его предшественников, например, Августина или Флациуса. Фактически, Шлейермахер вводит **две разновидности герменевтического круга**. **Первая - когда часть текста соотносится со всем текстом, как с целым. В этом случае мы выясняем смысл целого относительно его частей.** Но есть и другая интерпретация - **когда какой-либо текст (памятник) рассматривается как часть, а культура, в которой функционирует этот текст, как целое.** Естественно, что в данном случае соотношение между частью и целым приобретает несколько иной характер. В частности, здесь имеется непосредственная связь с одним из положений современной **семиотики, рассматривающим текст как некоторый <u>единый знак, далее не членимый</u>.**

Предметом герменевтики Шлейермахер считает тексты - памятники, которые принадлежат далекой культуре, обычно чуждой исследователю. Герменевтика, по его мнению, должна устранять временные рамки (барьеры), тем самым способствуя все более глубокому пониманию. Сами тексты, по Шлейермахеру, предстают перед исследователем как "застывшая речь", объективированная вовне. Следовательно, метод исследования такой речи должен быть диалогическим. Иначе говоря, должен иметь место диалог между интерпретатором и текстом. При этом "застывшая речь" имеет свою объективную и субъективную сторону. Объективная сторона речи составляет предмет грамматической интерпретации. Она происходит в сфере языка, то есть здесь мы выясняем отношение к языку, как он существует объективно. Субъективную же сторону текста (памятника) мы исследуем посредством психологической интерпретации, которая призвана раскрыть духовный мир автора. При этом понимание с точки зрения Шлейермахера достигается взаимобытием этих двух моментов.

Существует мнение, по которому герменевтика Шлейермахера психологична и, якобы, он является представителем психологического направления в герменевтике. Думается, это далеко не так. Психологическая интерпретация текстов, удаленных на большие временные периоды необыкновенно сложна. Трудно понимать внутренний мир автора, жившего много лет назад. Поэтому именно ей (психологической интерпретации) и уделяет внимание Шлейермахер. Но он неслучайно говорит о взаимобытии двух моментов - грамматического и психологического. У В. Гумбольдта имеется похожая идея, суть которой в том, что **речь мы воспринимаем, а язык понимаем.** В дальнейшем эта идея была использована в русской семиотике. В частности, М. Бахтин в связи с этим писал, что **сигнал узнается, а знак понимается**.

Действительно, язык как знаковая система является лишь специфически социальным средством хранения и передачи информации. Сама по себе знаковая система (а информация, как мы уже неоднократно замечали, - это знаковая система) не может являться знанием. Она (информация) нуждается в процедуре дешифровки, говоря герменевтическим языком, в понимании. И только по выявлении смысла определенного содержания информации рождается новое знание. В рамках этой же парадигмы русский ученый Г.Г. Шпет, разработал глубокую концепцию внутренней формы слова. Шпет считал, что "субъективная, точнее психологическая, интерпретация как бы накладывается на основной смысл слова"; слово "опутано" психологическими моментами.

Говоря о гносеологической сути процесса понимания, Дильтей, в частности, выделяет два определения понимания - семиотическое и психологическое. Сама проблема понимания выдвигает на передний план знаковый, смысловой характер объектов. Понимание выступает как некоторая деятельность субъекта понимания со знаковой системой, например, текстом, в результате которой постигается нечто "внутреннее", то есть смысл, по постижении которого возникает определенное понимание (знание). Так или иначе, Дильтей выделяет семиотическое определение понимания, как "процесса смысловой развертки знаковых систем, раскрытия содержания, "закодированного" в знаковой оболочке феноменов культуры, духовных образований с присущей им структурой и законосообразностью". Дильтея интересуют и сами возможности и условия понимания. Подчеркнем, что процесс понимания, по Дильтею, всюду имеет общие признаки, то есть он, фактически, один и тот же в своих основных чертах. Сама же

логика процесса понимания, по Дильтею, **включает три основополагающие логические процедуры: <u>индукцию, подведение факта под общий закон, сравнительно-типологический подход</u>.** Заметим, данная мысль Дильтея имеет непосредственное отношение к вопросу о соотношении "информации" и "знания". По сути, в контексте всего сказанного ранее, это говорит о том, что какая бы информация (и по уровню организации, и по своему содержанию и т.д.) не "раскрывалась" в процессе познания, то есть не подвергалась процессу интерпретации, сам процесс, в принципе, всюду один и тот же. Итогом его послужит **понимание как некоторый процесс сознательной обработки информации**. В. Дильтей, к сожалению, так и не привел в порядок свои логические идеи, ограничившись лишь несколькими замечаниями. В частности, это касается его взглядов на соотношение "понимания" и "объяснения", а именно: включение "объяснения" в "понимание" как его интегрального момента.

Здесь уместно остановиться на термине "объяснение" и установить некую иерархию понятий "понимание" и "объяснение", обращаясь к освещению данной проблемы как в свете герменевтики, так и в свете опыта общенаучного познания.

Исторический опыт герменевтики способствовал явному разграничению проблем "объяснения" и "понимания". К примеру, Ф. Шлейермахер, как и его предшественники, рассматривает объяснение "как внутреннюю сторону процесса понимания". Иными словами, по мере достижения более точного понимания текста, объяснение все больше сводится к искусству представления, связанного с разъяснением отдельных мест текста. Таким образом, **объяснение есть реализация некоторого понимания о целостном явлении (тексте) относительно его частей.** В этом смысле объяснение в герменевтике является завершающей фазой интерпретации. В научном познании объяснение также выступает как некоторый результат уже достигнутого понимания, формируемого на основе целостного знания изучаемой действительности с помощью законов, теорий и т. п. Объяснение "составляет в первую очередь дискурсивный, логический аспект познания".Однако, заметим, иной раз, достигая очень глубокого понимания, человек (субъект) не способен объяснить свое понимание (хотя при этом он четко его осознает), в силу того, что не обладает адекватными этому пониманию речевыми или другими средствами выражения. В обыденной речи распространено выражение: "Понимаю, но сказать не могу". Также возможно и обратное, когда объяснение никоим образом не является свидетельством понимания. Объяснить вовсе не значит адекватно понять. В.П. Зинченко в связи с этим справедливо замечает: "Способность объяснить нечто - это один из критериев понимания, к тому же не самый главный".

Итак, одним из основных условий герменевтического понимания является представленность подлежащего интерпретации сущности в виде текста как сложной иерархической структуры, целостности (системы) образованной множеством знаков. Причем сама физическая реализация текста вовсе не существенна, существенно лишь одно условие: быть текстом или же рассматриваться как текст.

В истории герменевтической традиции наряду с собственно герменевтическими истолкованиями "**понимания**" имеет место и его семиотическое определение как **процесса смысловой развертки знаковых систем, раскрытия содержания, "закодированного" в знаковой форме феноменов культуры с присущей им структурой и законосообразностью.** Последнее, к тому же, выявляет тесную связь герменевтики и семиотики, где проблема понимания предстает как герменевтико-семиотическая.

Наконец, понимание открывается посредством вхождения субъекта в мир знаков. При этом взаимодействие субъекта и объекта является определяющим фактором формирования понимания.

Данное инвариантное содержание герменевтической традиции находит свое отражение и дальнейшее развитие в современной психологии, где понимание рассматривается как феномен мышления. В частности, К. Дункер представляет само понимание как одномоментный акт установления отношения между элементами системы, как "инсайт". В этом смысле нельзя не вспомнить дихотономию знания, свойственную философии Нового времени и берущую свое начало в античности (логическое-интуитивное). Напомним, данная дихотономия связана как с проблемой структуры знания, так и с вопросом его возникновения. В данном случае "инсайт" (некое озарение), как раз и связан с вопросом возникновения знания как результата синтезирующей работы мышления. Конечно, никакой "инсайт" невозможен без предварительного анализа данных (анализа информации), как и любое логическое суждение без той или иной догадки. Понимание, согласно К. Дункер, возникает как некоторый результат переустройства ситуации, в результате которого появляется новая структура с характерными для нее соответствующими отношениями между элементами, что предполагает обнаружение новых функций элементов ситуации. По Д. Бому, "понимание означает восприятие новой цельной структуры, в свете которой все прежние крупинки знания встают на свои по места и обнаруживают естественную связь друг с другом. Причем...обнаруживаются новые многочисленные, прежде не ожидавшиеся, взаимосвязи". По В. А. Ганзену, понимание есть "результат однократной обработки некоторого ограниченного объема информации".

Нетрудно заметить, что особенность данного рода представлений "понимания" как однократного "улавливания" состоит в том, что, будучи явлением одномоментным, оно подготавливается всем ходом предшествующего движения мысли, представляя собой, с точки зрения этапов познавательного процесса, его завершающее звено. Но здесь, по нашему мнению, нужно четко **отличать образ предмета познания как известный результат познавательного процесса** (чувственный, рациональный), который, скажем, может быть зафиксирован в содержании понятия, **от самой динамики понимания**, вдыхающей в этот образ жизнь, наполняя ее теми функциональными смыслами, которые прямо или опосредовано связаны с целями жизнедеятельности субъекта. В этом смысле **познание как процесс понимания и мысль как результат понимания есть различные - процессуальные и результирующие - аспекты деятельности сознания в познавательном контуре.**

Согласно многим психологическим установкам, "для того, чтобы понимать в ощущении, восприятии и представлении не требуется произвольных специальных усилий, тогда как, чтобы достигнуть эффекта понимания в мышлении, необходимо, как минимум, предварительно понять, что требуется понять". Из данной мысли, очевидно, следует, что **понимание может иметь место на различных <u>уровнях познавательного процесса</u>**. **По всей видимости, на уровне ощущения, восприятия и представления, то есть на уровне формирования чувственного образа, возникает одно понимание, а на уровне рассудочной и разумной деятельности другое, более глубинное**. Правомерен вопрос, а от чего это все, собственно, зависит? А зависит это, по нашему мнению, как раз от того, какая информация будет иметь место в информационно-знаниевом процессе и как она будет соотноситься (с точки зрения ее организации и сложности) с целями (в конечном итоге с целями жизнедеятельности субъекта). Причем каждый такой уровень предполагает тот или иной момент понимания, стремящийся, в силу предметно-практического характера и социальной формы реализации познавательных отношений (как **диалоговой коммуникации**), вновь и вновь выйти за границы своего сиюминутного существования. **Диалоговая коммуникация всегда предусматривает определенную активность человека** (познающего субъекта**), а язык (как знаковая система) и выраженная в языке мысль выступают важнейшим и определяющим средством этой активности**. В этом смысле сознание всегда работает в актуальном (текущем) режиме "здесь и сейчас". При этом нужно иметь в виду, что понимание неотделимо от "понимателыюго" усилия, то есть **понимание возникает и существует лишь в границах этого "понимателыюго" усилия (работы сознания, мышления).** Поэтому-то знание не сводимо только к результату познавательного процесса, зафиксированного в том или ином понятии, а есть особое состояние сознания познающего субъекта, возникающее в момент совершения "понимателыюго" усилия (активность познающего субъекта) по извлечению смысла той или иной информации. Причем "понимателыюе" усилие (активность) всегда детерминировано жизненно важными целями (то есть рационально осмысленными потребностями) человека как субъекта предметно-практической деятельности. Именно поэтому **информацию не следует опрометчиво отождествлять со знанием.** На каждом уровне познавательного процесса сознание работает в режиме "здесь и сейчас", причем работу сознания в актуальном режиме невозможно представить без той или иной формы знания. Это, кстати, объясняет, почему вне процессуальной формы своего бытия (процесса познания) знание невозможно обнаружить.

Различные уровни познавательного процесса (в рамках соотношения понятий "смысл" и "понимание") следует рассматривать как различные виды **смыслогенеза**, как процессы понимания [7, с.99]. Так, согласно закону Ланге, формирование перцептивного образа проходит ряд стадий: от осознания объекта как "нечто" (один уровень понимания), до определения предметности, целостности и обобщенности (более "глубокий" уровень понимания). В данном случае речь идет о некоторых разнообразных формах смысловой динамики, о процессах последовательного различения и уточнения смысла.

Теперь становится понятно, что знание имманентно присуще эмпирическому субъекту. В этом смысле знание вообще не может быть транслируемо какому-либо адресату; ему может быть передана информация, фиксированная на тех или иных носителях, которая, в свою очередь, при ее сознательной "обработке" (процесс "раскрытия" информации, ее осмысления), станет вновь достоянием личности в форме ее знания, ее, а не того, кто эту информацию породил. И все повторится вновь в бесконечной цепи коммуникации.

Таким образом, все сказанное ранее, действительно подтверждает информационно-знаниевую природу познавательного процесса, представляющегося нам диалектикой формы и содержания: **информация - знание - информация - знание и т.д.** При этом **логической формой выражения начального уровня понимания служит описание, а логической формой выражения более высокого уровня понимания - объяснение.**

Так как понимание - процесс глубоко субъективный, следует остановиться на личностных аспектах семиотических процессов в культуре и в обществе, что предполагает расширение возможностей семиотического анализа проблемы динамики понимания и возникновения нового знания. Обычно рассмотрение личностных процессов в культуре не выходит за рамки классической схемы: "адресант - сообщение - адресат". Хорошо видно, что в этом случае личностные аспекты рассматриваются в контексте исключительно процессов репродукции и трансляции, в отвлечении от процессов творчества. Тогда роль семиотических процессов в культуре сводится к устранению индивидуальных различий, "низвержению оригинального, неповторимого, индивидуального, что характерно для сторонников "универсальной семиотики". Конечно, в семиотической природе личности превалирует ее социальный характер. В этом смысле личность как семиотическое единство представляет собой определенную систему социальных значений. Последние формируют различные уровни организации личности: ролевые социальные значения, ценностные ориентации и установки и т. п. Собственно социализация личности и заключается в своего рода "вкраплении" в сознание индивида определенных социальных значений. Однако формирование и развитие личности предполагает и самоорганизацию личности - "оформление ее в неповторимое индивидуальное целое, преломляющее и воплощающее в себе систему общественных отношений, реализующее историческую специфику данной социальной культуры в культуре индивидуальной". Именно этот индивидуальный аспект непосредственно связан с творческим участием личности в развитии культуры и знания. Иными словами, входя в целое как часть, отдельная индивидуальность не перестает быть целым. Более того, человеческая жизнедеятельность часто ставит личность в ситуацию неимения социального образца. Тогда личность в себе самой находит пути решения и выбора способа действий или мысли. Она реализует свой "сверхпрограммный" потенциал, проявляя неповторимую творческую индивидуальность. Данная "сверхпрограммность" личности и становится решающим семиотическим фактором в культурном творчестве. Только самой личностью (субъектом) раскрывается природа и механизм смыслового сдвига. Если воспользоваться различением в смысловой структуре знаков социального значения (инвариантного "смысла - для всех") и личностного смысла (социального значения для индивида, "смысла - для себя"), то реализация "сдвигов" в понимании связана именно с личностным смыслом. При этом имеет место как бы преломление "устойчивых, инвариантных, общезначимых социальных значений в личностном смысле с последующей "кристаллизацией" новой смысловой структуры, нового смыслового значения - "смыслом - для всех". Причем решающую роль в процессе становления смысловой структуры играет социальная (межличностная, то есть по самой сути своей - диалоговая) коммуникация. В диалоге происходит столкновение различных смыслов и рождение нового смысла, а значит, и нового понимания - той, образно выражаясь, "вспышки", которая и рождает знание, но опять таки незаконченное, динамичное знание. Именно диалоговый характер человеческих коммуникаций лишний раз свидетельствует о личностном характере знания (порождения, производства знания). В этом и состоит семиотическая роль личности: в динамике понимания и возникновения нового знания. **Именно личность интерпретирует поступающую к ней информацию, строит определенную иерархию смысловых связей, наконец, понимает ее (информацию), в результате чего и рождается новое знание.**

Итак, подведем некоторые итоги нашего рассмотрения. Один и тот же знак (сообщение, текст, информация) может восприниматься по-разному в зависимости от внутреннего мира адресата (субъекта), его, так сказать, "тезауруса", который позволяет субъекту, с одной стороны, увидеть в тексте некоторую иерархию смыслов, сфокусированных вокруг познавательной задачи (цели), с другой - детерминирует необходимость включения этой информации в контекст значений и смыслов жизнедеятельности субъекта в целом (образно говоря, в горизонт его жизни). В этом смысле, процесс понимания оказывается прагматическим по своей сущности, так как его результат принципиально зависит не только от того, что следует понять, но и от того, кто и с какой целью это делает. Этим и объясняется, что один и тот же объект, к примеру, языковой текст, может иметь множество различных пониманий. Специфика понимания заключается в том, что понимание есть всегда понимание чего-то. Понимание не есть нечто статичное, а суть процесс. Именно в этом смысле мы говорили о наличии некой динамики понимания в познавательном процессе. Мы имеем "то, что понимаем", и это "то, что" есть некая данность нашего сознания. И эта данность говорит нам о смысле, так как при понимании чего-то речь идет именно о смысле. С одной стороны, смысл есть цель понимания, так как мы всегда пытаемся что-либо понять для того, чтобы обнаружить смысл. В данном случае смысл "вынесен" в "конец" процесса понимания. Но с другой стороны, именно он (смысл) приводит в движение сам процесс понимания, являясь "тем, откуда движение" процесса понимания. И здесь мы попадаем в герменевтический круг: "понимание должно предшествовать смыслу, ибо как раз нахождение смысла является результатом понимания, или понимание "определяет" смысл, но поскольку "смысл" является формирующей причиной самого процесса понимания, то именно смысл "определяет" понимание".

С эффектом понимания сопряжено возникновение в сознании некоего смыслового образования, которое остается неизменным при актуализации различных своих сфер. Поэтому если смысл понят (ситуация личностного знания), он при процессе коммуникации может быть выражен различными наборами средств. Но это происходит при том обязательном и непременном условии, при котором смысловые отношения, фиксированные мыслью, остаются сохранными. Но, зачастую, этого не происходит, а, может быть, не происходит никогда. Познавательный опыт свидетельствует, что показатель глубины понимания не выражается прямой пропорциональной зависимостью от количества способов выражения смысла понимания. Пока мысль не вербализована или как-то иначе не выражена, она содержит всю полноту заключенного в ней смысла. Но ситуация выражения мысли неизбежно приводит к потере определенной части смысла (например, типа: понимаю, но выразить словами не могу). Определенное понимание не может быть полностью вербализовано или формализовано, так как в силу актуального режима работы сознания ("здесь и сейчас") с присущей ей динамикой понимания часть знания видоизменяется и, в самом худшем случае, утрачивается уже в процессе этих процедур. В этом отношении М.М. Бахтин совершенно справедливо отметил: "Сказанное слово стыдится себя самого в едином свете того смысла, который нужно было высказать...сказанное слово - смертная плоть смысла". **А что такое сказанное слово? Это не что**

иное, как сведение (информация), которая передается как сообщение, застывшая, мертвая речь.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

- анализ герменевтических и семиотических аспектов языка как формы объективации человеческого (личностного) знания, как системы знаков, служащей средством общения и, следовательно, передачи информации, подтверждает высказанное нами ранее предположение о том, что знание следует связывать не только с содержанием понятия, но (это принципиально важно) и с тем, как это понятие (система понятий) функционирует в более широком контексте языка, граница которого определяется целями и условиями решения познавательной цели (задачи);

- понимание как бы завершает процесс формирования знания. Но при этом нужно иметь в виду, что понимания (в смысле завершающей фазы познавательного процесса) как такового не существует, то есть понимания без всех предшествующих ему структурных элементов (например, образа) и уровней нет и не может быть. Поэтому можно говорить, что понимание – это и есть знание. Только имея в виду, что это вершина айсберга. Говоря иначе, это то, во что воплощается вся предшествующая работа мышления. Именно поэтому знание не существует вне познавательного процесса;

- знание (понимание) личностно, но оно возможно как таковое только если функционирует в масштабе общества в целом как знание многообразия единовременно существующих субъектов, взаимодействующих друг с другомв форме диалога. Информация же выполняет важную посредническую роль в этом процессе, обеспечивая единство и непрерывность познавательного процесса.

1.5. Информация, как объект научного исследования и изучения

Существование человечества на планете Земля, формирование и развитие общества и государства, связаны с информацией и о бусловлены ею. Информация в истории развития цивилизации всегда играла определяющую роль и служила основой для принятия решений на всех уровнях и этапах развития общества и государства. Например, Демокрит, используя ранее накопленную информацию, выдвинул теорию «твердых атомов», а Аристотель раскрыл причину возникновения жизни, целенаправленность ее развития и целостность живых объектов - несводимости их свойств к сумме свойств их элементов — он усматривал в нематериальном внеорганизменном факторе - энтелехии.

Эта методологическая проблема, которая не находит окончательного решения уже третье тысячелетие, нашла свое отражение и в развитии теории информации.

В первые двадцать лет после создания теории информации (начало положила статья К.Шеннона «Математическая теория связи» - 1948) ее применение в биологии представлялось поистине универсальным. С позиций этой теории исследователи подходили к расшифровке генетического кода и принципов регуляции синтеза белков, к количественной оценке упорядоченности самых различных биологических структур, к расчетам количества информации, характеризующей организацию клеток и организмов, и т.д. И многие ученые, окрыленные этими успехами, пришли к убеждению, что изучение биологической организации на основе теории информации вот-вот приведет к решению фундаментальных проблем жизни - ее сущности, ее возникновения, закономерностей ее эволюции. В 1950-х годах проводились исследования в определении качества информации рас в работах Д.М.Маккея и А.А.Харкевича, где ставятся проблемы семантического подхода к информации. Уже в следующем десятилетии вопросы качества информации стали привлекать широкое внимание. В.Л.Калмыков - создал обобщенную теорию живого, как общей теории информационных систем. В развитие теории информации внесли вклад ученые: Ю.А.Шрейдер, К.Шеннон, Ф.П. Тарасенко, А.И.Михайлов и др.

В.И.Вернадский в 1920 году, исследуя учение о биосфере, отмечал, что появление человека разумного (древнейший человек появился около 4млн. лет назад; умный — 1,75 млн. лет назад; выпрямленный - 700 тыс. лет назад, разумный, с объемом мозга 1500 м. куб - 200 тыс. лет назад) стало поворотным пунктом в истории Земли и живой природы.

В результате таких преобразований, общество приобретало, в определенном смысле, новое качество. В истории общественного развития можно выделить несколько информационных революций, связанных с кардинальными изменениями в сфере производства, обработки и обращения информации, приведших к радикальным преобразованиям общественных отношений.

Первая информационная революция связана с изобретением письменности, что привело к качественному гигантскому и количественному скачку в информационном развитии общества. Появилась возможность фиксировать знания на материальном носителе, тем самым отчуждать их от производителя и передавать от поколения к поколению.

Вторая информационная революция (середина XVI в.) вызвана изобретением книгопечатания (первопечатники Гуттенберг и Иван Федоров). Появилась возможность тиражирования и активного распространения информации, возросла доступность людей к источникам знаний. Эта революция радикально изменила общество, создала дополнительные возможности приобщения к культурным ценностям сразу больших слоев населения.

Третья информационная революция (конец XIX в.) обусловлена изобретением электричества, благодаря которому появились телеграф, телефон, радио, позволяющие оперативно передавать и накапливать информацию в значительных объемах. Следствие этой революции — повышение степени распространяемости информации, повышение информационного «охвата» населения средствами вещания. Повысилась роль средств массовой информации, как механизмов распространения сообщений и знаний на больших территориях и обеспечения ими, проживающих на них граждан, повысилась доступность членов общества к сообщениям и знаниям. Существенно возросла роль информации, как средства воздействия на развитие общества и государства, появилась возможность оперативного общения людей между собой.

Четвертая информационная революция (середина XX в.) связана с изобретением вычислительной техники и появлением персонального компьютера, с созданием сетей связи и телекоммуникаций. Стало возможным накапливать, хранить, обрабатывать и передавать информацию в электронной форме. Возросли оперативность и скорость создания и обработки информации, в памяти компьютера стали накапливаться, практически неограниченные, объемы информации, увеличилась скорость передачи, поиска и получения информации.

Сегодня мы переживаем пятую информационную революцию, связанную с формированием и развитием трансграничных глобальных информационно-телекоммуникационных сетей, охватывающих все страны и континенты, проникающих в каждый дом и воздействующих одновременно и на каждого человека в отдельности, и на огромные массы людей. Наиболее яркий пример такого явления и результат пятой революции - Интернет. Суть этой революции заключается в интеграции в едином информационном пространстве по всему миру программно-технических средств, средств связи и телекоммуникаций, информационных запасов или запасов знаний, как единой информационной телекоммуникационной инфраструктуры, в которой активно действуют юридические и физические лица, органы государственной власти и местного самоуправления. В итоге неимоверно возрастают скорости и объемы обрабатываемой информации, появляются новые уникальные возможности производства, передачи и распространения информации, поиска и получения информации, новые виды традиционной деятельности в этих сетях.

Информация, как объект научного исследования и изучения, предполагает выделение семантических, лингвистических, прагматических и технических аспектов.

В семантическом аспекте, исследования направлены на решение проблемы точности передачи смысла сообщений, с помощью кодированных сигналов. Данный подход в кибернетической системе называют информационным, связанным с реализацией в системе определенной совокупности процессов отражения внешнего мира и внутренней среды системы путем сбора, накопления и переработки соответствующих сигналов.

При лингвистическом анализе информации исследования направлены на определение знаковой системы, необходимой для эффективного восприятия и понимания информации при обмене ею между системами. В социальных системах, для выражения определенного смысла любой информации, ее фиксации и последующего логического использования служат средства алфавита и цифр. Именно на их основе формируются слова, словосочетания, предложения, логический текст и т.д. Это позволяет логически оформить сведения в виде, пригодном для восприятия. Существуют и иные, кроме документированной информации, организационные формы выражения информации: звук, свет, биологическая энергия, но все они воспринимаются логической системой человека пока через письменную знаковую систему, так как звукоречевая форма все равно основана на алфавитно-цифровой системе представления информации.

В прагматическом аспекте исследования определяется ценность для потребителя полученного сообщения с точки зрения влияния этого сообщения на последующее поведение потребителя. Данный подход называют управленческим, учитывающим процессы функционирования системы, направления ее движения под влиянием полученной информации и степень достижения своих целей.

В техническом аспекте изучаются проблемы точности, надежности, скорости передачи сообщений, технических средств и методов построения каналов передачи сигналов, их помехозащищенности и др. Данный подход называют организационным, характеризующим устройство и степень совершенства самой системы управления, в терминах ее надежности, живучести, полноты реализуемых функций, совершенства структуры и эффективности затрат, на осуществление процессов управления в системе.

Все это свидетельствует о том, что понятие информации является многозначным, что многообразие его толкований отображает весьма сложный характер реального мира, затрудняя выработку стратегии обеспечения информационной безопасности. Приходится констатировать, что в данном случае наука движется по принципу «один шаг - вперед, два - назад». Если двадцать лет назад «из-за желания давать универсальные определения — по оценке В.И. Кремянского - исследователи снова ослабили внимание к вопросам о роли собственной организованности и системности информации и в отношении понятия системности информации при этом допускается некоторый шаг назад», то сегодня представляется нелогичным, что уже несколько десятилетий понятие информации, данное в научных энциклопедических изданиях, остается неизменным, не отражая происшедших изменений, рассмотренных выше. В этой связи, на наш взгляд, было бы оправданным отражение в понятии информации, как внутренней, так и внешней ее составляющих, с учетом всех основных признаков и характеристик.

Систематизация основных признаков информации

На основании проведенного анализа можно выделить следующие основные признаки информации:

Системность информации.

Селективность информации — принцип выбора сопоставляется в теории информации с понятием неопределенности: акты выбора, образующие в своих совокупностях процессы выбора, необходимые для формирования слов и высказываний, устраняют какую-то «долю» неопределенности в некотором, заранее существующем или условно заданном множестве элементов и групп элементов, или отношений, выделяя и формируя в нем образования, с теми или иными (например, лингвистическими) структурами. Действительно, если понятие основного элемента, элементарной единицы информации, элемента процесса возникновения информации сводится к понятию акта выбора (из-за какого-то множества заранее имеющихся возможностей), а элемента уже накопленной информации — к понятию результатов соответствующих актов (единичный акт выбора сам по себе не дает образа, т.е. не есть отображение в собственном смысле слова), то ясно, что понятие выбора, или в более широком смысле, селективности и отбора включается в понятие информации в качестве одного из его основных органичных моментов. Внутренним, для теории информации и ее приложений, понятие выбора или отбора можно считать также и в том смысле, что оно используется при анализе самой информации и процессов ее накопления и переработки. При «информационном подходе» в биологических исследованиях, особенно по теории эволюции, понятие отбора занимает центральное место, при анализе различных процессов переработки информации в психической деятельности понятие «активного выбора информации субъектом» приобрело существенное методологическое значение. Обращая внимание на связь понятия информации с философскими категориями возможности и действительности, И.А. Акчурин пишет: «Всюду, где имеют место различные возможности, из которых реализуется, переходит в действительность, приобретает бытие только одна (или добавим, сравнительно немногие) имеет смысл говорить об информации», вносимой этим выбором.

Субстанциональная несамостоятельность присуща как энергии (физической и организационной), так и «самой информации»: без каких- то материальных носителей нет ни энергии, ни информации. Это не препятствует информации приобретать свою специфическую - «субстанцию» - отношения и отношения отношений, в том числе, например, управление процессами самоорганизации в искусственных информационных системах. «Неправильно было бы сказать, - отмечал В.И. Кремянский, - что организаторская работа системы информации превращается, например, в работу теплоты или какого-нибудь другого вида физической энергии. В такого рода высказываниях легко обнаружить следы анимистических представлений дикаря или веры в переселение душ, метампсихоз. На деле в таких событиях один вид движения и действия просто порождает другой (другие)».

Преемственность информации - без развитой преемственности нет и развитой структуры процессов развития, так как в них тогда остаются мало выделенными и дифференцированными явления «историчности» и саморазвития. Даже в неживой природе, где информация почти исключительно «связанная» и притом малоинтегрированная, чаще всего просто «рассеянная», таким процессам нередко свойственна, хотя и простая, но значимая объединенность всего множества «элементарных актов» изменения, образующих эти примитивные процессы развития, в особенности тогда, когда развивающиеся образования существенно изолированы (как многие космические объекты - расстояниями). В процессе такого рода складывается внутренняя для объекта и более значительная, чем в других случаях, преемственность состояний, и она создает более выраженную направленность, зависящую от внутренних для объекта условий и факторов. Она еще не «запрограммирована» на определенный конечный результат, но ход таких процессов все же предетерминирован в большей мере, чем при отсутствии всякой преемственности.

Неисчерпаемость информации.

Старение информации во времени (некоторые, выделяют лишь возможность морального старения, но не подверженность материальному старению).

Массовость информации (выделяют два аспекта — качественный аспект раскрывает массовость информации, как информации общественной, общей для всех, количественный - как информация, распространяемой для широкой сети потребителей, пользователей информации. Количественный аспект произведен от качественного). Неэквивалентность качественной и количественной оценки информации.

Ценность информации, причем, при одинаковой достоверности и форме подачи информации ее ценность не зависит от затрат на ее получение.

Трансформируемость информации (независимость содержания информации от формы фиксации и способа предъявления).

Способность информации к ограничению, при которой, чем выше уровень организованности системы, тем больше степень ограничения информации.

Универсальность информации (содержание информации может быть любым и обо всем).

Качество информации (иногда, отождествляют с безопасностью) рассматривается, как совокупность свойств информации, характеризующих степень ее соответствия потребностям (целям, ценностям) пользователей (средств автоматизации, персонала и др.). Можно выделить внутреннее качество (присущее собственно информации и сохраняющееся при ее переносе в другую систему, подсистему) и внешнее (присущее информации, находящейся или используемой только в определенной системе, подсистеме), выражаемые, соответственно, в следующих понятиях: содержательность - значимость (идентичность, полнота), кумулятивность (гомоморфизм, избирательность); защищенность - достоверность (помехоустойчивость, помехозащищенность), сохранность (целостность, готовность), конфиденциальность (доступность, скрытность, имитостойкость); доступность.

Сторонники подхода о вторичности информации выделяют также такой ее признак, как нематериальная природа информации как явления идеального мира, что не совсем, на наш взгляд, верно.

При обращении информации в социальных системах она может иметь одно или несколько следующих свойств и выступать как:
- средство организации систем (от первичного уровня до единого информационного пространства), с помощью которого осуществляется правовое регулирование отношений между субъектами (через нормативно-правовые акты, судебные решения и т.п.);
- мера оценки и характеристики организованности систем;
- источник получения знаний при образовании и воспитании;
- источник информирования о происходящих событиях и явлениях;
- источник для принятия решений;
- источник вредного воздействия на человека и общество;
- объект интеллектуальной собственности;
- товар в процессах ее создания, хранения и использования, передачи и распространения.

Структура информации.

Существует множество критериев **классификации информации**. Остановимся лишь на некоторых из них.

Информация может подразделяться:

По степени организованности (упорядоченности) - документированная и иная информация; информационные ресурсы и свободная информация, не находящаяся в информационных системах; систематизированная (каталоги, энциклопедии, рубрикаторы и т.п.) и несистематизированная информация;

По виду носителя (форме закрепления) - на бумажном носителе, видео- и звуковая, компьютерная информация, в объемно-пространственной форме, устная, энергетическая (биологическая) при энергоинформационном обмене;

По степени доступа —информация с ограниченным доступом, информация без права ограничения доступа, объекты интеллектуальной собственности, «вредная информация» с ограничением по распространению, иная общедоступная информация;

По функциональному предназначению (по сфере применения) - массовая информация, распространяемая через СМИ, и отраслевая, профессиональная (по интересам) информация. Ученые и практики выделяют более двадцати видов открытой информации по ее отраслевой принадлежности и востребованности в обществе (научная, техническая, правовая, медицинская, биржевая, финансовая, коммерческая и т.д.). Для определения правовых механизмов доступа к информации важно учитывать сложившуюся практику общественных отношений в этой сфере.

Первым информационным ресурсом, полностью зафиксированным на машинных носителях, является библиографическая информации. В развитых странах около 90% этой информации доступно в режиме теледоступа. Начался массовый перенос на машинные носители других видов документальных ресурсов, справочников о номенклатуре продукции, адресах и характеристиках фирм, каталогов с характеристиками продукции и оборудования и т.д. Используются «электронные издания» с полными текстами документов, доступ к которым возможен только с помощью компьютеров. Широко внедряются в практику появившиеся персональные карманные базы данных, которые сопрягаются через коммуникационные сети с проблемными, региональными банками данных. По объему базы данных можно подразделить на три группы: крупные (более 100 тыс. записей, 50 Мб), средние (от 1 тыс. до 100 тыс. записей) и малые (менее 1 тыс. записей, 1 Мб). К крупным относится около 26 процентов всех баз данных, к средним - 49 процентов, к малым - 25 процентов.

Подходы к формированию общества нового типа - информационного общества

Мы являемся свидетелями существенного повышения роли и места информации в жизни общества, государства, воздействия информации на развитие личности, общества, государства. Информация сегодня превратилась в мощный реально ощутимый ресурс, имеющий даже большую ценность, чем природные, финансовые, трудовые и иные ресурсы. Информация стала товаром, который продается и покупается. Информация превратилась в оружие, возникают и прекращаются информационные войны. Активнейшим образом развивается и вошла в нашу жизнь трансграничная информационная сеть Интернет. Все это серьезно трансформирует жизнь личности, общества, государства. Цивилизация, в целом, и каждый из нас, в частности, находимся в стадии формирования общества нового типа — **информационного общества**. Это общество все еще непонятно для многих. Социальная система и право, как один из основных регуляторов этой системы, существенно отстают от темпов развития информационного общества, от непостижимых скоростей «наступления» на нас новых информационных технологий и всемирной паутины Интернет - «строительного материала» информационного общества.

Что же такое информационное общество? В соответствии с концепцией З. Бжезинского, Д. Белла, О. Тоффлера, поддерживаемой и другими зарубежными учеными, информационное общество - разновидность постиндустриального общества. Рассматривая общественное развитие как «смену стадий», сторонники этой концепции информационного общества связывают его становление с доминированием «четвертого» информационного сектора экономики, следующего за тремя известными секторами - сельским хозяйством, промышленностью и экономикой услуг. При этом они утверждают, что капитал и труд, как основа индустриального общества, уступают место информации и знаниям в информационном обществе. Информационное общество — общество особое, не известное истории. Дать его определение трудно, однако можно перечислить основные особенности и характеристики:

- наличие информационной инфраструктуры, состоящей из трансграничных информационно-телекоммуникационных сетей и распределенных в них информационных ресурсов, как запасов знаний;
- массовое применение персональных компьютеров, подключенных к трансграничным информационно-телекоммуникационным сетям (ТИТС). Именно массовое, иначе это не общество, а совокупность его членов;
- подготовленность членов общества к работе на персональных компьютерах и в трансграничных информационно-телекоммуникационных сетях;
- новые формы и виды деятельности в ТИТС или в виртуальном пространстве (повседневная деятельность в сетях, купля-продажа товаров и услуг, связь и коммуникация, отдых и развлечение, медицинское обслуживание и т.п.);
- возможность каждому практически мгновенно получать из ТИТС полную, точную и достоверную информацию;
- практически мгновенная коммуникация каждого члена общества с каждым, каждого со всеми и всех с каждым (например, «чаты» по интересам в Интернет);
- трансформация деятельности средств массовой информации (СМИ), интеграция СМИ и ТИТС, создание единой среды распространения массовой информации - мультимедиа;
- отсутствие географических и геополитических границ государств - участников ТИТС, «столкновение» и «ломка» национальных законодательных стран в этих сетях, становление нового международного информационного права и законодательства.

Типичным примером информационной инфраструктуры такого информационного общества является Интернет. Сегодня Интернет активно заполняет информационное пространство во всех странах и на всех континентах и является основным и активным средством формирования информационного общества.

США и Европа идут в информационное общество несколько разными путями.

США были своего рода пионером в формировании основ практического осуществления информационной инфраструктуры - технологической основы информационного общества. В 1993 г. правительство США выпустило доклад с планами развития национальной информационной инфраструктуры (НИИ) (Agenda for Action). Для изучения проблем, связанных с построением НИИ, была создана Рабочая группа по Информационной Инфраструктуре (Information Infrastructure Task Force).

В специально подготовленном докладе были рекомендованы основные принципы формирования информационного общества: поощрение частных инвестиций;

- концепция универсального доступа - помощь в технологических инновациях;
- обеспечение интерактивного доступа;
- защита личной жизни, безопасности и надежности сетей;
- улучшенное управление спектром радиочастот;
- защита прав интеллектуальной собственности;
- координация государственных усилий;
- обеспечение доступа к государственной информации.

В соответствии с этим докладом США взяли курс на строительство информационной супермагистрали, как технологического средства, позволяющего каждому найти информацию, развлечение себе по вкусу, и которая определяется как совокупность всех технологий, связанных с производством, обработкой, хранением и распространением информации, будь то телевидение, компьютерные сети, спутниковое вещание, коммерческие онлайновые компании. Доклады рабочих групп, призванных изучать связанные с этими процессами проблемы, посвящены гуманитарным темам - здравоохранению, образованию, сохранению неприкосновенности личной жизни и информации, охране прав интеллектуальной собственности и т.п. С учетом глобального характера происходящих под воздействием информационных и телекоммуникационных технологий изменений, инициатива из национальной, постепенно перерастает в глобальную.

В Европе также уделяется серьезное внимание формированию информационного общества. Разработана стратегия вхождения Европы в информационное общество, подготовлены и реализуются рекомендации по вхождению в него.

Резолюции и документы Совета Европы посвящены разным аспектам становления информационного общества в европейских странах. Европейская комиссия в феврале 1995 г. учредила Форум для обсуждения общих проблем становления информационного общества. 128 его членов представляют пользователей новых технологий, различные социальные группы, поставщиков содержания и услуг, сетевых операторов, государственные и международные институты. Цель работы Форума — проследить процесс становления информационного общества в таких областях, как воздействие на экономику и занятость; создание социальных и демократических ценностей в "виртуальном сообществе»; воздействие на общественные, государственные службы; образование, переквалификация, обучение в информационном обществе: культурное измерение и будущее СМИ; устойчивое развитие, технология и инфраструктура. Обращается внимание на то, что если Европа не сможет быстро и эффективно адаптироваться к условиям информационного общества, ее ждет потеря конкурентоспособности перед лицом США и азиатских экономик, а также социальное отчуждение внутри европейского сообщества. Проблемы развития информационного общества представлены в первом ежегодном докладе Форума «Сети для людей и сообществ».

Практически каждая из стран Европы имеет программу, посвященную формированию национальной политики в деле построения информационного общества, причем эта политика воспринимается не как дань моде, а как императив, невыполнение которого чревато потерей конкурентоспособности всей страны, сравнительным снижением уровня жизни, потерей темпов развития и отбрасыванием с передовых экономических, торговых, технологических позиций.

Если рассматривать проблему формирования информационного общества в целом, то специфика современного момента выражается в том, что дальнейший прогресс информационных и телекоммуникационных технологий зависит не столько от прорывов собственно в технологиях, сколько оттого, насколько быстро будут приспособлены к новым реалиям старые нормы, регулирующие традиционно разные сектора - телекоммуникации, телевидение и иные средства массовой информации.

1.6. Информациология, как системообразующая наука

Информациология – фундаментальная генерализационно-единая наука об информации как совокупности отношений во Вселенной, в природе, в обществе, осуществляющая процессы познания, восприятия и исследования на основе фундаментального принципа информациологического подхода. Информациология в качестве науки наук объединяет на информационной основе все существующие теории, предлагая качественно новые принципы, методы, формы и пути информациологического исследования, изучения процессов самоинформацизации Вселенной и осуществления научно-социальной информатизации общества и человека, государственных и общественных организаций.

Понятие информациологии, ее основные категории и термины введены президентом Международной Академии Информатизации И. И. Юзвишиным. Его монография "Информациология" и другие работы не только заложили основы теории информациологии, но и позволяют вести дальнейшие информациологические исследования в области естественной и искусственной информации, проблематики и методологии этого исследования. На определенном этапе оформления информациологии как сложноструктурного научного образования возникает потребность в ее формализации как универсальной интегрированной научной теории, формализации ее области исследования, формализованном описании ее средств, процессов и результатов в качестве информациоло-гических ресурсов.

Известно, что дифференциация и интеграция науки и научных исследований находятся в диалектическом единстве, в единстве и в борьбе противоположностей – разобщения и объединения. Эти противоположности "взаимно обусловливают, ... содержат друг друга, взаимно полагают друг друга". Дифференциация понимается как процесс разделения науки на ряд специализированных наук, выделение новых наук в качестве самостоятельных разделов знаний. Интеграция – синтез наук на основе их взаимосвязи, взаимопроникновения и взаимодействия "их методов, идей, теорий". Формально дифференциация, означающая спецификацию и индивидуализацию науки со своими понятиями, средствами и языком, является дорогой к обособлению научной области, к межнаучному размежеванию. И так оно и есть при превалировании тенденций к разделению и самозамыканию, при разрыве межнаучных связей, оторванности понятийной и аксиоматической базы науки от других научных систем. Но в общем случае это не так: дифференциация осуществляется через интеграцию, сама несет в себе элементы интеграции и является ее необходимым условием.

1. Выделение науки в качестве самостоятельной или автономной области исследования и знаний осуществляется на стыке двух наук, что означает их предшествующую интеграцию на базе творческого взаимодействия.

2. Дифференциация является продуктом этой интеграции и залогом дальнейшего взаимодействия, базой для их взаимосвязи и взаимопроникновения. А универсализация этой взаимосвязи и межнаучных отношений является основой взаимодействия дифференцированной науки с множеством смежных наук.

3. Наличие науки в качестве самостоятельной научной системы с собственной значимостью невозможно без ее унификации и идентификации, формализованного выделения из общенаучной области, что и обеспечивает ее дифференциация. Обращение к науке обусловлено ее назначением и применимостью, специфичностью и/или уникальностью средств и методов. Следовательно, именно дифференциация создает возможности для межнаучного и межпредметного взаимодействия и для последующей межнаучной интеграции. Развитие и реализация межнаучного взаимодействия становится актуальной необходимостью современных исследований, что находит отражение, в частности, во всеобщей математизации и информатизации науки.

Многопредметность исследования, также являющаяся следствием дифференциации науки, тоже влечет необходимость научной интеграции.

Любая из наук обладает своей областью исследования и содержащимся и ней классом объектов исследования. Каждый объект исследования, получая формальное или формализованное представление и соответствующее теоретико-множестенное описание, преобразуется в предмет исследования (изучения) этой науки. Поскольку это представление осуществляется на используемом данной наукой языке, то **<u>предмет исследования</u> создается в логическом единстве объекта исследования, назначения исследования и средств исследования.**

Однако при расширяющейся дифференциации науки один и тот же объект становится предметом исследования нескольких или множества прикладных и/или фундаментальных наук. Возникают и множатся явления многопредметности, - "... один объект является часто предметом сразу нескольких разных исследований. Это особенно характерно для науки наших дней, когда фактически любой **объект исследуется методами не одной, а одновременно нескольких наук**. В этих условиях возникает новая задача ... построения особой картины объекта, которая бы увязывала между собой предметы разных наук, изучающих данный объект. Иными словами, исследование объектов в рамках разных предметов должно быть подчинено более широкому, единому, многопредметному исследованию".

Таким образом, возникает требование **интеграции локальных процессов исследования в единый межсистемный процесс, а частных систем знаний об объекте исследования – в обобщенную систему знаний, что влечет соответствующую интеграцию научных направлений исследования.** А поскольку научный процесс осуществляется на уровне множества локальной межпредметности, то это требование локальной интеграции прикладных наук влечет необходимость всеобщей межнаучной интеграции.

Чем глубже дифференциация наук, тем более явственней ощущается потребность в межнаучных и межсистемных связях и шире процессы научной (информациологической) интеграции.

С возрастанием локальных взаимосвязей все более проявляется потребность в глобальной интеграции науки. И не случайно, что информациология возникла именно в наше время, когда дифференциация науки почти достигла своего предела. **<u>Дифференциация</u> и <u>информациологическая интеграция науки</u> – звенья одной цепи, последовательные фазы единого непрерывного процесса развития науки.**

Первую фазу можно охарактеризовать как дифференциацию науки на базе элементов межнаучной интеграции и проявление тенденций к межнаучному взаимодействию.

Вторая фаза - это интеграция дифференцированных наук на основе их системного и межсистемного объединения. Это и реализуется **<u>информациологией</u> – генерализационной наукой всех наук,**

системой систем научного исследования. Информациология является итогом первой фазы и олицетворением второй.

В результате этих процессов развития наука остается единым образованием, но находится на качественно другом уровне - является уже не жестко централизованной, а системно-автономной. Каждая из наук и научные направления сохраняют или приобретают свою собственную значимость и самостоятельность, унифицированную аксиоматику, свою терминологию и систему понятий, однако при этом увеличивается множество горизонтальных и вертикальных взаимосвязей, которые должны подчинятся общим принципам научного исследования.

Для интеграции множества наук в одно системное образование необходима общая научная платформа, и информациология предлагает ее – **информационная**. **Все объекты и процессы исследования имеют информационное представление и описание, поэтому информациология считает каждый процесс исследования информационным, а знания – элементами единой обобщенной системы информационных знаний.** Однако для полной научной интеграции и этого представления недостаточно.

Информатизация на основе знаковой (искусственной) информации, обеспечивает интеграцию наук гуманитарного и абстрактно-научных направлений, но не охватывает естественные науки, исследующие природные явления в их исходном, неотраженном (человеком, прибором, системой) состоянии, во многообразии их взаимосвязи и взаимодействия. И эту проблему решает естественная информация, обозначающая и выражающая это разнообразие.

Введение в научный оборот И. И. Юзвишиным абстрактного понятия естественной информации явилось поистине великим шагом, который позволил не только поднять соответствующие исследования на качественно новый уровень, но и объединить на информационной основе все научные исследования, всю мировую науку, и гуманитарную, и естественную. А **информационное представление всех <u>явлений, процессов, событий, факторов, объектов и субъектов Вселенной</u> означает включение в объектную область информациологии всего разнообразия мира, а значит, и всех объектных областей науки**.

Таким образом, **<u>информациология</u> – многоуровневая научная система, объединяющая на информационной основе все научные исследования, системы, явления и процессы Вселенной в качестве однородных элементов ее объектной области, все знания природы, общества, человека.**

Основы информациологии изложены Президентом Международной академии информатизации И. И. Юзвишиием в его фундаментальном труде "Информациология". В ней дано научное обоснование ее предназначения и значимости, определение типов и природы информации, структуры предметной области, видов и законов информационного взаимодействия, дано описание их взаимосвязи и взаимовлияния, влияние на общество и человека.

Однако, как и для любой фундаментальной науки, данные основы информациологии – это только начало, средство и платформа для новых исследований, имеющих тенденции к возрастанию по мере ее становления и развития, и в этой связи возникает потребность в определенной формализации информациологии как научной теории, источника и средства получения знаний.

Формализация касается, в частности, таких вопросов, как:

- структура интегрированного научного образования, система межнаучных и межпредметных отношений;

- структура области информациологии, сфер назначения и применения; объектных и предметных областей;

- структура информации в качестве основного предмета исследования информациологии, взаимосвязь и взаимовлияние естественной и искусственной информации на уровне природы и человека;

- структура процессов систематизации информации и совокупности значений как обобщенной универсальной системы общественно-научных знаний;

-структура информатизации в качестве области исследования информациологии, структура информатизации Вселенной, общества, человека, социальных и научных систем;

- структура средств исследования информациологии, ее терминологии и языка, метаязыка представления и форм выражения информации;

- методология информатизации, многоуровневое множество ее методологических подходов, методов, принципов, их взаимосвязь, взаимовлияние, противоречия и сочетания.

Назначение информациологии

Информациология определена президентом Международной Академии информатизации И. И. Юзвишиным как фундаментальная наука (наука наук), объединяющая все информационные исследования, как интеграция всех наук.

Информациология – это генерализационная наука исследования всех информационных процессов и явлений, микро- и макромиров Вселенной, обобщения практического и теоретического материала всех исследований с единой информационной точки зрения.

Процессы, явления и информационные материалы рассматриваются информациологией "во взаимоотношениях, во взаимосвязи и во взаимодействии с овеществленными и неовеществленными атрибутами материализации и дематериализации".

Основное назначение информациологии – это:

• интегрированное объединение всех процессов, предметов и результатов научного исследования в рамках одной обобщенной научной системы на базе межсистемной взаимосвязи и межнаучного взаимодействия;

• описание объектов исследования и их предметного представления в виде различных типов и форм информации и информационных процессов;

• разработка универсальной методологии и средств исследования, языка исследования и межнаучных отношений;

• исследование систем информации, объектов и явлений природы, общества, Вселенной, микро- и макромира на новом качественно высоком научном уровне, на основе общих универсальных законов информациологии.

Идея рассмотрения информации как единого целостного образования во всех взаимоотношениях его составляющих, а всех процессов исследования – как взаимосвязанных элементов единого процесса исследования – поражает своей простотой, кажущейся наивностью и главное, осуществимостью.

1. Идея интегрированного объединения различных разнородных и разнотипных прикладных наук в одно генерализационное образование действительно кажется простой – рассматривать все научные исследования как элементы единого научного процесса, а результаты исследований – в виде обобщенного информационного множества. Однако простое механическое объединение множества наук еще не является наукой в качестве целостного образования. Любая наука формируется как уникальная система научных исследований, взаимосвязанных, взаимозависимых и взаимодействующих, имеющих единую предметную систему и общие подходы, принципы, однородные средства и единый язык исследования (по вполне определенным признакам однородности и общности или универсальности элементов языка). Поэтому здесь не имеется оснований для формального механического объединения. И, конечно же, создание и формирование информациологии осуществляется в соответствии с ее фундаментальным принципом **информациологического подхода**, **в котором системный, межсистемный, локальный и другие известные принципы являются частными принципами построения многоуровневого "информационно-сотового пространства мирового сообщества".**

2. Наивной идея объединения научных исследований в рамках единой науки кажется потому, что на протяжении многих веков наблюдался обратный процесс дифференциации науки, имеющий все признаки закономерности – с расширением множества процессов исследований и их результатов (информации, данных, знаний) шло размежевание наук с выделением все новых отраслей знаний и научных дисциплин. Каждая из таких наук, имея свое назначение, область применения, средства и язык исследования, приобретая свое теоретическое и прикладное значение, оформлялась в виде логически замкнутой

системы исследований и занимала соответствующую нишу в сфере научного познания мира. Такие процессы дифференциации, унификации и размежевания наук кажутся не только закономерными, но и неизбежными и практически необратимыми. В современном мире непросто представить такие фундаментальные науки, как математика или информатика в качестве единых систем познания в совокупности закономерных взаимосвязей их многочисленных разделов и частей, приобретающих все большую собственную значимость, автономию и даже некоторую оторванность. Тем более это кажется сложным и невероятным в рамках обобщенной науки.

3. Самое интересное, что такая интеграция наук действительно возможна. Только осуществляется она **не путем механического объединения в одно множество различных и разнородных процессов исследования, а путем информациологической и системной интеграции и формированием соответствующих атрибутов генерализационной науки – объектной и предметной областей, подходов, принципов, средств и языка исследования, архитектуры и др.**

Информациология рассматривается как единая генерализационная научная система, имеющая в своем составе многоуровневое множество подсистем, представляющих другие (фундаментальные, прикладные, частные) науки и научные разделы. Соответствующим образом представляется и система информации, результатов исследования, информационных знаний – система систем и интегрированное объединение множества систем знаний. **Именно такое представление знаний позволяет их рассматривать в качестве единого целостного открытого образования.**

Актуальность информациологии

К вышесказанному надо прибавить актуальность, настоятельную необходимость и своевременность появления информациологии. Возникновение новых наук и научных разделов на стыке других наук всегда является положительным фактором. Формирование отрасли науки со своей областью исследования, свойственными только ей средствами и языком исследования дает мощный импульс для образования новых методологий и технологий изучения и соответственно новых систем знаний. В конечном счете это ведет к существенному расширению границ науки и научных исследований. Назначение и задачи новой системы (отрасли или раздела знаний) определяются целями и задачами порождающих ее надсистем, в данном случае наук, на стыке которых она образована.

Однако со временем логическая замкнутость отрасли знаний может обернуться ее излишней автономизацией и обособленностью как от своих порождающих научных систем, так и от смежных (родственных) разделов знаний. Потеря разделом науки общесистемных связей пагубно отражается главным образом на нем самом: **перестав решать задачи порождающих систем, раздел перестает соответствовать и своему назначению, теряет научную направленность, ориентацию.** Отрасли науки, погрязшей в мелкотемье, в решении незначащих задач, грозит саморазрушение и отмирание. То есть дифференциация наук, расширяя границы науки в целом, сужает общесистемное пространство научного исследования и часто приводит к утрате генерализационных и межсистемных связей, а вместе с ними – и перспектив развития отдельных наук.

В качестве примера такого развития науки И. И. Юзвишиным приводится математика. По мнению И. И. Юзвишина в современной математике наблюдается наличие "... хаоса в порой ненужной повторной квазиматематизации отдельных вопросов, которая не имеет ни научного предвидения, ни практического применения". Как математик-алгебраист автор предлагаемого исследования не может полностью согласиться с тезисом о сведении множества математических исследований "к философской математической эквилибристике", хотя немалая доля горькой истины в этом имеется.

Благодаря информациологии, и не только информациологии – благодаря информатике, системологии, развитию процессов систематизации и формализованного моделирования и в целом, благодаря математизации научных исследований, математика выходит на качественно новый уровень; "наступил перелом в математике – переход от математики абстрактной к информационной", от математики формальных систем к математики открытых формализованных систем. То есть межтематическая, межпредметная и межсистемная связь математики с другими науками раздвигает ее границы. Предоставляя свои средства и возможности другим отраслям знаний, математика испытывает обратное положительное влияние и соответственно обогащается. При этом, необходимо заметить, что абстрактная математика на уровне формальных, алгебраических систем не только не отмирает или теряет актуальность, но и приобретает новую значимость – она становится реальной научно-теоретической базой для информационной математики и информациологии в целом.

Энергия и значимость системы значительно больше суммарной энергии и значимости составляющих ее частей или подсистем именно за счет потенциальной энергии системообразующих связей и их реализационных возможностей. Поэтому **каждый блок или раздел науки, какой бы самостоятельной значимостью он ни обладал, не должен стремиться к самозамыканию и разрыву связей с порождающими его системами знаний.** И, во-вторых, там, где имеется возможность установления системных взаимосвязей и взаимозависимостей между различными науками в рамках какой-либо обобщающей системы, это надо обязательно реализовать. Вот почему так важно сохранить системное единство таких фундаментальных наук, как информациология, математика или хотя бы, допустим, алгебра.

Однако дело не только в возрастании или убывании творческого потенциала науки в результате ее межсистемной интеграции или обособления. Дело еще и в том, что наука, замыкаясь в своем "локальном аспекте", не рассматривая явления жизни и природы в единой взаимосвязи, не может до конца изучить и объяснить их. Она вынуждена лишь находить локальные закономерности и действовать в их пределах. Лишь только при рассмотрении этих факторов **в <u>пространстве</u> единой обобщающей системы научных исследований и знаний можно выработать общие законы общества, природы, Вселенной и объяснить все недоступное частным наукам.**

Такой наукой и является **информациология, которая объединяет другие науки единой теорией об информации тел, систем, полей, сфер и пространства Вселенной в целом.**

Дифференциация наук, по-видимому, и дальше будет продолжаться – в локальном аспекте она положительна и плодотворна. Она действительно закономерна, но только как первая фаза общего развития науки. А **<u>развитие науки</u> – это ее систематизация, формирование в систему систем посредством взаимосвязанных и взаимодействующих процессов дифференциации и интеграции**. Дифференциация наук не только не мешает их интеграции, но и является необходимым условием ее, обеспечивая выделение наук в качестве автономных частей с собственной значимостью. Да и дифференциация вообще означает не только размежевание науки с выделением части в качестве нового целого. Она означает, прежде всего, результат взаимосвязи и взаимодействия двух или более различных наук и их областей знаний, возникая на их стыке, пересечении. И, значит, уже несет в себе элементы будущего объединения этих наук **на локальной, межсистемной и генерализационной основе**. Однако в глобальном аспекте познания мира дифференциация почти исчерпала свои возможности, с одной стороны, и подготовила исходную базу для интеграции, с другой стороны. Поэтому развитие науки обязано активнее вступать в новую (вторую) фазу – генерализационного (общесистемногоо) формирования. Сегодня **магистральный путь развития множества наук заключается в их логической интеграции, в исследовании процессов "в общей информационной совокупности явлений и событий", в развитии информациологии.**

Конечно, информациология не является панацеей от размежевания науки. Информациология устанавливает интеграцию науки сверху, определяя общие закономерности, принципы и подходы. Необходимо:

• чтобы процессы интеграции возрастали и снизу – за счет локальной, межсистемной и межпредметной связи между науками;

• чтобы фундаментальные науки предоставляли свои средства, методы, возможности другим наукам;

• чтобы науки – потенциальные потребители (история, языкознание и др.) применяли средства наук-доноров для своих исследований – информациологического представления и описания, формализованного моделирования.

Основные грани информациологии

Основные идеи и направления исследования информациологии сформулированы академиком И. И. Юзвишиным. В качестве определяющих факторов следует выделить следующие.

1. Генерализационность информациологии, объединение всех научных исследований на базе единого фундаментального принципа

информациологического подхода с единым (на информационной основе) множеством законов, закономерностей, методов и частных подходов. Это позволяет поставить процессы всех информациологических исследований на новый необычайно высокий уровень качества, достоверности и надежности:

• рассмотреть законы и явления общества, природы и Вселенной с генерализационных (обобщенных) информационных позиций;

• переосмыслить многие процессы и явления, дав им обобщенные и взаимосвязанные информациологические объяснения;

• обобщить знания и фундаментальные законы множества наук.

Нельзя не согласиться с автором, что информациология – наука XXI века и даже всего третьего тысячелетия.

2. Глобально-космическая область исследования информациологии, безграничность и всеобщность ее объектной области. До появления информациологии информационно-научные исследования по сути замыкались на знаковой информации, искусственной – воспринятой одной из отражающих систем, получившей объективное выражение, прошедшей соответствующие этапы теоретического или экспериментального исследования и каким-либо образом формализованной.

Искусственная информация, обретая формы выражения, обозначения и представления, так или иначе, проходит через сознание человека или автоматизированную систему, искусственный интеллект и интерпретируется исследователем в соответствии с его способностями и возможностями к этой интерпретации, становится зависимой от них и потому не может считаться полностью объективной, достоверной и непротиворечивой.

Одним из главных достоинств информациологии является то, что она ставит своей стратегической задачей **исследование всей информации: и искусственной, и естественной – информации микро- и макропроцессов Вселенной, находящейся вне сознания человека (без знаковой интерпретации).** Естественная информация полностью объективна. **Введение в качестве <u>объекта познания</u> естественной информации раздвигает горизонты науки вообще и**

информациологических исследований, в частности. Это также привносит новые возможности для исследования искусственной информации – во взаимосвязи с естественной.

3. Исследование естественной информации требует совершенно других подходов к определению самой информации и к ее элементам (виртуальным, субэлементарным и элементарным частицам). **Информация рассматривается в наиболее общем виде – как отношение или продукт взаимодействия различных систем, объектов и явлений природы:**

"**Информация – это всеобщий бесконечно единый законопроцесс фундаментальных отношений, связей, взаимодействий и взаимозависимостей энергии, движения, массы, вакуума, микро- и макроструктур Вселенной" (следует добавить"... или другой информации**").

Множество взаимоотносящихся объектов представляют или только естественную информацию естественных систем или искусственную искусственных или естественных и искусственных систем.

Подход к информации как к отношению или продукту соотношения позволяет осуществлять исследование любого ее проявления и каждого элемента, в том числе и информации, не представленной в знаковой форме (естественной) и потому ранее практически недоступной для оценки и изучения. Однако это предполагает и иную форму ее выражения и представления. Для того, чтобы любая часть естественной информации стала предметом рассмотрения и изучения, необходимо ее **теоретико-множественное представление, предусматривающее обозначение и выражение через посредство неких элементарных частиц – образующих элементов.**

В качестве такой элементарной частицы информации И.И. Юзвишиным введен **информацион – "генерализационная субэлементарная единица (квант) отношений".**

4. Обоснование принципиально нового методологического принципа к исследованию – **информациологического подхода**. Суть этого **подхода состоит в рассмотрении любых, объектов, систем, элементов, компонентов через призму всех их внутренних и внешних (по отношению к объекту рассмотрения) взаимоотношений,**

взаимосвязей, взаимодействий. Информациологический подход является фундаментальным методологическим подходом в информациологии.

Правда, необходимо некоторое уточнение сути этого генерализационного подхода и его связи с системным подходом. Являясь мощным средством познания, дающим новые неиспользовавшиеся или недостаточно полно использовавшиеся возможности исследования с помощью системного подхода, информациологический подход в то же время не противоречит системному подходу и не заменяет его, а напротив, опирается на него как на частный подход и развивает его, являясь высшей генерализационной формой научного познания.

И.И. Юзвишиным введены и указаны основные понятия информациологии, области и объекты исследования, средства и методы этого исследования. Однако информациология является настолько широкомасштабной сферой исследования, сложным, многообразным и многоуровневым образованием, которое только еще "ввиду принципиальной новизны предмета исследований" проходит период начального становления, что, видимо, найдет отражение в соответствующем множестве дальнейших исследований и описаний.

В своем фундаментальном исследовании И. И. Юзвишин сосредоточился в основном на вопросах **физической сущности информации**. **Основная его цель – "это фундаментальное изучение и исследование микро- и макромерных явлений и процессов природы на основе законов физики, химии, астрономии, космологии, биологии, социологии и других наук".** Но поскольку **информациология является наукой об информации и системах знаний в целом**, то необходимо и ее описание с позиций **естественной и искусственной информации, формальной математики, системологии и процессов систематизации.**

Информациология и философия

И информациология, и философия относятся к наукам наук. Каждая из них обоснованно претендует на роль интегрированного объединения других наук. Только философия является отправной точкой развития науки, а информациология – конечной (на сегодняшний день и на длительное время – третье тысячелетие).

Философия – это начала науки, объединяющие когда-то все научные исследования и все научные знания человечества. С развитием науки шла все более ее ускоряющаяся дифференциация, выделение новых научных направлений и разделов науки, быстро приобретающих самостоятельность. Можно, конечно, формально продолжать считать все фундаментальные и прикладные науки составной частью философии, но это объединение будет чисто условным: слишком разными являются эти науки, каждая из которых обладает уникальными методами, средствами и языком исследования.

Поэтому в настоящее время **философия** выкристаллизовалась в качестве **ядра науки**, ее **научно-аксиоматического основания**. Ее положения, понятия, концепции служат базой для формирования мировоззрения и выработки подходов для научного познания мира. Однако, несмотря на ее особую значимость и место в научном мире, она является теперь лишь одной из наук, **первой среди равных**.

Более того, рассматривая фундаментальные основы мироздания, философия не всегда в состоянии дать полный и окончательный ответ на многие вопросы бытия и быть непререкаемым путеводителем для других наук. Это, в свою очередь, обусловливает наличие множества научных и межнаучных противоречий. Дело в том, что с одной стороны, философия является научной базой и опорой для всех исследований, а с другой стороны, сама философия, имея в своем непосредственном распоряжении довольно ограниченный набор средств исследования, вынуждена в своих выводах опираться на знания различных прикладных наук. Поэтому и выводы могут быть различными, и не может быть полной согласованности результатов исследований.

Философия не может решить вопрос о соответствии материального и идеального – известно множество взглядов и течений. Наиболее близким к информациологии является, видимо, учение космополитов о равнозначности материи и идеи, бытия и сознания, о духовном и природном единстве человека с космосом. Однако это учение, основанное только на чисто философских понятиях и мировоззрении, не может дать всестороннего обоснования этого единства. Идейное (информационное начало) учение связывает с мировым разумом.

Ограниченность этого учения заключается в том, что мировой разум вроде бы связан с неким сознанием, существующим вне материи и системы взаимодействия (естественной информации). То есть информация и материя становятся как бы зависимыми от этого сознания, вторичными по отношению к нему. Но если это так, то мировой разум должен обладать некой организацией, откуда-то берущей начало, и системой взаимодействия с миром информации. Все станет на свои места, если поставить на место мирового разума информацию – мировой разум не над информацией, а – в информации.

Философия не дает однозначного понимания информации, которая трактуется ею как сообщение, совокупность сведений или как средство связи, передачи. Различное понимание информации, как представляется, связано в первую очередь с недооценкой ее роли,

в трактовке ее как искусственной информации – третичной по отношению к материи и сознанию. В то время как информация – объективная реальность, не являющаяся функцией материи, а сознание – форма информации. Соответственно с разнотипностью понимания информации разнотипно и философское понятие количества информации. Его понимание связано с пониманием самой информации, а также с природой систем, порождающих и воспринимающих эту информацию.

Философия является научной основой теории и методологии познания. Ее базовые понятия общего и частного, синтеза и анализа и многого другого являются основополагающими для всех научных исследований. В основе организации, упорядочения мира. взаимосвязанного и взаимозависимого взаимодействия различных объектов, явлений, процессов и организмов до информациологического периода использовалось понятие системы, открытой, целостной, развивающейся. А в основе методологии научного исследования лежал универсальный системный подход, относимый философией к методологии 2-го уровня. Однако современные информациологические методы исследования требуют некоторого обобщения этого подхода, перехода к его совершенной форме – **от системного и информационно-системного к фундаментальному принципу информациологического подхода.**

Интеграция всего множества различных наук, невозможная на базе философии, возможна и необходима на базе информациологии. Только эта интеграция осуществляется здесь не формальным (физическим) или условным объединением наук и их знаний, а **путем системного,**

межсистемного, локального и нульматериального информационно-точечного отношения и на этой основе объединения:

• при управлении всеми информациологическими исследованиями и использовании общих законов информациологии всеми другими науками;

• при автономности от информациологии прикладных наук и при их полной независимости друг от друга.

Совершив в течение многих столетий своеобразную спираль развития, наука возвращается к ее исходной точке, но несравнимо на более высоком уровне.

Следствием данных положений об интеграции наук являются следующие выводы.

1. Информациология, как и все другие науки, должна опираться на фундаментальные положения философии.

2. Философия, как и другие науки, становится научной основой информациологии и должна учитывать установленные в ней закономерности.

Физические и математические аспекты информации

И.И. Юзвишин основной задачей информациологии ставит исследование естественной информации, изучение ее природы, структуры, источников образования. Первостепенное значение здесь приобретают вопросы определения сущности информации, оценки информации, взаимосвязи с другими факторами, явлениями, объектами, стихиями природы, общества и Вселенной.

Безусловно, эти проблемы действительно основополагающие для теории информатизации: именно установление этой взаимосвязи и общих закономерностей информации, информационного пространства, системы информациологического исследования позволяют представить информационногенную картину мира в целом, в информационном единстве его частей, на уровне общих законов, имеющих, как установлено, **информациогенно-вакуумную основу мироздания**.

На основе представлений об информации как об объективном взаимодействии объективных реалий и системы физико-математических соответствий и соотношений И. И. Юзвишин приходит к выводу о первичности информации: "первичное – информация, вторичное – материя. Не бытие определяет сознание, а информация (сознание) определяет бытие" (**мы считаем этот тезис довольно спорным**.) Триединство энергии, движения, массы на основе законопроцесса их "взаимопревращения и взаимосохранения" дополняется четвертой составляющей – информацией, и убедительно показывается, что именно она является основной, выражающей все остальные, "переходя из одного состояния в другое".

Информация – это фундаментальный генерализационный безначально-бесконечный законопроцесс автоосцилляционного, резонансно-сотового, частотно-квантового и волнового отношения, взаимодействия, взаимопревращения и взаимосохранения (в пространстве и времени) энергии, движения массы и вакуума на основе материзации и дематеризации в микро- и макроструктурах Вселенной.

Материя, информация, сознание являются фундаментальными понятиями философии и науки в целом. Спор о их взаимоотношениях длился столетиями.

Материя понимается как объективная реальность, существующая вне нашего сознания, но отражаемая им и воспринимаемая через посредство наших ощущений. То есть, это понятие, идентифицируемое человеческим сознанием как средство познания мира, по Д. Ф. Лосеву – "абстрактное понятие".

То же самое можно сказать о взаимодействии и отношениях материи – абстрактном понятии, означающим объективную реальность вне нашего сознания: **материи не существует вне взаимоотношений, взаимодействий и движения**.

Выделение первой роли информации также имеет основания, что и показывает И. И. Юзвишин на языке информациологии, физики и формул: информация – первична, материя – вторична. Вселенная рассматривается им, как сложное многоукладное информациогенно-вакуумное и материзованное пространство, которое может содержать в качестве локальных подпространств "евклидово, векторное, Гаусса, псевдоевклидово, псевдориманово, Лобачевского, Риманово, Картана и др." В этих искривленных пространствах масса может превращаться в нуль-массу, материя в энергию, скорость в материю и наоборот. Законы сохранения материи и энергии перестают выполняться. Но отношение или взаимодействие (информация) существует постоянно, и закон сохранения информации, открытый И. И. Юзвишиным, действует в любом пространстве Вселенной. Следовательно, можно считать, что все локальные подпространства Вселенной "являются частными случаями генерализационно-единого информационного пространства" .

Поскольку, кроме того, и материю, и энергию, и скорость, и информацию можно математически выразить через другие, то это позволяет именно информацию считать первичной (по отношению к материи). То есть **информация не потому (и не только потому) названа первичной, что она образует материю, а потому, что она дает ее выражение, описание и начало ее образования.** Именно такое информациологическое описание объектов, явлений и стихий Вселенной позволило И. И. Юзвишину получить основополагающие законы, обобщающие многие другие фундаментальные законы науки и дающие основу для ускоренного продвижения в научных исследованиях.

Однако это описание не является только абстрактным математическим выражением материи через посредство информации или наоборот. Согласно закону информационного равновесия, сформулированному И. И. Юзвишиным, материя, энергия и информация в открытых системах могут переходить друг в друга, взаимопревращаться. "В открытых системах массы могут увеличиваться за счет притока информации извне или уменьшаться за счет оттока информации вовне". Здесь открытые информационные системы – это люди, животные, растения.

Следует, видимо, различать отношения материи и информации в пространстве Вселенной и в окружающем мире – на Земле и околоземном пространстве. Здесь эти отношения дополняются устоявшимися представлениями об этих понятиях, их отражением и ощущением. Можно сказать, **что материю мы ощущаем (осязаем как вещество), информацию – наблюдаем, оцениваем, отражаем в сознании**. Поэтому на этом уровне взаимоотношения материи и информации конкретны и проявляются в конкретных ситуациях.

В принципе, отношения материи и информации имеет значение и интерес либо в глобальном смысле (на уровне Вселенной), либо именно в конкретных случаях – в конкретных информационных системах или системах информатизации, для конкретной информации, конкретных информационных объектов и информационных отношений, поскольку эта информация и отношения дают описание вполне определенных материальных объектов или другой информации. При классификации и использовании предметов изучения здесь имеют значения их физические, семантические, прагматические, потребительские свойства, правовой статус.

И Земля, и человек являются частицами Вселенной и поэтому непрерывно и постоянно порождают, воспринимают и распространяют множество естественной информации, которая в зависимости от контекста процесса исследования может рассматриваться в качестве первоосновы либо как функция материи и/или другой информации. Это, например, имеет место в процессах жизнедеятельности и мышления человека, где не только каждый тип информации неразрывно связан с другими, но и, как сказано выше, самым непосредственным образом связан с материей и энергией.

Искусственная информация, являясь отражением мира и представленная в знаковой форме, относится к невещественным (нематериальным) объектам. Приобретая одну из объективных форм выражения в виде формализованного сообщения, она становится материализованной. Это обусловливает одно из исключительных свойств информации – предметом собственности является не сама информация, а права на нее.

Количество материи в окружающем мире относительно постоянно (в силу теории относительности) и, как говорят некоторые ученые, – "ничтожное" в масштабах Вселенной. Поэтому не материя является определяющим фактором жизни Вселенной, а процессы отношения и взаимодействия – естественная информация.

Искусственная информация, являясь образом естественной информации, реализуемым во множестве различных моделей, создаваемых сознанием человека, также берет верх над материей. Современные экономические исследования говорят о "снижении роли вещественных средств производства" и о "переносе акцента на организацию дела, информацию, управление".

В формальных (математических, информационных) случаях мы абстрагируемся от конкретного содержания информации, ее семантического смысла и, следовательно, от ее отношения к материи. В таких системах нас интересует не природная (физическая) связь между различными объектами вычислительной (обрабатывающей) системы, а их математические соотношения (информация).

Следовательно, с позиций математики, а значит, и математической (формальной) информатики, понятия материи и информации могут быть равнозначны. Любой объект исследования, получая формальное выражение, приобретает абстрактное теоретико-множественное представление и исследуется в качестве формальной или открытой системы (модели), где конкретные физические свойства не имеют значения.

Точность информациологии

Множество всех наук разделяется на естественные (физика, химия, биология, астрономия и др.), общественные (социология, право и пр.), гуманитарные (филология, история, психология, педагогика и т.д.), технические (машиностроение, электроника, кибернетика).

Математику относят к полугуманитарным-полуестественным наукам. К этому же типу следует, видимо, отнести и информатику (в ее понимании как науки о всей искусственной информации).

По определению информациологии все эти науки являются ее поднауками на правах подсистем в общей (универсальной) системе научного исследования. При этом мы видим, что поскольку каждая из этих наук обладает своей степенью точности (математика, физика, информатика – точные науки, филология, педагогика – неточные), то в пределах одной науки получаем совокупность точных и неточных поднаук. Более того, поскольку информациология объединяет все науки, то она включает и такие науки, как астрология, метафизика. В принципе, эти науки, имеющие свои области и средства исследования, также имеют право на существование. А в лженауках, как известно, побывала и кибернетика. Точные науки не всему в природе могут дать формальное объяснение, неточные – более свободны в таких объяснениях. И. И. Юзвишин ссылается на Аристотеля, который, не имея возможности изложить факты на языке физики, изложил их в своей метафизике.

На уровне своих методов и средств каждая из наук по своему объясняет явления реального мира и строит свою теорию. Часто эти теории, основываясь на разных постулатах и подходах к исследованию, не только не дополняют друг друга, но и во многом противоречивы. Это, однако, не противоречит принципам их информациологического объединения.

"**Информациология включает в себя все, что объединяет другие науки единой теорией об информации тел, систем, сред, полей, сфер и пространства Вселенной".** То есть, **интеграция наук осуществляется на базе их общего, общих свойств, признаков, характеристик, на основании которых можно сформулировать единые законы и принципы научного исследования, обобщенной области исследования, формирования и интерпретации результатов исследования.**

Каждой науке соответствует своя система знаний, организуемая на основании информационно образующих закономерностей взаимосвязи составляющих ее частей и элементов (единиц знаний). Поскольку одним из важнейших принципов является непротиворечивость, то, естественно, знания каждой научной системы непротиворечивы.

Система знаний обладает также множеством данных – несистематизированной информацией, статичной информацией, дающей описание знаний. Данные всегда имеют лишь временную ценность и, как правило, быстро устаревают. Они могут быть во многом противоречивы, и эти противоречия устраняются при дальнейших исследованиях. Поэтому **<u>универсальная система знаний информациологии</u> – это системное объединение крупных структурированных единиц знаний на основе единых информационных закономерностей и потому полностью совместимых**. Знания объединяемых наук в рамках универсальной науки, которой является информациология, могут попадать лишь в разряд ее данных и потому никак не влиять на ее непротиворечивость.

Таким образом, совсем не обязательно (хотя, конечно, желательно), чтобы знания каждых из двух наук были полностью совместимыми, ни в чем не противоречили друг другу. Необходимо и достаточно лишь, чтобы они не противоречили общим законам и закономерностям информациологии. Тем более, что при развитии процессов информационной интеграции на принципах информациологии будет ускоряться стирание частных противоречий между знаниями различных наук.

На основе межпредметной и межтематической связи наук, обмена и взаимном предоставлении ими своих средств друг другу будет осуществляться дальнейшее их сближение не только на пути научной дифференциации (появления новых наук на стыке имеющихся), логического объединения, но и на фундаментальной информационной основе, которой является информациология.

Закономерности информациологии, на основании которых формируются ее систематизирующие связи, образуют информациологический фундамент развития всех наук в целом и каждой прикладной науки в отдельности. Поскольку для точных наук информациологические закономерности должны обеспечить эту точность, то общие фундаментальные законы информациологии должны быть абсолютно достоверными и иметь предельную степень точности, то есть, сформулированы на языке точных наук – математики, физики, химии, биологии, астрономии.

Исследования информациологии могут вестись на самом различном уровне точности – и на формальном уровне абстрактных или информационных систем, и на уровне формализованных или неформализованных моделей в качестве описания различных процессов деятельности, взаимодействия, мышления, явлений общества, природы, Вселенной. Таким образом, на уровне информациологии имеют научно-теоретическую и прикладную ценность и значимость как теории и положения, сформулированные на языке точных наук в виде законов, закономерностей, теорем, так и гипотезы, пока не нашедшие формального обоснования, но вписывающиеся в общую логическую схему информациологии, вполне соответствующие ее основным законам, положениям, принципам и находящие экспериментальное подтверждение в конкретных прикладных системах информатизации, обучения, производства, в конкретных моделях, опытах, программах.

Информациология объединяет под одной исследовательской крышей и физиков, и лириков.

Всеобщее пространство – среда хранения и преобразования информации

Понимание (информации) - процесс смысловой развертки знаковых систем, раскрытия содержания, "закодированного" в знаковой форме феноменов информации с присущей им структурой и законосообразностью.

2. Пространства как информационная среда

В качестве информационной среды будем использовать различные формализованные пространства, представленные в знаковой форме.

2.1. Виды и типы информационных пространств

1. Абстрактное информационное пространство. Сначала приведем общее определение информационного пространства, а потом попробуем осознать его содержание. Формализованное информационное пространство будем определять как множество сущностей (объектов, предметов, процессов, явлений, состояний, сменных и т.п.), между которыми установлены пространственно подобные отношения. Часто слова «однородные» и «пространственно подобные» будем опускать и определим информационное пространство как кортеж $(M, A_1, A_2, ..., A_n)$, где M — некоторое множество, а $A_1, A_2, ..., A_n$ - *отношение* между его элементарными информационными единицами (ЭИЕ). Иногда об информационном пространстве будем говорить просто как о множестве M, между ЭИЕ которого подразумеваются некоторые отношения. Столь широкое понятие информационного пространства, сформулированное нами, явилось результатом абстрагирования и обобщения трехмерной эвклидовой геометрии (геометрия Лобачевського и другие неэвклидовы геометрии, разные геометрические преобразования - проективное, аффинне, конформное, топологическое и т.п.), развития понятия числа (комплексные числа, кватернионы и гиперкомплексные числа, тензоры различной валентности), как одного из средств описания информации, а также стремление использовать геометрический язык и пространственные представления для соотношений с любым количеством информационных переменных (подобно аналитической геометрии и векторной алгебре).

2. От трехмерного к многомерному информационному пространству. Положение ЭИЕ информационного трехмерного пространства в некоторой системе координат будем определять тройкой чисел *(x, y, z),* называемых *ее координатами* (рис. 2.1).

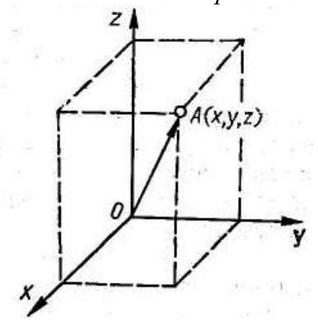


Рис. 2.1. Информационный вектор в трехмерном информационном пространстве.

Каждой ЭИЕ соотносится пространственный *информационный вектор* (ИВ), который выходит с начала координат и заканчивается в этой ЭИЕ. Числа *x, y, z* есть *проекциями* ИВ на оси координат, которые будем называть *компонентами (составными)* ИВ. Как и ЭИЕ, ИВ целиком определяется этой тройкой чисел, если строго соблюдается порядок их следования, т.е. $\boldsymbol{a}=(x, y, z)$. Итак, между ЭИЕ и ИВ информационного пространства устанавливается взаимо-однозначное соответствие. Поэтому в зависимости от удобства будем говорить об информационном пространстве как о множестве ЭИЕ или ИВ. Так, много физических информационных величин (силы и скорости, напряженности электрического и магнитного полей и др.) представляются ИВ, а различные сущности, представленные геометрическими формами, удобно рассматривать как геометрические места точек, которые удовлетворяют соответствующим соотношением.

Действия над ИВ сводятся к операциям над тройками чисел. Так, если

$$\boldsymbol{a}=(x, y, z) \text{ и } \boldsymbol{b}=(x', y', z'), \text{ то } \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x+x', y+y', z+z')$$

и

$$\alpha\boldsymbol{a}=(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

где α - некоторое число (скаляр).

Длина ИВ

$$|a|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Расстояние между двумя ЭИЕ информационного пространства, которые отвечают информационным векторам ***a*** и ***b*,** есть длина ИВ ***a-b*** и, следовательно,

$$|a\text{-}b|=[(x\text{-}x')^2+(y+y')^2+(z+z')^2]^{1/2}$$

Скалярное произведение двух ИВ определяется соотношением

$$\boldsymbol{a}\text{-}\boldsymbol{b}=|a|\cdot|b|\cos\gamma=xx'+yy'+zz'),$$

где γ — угол между информационными векторами ***a*** и ***b***. Отсюда

$$\cos\gamma=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\frac{1}{|a||b|}.$$

Единичные информационные векторы *(орты),* которые совпадают по направлению с координатными осями, выражаются соответственно как

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\ \boldsymbol{j}=(0,1,0),\ \boldsymbol{k}=(0,0,1).$$

Каждый ИВ однозначно представляется через орты, которые образовывают единичный базис в прямоугольной системе координат:

$$\boldsymbol{a}=(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

Формальное обобщение трехмерного информационного пространства заключается в том, что в качестве ИВ принимается любая упорядоченная последовательность n чисел $a=(x_1, x_2, .., x_n)$, называемая n-мерным информационным вектором или элементарной информационной единицей многомерного информационного пространства. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *компонентами (составными, координатами)* n-мерного информационного вектора, а множество таких информационных векторов — *числовым* или *точечным информационно-векторным пространством.* Определяя соответствующим образом операции над информационными векторами и задавая на множестве информационных векторов отношения, подобные информационным характеристикам сущностей, как то: длине, расстоянию, углу и т.п. в обычном пространстве, получаем специальные типы информационных пространств.

До сих пор предполагалось, что количество составляющих ИВ конечно и равно n. Ничто не мешает сделать следующий важный шаг на пути расширения понятия информационного пространства: не ограничивать количество составных информационных векторов и считать ИВ любые (конечные или бесконечные) числовые последовательности $x=(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$. Такими последовательностями выражаются, например, множества информационных моделей (образов), представленные многочленами произвольной степени, информационные ряды, разные разложения информационных функций. Информационное пространство, элементарные информационные единицы которого определяются бесконечными последовательностями, будем называть *бесконечномерным информационным пространством.*

Больше того, в качестве элементарных информационных единиц информационного пространства можно принять множество непрерывных информационных функций на данном отрезке. В подобных случаях информационная функция *f(x)* представляется как элементарная информационная единица в информационном пространстве, а ее координатами служит бесконечное множество (мощности континуума) значений информационной функции при всевозможных значениях аргумента *x.* Информационные пространства, элементами которых являются информационные функции, будем называть *информационными функциональными пространствами.*

Представление информиционных функций как сущностей информационного пространства есть одним из исходных положений важного раздела теории информации – информиционного функционального анализа.

3. От числовых к абстрактным информационным пространствам. Другая линия обобщения информиционного пространства связана с содержанием понятия информационного вектора. Уже отмечалось, что в трехмерному пространстве с этим понятием связываются разные физические величины, которые характеризуются числовым значением и направлением. Наряду этим элементы информационного пространства (информационные векторы или элементарные информационные единицы) могут отождествляться с сущностями любой физической природы. Например, в практике широко используется трехмерное *цветовое пространство,* векторы которого отвечают цветовым ощущениям и определяются тремя компонентами-интенсивностями красного, зеленого и синего цветов.

Состояние физической системы описывается некоторой совокупностью информационных переменных (тока и напряжения электрической цепи, температуры и концентрации веществ в химическом реакторе и т.п.). Каждое такое состояние можно представить информационным вектором *n*-мерного информационного пространства, называемого *информационным пространством переменных состояний.*

В приведенных примерах сущности информационного пространства характеризуются совокупностью чисел, и эти числа рассматриваются как составляющие соответствующих этим сущностям информационных векторов. Можно говорить об отображении множества сущностей на множество информационных векторов, но в конечном счете отношения между сущностями информационного пространства сводятся к отношениям на множестве векторов в числовых пространствах.

Но и в случаях, когда сущности характеризуются информационными свойствами, которые не являются числами (форма, цвет, материал), совокупность таких сущностей можно также рассматривать как информационно-векторное пространство. При этом информационные свойства кодируются с помощью чисел или каких-нибудь символов, которые можно истолковывать как составляющие информационных векторов (сущностей) информационного пространства. Подобные коды используют для передачи сообщений, обработки разной информации с помощью вычислительных машин и т.п. В простейших случаях кодирования свойств сущностей сводится к простой нумерации, и каждая сущность рассматривается как совокупность номеров присущий ей свойств.

В конце концов, можно говорить о сущностях информационного пространства как его «точках», совсем не связывая эти сущности с обычным представлением о векторах, как последовательностях чисел, кодов или символов. Информационное пространство можно рассматривать как множество сущностей в «чистом» виде (слова, понятие, люди, животных, детали механизма, компоненты электронной цепи). Операции на множестве таких сущностей выполняются по специально устанавливаемым правилам, а отношение между ними выражаются в форме некоторого описания словесного или символического. Так, множество сущностей M с определенным на нем отношением толерантности τ можно рассматривать как *пространство толерантности* (M, τ), структура которого определяет сходство между сущностями.

Что же остается при такой степени обобщения от первоначального понятия обычного трехмерного пространства? Если вернуться к определению, приведенному в (1), то найдем там слова «пространственно подобные отношения». Как уже указывалось, здесь имеются в виду обобщения таких отношений, как длина, расстояние, угол, фигура и т.п. Не следует искать слишком прямолинейного толкования абстрактного информационного пространства в категориях реального трехмерного мира. Это понятие введено нами для того, чтобы использовать геометрические образы и терминологию для описания и изучение таких информационных отношений, которые не допускают интерпретации в обычном трехмерном пространстве.

4. Метрическое и топологическое информационные пространства.

Рассмотрение множеств как совокупностей некоторых сущностей имеет ограниченное применение, так как в природе все материальные сущности находятся во взаимной связи и взаимодействии. Поэтому понятие множества необходимо увязать с установлением тех или других отношений между его сущностями, которые (сущности) мы будем называть элементами.

Будем говорить, что множество имеет *структуру,* если между элементами множества установленны определенные отношения или над ними определенны некоторые операции. Множество, которое наделено структурой, называют *пространством.*

Изучение пространств мы начнем из простейшего вида пространств, которые мы назовем метрическими информационными пространствами, для определения которых необходимо ввести понятие расстояния между элементами множества.

С понятием расстояния человек сталкивается повседневно, связывая это понятие с пространственным размещением предметов и понимая под расстоянием *меру удаленности предметов один от другого*. Обычное расстояние $d(M, N)$ между точками M і N измеряется длиной отрезка, который соединяет эти точки (рис. 2.2.).

Рис. 2.2. Иллюстрация аксиомы треугольника.

Однако такое определение расстояния часто оказывается недостаточным. Так, даже в быту расстояние между двумя городами определяется не однозначно (расстояние по железной дороге, расстояние по водному пути и т.п.). В городе, который разделен на кварталы, как показано на рис. 2.3, измерять расстояние отрезком прямой, которая соединяет точки M і $N,$ не имеет смысла, так как двигаться можно только по улицам.

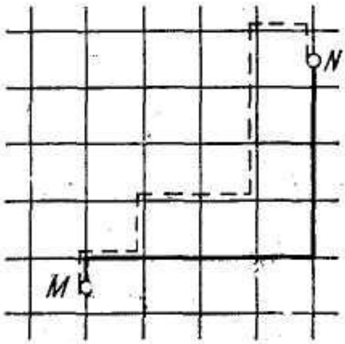


Рис. 2.3. Определение расстояния в городе, разделенном на кварталы.

С другой стороны, слово удаленность мы часто не связываем с пространством в обычном понимании. Так, близость двух клеточек на шахматной доске можно оценить числом ходов, которые нужно сделать, чтобы перевести шахматную фигуру с одной клеточки на другую. При этом две соседние клеточки близкие для короля, но далекие для коня и есть бесконечно далекими, если с одной в другую нужно перевести слона.

В теории информации часто стоит задача замены одной информационной функции *y=f(x),* которая может быть неудобной для рассмотрения, другой информационной функцией *y=g(x).* Такая замена возможна, если информационная функция *g(x)* близка к информационной функции *f(x)* (рис. 2.4,*а*).

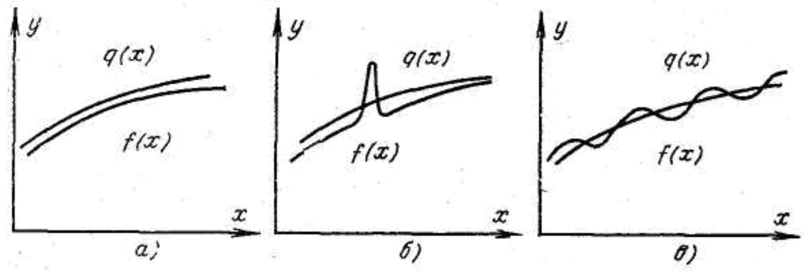


Рис. 2.4. Разные случаи близости двух информационных функций.

При этом следует договориться, как понимать близость одна к одной двух информационных функций. Если близость оценивать по максимальному отклонению значений *у* в этих функциях, то в случае на рис. 2.4, *б* информационные функции уже нельзя считать близкими, а если учитывать еще и характер информационной функции, например, кроме близости значений самих информационных функций потребовать близости их производных, то информационные функции не будут близкими и в случае на рис. 2.4, *в*. Если же за условие близости принять ограничивающие информационными функциями площади, то во всех трех случаях функции близки одна к другой.

Из приведенных примеров видно, что должно существовать некоторое общее определение расстояния как меры удаленности сущностей, а следовательно, и пространства, в котором эти сущности существуют, причем в разных конкретных ситуациях эти понятия могут иметь разное содержание. Поскольку совокупности разных сущностей представляют собой множества, то понятие пространства и расстояния должны быть связаны с понятием множества.

Определение метрического информационного пространства

Пусть X — произвольное множество. Понятие расстояния между элементами с X выходит путем обобщения фундаментальных информационных свойств, которые можно интуитивно ожидать от понятия расстояния и которые легко могут быть понятны из рассмотрения рис. 2.2.

Свяжем с каждой парой элементов с X некоторое действительное ненеотрицательное число $d \geq 0$.

Это число называется *расстоянием* или *информационной метрикой* в X, если для любых $y,x,z \in X$ оно удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $d(x, y)=0$, причем тогда и только тогда, когда $x=y$ (аксиома идентичности);

2) $d(x, y)=d(y, x)$ (аксиома симметрии);

3) для любой тройки $y,x,z \in X$ имеет место

$$d(x, y) \leq d(x, z)+ d(z, y)$$

(аксиома треугольника или неравенство треугольника).

Метрическим информационным пространством называется пара (X, d), т.е. *множество* X *с определенной на нем информационной метрикой* d. Элементы множества X называют точками метрического информационного пространства (X, d).

Из данного определения вытекает, что множество X только тогда превращается в метрическое информационное пространство, когда в него *введена соответствующая информационная метрика* $d(x, y)$. Если в одно и то же множество X ввести разные информационные метрики, то выйдут и разные информационные пространства. Так, пространства, которые изображены на рис. 2.2 и 2.3, имеют в качестве элементов множества точек плоскости, но имеют разные информационные метрики.

Примеры метрических информационных пространств

Пусть *x, y* — любые элементы из множества *R* действительных чисел. Множество *R* можно превратить в метрическое информационное пространство, если определить расстояние между *x* і *y* по формуле

$$d(x, y)=|x-y|. \qquad (2.1)$$

Именно по этой формуле находят расстояние между точками действительной оси, которая является простейшим примером метрического информационного пространства.

Как мы знаем, упорядоченные *n*-элементные множества удобно рассматривать как точки воображаемого *n*-мерного информационного пространства R^n. Можно расширить представление о таком пространстве, введя понятие расстояния между отдельными точками, т.е. рассматривая это пространство как метрическое. Обозначим через $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$ отдельные точки информационного пространства R^n. Информационное пространство R^n можно превратить в метрическое несколькими разными способами.

Наиболее часто расстояние между точками *x* і *y* определяют по формуле

$$d_2(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right\}^{1/2}. \qquad (2.2)$$

В случае *n*=2, 3 это определение совпадает с обычным геометрическим понятием расстояния. Свойства 1, 2 и 3 для этого расстояния очевидны из рассмотрения рис. 2.2.

Метрика $d_2(x, y)$ называется эвклидовой, а пространство R^n с такой метрикой называется эвклидовым и обозначается E_n. (Более детально об эвклидовом информационном пространстве разговор будет идти в других разделах настоящей работы).

Для множества R^n расстояние может быть определено и другими способами, например:

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i| \qquad (2.3)$$

или

$$d_\infty(x, y)=\max(|x_1- y_1|,...,|x_n- y_n|). \qquad (2.4)$$

Легко видеть, что метрики d_2, d_1, d_∞ являются частными случаями метрики

$$d_p(x,y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^p\right\}^{1/p}$$

и получаются соответственно при $p=2$, $p=1$ и $p=\infty$.

Свойства 1 и 2 для метрик (2.3) и (2.4) очевидны.

Для доказательства свойства 3 введем в рассмотрение еще одну точку

$$z=(z_1,\dots,z_n)\in R^n\dots$$

Для расстояния $d_1(x, y)$ имеем:

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i+z_i-y_i|\le\sum_{i=1}^{n}(|x_i-z_i|+|z_i-y_i|)=$$

$$=d(x,z)+d(z,y).$$

Для расстояния $d_\infty(x, y)$ свойство 3 проверяется следующим образом. Предположим, что $|x_k-y_k|$ - самая большая из соответствующих разностей точек x и y.

Тогда

$$d_\infty(x, y)=|x_k-y_k|=|x_k-z_k+z_k-y_k|\le|x_k-z_k|+|z_k-y_k|.$$

Очевидно, что

$$|x_k-z_k|\le\max(|x_1-z_1|,\dots,|x_1-z_1|)=d_\infty(x,z);$$
$$|z_k-y_k|\le\max(|z_1-y_1|,\dots,|z_1-y_1|)=d_\infty(z,y).$$

Следовательно

$$d_\infty(x, y)\le d_\infty(x, z)+d_\infty(z, y).$$

Рассмотрим множество всевозможных функций времени, непрерывных на интервале $a\le t\le b$. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — две такие функции. Расстояние между ними можно определить из соотношения

$$d(x, y)=\max_{a\le t\le b}|x(t)-y(t), \qquad (2.5)$$

которое, как легко проверить, удовлетворяет всем свойствам метрики. Пространство с такой метрикой обозначается $C_{[a,b]}$.

Рассмотрим еще один тип информационных пространств - топологическое информационное пространство.

Топологическое информационное пространство — это пара (M, v), где v — система подмножеств G множества M, называемая *топологией* в M, которая содержит:

1) самое множество M и пустое множество Ø, т.е. $M\in v$ и $\varnothing\in v$;

2) пересечение любой пары своих подмножеств, т.е. $G_i\bigcap G_j\in v$;

3) объединение любого (конечного или бесконечного) множества своих подмножеств, т.е. $\bigcup G_i\in v$.

Из приведенного определения вытекает, что v содержит также пересечение любого *конечного* множества своих подмножеств.

Множества, которые принадлежат системе v, называются *открытыми* множествами информационного пространства (M, v). Одно и тоже множество M может допускать несколько топологий и при этом получаются различные информационные пространства.

Всякое множество *M* допускает *тривиальную информационную топологию,* при которой открытыми множествами считаются только *M* и Ø *(пространство слипшихся точек),* а также *дискретную информационную топологию,* когда открыто любое подмножество *M*.

Множества *M\G,* которые являются дополнительными к открытым, называются *замкнутыми* множествами информационного топологического пространства. Из определения информационного топологического пространства вытекает, что замкнутыми множествами являются:

1) *M* и Ø;

2) объединение конечного числа замкнутых множеств;

3) пересечение любого (конечного или бесконечного) числа замкнутых множеств.

Как видно, имеет место дуальность в определении открытых и замкнутых множеств информационного топологического пространства.

2.2. Определение линейного информационного пространства. Информационный изоморфизм

Определение *n*-мерного информационно-векторного пространства, которое было приведено раньше, начиналось из определения *n*-мерного информационного вектора как упорядоченной системы чисел. Для *n*-мерных информационных векторов были введены сложение и умножение на числа, что и привело к понятию *n*-мерного информационно-векторного пространства. Первыми примерами информационно-векторных пространств являются совокупности векторов-отрезков, которые выходят из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве. Однако, встречаясь с этими примерами в курсе геометрии, мы не всегда считаем необходимым задавать векторы их компонентами в некоторой фиксированной системе координат, так как и сложение векторов и их умножение на скаляр определяются геометрически, независимо от выбора системы координат. А именно, сложение векторов на плоскости или в пространстве выполняется по правилу параллелограмма, а умножение вектора на число α означает растягивание этого вектора в α раз (с изменением направления вектора на противоположный, если α отрицательное). Целесообразно и в общем случае дать «безкоординатное» определение информационно-векторного пространства, т.е. определения, которое не требует заданння векторов упорядоченными системами чисел. Дадим такое определение. Это определение есть аксиоматическим: в нем ничего не будет сказано о свойствах отдельного информационного вектора, но будут перечисленны те свойства, которыми должны обладать операции над информационными векторами.

Пусть дано множество *М.* Пусть в множестве *М* пределенна *операция сложения,* которая ставит в соответствие всякой паре элементов ***a, b*** из *М* однозначно определенный элемент ***a+b*** из *М,* называемый их *суммой,* и *операция умножения на действительное число,* причем *произведение* α***a*** *элемента* ***a*** на число α однозначно определенно и принадлежит к *М.*

Элементы множества *М* будут называться *информационными векторами,* а само *М - действительным линейным* (или *информационным векторным,* или *информационным аффинным) информационным пространством,* если указанные операции имеют следующие свойства **I—VIII:**

I. Сложение коммутативно, ***a+b=b+a***.

II. Сложение ассоциативно, $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

III. В *М* существует *нулевой, элемент* 0, который удовлетворяет условию:

$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$ для всех ***a*** из *М*.

Легко доказать, используя I, *единственность нулевого элемента:* если 0_1 и 0_2 — два нулевых элемента, то

$$0_1+0_2=0_1.$$

$$0_1+0_2=0_2+0_1=0_2.$$

откуда $0_1=0_2$.

IV. Для всякого элемента ***a*** в *М* существует *противоположный элемент* ***-a,*** который удовлетворяет условию: $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0$.

Легко проверяется, беря на внимании II и I, *единственность противоположного элемента:* если $(-\boldsymbol{a})_1$ и $(-\boldsymbol{a})_2$ — два противоположных элемента для ***a***, то

$$(-\boldsymbol{a})_1+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})_2]=(-\boldsymbol{a})_1+0=(-\boldsymbol{a})_1;$$

$$[(-\boldsymbol{a})_1+\boldsymbol{a}]+(-\boldsymbol{a})_2=0+(-\boldsymbol{a})_2=(-\boldsymbol{a})_2,$$

откуда $(-\boldsymbol{a})_1=(-\boldsymbol{a})_2$.

Из аксиом I—IV выводится *существование и единственность разности* ***a — b****,* т.е. такого элемента, который удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}. \tag{2.6}$$

Действительно, можно положить

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

так как

$$\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]=[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{a}=0+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}.$$

Если же существует еще такой элемент **c**, который удовлетворяет уравнению (2.6), т.е.

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},$$

то, прибавляя к обеим частям этого равенства элемент $-\boldsymbol{b}$, получаем, что

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b}).$$

Дальнейшие аксиомы **V—VIII** связывают умножение на число с добавлением и с операциями над числами. А именно, для любых элементов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ из *М*, для любых действительных чисел α, β и для действительного числа 1 должны иметь место равенства:

V. $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}$;

VI. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{a}$;

VII. $(\alpha\beta)\boldsymbol{a} = \alpha(\beta\boldsymbol{a})$;

VIII. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

Укажем некоторые простейшие следствия из этих аксиом.

1) $\alpha \cdot 0 = 0$.

Действительно, для некоторого $\boldsymbol{a}$ из *М*

$$\alpha\boldsymbol{a} = \alpha(\boldsymbol{a}+0) = \alpha\boldsymbol{a}+\alpha 0,$$

т.е.

$$\alpha \cdot 0 = \alpha\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + [-(\alpha\boldsymbol{a})] = 0.$$

2) $0 \cdot \boldsymbol{a} = 0$,

где слева стоит число нуль, а справа - нулевой элемент из *М*. Для доказательства возьмем любое число α. Тогда

$$\alpha\boldsymbol{a} = (\alpha+0)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{a},$$

откуда

$$0 \cdot \boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{a} = 0.$$

3) Если $\alpha\boldsymbol{a}=0$, то или $\alpha=0$, или $\boldsymbol{a}=0$.

Действительно, если $\alpha \neq 0$, т.е. число α^{-1} существует, то

$$\alpha = 1 \cdot \alpha = (\alpha^{-1}\alpha)\boldsymbol{a} = \alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0.$$

4) $\alpha(-\boldsymbol{a}) = -\alpha\boldsymbol{a}$.

В самом деле,

$$\alpha\boldsymbol{a} + \alpha(-\boldsymbol{a}) = \alpha[\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a})] = \alpha \cdot 0 = 0,$$

т.е. элемент $\alpha(-\boldsymbol{a})$ противоположен элементу $\alpha\boldsymbol{a}$.

5) $(-\alpha)\boldsymbol{a} = -\alpha a$.

Действительно,

$$\alpha\boldsymbol{a} + (-\alpha)\boldsymbol{a} = [\alpha + (-\alpha)]\boldsymbol{a} = 0 \cdot \boldsymbol{a} = 0,$$

т.е. элемент $(-\alpha)\boldsymbol{a}$ противоположен элементу $\alpha\boldsymbol{a}$.

6) $\alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} - \alpha b$

Действительно, по (2.6),

$$\alpha(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \alpha[\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})] = \alpha\boldsymbol{a} + \alpha(-\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} + (-\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\boldsymbol{a} - \alpha\boldsymbol{b}.$$

7) $(\alpha-\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{a}$.

В самом деле,

$$(\alpha - \beta)\boldsymbol{a} = [\alpha + (-\beta)]\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + (-\beta)\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} + (-\beta\boldsymbol{a}) = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{a}.$$

Заметим, что вышеперечисленными аксиомами и следствиями из них мы будем пользоваться дальше без специальных предостережений.

Выше дано определения действительного линейного информационного пространства. Если бы мы предположили, что в множестве M определено умножение не только на действительные, но и на любые комплексные числа, то, сохраняя те же аксиомы I—VIII, получили бы определение *комплексного линейного информационного пространства.* Для определенности ниже рассматриваются действительные линейные информационные пространства, однако все, что будет сказано в этом разделе, переносится дословно на случай комплексных линейных информационных пространств.

Примеры действительных линейных информационных пространств могут быть легко указанны. Ими будут, прежде всего, те n-мерные действительные векторные информационные пространства, составленные из векторов-строк, которые рассматривались раньше. Линейными информационными пространствами будут и множества векторов-отрезков, которые выходят из начала координат на плоскости или в трехмерном пространстве, если операции сложение и умножение на число понимать в том геометрическом содержании, которое было указано в начале раздела.

Существуют также примеры линейных информационных пространств, так сказать, «бесконечномерных». Рассмотрим различные последовательности действительных чисел; они имеют вид

$$\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n, \dots).$$

Операции над последовательностями будем делать покомпонентно: если

$$\boldsymbol{b}=(\beta_1, \beta_2, \dots , \beta_n, \dots),$$

то

$$\boldsymbol{a} +\boldsymbol{b}=(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots \alpha_n + \beta_n \dots);$$

с другой стороны, для любого действительного числа γ

$$\gamma\boldsymbol{a} = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2,\dots,\gamma\alpha_г,\dots)\dots$$

Все аксиомы I-VIII выполняются, т.е. мы получаем действительное линейное информационное пространство.

Примером бесконечномерного информационного пространства будет также множество всяких действительных информационных функций действительного переменного, если сложение функций и их умножение на действительное число понимать так, как это принято в теории функций, т.е. как сложение или умножение на число значений функций при каждом значении независимого переменного.

Информационный изоморфизм. Нашей ближайшей целью будет выделение среди всех линейных информационных пространств тех, которые естественно назвать конечномерными. Введем сначала одно общее понятие.

В определении линейного информационного пространства говорилось о свойствах операций над информационными векторами, но ничего не говорилось о свойствах самых информационных векторов. В виду этого может произойти случай, что хотя векторы некоторых двух данных линейных информационных пространств по своей природе совсем разные, однако с точки зрения свойств операций эти два информационные пространства неразличимы. Точное определение такое:

Два действительных линейных информационных пространства M и M' называются *изоморфными,* если между их информационными векторами установленно взаимно однозначное соответствие — всякому информационному вектору $\boldsymbol{a}$ из M сопоставленно информационный вектор $\boldsymbol{a}'$ из M', образ информационного вектора $\boldsymbol{a}$, причем разные информационные векторы из M имеют разные образы и всякий вектор из M' служит образом некоторого информационного вектора из M,— и если при этом соответствии образом суммы двух информационных векторов служит сумма образов этих информационных векторов,

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})'=\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{b}', \qquad (2.7)$$

а образом произведения информационного вектора на число служит произведение образа этого информационного вектора на то же число,

$$(\alpha\boldsymbol{a})'=\alpha\boldsymbol{a}'. \qquad (2.8)$$

Отметим, что взаимно однозначное соответствие между информационными пространствами M и M', которое удовлетворяет условиям (2.7) и (2.8), называется *изоморфным соответствием.*

Так, информационное пространство векторов-отрезков на плоскости, которые выходят с начала координат, изоморфно двумерному векторному информационному пространству, составленному из упорядоченных пар действительных чисел: мы получим изоморфное соответствие между этими информационными пространствами, если на плоскости зафиксируем некоторую систему координат и всякому вектору-отрезку сопоставим упорядоченную пару его координат.

Докажем следующее свойство изоморфизма линейных информационных пространств: *образом нуля информационного пространства M при изоморфном соответствии между информационными пространствами M и M' служит нуль пространства M'.*

Пусть, в самом деле, $\boldsymbol{a}$ будет некоторый вектор с M, $\boldsymbol{a}'$ - его образ в M'. Тогда, ввиду (2.7),

$$\boldsymbol{a}' = (\boldsymbol{a} + 0)' = \boldsymbol{a}' + 0',$$

т.е. 0' будет нулем информационного пространства M'.

Конечномерные информацинные пространства. Информационные базисы

Как мы знаем, те два определения линейной зависимости векторов-строк, которые были приведены раньше, так само как и доказательство эквивалентности этих определений, используют лишь операции над информационными векторами и потому могут быть перенесенны на случай любых линейных информационных пространств.

В аксиоматически определенных линейных информационных пространствах можно говорить, следовательно, о линейно независимых системах информационных векторов, о максимально линейно независимых информационных системах, если такие существуют, и т.д.

Если линейные информационные пространства M и M' изоморфны, то система информационных векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ *из M тогда и только тогда линейно зависима, если линейно зависима система их информационных образов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$ *в M'.*

Заметим, что если соответствие $\boldsymbol{a}\rightarrow\boldsymbol{a}'$ (для всех $\boldsymbol{a}$ из *M)* является изоморфным соответствием между *M* и *M',* то и обратное соответствие $\boldsymbol{a}'\rightarrow\boldsymbol{a}$ также будет изоморфным. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда линейно зависима система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_k$. Пусть существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, которые не все равны нулю, что

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \dots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = 0.$$

Информационным образом правой части этого равенства при рассмотренном изоморфизме служит, как мы знаем, нуль 0' пространства *M'.* Взяв информационный образ левой части и применяя несколько раз (2.7) и (2.8), получаем

$$\alpha_1\boldsymbol{a}'_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}'_2 + \dots + \alpha_k\boldsymbol{a}'_k = 0$$

т.е. система $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \dots, \boldsymbol{a}'_k$ также оказалась линейно зависимой.

Конечномерные информационные пространства. Линейное информационное пространство *M* называется конечномерным, если в нем можно найти конечную максимальную линейно независимую систему информационных векторов; всякая такая система информационных векторов будет называться *информационным базисом* информационного пространства *M.*

Конечномерное линейное информационное пространство может обладать многими разными информационными базисами. Так, в пространстве векторов-отрезков на плоскости информационным базисом служит некоторая пара информационных векторов, отличных от нуля и которые не лежат на одной прямой. Заметим, что приведенное определение конечномерного информационного пространства не дает пока ответа на вопрос, могут ли в этом информационном пространстве существовать информационные базисы, которые состоят из разного числа информационных векторов. Более того, можно было бы допустить даже, что в некоторых конечномерных информационных пространствах существуют информационные базисы со сколь угодно большим числом информационных векторов. Выясним, каково же положение есть на самом деле.

Пусть линейное пространство *M* имеет информационный базис

$$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}, \qquad (2.9)$$

который состоит из *n* информационных векторов. Если ***a*** — произвольный информационный вектор из *M,* то из максимальности линейно независимой системы (2.9) следует, что ***a*** линейно выражается через эту систему,

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n. \qquad (2.10)$$

С другой стороны, ввиду линейной независимости системы (2.9) выражение (2.10) будет для информационного вектора ***a*** единственным: если

$$\boldsymbol{a} = \alpha'_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha'_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha'_n \boldsymbol{e}_n,$$

то

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\alpha_n - \alpha'_n)\boldsymbol{e}_n = 0,$$

откуда

$$\alpha_i = \alpha'_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, информационному вектору ***a*** однозначно отвечает строка

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad (2.11)$$

коэффициентов его выражения (2.10) через информационный базис (2.9) или, как мы будем говорить, *строка его координат в информационном базисе* (2.9). Обратно, всякая строка вида (2.11), т.е. всякий *n*-мерный информационный вектор, служит строчкой координат в информационном базисе (2.9) для некоторого информационного вектора информационного пространства *M,* а именно для информационного вектора, который записывается через базу (2.9) в виде (2.10).

Мы получили, таким образом, взаимно однозначное соответствие между всеми информационными векторами информационного пространства *M* и всеми информационными векторами *n*-мерного векторного информационного пространства строк. Покажем, что это соответствие, которое зависит от выбора базиса (2.9), есть изоморфным.

Возьмем в информационном пространстве *M,* кроме информационного вектора ***a***, который выражается через базис (2.9) в виде (2.10), также информационный вектор *b*, выражение которого через базис (2.9) будет

$$\boldsymbol{b} = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{e}_n.$$

Тогда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{e}_n ,$$

т.е. *сумме информационных векторов* ***a*** *и* ***b*** *отвечает сумма строк их координат в базисе* (2.9). С другой стороны,

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1)\boldsymbol{e}_1 + (\gamma\alpha_2)\,\boldsymbol{e}_2 + \ldots + (\gamma\alpha_n)\,\boldsymbol{e}_n,$$

т.е. *произведению информационного вектора* ***a*** *на число* γ *отвечает произведение строки его координат в базисе* (2.9) *на это же число* γ.

Этим доказана следующая теорема:

Всякое линейное информационное пространство, которое содержит информационный базис из n информационных векторов, изоморфно n-мерному векторному информационному пространству строк.

Как мы знаем, при изоморфном соответствии между линейными информационными пространствами линейно зависимая система информационных векторов переходит в линейно зависимую и обратно, а потому линейно независимая переходит в линейно независимую. Отсюда вытекает, что *при изоморфном соответствии базис переходит в базис.*

В самом деле, пусть база $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots , \boldsymbol{e_n}$ информационного пространства *M* переходит при изоморфном соответствии между информационными пространствами *M* і *M'* в систему информационных векторов $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \ldots, \boldsymbol{e'_n}$ информационного пространства *M',* которая хотя и линейно независимая, но не является максимальной. В *M'* можно найти, следовательно, такой информационный вектор ***f'***, что система $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, \ldots , \boldsymbol{e'_n}, \boldsymbol{f'}$ остается линейно независимой. Вектор ***f'*** служит, однако, информационным образом при рассмотренном изоморфизме для некоторого информационного вектора ***f*** с *M*.

Мы получаем, что система информационных векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots , \boldsymbol{e_n}, \boldsymbol{f}$ должна быть линейно независимой в противоречии с определением базиса.

Мы знаем из векторного анализа, что в *n*-мерном векторном пространстве строк все максимальные линейно независимые системы состоят из *n* векторов, что всякая система из *n*+1 вектора линейно зависимая и что всякая линейно независимая система векторов содержится в некоторой максимальной линейно независимой системе. Используя установленные выше свойства изоморфных соответствий, мы приходим к следующим результатам:

Все информационные базисы конечномерного линейного информационного пространства M состоят из одного и того же *числа информационных векторов.* Если это число равняется *n,* то *M* будет называться *n-мерным линейным информационным пространством,* а число *n* - *размерностью* этого информационного пространства.

*Всякая система из n+*1 *информационных векторов n-мерного линейного информационного пространства линейно зависимая.*

Всякая линейно независимая система информационных векторов n-мерного линейного информационного пространства содержится в некоторой базе этого информационного пространства.

Теперь легко проверить, что указанные выше примеры действительных линейных информационных пространств – информационное пространство последовательностей и информационное пространство функций - не являются конечномерными информационными пространствами: в каждом из этих информационных пространств легко найти линейно независимые системы, которые состоят из сколь угодно большого числа информационных векторов.

Связь между информационными базисами. Объектом изучения являются для нас конечномерные линейные информационные пространства. Понятно, что, изучая *n*-мерные линейные информационные пространства, мы собственно говоря изучаем *n*-мерное векторное информационное пространство строк. Однако, при изученные этого пространства, в этом пространстве был выделен один информационный базис - а именно информационный базис, составленный из единичных информационных векторов, т.е. векторов, в которых одна координата равна единице, а все другие координаты равны нулю, - и все векторы информационного пространства задаются строками их координат в этом информационном базисе; теперь же все информационные базисы информационного пространства есть для нас равноправными.

Посмотрим, как много информационных базисов можно найти в *n*-мерном линейном информационном пространстве и как эти информационные базисы связаны друг с другом.

Пусть в *n*-мерном линейном информационном пространстве *M* заданы информационные базисы

$$\boldsymbol{e_1, e_2, \ldots, e_n} \qquad (2.12)$$

и

$$\boldsymbol{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n}. \qquad (2.13)$$

Каждый вектор информационного базиса (2.13) , как и всякий вектор информационного пространства *M,* однозначно записывается через информационный базис (2.12)

$$\boldsymbol{e'}_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij}\ \boldsymbol{e'}_j, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (2.14)$$

Матрица

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} ... \tau_{1n} \\ .... \\ \tau_{n1} ... \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

строки которой являются строками координат векторов (2.13) в информационном базисе (2.12), называется *информационной матрицей перехода* от информационного базиса (2.12) к информационному базиса (2.13).

Связь между информационными базисами (2.12) и (2.13) и информационной матрицей перехода T можно записать, ввиду (2.14), в виде матричного равенства

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ . \\ . \\ . \\ \boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11}\ \tau_{12} \dots \tau_{1\boldsymbol{n}} \\ \tau_{21}\ \tau_{22} \dots \tau_{2\boldsymbol{n}} \\ .... \\ \tau_{\boldsymbol{n}1}\ \tau_{\boldsymbol{n}2} \dots \tau_{\boldsymbol{nn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}} \end{pmatrix} \qquad (2.15)$$

или, обозначая информационные базисы (2.12) и (2.13), которые записаны в столбец, соответственно через $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$, в виде

$$\boldsymbol{e'} = T\boldsymbol{e}.$$

С другой стороны, если T' — информационная матрица перехода от информационного базиса (2.13) к информационному базису (2.12), то

$$\boldsymbol{e} = T'\boldsymbol{e}'.$$

Отсюда

$$\boldsymbol{e}=(T'T)\boldsymbol{e},$$

$$\boldsymbol{e}' = (TT')\boldsymbol{e'},$$

т.е., ввиду линейной независимости информационных базисов $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e'}$,

$$T'T=TT'=E,$$

откуда

$$T' = T^{-1}$$

Этим доказано, что *информационная матрица перехода от одного информационного базиса к другому всегда является невырожденной информационной матрицей.*

Всякая невырожденная квадратная матрица порядка п с действительными элементами служит информационной матрицей перехода от данного информационного базиса п-мерного действительного линейного информационного пространства к некоторому другому информационному базису.

Пусть, в самом деле, дан информационный базис (2.12) и невырожденная информационная матрица T порядка n. Возьмем в качестве (2.13) систему векторов, для которых строки информационной матрицы T служат строками координат в информационном базисе (2.12); имеет место, следовательно, равенство (2.15). Векторы (2.13) линейно независимые— линейная зависимость между ними влекла бы за собой линейную зависимость строк информационной матрицы T в противоречие с ее невырожденнстью. Поэтому система (2.13), как линейно независимая система, которая состоит из n векторов, является информационным базисом нашего информационного пространства, а информационная матрица T служит информационной матрицей перехода от информационного базиса (2.12) к информационнму базису (2.13).

Мы видим, что в n-мерном линейном информационном пространстве можно найти столь же много различных информационных базисов, как много существует разных невырожденных квадратных матриц порядка n. Правда, при этом два информационных базиса, состоящие из одних и тех же векторов, но записанных в разном порядке, считаются различными.

Преобразование координат вектора. Пусть в n-мерном линейном информационном пространстве даны информационные базисы (2.12) и (2.13) с информационной матрицей перехода $T=(\tau_{ij})$,

$$\boldsymbol{e}' = T\boldsymbol{e}.$$

Найдем связь между строками координат произвольного вектора $\boldsymbol{a}$ этих базисов. Пусть

$$\boldsymbol{a}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\ \boldsymbol{e}_j,\quad \boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\ \boldsymbol{e}'_i. \qquad (2.16)$$

Используя (2.14), получаем:

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\left(\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\boldsymbol{e}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}\right)\boldsymbol{e}_j$$

Сравнивая с (2.16) и используя единственность записи вектора через информационный базис, получаем:

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha'_i\tau_{ij}\ ,\quad j = 1, 2, ... n,$$

т.е. имеет место матричное равенство

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)T.$$

Таким образом, *строка координат вектора **a** в информационном базисе **e** равна строке координат этого вектора в информационном базисе **e'**, умноженной справа на информационную матрицу перехода от информационного базиса **e** к информационному базису **e'** .*

Отсюда следует равенство

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T$$

Пример. Рассмотрим трехмерное действительное линейное информационное пространство с информационным базисом

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3. \tag{2.17}$$

Векторы

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{e}'_1 &= 5\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}'_2 &= 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 &= -2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

также составляют информационный базис в этом информационном пространстве, причем информационной матрицей перехода от (2.17) к (2.18) служит информационная матрица

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix}$$

Вектор

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$$

имеет поэтому в информационном базисе (2.18) строку координат

$$(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3) = (1, 4, -1)\begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & -4 \\ 8 & -3 & 17 \end{pmatrix} = (-13, 6, -27),$$

т.е.

$$\boldsymbol{a} = -13\boldsymbol{e}'_1 + 6\boldsymbol{e}'_2 - 27\boldsymbol{e}'_3.$$

2.3. Линейные информационные преобразования

Пусть дано n-мерное действительное линейное информационное пространство, которое обозначим через M_n. Рассмотрим *информационное преобразование* этого пространства, т.е. информационное отображение, переводящее каждый вектор ***a*** информационного пространства M_n в некоторый вектор ***a'*** этого же пространства.

Вектор ***a'*** называется *информационным образом* вектора ***a*** при рассматриваемом информационном преобразовании.

Если информационное преобразование обозначено через φ, то информационный образ вектора ***a*** условимся записывать не через φ***(a)*** или φ***a***, что читателю было бы привычнее, а через ***a***φ. Таким образом,

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{a}\varphi.$$

Информационное преобразование φ линейного информационного пространства M_n называется *линейным информационным преобразованием* этого пространства, если сумму любых двух векторов ***a***, ***b*** оно переводит в сумму информационных образов этих векторов,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi=\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi, \qquad (2.19)$$

а произведение любого вектора ***a*** на любое число α переводит в произведение информационного образа вектора ***a*** на это же число α,

$$(\alpha\boldsymbol{a})\varphi=\alpha(\boldsymbol{a}\varphi). \qquad (2.20)$$

Из этого определения немедленно вытекает, что *линейное информационное преобразование линейного информационного пространства переводит любую линейную комбинацию данных векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *в линейную комбинацию (с теми же коэффициентами) информационных образов этих векторов,*

$$(\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\alpha_2\boldsymbol{a}_2+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k)\varphi=\alpha_1(\boldsymbol{a}_1\varphi)+\alpha_2(\boldsymbol{a}_2\varphi)+\ldots+\alpha_k(\boldsymbol{a}_k\varphi). \qquad (2.21)$$

Докажем следующее утверждение:

При любом линейном информационном преобразовании φ *линейного информационного пространства* M_n *нулевой вектор* 0 *остается неподвижным,*

$$0\varphi=0,$$

*а информационным образом вектора, противоположного для данного вектора **a**, служит вектор, противоположный для информационного образа вектора **a**,*

$$(-\boldsymbol{a})\varphi=-\boldsymbol{a}\varphi.$$

В самом деле, если ***b*** — произвольный вектор, то, ввиду (2.20),

$$0\varphi=(0\bullet\boldsymbol{b})\varphi=0\bullet(\boldsymbol{b}\varphi)=0.$$

С другой стороны,

$$(\boldsymbol{a})\varphi=[(-1)\,\boldsymbol{a}]\varphi=(-1)(\boldsymbol{a}\varphi)=-\boldsymbol{a}\varphi.$$

Понятие линейного информационного преобразования линейного информационного пространства используется нами как обобщение понятия аффинного информационного преобразования информационной плоскости или трехмерного информационного пространства; действительно, условия (2.19) и (2.20) для аффинных информационных преобразований выполняются. Эти условия выполняются и для проекций векторов на плоскости или в трехмерном пространстве на некоторую прямую (или на некоторую плоскость). Таким образом, например, в двумерном линейном пространстве векторов-отрезков, которые выходят из начала координат плоскости, информационное преобразование, которое переводит всякий вектор в его проекцию на некоторую ось, которая проходит через начало координат, будет линейным информационным преобразованием.

Примерами линейных информационного преобразований в произвольном информационном пространстве M_n служат *тождественное информационное преобразование* ε, которое оставляет всякий вектор $\boldsymbol{a}$ на месте,

$$\boldsymbol{a}\varepsilon = \boldsymbol{a},$$

и *нулевое информационное преобразование* ω, которое отображает всякий вектор $\boldsymbol{a}$ в нуль,

$$\boldsymbol{a}\omega = 0.$$

Сделаем некоторый обзор всех линейных информационных преобразований линейного информационного пространства M_n. Пусть

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n \qquad (2.22)$$

— информационный базис этого информационного пространства; как и раньше, информационный базис (2.22), который расположен в столбец, будем обозначать через $\boldsymbol{e}$. Так как всякий вектор $\boldsymbol{a}$ информационного пространства M_n однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов информационного базиса (2.22), то, ввиду (2.21), информационный образ вектора $\boldsymbol{a}$ с теми же коэффициентами выражается через информационные образы векторов (2.22). Другими словами, *всякое линейное информационное преобразование* φ *информационного пространства* M_n *однозначно определяется заданнем информационных образов*

$$\boldsymbol{e}_1\varphi, \boldsymbol{e}_2\varphi, \ldots, \boldsymbol{e}_n\varphi$$

всех векторов фиксированного информационного базиса (2.22).

Какова бы не была упорядочена система из n векторов информационного пространства M_n,

$$\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n, \qquad (2.23)$$

существует, притом единственное, такое линейное информационное преобразование φ *этого информационного пространства, что* (2.23) *служит системой информационных образов векторов информационного базиса* (2.22) *при этом* информационном *преобразовании,*

$$\boldsymbol{e}_i\varphi = \boldsymbol{c}_i, \quad i=1, 2.....n. \qquad (2.24)$$

Единственность информационного преобразования φ уже была доказана выше и нужно доказать лишь его существование. Определим информационное преобразование φ таким образом: если $\boldsymbol{a}$ — произвольный вектор информационного пространства и

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i$$

- его запись в информационном базисе (2.22), то положим

$$\boldsymbol{a}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{c}_i . \qquad (2.25)$$

Докажем линейность этого информационного преобразования. Если

$$\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{e}_i$$

- любой другой вектор информационного пространства, то

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\boldsymbol{e}_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)\boldsymbol{c}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{c}_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{a}\varphi + \boldsymbol{b}\varphi.$$

Если же γ - любое число, то

$$(\gamma\boldsymbol{a})\varphi = \left[\sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i)\boldsymbol{e}_i\right]\varphi = \sum_{i=1}^{n} (\gamma\alpha_i)\boldsymbol{c}_i = \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{c}_i = \gamma(\boldsymbol{a}\varphi)$$

Что же касается справедливости равенств (2.24), то она вытекает из определения (2.25) информационного преобразования φ, так как все координаты вектора $\boldsymbol{e}_i$ в информационном базисе (2.22) равны нулю, кроме i-й координаты, которая равна единице.

Нами установлено, следовательно, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными преобразованиями линейного информационного пространства M_n *и всеми упорядоченными системами* (2.23) *из n векторов этого информационного пространства.*

Всякий вектор $\boldsymbol{c}_i$ - обладает, однако, определенной записью в информационном базисе (2.22),

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \boldsymbol{e}_j , \quad i = 1,2,...,n. \qquad (2.26)$$

Из координат вектора $\boldsymbol{c}_i$ в информационном базисе (2.22) можно составить квадратную матрицу

$$A = (\alpha_{ij}), \tag{2.27}$$

беря в качестве ее i -й строки строку координат вектора $\boldsymbol{c}_i$, i = 1, 2, ..., n. Так как система (2.23) была произвольной, то матрица A будет произвольной квадратной матрицей порядка n с действительными элементами.

Мы имеем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными информационными преобразованиями информационного пространства M_n *и всеми квадратными матрицами порядка n;* это соответствие зависит, конечно, от выбора информационного базиса (2.22).

Будем говорить, что матрица *А задает* линейное информационное преобразование φ в информационном базисе (2.22), или, короче, что A есть *матрица линейного информационного преобразования* φ в информационном базисе (2.22). Если через $\boldsymbol{e}\varphi$ мы обозначим столбец, составленный из информационных образов векторов базиса (2.22), то из (2.24), (2.26) и (2.27) вытекает следующее матричное равенство, которое целиком описывает связи, которые существуют между линейным информационным преобразованием φ, информационным базисом $\boldsymbol{e}$ и матрицей *А,* которая задает это линейное информационное преобразование в этом информационном базисе:

$$\boldsymbol{e}\varphi = A\boldsymbol{e}. \tag{2.28}$$

Покажем, как, зная матрицу A линейного информационного преобразования φ в информационном базисе (2.22), по координатам вектора $\boldsymbol{a}$ в этом информационном базисе найти координаты его информационного образа $\boldsymbol{a}\varphi$. Если

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \boldsymbol{e}_i ,$$

то

$$\boldsymbol{a}\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ (\boldsymbol{e}_i\varphi),$$

что равносильно матричному равенству

$$\boldsymbol{a}\varphi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\boldsymbol{e}\varphi).$$

Используя (2.28) и учитывая то, что ассоциативнисть умножения матриц легко проверяется и в том случае, когда одна из матриц является столбцом, составленным из векторов, мы получаем:

$$\boldsymbol{a}\varphi = [(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A]\boldsymbol{e}.$$

Отсюда следует, что *строка координат вектора* $\boldsymbol{a}\varphi$ *равна строке координат вектора* $\boldsymbol{a}$, *умноженной справа на матрицу A линейного преобразования* φ, *все в базисе* (2.22).

Пример. Пусть в информационном базисе $\boldsymbol{e_1}$ $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ трехмерного линейного информационного пространства линейное информационное преобразование φ задается матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Если

$$\boldsymbol{a} = 5\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2\boldsymbol{e}_3,$$

то

$$(5, 1, -2)\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = (-9, 16, 0),$$

т.е.

$$\boldsymbol{a}\varphi = -9\boldsymbol{e}_1 + 16\boldsymbol{e}_2.$$

Связь между матрицами линейного информационного преобразования в разных информационных базисах. Матрица, которая задает линейное информационное преобразование, зависит от выбора информационного базиса. Покажем, какая связь между матрицами, которые задают в разных информационных базисах одно и то же линейное информационное преобразование.

Пусть даны информационные базисы $\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{e}'$ с матрицей перехода T,

$$\boldsymbol{e}' = T\boldsymbol{e}, \tag{2.29}$$

и пусть линейное информационное преобразование φ задается в этих информационных базисах соответственно матрицами A і A',

$$\boldsymbol{e}\varphi = A\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e}'\varphi = A'\boldsymbol{e}'. \tag{2.30}$$

Второе из равенств (2.30) приводит, ввиду (2.29), к равенству

$$(T\boldsymbol{e})\varphi = A'(T\boldsymbol{e}).$$

Однако

$$(T\boldsymbol{e})\varphi = T(\boldsymbol{e}\varphi).$$

Действительно, если $(\tau_{i1}, \tau_{i2}, \ldots, \tau_{in})$ — i-я строка матрицы T, то

$$(\tau_{i1}\boldsymbol{e_1} + \tau_{i2}\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \tau_{in}\boldsymbol{e}_n)\varphi = \tau_{i1}(\boldsymbol{e}_1\varphi) + \tau_{i2}(\boldsymbol{e}_2\varphi) + \ldots + \tau_{in}(\boldsymbol{e}_n\varphi).$$

Таким образом, ввиду (2.30),

$$(T\boldsymbol{e})\varphi = T(\boldsymbol{e}\varphi) = T(A\boldsymbol{e}) = (TA)\boldsymbol{e},$$

$$A'(T\boldsymbol{e}) = (A'T)\boldsymbol{e},$$

т.е.

$$(TA)\boldsymbol{e} = (A'T)\boldsymbol{e}.$$

Если хотя бы для одного i, $1\leq i \leq n$, i-я строка матрицы TA будет отлична от i-й строки матрицы $A'T$, то две различные линейные комбинации векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, .., \boldsymbol{e}_n$ окажутся равными друг другу, что противоречит линейной независимости информационного базиса $\boldsymbol{e}$. Таким образом,

$$TA = A'T,$$

откуда, ввиду невырожденности матрицы перехода T,

$$A' = TAT^{-1}, \quad A = T^{-1}A'T. \tag{2.31}$$

Заметим, что квадратные матрицы B і C называются *подобными,* если они связаны равенством

$$C=Q^{-1}BQ,$$

где Q — некоторая невырожденная матрица. При этом говорят, что матрица C получена из матрицы B *трансформированием* матрицы Q.

Доказанные выше равенства (2.31) можно сформулировать, таким образом, в виде следующей важной теоремы:

Матрицы, задающие одно и то же линейное информационное преобразование в разных информационных базисах, подобны между собой. При этом матрица линейного информационного преобразования φ *в информационном базисе* ***e'*** *выходит трансформированием матрицы этого информационного преобразования в информационном базисе* ***e*** *матрицей перехода от информационного базиса* ***e'*** *к информационному базису* ***e****.*

Подчеркнем, что если матрица A задает линейное информационное преобразование φ в информационном базисе $\boldsymbol{e}$, то любая матрица B, подобная матрице A,

$$B = Q^{-1}AQ,$$

также задает информационное преобразование φ в некотором информационном базисе, а именно в информационном базисе, получающемся из информационного базиса $\boldsymbol{e}$ с помощью матрицы перехода Q^{-1}.

Операции над линейными информационными преобразованиями.

Сопоставляя каждому линейному информационному преобразованию информационного пространства M_n его матрицу в фиксированном информационном базисе, мы получаем, как доказано, взаимно однозначное соответствие между всеми линейными информационными преобразованиями и всеми квадратными матрицами порядка n. Естественно ожидать, что операциям сложения и умножения матриц, а также умножение матрицы на число, будут отвечать аналогичные операции над линейными информационными преобразованиями.

Пусть в информационном просторные M_n даны линейные информационные преобразования φ и ψ. Назовем *суммой* этих информационных преобразований информационное преобразование φ+ψ, которое определяется равенством

$$\boldsymbol{a}(\varphi+\psi)=\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{a}\psi; \qquad (2.32)$$

оно переводит, следовательно, любой вектор ***a*** в сумму его информационных образов при информационных преобразованиях φ и ψ.

Информационное преобразование φ+ψ *есть линейным.* Действительно, для любых векторов ***a*** и ***b*** и любого числа α

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\varphi+\psi)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\psi=\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi+\boldsymbol{a}\psi+b\psi=\boldsymbol{a}(\varphi+\psi)+\boldsymbol{b}(\varphi+\psi);$$

$$(\alpha\boldsymbol{a})(\varphi+\psi)=(\alpha\boldsymbol{a})\varphi+(\alpha\boldsymbol{a})\psi=\alpha(\boldsymbol{a}\varphi)+\alpha(\boldsymbol{a}\psi)=\alpha(\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{a}\psi)=\alpha[\boldsymbol{a}(\varphi+\psi)].$$

С другой стороны, назовем *произведением* линейных информационных преобразований φ и ψ информационное преобразование φψ, которое определяется равенством

$$\boldsymbol{a}(\varphi\psi)=(\boldsymbol{a}\varphi)\psi, \qquad (2.33)$$

т.е., которое выходит в результате последовательного выполнения информационных преобразований φ и ψ.

Информационное преобразование φ+ψ *является линейным:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\varphi\psi)=[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi]\psi=(\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi)\psi=(\boldsymbol{a}\varphi)\psi+(\boldsymbol{b}\varphi)\psi=\boldsymbol{a}(\varphi\psi)+\boldsymbol{b}(\varphi\psi);$$

$$(\alpha\boldsymbol{a})(\varphi\psi)=[(\alpha\boldsymbol{a})\varphi]\psi=[\alpha(\boldsymbol{a}\varphi)]\psi=\alpha[(\boldsymbol{a}\varphi)\psi]=\alpha[\boldsymbol{a}(\varphi\psi)].$$

Назовем, наконец, *произведением линейного информационного преобразования* φ *на число* κ информационное преобразование κφ, определяемое равенством

$$\boldsymbol{a}(\kappa\varphi)=\kappa(\boldsymbol{a}\varphi); \qquad (2.34)$$

информационные образы при информационном преобразовании φ всех векторов увеличиваются, следовательно, на число κ.

Информационное преобразование κφ *является линейным:*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\kappa\varphi)=\kappa[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi]=\kappa(\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi)=\kappa(\boldsymbol{a}\varphi)+\kappa(\boldsymbol{b}\varphi)=\boldsymbol{a}(\kappa\varphi)+\boldsymbol{b}(\kappa\varphi);$$

$$(\alpha\boldsymbol{a})(\kappa\varphi)=\kappa[(\alpha\boldsymbol{a})\varphi]=\kappa[\alpha(\boldsymbol{a}\varphi)]=\alpha[\kappa(\boldsymbol{a}\varphi)]=\alpha[\boldsymbol{a}(\kappa\varphi)].$$

Пусть в базисе $\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\ldots,\boldsymbol{e_n}$ информационного преобразования φ и ψ задаются соответственно матрицами $A=(\alpha_{ij})$ и $B=(\beta_{ij})$,

$$\boldsymbol{e}\varphi=A\boldsymbol{e}, \quad \boldsymbol{e}\psi=B\boldsymbol{e}.$$

Тогда, ввиду (2.32),

$$\boldsymbol{e}_i(\varphi+\psi)=\boldsymbol{e}_i\varphi+\boldsymbol{e}_i\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\boldsymbol{e}_j,$$

т.е.

$$\boldsymbol{e}(\varphi+\psi)=(A+B)\boldsymbol{e}.$$

Таким образом, *матрица суммы линейных информационных преобразований в любом информационном базисе равняется сумме* *матриц этих информационных преобразований в том же информационном базисе.*

С другой стороны, ввиду (2.33),

$$\boldsymbol{e}_i(\varphi\psi)=(\boldsymbol{e}_i\varphi)\psi=\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j\right)\psi=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(\boldsymbol{e}_j\psi)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\boldsymbol{e}_k\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_{ik}\right)\boldsymbol{e}_k,$$

т.е.

$$\boldsymbol{e}(\varphi\psi)=(AB)\boldsymbol{e}.$$

Другими словами, *матрица произведения линейных информационных преобразований в любом информационном базисе равняется произведению матриц этих информационных преобразований в том же информационном базисе.*

Наконец, ввиду (2.34),

$$\boldsymbol{e}_i(\kappa\varphi)=\kappa(\boldsymbol{e}_i\varphi)=\kappa\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{n}(\kappa\alpha_{ij})\boldsymbol{e}_j,$$

т.е.

$$\boldsymbol{e}(\kappa\varphi)=(\kappa B)\boldsymbol{e}.$$

Следовательно, *матрица, задающая в некотором информационном базисе произведение линейного информационного преобразования* φ *на число* κ, *равна произведению матрицы самого информационного преобразования* φ *в этом информационном базисе на число* κ.

Из полученных результатов следует, что операции над линейными информационными преобразованиями имеют те же свойства, что и операции над матрицами. Так, сложение линейных информационных преобразований коммутативное и ассоциативное, а умножение ассоциативное, но при $n>1$ не коммутативное. Для линейных информационных преобразований существует однозначное вычитание. Отметим также, что *тождественное информационное преобразование* ε *играет среди линейных информационных преобразований роль единицы, а нулевое информационное преобразование* ω - *роль нуля.* Действительно, в любом информационном базисе информационное преобразование ε задается единичной матрицей, а информационное преобразование ω - нулевой матрицей.

2.4. Линейные информационные подпространства

Подмножество L линейного информационного пространства M будем называть *линейным информационным подпространством* этого информационного пространства, если оно само является линейным информационным пространством по отношению к определенным в M операциям сложения векторов и умножения вектора на число. Так, в трехмерном эвклидовом пространстве совокупность векторов, которые выходят из начала координат и лежат на некоторой плоскости (или некоторой прямой), проходящей через начало координат, будет линейным подпространством.

Для того чтобы непустое подмножество L информационного пространства M было его линейным информационным подпространством, достаточно выполнения следующих требований:

1. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *принадлежат к L, то в L содержится и вектор* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.
2. *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *принадлежит к L, то в L содержится и вектор* $\alpha\boldsymbol{a}$ *при любом значении числа* α.

Действительно, ввиду условия 2, множество L содержит нулевой вектор: если вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежит к L, то L содержит и вектор $0\cdot \boldsymbol{a} = 0$. Дальше, L вместе со всяким своим вектором $\boldsymbol{a}$ содержит, снова ввиду свойства 2, и противоположный ему вектор $-\boldsymbol{a}= (-1)\cdot \boldsymbol{a}$, а поэтому ввиду свойства 1 к L принадлежит и разность любых двух векторов с L. Что же касается всех остальных требований, которые входят у определение линейного информационного пространства, то они, выполняясь в M, будут выполняться и в L.

Примерами линейных информационных подпространств информационного пространства M могут служить само информационное пространство M, а также множество, состоящее из одного нулевого вектора, — так называемое *нулевое информационное подпространство.* Рассмотрим следующий пример: берем в информационном пространстве M любую конечную систему векторов

$$\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r \tag{2.35}$$

и обозначаем через L множество всех тех векторов, которые являются линейными комбинациями векторов (2.35). Докажем, что L будет линейным информационным подпространством. В самом деле, если

$$\boldsymbol{b} =\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots +\alpha_r\boldsymbol{a}_r,\quad \boldsymbol{c}=\beta_1\boldsymbol{a}_1+\beta_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_r\boldsymbol{a}_r$$

то

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = (\alpha_1 + \beta_1)\, \boldsymbol{a}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, \boldsymbol{a}_2 + \ldots +(\alpha_r + \beta_r)\, \boldsymbol{a}_r,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ принадлежит к L; к L принадлежит и вектор

$$\gamma\boldsymbol{b} = (\gamma\alpha_1)\boldsymbol{a}_1 + (\gamma\alpha_2)\boldsymbol{a}_2 + \ldots + (\gamma\alpha_r)\boldsymbol{a}_r,$$

при любом числе γ.

Будем говорить, что это линейное информационное подпространство L *порождено* системой векторов (2.35); к L принадлежат, в частности, сами векторы (2.35).

Всякое линейное информационное подпространство конечномерного линейного информационного пространства порождается конечной системой векторов, так как если оно не является нулевым, то обладает даже конечным информационным базисом. Размерность линейного информационного подпространства L не больше размерности n самого информационного пространства M_n, причем равна n лишь при $L=M_n$. Размерностью нулевого информационного подпространства следует считать число 0.

Для всякого k, $0<k<n$, *в информационном пространстве M_n существуют линейные информационные подпространства размерности k* - достаточно взять информационное подпространство, порожденное любой системой из k линейно независимых векторов.

Пусть в информационном подпространстве M даны линейные информационные подпространства L_1 и L_2. Совокупность L_0 векторов, которые принадлежат как к L_1, так и к L_2, будет, как легко проверить, линейным информационным подпространством; оно называется *пересечением* информационных подпространств L_1 и L_2. С другой стороны, линейным информационным подпространством будет и *сумма* $\overline{L}$ информационных подпространств L_1 и L_2, т.е. совокупность всех тех векторов из M, которые представимы в виде суммы двух слагаемых, одного из L_1, другого из L_2. Если размерности информационных подпространств L_1, L_2, L_0 и $\overline{L}$ суть, соответственно, d_1, d_2, d_0 и $\overline{d}$, то имеет место следующая формула:

$$\overline{d}=d_1+d_2-d_0, \tag{2.36}$$

т.е. *размерность суммы двух информационных подпространств равна сумме розмерностей этих информационных подпространств минус размерность их пересечения.*

Для доказательства берем произвольный информационный базис

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0} \tag{2.37}$$

информационного подпространства L_0 и дополняем его к информационному базису

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0},\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_1} \tag{2.38}$$

информационного подпространства L_1 и к информационному базису

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0},\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_1} \tag{2.39}$$

информационного подпространства L_2. Легко видеть, используя определение информационного подпространства $\overline{L}$, что это информационное подпространство порождается системой векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0},\ \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_1}, \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_1} \qquad (2.40)$$

Формула (2.38) будет, следовательно, доказана, если мы докажем линейную независимость системы (2.40). Пусть имеет место равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_{\boldsymbol{d}_0}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0} + \beta_{\boldsymbol{d}_0+1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_0+1} + \ldots + \beta_{\boldsymbol{d}_1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_1} +$$
$$+\gamma_{\boldsymbol{d}_0+1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_0+1} + \ldots + \gamma_{\boldsymbol{d}_1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_1} = 0$$

с некоторыми числовыми коэффициентами. Тогда

$$\boldsymbol{d} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_{\boldsymbol{d}_0}\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{d}_0} + \beta_{\boldsymbol{d}_0+1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \beta_{\boldsymbol{d}_1}\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{d}_1} =$$
$$= -\gamma_{\boldsymbol{d}_0+1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_0+1} - \ldots - \gamma_{\boldsymbol{d}_1}\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_1}. \qquad (2.41)$$

Левая часть этого равенства содержится в L_1, права — в L_2, поэтому вектор $\boldsymbol{d}$, который равен как левой, так и правой части этого равенства, принадлежит к L_0 и, следовательно, линейно выражается через информационный базис (2.37). Правая часть равенства (2.41) показывает, однако, что вектор $\boldsymbol{d}$ линейно выражается и через векторы $\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{d}_1}$. Отсюда, ввиду линейной независимости системы (2.39), вытекает, что все коэффициенты $\gamma_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \gamma_{\boldsymbol{d}_1}$ равны нулю, т.е. $\boldsymbol{d}=0$, а тогда, ввиду линейной независимости системы (2.38), все коэффициенты

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{\boldsymbol{d}_0}, \beta_{\boldsymbol{d}_0+1}, \ldots, \beta_{\boldsymbol{d}_1}$$

также равны нулю. Этим доказана линейная независимость системы (2.40).

Область значений и ядро линейного информационного преобразования. Пусть в линейном информационном пространстве M_n задано линейное информационное преобразование φ. Если L — любое линейное информационное подпространство информационного пространства M_n, то совокупность $L\varphi$ информационных образов всех векторов из L при информационном преобразовании φ также будет линейным информационным подпространством, как вытекает из определений линейного информационного подпространства и линейного информационного преобразования. В частности, линейным информационным подпространством будет и совокупность $L_n\varphi$ информационных образов всех векторов информационного пространства M_n; она называется *областью значений* информационного преобразования φ.

Найдем размерность области значений. Для этого заметим, что, так как все матрицы, которые задают информационное преобразование φ в разных информационных базисх, подобны между собой, то, все они имеют один и то же ранг. Это число можно назвать, следовательно, *рангом* линейного информационного преобразования φ.

Размерность области значений линейного информационного преобразования φ равняется рангу этого информационного преобразования.

В самом деле, пусть φ задается в информационном базисе $\boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ матрицей A. Информационное подпространство M_n φ порождается векторами

$$\boldsymbol{e_l}\varphi, \boldsymbol{e_2}\varphi, \dots, \boldsymbol{e_n}\varphi \qquad (2.42)$$

и поэтому информационным базисом информационного подпространства $M_n\varphi$ будет служить, в частности, любая максимальная линейно независимая подсистема системы (2.42). Однако максимальное число линейно независимых векторов в системе (2.42) равняется максимальному числу линейно независимых строк матрицы A, т.е. равняется рангу этой матрицы. Теорема доказана.

Мы знаем, что при линейном информационном преобразовании φ нулевой вектор переходит в самого себя. Совокупность $N(\varphi)$ всех векторов информационного пространства M_n, отображающихся при φ в нулевой вектор, будет, следовательно, непустой и является, очевидно, линейным информационным подпространством. Это информационное подпространство будем называть *ядром* информационного преобразования φ, а его размерность — *дефектом* этого информационного преобразования.

Для любого линейного информационного преобразования φ информационного пространства M_n сумма ранга и дефекта этого информационного преобразования равняется размерности n всего информационного пространства.

Действительно, если r — ранг информационного преобразования φ, то информационное подпространство $M_n\varphi$ обладает информационным базисом из r векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r. \qquad (2.42)$$

В информационном пространстве M_n можно выбрать такие векторы

$$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_r, \qquad (2.43)$$

что

$$\boldsymbol{b}_i\varphi = \boldsymbol{a}_i, \; i=1, 2, \dots, r;$$

выбор векторов (2,43) не является однозначным. Если бы некоторая нетривиальная линейная комбинация векторов (2.43) отображалась информационным преобразованием φ в нуль, в частности, если бы векторы (2.43) были линейно зависимыми, то векторы (2.42) оказались бы сами линейно зависимыми против предположения. Поэтому линейное информационное подпространство *L,* порожденное векторами (2.43), имеет размерность *r*, а его пересечение с информационным подпространством *N(*φ*)* равно нулю.

С другой стороны, сумма информационных подпространств *L* и *N*(φ) совпадает со всем информационным пространством M_n. Действительно, если ***с*** - любой вектор информационного пространства, то вектор ***d***=***c***φ принадлежит к информационному подпространству M_nφ. Тогда в информационном подпространстве *L* найдется такой вектор ***b****,* что

$$\boldsymbol{b}\varphi=\boldsymbol{d}$$

— вектор ***b*** записывается через систему (2.44) с теми же коэффициентами, с которыми вектор ***d*** записывается через информационный базис (2.43). Отсюда

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}),$$

причем вектор ***с*** — ***b*** содержится в информационном подпространстве *N(*φ), так как

$$(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})\varphi = \boldsymbol{c}\varphi - \boldsymbol{b}\varphi = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{d} = 0.$$

Из полученных результатов и доказанной выше формулы (2.36) вытекает утверждение теоремы.

Невырожденные линейные информационные преобразования. Линейное информационное преобразование φ линейного информационного пространства M_n называется *невырожденным,* если оно удовлетворяет любому из следующих условий, равносильность которых вытекает из доказанных выше теорем:

1. Ранг информационного преобразования φ равен *п*.
2. Областью значений информационного преобразования φ служит все информационное ространство M_n.
3. Дефект информационного преобразования φ равняется нулю.

Для невырожденных линейных информационных преобразований можно указать также много других определений, равносильных указанным выше, в частности определения 4 - 6.

4. Разные векторы информационного пространства M_n имеют при информационном преобразовании φ различные информационные образы.

Действительно, если информационное преобразование φ обладает свойством 4, то информационное ядро этого информационного преобразования состоит лишь из нулевого вектора, т.е. выполняется и свойство 3. Если же векторы ***а*** и ***b*** таковы, что ***a***≠***b****,* но ***а***φ=***b***φ*,* то
*(****a*** — ***b****)*≠0*,* но *(****a*** — ***b****)*φ=0*,* т.е. свойство 3 не выполняется.

Из 2 и 4 вытекает

5. Информационное преобразование φ есть взаимно однозначным отображением информационного пространства M_n на все это информационное пространство.

Из 5 следует, что для невырожденного линейного информационного преобразования φ существует *обратное информационное преобразование* φ^{-1}, переводящее всякий вектор $\boldsymbol{a}\varphi$ в вектор $\boldsymbol{a}$,

$$(\boldsymbol{a}\varphi)\varphi^{-1}=\boldsymbol{a}.$$

Информационное преобразование φ^{-1} *будет линейным,* так как

$$(\boldsymbol{a}\varphi + \boldsymbol{b}\varphi)\varphi^{-1}=[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\varphi]\ \varphi^{-1}= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

$$[\alpha(\boldsymbol{a}\ \varphi)]\varphi^{-1} =[(\alpha\boldsymbol{a})\varphi]\varphi^{-1} = \alpha\boldsymbol{a}.$$

Из определения информационного преобразования φ^{-1} вытекает, что

$$\varphi\varphi^{-1} =\varphi^{-1}\varphi=\boldsymbol{e}; \qquad (2.45)$$

равенства (2.45) могут сами рассматриваться как определение обратного информационного преобразования. Отсюда и из последних результатов предыдущего раздела вытекает, что *если невырожденное линейное информационное преобразование* φ *задается в некотором информационном базисе матрицей А, невырожденной ввиду свойства* 1, *то информационное преобразование* φ^{-1} *задается в этом информационном базисе матрицей* A^{-1}.

Мы приходим, таким образом, к следующему определению невырожденного линейного информационного преобразования:

6. Для информационного преобразования φ существует обратное линейное информационного преобразование φ^{-1}.

2.5. Евклидовы информационные пространства. Ортонормированные информационные базисы

Понятие *n*-мерного линейного информационного пространства далеко не в полной мере обобщает понятие плоскости или трехмерного евклидова пространства — в *n*-мерном случае при $n>3$ не определенны ни длина вектора, ни угол между векторами, и потому невозможно развитие теории информационных пространств, которая хорошо развита для $n=2$ и $n=3$. Это положение может быть исправлено следующим путем.

Из курса аналитической геометрии известно, что и в плоскости, и в трехмерном пространстве можно ввести понятие скалярного умножения векторов. Оно определяется при помощи длин векторов и угла между ними, но, как оказывается, и длина вектора, и угол между векторами в свою очередь могут быть выраженные через скалярные произведения. Мы определим поэтому в любом *n*-мерном линейном информационном пространстве понятие скалярного умножения, причем определим аксиоматически, с помощью некоторых свойств, которыми скалярное умножение векторов плоскости или трехмерного пространства обладает.

Отметим, что нами будут рассматриваться действительные линейные информационные пространства.

Будем говорить, что в n-мерном действительном линейном информационном пространстве M_n определено *скалярное умножение,* если всякой паре векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ поставлено в соответствие действительное число, которое обозначается символом $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и названное *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, причем выполняются следующие условия (здесь $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ - любые векторы пространства M_n, α - любое действительное число):

I. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

II. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$.

III. $(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})= \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

IV. Если α≠0, то скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$ строго положителен,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})>0.$$

Отметим, что из III при α=0 следует равенство

$$(0, \boldsymbol{b})=0, \tag{2.46}$$

т.е. *скалярное произведение нулевого вектора на любой вектор **b** равно нулю;* равен нулю, в частности, скалярный квадрат нулевого вектора.

Из II и III вытекает следующая формула для скалярного произведения линейных комбинаций двух систем векторов:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{l}\beta_j\boldsymbol{b}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_j) \tag{2.47}$$

Если в n-мерном действительном линейном информационном пространстве определено скалярное умножение, то это пространство будем называть *n-мерным евклидовым информационным пространством.*

При любому n в n-мерном линейном информационном пространстве M_n можно определить скалярное умножение, т.е. можно превратить это информационное пространство в информационное евклидово пространство.

В самом деле, возьмем в информационном пространстве M_n любой информационный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$. Если

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{e}_i, \qquad \boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\boldsymbol{e}_i,$$

то положим

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{i}} \beta_{\boldsymbol{i}} \quad . \tag{2.48}$$

Легко проверяется, что условия I — IV будут выполненны, т.е. равенство (2.46) определяет в информационном пространстве M_n скалярное умножение. Мы видим, что в n-мерном действительном линейном информационном пространстве скалярное умножение можно задать, вообще говоря, многими разными способами — определение (2.48) зависит от выбора информационного базиса, а нам пока неизвестно, можно ли ввести скалярное умножение каким-нибудь принципиально другим способом. Нашей ближайшей целью является обзор всех возможных способов информационного преобразования n-мерного линейного информационного пространства в евклидово информационное пространство и установление того, что в некотором смысле для всякого n существует одно-единственное n-мерное евклидово информационное пространство.

Пусть дано произвольное n-мерное евклидово информационное пространство E_n, т.е. в n-мерном линейном информационном пространстве произвольным способом введено скалярное умножение. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными,* если их скалярное произведение равно нулю,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Из (2.46) вытекает, что нулевой вектор есть ортогональным к любому вектору; могут существовать, однако, и ненулевые ортогональные векторы.

Система векторов называется *ортогональной системой,* если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Пусть, в самом деле, в E_n дана система векторов $\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\ldots,\boldsymbol{a_k}$, причем $\boldsymbol{a}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, и

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{2.49}$$

Если

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = 0,$$

то, скалярно умножая обе части этого равенства на вектор $\boldsymbol{a}_i$, $1 \leq i \leq k$, получаем ввиду (2.46), (2.47) и (2.49):

$$0 = (0, \boldsymbol{a}_i) = (\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_i) =$$
$$= \alpha_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_i) + \alpha_2 (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_i) + \ldots + \alpha_k(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_i) = \alpha_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i).$$

Отсюда, так как $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) > 0$ по IV, вытекает $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, что и требовалось доказать.

Опишем процесс ортогонализации, т.е. некоторый способ перехода от любой линейно независимой системы из k векторов

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k \qquad (2.50)$$

евклидова информационного пространства E_n к ортогональной системе, которая также состоит из k ненулевых векторов; эти векторы будут обозначены через $\boldsymbol{b}_1$ $\boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_k$.

Положим $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, т.е. первый вектор системы (2.50) войдет и в строящуюся нами ортогональную систему. Положим, далее,

$$\boldsymbol{b}_2 = \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{a}_2.$$

Так как $\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{a}_1$, а векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ линейно независимы, то вектор $\boldsymbol{b}_2$ отличен от нуля при любом числе α_1. Подберем это число из условия, что вектор $\boldsymbol{b}_2$ должен быть ортогонален к вектору $\boldsymbol{b}_1$:

$$0=(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{b}_1, \alpha_1\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_2) = \alpha_1(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2),$$

откуда, ввиду IV,

$$\alpha_1= -(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2)/(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1)$$

Пусть уже построена ортогональная система ненулевых векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,..., \boldsymbol{b}_l$; дополнительно предположим, что для всякого i, $1\le i\le l$, вектор $\boldsymbol{b}_i$ является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_i$ Это предположение будет выполняться тогда и для вектора $\boldsymbol{b}_{l+1}$, если он будет выбран в виде

$$\boldsymbol{b}_{l+1}= \alpha_1\boldsymbol{b}_1+ \alpha_2\boldsymbol{b}_2+ ...+ \alpha_l\boldsymbol{b}_l+ \boldsymbol{a}_{l+1},$$

Вектор $\boldsymbol{b}_{l+1}$ будет при этом отличен от нуля, так как система (2.50) линейно независима, а вектор $\boldsymbol{a}_{l+1}$ не входит в записи векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_l$. Коэффициенты α_i, i= 1, 2, .. ., l, подберем из условия, что вектор $\boldsymbol{b}_{l+1}$ должен быть ортогонален ко всем векторам $\boldsymbol{b}_i$, i =1, 2..... l:

$$0 =(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_{l+1}) = (\boldsymbol{b}_i, \alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2+...+ \alpha_l\boldsymbol{b}_l, + \boldsymbol{a}_{l+1}) =$$

$$= \alpha_1(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_1)+ \alpha_2(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_2)+ ...+ \alpha_l(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_l) + (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{l+1});$$

отсюда, так как векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2,..., \boldsymbol{b}_l$ ортогональны между собой,

$$\alpha_i(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)+ (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{l+1})= 0,$$

т.е.

$$\alpha_i= -(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{a}_{l+1})/(\boldsymbol{b}_l, \boldsymbol{b}_i), \quad i =1, 2, …, l$$

Продолжая этот процесс, мы построим искомую ортогональную систему $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_k$.

Применяя процесс ортогонализации к произвольному информационному базису информационного пространства E_n, мы получим ортогональную систему с n ненулевых векторов, т.е., так как эта система по доказанному линейно независима, *ортогональный информационный базис.* При этом, используя замечание, сделанное в связи с первым шагом процесса ортогонализации, а также учитывая то, что всякий ненулевой вектор можно включить в некоторый информационный базис информационного пространства, можно сформулировать следующее утверждение:

Всякое евклидово информационное пространство имеет ортогональные информационные базисы, причем любой ненулевой *вектор этого информационного пространства входит в состав некоторого ортогонального информационного базиса.*

В дальнейшем важную роль будет играть один специальный вид ортогональных информационных базисов; информационные базисы этого вида отвечают прямоугольным декартовим системам координат.

Назовем вектор ***b*** *нормированным,* если его скалярный квадрат равен единице,

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})=1.$$

Если $\boldsymbol{a}\neq 0$, откуда $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})>0$, то *нормированием* вектора ***a*** называется переход к вектору

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{(a,a)}}a\ .$$

Вектор ***b*** будет нормированным, так как

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=\left(\frac{1}{\sqrt{(a,a)}}a,\ \frac{1}{\sqrt{(a,a)}}a\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{(a,a)}}a\right)^2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=1.$$

Информационный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ евклидова информационного пространства E_n называется *ортонормованим,* если он ортогонален, а все его векторы нормированы, т.е.

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)=0 \text{ при } i\neq j,$$
$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=1, \qquad i=1, 2, \ldots, n. \tag{2.51}$$

Всякое евклидово информационное пространство владеет ортонормированными информационными базисами.

Для доказательства достаточно взять любой ортогональный информационный базис и пронормировать все его векторы. Информационный базис останется при этом ортогональным, так как при любых α и β из $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ следует

$$(\alpha\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}) = \alpha\beta(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0.$$

Информационный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *евклидова информационного пространства* E_n *тогда и только тогда будет ортонормированным, если скалярное произведение любых двух векторов информационного пространства равняется сумме произведений соответствующих координат этих векторов в указанном информационном базисе, т.е. из*

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{e}_i\ , \qquad \boldsymbol{b}=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\ , \tag{2.52}$$

следует

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{i}} \beta_{\boldsymbol{i}} \ . \tag{2.53}$$

Действительно, если для нашего информационного базиса выполняются равенства (2.51), то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \ , \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j \right) = \sum_{i.j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (e_i, e_j) \ = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{i}} \beta_{\boldsymbol{i}}$$

Обратно, если наш информационный базис такой, что для любых векторов ***a*** и ***b*,** записанных в этом информационном базисе в виде (2.52), справедливо равенство (2.53), то, беря в качестве ***a*** и ***b*** любые два вектора этого информационного базиса $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_{j,}$ разные или одинаковые, мы из (2.53) выведим равенства (2.51).

Сопоставляя полученный результат с изложенным ранее доказательством существования *n*-мерных евклидовых информационных пространств для любого *n,* можно высказать следующее утверждение: *если в n-мерном линейном информационном просторные* M_n *избран произвольный информационный базис, то в* M_n *можно так задать скалярное умножение, которое в полученном евклидовом информационном пространстве избранный информационный базис будет одним из ортонормированных информационных базисов.*

Изоморфизм евклидовых информационных пространств. Евклидовы информационные пространства *E* и *E'* называются *изоморфными,* если между векторами этих пространств можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором выполняются следующие требования:

1) это соответствие является изоморфным соответствием между *E* и *E',* рассматриваемые как линейные информационные пространства;

2) при этом соответствии сохраняется скалярное произведение; другими словами, если информационными образами векторов ***a*** и ***b*** из *E* служат соответственно векторы ***a'*** и ***b'*** из *E',* то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a'}, \boldsymbol{b'}). \tag{2.54}$$

Из условия 1) следует, что *изоморфные евклидовы информационные пространства имеют одну и ту же размерность.*

Докажем обратное утверждение:

Любые евклидовы информационные пространства E и E', которые имеют одну и ту же размерность n, изоморфны между собой.

В самом деле, выберем в информационных пространствах *E* и *E*' ортонормированные информационные базисы

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \tag{2.55}$$

и, соответственно,

$$\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n \qquad (2.56)$$

Ставя в соответствие всякому вектору

$$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{e}_i \ ,$$

из E вектор

$$\boldsymbol{a}'=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e'_i \ ,$$

из E', который имеет в информационном базисе (2.56) те же координаты, которые и вектор $\boldsymbol{a}$ в информационном базисе (2.55), мы получим изоморфное соответствие между линейными информационными пространствами E и E'. Покажем, что выполняется и равенство (2.54): если

$$\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i \ , \quad \boldsymbol{b}'=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e'_i \ ,$$

то, в силу (2.53) - учитывая ортонормированность информационных базисов (2.55) и (2.56)

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \beta_i = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}').$$

Естественно изоморфные евклидовы информационные пространства не считать разными. Поэтому для всякого n существует единственное n-мерное евклидово информационное пространство в том же смысле, в каком для всякого n существует единственное n-мерное действительное линейное информационное пространство.

На случай комплексных линейных информационных пространств понятия и результаты этого раздела переносятся следующим образом. Комплексное линейное информационное пространство называется *унитарным информационным пространством,* если в нем задано скалярное умножение, причем $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ будет, вообще говоря, комплексным числом; при этом должны выполняться аксиомы II — IV (в формулировке последней аксиомы следует подчеркнуть, что скалярный квадрат ненулевого вектора действителен и строго положителен), а аксиома I заменяется аксиомой

I'. $$(a, b) = \overline{(b, a)} \ ,$$

где черточка обозначает, как обычно, переход к сопряженному комплексному числу.

Скалярное умножение уже не будет, следовательно, коммутативным. Тем не менее, равенство, симметричное аксиоме II, остается справедливым,

II'. $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$,
так как

$$(a, b+c)=\overline{(b+c,a)} = \overline{(b,a)+(c,a)} = \overline{(b,a)} + \overline{(c,a)} = (a,b)+(a,c).$$

С другой стороны,
III'. $(a, \alpha b)=\alpha\,(a, b)$,
так как

$$(a, \alpha b) = \overline{(\alpha b, a)} = \overline{\alpha (b,a)} = \overline{\alpha}\ \overline{(b,a)} = \overline{\alpha}\ (a, b).$$

Понятие ортогональности и ортонормированности системы векторов переносятся на случай унитарных информационных пространств без всяких изменений. Как и выше, доказывается существование ортонормированных информационных базисов во всяком конечномерном унитарном информационном пространстве. При этом, однако, если $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ — ортонормированный информационный базис и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ имеют в этом информационном базисе записи (2.52), то

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}\ .$$

2.6. Ортогональные матрицы, ортогональные информационные преобразования

Пусть дано действительное линейное информационное преобразование n неизвестных:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} q_{ik} y_k\ ,\ u=1.2.....n; \tag{2.57}$$

матрицу этого информационного преобразования обозначим через Q. Это информационное преобразование переводит сумму квадратов неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. квадратичную форму $x^2_1+ x^2_2+ ...+ x^2_n$, являющуюся нормальным видом положительно определенных квадратичных форм, в некоторую квадратичную форму от неизвестных $y_1, y_2, ..., y_n$. Случайно эта новая квадратичная форма сама может оказаться суммой квадратов неизвестных $y_1, y_2, ..,y_n$, т.е. может иметь место равенство

$$x^2_1+ x^2_2+ ...+ x^2_n =y^2_1+y^2_2+...+y^2_n \tag{2.58}$$

тождественное после замены неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ их выражениями (2.57). Линейное информационное преобразование неизвестных (2.57), обладающее этим свойством, т.е. оставляющее сумму квадратов неизвестных инвариантной, будем называть *ортогональным информационным преобразованием неизвестных,* а его матрица Q — *ортогональной матрицей.*

Существует много других определений ортогонального преобразования и ортогональной матрицы, эквивалентных приведенным выше. Укажем некоторые из них, необходимые для дальнейшего.

Как мы знаем, существует закон, по которому преобразуется матрица квадратичной формы при выполнении линейного преобразования неизвестных. Применяя его к нашему случаю и учитывая то, что матрицей квадратичной формы, которая является суммой квадратов всех неизвестных, служит единичная матрица *E,* мы получим, что равенство (2.67) равносильно матричному равенству

$$Q'E\,Q = E,$$

т.е.

$$Q' = E. \qquad (2.59)$$

Отсюда

$$Q' = Q^{-1} \qquad (2.60)$$

а потому справедливо и равенство

$$QQ' = E. \qquad (2.61)$$

Таким образом, ввиду (2.69), *ортогональную матрицу Q можно определить как такую матрицу, для которой транспонированная матрица Q' равна обратной матрице Q^{-1}.*

Каждое из равенств (2.59) и (2.61) также может быть принято в качестве определения ортогональной матрицы.

Так как столбцы матрицы Q' являются строками матрицы Q, то из (2.61) вытекает следующее утверждение: *квадратная матрица Q тогда и только тогда будет ортогональной, если сумма квадратов всех элементов любой ее строки равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух ее различных строк равняется нулю.* Из (2.59) следует аналогичное утверждение для столбцов матрицы Q.

Переходя в равенстве (2.59) к определителям, мы получим, ввиду того, что $|Q'| = |Q|$, равенство

$$|Q|^2 = 1.$$

Отсюда следует, что *определитель ортогональной матрицы равен* ±1. Таким образом, *всякое ортогональное информационное преобразование неизвестных является невырожденным.* При этом утверждать обратное нельзя; отметим также, что далеко не всякая матрица с определителем, равным ±1, будет ортогональной.

Матрица, обратная к ортогональной, сама будет ортогональной. Действительно, переходя в (2.60) к транспонированным матрицам, мы получим:

$$(Q^{-1})' = (Q')' = Q = (Q^{-1})^{-1}.$$

С другой стороны, *произведение ортогональных матриц само ортогонально.* Действительно, если матрицы Q и R ортогональны, то, используя (2.60) и аналогичное равенство, справедливое для обратной матрицы, мы получим:

$$(Q/R)' = R'' = R^{-1}Q^{-1} = (Q/R)^{-1}.$$

В п. 2.9 будет использовано следующее утверждение:

Матрица перехода от ортонормированного информационного базиса евклидова информационного пространства к любому другому его ортонормированному информационному базису есть ортогональной.

Пусть, в самом деле, в информационном пространстве E_n задано два ортонормированных информационных базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}, ..., \boldsymbol{e}'_n$ с матрицей перехода $Q=(q_{ij})$,

$$\boldsymbol{e}' = Q\boldsymbol{e}.$$

Так как информационный базис $\boldsymbol{e}$ ортонормированный, то и скалярное произведение любых двух векторов, в частности любых двух векторов из информационного базиса $\boldsymbol{e}'$, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов в информационном базисе $\boldsymbol{e}$. Так как, однако, и информационный базис $\boldsymbol{e}'$ ортонормированный, то скалярный квадрат каждого вектора из $\boldsymbol{e}'$ равен единице, а скалярное произведение любых двух разных векторов из $\boldsymbol{e}'$ равно нулю. Отсюда для строк координат векторов информационного базиса $\boldsymbol{e}'$ в информационном базисе $\boldsymbol{e}$, т.е. для строк матрицы Q, вытекают те утверждения, которые, как выведено выше из равенства (2.61), характерны для ортогональной матрицы.

Ортогональные информационные преобразования евклидова информационного пространства. Сейчас уместно изучить один специальный тип линейных информационных преобразований евклидовых информационных пространств.

Линейное информационное преобразование φ евклидова информационного пространства E_n называется *ортогональным информационным преобразованием этого евклидова информационного пространства,* если оно сохраняет скалярный квадрат всякого вектора, т.е. для любого вектора $\boldsymbol{a}$

$$(\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{a}\varphi) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}). \qquad (2.62)$$

Отсюда выводится следующее более общее утверждение, которое также может быть принято как определение ортогонального информационного преобразования:

*Ортогональное информационное преобразование φ евклидова информационного пространства сохраняет скалярное произведение любых двух векторов **a, b**,*

$$(\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{b}\varphi) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \qquad (2.63)$$

Действительно, ввиду (2.62)

$$((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Однако

$$((\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi, (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\varphi) = (\boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi, \boldsymbol{a}\varphi+\boldsymbol{b}\varphi) =$$
$$= (\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{a}\varphi) + (\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{b}\varphi) + (\boldsymbol{b}\varphi, \boldsymbol{a}\varphi) + (\boldsymbol{b}\varphi, \boldsymbol{b}\varphi), (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) =$$
$$= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}).$$

Отсюда, используя (2.62) как для ***a***, так и для ***b***, и учитывая коммутативность скалярного умножения, получаем

$$2(\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{b}\varphi) = 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

а потому имеет место и (2.63).

При ортогональном информационном преобразовании евклидова информационного пространства информационные образы всех векторов любого ортонормированного информационного базиса сами составляют ортонормированный информационный базис.

Обратно, если линейное информационное преобразование евклидова информационного пространства переводит хотя бы один ортонормированный информационный базис снова в ортонормированный информационный базис, то это информационное преобразование ортогонально.

В самом деле, пусть φ — ортогональное информационное преобразование информационного пространства E_n, а $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — произвольный ортонормированный информационный базис этого пространства. Ввиду (2.62) из равенств

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i)=1, \quad i=1, 2, \ldots, n,$$
$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0 \quad \text{при } i\neq j$$

вытекают равенства

$$(\boldsymbol{e}_i\varphi, \boldsymbol{e}_i\varphi)=1, \; i=1, 2, \ldots, n,$$
$$(\boldsymbol{e}_i\varphi, \boldsymbol{e}_j\varphi) = 0 \quad \text{при } i\neq j,$$

т.е. система векторов $\boldsymbol{e}_1\varphi, \boldsymbol{e}_2\varphi, \ldots, \boldsymbol{e}_n\varphi$ оказывается ортогональной и нормированной, а поэтому она будет ортонормированным информационным базисом информационного пространства E_n.

Обратно, пусть линейное информационное преобразование φ информационного пространства E_n переводит ортонормированный информационный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ снова в ортонормированный информационный базис, т.е. система векторов $\boldsymbol{e}_1\varphi, \boldsymbol{e}_2\varphi, \ldots, \boldsymbol{e}_n\varphi$ есть ортонормированный информационный базис информационного пространства E_n. Если

$$\boldsymbol{a}=\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}}\alpha_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} \;,$$

— произвольный вектор информационного пространства E_n, то

$$\boldsymbol{a}\varphi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i\varphi) \;,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{a}\varphi$ имеет в информационном базисе $\boldsymbol{e}\varphi$ те же координаты, которые и вектор $\boldsymbol{a}$ в информационном базисе $\boldsymbol{e}$. Эти оба информационные базисы есть, однако, ортонормированными, а поэтому скалярный квадрат любого вектора равен сумме квадратов его координат в любом из этих информационных базисов. Таким образом,

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{a}\varphi)= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{\,2} \;,$$

т.е. равенство (2.62) действительно выполняется.

Ортогональное информационное преобразование евклидова информационного пространства в любом ортонормированном информационном базисе задается ортогональной матрицей.

Обратно, если линейное информационное преобразование евклидова информационного пространства хотя бы в одном ортонормированном информационном базисе задается ортогональной матрицей, то это информационное преобразование ортогонально.

Действительно, если информационное преобразование φ ортогональное, а информационный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ ортонормированный, то и система векторов $\boldsymbol{e}_1\varphi,\boldsymbol{e}_2\varphi,...,\boldsymbol{e}_n\varphi$ будет ортонормированным информационным базисом. Матрица A информационного преобразования φ в информационном базисе $\boldsymbol{e}$,

$$\boldsymbol{e}\varphi = A\boldsymbol{e}, \tag{2.64}$$

будет, следовательно, матрицей перехода от ортонормированного информационного базиса $\boldsymbol{e}$ к ортонормированному информационному базису $\boldsymbol{e}\varphi$, т.е., как доказано выше, будет ортогональной.

Обратно, пусть линейное информационное преобразование φ задается в ортонормированном информационном базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ ортогональной матрицей A; имеет место, следовательно, равенство (2.64). Так как информационный базис $\boldsymbol{e}$ ортонормированный, то скалярное произведение любых векторов, в частности любых векторов из системы $\boldsymbol{e}_1\varphi,\boldsymbol{e}_2\varphi,...,\boldsymbol{e}_n\varphi$, равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов в информационном базисе $\boldsymbol{e}$. Поэтому, так как матрица A ортогональна,

$$(\boldsymbol{e}_i\varphi, \boldsymbol{e}_i\varphi)=1, \; i=1, 2, ..., n,$$
$$(\boldsymbol{e}_i\varphi, \boldsymbol{e}_j\varphi) = 0 \quad \text{при } i\neq j,$$

т.е. система ***e***φ сама оказывается ортонормированным информационным базисом информационного пространства E_n. Отсюда вытекает ортогональность информационного преобразования φ. Как известно из курса аналитической геометрии, среди всех аффинных преобразований плоскости, которые оставляют на месте начало координат, вращение (соединенные, быть может, с зеркальными отражениями) являются единственными, которые сохраняют скалярное произведение векторов. Таким образом, ортогональные информационные преобразования *n*-мерного евклидова информвционного пространства можно рассматривать как «вращения» этого пространства.

К числу ортогональных информационных преобразований евклидова информвционного пространства принадлежит тождественное информационное преобразование. С другой стороны, установленная нами связь между ортогональными информационными преобразованиями и ортогональными матрицами, а также связь, которая имеет место между операциями над линейными информационными преобразованиями и над матрицами позволяют из известных свойств ортогональных матриц вывести следующие свойства ортогональных информационных преобразований евклидова информвционного пространства:

Всякое ортогональное информационное преобразование является невырожденным и его обратное информационное преобразование также ортогонально.

Произведение любых ортогональных информационных преобразований ортогонально.

2.7. Симметрические информационные преобразования

Линейное информационное преобразование φ *n*-мерного евклидова информационного пространства называется *симметрическим* (или *самосопряженным),* если для любых векторов ***a***, ***b*** этого пространства имеет место равенство

$$(\varphi \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\varphi), \qquad (2.65)$$

т.е. символ симметрического информационного преобразования можно при скалярном умножении переносить с одного множителя на другой.

Примерами симметрических информационных преобразований служат тождественное информационное преобразование ε и нулевое информационное преобразование ω. Более общим примером является линейное информационное преобразование, при котором всякий вектор увеличивается на фиксированное число α,

$$\boldsymbol{a}\varphi = \alpha \boldsymbol{a}.$$

Действительно, в этом случае

$$(\boldsymbol{a}\varphi, \boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\varphi).$$

Роль симметрических информационных преобразований весьма велика и нам необходимо изучить их довольно детально.

Симметрическое информационное преобразование евклидова информационного пространства в любом ортонормированном информационном базисе задается симметрической матрицей. Обратно, если линейное информационное преобразование евклидова информационного пространства хотя бы в одном ортонормированном информационном базисе задается симметрической матрицей, то это информационное преобразование симметрическое.

Действительно, пусть симметрическое информационное преобразование φ задается в ортонормированном информационном базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ матрицей $A=(\alpha_{ij})$. Учитывая то, что в ортонормированном информационном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов, мы получаем:

$$(\boldsymbol{e}_i\varphi, \boldsymbol{e}_j) = \left(\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{ik}}\boldsymbol{e_k}, \boldsymbol{e_j}\right) = \alpha_{\boldsymbol{ij}},$$

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j\varphi) = \boldsymbol{e_i}\left(\sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \alpha_{\boldsymbol{jk}}\boldsymbol{e_k}\right) = \alpha_{\boldsymbol{ij}},$$

т.е., ввиду (2.65),

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

для всех i и j. Матрица A оказалась, таким образом, симметрической.

Обратно, пусть линейное информационное преобразование φ задается в ортонормированном информационном базисе $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ симметрической матрицей $A=(\alpha_{ij})$,

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \text{ для всех } i \text{ и } j. \tag{2.66}$$

Если

$$\boldsymbol{b} = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \beta_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{e_i}, \qquad \boldsymbol{c} = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{n}} \gamma_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{e_j},$$

— любые векторы информационного пространства, то

$$\boldsymbol{b}\varphi = \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \beta_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{e_i}\varphi) = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{\boldsymbol{g}}\left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \beta_{\boldsymbol{i}}\alpha_{\boldsymbol{ij}}\right)\boldsymbol{e_j},$$

$$c\varphi = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (e_j \varphi) = \sum_{i=1}^{g} \left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \alpha_{ji} \right) e_i .$$

Используя ортонормированность информационного базиса ***e***, получаем

$$(b\varphi, c) = \sum_{j,i=1}^{n} \beta_i \alpha_{ij} \gamma_j ,$$

$$(b, c\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \alpha_{ji} .$$

Ввиду (2.66) правые части последних равенств совпадают, а поэтому

$$(b\varphi, c) = (b, c\varphi),$$

что и нужно было доказать.

Из полученного результата вытекает следующее свойство симметрических информационных преобразований:

Сумма симметрических информационных преобразований, а также произведение симметрического информационного преобразования на число, являются симметрическими информационными преобразованиями.

Докажем теперь следующую теорему:

Все характеристические корни симметрического информационного преобразования действительны.

Так как характеристические корни любого линейного информационного преобразования совпадают с характеристическими корнями матрицы этого информационного преобразования в любом информационном базисе, а симметрическое информационное преобразование задается в ортонормированных информационных базисах симметрическими матрицами, то достаточно доказать следующее утверждение:

Все характеристические корни симметрической матрицы действительные.

В самом деле, пусть λ_0 будет характеристический корень (может быть, комплексный) симметрической матрицы $A = (\alpha_{ij})$,

$$|A - \lambda_0 E| = 0.$$

Тогда система линейных однородных уравнений с комплексными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \lambda_0 x_i , \qquad i=1, 2, ... n,$$

имеет равный нулю определитель, т.е. обладает ненулевым решением

$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_г$, вообще говоря, комплексным; таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = \lambda_0 \beta_i, \quad i=1, 2, ... n. \qquad (2.67)$$

Умножая обе части каждой i-го из равенств (2.67) на число $\overline{\beta}_i$, сопряженное с числом β_i, и складывая отдельно левые и правые части всех получающихся равенств, мы приходим к равенству

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\beta}_i. \qquad (2.68)$$

Коэффициент при λ_0 в (2.68) есть отличным от нуля действительным числом, будучи суммой неотрицательных действительных чисел, хотя бы одно из которых строго положительно. Действительность числа λ_0 будет поэтому доказана, если мы докажем действительность левой части равенства (2.68), для чего достаточно показать, что это комплексное число совпадает со своим сопряженным. Здесь будет использована симметричность (действительной) матрицы A.

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j} \beta_j \overline{\beta}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{\alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i} = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\beta}_j \beta_i = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ji} \overline{\beta}_j \beta_i =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{\beta}_i \beta_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j \overline{\beta}_i =.$$

Заметим, что предпоследнее равенство получено простой переменной обозначений для индексов суммирования: вместо i поставлено j, вместо j поставлено i. Теорема, следовательно, доказанная.

Линейное информационное преобразование φ евклидова информационного пространства E_n тогда и только тогда будет симметрическим, если в информационном пространстве E_n существует ортонормированный информационный базис, составленный из собственных векторов этого информационного преобразования.

В одну сторону это утверждение почти очевидно: если в E_n существует ортонормированный информационный базис $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, ..., \boldsymbol{e_n}$, причем

$$\boldsymbol{e}_i\varphi = \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

то в информационном базисе $\boldsymbol{e}$ информационное преобразование φ задается диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица есть, однако, симметрической, а поэтому информационное преобразование φ задается в ортонормированном информационном базисе ***е*** симметрической матрицей, т.е. будет симметрическим.

Основное обратное утверждение теоремы мы будем доказывать индукцией по размерности n информационного пространства E_n. В самом деле, при n=1 всякое линейное информационное преобразование φ информационного пространства E_1 непременно переводит любой вектор в вектор, ему пропорциональный. Отсюда следует, что всякий ненулевой вектор ***a*** будет собственным вектором для φ (как следует и то, что всякое линейное информационное преобразование информационного пространства E_1 будет симметрическим). Нормируя вектор ***a***, мы получим искомый ортонормированный информационный базис информационного пространства E_1.

Пусть утверждение теоремы уже доказано для $(n—1)$-мерного евклидова информационного пространства и пусть в информационном пространстве E_n задано симметрическое информационное преобразование φ. Из доказанной выше теоремы вытекает существование для φ действительного характеристического корня λ_0. Это число будет, следовательно, собственным значением для информационного преобразования φ. Если ***a*** — собственный вектор информационного преобразования φ, который относится к этому собственному значению, то и всякий ненулевой вектор, пропорциональный вектору ***a***, будет для φ собственным вектором, относящимся к тому же собственному значению λ_0, так как

$$(\alpha \boldsymbol{a})\varphi = \alpha(\boldsymbol{a}\varphi) = \alpha(\lambda_0 \boldsymbol{a}) = \lambda_0(\alpha \boldsymbol{a}).$$

В частности, нормируя вектор ***a***, мы получим такой вектор $\boldsymbol{e}_1$, что

$$\boldsymbol{e}_1\varphi = \lambda_0 \boldsymbol{e}_1,$$
$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) = 1.$$

Как доказано в п. 2.6, ненулевой вектор $\boldsymbol{e}_1$ можно включить в ортогональный информационный базис

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_n, \qquad (2.69)$$

информационного пространства E_n. Те векторы, первая координата которых в информационном базисе (2.69) равна нулю, т.е. векторы вида $\alpha\boldsymbol{e}'_2+\ldots+\alpha\boldsymbol{e}'_n$, составляют, наверное, $(n—1)$-мерное линейное информационное подпространство информационного пространства E_n, которое мы обозначим через L. Это будет даже $(n—1)$-мерное евклидово информационное пространство, так как скалярное произведение, будучи определенным для всех векторов из E_n, определено, в частности, для векторов из L, причем обладает всеми необходимыми свойствами. Информационное подпространство L состоит из всех тех векторов информационного пространства E_n, которые ортогональны к вектору $\boldsymbol{e}_1$. Действительно, если

$$\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha'\boldsymbol{e}'_2 + ... + \alpha'\boldsymbol{e}'_n,$$

то, ввиду ортогональности информационного базиса (2.69) и нормированности вектора $\boldsymbol{e}_1$

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}) = \alpha_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1) + \alpha'_2(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_2) + ... + \alpha'_n(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}'_n) = \alpha_1,$$

т.е. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}) = 0$ тогда и только тогда, если $\alpha_1 = 0$.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ принадлежит к информационному подпространству L, т.е. $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a})=0$, то и вектор $\boldsymbol{a}\varphi$ содержится в L. Действительно, ввиду симметричности информационного преобразования φ,

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}\varphi) = (\boldsymbol{e}_1\varphi, \boldsymbol{a}_1) = (\lambda_0\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}) = \lambda_0(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{a}) = \lambda_0 \cdot 0 = 0,$$

т.е. вектор $\boldsymbol{a}\varphi$ ортогонален к $\boldsymbol{e}_1$ и поэтому содержится в L. Это свойство информационного подпространства L, называемое его *инвариантностью* относительно информационного преобразования φ, позволяет считать φ, рассматриваемое лишь в применении к векторам из L, линейным информационным преобразованием этого $(n—1)$-мерного евклидово информационного пространства. Оно будет даже симметрическим информационным преобразованием информационного пространства L, так как равенство (2.65), выполняясь для любых векторов из E_n, будет выполняться, в частности, для векторов, которые лежат в L.

В силу индуктивного предположения в информационном пространстве L существует ортонормированный информационный базис, который состоит из собственных векторов информационного преобразования φ; обозначим его через $\boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$. Все эти векторы ортогональны к вектору e_1, а поэтому $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ будет искомым ортонормированным информационным базисом информационного пространства E_n, состоящим из собственных векторов информационного преобразования φ. Теорема доказана.

2.8. Приведение квадратичной формы к главным осям. Пары форм

Квадратичные формы. Пусть $\mathbf{x}=(x_1, x_{2...}, x_n)$ - вектор в n-мерном линейном информационном пространстве с действительными компонентами. Выражение вида

$$Q(\mathbf{x})=\sum_i\sum_j a_{ij}x_i x_j$$

называется *квадратичной формой.* В этом выражении без ограничения общности можем считать $a_{ij}=a_{ji}$.

Если это не так, то, выполняя преобразование

$$a_{ij}\,x_i\,x_j+a_{ji}\,x_j\,x_i=(a_{ij}+a_{ji})\,x_i\,x_j=1/2(a_{ij}+a_{ji})\,x_i\,x_j+1/2(a_{ij}+a_{ji})\,x_j\,x_i,$$

можно привести квадратичную форму к виду, когда это условие выполняется. Поэтому числа a_{ij} можно рассматривать как элементы квадратной матрицы A, которая является *вещественной и симметрической.*

Квадратическую форму удобно записывать в векторно-матричных обозначениях. Для этого перепишем выражение для $Q(\mathbf{x})$в виде

$$Q(\mathbf{x})=\sum_i x_i\sum_j a_{ij}x_j=\sum_i x_i z_i=\mathbf{x}'\mathbf{z},$$

где величины

$$z_i=\sum_j a_{ij}x_j\ ,\qquad i=1,\,2,\,\ldots,\,n$$

есть компонентами вектора $\mathbf{z}$, связанного с вектором $\mathbf{x}$ линейным преобразованием:

$$\mathbf{z}=A\mathbf{x}.$$

Таким образом, квадратичная форма $Q(\mathbf{x})$ может быть записанная в виде

$$Q(\mathbf{x})=\mathbf{x}'A\mathbf{x}.$$

Квадратичную форму $Q(\mathbf{x})$ и матрицу A называют *положительно определенными,* если выполняется условие $Q(\mathbf{x})>0$. При выполнении условия $Q(\mathbf{x})<0$ говорят об *отрицательно определенной* квадратичной форме $Q(\mathbf{x})$ и матрице A. Для нахождения условий положительной (отрицательной) определенности матрицы A введем в рассмотрение линейное информационное преобразование $\mathbf{x}=V\mathbf{y}$, где V — невырожденная матрица. Тогда

$$Q(\mathbf{x})=\mathbf{x}'A\mathbf{x}=\mathbf{y}'V'AV\mathbf{y}=Q(\mathbf{y}),$$

причем матрицей квадратичной формы $Q(\mathbf{y})$ является $V'AV$. Возьмем в качестве V диагнолизирующую матрицу. Тогда $V'AV=\wedge$, так что

$$Q(\mathbf{x})=Q(\mathbf{y})=\mathbf{y}'\wedge\mathbf{y}=\sum\lambda_u\,[y_i]^2.$$

Как видим, необходимым и достаточным условием положительной (отрицательной) определенности матрицы A является положительность (отрицательность) всех ее собственных значений λ_i.

Пример использования квадратичных форм при отыскании информации об экстремумах функций многих переменных

Применение квадратичных форм проиллюстрируем на примере задачи отыскания информации об экстремумах функций, которое имеет важное значение при решении многих прикладных задач в теории информации.

Пусть $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)$ - многомерная переменная и $f(\mathbf{u})=f(u_1,\dots,u_n)$ — функция от $\mathbf{u}$, которая определена в области $a_i \le u_i \le b_i$, $i=1, 2, \dots, n$ и которая допускает разложение в сходящийся ряд Тейлора в каждой точке $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_n)$ внутри этой области. Это разложение имеет вид:

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{c}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial c_i} \Delta u_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial c_i \, \partial c_j} \Delta u_i \, \Delta u_j + \dots;$$

где

$$\Delta u_i = u_i - c_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial u_i} \right|_{u_i = c_i}, \; i = \overline{1, n};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial c_i \, \partial c_j} = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \, \partial u_j} \right|_{u_i = c_i, \; u_j = c_j}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Как известно, экстремумы подобных функций могут достигаться внутри области определения только в стационарных точках, т.е. в точках, в которых производные df/du_i, $i=1, 2, \dots, n$ обращаются в нуль. Пусть $\mathbf{u}=\mathbf{c}$ — стационарная точка. Тогда $df/dc_i=0$, $i=1, 2, \dots, n$ и разложение функции $f(\mathbf{u})$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\mathbf{u}=\mathbf{c}$ принимает вид:

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{c}) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial c_i \, \partial c_j} \Delta u_i \, \Delta u_j + \dots \qquad (*)$$

Введем обозначения:

$$x_i = \Delta u_i = u_i - c_i;$$

$$a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial c_i \, \partial c_j}.$$

Тогда ряд (*) запишется в виде

$$f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{c}) + Q(\mathbf{x}) + \dots \qquad (**)$$

где

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j$$

представляет собой квадратичную форму $\mathbf{x}'A\mathbf{x}$ с действительной симметрической матрицей A.

Учитывая то, что при $\mathbf{u}=\mathbf{c}$ $x_i=0$, $i=1, 2, \dots, n$ из (**) видим, что в стационарной точке $\mathbf{u}=\mathbf{c}$ имеет место относительный минимум, если $Q(\mathbf{x})>0$, и относительный максимум, если $Q(\mathbf{x})<0$, т.е. $-Q(\mathbf{x})>0$. В случае, если $Q(\mathbf{x})$ вблизи стационарной точки может принимать как положительные, так и отрицательные значения, имеет место стационарная точка более сложного характера, требующая дальнейшего специального исследования.

Таким образом, мы видим, что выяснение характера стационарной точки функции многих переменных требует выяснения того, является ли положительно (отрицательно) определенной матрица A квадратичной формы $Q(\mathbf{x})$.

Приведение квадратичной формы к главным осям.

Применим последнюю теорему предыдущего раздела к доказательству следующей матричной теоремы:

Для всякой симметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу Q, которая приводит матрицу A к диагональному виду, т.е. матрица $Q^{-1}AQ$*, полученная трансформированием матрицы A матрицей Q, будет диагональной.*

В самом деле, пусть дана симметрическая матрица A порядка n. Если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n$ - некоторый ортонормированный информационный базис n-мерного евклидово информационного пространства E_n, то матрица A задает в этом информационном базисе симметрическое информационное преобразование φ. Как доказано, в E_n существует ортонормированный информационный базис $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, ..., \boldsymbol{f}_n$, который составлено из собственных векторов информационного преобразования φ; в этом информационном базисе φ задается диагональной матрицей B (см. п. 2.5). Тогда, по п. 2.4,

$$B = Q^{-1}AQ, \tag{2.70}$$

где Q — матрица перехода от информационного базиса $\boldsymbol{f}$ к информационному базису $\boldsymbol{e}$,

$$\boldsymbol{e}=Q\boldsymbol{f}. \tag{2.71}$$

Эта матрица, как матрица перехода от одного ортонормированного информационного базиса к другому такому же информационному базису, будет ортогональной - см. п. 2.7. Теорема доказана.

Так как для ортогональной матрицы Q ее обратная матрица равняется транспонированной, $Q^{-1}=Q'$, то равенство (2.70) можно переписать в виде

$$B=Q'A.$$

Известно, что именно так преобразуется симметрическая матрица A квадратичной формы, подвергнутой линейному информационному преобразованию неизвестных с матрицей Q. Учитывая то, что линейное информационное преобразование неизвестных с ортогональной матрицей является ортогональным информационным преобразованием (см. п. 2.7) и что диагональную матрицу имеет квадратичная форма, которая приведена к каноническому виду, мы на основании предыдущей теоремы получаем следующую теорему о приведении действительной квадратичной формы к главным осям:

Всякая действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *некоторым ортогональным информационным преобразованием неизвестных может быть приведена к каноническому виду.*

Хотя может существовать много различных ортогональных информационных преобразований неизвестных, которые приводят данную квадратичную форму к каноническому виду, однако сам этот канонический вид определяется однозначно:

Каково бы не было ортогональное информационное преобразование, которое приводит к каноническому виду квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *с матрицей A, коэффициентами этого канонического вида будут характеристические корни матрицы A, взятые с их кратностями.*

Пусть, в самом деле, форма f некоторым ортогональным информационным преобразованием приведена к каноническому виду

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mu_1 y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \ldots + \mu_n y_n^2.$$

Это ортогональное информационное преобразование оставляет инвариантной сумму квадратов неизвестных, а потому, если λ - новое неизвестное, то

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2 - \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Переходя к определителям этих квадратичных форм и учитывая то, что после выполнения линейного информационного преобразования определитель квадратичной формы увеличивается на квадрат определителя информационного преобразования, а квадрат определителя ортогонального информационного преобразования равняется единице (см. п. 2.7), мы приходим к равенству

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \mu_1 - \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 - \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \lambda),$$

из которого вытекает утверждение теоремы.

Этому результату можно придать также матричную формулировку:

Какова бы не была ортогональная матрица, которая приводит к диагональному виду симметрическую матрицу A, на главной диагонали полученной диагональной матрицы будут стоять характеристические корни матрицы A, взятые с их кратностями.

Практическое отыскание ортогонального информационного преобразования, приводящего квадратичную форму к главным осям. В некоторых задачах информационного характера необходимо знать не только тот канонический вид, к которому приводится действительная квадратичная форма ортогональным информационным преобразованием, но и само ортогональное информационное преобразование, которое осуществляет это приведение. Было бы затруднительно отыскивать это информационное преобразование, используя доказательство теоремы о приведении к главным осям, и мы хотим указать другой путь. Нужно лишь научиться находить ортогональную матрицу Q, которая приводит данную симметрическую матрицу A к диагональному виду, или, что то же самое, находить ее обратную матрицу Q^{-1}. Ввиду (2.71) это будет матрица перехода от информационного базиса ***e*** к информационному базису ***f***, т.е. ее строки являются координатными строками (в информационном базисе ***e***) ортонормированной системы с n собственных векторов симметрического информационного преобразования φ, определяемого матрицей A в информационном базисе ***e***. Остается найти такую систему собственных векторов.

Пусть λ_0— любой характеристический корень матрицы A и пусть его кратность равна k_0. Из п. 2.5 мы знаем, что совокупность координатных строк всех собственных векторов информационного преобразования φ, относящихся к собственному значению λ_0, совпадает с совокупностью ненулевых решений системы линейных однородных уравнений

$$(A - \lambda_0 E)X=0; \qquad (2.72)$$

симметричность матрицы A разрешает написать здесь A вместо A'. Из доказанных выше теорем существования ортогональной матрицы, которая приводит симметрическую матрицу A к диагональной и единственности этого диагонального вида вытекает, что для системы (2.72) можно найти k_0 линейно независимых решений. Такую систему решений ищем известными методами, а затем ортогонализируем и нормируем полученную систему согласно п. 2.6.

Беря в качестве λ_0 поочередно все различные характеристические корни симметрической матрицы A и учитывая то, что сумма кратностей этих корней равняется n, мы получим систему из n собственных векторов информационного преобразования φ, заданных их координатами в информационном базисе ***e***. Для доказательства того, что это будет искомая ортонормированная система собственных векторов, необходимо доказать следующую лемму:

Собственные векторы симметрического информационного преобразования φ, *относящиеся к различным собственным значениям, между собой ортогональны.*

Пусть, в самом деле,

$$\mathbf{b}\varphi = \lambda_1\mathbf{b}, \qquad \mathbf{c}\varphi = \lambda_2\mathbf{c},$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, так как

$$(\mathbf{b}\varphi,\mathbf{c}) = (\lambda_1\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}\varphi) = (\mathbf{b}, \lambda_2\mathbf{c}) = \lambda_1(\mathbf{b}, \mathbf{c})),$$

тогда из

$$(\mathbf{b}\varphi,\mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}\varphi)$$

следует

$$\lambda_1(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \lambda_2(\mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

или, ввиду $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0,$$

что и нужно было доказать.

Пары форм. Пусть дана пара действительных квадратичных форм от *n* неизвестных, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$. Существует ли такое невырожденное линейное информационное преобразование неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$, которое одновременно приводило бы обе эти формы к каноническому виду?

В общем случае ответ будет отрицателен. Рассмотрим, например, пару форм

$$f(x_1, x_2) = x^2_1, \qquad g(x_1, x_2) = x_1x_2.$$

Пусть существует невырожденное линейное информационное преобразование

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.73)$$

которое приводит обе эти формы к каноническому виду. Для того чтобы форма f могла быть приведена информационным преобразованием (2.73) к каноническому виду, один из коэффициентов c_{11}, c_{l2} должен равнять нулю, иначе вошел бы член $2c_{11}c_{12}y_1y_2$. Меняя, если нужно, нумерацию неизвестных y_1, y_2, можно положить, что $c_{12} = 0$ и поэтому $c_{11} \neq 0$. Мы получим теперь, однако, что,

$$g(x_1, x_2) = c_{11}y_1 (c_{21}y_1 + c_{22}y_2) = c_{11}c_{21}y^2_1 + c_{11}c_{22}y_1y_2.$$

Так как форма g также должна была перейти в канонический вид, то $c_{11}c_{22}=0$, т.е. $c_{22}=0$, что вместе с $c_{12}=0$ противоречит невырожденности линейного информационного преобразования (2.73).

Ситуация будет иной, если мы положим, что хотя бы одна из наших форм, например $g(x_1, x_2, ..., x_n)$, является положительно определенной. Тогда справедлива теорема:

Если f и g - пара действительных квадратичных форм от n неизвестных, причем вторая из них положительно определенная, то существует невырожденное линейное информационное преобразование, которое одновременно приводит форму g к нормальному виду, а форму f к каноническому виду.

Для доказательства теоремы выполним сначала невырожденное линейное информационное преобразование неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$,

$$X=TY,$$

приводящее положительно определенную форму g к нормальному виду,

$$g(x_1, x_2, ..., x_n)=y^2{}_1+y^2{}_2+ \ ... \ +y^2{}_n.$$

Форма f перейдет при этом в некоторую форму φ от новых неизвестных,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(y_1, y_2, ...,y_n).$$

Совершим теперь ортогональное информационное преобразование неизвестных

$y_1, y_2, ...,y_n$

$$Y=QZ,$$

которое приводит форму φ к главным осям,

$$\varphi(y_1, y_2, ...,y_n)= \lambda_1 z^2{}_1+\lambda_2 z^2{}_2+ \ ... \ +\lambda_n z^2{}_г.$$

Это информационное преобразование (см. определение в п. 2.7) переводит сумму квадратов неизвестных $y_1, y_2, ..., y_n$ в сумму квадратов неизвестных

$z_1, z_2, ..., z_n$. В результате мы получаем

$$f(x_1, x_2, ..., x_n)= \lambda_1 z^2{}_1+\lambda_2 z^2{}_2+ \ ... \ +\lambda_n z^2{}_n$$

$$g(x_1, x_2, ..., x_n)=z^2{}_1+z^2{}_2+ \ ... \ +z^2{}_n,$$

т.е. линейное информационное преобразование

$$X=(TQ)Z$$

есть искомым.

2.9. Выпуклые множества

Понятие гиперсферы. В многомерном информационном пространстве R^n можно рассматривать информационные образы, аналогичные геометрическим фигурам и телам в двух- и трехмерном информационном пространстве. Важнейшими из них есть гиперсфера, гиперплоскость и прямая.

Гиперсферой называется замкнутая поверхность, все точки которой удалены на одинаковое расстояние r от некоторой фиксированной точки **а**, т.е. удовлетворяют уравнению

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{a})=r \ . \qquad (2.74)$$

Множество точек, которые удовлетворяют условию $d(\mathbf{x}, \mathbf{a})<r$ и являющихся внутренними точками гиперсферы, называется *открытым шаром.* Множество точек, которые удовлетворяют условию $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\leq r$, называется *замкнутым шаром.*

Пример 1. В информационном пространстве R^2 уравнение гиперсферы можно записать в виде

$$d^2(\mathbf{x}, \mathbf{a})=r^2.$$

Если расстояние определять по формуле для расстояния между двумя точками x и y,

$$d_2(x, y)=\left\{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right\}^{1/2},$$

то гиперсфера превращается в окружность:

$$(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2=r^2.$$

Ограниченные и конечные множества. Множество X называется *ограниченным,* если ограничено расстояние между любыми двумя точками этого множества, т.е. если существует такое число $M,$ что для любых $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in X$ имеет место $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq M.$

Можно показать, что необходимым и достаточным условием ограниченности множества X является нахождение его в некоторой гиперсфере, т.е. существование точки a и числа r, таких, что для всякого $\mathbf{x}\in X$ имеет место $d(\mathbf{x}, \mathbf{a})\leq r.$

Множество X называется *конечным,* если оно содержит конечное число точек. Конечное множество всегда ограничено.

Открытые и замкнутые множества

Разделение множеств на открытые и замкнутые тесно связано с понятием окрестности точки множества. *Окрестностью* точки $\mathbf{x}$ в информационном просторные R^n называется открытый шар радиуса ε с центром в $\mathbf{x}$. Окрестность точки обозначается $O_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Точка $\mathbf{x}$ называется *внутренней* точкой множества $X,$ если существует окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x})$, все точки которой принадлежат $X.$

Точка $\mathbf{x}$ называется *граничной* точкой множества $X,$ если любая ее окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x})$ содержит как точки, которые принадлежат $X,$ так и точки, которые не принадлежат $X.$ Множество всех граничных точек образует *границу* множества $X.$

Множество X называется *открытым* множеством, если все его точки внутренние. Множество X называется *замкнутым* множеством, если наряду с внутренними оно содержит и все свои граничные точки.

Для объяснения введенных понятий рассмотрим в двумерном пространстве (u, v) множество $X,$ заданное неравенством

$$u^2+v^2\leq r_2.$$

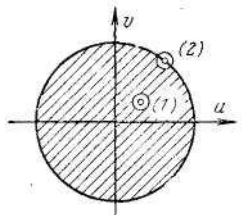


Рис. 2.5. Внутренняя (1) и граничная (2) точки множества.

Это множество представляет собой круг радиуса r с центром в начале координат, как показано на рис. 2.5.

Для любой точки $\mathbf{x}=(u, v)$ этого множества можно записать либо

$$u^2+v^2<r_2, \qquad (2.75)$$

либо

$$u^2+v^2=r_2. \qquad (2.76)$$

В первом случае можно найти такую окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}=(u, v)$, что неравенство будет выполняться для любой точки этой окрестности. Тогда $\mathbf{x}$ — внутренняя точка множества.

Если же точка $\mathbf{x}=(u, v)$ удовлетворяет равенству (2.76), то в любой окрестности $O_\varepsilon(\mathbf{x})$ существуют такие точки $\mathbf{x}_1=(u_1, v_1)$ и $\mathbf{x}_2=(u_2, v_2)$, что

$$u^2{}_1+v^2{}_1<r_2, \text{ а } u^2{}_2+v^2{}_2>r_2,$$

т.е., точки, которые как принадлежащие X, так и не принадлежащие X. В этом случае $\mathbf{x}$ — граничная точка. Само уравнение (2.76) определяет границу исходного множества.

Поскольку исходное множество X задано с помощью нестрогого неравенства $\leq$, то граница является частью множества X. Итак, множество X замкнуто. Если для задания множества X использовать строгое неравенство

$$u^2+v^2<r_2,$$

это граница уже не будет принадлежать X. В этом случае получаем открытое множество.

Гиперплоскости и информационные полупространства. Гиперплоскостями в линейном информационном пространстве R^n размерности n называются линейные информационные подпространства размерности n—1. Так, в трехмерном информационном пространстве R^3 гиперплоскостями являются плоскости, а в двумерном информационном пространстве R^2 — прямые.

Уравнение гиперплоскости $L(S)$ можно получить, задавая в линейном информационном пространстве R^n множество S, которое содержит n—1 линейно независимых точек $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}$. Согласно

$$L(S)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\ \mathbf{x}_i,\ \text{где } \alpha \text{ - любое число,}$$

любая точка гиперплоскости

$$\mathbf{x}=x_1,...,x_n\in L(S)$$

запишется в виде

$$\mathbf{x}=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\ \mathbf{x}_j \tag{2.77}$$

или в координатной форме

$$x^{(u)}=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\ x_j^{(u)},\quad i=1,2,...,n. \tag{2.78}$$

Уравнение (2.77) неудобное для описания гиперплоскости, так как в него входят произвольно выбранные точки $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}$. С другой стороны, можно показать, что эти точки определяют вектор $\mathbf{p}=(p_1,..., p_n)$, такой, что уравнение

$$\sum_{i=1}^{n}p_i x_j^{(i)}=0 \tag{2.79}$$

представляет собой уравнение $L(S)$. Подставляя координаты $x^{(i)}$ из (2.78) в (2.79), получаем:

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\ \sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\ x_j^{(u)}=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\ \sum_{i=1}^{n}p_i x_j^{(i)}=0\ ,$$

Поскольку α_j могут принимать любые вещественные значения, то равенство нулю будет иметь место только тогда, если

$$\sum_{i=1}^{n}p_i x_j^{(i)}=0\ ,\quad j=1,2,\ldots,n... \tag{2.80}$$

Система однородных уравнений (2.80) позволяет с точностью до постоянного множителя определить компоненты вектора **p**, что и подтверждает справедливость (2.79) в качестве уравнения гиперплоскости.

Левая часть уравнения (2.79) представляет собой скалярное произведение векторов **p** і **x** в линейном информационном пространстве R^n. Поэтому уравнение гиперплоскости $L(S)$ обычно записывают в виде

$$\mathbf{px}=0. \tag{2.81}$$

Данное уравнение определяет гиперплоскость, которая проходит через начало координат перпендикулярно вектору **p.**

Более общее уравнение гиперплоскости получим, если сместим начало координат в произвольную точку $\mathbf{x}_0$, что соответствует замене в (2.81) **x** на $\mathbf{x}$-$\mathbf{x_0}$. Выполняя такую замену и обозначая $\mathbf{p}\mathbf{x}_0 = c$, получаем уравнение

$$\mathbf{px} = c \tag{2.82}$$

которое представляет собой общее уравнение гиперплоскости, которая есть ортогональной вектору **p.**

Рядом с гиперплоскостью *L,* которая определяется уравнением (2.82), в линейном информационном пространстве $R^{(n)}$ имеется множество точек, определяемых условиями

$$L^+=\{\mathbf{x}|\mathbf{px}>c\};\ \overline{L}\ \{\mathbf{x}|\mathbf{px}<c\}. \tag{2.83}$$

Эти два множества называются открытыми информационными полупространствами, определяемые гиперплоскостью *L*.

Прямая и отрезок. Средневзвешенное по элементам множества

Согласно уравнению

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$$

(где вектор **x** назывется собственным вектором матрицы *A***,** а число λ – собственным значением (характеристическим числом) матрицы *A***),** уравнение

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}_1 \tag{2.84}$$

при фиксированном $\mathbf{x}_1$ и переменном λ представляет собой одномерное линейное информационное пространство, т.е. прямую, проходящую через начало координат и точку $\mathbf{x}_1$.

Уравнение прямой, которая проходит через фиксированные точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, получим из (2.84), сместив начало координат в точку $\mathbf{x}_2$, т.е. заменив **x** и $\mathbf{x}_1$ на $\mathbf{x}$-$\mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_1$—$\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{x}-\mathbf{x}_2= \lambda(\mathbf{x}_1—\mathbf{x}_2),$$

что удобней записывать в виде

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2. \tag{2.85}$$

Значения $\mathbf{x}= \mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}=\mathbf{x}_2$ получаются соответственно при λ=1 и λ =0.

Уравнение отрезка, который соединяет точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, получим из (2.85), ограничив изменение λ пределами $0\leq\lambda\leq1$.

Если обозначить $\lambda=\lambda_1$, $1-\lambda=\lambda_2$, то уравнение отрезка запишется в виде

$$\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2,\ \lambda_1,\lambda_2\geq0,\ \lambda_1+\lambda_2=0. \tag{2.86}$$

Величину **x**, определяемую из (2.86), называют *средневзвешенным* по элементам $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ с весами λ_1 и λ_2. Это название имеет простое физическое содержание. Если в точках $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ поместить грузы с весами λ_1 и λ_2, то точка **x** определит центр тяжести системы.

Понятие средневзвешенного можно распространить и на большее число точек. Будем называть средневзвешенным по элементам $\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_m$ величину **x**, определяемую соотношением

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\ \mathbf{x}_i,\quad \lambda_u\geq 0,\quad \sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1. \qquad (2.87)$$

Точка **x**, которая определяется по соотношению (2.87), называется *выпуклой комбинацией* точек x_i. Это частичный случай *линейной комбинации,* которая определяется по соотношению (2.87) без ограничений на величины λ_i.

Выпуклые множества. Пусть *S* — некоторое подмножество линейного информационного пространства R^n. Множество *S* называется выпуклым, если отрезок, который соединяет любые две точки этого множества, целиком принадлежит этому множеству. Другими словами, *S* — выпуклое множество, если для любых $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in S$ и любого $0\leq\lambda\leq 1$ справедливо

$$\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2\in S.$$

На рис. 2.6 приведены примеры выпуклых *(а-г)* и невыпуклых *(д-з)* множеств на плоскости. Примерами выпуклых множеств в многомерном информационном пространстве служат все линейное информационное пространство R^n, любое его линейное информационное подпространство (прямая, гиперплоскость), информационное полупространство, выпуклые многогранники, которыми являются выпуклые множества, все границы которых линейны (прямые, гиперплоскости).

Гиперсфера не является выпуклым множеством. Однако открытый шар и замкнутый шар являются выпуклыми множествами.

Теорема 1. Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Доказательство. Пусть **p** и **q**— произвольные точки, которые принадлежат пересечению выпуклых множеств *X* и *Y*. Соединяющий их отрезок будет принадлежать как множеству *X*, так и множеству *Y*, а значит, и их пересечению.

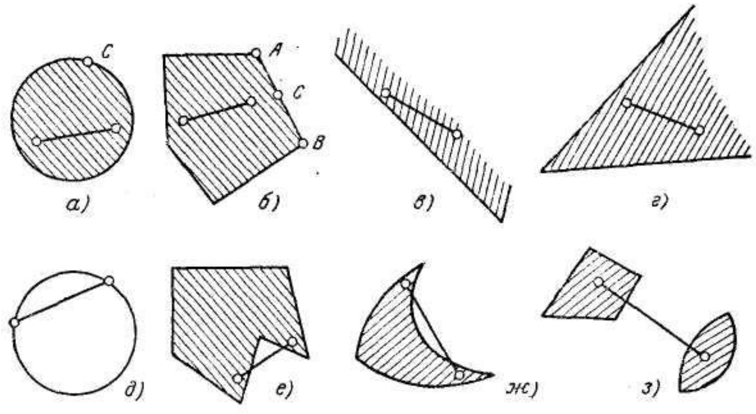


Рис. 2.6. Выпуклое и невыпуклое множества.

Выпуклая оболочка конечного множества

Пусть A={$\mathbf{a_1,...,a}_m$} - конечное множество точек в информационном пространстве R^n. Конечное множество не является выпуклым. Однако точки конечного множества A могут быть элементами каких-либо выпуклых множеств, например S_1, S_2 и т.п. В этом случае A является подмножеством пересечения выпуклых множеств $S_1 \bigcap S_2 \bigcap ...$

Выпуклой оболочкой co(A) множества A называется пересечение всех выпуклых множеств, подмножествами которых есть A. В частности, если $A \subset S_1$ и $A \subset S_2$, то

$$\text{co}(A) \subset S_1 \bigcap S_2.$$

Из данного определения следует, что выпуклая оболочка co(A) является наименьшим выпуклым множеством, содержащим A. Действительно, если бы нашлось выпуклое множество S, такое, что $A \subset S$ и $S \subseteq$ co(A), то имело бы место co$(A) \subseteq S \bigcap$ co(A), т.е. co$(A) \subseteq S$. Отсюда вытекает, что S =co(A).

Теорема 2. Выпуклая оболочка конечного множества A есть множество средневзвешенных по элементам множества A.

Пусть A={$\mathbf{a_1,..., a}_m$}— конечное множество и λ_i, i=1,2,...,n — вещественные числа, такие, что

$$\lambda_i \geq 0, \ \sum_i \lambda_i = 1. \qquad (2.88)$$

Величина

$$\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i \ \mathbf{a}_i \qquad (2.89)$$

называется средневзвешенным по элементам множества *A*. Множество *S*, элементами которой являются величины **x**, которые определены по формуле (2.88) при всевозможных λ_i в пределах ограничений (2.89), представляет собой множество средневзвешенных по элементам множества *A*. Требуется доказать, что

$$S=\mathrm{co}(A). \qquad (2.90)$$

Доказательство. Для того, чтобы множество *S* было выпуклой оболочкой множества *A*, оно должно быть, во-первых, выпуклым и, во-вторых, наименьшим выпуклым множеством, которое содержит множество *A*. Докажем, что оба эти условия выполняются.

1. Возьмем две произвольные системы весов λ_i и λ_i', определяющих две точки

$$\mathbf{x}=\sum_i \lambda_i\, \mathbf{a}_i \qquad \text{и} \qquad \mathbf{x}'=\sum_i \lambda_i'\, \mathbf{a}_i$$

из множества *S*. Возьмем произвольную точку **x**'' отрезка, соединяющего **x** и **x**':

$$\mathbf{x}''= \lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{x}'=\sum_i[\lambda\lambda_i+(1-\lambda)\lambda_i']a_i \;=\sum_i \lambda_i'' a_i \ ,$$

где

$$\lambda_i''=\lambda\lambda_i+(1-\lambda)\lambda_i' .$$

Величина λ_i'' неотрицательная, так как представляет собой средневзвешенное двух неотрицательных чисел λ_i и λ_i'. Кроме того,

$$\sum_i \lambda_i''=\lambda\sum_i \lambda_i+(1-\lambda)\sum_i \lambda_i'=1.$$

Таким образом, **x**'' есть средневзвешенное по элементам множества *A*, т.е. $\mathbf{x}''\in S$. Итак, *S* — выпуклое множество.

2. Пусть *T* — произвольное выпуклое множество, которое содержит *A*. Покажем, что оно содержит и *S*.

По условию все элементы $\mathbf{a}_i$ содержатся в *T*. Далее элемент

$$\mathbf{x}_2=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\,\mathbf{a}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\,\mathbf{a}_2$$

есть средневзвешенное $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\in T$, так что $\mathbf{x}_2\in T$. Точно так же получаем, что

$$\mathbf{x}_3=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\,\mathbf{x}_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\,\mathbf{a}_3=$$

$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\,\mathbf{a}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\,\mathbf{a}_2+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\,\mathbf{a}_3$$

есть средневзвешенное $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{a}_3 \in T$, так что $\mathbf{x}_3 \in T$. Продолжая рассмотрение этой последовательности точек, найдем, что точка

$$\mathbf{x}_m = \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_{m-1}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}\, \mathbf{x}_{m-1} + \frac{\lambda_m}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_m}\, \boldsymbol{a}_m = \sum_i \lambda_i\, \mathbf{a}_i \in S$$

также принадлежит множеству T. Таким образом, любое $\mathbf{x} \in S$ принадлежит и T, т.е. $S \subseteq T$. Но T — произвольное выпуклое множество, которое содержит A. Следовательно, S - наименьшее выпуклое множество, которое содержит A.

Понятие выпуклой оболочки легко распространяется на произвольное множество. Если X — произвольное множество точек из R^n (не обязательно выпуклое), то выпуклой оболочкой co(X) множества X называется наименьшее выпуклое множество, которое содержит X.

Разделительная и опорная гиперплоскости. Обоснование ряда результатов линейного программирования и теории игр основаны на использовании понятий разделительной и опорной гиперплоскостей.

Пусть S и T — выпуклые непересекающиеся множества. В теории выпуклых множеств доказывается существование гиперплоскости L_p, которая получила название разделительной гиперплоскости, такой, что множества S и T лежат в разных информационных полупространствах, определенных этой гиперплоскостью.

Если S — выпуклое множество, то доказывается существование гиперплоскости L_0, которую называют *опорной гиперплоскостью,* такой, что S лежит в одном из определенных ею информационных полупространств и по крайней мере одна точка из S будет принадлежать самой гиперплоскости. На рис. 2.7 приведена иллюстрация понятий разделительной и опорной гиперплоскостей.

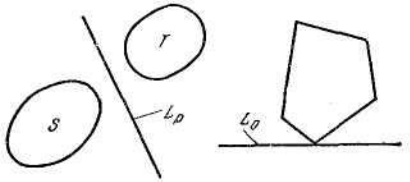


Рис. 2.7. Иллюстрация понятий разделительной и опорной гиперплоскостей.

Для описания некоторых видов выпуклых множеств используется понятие крайних точек. Точка $\mathbf{x}^*$ называется *крайней точкой* выпуклого множества S, если ни для каких $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in S$ она не может быть представлена в виде

$$\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2, \qquad 0<\lambda<1.$$

Заметим, что в этом определении λ не может принимать значений 0 и 1, что означает, что крайняя точка не может лежать внутри отрезка соединяющего любые две точки выпуклого множества, а может быть лишь крайней точкой этого отрезка.

Очевидно, что крайняя точка должна быть граничной точкой множества. Но не все граничные точки являются крайними. В выпуклом многоугольнике на рис. 2.6, *б* точки *А* и *В* крайние, а *С* нет. При искривленной границе, как, например, на рис. 2.6, *а*, любая предельная точка *С* есть крайней. На понятии крайних точек основано определение выпуклого многогранника. *Выпуклым многогранником* называется выпуклое множество, которое имеет конечное число крайних точек, являющихся вершинами многогранника.

Приведем без доказательства некоторые теоремы, которые касаются крайних точек.

Теорема 3. Каждая опорная гиперплоскость выпуклого множества *S* содержит его крайнюю точку.

Теорема 4. Выпуклое множество *S* является множеством средневзвешенных его крайних точек.

Из теоремы 4 следует, что если *S* — выпуклый многогранник, то любая его точка является средневзвешенным множеством его вершин. Сопоставляя данное утверждение с определением выпуклой оболочки конечного множества *А,* приходим к выводу, что выпуклой оболочкой конечного множества *А* является выпуклый многогранник, вершинами которого являются точки множества *А*.

2.10. Нечеткие информационные пространства

2.10.1. Проблема развития и контроля визуального мышления

Визуальные средства информации на базе компьютерной графики, которые интенсивно развиваются в настоящее время, дают основание утверждать о появлении новой дисциплины – визуальной информационной науки. Не отрицая актуальность ее становления, ее необходимости для профессионального применения, ее многочисленных достоинств и ее значимости в развитии научной культуры, необходимо объективно оценивать и ее роль в развитии информационно-пространственного фактора интеллекта или визуального мышления человека. Исследований на эту тему еще мало, чтобы делать заключения, но тенденция к снижению уровня визуального мышления специалистов заметна. С другой стороны, умение формировать и преобразовывать мысленные информационные образы играет ключевую роль почти во всех сферах деятельности человека. При этом лучшего инструмента для развитие визуального мышления, чем информационные геометрические образы, особенно это относится к конструктивной геометрии, пока не найдено. Лучшего метода контроля уровня развития визуального мышления, чем метод тестирования, тоже пока не создано. Таким образом, существует проблема создания эффективного метода развития и контроля пространственного фактора интеллекта, метода, адаптированного к современной компьютерной информационной технологии и такого, который может быть использован в автоматизированных интеллектуальных системах обучения. Для решения этой проблемы необходимо найти формальную модель визуального мышления и описать ее доступными математическими средствами. Другими словами, ставится задача найти соответствие между геометрическими информационными образами как сущностями некоторого информационного пространства и мыслимых (воображаемым) геометрических информационных образов пространства образного мышления. Сущности реального информационного пространства имеют измеряемые и контролируемые характеристики и могут быть информационно описаны аналитически, изображенны графически, преобразованны в другие и т.д. Они могут быть отнесены к ***трем классам информационных объектов*** – объекты-фигуры, объекта-условия (инцидентности, аффинние, метрические, дифференциальные и др.), объекты-преобразование и объекты-алгоритмы. Объекты образного мышления имеют принципиальное свойство исчезать при любой попытке их описания с помощью первых. Т.е. мысленные информационные образы сохраняются только в пространстве воображения. Уместно в этой связи вспомнить Я. Штейнера, который читал свои лекции слушателям в полной темноте, чтобы развить в них пространственное мышление.

Прежде чем предложить один из возможных подходов к решению этой проблемы, рассмотрим простую планиметрическую задачу. Пусть нужно ответить на следующие вопросы, не пользуясь ни аналитическими, ни конструктивными моделями:

1. Какие координаты центра круга, который проходит через точки (10, 30), (50, 10) и (60, 100)?

2. Чему равняется радиус этого круга?

3. Пересекает ли этот круг ось абсцисс? Ось ординат?

Совсем очевидно, что существует только один способ решения задачи – представить декартову систему координат и этот круг мысленно. Можно придумать еще много подобных задач, но становится очевидно, что от человека даже с очень развитым визуальным мышлением нельзя получить определенных и четких ответов. Ответ на эти и другие вопросы будут принадлежать к классу нечетких, т.е. таких: «Центр круга находится приблизительно в точке (50, 55)», «Радиус круга – около 45», «Круг, возможно, пересекает ось ординат, а ось абсцисс, скорее всего, нет» и т.п. Человек с неразвитым визуальным мышлением ответить на эти вопросы вообще не сможет. Отсюда вытекает вывод: *в информационном пространстве образного мышления человек оперирует нечеткими информационными образами*. Таким образом, мы приходим к выводу о возможностях использования нечетких геометрических информационных образов как формальную информационную модель мысленных информационных образов и информационного процесса визуального мышления. Для реализации этой возможности необходимо информационно:

- определить понятие нечеткой точки, нечеткой фигуры, нечеткого условия, нечеткого преобразования и нечеткого алгоритма;

- определить понятие сложности визуального решения задачи;

- выстроить иерархию задач по сложности;

- предложить информационный алгоритм генерации нечетких образов для каждой задачи;

- создать возможность адаптации информационного алгоритма к разным уровням визуального мышления.

Теория нечетких множеств и нечеткой логики широко используется при решении разных слабоформализованных информационных задач. Согласно теореме, доказанной Б. Коско в 1983 году, любая информационно-математическая система может быть апроксимирована системой, которая основана на нечеткой логике. Исходя из этой универсальности, в настоящее время осуществляется значительное расширение математических основ и прикладной части теории нечетких множеств. Понятие нечеткости разрешает «удвоить» информативную математику. Заменяя обычные множества нечеткими, можно каждому математическому термину поставить в соответствие нечеткий аналог. Рассматривают, например, нечеткие классификации, упорядочение, логики, теоремы, алгоритмы, правила принятие решений и т.п. информационные сущности.

Процесс развития теории нечетких множеств начался с появлением в 1965 году в журнале «Информация и управления» статьи американского ученого Лотфи А. Заде, специалиста по теории управления сложными системами, где впервые появилось понятие нечеткого множества.

В 1970-и года были развиты понятия лингвистической переменной. Э. Мамдани сформулировал основные идеи нечетких регуляторов. В 1978 г. Заде предложил вариант вычисления неопределенностей, которые опираются на неаддитивную меру возможности, т.е. на интерпретацию нечеткого множества как функции распределения возможностей. В 1979 г. он же ввел теорию приближенных соображений.

В области технологий можно отметить появление принципиально новых средств слабоструктуризованной, фрагментарной, неполной, нечеткой информации. К таким средствам можно отнести технологию информационного мониторинга сложных проблем и процессов. Использование такого рода инструментария показало их эффективность и огромный потенциал для задач бизнеса, политологии, социологии и т.п. Появился новый класс адаптивных нечетких информационных моделей. Исследованиям в этой области посвященны работы Ф. Херрери, О. Границы, Р. Янга, В.В. Круглова и др.

Однако в данное время не существует общепризнанной геометрической теории нечетких множеств: изображений нечетких точек, прямых, пространств, функций, а также способов решения метрических и позиционных задач, геометрических прикладных алгоритмов в вычислительной геометрии и т.д, т.е. тех сущностей, которые важны в теории информации. В литературе встречаются некоторые примеры изображения нечетких объектов. Так нечеткие множества можно изобразить с помощью кругов Эйлера с размытыми границами. Спадающая к краям насыщенность тона передает значение функции принадлежности - чем она больше, тем тон более насыщен.

А.И. Орлов приводит пример нечеткого аналога теоремы о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Она звучит таким образом. Пусть *АВ, ВР, СА* - приблизительно прямые линии, которые образовывают приблизительно треугольник с вершинами *А, В, С.* Пусть *L, M, N* - приблизительно середины сторон треугольника. Тогда приблизительно прямые линии – приблизительно медианы -

образовывают приблизительно треугольник, который более или менее малый в сравнении с треугольником *АВС*.

Это формулирование становится понятным только после того, как будет определено содержание слов «приблизительно» и «более или менее». Вот как можно уточнить понятие «приблизительно отрезок *АВ»:* под ним можно понимать любую кривую линию, которая проходит через точки *А, В,* такую, что расстояние (в обычном смысле) от любой точки кривой к отрезку *АВ* мало относительно длины *АВ*.

Приведенную теорему можно еще более «размыть», если сказать, что приблизительно прямые линии образовывают приблизительно треугольник, вершины которого находятся приблизительно в точках *А, В, С*.

2.10.2. Основные понятия и определения

Прежде всего остановимся на понятии нечеткости и нечеткого множества. Нечеткое множество является формализацией нечеткой информации, необходимой для построения математических моделей. В основе этого понятия лежит представление о том, что составляющие данное множество элементы, обладающие общим свойством, могут обладать этим свойством в различной степени и, следовательно, принадлежать к данному множеству с различной степенью. При таком подходе высказывания типа "такой-то элемент принадлежит данному множеству" теряют смысл, поскольку необходимо указать "насколько сильно" или в какой степени конкретный элемент удовлетворяет свойствам данного множества. Имея в виду геометрическую или конструктивную сторону информационной проблемы, целью данного раздела является изучение конструктивно-информационных свойств тех геометрическо-информационных образов, которые могут быть с некоторой степенью сопоставлены с нечеткими множествами. Учитывая тот факт, что нечеткие множества изучаются и используются в основном алгоритмическими методами, будем использовать возможность изучать их и отношения между ними на конструктивно-информационном уровне.

Не претендуя на общность утверждения, выдвинем гипотезу, что конструктивно-информационне модели упомянутых ранее систем могут быть реализованы, если будут получены геометрическо-информационные образы нечетких сущностей (объектов), нечетких соответствий между ними и нечеткие условия их определения.

В этой связи рассмотрим некоторые нечеткие геометрическо-информационные образы. Естественно, что любой нечеткий геометрическо-информационный образ можно определить как множество четких точек или как множество четких геометрических объектов такой же структуры, в определенном смысле близких к идеальному. Исключение составляет объект - нечеткая точка, которая определяется как множество точек информационного пространства, каждой из которых приписано некоторое значение функции принадлежности этому множеству. Не определяя здесь понятие нечеткого числа, можно утверждать, что нечеткая точка есть упорядоченное множество чисел (параметров), среди которых хотя бы одно является нечетким. Одним из геометрическо-информационных образов нечеткой точки может быть отсек конической или пирамидальной поверхности соответствующей размерности.

Сложнее определить геометрическо-информационный образ, соответствующий понятию нечеткой прямой. Во-первых, нечеткую прямую можно определить как линейное множество нечетких точек, зависящее от одного четко определенного параметра. Во-вторых, нечеткая прямая может быть представлена как множество четких точек, зависящее от одного нечеткого параметра. В-третьих, нечеткая прямая может быть множеством нечетких точек, линейно зависящим от одного нечеткого параметра. Все эти определения являются частными случаями. В-четвертых, нечеткая прямая есть множество четких прямых, каждой из которых приписано значение функции принадлежности данному множеству. Во всех этих случаях получаются различные геометрическо-информационные образы. Очевидно, что такие определения можно обобщить на линейные информационные пространства любой размерности, поскольку упомянутые выше системы чаще всего являются многопараметрическими.

Нечетким информационным соответствием (информационным преобразованием) назовем некоторое правило или алгоритм, который четко определенному геометрическо-информационному объекту — информационному прообразу ставит в информационное соответствие один или несколько нечетко определенных информационных образов. Если информационное соответствие определяется своими параметрами, то оно будет нечетким, если хотя бы один его параметр является нечетким числом. Если информационное соответствие определятся заданием необходимого числа информационных прообразов и образов, то оно будет нечетким, если хотя бы один из заданных информационных образов или прообразов является нечетким.

Нечеткие условия, как и четкие, можно разделить на условия полной и неполной инцидентности, аффинные условия и условия метрические. Если в самое простое условие принадлежности точки некоторому геометрическо-иинформационному объекту ввести условие нечеткости, то получится семь вариантов нечеткого условия полной инцидентности. То же самое относится к условию пересечения (неполной инцидентности), аффинным и метрическим условиям. Нечеткие условия можно определить при помощи соответствующей функции, которая принимает значение, равное единице, в случае выполнения данного условия, и значение, равное нулю, при его невыполнении.

Все это можно сформулировать в терминах теории параметризации: любой многопараметрический информационный объект будет нечетким, если хотя бы один из его параметров описывается нечетким числом.

Воспользуемся двумя известными понятиями - понятием многомерного аффинного пространства и понятием расстояния между множествами. Первое есть множество всех элементов $(a_1,..., a_n)$, называемых точками, причем все координаты $a_i \in R$, $i=1, ..., n$. Предположим, что какая-либо одна координата является нечетким числом $\tilde{a}_i$. Это означает, что нам неизвестно её точное значение, можно только сказать, что значение координаты примерно равно такому-то числу или координата принимает значение «около» такого-то числа. Другими словами, для каждого значения $a_i \in R$, $i=1, ..., n$ существует значение функции принадлежности, которая формализует нечеткие высказывания «примерно», «около» и т.п. Легко представить себе, что все координаты точки являются нечеткими. Тогда множество всех элементов $(\tilde{a}_1 ..., \tilde{a}_n)$, называемых по аналогии нечеткими точками, образует нечеткое информационное пространство.

Определение 1. Нечеткой k-мерной точкой является множество $(a_1,..., a_n)$ чисел, из которых k, $1 \le k \le n$, любых являются нечеткими.

Если $k = 0$, то такая точка является четкой. Если $k=n$, то такую точку назовем нечеткой точкой и будем обозначать $\tilde{A}$. Во всех остальных случаях нечеткую точку будем обозначать $\tilde{A}$, не указывая, если в этом нет необходимости, какие именно координаты являются нечеткими.

Определение 2. Нечетким k-мерным информационным пространством является множество всех элементов $(a_1,..., a_n)$, среди которых хотя бы один элемент является нечеткой k -мерной точкой.

Нечеткое k -мерное аффинное информационное пространство будем обозначать $\tilde{\mathbf{A}}^k$.

Предложение 1. Нечеткая k-мерная точка выделяет в k-мерном информационном пространстве нечеткое k-мерное информационное подпространство.

Доказательства не требуется, так как каждая нечеткая координата точки задается нечетким числом, для которого всегда будет определена числовая ось, множество определений и множество значений функции принадлежности. Поэтому информационное пространство, натянутое на множество нечетких осей, будет нечетким информационным пространством. Пусть будут заданы две точки

$$\tilde{A}^{p+1}\ (a_1, ..., \tilde{a}_i, \tilde{a}_{i+1}, ..., \tilde{a}_{i+p}, a_{i+p+1}, ..., a_n)$$

и

$$\tilde{B}^{q+1}\ (b_1, ..., \tilde{b}_j, \tilde{b}_{j+1}, ..., \tilde{b}_{j+q}, b_{j+q+1}, ..., b_n),$$

причем $A^p \in \tilde{\mathbf{A}}^n$, $\tilde{B}^{q+1} \in \tilde{\mathbf{A}}^n$. Тогда в n-мерном информационном пространстве эти две нечеткие точки выделят нечеткое информационное подпространство $\tilde{\mathbf{A}}^{p+q-n+2}$. Доказательства не требуется.

Определение 3. Две нечеткие точки являются тождественными или совпадают, если все их координаты - четкие и нечеткие совпадают.

Другими словами, расстояние между двумя совпадающими нечеткими точками равно нулю.

Определение 4. Две нечеткие точки являются различными, если они отличаются значением хотя бы одной - четкой или нечеткой координатой.

В классической теории множеств непустое подмножество A из универсального множества X однозначно определяется характеристическим функционалом

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

То есть подмножество A определяется как совокупность объектов, имеющих некоторое общее свойство, наличие или отсутствие которого у любого элемента множества задается информационным характеристическим функционалом.

Для нечеткого подмножества, являющегося расширением понятия множества в классическом смысле, на информационном пространстве информационных объектов $X=\{x\}$ вводится уже не информационный функционал, а информационная характеристическая функция, задающая для всех элементов степень наличия у них некоторого свойства, по которому они относятся к подмножеству A. Эта характеристическая информационноя функция традиционно носит название функции принадлежности. Функция принадлежности

μ_A: $X \rightarrow [0,1]$ ставит в соответствие каждому элементу подмножества число $\mu_A(x)$ из интервала [0, 1] и является непрерывной одномодальной функцией.

Определение 5. Нечеткой k-мерной точкой является выпуклое подмножество множества $X_1 \times ... \times X_n$, для каждой точки которого существует значение функции принадлежности. В точках, лежащих на границе подмножества функция принадлежности равна нулю. Значение функции принадлежности, равное единице, существует только в одной точке подмножества, называемой ядром нечеткой точки.

Нечеткие точки и нечеткие информационные отношения

Напомним, что фигурой называется любое множество точек. Поэтому нечеткая точка – это фигура, на основе которой можно построить все остальные нечеткие информационные образы. В этой связи дадим несколько определений.

Интервальной точкой $\overline{X}$ назовем n-плексное множество $(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)$ точек, в котором $x_i \in \overline{x}_1 = [x_{i,1}, x_{i,1}]$, $x_{i,j} \in R$.

К изображению интервальных точек имеются два естественных подхода. Первый заключается в представлении интервальной точки в виде прямоугольной области $\overline{X}_1 \times ... \times \overline{X}_n$ (прямоугольного n-плекса). Второй – в представлении интервальной точки в виде гиперсферы (сферического n-плекса). На рис. 2.8 изображены интервальные точки для случая n = 2.

Рис. 2.2. Изображения интервальных точек для n=2

Нечеткой точкой $\widetilde{X}$ назовем n-плексное множество $(\widetilde{x}_1,...,\widetilde{x}_n)$ точек, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\widetilde{X} = \{ X ; X \in X_1 \times \ldots \times X_n \},$$
$$\forall X \exists \mu_{\overline{X}}(X) \in [0,1],$$

$\mu_{\overline{X}} = 0$ для всех точек $X \in \overline{X}$ и на границе интервальной точки $\overline{X}$; $\mu_{\overline{X}} = 1$ только для одной точки области $\overline{X}$, называемой ядром. Информационное пространство, в котором наряду с четкими точками существуют интервальные и нечеткие точки, назовем n-мерным информационным континуумом. Можно принять как аксиому предложение, что любая точка информационного континуума может являться ядром некоторой нечеткой точки и что для любого заданного ядра нечеткая точка единственная.

К изображению нечетких точек имеются тоже два подхода. Учитывая, что функция принадлежности нечеткой точке имеет П-образную (колоколообразную) форму, которая в простейшем виде может быть треугольной, первый подход заключается в представлении нечеткой точки в виде носителя – прямоугольной пирамиды с основанием $X_1 \times \ldots \times X_n$ и единичной высоты. Второй – в представлении нечеткой точки в виде конуса единичной высоты с основанием (носителем) в виде гиперсферы (рис. 2.9).

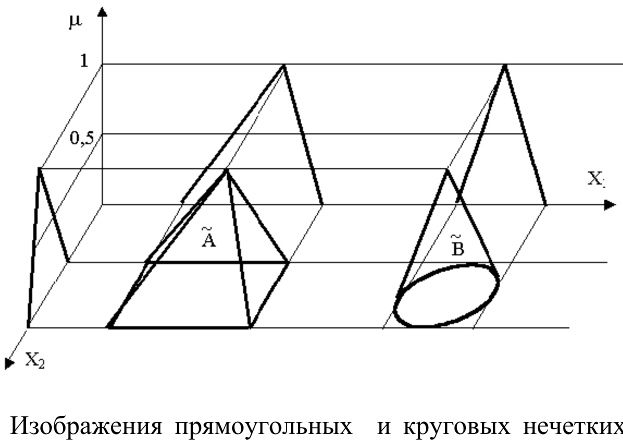


Рис. 2.9. Изображения прямоугольных и круговых нечетких точек двумерного континуума

Важным свойством нечеткой точки, отличающим её от любого другого выпуклого подмножества, является возможность описания её при помощи альфа-уровней. Каждому альфа-уровню соответствует постоянное значение функции принадлежности. Каждый альфа-уровень есть тоже выпуклое подмножество. Нулевой альфа-уровень совпадает с границей нечеткой точки, а единичный – с ядром. Итак, нечеткая точка есть естественная формализованная модель нечетких лингвистических понятий «около» или «примерно». Для любых двух точек континуума можно постулировать наличие двух видов отношений: четкого и нечеткого $R = \{=,\neq\}, \tilde{R} = \{=,\neq,\approx\}$.

То есть

$$\forall A, \forall B : (x_a = x_b \wedge y_a = y_b) \Leftrightarrow A = B$$
$$\forall A, \forall B : (x_a \neq x_b \vee y_a \neq y_b) \Leftrightarrow A \neq B$$
$$\forall A, \forall B\ \exists \tilde{A}, \exists \tilde{B} : (A \in \tilde{B} \vee B \in \tilde{A}) \Leftrightarrow A \approx B$$
$$\forall \tilde{A}, \forall \tilde{B}, \forall X : (\mu_{\tilde{A}}(X) = \mu_{\tilde{B}}(X) \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$$
$$\forall \tilde{A}, \forall \tilde{B}, \forall X : (\mu_{\tilde{A}}(X) \neq \mu_{\tilde{B}}(X) \Leftrightarrow \tilde{A} \neq \tilde{B}$$

Для отношения $A \cong B$ можно определить функцию принадлежности таким образом

$$\mu_{A \approx B} = min\ \{\mu_{\tilde{A}}(B), \mu_{\tilde{B}}(A)\}.$$

Отношение $\tilde{A} \cong \tilde{B}$ рассматривать не будем, так как оно есть нечетким в квадрате.

Отношение $\tilde{A} \neq \tilde{B}$ порождает новый вопрос: в какой степени эти две нечеткие точки различны? Степень их различия обозначим символом δ. Тогда

$$\delta = \begin{cases} 0 : \forall X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(X) = \mu_{\tilde{B}}(X) \\ ]0,1[: \exists X \in A, \mu_{\tilde{B}}(X) \neq 0 \\ 1 : \forall X \in \tilde{A}, \forall Y \in \tilde{B} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(Y) = \mu_{\tilde{B}}(X) = 0. \end{cases}$$

Степень их совпадения в этом случае равна 1-δ. Естественно, что любой нечеткий геометрическо-информационный образ можно определить как множество четких точек или как множество четких геометрическо-информационных объектов такой же структуры, в определенном смысле близких к идеальному. Исключение составляет информационный объект – нечеткая точка, которая определяется как множество точек информационного пространства, каждой из которых приписано некоторое значение функции принадлежности этому множеству. Не определяя здесь понятие нечеткого числа, можно утверждать, что нечеткая точка есть упорядоченное множество чисел (параметров), среди которых хотя бы одно является нечетким.

2.10.3. Нечеткие прямые и отношения

Предположим, что задано две нечеткие точки $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$. Они должны определить нечеткое множество, которое можно назвать нечетким отрезком. В общем случае две нечеткие точки определяют два нечетких отрезка. Первый выходит как множество всех точек, которые принадлежат выпуклой оболочке, натянутой на заданные нечеткие точки.

Определение 6. Нечетким отрезком называется множество всех четких отрезков, концы которых с некоторой степенью принадлежат заданным нечетким точкам:

$$\{[AB] \mid A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B}, 0 \le \mu_{\widetilde{A}}(A) \le 1, 0 \le \mu_{\widetilde{B}}(B) \le 1\}.$$

Пусть для любых двух точек значения $\mu_{\widetilde{A}}(A), \mu_{\widetilde{B}}(B)$ известны. Тогда значение функции принадлежности четкого отрезка нечеткому можно определить по формуле

$$\mu_{[\widetilde{A}\widetilde{B}]}([AB]) = \min\{\mu_{\widetilde{A}}(A), \mu_{\widetilde{B}}(B)\}.$$

Определение 7. Носителем нечеткого отрезка является четкое подмножество информационных пространств, элементы которого имеют ненулевые степени принадлежности:

$$\sup\ [\widetilde{A}\widetilde{B}] = \left\{[AB] \middle| \mu_{[\widetilde{A}\widetilde{B}]}[AB] > 0\right\}.$$

Границей носителя нечеткого отрезка есть выпуклая оболочка множества $\widetilde{A} \cup \widetilde{B}$.

Определение 8. Ядром нечеткого отрезка является четкое подмножество информационного пространства, элементы которого имеют степени принадлежности равные единицы:

$$\mathrm{core}\ [\widetilde{A}\widetilde{B}] = \left\{[AB] \middle| \mu_{[\widetilde{A}\widetilde{B}]}[AB] = 1\right\}.$$

Т.е. ядром нечеткого отрезка является четкий отрезок, который является выпуклой оболочкой двух точек - ядер соответствующих нечетких точек.

Рассмотрим вопрос о том, какими могут быть нечеткие отрезки. Это зависит от того, какими информационными преобразованиями *f* информационного пространства нечеткая точка $\widetilde{A}$ может быть преобразована в нечеткую точку $\widetilde{B}$. Пусть $\widetilde{B} = f(\widetilde{A})$. Тогда две нечеткие точки $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$ могут быть:

а) конгруэнтными, которые связаны параллельным переносом;

б) гомотетическими, которые связаны гомотетией;

в) проективными;

г) общего вида, связанные взаимно-однозначными нелинейными информационными преобразованиями.

Для первых трех случаев будем считать обязательным выполнение условия:

$$\forall \left(A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B}\right) \mu_{\widetilde{A}}(A) = \mu_{\widetilde{B}}(B), \text{ если } B = f(A).$$

Конгруэнтные нечеткие точки связаны соотношениями

$$\widetilde{b}_i = \widetilde{a}_i + t_i, i = \overline{1, n}.$$

Здесь $\widetilde{a}_i$, $\widetilde{b}_i$ - проекции носителя на соответствующую ось координат.

Гомотетические нечеткие точки связаны соотношениями

$$\widetilde{b}_i = k_i \cdot \widetilde{a}_i + t_i, i = \overline{1, n}.$$

Проективные нечеткие точки связаны соотношениями

$$\widetilde{b}_i = \frac{k_{1,i} \cdot \widetilde{a}_i + t_{1,i}}{k_{2,i} \cdot \widetilde{a}_i + t_{2,i}}, i = \overline{1, n}.$$

Поэтому нечеткие отрезки могут быть отрезками с конгруэнтными концами, отрезками с гомотетическими концами, отрезками с проективными концами и отрезками общего вида. Кроме этих отрезков учтем нечеткий отрезок, у которого один конец есть четкая точка. Во всех случаях нечеткий отрезок есть однопараметрическое линейное множество нечетких точек, которое обладает альфами-уровнями - выпуклыми подмножествами множества нечетких точек.

Введем теперь в информационный континуум четкую прямую *a*. Возникают информационные отношения принадлежности или инцидентности:

$$A \in a, A \notin a, A \widetilde{\in} a, a \supset \widetilde{A}.$$

Если первые два понятны, то вторые два требуют объяснения. Так

$$\forall A, \forall a, \exists \tilde{A} : (\exists X \in \tilde{A}, X \in a) \Leftrightarrow (\tilde{A} \bigcap a \neq 0) \Leftrightarrow A \,\tilde{\in}\, a,$$

$$(A \,\tilde{\in}\, a) \equiv (a \supset \tilde{A}).$$

Степень принадлежности

$$\mu_{\tilde{A}}(A \,\tilde{\in}\, a) = max \, \mu_{\tilde{A}}(X \in a).$$

Определим нечеткую прямую. Пусть дано две нечеткие точки $\tilde{A}, \tilde{B}$. Тогда нечеткая прямая есть множество всех точек, которые приблизительно линейно зависят от несовпадающих точек $X \in \tilde{A}, Y \in \tilde{B}$. Другое определение нечеткой прямой может быть следующее.

Нечеткая прямая есть множество всех прямых, которые проходят через данные нечеткие точки.

Исследование свойств нечеткой прямой заняло бы много места, поэтому ограничимся следующими утверждениями:

1) функция принадлежности для нечеткой прямой может быть представлена в виде альфа-уровней;

2) функция принадлежности есть кусочно-квадратичная, если функции принадлежности образующих точек являются кусочно-линейными;

3) ядро нечеткой прямой есть единственная четкая прямая, которая инцидентна ядрам образующих ее точек;

4) граница нечеткой прямой определяется четырьмя опорными прямыми образующих ее точек.

Нечеткая прямая общего вида изображена на рис. 2.10.

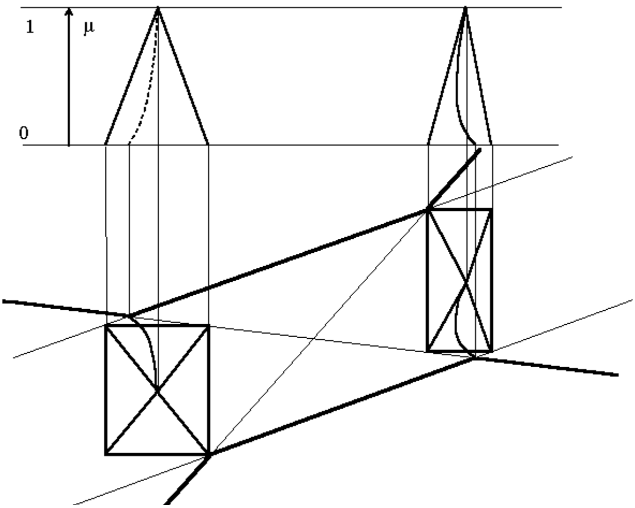


Рис. 2.10. Нечеткая прямая общего вида

Рассмотрим следующие информационные отношения:

$$A \in \tilde{a}, A \notin \tilde{a}, \tilde{A} \subset \tilde{a}, b \subset \tilde{a}, b \not\subset \tilde{a}, b \cong a, \tilde{b} = \tilde{a}, \tilde{b} \subset \tilde{a}.$$

Очевидно, что

$$\forall A, \forall \tilde{a} : \mu_{\tilde{a}}(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in \tilde{a},$$

$$\forall A, \forall \tilde{a} : \mu_{\tilde{a}}(A) = 0 \Leftrightarrow A \notin \tilde{a}.$$

Однако

$$\forall A, \forall \tilde{a}, \forall X : \mu_{\tilde{A}}(X) > 0, \mu_{\tilde{A}}(X) \leq \mu_{\tilde{a}}(X) \Leftrightarrow \tilde{A} \subset \tilde{a},$$

$$\forall A, \forall \tilde{a}, \forall X : \mu_{\tilde{A}}(X) \neq \mu_{\tilde{a}}(X) \Leftrightarrow \tilde{A} \not\subset \tilde{a}.$$

Что касается информационных отношений четких и нечетких прямых, то

$$\forall \tilde{a}, \forall b, \forall X \in b : \mu_{\tilde{a}}(X) > 0 \Leftrightarrow b \subset \tilde{a},$$

$$\forall \tilde{a}, \forall b : \exists Y \in b \wedge \mu_{\tilde{a}}(Y) = 0 \Leftrightarrow b \not\subset \tilde{a}.$$

Нечеткое информационное отношение равенства четких прямых («приблизительно совпадают») определим так:

$$\forall a, \forall b, \forall X \in b : \exists \widetilde{X} \supset X, \exists Y \in a, \mu_{\widetilde{X}}(Y) > 0 \Leftrightarrow a \approx b.$$

И, в конце концов,

$$\forall \widetilde{a}, \forall \widetilde{b}, \forall X : \mu_{\widetilde{b}}(X) \leq \mu_{\widetilde{a}}(X) \Leftrightarrow \widetilde{b} \subset \widetilde{a},$$
$$\forall \widetilde{a}, \forall \widetilde{b}, \forall X : \mu_{\widetilde{b}}(X) = \mu_{\widetilde{a}}(X) \Leftrightarrow \widetilde{b} = \widetilde{a}.$$

Рассмотрим формализацию понятий «возле», «приблизительно» и других, которые имеют такое же содержание. Интуитивно понятно, что аффинное информационное пространство есть как бы удвоенным, поскольку в нем на равных правах присутствуют четкие и нечеткие точки. Не принимая во внимание конкретный вид функции принадлежности для нечетких точек, учтем только, что для данного информационного универсуума X_i функции принадлежности для каждой точки должны быть однотипными. Для разных информационных универсуумов функции принадлежности могут быть разными. Охарактеризуем каждую функцию принадлежности значением в ядре нечеткой точки и значениями нижней и верхней границы носителя нечеткой точки:

$$\widetilde{A}_i \in X_i, \widetilde{A}_i = \left\{ \text{core}\, \widetilde{A}_i, \left| \text{core}\, \widetilde{A}_i - \sup_- \widetilde{A}_i \right|, \left| \sup_+ \widetilde{A}_i - \text{core}\, \widetilde{A}_i \right| \right\}.$$

Другими словами, любая нечеткая точка в первом приближении считается точкой *(R — L)*-типа. Правая *R* и левая *L* функции - это невозрастающие функции на множестве неотрицательных вещественных чисел. В простейшем случае они могут быть:

1) постоянными на всем информационном универсууме X_i ;
2) линейными;
3) квадратичными (параболическими).

Какими они есть в каждом конкретном случае, решают эксперты. Например, если сравнить понятие «возле единицы» и «около 10^6», которое принадлежат одному информационному универсууму, то понятно, что эти понятия не равны. Действительно, первое характеризуется нечетким числом {1, 0.1, 0.1}, а второе — нечетким числом {10, 5×10, 5×10}. Промежуточные понятия могут подчиняться линейной или квадратичной зависимости. Использовать зависимости более высоких степеней теоретически можно, а практически - нецелесообразно, поскольку тяжело представить нечеткое понятие, у которого правая и левая функции в середине диапазона принимали бы большие значения, чем на концах.

В случае множества независимых информационных универсуумов такие зависимости строятся по каждому информационному универсууму. В случае, когда понятие «возле» строится на множестве взаимно зависимых информационных универсуумов, левые и правые функции каждой нечеткой точки есть функции с множеством аргументов.

Предположим, что рассматривается множество таких точек на области параметров, которая ограничена полиедром. Представим модель искомого понятия как информационного образа полиедров в изопараметрических соответствиях. Любая точка, которая характеризует понятие «возле», может быть представленна векторной функцией $\bar{r} = \bar{r}(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n,t)$, где сумма $\bar{x}_i$ равна единице. При $t=const$ будет получено множество точек изопараметрического гиперпересечения. Информационные образы полиедров представляют собой отсечения криволинейной $(n—2)$ поверхности, которые обладают такими же топологическими свойствами, как и отсечение $(n — 2)$-плоскости. Но в законе их образования принимают участие криволинейные симплексы. В частности, можно предположить, что вершины информационного образа и информационного прообраза совпадают. Криволинейный $(n — k — 1)$-симплекс можно считать образующим, а криволинейные $(k — 1)$-симплексы - направляющими, причем вершины первого описывают вторые. Справедливым будет и обратное утверждение.

Построение информационного образа опишем в простейшем варианте. Во-первых, предположим, что криволинейные $(n — k — 1)$-симплексы построенны и имеют вид

$$\bar{r}_i(0, ..., 0, \bar{u}_i, 0, ..., 0, \bar{u}_{k+1}, ..., \bar{u}_n).$$

Криволинейные $(k— 1)$-симплексы так же построенны в виде

$$\bar{r}_j(\bar{u}_1, ..., \bar{u}_k, 0, ..., 0, \bar{u}_j, 0, ..., 0).$$

Во-вторых, предположим, что закон образования линейный. Тогда информационный образ можно представить как сумму $R_1 + R_2 — R_3$, где R_1-$(n$-$2)$-мерная поверхность с образующими, которые являются линейными $(n — k — 1)$-симплексами, и направляющими $\bar{r}_i$; R_2-$(n—2)$-мерная криволинейная поверхность с образующими, которые являются линейными *(k* — 1)-симплексамы, и направляющими $\overline{r_i}$; R_3 - отсечение *(n* — 2) -плоскости.

Это означает, что

$$R_1 = \sum_{j=k+1}^{n} u_j \cdot r_j, R_2 = \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot r_i,$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{k} u_i (\sum_{j=k+1}^{n-k} u_j \cdot r(0,...,0,u_i,0,...,0,u_j,0,...,0))$$

Обобщение в направлении осложнения закона образования очевидно.

$$R_1 = \sum_{j=k+1}^{n} f_j(u_{k+1},..., u_n) \cdot r_j,$$

$$R_2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(u_1,..., u_k) \cdot r_i,$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{k} f_i(u_1,..., u_k)(\sum_{j=k+1}^{n-k} f_j(u_{k+1},..., u_n) \cdot r),$$

где

$$f_i(\overline{u}_1, ..., \overline{u}_k) = 1$$

при

$$\overline{u}_i = 1, \ f_i(\overline{u}_1, ..., \overline{u}_k) = 0$$

при

$$\overline{u}_i = 0, \ f_j(\overline{u}_{k+1}, ..., \overline{u}_n) = 1$$

при

$$\overline{u}_j = 1, \ f_j(\overline{u}_{k+1}, ..., \overline{u}_n) = 0$$

при

$$\overline{u}_j = 0.$$

Между двумя симплексамы - линейным и нелинейным всегда существует некоторое симплициальное соответствие, которое переводит каждую вершину одного в соответствующую вершину другого. Построение такого соответствия осуществляется просто и поэтому здесь достаточно учесть его существование. Соответствие между всеми точками информационного пространства, ограниченное линейным симплексом, и всеми точками информационного пространства, ограниченное нелинейным симплексом, есть изопараметрическим, взаимно однозначным для данной области информационного пространства и нелинейным. Его построение основывается на следующем предложении.

Изопараметрическое отображение точек линейного n-симплекса на точки нелинейного n-симплекса без учета закона образования осуществляется векторными функциями вида

$$r = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \left(\sum_{i=1}^{\binom{n+1}{n-k+1}} r_i^{(n-j)} \right),$$

где r есть вектор-функция точек нелинейного симплекса, которые принадлежат $(n — j)$-мерной нелинейной грани.

Доказательство основывается на том факте, что вектор любой точки, которая принадлежит $(n — j)$-мерной нелинейной грани, должен входить в r только один раз. При этом r_i можно не учитывать, так как конкретный вид вектор-функции r_i не играет никакой роли. Поэтому доказательство будет корректным, даже если r_i описывает $(n — j)$-плоскость. Пусть n-симплекс имеет $n + 1$ вершин, а $(n — j)$-плоскость определяется $n — j + 1$ вершиной. Разность между ними равна j точкам. Очевидно, что ответ на вопрос сколько раз $(n — j)$-плоскость будет учтена в r равносильна ответу на вопрос сколько плоскостей, размерности большей и равной $n — j$, будет определяться $(n — j)$-плоскостью и вершинами j, которые остались. Легко показать, что гиперплоскость будет определяться $j — 1$ точками и $(n — j)$ - плоскостью, $(n — 2)$-плоскость будет определяться $j — 2$ точками и $(n — j)$-плоскостью и так далее. Итак, искомое число будет результатом суммы

$$(-1)^{a+1} \sum_{a=1}^{j} \binom{j}{j-a},$$

которая равняется единице при любых значениях j.

Определение 9. Нечеткая прямая есть множество таких четких отрезков, которые приблизительно принадлежат некоторой прямой, и таких, что конец каждых предыдущих и начало следующего образцово совпадают.

Определение 10. Беспрерывное множество нечетких точек, для которой существует такая четкая прямая, каждая точка которой принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этого множества, называется нечеткой прямой.

Это определение можно распространить на любую нечеткую плоскую фигуру. Например, таким образом.

Определение 11. Нечеткой плоской фигурой (квадратом, прямоугольником, треугольником, окружностью и т.д.) называется беспрерывное множество нечетких точек, для которой существует такая четкая фигура, каждая точка которой принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этого множества.

Теперь понятно, как на основе этого определения сформулировать понятие нечеткого тетраэдра, нечеткого k-симплекса, нечеткого полиэдра и политопа и др.

Определение 12. Нечетким k-симплексом называется беспрерывное множество нечетких точек, для которого существует такой k-симплекс, каждая точка которого принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этого множества.

Это определение можно обобщить на k -мерную нечеткую плоскость.

Определение 13. Нечеткой k-мерной плоскостью называется беспрерывное множество нечетких точек, для которого существует такая четкая k-плоскость, каждая точка которой принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этого множества.

Определение 14. Нечеткой k-мерной поверхностью называется беспрерывное множество нечетких точек, для которого существует такая четкая k-поверхность, каждая точка которой принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этого множества.

2.10.4. Основные условия

Рассмотрим сначала нечеткие условия принадлежности.

Точка информационного пространства принадлежит данной нечеткой точке, если функция принадлежности в ней, которая определена относительно данной нечеткой точки, не равна нулю. Точка C принадлежит нечеткому отрезку [$\tilde{A}\tilde{B}$], если $\mu_{[\tilde{A}\tilde{B}]}(C) \neq 0$.

Можно утверждать, что $C \in$ core [$\tilde{A}\tilde{B}$] .

Определение 15. Две и больше точки информационного пространства приблизительно совпадают, если они принадлежат одной и той же нечеткой точке.

Другими словами, две и больше точки информационного пространства приблизительно совпадают, если обнаружится такая нечеткая точка, относительно которой функции принадлежности всех данных точек не равны нулю.

Рассмотрим несколько задач.

Пусть в данном информационном пространстве формализовано понятия «возле», т.е. в любом месте информационного пространства может быть построена нечеткая точка $\widetilde{A}$. Это означает, что определен носитель нечеткой точки и функции принадлежности. Ядром может быть любая точка информационного пространства. Пусть задано множество B_1, B_2,..., B_m точек информационного пространства - тьма точек, для которой известно, что они приблизительно совпадают. Нужно определить степень их совпадения.

Поскольку они приблизительно совпадают, то все они должны принадлежать заданной нечеткой точке $\widetilde{A}$. Однако таких нечетких точек существует беспрерывное множество, размерность которого совпадает с размерностью заданного информационного пространства. Шевелением ядра нечеткой точки $\widetilde{A}$ можно найти такое ее положение, при котором будет выполнено условие

$$\min\{\mu_{\widetilde{A}}(B_i)\} \to \max, i = \overline{1, m}.$$

После этого понятие «приблизительно совпадают» для заданных точек B_1,B_2,...,B_m может быть выраженно числом - значением функции принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}\left(\{B_1, B_2, ..., B_m\} \subset \widetilde{A}\right) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_{\widetilde{A}}(B_i).$$

Другая задача. Пусть задано множество точек B_1, B_2,..., B_m информационного пространства, для которых неизвестно, что они приблизительно совпадают. Пусть в информационном пространстве определенна нечеткая точка. Нужно определить те точки множества, которые приблизительно совпадают и степень их совпадения.

Шевелением ядра нечеткой точки добиваемся выполнения двух условий:
число точек $s \to \max$ при

$$1 \le s \le m, \{B_1, B_2, ..., B_s\} \subset \widetilde{A},$$

$$\min\{\mu_{\widetilde{A}}(B_i)\} \to \max, i = \overline{1, s}.$$

После этого понятие «приблизительно совпадают» может быть выражено значениям функции принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}}\left(\{B_1, B_2, ..., B_s\} \subset \widetilde{A}\right) = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\mu_{\widetilde{A}}(B_i).$$

В дальнейшем слова «приблизительно совпадают», «приблизительно принадлежит» и т.п. будем опускать и пользоваться просто терминами «принадлежит» и другими, помня о том, что имеется в виду нечеткая принадлежность.

Определение 16. Точка принадлежит нечеткой прямой, если она принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этой прямой.

Может произойти так, что точка будет принадлежать сразу нескольким нечетким точкам данной нечеткой прямой. Выбор значения функции принадлежности точки прямой по условиям максимума из функций принадлежности этим точкам будет неверный. Тогда выбрав две ближайшие нечеткие точки из тех, которым принадлежит данная точка, и, учитывая то, что они образовывают нечеткий отрезок, значение функции принадлежности прямой определяется по значению функции принадлежности этому отрезку. Это согласовывается с определением 16, поскольку на нечетком отрезке всегда найдется такая нечеткая точка, которой и будет принадлежать данная точка.

Определение 17. Точка принадлежит нечеткой k-плоскости, если она принадлежит какой-нибудь нечеткой точке этой k -плоскости.

Чтобы определить значение функции принадлежности в этом случае, необходимо из множества нечетких точек, которые образовывают нечеткую k -плоскость, выделить k ближайших и найти функцию принадлежности данной точки относительно k-мерного отсяения данной нечеткой k-плоскости.

Определение 18. Нечеткая k -плоскость принадлежит нечеткой m -плоскости, $k<m,$ если каждая нечеткая точка k -плоскости принадлежит нечеткой m -плоскости.

Другими словами, если в нечеткой k -плоскости обнаружится такая четкая k -плоскость, которая будет принадлежать некоторой четкой m -плоскости, которая принадлежит нечеткой m-плоскости, то условие принадлежности будет выполнено. Естественно, значение функции принадлежности не будет равно единицы.

Напомним, что в каждой точке информационного пространства понятие «возле» определено единым образом. Поэтому, если ядра нечетких информационных подпространств взаимно принадлежат друг другу, тот и сами информационные подпространства принадлежат друг другу.

Рассмотрим еще несколько задач.

Пусть на нечеткой плоскости $\tilde{A}^2$ задано k нечетких точек $\tilde{A}_i$,

$i =\overline{1,k}$. Найти информационный образ - нечеткую прямую или нечеткую конику, которые определяют эти точки. Найти значение функции принадлежности информационного образа заданному нечетким точкам.

Напомним, что любые две несовпадающие нечеткие точки задают множество отрезков или нечеткий отрезок. В этом множестве только у одного отрезка значение функции принадлежности будет равно единице, а именно у того, который задан ядрами нечетких точек. Три и более нечеткие точки могут не определять прямую, если они заданы в довольно общем положении. Но могут и определять. Критерием этого могут служить следующие правила.

Предположим, что все заданные нечеткие точки упорядоченны по возрастанию какой-нибудь координаты их ядер. Пусть первая точка имеет минимальное значение этой координаты, а *k*-я точка - максимальное. Тогда, если все промежуточные нечеткие точки с той или другой, но не нулевой, степенью принадлежности относятся к нечеткому отрезку, концами которого есть первая и *k*-я нечеткие точки, то все нечеткие точки могут принадлежать нечеткой прямой. Другими словами, может существовать такая четкая прямая, относительно которой все нечеткие точки имеют ненулевые степени принадлежности.

Обозначим через ω_i границу нечеткой точки $\tilde{A}_i$ в информационном пространстве $\tilde{\mathbf{A}}^2$. Обозначим черезех ext $\omega_i(\tilde{A}_1\tilde{A}_k)$ внешнюю границу нечеткой точки $\tilde{A}_i$ относительно нечеткого отрезка $\tilde{A}_1\tilde{A}_k$, а int $\omega_i(\tilde{A}_1\tilde{A}_k)$ — внутреннюю границу нечеткой точки $\tilde{A}_i$ относительно нечеткого отрезка $(\tilde{A}_1\tilde{A}_k)$. Если среди отрезков

$$A_1A_k,\ A_1 \in \text{ext}\ \omega_1(\tilde{A}_1\tilde{A}_k),\ A_k \in \text{ext}\ \omega_k(\tilde{A}_1\tilde{A}_k)$$

обнаружится такой отрезок, относительно которого все другие нечеткие точки будут иметь ненулевую степень принадлежности, то этот отрезок определит искомую прямую.

Естественно, что такие четкие прямые образовывают множество или нечеткую прямую (рис. 2.11).

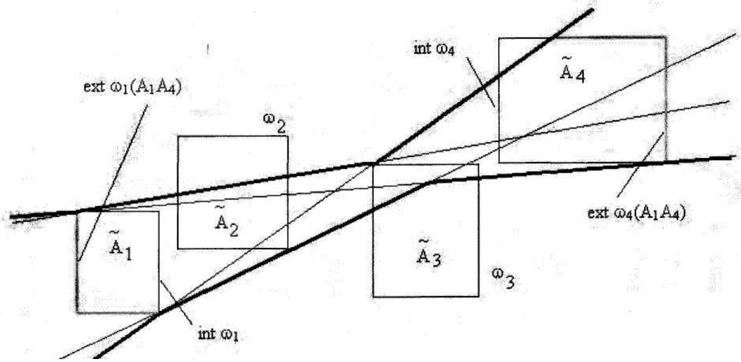


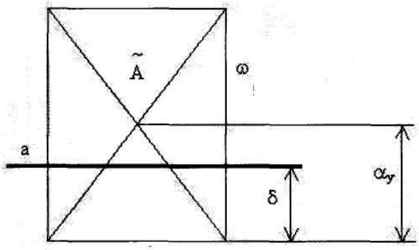
Рис. 2.11. Нечеткая прямая, которая определена четырьмя нечеткими точками

Возникает задача построения такой прямой, которая имеет максимальное значение функции принадлежности данному множеству нечетких точек. Прежде чем привести алгоритм решения, опишем две вспомогательных задачи.

Первая. Дана нечеткая точка $\widetilde{A} \in \tilde{\mathbf{A}}^2$ и четкая прямая $a \subset \tilde{\mathbf{A}}^2$. Если функция их взаимной принадлежности не равна нулю и не равна единице, найти ее значение. Для решения необходимо обусловить конкретный вид нечеткой точки. Пусть, например, нечеткая точка будет *(R — L)* -типа. Напомним, что нечеткая точка будет точкой *(R — L)* -типа, если все ее координаты будут нечеткими числами *(R — L)*-типа. Пусть $a \cap \widetilde{A} \neq \varnothing$. Тогда значение функции взаимной принадлежности определяется по формуле

$$\mu_{\tilde{A}^2}(\widetilde{A} \subset a) = \frac{\delta}{\alpha_y},$$

в которой вместо α_y может быть β_y, α_x, β_x в зависимости от расположения прямой и точки (рис. 2.12).



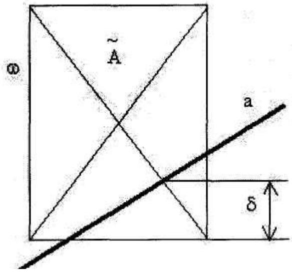


Рис. 2.12. Определение степени принадлежности нечеткой точки и прямой

Вторая. Дано три нечетких точки

$$\tilde{A} \in \tilde{\mathrm{A}}^2,\ \tilde{B} \in \tilde{\mathrm{A}}^2,\ \tilde{C} \in \tilde{\mathrm{A}}^2$$

и прямая $a \subset\ \tilde{\mathbf{A}}^2$. Функции взаимной принадлежности трех точек прямой не равны нулю и не равны единице, поскольку точки заданы в общем положении. Найти такое положение прямой, при котором

$$\mu_{\tilde{\mathrm{A}}^2}(\tilde{A} \subset a) = \mu_{\tilde{\mathrm{A}}^2}(\tilde{B} \subset a) = \mu_{\tilde{\mathrm{A}}^2}(\tilde{C} \subset a) = \mu_{\tilde{\mathrm{A}}^2}(\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\} \subset a).$$

Задача имеет точное решение. Алгоритм может быть следующий.

1. Анализ расположения точек $\tilde{A} \in \tilde{\mathbf{A}}^2$ и $\tilde{B} \in \tilde{\mathbf{A}}^2$. Смысл здесь заключается в следующем. Две нечеткие точки (для простоты приблизительно *(R — L)* -типа) в просторные $\tilde{\mathbf{A}}^2 \times \mu$ имеют по четыре ребра каждая:

$$\lfloor A(\alpha_x, \alpha_y)_A \rfloor, \lfloor A(\alpha_x, \beta_y)_A \rfloor, \lfloor A(\beta_x, \alpha_y)_A \rfloor, \lfloor A(\beta_x, \beta_y)_A \rfloor,$$

$$[B(\alpha_x, \alpha_y)_B], [B(\alpha_x, \beta_y)_B], [B(\beta_x, \alpha_y)_B], [B(\beta_x, \beta_y)_B].$$

Вместо того, чтобы учитывать все шестнадцать пар ребер, можно исключить по два ребра из каждой точки и рассматривать только четыре пары. Это можно сделать разными способами, которые не будем описывать. В результате будут получены четыре нечетких отрезка, которые определят четыре нечетких прямых.

2. Определяются точки пересечения каждой из этих прямых с аналогичными ребрами непарной точки $\tilde{C} \in \tilde{\mathbf{A}}^2$.

3. Из тех точек пересечения, которые находятся в информационном пространстве $\tilde{\mathbf{A}}^2 \times \mu$, выбирается точка с максимальным значением функции принадлежности. Поскольку все нечеткие прямые, которые принимают участие в расчете, представляют собой множество прямых

уровня в информационном пространстве $\tilde{\mathbf{A}}^2 \times \mu$, то найденное максимальное значение функции принадлежности будет одинаковым для трех заданных точек.

Теперь возвратимся к первоначальной задаче с k заданными нечеткими точками. Алгоритм ее решения может быть таким.

1. Рассматривается множество отрезков

$$A_1 A_k,\ A_1 \in ext\ \omega_1(\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_k),\ A_k \in ext\ \omega_k(\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_k).$$

2. Для каждого отрезка вычисляются значение функции принадлежности всех промежуточных нечетких точек.

3. По условию

$$\min \mu_{\tilde{\mathrm{A}}^2}\left(\widetilde{A}_i \subset \left[\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_k\right]\right) \to \max$$

организуется итерационный алгоритм, в результате которого будет найдена искомая прямая.

Рассмотрим условия пересечения.

Определение 19. Если для нечеткой k-плоскости $\widetilde{\alpha}$ и нечеткой m-плоскости $\widetilde{\beta}$ нечеткого информационного пространства $\tilde{\mathbf{A}}^n$ выполняется условие $k+m-n = 0$, то их пересечением является нечеткое множество с

$$\max \mu_{\tilde{\mathrm{A}}}(\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}) = 1.$$

Естественно, что

$$\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta} = \mathrm{core}\, \widetilde{\alpha} \cap \mathrm{core}\, \widetilde{\beta}.$$

Определение 20. Если для нечеткой k - плоскости $\widetilde{\alpha}$ и нечеткой m-плоскости $\widetilde{\beta}$ нечеткого информационного просторную $\tilde{\mathbf{A}}^n$ выполняется условие $k + m — n<0$, то их пересечением может быть нечеткое множество с

$$\mu_{\tilde{\mathrm{A}}}(\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}) < 1$$

Естественно, что

$$\mathrm{core}\, \widetilde{\alpha} \cap \mathrm{core}\, \widetilde{\beta} = \varnothing.$$

Другими словами, два нечетких информационных подпространства пересекаются, если существует точка, которая принадлежит им с разной, не нулевой степенью принадлежности.

Возникает следующая вычислительная позиционная задача. Дано два нечетких информационных подпространств: k-плоскость $\widetilde{\alpha}$ и m-плоскость $\widetilde{\beta}$ нечеткого информационного пространства $\tilde{\mathbf{A}}^n$ и условие $k + m — n < 0$. Определить существование их пересечения и значение функции принадлежности, которое будет преднамеренно меньше единице.

Алгоритм решения задачи.

1. Определяется линия MN кратчайшего расстояния между заданными информационными подпространствами,

$$M \in \text{core}\,\widetilde{\alpha}, N \in \text{core}\,\widetilde{\beta}$$ (рис. 2.13).

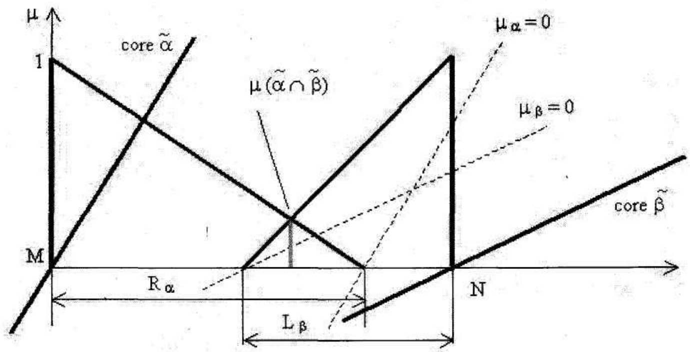


Рис. 2.13. Определение значения функции принадлежности для условия пересечения

2. Если

$$|MN| > R_{\widetilde{\alpha}}(MN) + L_{\widetilde{\beta}}(MN),$$

это пересечение существует.

3. Допуская линейные функции принадлежности, можно получить следующее выражение для значения функции принадлежности

$$\mu_{\widetilde{A}^n}(\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}) = \frac{R_{\widetilde{\alpha}}(MN) + L_{\widetilde{\beta}}(MN) - |MN|}{R_{\widetilde{\alpha}}(MN) + L_{\widetilde{\beta}}(MN)}.$$

2.10.5. Метрические задачи

Основными метрическими задачами являются задачи, в которых определяются длины, углы, площади, объемы и так далее, при условии нечеткости исходных данных.

Согласно определению 4, если две нечеткие точки разные, то между ними существует расстояние. Напомним определение расстояния.

Если Ω - некоторое множество и если существует информационное отображение $\Omega \times \Omega \to R^{+}$, то величина *d(x, y)* есть расстояние в Ω, если при $x, y, z \in \Omega$ выполняются следующие условия:

1) $d(x,x)=0$;
2) $d(x,y)= d(y,x)$;
3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$.

Существуют следующие известные расстояния между нечеткими множествами:

1) расстояние Хемминга для конечного множества

$$d(A, B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|;$$

2) относительное расстояние Хемминга для конечного множества

$$d(A, B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|;$$

3) расстояние Евклида для конечного множества

$$d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right)^2};$$

4) относительное расстояние Евклида для конечного множества

$$d(A, B) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)\right)^2}.$$

Кроме них существуют и другие расстояния, которые можно найти в специальной литературе.

Рассмотрим возможность применения этих расстояний для определения длины нечеткого отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$ в разных случаях. Пусть $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \neq \varnothing$. Если $\widetilde{A} = \widetilde{B}$, то очевидно, что всегда $d(\widetilde{A}, \widetilde{B})=0$. Если $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$, то расстояние при уменьшении множества $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \neq \varnothing$ стремится к постоянному значению. Например, для расстояния Евклида будет

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)\right)^2 + \left(\mu_{\widetilde{B}}(x_i)\right)^2},$$

где $x_i \in \widetilde{A}\widetilde{B}$. В случае $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \neq \varnothing$ расстояние будет равно указанной величине, независимо от положения нечетких точек на нечеткой плоскости. Итак, ни одно из приведенных расстояний нельзя использовать для определения длины нечеткого отрезка.

С другой стороны, можно определить длину нечеткого отрезка в метрике Кантора в виде

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \inf \{d(A, B)\},$$

где $A \in \widetilde{A}$, $B \in \widetilde{B}$ Или в метрике Хаусдорфа

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \max \{\max \{d(A \in \widetilde{A}, \widetilde{B}\}, \max \{d(\widetilde{A}, B \in \widetilde{B}\}\}.$$

Однако и в этом случае существует сложность, которую покажем на примере. Пусть дано три нечетких точки $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{C} \in \widetilde{A}^2$ (рис. 2.14):

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= (A(x_a, y_a), R_{a,x}, R_{a,y}, L_{a,x}, L_{a,y}), \\ \widetilde{B} &= (B(x_b, y_b), R_{b,x}, R_{b,y}, L_{b,x}, L_{b,y}), \\ \widetilde{C} &= (C(x_c, y_c), R_{c,x}, R_{c,y}, L_{c,x}, L_{c,y}). \end{aligned}$$

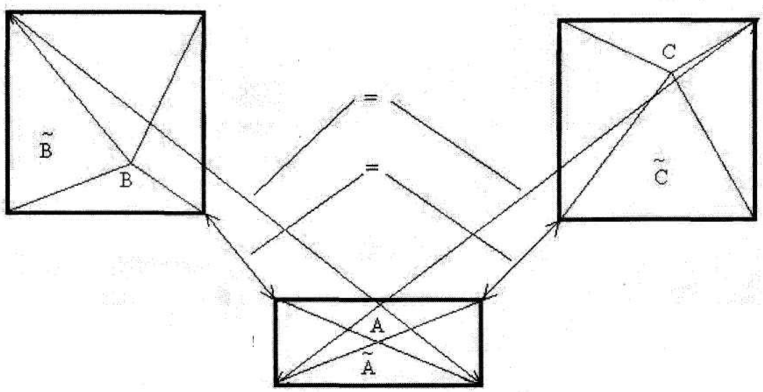


Рис. 2.14. К определению расстояния между нечеткими точками

Предположим, что

$$\begin{aligned} x_a - L_{a,x} - x_b - R_{b,x} &= x_c - L_{c,x} - x_a - R_{a,x}, \\ y_b - L_{b,y} - y_a - R_{a,y} &= y_c - L_{c,y} - y_a - R_{a,y}. \end{aligned}$$

Тогда становится очевидным, что

$$\inf\{d(A, B)\} = \inf\{d(A, C)\}.$$

Предположим также, что

$$x_a + R_{a,x} - x_b + L_{b,x} = x_c + R_{c,x} - x_a + L_{a,x},$$
$$y_b + R_{b,y} - y_a + L_{a,y} = y_c + R_{c,y} - y_a + L_{a,y}.$$

Тогда выполняется и второе равенство

$$\max\{\max\{d(A \in \widetilde{A}, \widetilde{B}\}, \max\{d(\widetilde{A}, B \in \widetilde{B}\}\} =$$
$$= \max\{\max\{d(A \in \widetilde{A}, \widetilde{C}\}, \max\{d(\widetilde{A}, C \in \widetilde{C}\}\}.$$

Но предположим, что

$$R_{b,x} < R_{c,x}, L_{b,x} > L_{c,x}, R_{b,y} > R_{c,y}, L_{b,y} < L_{c,y},$$
$$R_{b,x} + L_{b,x} = R_{c,x} + L_{c,x}, R_{b,y} + L_{b,y} = R_{c,y} + L_{c,y}.$$

Тогда можно утверждать, что в силу соотношения

$$d(A, B) < d(A, C)$$

имеет место утверждения

$$d(\widetilde{A}, \widetilde{B}) < d(\widetilde{A}, \widetilde{C}).$$

Следовательно, приведенных способов вычисления расстояния между двумя нечеткими точками недостаточно. Другими словами, такими способами определить длину нечеткого отрезка нельзя. Больше того, для двух нечетких отрезков, которые имеют равные длины в метрике Кантора, в метрике Хаусдорфа и имеют равные длины их ядра, нельзя утверждать, что расстояния между их концами равные.

Итак, рассматривать необходимо случай, когда $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \neq \varnothing$.

Определение 21. Под длиной нечеткого отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$, заданного нечеткими точками «возле *A»* и «близко *B*», будем понимать нечеткое число $l = |\widetilde{A}\widetilde{B}|$, которое определено понятием «возле $|\widetilde{A}\widetilde{B}|$».

Можно утверждать следующее:

1) $\operatorname{core} \widetilde{l} = \left|\operatorname{core} \widetilde{A} \operatorname{core} \widetilde{B}\right|;$

2) $\sup \widetilde{l} = \max\{d(A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B})\} - \inf\{d(A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B})\};$

3) если представить понятие «возле $|\widetilde{A}\widetilde{B}|$» как число *(R — L)* -типа, то

$$L_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \text{core}\,\widetilde{l} - \inf\left\{d(A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B})\right\},$$

$$R_{\widetilde{A}\widetilde{B}} = \max\left\{d(A \in \widetilde{A}, B \in \widetilde{B}\right\} - \text{core}\,\widetilde{l}.$$

Однако при общем расположении нечетких концов отрезка, т.е. если отрезок общего вида, функция принадлежности понятия «возле $|\widetilde{A}\widetilde{B}|$» будет более высокого степеня, чем функция принадлежности понятий «возле $\widetilde{A}$» и «близко $\widetilde{B}$». Например, если последние являются кусочно-линейными, то функция принадлежности понятия «возле $|\widetilde{A}\widetilde{B}|$» будет нелинейной. В этом случае получить конкретный вид функции принадлежности для понятия «возле $|\widetilde{A}\widetilde{B}|$» довольно легко.

Пусть

$$\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{A}^2,\ \widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \varnothing,\ x_a + R_{a,x} < x_b - L_{b,x},\ y_a + R_{a,y} < y_b - L_{b,y},$$

$$A_{++} = A(x_a + R_{a,x}, y_a + R_{a,y}), B_{--} = B(x_b - L_{b,x}, y_b - L_{b,y}).$$

Используя понятие α-уровня, можно записать

$$d_\alpha(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{\left(x_{a,\alpha} - x_{b,\alpha}\right)^2 + \left(y_{a,\alpha} - y_{b,\alpha}\right)^2},$$

где

$$x_{a,\alpha} = (1-\alpha)(x_a + R_{a,x}) + \alpha \cdot x_a$$

и так далее.

Таким образом, получив функции принадлежности для длин двух разных нечетких отрезков, мы можем их сравнить по приведенным выше формулах. Обобщение на многомерное информационное пространство, видимо, не вызывает трудностей.

Определение 22. Под площадью нечеткого треугольника $\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}$, заданного нечеткими точками «возле $\widetilde{A}$», «возле $\widetilde{B}$» и «возле $\widetilde{C}$»,

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \cap \widetilde{C} = \varnothing$$

будем понимать нечеткое число

$$\widetilde{s} = f(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}),$$

которое определено понятием «приблизительно $\widetilde{s}$». Можно утверждать следующее:

1) $\text{core}\,\widetilde{s} = f\left(\text{core}\,\widetilde{A}, \text{core}\,\widetilde{B}, \text{core}\,\widetilde{C}\right);$

2) $\operatorname{core} \widetilde{s} + R_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} = \max \{ f\,(A, B, C) \}$,

где

$A \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \right)$, $B \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right)$,

$C \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right)$;

3) $\operatorname{core} \widetilde{s} - L_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} = \inf \{ f\,(A, B, C) \}$,

где

$A \in \left(\operatorname{int} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{int} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \right)$, $B \in \left(\operatorname{int} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{int} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right)$,

$$C \in \left(\operatorname{int} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \cap \operatorname{int} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right).$$

Это определение с очевидностью обобщается на определение объема нечеткого тетраэдра, гиперобъема нечеткого многомерного симплекса.

Но три точки на плоскости могут определять не только треугольник, но и окружность.

Определение 23. Под площадью нечеткой окружности

$$\widetilde{r}\left(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C} \right),$$

заданной нечеткими точками «возле $\widetilde{A}$», «возле $\widetilde{B}$» и «возле $\widetilde{C}$»,

$$\widetilde{A} \cap \widetilde{B} \cap \widetilde{C} = \varnothing,$$

будем понимать нечеткое число

$$\widetilde{s} = f(\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}),$$

которое определено понятием «приблизительно $\widetilde{s}$ ».

Можно утверждать следующее:

1) $\operatorname{core} \widetilde{s} = f\left(\operatorname{core} \widetilde{A}, \operatorname{core} \widetilde{B}, \operatorname{core} \widetilde{C} \right)$;

2) $\operatorname{core} \widetilde{s} + R_{\widetilde{A}\widetilde{B}\widetilde{C}} = \max \{ f\,(A, B, C) \}$,

где

$A \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{A}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \right)$, $B \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{A}\widetilde{B} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{B}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right)$,

$C \in \left(\operatorname{ext} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{A}\widetilde{C} \right) \cap \operatorname{ext} \omega_{\widetilde{C}} \left(\widetilde{B}\widetilde{C} \right) \right)$;

$$\left(\left(\operatorname{ext}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{ext}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/A=\varnothing,$$

$$\left(\left(\operatorname{ext}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{ext}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/B=\varnothing,$$

$$\left(\left(\operatorname{ext}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\cap\operatorname{ext}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/C=\varnothing;$$

3) $\operatorname{core}\tilde{s}-L_{\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}=\inf\{f(A,B,C)\}$,

где ,

$A\in\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\right)$, $B\in\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)$,

$C\in\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)$;

$$\left(\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{A}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/A=\varnothing,$$

$$\left(\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{A}\tilde{B}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{B}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/B=\varnothing,$$

$$\left(\left(\operatorname{int}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{A}\tilde{C}\right)\cap\operatorname{int}\omega_{\tilde{C}}\left(\tilde{B}\tilde{C}\right)\right)\cap r(A,B,C)\right)/C=\varnothing.$$

Точно так же можно построить обобщение на определение объема нечеткой сферы, гиперсферы. Кроме этого можно определить длину нечеткой окружности или ее радиус, если иметь в виду вид функции *f*, которая принимает участие в определении. В общем случае от нечеткого определителя нечеткой фигуры всегда можно перейти к нечетким параметрам этой фигуры. Дальше, учитывая то, что нечеткие элементы определителя всегда могут быть разбиты на α-равные, можно, применяя приведенные определения к α - уровням, построить функции принадлежности нечетких параметров.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

На нечеткой плоскости определено понятия «возле», постоянное на всей плоскости. Дано четкие разные точки *A, B, C, D, E, F* общего положения. Определить, с какой степенью принадлежности множество из трех отрезков, концами которых являются данные точки, может быть отнесенно множество нечетких треугольников. Определить площадь полученного нечеткого треугольника.

Алгоритм решения задачи может быть следующим.

1) Анализируются положение заданных точек. Целью анализа является выбор трех пар, точки которых более всего близко

расположены друг от друга. Пусть такими парами будут пары *AB, CD, EF*.

2) Допуская, что пара *AB* образует приблизительно вершину треугольника, т.е. принадлежит нечеткой точке *M*, находим значение функции принадлежности

$$\mu_{\widetilde{M}}(A) = \mu_{\widetilde{M}}(B) \to \max .$$

Это условие осуществимо и достигается шевелением заданной нечеткой точки. Более того, если нечеткая точка *M* задана нечеткими числами *(R — L)* -типа, то такое условие будет всегда осуществимым для четырех четких точек.

Аналогично вводим нечеткие точки *N, P* и их шевелением находим значение функций принадлежности

$$\mu_{\widetilde{N}}(C) = \mu_{\widetilde{N}}(D) \to \max$$

и

$$\mu_{\widetilde{P}}(E) = \mu_{\widetilde{P}}(F) \to \max .$$

Предположим, что

$$\widetilde{M} \cap \widetilde{N} \cap \widetilde{P} = \varnothing$$

(рис. 2.15). Если это не так, то множество треугольников будет включать в себя треугольники, которые вырождены в отрезки с их соответствующими степенями принадлежности.

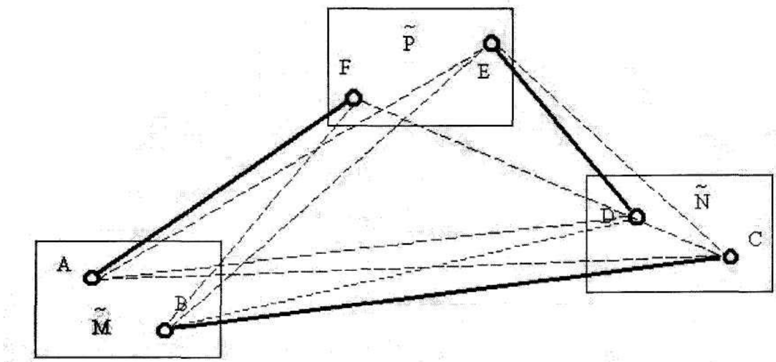


Рис. 2.15. К определению параметров нечеткого треугольника

Таким образом, данное множество образовывает нечеткую фигуру, степень принадлежности которой множеству треугольников равна

$$\mu_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}}(A, B, C, D, E, F) = \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(A), \mu_{\widetilde{N}}(C), \mu_{\widetilde{P}}(E)\right\}.$$

Заметим, что полученный нечеткий треугольник не единственный, так как его стороны могут быть образованы другими соединениями точек. Они показаны на рис. 2.15 штриховыми линиями. Но значение функции принадлежности при любом соединении точек не изменится.

3) Для определения его площади рассмотрим α - уровень, который отвечает значению

$$\mu_{\widetilde{M}\widetilde{N}\widetilde{P}}(A, B, C, D, E, F) = \min\left\{\mu_{\widetilde{M}}(A), \mu_{\widetilde{N}}(C), \mu_{\widetilde{P}}(E)\right\}.$$

и найдем нечеткое число так, как описано выше.

Введем понятие сепаратности носителей двух нечетких точек - концов нечеткого отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$.

Определение 24. Под сепаратностью носителей двух нечетких точек $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{A}^2$ будем понимать число

$$\text{sep}\,(\sup\widetilde{A}, \sup\widetilde{B}) = \left|AB'\right| + \left|AB''\right| - \left|\text{int}\,\omega_A(\widetilde{A}\widetilde{B})\right| - \left|\text{int}\,\omega_B(\widetilde{A}\widetilde{B})\right|,$$

где $|AB'|$, $|AB''|$ - длины двух четких отрезков прямых нечеткого отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$, для которых выполняются условия

$$\mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(AB') = \mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(AB'') = 0, \quad AB' \cap AB'' \in \widetilde{A}\widetilde{B}, \left|AB'\right| = \max, \left|AB''\right| = \max\ .$$

Можно доказать, что sep $(\sup\widetilde{A}$, $\sup\widetilde{B}$ $)>0$. Но если две нечеткие точки касаются, т.е. имеют хотя бы одну общую точку с нулевым значением функции принадлежности, то сепаратность их носителей становится равной нулю. Однако это не означает, что сепаратность самых нечетких точек тоже будет равна нулю.

Определим сепаратность α-уровня в такой способ. Под сепаратностью α-уровня двух нечетких точек $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{A}^2$ будем понимать число

$$\text{sep}_\alpha\,(\sup_\alpha\widetilde{A}, \sup_\alpha\widetilde{B}) = \left|AB'\right|_\alpha + \left|AB''\right|_\alpha - \left|\text{int}\,\omega_A(\widetilde{A}\widetilde{B})\right|_\alpha - \left|\text{int}\,\omega_B(\widetilde{A}\widetilde{B})\right|_\alpha,$$

где $|AB'|_\alpha$, $|AB''|_\alpha$ - длины двух четких отрезков прямых нечеткого отрезка $\widetilde{A}\widetilde{B}$, для которых выполняются условия

$$\mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(AB') = \mu_{\widetilde{A}\widetilde{B}}(AB'') = \alpha, \quad AB' \cap AB'' \in \widetilde{A}\widetilde{B}, \left|AB'\right|_\alpha = \max, \left|AB''\right|_\alpha = \max\ .$$

Теперь сепаратность двух нечетких точек $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{A}^2$ можно найти по формулам:

$$\operatorname{sep}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \operatorname{sep}_\alpha(\widetilde{A}, \widetilde{B});$$

$$\operatorname{sep}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \frac{1}{n}\sum_{\alpha=1}^{n} \operatorname{sep}_\alpha(\widetilde{A}, \widetilde{B});$$

$$\operatorname{sep}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} \operatorname{sep}^2_\alpha(\widetilde{A}, \widetilde{B})};$$

$$\operatorname{sep}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{\alpha=1}^{n} \operatorname{sep}^2_\alpha(\widetilde{A}, \widetilde{B})}.$$

Возвратимся еще раз к некоторым нечетким информационным образам, которые упоминались выше. Известно, что угол образовывается двумя отрезками с общим концом. Нечеткий угол образовывается двумя нечеткими отрезками с общим нечетким концом. Пусть у двух нечетких отрезков $\widetilde{A}\widetilde{B}$, $\widetilde{C}\widetilde{D}$ существует общая нечеткая точка $\widetilde{A} \cap \widetilde{C}$. Тогда образуется нечеткий угол, вершина которого принадлежит нечеткой точке $\widetilde{A} \cap \widetilde{C}$. При этом его максимальное значение образовывается двумя внешними опорными отрезками, общий конец которых лежит на границе

$$\operatorname{int}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{B}\right)\cap \operatorname{int}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{D}\right)$$

$$\operatorname{ext}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{B}\right)\cap \operatorname{ext}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{D}\right).$$

Его минимальное значение образовывается двумя внутренними опорными отрезками, общий конец которых лежит на границе

$$\operatorname{ext}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{B}\right)\cap \operatorname{ext}\omega_{\widetilde{A}\cap\widetilde{C}}\left(\widetilde{A}\cap\widetilde{C}, \widetilde{D}\right).$$

2.10.6. Нечеткие условия

Рассмотрим более общие условия, чем условия инцидентности - условия параллельности, перпендикулярности, касания.

Пусть на нечеткой плоскости будет задано две четкие прямые. Определим для них понятие «приблизительно параллельные», для чего на одной из прямых выберем произвольно нечеткий отрезок $\tilde{A}\tilde{B}$. Если расстояние между точкой A і точкой core $\tilde{B}$ довольно большое, то прямая, которая определена точками A и $B \in \tilde{B}$, будет приблизительно параллельна другой прямой. Обозначим значение функции принадлежности двух прямых множества параллельных прямых как *ν*. Можем записать

$$\nu_{\tilde{A}^2}\left(AB \parallel \ldots\right) = 1 - \frac{h\left(\operatorname{int} \omega_{\tilde{B}}\ (A\tilde{B})\right) \cdot a}{\left|A\mathrm{core}\tilde{B}\right|}.$$

Здесь $h(\operatorname{int}\ \omega_{\tilde{B}}\,(A\tilde{B}))$ - длина хорды, которая стягивает концы внутренней границы нечеткой точки $\tilde{B}$ на отрезке $A\tilde{B}$, *a* – положительное вещественное число.

Пусть будет задана четкая прямая и нечеткий отрезок $\tilde{A}\tilde{B}$. Они будут приблизительно параллельны, если расстояния от концов нечеткого отрезка к прямой приблизительно равные, а сами концы довольно отдалены друг от друга. Это можно выразить условием, что ядро нечеткого отрезка параллельно заданной прямой и

sep $(\tilde{A}\ ,\ \tilde{B}) » h(\operatorname{int}\omega_{\tilde{A}\tilde{B}}\ (\tilde{A}\ \tilde{B}\ ))$. Значение функции принадлежности множеству параллельных прямых можно выразить формулой

$$\nu_{\tilde{A}^2}\left(AB \parallel \ldots\right) = 1 - \frac{\left(h\left(\operatorname{int} \omega_{\tilde{A}}\ (\tilde{A}\tilde{B})\right) + h\left(\operatorname{int} \omega_{\tilde{B}}\ (\tilde{A}\tilde{B})\right)\right) \cdot a}{\left|\mathrm{core}\ \tilde{A}\tilde{B}\right|}.$$

Два нечетких отрезка параллельны, если они гомотетические. Другими словами, два нечетких отрезка параллельны, если для любого четкого отрезка с определенной степенью принадлежности одному нечеткому отрезку в другом нечетком отрезке обнаружится параллельный ему четкий отрезок с такой же степенью принадлежности.

Пусть дано два нечетких отрезка

$$\tilde{A}\tilde{B},\ \tilde{C}\tilde{D} \in \tilde{A}^2.$$

Они будут параллельны при условии, что для любого отрезка $MN \in \tilde{A}\tilde{B}$ обнаружится такой параллельный ему отрезок $PQ \in \tilde{C}\tilde{D}$, что

$$\mu_{\tilde{A}}(M) = \mu_{\tilde{B}}(N) = \mu_{\tilde{C}}(P) = \mu_{\tilde{D}}(Q).$$

Другими словами, значение функции принадлежности этих двух отрезков множества параллельных нечетких отрезков равно единице.

Два нечетких отрезка приблизительно параллельны, если для любого четкого отрезка, который принадлежит одному з них, обнаружится четкий отрезок, который принадлежит другому из них, приблизительно параллельный первому. Если два нечетких отрезка приблизительно параллельны, то наибольшее значение функции принадлежности по условию параллельности будет относиться к отрезкам, которые пересекают ядра в одном направлении, т.е. к отрезкам, которые лежат на внутренних, приблизительно одинаково направленных опорных прямых нечетких концов данных отрезков. Меньше всего значение функции принадлежности по условию параллельности будет относиться к отрезкам внутренним, противоположно направленным опорным прямым.

Две нечеткие прямые приблизительно параллельны, если образующие их нечеткие отрезки приблизительно параллельны. Две нечеткие прямые параллельны, если между образующими их нечеткими отрезками существует взаимно однозначное соответствие и соответствующие нечеткие отрезки параллельны. Можно сказать, что две нечеткие прямые приблизительно параллельны, если расстояние между их соответствующими нечеткими точками (или сепаратность) остается приблизительно постоянной.

Эти определения легко обобщаются на большие размерности. Вообще тема нечетких условий в многомерных нечетких информационных пространствах требует отдельного подробного исследования. Ограничимся здесь только некоторыми примерами.

Четкая прямая и четкое линейное информационное подпространство (не уточняя размерности) нечеткого информационного пространства приблизительно параллельны, если в информационном подпространстве обнаружится прямая, приблизительно параллельная данной. Два четких линейных информационных подпространства разной размерности, которые находятся в нечетком информационном пространстве, приблизительно параллельны, если приблизительно придерживается их признак параллельности. Признаков параллельности в этом случае можно сформулировать несколько. Конкретное число зависит от размерности информационного подпространств.

Два четких отрезка в нечетком информационном пространстве есть приблизительно перпендикулярными, если один из них приблизительно параллельный перпендикуляру к другому.

Два нечетких отрезка являются перпендикулярными, если для каждого четкого отрезка, который принадлежит одному нечеткому с некоторым значением функции принадлежности, в другом нечетком отрезке обнаружится четкий отрезок, перпендикулярный первому и который имеет такое же значение функции принадлежности. Два перпендикулярных нечетких отрезка связанны друг с другом информационными преобразованиями, которые представляет собой композицию гомотетии и поворота на прямой угол.

Два нечетких отрезка есть приблизительно перпендикулярными, если после поворота одного из них на прямой угол они оказываются приблизительно параллельными.

Две нечеткие прямые приблизительно перпендикулярны, если после поворота одной из них на прямой угол, они оказываются приблизительно параллельными. Две нечеткие, приблизительно перпендикулярные прямые перпендикулярны, если они образованы взаимно перпендикулярными нечеткими отрезками.

Пусть дано два нечетких отрезка

$$\tilde{A}\tilde{B},\ \tilde{C}\tilde{D} \in \tilde{A}^2 .$$

Они будут перпендикулярны при условии, что для любого отрезка $MN \in \tilde{A}\tilde{B}$ обнаружится такой перпендикулярный ему отрезок $PQ \in \tilde{C}\tilde{D}$, что

$$\mu_{\tilde{A}}(M) = \mu_{\tilde{B}}(N) = \mu_{\tilde{C}}(P) = \mu_{\tilde{D}}(Q) .$$

Другими словами, значения функции принадлежности этих двух отрезков множеству перпендикулярных нечетких отрезков равно единице.

2.10.7. Нечеткая ортогональность прямых

Для трех разных точек A,B,C можно ввести понятие ортогональности прямых AB и BC . Ортогональность эквивалентна равенству

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

Нечеткая ортогональность может быть определена приблизительным равенством

$$AB|^2 + |BC|^2 \approx |AC|^2$$

или

$$AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 = \text{"}\textit{возле } 0\text{"}.$$

Определим отношение ортогональности:

$$a \mathbin{\tilde{\perp}} b, a \perp \tilde{b}, \tilde{a} \perp \tilde{b}$$

таким образом:

$$\forall a, \forall b, \forall A \in a, \forall B \in b, \exists C = a \cap b : |AB|^2 + |AC|^2 \approx |AC|^2 \Rightarrow a \mathbin{\tilde{\perp}} b$$

$$\forall a, \forall \tilde{b}, \exists b \subset \tilde{b} : a \perp b \Rightarrow a \perp \tilde{b} ;\ \mu(a \perp \tilde{b}) = \mu_{\tilde{b}}(b),$$

$$\forall \tilde{a}, \forall \tilde{b}, \forall a \subset \tilde{a}, \exists b \subset \tilde{b} : a \perp b \Rightarrow \tilde{a} \perp \tilde{b} ;$$

$$\mu(\tilde{a} \perp \tilde{b}) = \min \left\{ \mu_{\tilde{a} \cup \tilde{b}}(a \perp b) \right\},$$

Степень ортогональности определяет значение функции принадлежности, с которым две приблизительно перпендикулярные прямые относятся к множеству всех пар взаимно перпендикулярных прямых.

2.10.8. Нечеткая параллельность

Сформулируем понятие параллельности для четких и нечетких прямых. Как известно, в евклидовой геометрии параллельность двух прямых выражается постоянством расстояния от точки, произвольно избранной на одной прямой, к другой прямой. Нечеткая параллельность будет определяться образцовым постоянством этого расстояния. Тогда можно определить следующие понятия:

$$a \mathbin{\tilde{||}} b,\ a \,||\, \tilde{b}, \tilde{a} \,||\, \tilde{b}.$$

$$\forall a, \forall b, \forall X \in a, \forall Y \in a: d(X,Y) \to \infty,\ d(X,b) \cong d(Y,b) \Leftrightarrow a \,\tilde{\|}\, b,$$

$$\forall a, \forall \tilde{b}, \exists b \subset \tilde{b}: a \| b \Leftrightarrow a \,\tilde{\|}\, b,$$

$$\forall \tilde{a}, \forall \tilde{b}, \forall a \subset \tilde{a}, \exists b \subset \tilde{b}: a \| b \Leftrightarrow \tilde{a} \| \tilde{b}.,$$

Первое понятие можно сформулировать иначе

$$\forall a, \forall b, \exists \tilde{b} \supset b: a \| \tilde{b} \Leftrightarrow a \,\tilde{\|}\, b.$$

Для второго и третьего понятий можно формально определить степень параллельности

$$\mu(a \| \tilde{b}) = \mu_{\tilde{b}}(b)\ \mu(\tilde{a} \| \tilde{b}) = \min \mu_{\tilde{a} \cup \tilde{b}}(a \| b),$$

которая показывает, в какой степени две приблизительно параллельные прямые могут быть отнесенные к множеству всех пар параллельных прямых.

Можно утверждать, что если две прямые приблизительно перпендикулярны третий, то они приблизительно параллельны.

2.10.9. Некоторые нечеткие фигуры

Образное мышление оперирует с более сложными фигурами, чем точки и прямые. Рассмотрим такие фигуры как нечеткие треугольники, нечеткие прямоугольники, нечеткие окружности. Сразу следует отметить, что для каждой фигуры можно дать несколько определений.

Нечетким треугольником мы назовем нечеткую фигуру, которая состоит из трех нечетких отрезков, которые не принадлежат одной нечеткой прямой и которые имеют приблизительно общие нечеткие концы.

Нечетким треугольником можно назвать множество треугольников, вершины которых принадлежат трем разным нечетким точкам.

Нечетким прямоугольником можно назвать фигуру, которая состоит из

четырех нечетких отрезков, из которых сопредельные отрезки приблизительно перпендикулярны, а противоположные - приблизительно равные.
Нечеткой окружностью можно назвать множество точек, которые находятся приблизительно на одном расстоянии от данной точки. Или - множество точек, которые находятся на данном расстоянии от данной нечеткой точки. Или - множество окружностей, для которых приблизительно задан центр или приблизительно определен радиус. По большому счету все эти определения нечеткой окружности эквивалентны..

Нечеткое касание прямых и окружностей

Сформулируем еще отношение нечеткого касания для прямой и окружности и для двух окружностей, которые часто встречается в задачах. А именно:

~ - прямая приблизительно касается данную окружность;
~ - две окружности приблизительно касаются друг друга;
~ - нечеткая прямая касается окружности или нечеткая окружность касается прямой;
~ -нечеткая прямая касается нечеткой окружности или две нечеткие окружности касаются друг друга.

Обозначим отношение четкого и нечеткого касания $T, \tilde{T}$. Тогда

$$\forall\, a, \forall\, \alpha, \exists\, \{A,B\}: \{A,B\} = a \cap \alpha,\ d(A,B) = 0 \Rightarrow aT\alpha\ ,$$

$$\forall\, a, \forall\, \alpha, \exists\, \{A,B\}: \{A,B\} = a \cap \alpha,\ d(A,B) \approx 0 \Rightarrow a\tilde{T}\ \alpha\ ,$$

или

$$\forall\, a, \forall\, \beta, \exists\, A: A \in a, \exists\, B: B \in \beta, \exists\, \tilde{A}: A = core\,\tilde{A},\ \mu_{\tilde{A}}(B) \neq 0 \Rightarrow a\tilde{T}\ \beta,$$

$$\forall\, \alpha, \forall\, \beta, \exists\, A: A \in \alpha, \exists\, B: B \in \beta, \exists\, \tilde{A}: A = core\,\tilde{A},\ \mu_{\tilde{A}}(B) \neq 0 \Rightarrow \alpha\,\tilde{T}\,\beta,$$

$$\forall\ \tilde{a}, \forall\ \beta, \exists\ B{:}B \in \beta, \mu_{\tilde{a}}\ (B) \neq 0 \Rightarrow \tilde{a}\ T\ \beta,$$

$$\forall\ a, \forall\ \tilde{\beta}\ , \exists\ A{:}A \in a, \mu_{\tilde{\beta}}\ (A) \neq 0 \Rightarrow a\ T\ \tilde{\beta}\ ,$$

$$\forall\ \tilde{a}, \forall\ \tilde{\beta}\ , \exists\ A{:}\ \mu_{\tilde{a}}\ (A) \neq 0, \mu_{\tilde{\beta}}\ (A) \neq 0 \Rightarrow \tilde{a}\ T\ \tilde{\beta}\ ,$$

$$\forall\ \tilde{\alpha}, \forall\ \tilde{\beta}\ , \exists\ A{:}\ \mu_{\tilde{a}}\ (A) \neq 0, \mu_{\tilde{\beta}}\ (A) \neq 0. \Rightarrow \tilde{\alpha}\ T\ \tilde{\beta}$$

2.10.10. Нечеткие информационные преобразования

Следующими информационными объектами, без которых невозможно обойтись при моделировании умственных геометрических образов, есть информационные преобразования. Любое информационное преобразование может быть определено как множество упорядоченных пар точек. Нечеткое информационное преобразование можно определить как множество нечетких упорядоченных пар точек или упорядоченных нечетких пар точек или упорядоченных пар нечетких точек. Исследование нечетких информационных преобразований континуума есть самостоятельная большая задача, что не является задачей данной работы. Поэтому из всего множества информационных преобразований рассмотрим только информационное преобразование ортогональной и аффинной группы, а именно: перенос, поворот, осевую и центральную симметрии, гомотетию и подобие. Как показывает опыт, эти информационные преобразования можно представить мысленно. Нечеткий перенос двумерного континуума можно определить таким образом:

$$\forall\ \tilde{A}, \forall\ \tilde{B}\ , \forall\ \tilde{C}\ , \exists\ \tilde{C}\ : \overline{C\tilde{C}} \approx \overline{\tilde{A}\tilde{B}}\,.$$

Для нечеткого переноса справедлива теорема:

$$\forall\ \tilde{A}, \forall\ \tilde{B}\ , \exists\ \overline{A\tilde{B}''}\ : A = core\,\tilde{A}\ , \tilde{B}\ = f(\ \tilde{B}''\ ), \overline{A\tilde{B}''}\ = \overline{\tilde{A}\tilde{B}}\ .$$

Поэтому задание любой нечеткой точки эквивалентно заданию нечеткого переноса, определенного нечетким вектором, начало которого совпадает с началом системы координат. Поворот плоскости определяется центром и углом поворота при постоянстве радиуса поворота. При нечетком повороте любые из этих параметров либо все они могут быть нечеткими. Существует теорема о том, что если все параметры некоторого нечеткого поворота являются нечеткими, то существует поворот, эквивалентный заданному, у которого нечетким есть только один параметр. Центральная симметрия есть поворот на 180 градусов. Нечеткая центральная симметрия может быть определена аналогично:

$$\forall\ \tilde{A}, \forall\ \tilde{B}\ , \exists\ \tilde{A}'\ : \overline{AB}\ \approx \overline{B\tilde{A}'}\ .$$

Определим нечеткую осевую симметрию:

$$\forall\ A, \forall\ s\ , \exists\ A'\ : d(A,s) \approx d(A',s), AA'\ \tilde{\perp}\ s.$$

Аналогично предыдущему, существет теорема о том, что нечеткая осевая симметрия, определенная таким образом, эквивалентна четкой осевой симметрии относительно нечеткой оси, параметры нечеткости которой есть функции параметров нечеткости осевой симметрии. Т.е.

$$\forall\ A, \forall\ s\ , \exists\ A'\ : d(A,s) \approx d(A',s), AA'\ \tilde{\perp}\ s, \Rightarrow \exists\ \tilde{A}'\ : \tilde{A}'\ = \tilde{f}_s\ (A),$$

$$\forall\ A, \forall\ \tilde{f}_s\ (A),\ \exists\ \tilde{s}\ : \tilde{f}_s\ (A) = \ f_{\tilde{s}}\ (A).$$

Гомотетия есть информационные преобразования, которые сохраняют параллельность отрезков и изменяют их длину в k раз, т.е.

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ O,\ \forall\ k, \exists\ (A', B') : |O A'| = k|O A|,\ |OB'| = k|OB|.$$

Нечеткую гомотетию можно определить так

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ O,\ \forall\ k, \exists\ (\tilde{A}'\ , \tilde{B}'\ ) : |O \tilde{A}'\ | \approx k|O A|,\ |O \tilde{B}'\ | \approx k|OB|,$$

что эквивалентно

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ O, \forall\ \tilde{k}\ , \exists\ (\tilde{A}',\ \tilde{B}'\ ): |O\tilde{A}'\ | \approx \tilde{k}\ |O\,A|,\ |O\tilde{B}'\ | \approx \tilde{k}\ |OB|,$$

или

$$\forall\ A, \forall\ B, \forall\ \tilde{O}\ , \forall\ k, \exists\ (\tilde{A}'\ ,\tilde{B}'\ ): |\tilde{O}\ \tilde{A}'\ | \approx k |\tilde{O}\ A|,\ |\tilde{O}\ \tilde{B}'\ | \approx k |\tilde{O}\ B|.$$

Нечеткое информационное подобие рассматривать не будем, так как оно является произведением любого нечеткого движения на гомотетию или любого четкого движения на нечеткую гомотетию.

Мыслительные операции и мера сложности алгоритма

Если информационный алгоритм есть последовательность информационны операций (построений), необходимых для получения решения, то нечеткий алгоритм есть последовательность операций, из которых хотя бы одна операция является нечеткой. В случае мысленного решения какой-либо задачи все мыслительные операции являются нечеткими. Мы выделяем только две мыслительные информационные операции, реализуемые в двумерном континууме: фиксация точки как результата пересечения двух линий, фиксация линии, заданной некоторым множеством своих параметров.

Простотой или мерой сложности информационного алгоритма называется число элементарных информационных операций, выполняемых в процессе решения. Мерой сложности мыслительного алгоритма назовем максимальное число информационных образов, которые необходимо одновременно удерживать в воображении при мысленном выполнении какого-либо шага алгоритма решения задачи.

2.10.11. Экспериментальное определение численных параметров нечеткости

Мы можем подвести промежуточный итог нашему исследованию. Для того, чтобы реализовать все описанные информационные объекты нам необходимо определить численные параметры нечеткости для нечетких точек двумерного информационного континуума. Это можно сделать экспериментально при принятии некоторых ограничений и допущений, естественных для человека с нормально развитым визуальным мышлением. К таким людям мы относим инженеров-конструкторов и художников. Задания, предлагаемые им, могут следующими:

1) отметить на бумаге две горизонтально расположенные точки, расстояние между которыми попадает в интервал [10, 100], [200, 600], [700, 1000] мм. При этом следует указывать четкие различные расстояния, например 5,4 мм и т.д. Предлагается по 10 расстояний из каждого интервала;

2) то же самое, но точки должны быть расположены вертикально;

3) указать интервал, соответствующий, по их мнению, понятию «около Х», где Х – любое целое случайное число из интервала [10, 1000];

4) обвести в виде окружности и в виде прямоугольника область, соответствующую, по их мнению, понятию «около точки».

Упомянутыми выше допущениями и ограничениями являются:

1) точность мысленной фиксации точки в двумерном континууме составляет ± 1 мм;

2) указанные в заданиях понятия зависят от размеров континуума и поэтому условный размер континуума принят 10 × 10, 100 × 100, 1000 × 1000 мм;

3) из поля зрения испытуемых удаляются всякие предметы, по которым так или иначе можно было бы оценить указанные расстояния.

После обработки множества ответов, были сделаны следующие выводы:

1) при вычерчивании отрезков указанной длины часть испытуемых допускала устойчивые отклонения в меньшую сторону, а часть – в большую;

2) отклонения в ответах для указанного континуума можно считать пропорциональными абсолютной величине X. Для длин из интервала [10, 100], после удаления очевидных выбросов, точность составила ± 5 мм, а для длин из интервала [700, 1000] – ± 50 мм;

3) для указанного размера континуума разницы в определении длин по горизонтали и по вертикали не выявлено;

4) понятие «около X» можно представить в виде нечеткого числа (R – L)-типа, равному (0,05X – 1, X, 0,05X + 1) с кусочно-линейной функцией принадлежности;

5) понятие «около точки», представленное графически, не зависит от положения точки в указанном континууме и может быть изображено в виде нечеткой точки с квадратным или круговым основанием, примерно равными по площади. Для указанного континуума сторона квадрата или радиус круга может быть принят равным 1/20 … 1/100 длины стороны континуума;

6) аналитическая и графическая модели понятия «около точки» не совпадают. Следовательно, нечеткие модели аналитического и визуального мышлений не эквивалентны.

2.10.12. Общий алгоритм развития и контроля визуального мышления

Теперь мы можем подойти к описанию общего алгоритма развития и контроля визуального мышления в автоматизированной интеллектуальной учебной системе. Представим его в виде блок-схемы (рис. 2.16). В блоке выбора текста задачи случайным образом генерируется задача на заданную или избранную тему. Выбор уровня нечеткости разрешает установить параметры нечеткой точки, которые наиболее удобны для того, кого учат. Выбор уровня сложности разрешает установить исходные данные в общем или частичном положении в зависимости от степени подготовки того, кого учат. Выбор способа решения означает, что задача будет решаться с начала до конца или будет решаться поэтапно.

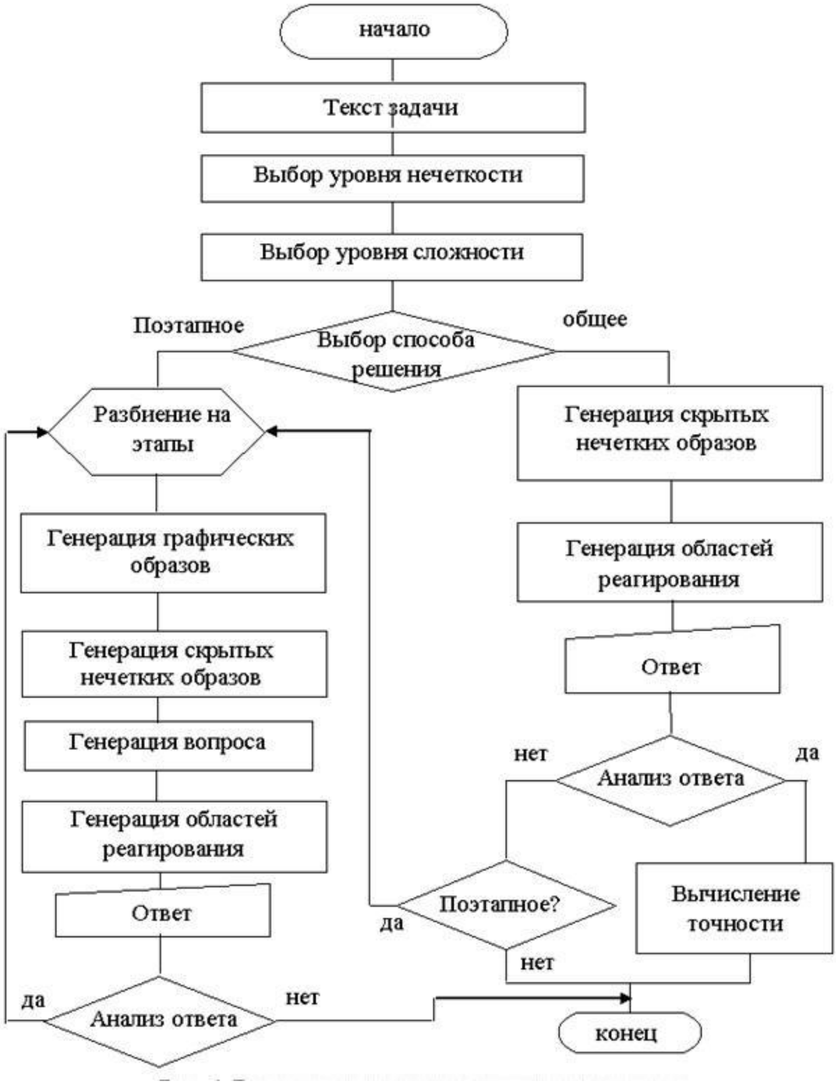


Рис. 2.16. Блок-схема алгоритма автоматизованного контроля визуального решения задач

В первом случае генерируется минимально необходимое для решения число исходных графических образов и все возможные скрытые графические образы, которые возникают в процессе решения. Каждый скрытый графический образ сопровождается областью реагирования. Область реагирования на ответ представляет собой скрытую область черчения - нечеткую фигуру (точку, отрезок и т.д.), которя реагирует на щелчок кнопки мыши или на нажатие клавиши при подведении в эту область указателя. Визуально (мысленно) решив задачу и указав на экране возможное положение результирующего образа, тот, кого учат, получает реакцию программы в виде принятия ответа, если он верен, и непринятие его в противном случае. Ответ того, кого учат, в виде указания на экране точки или нескольких точек анализируется по степени принадлежности скрытым нечетким образам. В случае их принадлежности исчисляется степень принадлежности, которая интерпретируется как точность визуального решения задачи. В случае их непринадлежности скрытым нечетким образам предлагается перейти к поэтапному решению этой же задачи. Поэтапное решение отличается только тем, что общая задача разбивается на подзадачи 1-го уровня сложности, которые выдаются в виде вопросов, требующие одного (однозначного) ответа. После правильного ответа, т.е. если указанная тем, кого учат, точка принадлежит скрытому нечеткому образу, генерируется видимый графический образ, который отвечает ядру нечеткого образа. Следующий этап генерируется с учетом найденного на предыдущем этапе образа.

Примеры решения задач

В заключение рассмотрим несколько задач разного уровня сложности и их решение. Все задачи разбиты на следующие темы:

1. Планиметрические на построение для развития визуального мышления.

2. Стереометрические на построение для развития пространственного воображения.

3. Ортогонально-проекционные на построение для развития мышления в области комплексного чертежа.

4. Аксонометрические проекционные на построение для развития пространственного воображения.

5. Перспективно-проекционные для развития пространственного воображения.

Планиметрические задачи 1-го уровня сложности составили тест для проверки уровня развития визуального мышления обучаемого. Полученные в результате данные могут быть использованы в блоке установки параметров нечеткости. К планиметрическим задачам 1-го уровня сложности можно отнести, например, такие:

1) На данной оси с указанным единичным отрезком указать точку, координата которой равна X. Вместо X указывается конкретное число, например 5,4 или 67,3 и т.д.

2) На концах данного отрезка сосредоточены массы A кг и B кг. Указать центр тяжести отрезка.

Планиметрические задачи 2-го уровня сложности могут быть, например, такими:

1) В системе двух осей с указанными единичными отрезками указать точку с такими-то координатами.

В этой задаче оси могут быть расположены под любым углом и единичные отрезки могут быть различными. Второй уровень сложности определяется необходимостью фиксировать в визуальной памяти две прямые, проходящие через визуально представленные точки визуально параллельно соответствующим осям. Ответом является визуально представленная точка их пересечения.

2) Дано три точки и в каждой указана сосредоточенная в ней масса. Указать центр тяжести треугольника.

Задача, в которой будут заданы N точек с массами и в которой потребуется указать их центр тяжести, тоже относится к задачам 2-го уровня сложности. Это объясняется тем, что в визуальной памяти на каждом шаге решения требуется удерживать только одну точку – уже визуально найденный центр тяжести некоторого числа точек и отрезок, соединяющий её со следующей точкой.

Стереометрическую задачу четвертого уровня сложности рассмотрим подробно. Условие задачи следующее. Дана проекция тетраэдра и дано три точки *A, B, C* на трех его ребрах *a, b, c*. Указать точку пересечения ребра *d* с плоскостью *ABC* (рис. 2.17,а). Естественно, что изображение исходных данных – тетраэдра и точек на его ребрах генерируется случайным образом, т.е. точки могут быть расположены каждый раз в другом месте или на других ребрах. Точку пересечения каждый раз необходимо указывать на одном з трех ребер, которые остались. Если допустить, что избрано общее решение задачи, то будут сгенерированы скрытые нечеткие образы, т.е. нечеткая точка $\widetilde{D}$ на ребре *d* с ядром, которое отвечает точному решению, и ее область реагирования (рис. 2.17,б). Если допустить, что избрано поэтапное решение, то, опуская детали диалога, будет предложено указать точку пересечения прямой *AB* с ребром *f* и будут сгенерированы соответствующие скрытые нечеткие образы: нечеткая прямая $\widetilde{A}\widetilde{B} : core\widetilde{A}\widetilde{B} = AB$, нечеткая прямая $\widetilde{f} : core\ \widetilde{f} = f$, нечеткое множество $\widetilde{F} = \widetilde{A}\widetilde{B} \cap \widetilde{f}$ (рис.2.17, в). Дальше будет предложено представить прямую *FC* и указать ее пересечение с прямой *d*. На чертеже будут сгенерированы скрытые нечеткие образы – нечеткая прямая $\widetilde{F}C$ и нечеткая точка $\widetilde{D} = \widetilde{F}C \cap d$ (рис. 2.17, г).

Можно предположить, что будет избрано другое решение. Например, если решающий задачу захочет найти точку пересечения прямых *BC* и *e*, то будет сгенерирована нечеткая точка $BC \cap e = \widetilde{E}$, которая может оказаться вне поля чертежа (на рисунке не показанна). После этого будет сгенерирована нечеткая прямая $\widetilde{E}A$ и нечеткая точка $\widetilde{D} = \widetilde{E}A \cap d$ (рис. 2.17, д).

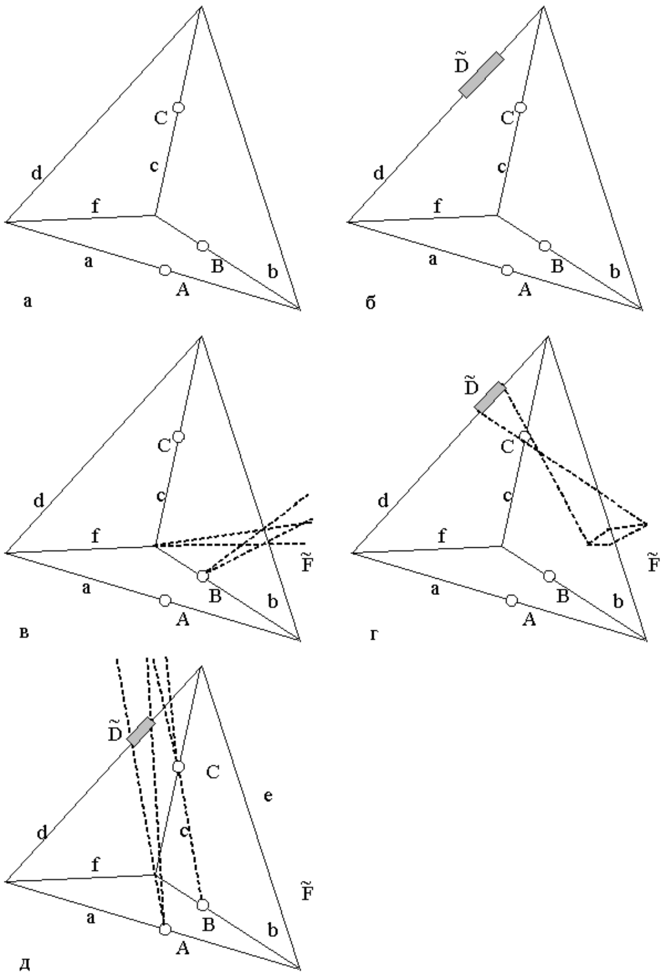


Рис. 2.17. Поэтапное решение задач с нечеткими образами

3. Аффинное информационное пространство

Исходным пунктом информационной теории являются свойства они были фиксированы в старейшей геометрической теории— в обычном трехмерном евклидовом информационном пространстве. В частности, и аффинное информационное пространство имеет тот же источник; а именно, анализ различных информационных свойств материальных сущностей, размещенных в информационном пространстве, показывает, что они не все равноценны по степени своей устойчивости, но степени той прочности, с которой они связаны с сущностями. Одни, как, например, отношение любым образом расположенных отрезком, величина угла, свойство фигуры быть кругом или шаром и т. д., сохраняются лишь при движениях пространства как твердого тела (и преобразованиях подобия); другие, более устойчивые, как, например, отношение параллельных отрезков, параллельность двух прямых, свойство фигуры быть прямой линией или плоскостью и т. д., сохраняются, кроме того, и при всех аффинных (линейных при записи в декартовых координатах) преобразованиях пространства. Этот, более глубоко лежащий и более прочно связанный с геометрическими фигурами класс свойств и образует аффинную геометрию, которой мы будем заниматься в этом разделе.

Однако при построении аффинного информационного пространства мы не пойдем путем выделения аффинных информационных свойств из числа евклидовых, напротив, мы сформулируем самостоятельную систему аксиом, достаточную для вывода всех аффинных информационных свойств, и притом не только в трехмерном, но и в многомерном информационном пространстве. Позже мы построим на этой базе и евклидово информационное пространство путем введения добавочных аксиом.

3.1. Точечно-векторная аксиоматика аффинного информационного пространства

Основными понятиями, не подлежащими прямому логическому определению, будут служить у нас *точка* и *вектор.* (Это, конечно, не означает, что понятия точки и вектора будут лишены у нас содержания. В общей теории информации они будут определены посредством перечисления их информационных свойств в аксиомах. При этом мы считаем, что теория вещественных (равно как и комплексных) чисел уже построена.) Тогда нам достаточно принять следующие аксиомы.

1°. *Существует по меньшей мере одна точка.*

2°. *Каждой паре точек А, В, заданных в определенном порядке, поставлен в соответствие один и только один вектор.*

Этот вектор мы будем обозначать $\vec{AB}$, но, если понадобится, будем пользоваться обозначением и в виде отдельной (жирной) буквы **a, x** и т. п.

3°. *Для каждой точки А и каждого вектора* **x** *существует одна и только одна точка В такая, что*

$$\vec{AB} = \mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Знак = между векторами (как и между числами) мы будем понимать в смысле тождества, например, в данном случае = означает, что $\vec{AB}$ и **x** — это просто один и тот же вектор. В связи с этим нет надобности обосновывать особыми аксиомами свойства знака = (например, транзитивность), так как это просто свойства логического тождества. В дальнейшем мы именно так со знаком = и будем обращаться.

Следует подчеркнуть, что при наглядном истолковании нашей аксиоматики вектор выступает не в виде направленного отрезка, а в виде параллельного сдвига, которому подвергаются все точки информационного пространства. Поэтому наглядный смысл аксиомы 2° состоит в существовании (единственного) параллельного сдвига, переводящего данную точку *А* в данную точку *В,* а аксиома 3° в сущности означает, что каждый вектор **x** реализуется в виде сдвига, а именно, каждой точке *А* ставит в соответствие определенную точку *В* согласно (3.1).

4°. *(Аксиома параллелограмма.) Если*

$$\vec{AB} = \vec{CD}, \text{ то } \quad \vec{AC} = \vec{BD}.$$

Очевидно, наглядный смысл аксиомы 4° в основном состоит в том, что при равенстве и параллелизме одной пары противоположных сторон четырехугольника то же имеет место и для другой пары.

Перечисленные четыре аксиомы образуют в известном смысле законченную часть предлагаемой аксиоматики: остальные аксиомы относятся к умножению вектора на число и тем самым носят иной характер. Поэтому, прежде чем перечислять остальные аксиомы, рассмотрим следствия аксиом 1° — 4°.

Теорема. *Векторы* $\vec{AA}$ *и* $\vec{BB}$ *для любых точек А, В равны между собой:*

$$\vec{AA} = \vec{BB}. \tag{3.2}$$

Для доказательства достаточно применить аксиому 4°, положив $C \equiv A$, $D \equiv B$. Тогда, очевидно, справедливо равенство $\vec{AB} = \vec{CD}$ (так как оно сводится к $\vec{AB} = \vec{AB}$), а следовательно, по аксиоме 4° справедливо и $\vec{AC} = \vec{BD}$, т. е. $\vec{AA} = \vec{BB}$.

Определение. Вектор $\vec{AA}$ (как было показано, один и тот же при любом выборе точки *A)* носит название *вектор-нуль* и обозначается

$$\vec{AA} = \vec{0} \qquad (3.3)$$

Откладывая вектор $\vec{0}$ от любой точки *М,* мы получаем в качестве результата вектор $\vec{MM}$. Действительно, этот последний вектор равен $\vec{0}$, а так как откладывание данного вектора происходит единственным образом (аксиома 3°), то других возможностей представиться не может.

Теорема. *Если* $\vec{AB} = \vec{CD}$, *то* $\vec{BA} = \vec{DC}$.

Доказательство. Применяя аксиому 4° к $\vec{AB} = \vec{CD}$, получим $\vec{AC} = \vec{BD}$, или, что тоже, $\vec{BD} = \vec{AC}$, откуда снова в силу аксиомы 4° следует

$$\vec{BA} = \vec{DC}.$$

Определение. *Вектор* $\vec{BA}$ *мы будем называть обратным по отношению к вектору* $\vec{AB}$. Вектор, обратный вектору **x**, обозначаем — **x**.

Для каждого вектора **x** существует один и только один обратный ему вектор — **x**. Действительно, представляя **x** в различных видах

$$\mathbf{x} = \vec{AB} = \vec{CD} = \ldots,$$

мы тем не менее получим *лишь один* обратный вектор согласно только что доказанной теореме.

Определение. Пусть нам заданы два каких-нибудь вектора в определенном порядке, например, **x, у**. Выберем произвольно точку *A* и отложим от нее вектор $\vec{AB} = \mathbf{x}$ (аксиома 3°), а затем от точки *B* — вектор $\overrightarrow{BC}$ =**y** (аксиома 3°). Точки *A, C* определяют вектор $\overrightarrow{AC}$ (аксиома 2°), который мы будем называть *суммой* **x + y** вектора **x** и вектора **y** (именно в этом порядке взятых). Итак:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \overrightarrow{AC}$$

или, что то же,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,. \tag{3.4}$$

Теорема. *Вектор* **x + y** *не зависит от выбора точки A (так что сложение векторов — операция однозначная).*

Доказательство. Повторим построение суммы при другом выборе точки *A* и, следовательно, с другими точками *B* и *C.* Новые точки будем обозначать штрихованными буквами. Тогда аналогично (3.4)

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}\,.$$

причем

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{x}, \quad \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{y}.$$

Отсюда согласно аксиоме 4° следует, что

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}$$

Применяя снова аксиому 4° к равенству

$$\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}\,,$$

получаем:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}\,,$$

т. е. результат сложения векторов **x, y** не зависит от выбора начальной точки *A.*

Теорема. *Сложение векторов — операция коммутативная:*

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Из произвольной точки *A* откладываем (аксиома 3°) $\overrightarrow{AB}$ =**x**, затем $\overrightarrow{BC}$ =**y**, так что

$$\overrightarrow{AC} = \mathbf{x}+\mathbf{y}, \tag{3.6}$$

кроме того, из той же точки *A* откладываем $\overrightarrow{AD}$ = **y**.

Так как $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ =**y**, то (аксиома 4°) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC}$ =**x**.

Можно считать, что из точки *A* отложен сначала вектор $\vec{AD}$ = **y**, а затем $\vec{DC}$ =**x**, так что по определению сложения

$$\vec{AC} = \mathbf{x}+\mathbf{y}. \qquad (3.7)$$

Сравнивая равенство (3.7) с (3.6), получаем:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}.$$

Теорема. *Сложение векторов — операция ассоциативная:*

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+ (\mathbf{y}+\mathbf{z}). \qquad (3.8)$$

Доказательство буквально такое же, как и в элементарной векторной алгебре; повторять его мы не будем.

Ассоциативность сложения при любом числе слагаемых векторов является простым следствием соотношения (3.8).

Короче говоря, сложение векторов, как оно у нас установлено, обладает всеми обычными свойствами. В дальнейшем мы будем обращаться с ним столь же непринужденно, как и в обычной векторной алгебре (не делая каждый раз ссылок на соответствующие теоремы).

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x}. \qquad (3.9)$$

Действительно, представим вектор **x** (аксиома 3°) как $\vec{AB}$, а вектор $\vec{0}$ — как $\vec{BB}$. В силу (3.4) $\vec{AB}+\vec{BB}=\vec{AB}$, и тем самым

$$\mathbf{x} + \vec{0} = \mathbf{x}.$$

Далее, всегда справедливо равенство

$$\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \vec{0} \qquad (3.10)$$

Действительно, представим **x** как $\vec{AB}$; тогда — **x** по определению представится как $\vec{BA}$; но $\vec{AB}+\vec{BA}=\vec{AA}$ (согласно (3.4)), а значит,

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \vec{0}.$$

Определение. *Вычесть вектор* **y** *из вектора* **x** *значит найти вектор* **z** *такой, что*

$$\mathbf{z} +\mathbf{y} =\mathbf{x}. \qquad (3.11)$$

Вектор **z** мы будем называть *разностью* **x— y**.

Теорема. *Вычитание — всегда выполнимая и притом однозначная операция.*

Доказательство. Допустим сначала, что разность **z** найдена. Добавим к обеим частям (3.11) вектор —**y**. Получим:

$$\mathbf{z} +\mathbf{y} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x}+(-\mathbf{y}).$$

В силу ассоциативности сложения можно в левой части сложить сначала **y** и —**y**. Это дает $\vec{0}$ в силу (3.10), после чего согласно (3.9) в левой части остается просто **z**. Получаем в результате

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + (-\,\mathbf{y}),$$

т. е. если разность **z** существует, то она обязательно имеет такой вид. Остается показать, что **x**+(—**y**) действительно есть разность. Это легко проверить, складывая **x**+(—**y**) с **y** и убеждаясь, что в результате получается **x**. Итак,

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-\mathbf{y}). \qquad (3.12)$$

Отметим, в частности, что

$$\mathbf{x} - \mathbf{x} = \mathbf{x} + (-\,\mathbf{x}) = \vec{0}\,. \qquad (3.13)$$

Мы переходим теперь ко второй группе аксиом, связанной с операцией умножения вектора на число. Под числами мы будем здесь понимать или вещественные числа — тогда полученное аффинное информационное пространство называется *вещественным* — или комплексные числа — тогда полученное аффинное информационное пространство называется *комплексным.*

В изложении мы не будем разделять эти два случая до тех пор, пока разница между ними не начнет сказываться.

Если мы изучаем вещественное аффинное информационное пространство, то везде в дальнейшем изложении (а не только в формулировке аксиом) под «числами», «численными значениями функций» и т. п. нужно понимать вещественные числа; если же речь идет о комплексном аффинном информационное пространстве, то везде имеются в виду комплексные числа. Можно употреблять вместо чисел вообще элементы некоторого алгебраического информационного поля — тогда мы получим аффинное информационное пространство над этим информационным полем.

5°. *Каждому вектору* **x** *и каждому числу* α *поставлен в соответствие определенный вектор.* Этот вектор мы будем обозначать α**x** и называть *произведением* вектора **x** на число α.

6°. $$1\mathbf{x} = \mathbf{x}. \qquad (3.14)$$

Важнейшее значение этой аксиомы не в том, что умножение на единицу не меняет вектора, а в том, что различными произведениями векторов на числа можно исчерпать все векторы (а не только их подмножество, как это было бы возможно, если бы аксиому 6° исключить).

7°. $$(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}. \qquad (3.15)$$

8°. $$\alpha\,(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}. \qquad (3.16)$$

Аксиомы 7° и 8° выражают два *дистрибутивных* закона: один — для умножения вектора на сумму чисел, другой —для умножения суммы векторов на число. Из них следуют аналогичные правила при любом числе слагаемых.

9°. $$\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}, \tag{3.17}$$

т. е. последовательное умножение вектора на числа β и α сводится к его умножению на их произведение.

Выведем некоторые следствия. Прежде всего при любом **x**

$$0\mathbf{x} = \vec{0}. \tag{3.18}$$

В самом деле, взяв произвольное число α, составим выражение

$$\alpha\mathbf{x}+0\mathbf{x}=(\alpha+0)\mathbf{x}= \alpha\mathbf{x}. \tag{3.19}$$

Мы воспользовались здесь аксиомой 7°. То, что α+0= α, разумеется, нам известно из арифметики чисел и здесь в обосновании не нуждается. Итак,

$$\alpha\mathbf{x}+0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}, \text{ т. е. } 0\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0},$$

согласно (3.13). Тем самым (3.18) доказано.

Далее, отметим, что при любом α

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}. \tag{3.20}$$

Действительно, взяв произвольный вектор **x**, составим выражение α**x**

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha\vec{0} = \alpha(\mathbf{x} + \vec{0}) = \alpha\mathbf{x}$$

Мы воспользовались здесь сначала аксиомой 8°, затем свойством (3.9). Получаем, что

$$\alpha\vec{0} = \alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x} = \vec{0},$$

и (3.20) доказано.

Очевидно, что установленные нами аксиомы и их следствия позволяют беспрепятственно производить по обычным правилам выкладки над векторами с участием операций сложения и умножения на число. Мы и будем в дальнейшем это делать уже без ссылок на аксиомы. Но еще одну очень важную аксиому, которой нам не хватает, мы должны сейчас рассмотреть.

Речь идет о том, что наши аксиомы справедливы для точек и векторов аффинного информационного пространства любого числа измерений n = 0, 1,2, ... и даже n=∞. Поэтому, если мы хотим остановиться на информационном пространстве определенного числа измерений, то нам придется ввести еще одну соответствующую аксиому. Но предварительно нужно сформулировать понятия линейной зависимости и линейной независимости векторов.

Определение. *Пусть дано некоторое число векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$. *Эти векторы называются линейно зависимыми, если можно подобрать числа* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ *так, чтобы имело место соотношение*

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = \vec{0}, \tag{3.21}$$

причем среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *хоть одно не равно нулю. Если же таких чисел подобрать нельзя, то векторы* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *называются линейно независимыми.*

Смысл линейной зависимости векторов состоит и следующем. Так как в соотношении (3.21), по крайней мере, один коэффициент отличен от нуля, то будем считать для определенности $\alpha_1 \neq 0$. Прибавив к обеим частям равенства (3.21) вектор $-\alpha_1\mathbf{x}_1$, получим:

$$\alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m = -\alpha_1\mathbf{x}_1$$

Умножим полученное равенство на

$$-\frac{1}{\alpha_1}$$

почленно:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{x}_2 - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1}\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_1.$$

Обозначая для краткости

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \beta_2, \ \ldots, \ -\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \beta_m,$$

можно записать окончательно

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{x}_m. \tag{3.22}$$

Таким образом, при линейной зависимости векторов один из них (но, вообще говоря, не любой!) может быть выражен в виде линейной комбинации остальных, т. е., говоря коротко, разложен но ним.

Обратное также верно: разложение вида (3.22) означает, очевидно, наличие линейной зависимости между $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$.

Обращая эту характеристику линейной зависимости, получаем, что линейная независимость векторов равносильна тому, что ни один из них не может быть разложен по остальным, так что все они играют, так сказать, самостоятельную роль.

Теперь мы можем сформулировать аксиому размерности.

10° *(Аксиома размерности). Существует n линейно независимых векторов, но любые* n+1 *векторов линейно зависимы между собой.*

Целым неотрицательным числом n можно задаться произвольно, так что аксиома размерности существует в бесчисленном количестве вариантов.

Будем называть n-мерным аффинным информационным пространством множество точек и векторов, удовлетворяющих аксиомам 1°—10°.

Чем больше n, тем большее информационное многообразие векторов, а следовательно, и точек мы имеем в своем распоряжении.

Важно заметить, что аксиома 1° гарантирует существование лишь одной точки (обозначим ее *A),* а следовательно (совместно с 2°), и лишь одного вектора $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. То, что у нас имеются и другие точки и векторы, вытекает исключительно из первой половины аксиомы размерности и притом в случае *n* > 0. Если же *n* = 0, то из аксиомы размерности следует, напротив, что всякий вектор **x** «линейно зависимый», т. е., совпадает с $\vec{0}$, и точка *A* — единственная; *нульмерное аффинное информационное пространство содержит лишь одну точку A и один вектор* $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, случай *n* > 0.

Мы получили довольно простую и легко обозримую аксиоматику *n*-мерного аффинного информационного пространства.

Не следует рассматривать изложенную аксиоматику как панацею решения всех информационно-пространственных задач. Мы хотели сказать ею лишь то, что в *n*-мерном аффинном информационном пространстве можно обращаться с точками и векторами в основном так же, как и в обычной векторной алгебре (в ее аффинной части), с тем лишь отличием, что максимальное число линейно независимых векторов — не обязательно три, а любое *n.*

И именно, чтобы сказать это, мы перечислили те основные свойства точек и векторов, из которых очевидным образом можно вывести все остальные их (аффинные) свойства. Это перечисление и составило нашу аксиоматику.

3.2. Аффинная координатная система

На протяжении этого раздела мы будем рассматривать (не оговаривая этого каждый раз отдельно) исключительно прямоугольные декартовы координаты (в обычном информационном пространстве).

Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$—*орты,* положенные в основу нашей координатной системы (рис. 3.1). Совокупность ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, отложенных из начала *O,* мы будем называть *ортогональным репером.* Составим скалярные произведения ортов:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \tag{3.23}$$

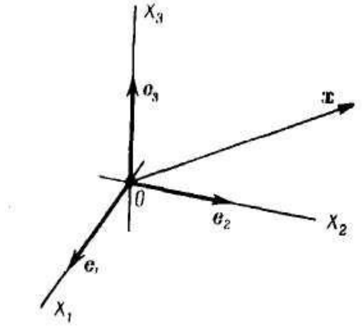


Рис. 3.1.

Рассмотрим произвольный вектор **x**, отложенный для простоты из начала *О*. Как известно, координаты вектора **x** (которые будем обозначать x_1, x_2, x_3) можно определить как коэффициенты разложения

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

и, что означает то же самое, как проекция вектора **x** на оси:

$$x_1 = \mathbf{x}\mathbf{e}_1, \quad x_2 = \mathbf{x}\mathbf{e}_2, \quad x_3 = \mathbf{x}\mathbf{e}_3. \tag{3.24}$$

Здесь проекции записаны в виде скалярных произведений вектора **x** на соответствующие орты.

Вектор **x** выражает какую-нибудь сущность, а именно: геометрический или физический информационный объект, например, параллельный сдвиг твердого тела (заданный по величине и направлению), силу, скорость, напряженность электрического поля в данной точке и т. п. Этот информационный объект имеет реальное существование независимо от того, и какой системе координат мы его рассматриваем и рассматриваем ли мы его вообще. Однако числа x_1, x_2, x_3 — координаты вектора **x** — зависят уже не только от самого вектора **x**, но и от координатной системы, к которой он отнесен.

Между тем, координатные оси можно выбирать со значительным произволом: их можно подвергать произвольным параллельным сдвигам и поворотам около начала *О*.

Таким образом, способ задания векторов **x** координатами x_1, x_2, x_3 отражает и произвол выбора координатных осей. Это обстоятельство является вредным: на картину изучаемых нами векторов (а в дальнейшем и более сложных информационных объектов) накладывается, вообще говоря, случайный выбор координатных осей. Вследствие этого изучаемая картина усложняется излишними подробностями. Мы увидим далее, что основная задача общей теории информации — разобраться в создавшемся положении, научиться выделять то существенное, что относится к самим изучаемым объектам, и отбрасывать то случайное, что привнесено произвольным выбором координатных осей.

Для этой цели нужно выяснить прежде всего, как меняются координаты неизменного вектора **x** вследствие перехода от одних координатных осей к другим.

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать лишь поворот осей (включая и зеркальное отражение) около неподвижного начала *O*. Параллельных сдвигов осей мы, таким образом, не рассматриваем. Это объясняется тем, что в большинстве геометрических и физических приложений положение начала *O* или вообще не играет роли (как, например, для подсчета координат вектора) или, наоборот, естественно определяется (большей частью — это та точка, в бесконечно малой окрестности которой изучается геометрическая или физическая картина).

В обоих случаях нет надобности рассматривать параллельные сдвиги осей, и начало *O* можно считать неподвижным.

Итак, пусть мы перешли при неподвижном начале *O* от старого ортогонального репера $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к такому же новому реперу $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$. Этот переход можно задать, выразив новые орты в разложении по старым:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= A_{11}\mathbf{e}_1 + A_{12}\mathbf{e}_2 + A_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= A_{21}\mathbf{e}_1 + A_{22}\mathbf{e}_2 + A_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= A_{31}\mathbf{e}_1 + A_{32}\mathbf{e}_2 + A_{33}\mathbf{e}_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

Из этих соотношений немедленно следует, что скалярное произведение $\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_2$ равно A_{12} и вообще

$$A_{ij} = \mathbf{e}'_i\mathbf{e}_j \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{3.26}$$

Другими словами, A_{ij} совпадает со скалярным произведением *i*-го нового орта на *j*-й старый орт, т. е. с косинусом угла между этими ортами.

Выразим теперь старые орты через новые при помощи обратной матрицы A'_{ij}:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= A'_{11}\mathbf{e}'_1 + A'_{12}\mathbf{e}'_2 + A'_{13}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 &= A'_{21}\mathbf{e}'_1 + A'_{22}\mathbf{e}'_2 + A'_{23}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_3 &= A'_{31}\mathbf{e}'_1 + A'_{32}\mathbf{e}'_2 + A'_{33}\mathbf{e}'_3. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Аналогично предыдущему получим:

$$A'_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}'_j \quad (i, j=1, 2, 3). \tag{3.28}$$

Сравнивая (3.26) с (3.28), мы замечаем, что

$$A'_{ij} = A_{ij}, \tag{3.29}$$

т.е. матрицы $\| A_{ij} \|$ и $\| A'_{ij} \|$ — взаимно транспонированные. Но, кроме того, они и взаимно обратные, так как определяют взаимно обратные преобразовании (3.25) и (3.27).

Итак, чтобы получить матрицу, обратную $\| A_{ij} \|$, достаточно ее транспонировать. Матрицы с этим свойством называются *ортогональными.* То, что матрицы $\| A_{ij} \|$, $\| A'_{ij} \|$ взаимно обратные можно записать в виде равенства их произведения единичной матрице:

$$\sum_s A_{js} A'_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k), \\ 1 & (j = k), \end{cases}$$

или согласно (3.29)

$$\sum_s A_{js} A_{ks} = \delta_{jk}. \qquad (3.30)$$

Перемножая эти же матрицы в обратном порядке, получим аналогично:

$$\sum_s A_{sj} A_{sk} = \delta_{jk}. \qquad (3.31)$$

Каждое из соотношений (3.30), (3.31), очевидно, равносильно ортогональнсти матрицы.

Пользуясь формулами (3.30), легко показать, что ортогональность матрицы $\| A_{ij} \|$ не только необходима, но и достаточна для того, чтобы формулы (3.25) давали переход ортогонального репера снова к ортогональному реперу.

Ортогональная матрица имеет определитель ± 1.

И самом деле, равенства (3.30) показывают, что, умножая определитель ортогональной матрицы на себя (причем строки умножаются на строки), мы получаем определитель единичной матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом, квадрат определителя ортогональной матрицы ранен 1, а сам определитель ранен ± 1.

Положительный знак означает, что новый ортогональный репер имеет ту же ориентацию, что и старый, а отрицательный —что ориентация репера меняется на обратную (правый заменяется левым, и наоборот).

Посмотрим теперь, как будут меняться координаты неизменного вектора **x** при повороте осей. Запишеем формулы (3.24) в старой координатной системе:

$$x_i = \mathbf{x}\mathbf{e}_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

и аналогично, в новой координатной системе:

$$x'_i = \mathbf{x}\mathbf{e}'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Умножая скалярно на **x** равенства (3.25) и пользуясь последними формулами, получим:

$$x'_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3,$$
$$x'_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3,$$
$$x'_3 + A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3.$$

Другими словами, при повороте осей координаты каждого данного вектора подвергаются тому же ортогональному преобразованию (3.25), что и орты. Эти преобразования мы будем записывать кратко:

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i, \qquad (3.32)$$

$$x'_p = \sum_i A_{pi}x_i. \qquad (3.33)$$

Индекс, по которому происходит суммирование, пробегает значения 1, 2, 3. Равным образом свободным буквенным индексам в формулах можно придавать любое из этих значений. Преобразования, обратные (3.32) и (3.33), запишутся аналогичным образом:

$$\mathbf{e}_i = \sum_p A'_{ip}\mathbf{e}'_p = \sum_p A_{pi}\mathbf{e}'_p, \qquad (3.34)$$

$$x_i = \sum_p A'_{ip}x'_p = \sum_p A_{pi}x'_p. \qquad (3.35)$$

Мы воспользовались здесь соотношением (3.28).

Рассмотрим теперь в n-мерном аффинном информационном пространстве наиболее естественные координатные системы, геометрически связанные со свойствами информационного пространства. Указания для первой ориентации в этом направлении дает нам аксиома размерности.

В самом деле, согласно ей в информационном пространстве существует n линейно независимых векторов. Выберем их каким-нибудь образом и обозначим $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Присоединяя к этим векторам *любой вектор* **x**, мы получим n+1 уже линейно зависимых векторов согласно второй половине аксиомы.

Запишем эту линейную зависимость

$$\alpha\mathbf{x} + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = 0 \qquad (3.36)$$

(в дальнейшем, мы перестаем писать стрелку над вектором-нуль).

Будем утверждать, что $\alpha \neq 0$. Действительно, если бы $\alpha = 0$, то у нас осталась бы линейная зависимость между $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, что противоречит выбору этих векторов. Выражая теперь из линейной зависимости **x** через остальные векторы, получаем его разложение (аналогично выводу (3.22) из (3.21)):

$$\mathbf{x}=x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n \qquad (3.37)$$

Через $x^1, x^2, \ldots , x^n$ обозначены коэффициенты разложения;

$x^1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha}$ и т. д. Запись индекса наверху является не случайной; она, как мы увидим, будет указывать на характер преобразования этих коэффициентов.

Итак, *любой вектор n-мерного аффинного информационного пространства может быть разложен по n как-либо выбранным линейно независимым векторам.*

В случае n=1 любой вектор **x** может быть записан в виде

$$\mathbf{x}=x^1\,\mathbf{e}_1, \qquad (3.38)$$

что соответствует положению вещей на прямой линии, где все векторы коллинеарны между собой.

В случае n = 2 любой вектор **x** разлагается но двум данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 \qquad (3.39)$$

что дает картину плоскости, аффинную геометрию которой мы в этом случае и получаем.

В случае n = 3 любой вектор **x** можно разложить по трем данным линейно независимым векторам:

$$\mathbf{x}=x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3. \qquad (3.40)$$

Геометрия трехмерного аффинного информационного пространства, которую мы в этом случае получаем, и есть геометрия нашего обычного пространства с сохранением лишь ее аффинных свойств (о чем шла речь в начале этого раздела).

Возвращаемся к n-мерному случаю. Мы будем называть *аффинным репером* совокупность какой-нибудь точки O (начало репера) и каких-нибудь n занумерованных линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (которые для наглядности будем представлять себе отложенными из начала O).

Пусть некоторый аффинный репер нам задан. Тогда любой вектор **x** разлагается по векторам репера согласно (3.37). *Коэффициенты разложения $x^1, x^2, \ldots , x^n$ мы будем называть аффинными координатами вектора* **x** *относительно данного репера.*

Эти координаты определяются единственным образом. В самом деле, если бы вектор **x** допускал два *различных* разложения

$$\mathbf{x}=x^1\,\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n= \tilde{x}^1\,\mathbf{e}_1 + \ldots + \tilde{x}^n\,\mathbf{e}_n$$

где не все x^i были бы равны соответствующим $\tilde{x}^i$, то оказалось бы, что $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно зависимы, так как

$$(x^1 - \tilde{x}^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (x^n - \tilde{x}^n)\,\mathbf{e}_n = 0;$$

но это невозможно.

Обратно, вектор $\mathbf{x}$ однозначно определяется своими координатами согласно (3.37), так что соответствие между векторами $\mathbf{x}$ и совокупностями их координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ является взаимно однозначным. В частности, вектор-нуль имеет все координаты, равные нулю.

Посмотрим, как выглядят операции над векторами с точки зрения их координатного задания. Пусть даны два вектора:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n, \qquad (3.41)$$

$$\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + \ldots + y^n\mathbf{e}_n. \qquad (3.42)$$

Складывая эти равенства почленно и преобразуя правую часть при помощи известных правил, получим:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (x^n + y^n)\,\mathbf{e}_n. \qquad (3.43)$$

Это означает, что *координаты суммы двух (и аналогично нескольких) векторов получаются сложением соответствующих координат этих векторов.*

Далее, умножая (3.41) на какое-либо число α, мы получим:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha x^n\mathbf{e}_n. \qquad (3.44)$$

Это означает, что при умножении вектора на число α каждая его координата умножается на это число.

Объединяя операции сложения и умножения на число, рассмотрим составление линейной комбинации данных векторов. Пусть нам дано m векторов:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= x_1^1\mathbf{e}_1 + x_1^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_1^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{x}_2 &= x_2^1\mathbf{e}_1 + x_2^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_2^n\mathbf{e}_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{x}_m &= x_m^1\mathbf{e}_1 + x_m^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_m^n\mathbf{e}_n \end{aligned}\right\} \qquad (3.45)$$

Составим их линейную комбинацию $\mathbf{x}$ с произвольными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{x}_m. \qquad (3.46)$$

Умножая разложения (3.45) соответственно на $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и складывая почленно, убеждаемся, что координаты линейной комбинации $\mathbf{x}$:

$$x^1, x^2, \ldots, x^n \qquad (3.47)$$

образуют линейную комбинацию строк матрицы

$$\left\| \begin{matrix} x_1^1 x_1^2 \dots x_1^n \\ x_2^1 x_2^2 \dots x_2^n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m^1 x_m^2 \dots x_m^n \end{matrix} \right\| \qquad (3.48)$$

с теми же коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, а именно:

$$x^i = \alpha_1 x_1^i + \alpha_2 x_2^i + \dots + \alpha_m x_m^i. \qquad (3.49)$$

Пусть векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$ *линейно зависимы.* Тогда коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ (не обращающиеся одновременно в нуль) можно подобрать так, что будет равна нулю линейная комбинация $\mathbf{x}$, а вместе с нею и все ее координаты (3.47). Это значит, что обращается в нуль линейная комбинация строк матрицы (3.48), а следовательно, *между строками этой матрицы имеется линейная зависимость.*

Существование линейной зависимости между строками матрицы (3.48) *не только необходимо, но и достаточно для линейной зависимости векторов* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_m$, в чем убеждаемся, проводя рассуждение в обратном порядке.

Мы ввели координаты для векторов; но это нетрудно теперь сделать и для точек. Пусть *М* — любая точка рассматриваемого информационного пространства. Ей однозначно отвечает вектор $\vec{OM}$, где *О* — начало репера. Этот вектор будем называть *радиусом-вектором* данной точки; он, как и всякий вектор, обладает определенными координатами $x^1, x^2, ..., x^n$ относительно аффинного репера:

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \dots + x^n\mathbf{e}_n. \qquad (3.50)$$

Аффинными координатами точки *М* относительно данного репера будем называть аффинные координаты $x^1, x^2, ..., x^n$ ее радиуса-вектора $\vec{OM}$ относительно того же репера.

Очевидно, таким образом, что координаты данной точки *М* определяются однозначно. Обратно, при задании координат $x^1, x^2, ..., x^n$ радиус-вектор точки *М* однозначно определяется согласно (3.50), а откладывая его затем от начала *О,* мы однозначно определим точку *М.*

Таким образом, задание аффинного репера влечет построение аффинной координатной системы и для векторов и для точек.

Если точки *А* и *В* имеют соответственно координаты x^i и y^i, то такие же координаты имеют и векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, а так как

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB},$$

то

$$y^i = x^i + z^i$$

где z^i — координаты вектора $\vec{AB}$, и окончательно

$$z^i = y^i - x^i.$$

Аффинные координатные системы наиболее естественно связаны с геометрическими свойствами рассматриваемого нами n-мерного аффинного информационного пространства, хотя в нем возможны и другие (криволинейные) координатные системы.

На протяжении этого раздела мы будем рассматривать только аффинные координатные системы и *под словами «координатная система» всегда будем понимать аффинную координатную систему.*

3.3. Преобразование аффинного репера

Естественно возникает вопрос, с какой степенью произвола можно выбирать аффинный репер и каким образом переходить от одного репера к другому. Мы займемся вопросом о преобразовании векторов репера $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$, так как в связи с переносом его начала O никаких вопросов не возникает: начало O можно по желанию передвигать в любое положение. Кроме того, как мы увидим, в интересующих нас вопросах выбор начала O большей частью будет безразличен. Дело в том, что мы будем пользоваться координатами не столько для точек, сколько для векторов, а в этом случае положение начала O совершенно не играет роли.

Пусть $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$ — это 1-й, 2-й, ..., n-й векторы некоторого нового аффинного репера, занумерованные для отличия штрихованными индексами.

Каждый из этих векторов согласно (3.37) может быть разложен по векторам старого репера $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$. Коэффициенты этих разложений мы будем обозначать буквой A с соответствующими индексами:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{1'} &= A_{1'}^1\mathbf{e}_1 + A_{1'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{1'}^n\mathbf{e}_n, \\ \mathbf{e}_{2'} &= A_{2'}^1\mathbf{e}_1 + A_{2'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{2'}^n\mathbf{e}_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{e}_{n'} &= A_{n'}^1\mathbf{e}_1 + A_{n'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{n'}^n\mathbf{e}_n, \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

или, объединяя эти формулы в общей записи, можно написать:

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^1\mathbf{e}_1 + A_{i'}^2\mathbf{e}_2 + \ldots + A_{i'}^n\mathbf{e}_n. \tag{3.52}$$

В этом равенстве, как и во всех дальнейших, мы будем подразумевать, что буквенному индексу, встречающемуся по одному разу в каждом одночленном выражении, можно давать любые значения 1, 2, ..., *n,* т. е. что фактически имеется в виду не одно, а *п* равенств (если такой индекс один).

В нашем случае имеется буквенный индекс *i*', которому, как мы подразумеваем, по очереди придаются значения 1', 2', ..., *n'*. В результате (3.52) означает в краткой записи то же самое что и (3.51).

Нетрудно заметить, что при помощи знака ∑ можно записать (3.52) следующим образом:

$$\mathbf{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{n} A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i. \tag{3.53}$$

Суммирование происходит здесь лишь но нештрихованному индексу *i*, в то время как индекс *i*' сохраняет постоянное значение. Таким образом, здесь и в аналогичных случаях дальше мы будем рассматривать буквенные индексы, обозначенные одной и той же буквой, но в одном случае штрихованной, а в другом—нештрнхованной (как сейчас у нас *i* и *i'), как принимающие значения один независимо от другого.*

То, что индекс суммирования *i* встречается дважды, один раз наверху, а другой раз внизу, является, как мы дальше увидим, не случайным. Такого типа суммы нам будут встречаться часто, и для сокращения записи мы условимся в этих случаях опускать знак ∑. Так, (3.53) мы будем записывать просто:

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^{i} \mathbf{e}_i, \tag{3.54}$$

подразумевается суммирование по *i* от 1 до *n.*

Общее правило: *пусть дано выражение, записанное в виде буквы, снабженной индексами; пусть при этом какой-либо буквенный индекс встречается дважды, один раз вверху и один раз внизу; тогда мы будем считать, что написанное обозначает сумму этого рода выражений для значений* 1, 2, ..., *n, пробегаемых данным индексом. Если таких (встречающихся один раз вверху и один раз внизу) индексов несколько, то подразумевается суммирование по каждому из них.* Например, выражение Φ_{ikl}^{ik} мы будем понимать так:

$$\Phi_{ikl}^{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ikl}^{ik}, \tag{3.55}$$

так что фактически это выражение будет зависеть лишь от одного индекса, именно *l*, который мы будем называть *свободным* в отличие от индексов *суммирования.*

В связи со сказанным обозначения индексов суммирования не играют, конечно, никакой роли; так, если вместо Φ^{ik}_{ikl} написать, например, Φ^{pq}_{pql}, обозначив индексы суммирования *p, q* вместо *i*, *k*, то по смыслу равенства (3.55) результат нисколько не изменится:

$$\Phi^{ik}_{ikl} = \Phi^{pq}_{pql}.$$

Этим обстоятельством мы часто будем впоследствии пользоваться в процессе выкладок.

Все, что было только что сказано относительно сокращенной записи суммы для выражений, обозначенных просто буквой с индексами, полностью относится и к произведениям такого рода выражений. Пример сокращенной записи в этом случае мы имеем уже в формуле (3.54).

Позже мы узнаем принципиальный смысл суммирования указанного типа и тогда уточним и употребление сокращенного обозначения.

Возвращаемся теперь к вопросу преобразования аффинного репера. Векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$ могут быть выбраны произвольно с единственным условием линейной независимости. Но линейная независимость векторов $\mathbf{e}_{i'}$ равносильна линейной независимости строк матрицы преобразования (3.51):

$$\begin{Vmatrix} A^1_{1'} & A^2_{1'} & \dots & A^n_{1'} \\ A^1_{2'} & A^2_{2'} & \dots & A^n_{2'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^1_{n'} & A^2_{n'} & \dots & A^n_{n'} \end{Vmatrix} \qquad (3.56)$$

(ср. с (3.48)). Другими словами, соответствующий определитель должен быть отличным от нули:

$$\mathrm{Det}|\, A_{i'}^{\ i}\, | \neq 0. \qquad (3.57)$$

Это и есть едниственное условие, наложенное на преобразование векторов репера (3.51). В остальном коэффициенты $A_{i'}^{\ i}$ произвольны. Тем самым матрица (3.51) допускает обратную матрицу, элементы которой мы будем обозначать $A^{i'}{}_{i}$ (штрихованный индекс наверху!):

$$\begin{Vmatrix} A^{1'}_1 & A^{2'}_1 & \dots & A^{n'}_1 \\ A^{1'}_2 & A^{2'}_2 & \dots & A^{n'}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^{1'}_n & A^{2'}_n & \dots & A^{n'}_n \end{Vmatrix}. \qquad (3.58)$$

Если, обратно, выразить векторы старого репера $\mathbf{e}_i$ через векторы нового репера $\mathbf{e}_{i'}$, то придется применить преобразование, обратное преобразованию (3.51), для чего надо воспользоваться вместо матрицы (3.56) обратной матрицей (3.58). В краткой записи, аналогичной (3.54), мы получим:

$$\mathbf{e}_i = A^{i'}{}_i\, \mathbf{e}_{i'} . \qquad (3.59)$$

По общему соглашению здесь имеется в виду суммирование по индексу i', так что в подробной записи получаем:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{1'}\mathbf{e}_{1'} + A_i^{2'}\mathbf{e}_{2'} + \ldots + A_i^{n'}\mathbf{e}_{n'}.$$

Здесь i нужно давать поочередно значения 1, 2, ..., n. То, что матрицы (3.56) и (3.58) *взаимно обратные,* означает, что их произведение, в том или другом порядке, дает единичную матрицу. Элементы единичной матрицы мы будем стандартно обозначать

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

так что связь $A^{i'}{}_i$ и $A_{i'}{}^i$, можно записать так:

$$A_k^{i'} A_{i'}^{k} = \delta_{i'}^{i'}, \qquad A_{k'}^{i} A_i^{k'} = \delta_i^i. \qquad (3.60)$$

По k, равно как и по k', предполагается суммирование от 1 до n по общему соглашению.

Эти формулы можно также получить, подставляя в (3.59) выражение $\mathbf{e}_{i'}$ согласно (3.54) (заменив лишь обозначение индекса суммирования i на какое-нибудь другое, например, j), получим:

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} A_{i'}^{j} \mathbf{e}_j.$$

В правой части подразумевается двойное суммирование: по индексам i и j.

Так как разложение по векторам репера совершается единственным образом, то коэффициенты при $\mathbf{e}_j$ в правой части должны равняться соответствующим коэффициентам в левой части, т. е. нулю, если $j\neq i$, и единице, если $j=i$. В результате

$$A_{i'}^{j} A_i^{i'} = \delta_i^j,$$

что дает вторую из формул (3.60). Аналогично получается и первая из формул (3.60) - подстановкой (3.59) в (3.54).

При переходе к новому реперу каждый вектор $\mathbf{x}$ получает новые координаты, которые мы будем обозначать $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ в отличие от старых x^1, x^2, ..., x^n. Разумеется, что при этом сам вектор $\mathbf{x}$ остается прежним, и изменение координат идет лишь за чет изменении репера.

Спрашивается, как будут выражаться новые координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ через старые, и обратно.

По определению координат вектора мы имеем в старом репере

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = x^i\mathbf{e}_i \qquad (5.61)$$

и аналогично в новом репере

$$\mathbf{x} = x^{1'}\mathbf{e}_{1'} + \ldots + x^{n'}\mathbf{e}_{n'} = x^{i'}\mathbf{e}_{i'}. \qquad (5.62)$$

В правых частях мы прибегли к сокращенной записи с опусканием знака суммы.

Теперь, чтобы решить нашу задачу, мы должны сравнить оба разложения, а для этого вставим в (3.61) выражение $\mathbf{e}_i$ согласно (3.59). Тогда (3.61) принимает вид

$$\mathbf{x} = x^i\, A_i^{i'}\mathbf{e}_{i'}\ . \qquad (3.63)$$

Здесь происходит двойное суммирование: по i и по i'. Сравнивая разложения (3.62) и (3.63), мы должны приравнять коэффициенты при $\mathbf{e}_{i'}$ ввиду единственности разложения вектора **x** по векторам репера. Получим:

$$x^{i'} = A^{i'}{}_i x^i \qquad (3.64)$$

где по i происходит суммирование, так что в подробной записи

$$x^{i'} = A_1^{i'}x^1 + A_2^{i'}x^2 + \ldots + A_n^{i'}x^n. \qquad (3.65)$$

Совершенно аналогично при помощи обратного преобразования выразятся старые координаты через новые:

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'}. \qquad (3.66)$$

Весьма важно для дальнейшего сравнить формулы преобразования *векторов репера* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *и координат инвариантного вектора* $x^1, \ldots, x^n$. Для определенности рассматриваем в обоих случаях переход именно от старого репера к новому и сравниваем формулы (3.64) и (3.64). Мы видим, что матрицы этих преобразований различны, а именно, матрица преобразования (3.64) есть *транспонированная обратная матрица* преобразования (3.54) (такие преобразования называются *контрагредиентными).*

Действительно, матрица преобразования (3.64) (как ясно видно из записи (3.65)) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & \ldots & A_n^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & \ldots & A_n^{2'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1^{n'} & A_2^{n'} & \ldots & A_n^{n'} \end{Vmatrix}, \qquad (3.67)$$

т. е. получается транспонированием (поворотом на 180° вокруг главной диагонали) матрицы (3.58), а эта последняя матрица —взаимно обратная с матрицей (3.56) преобразования (3.54).

Формулы преобразования *векторов репера и координат инвариантного вектора* при переходе от старого репера к новому

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i\mathbf{e}_i, \qquad (3.68)$$

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i \tag{3.69}$$

являются фундаментальными для тензорного исчисления. Они лежат в основе всех тензорных законов преобразования.

Таким образом, преобразование *векторов репера* совершается при помощи произвольной неособенной матрицы (Det| $A_{i'}^{i}$ |≠0), а преобразование *координат вектора* — при помощи транспонированной обратной матрицы.

Мы занимались до сих пор преобразованиями координат вектора, а не точки. Если меняются лишь векторы репера, а начало *O* остается неподвижным, то координаты каждой *точки M* меняются так же, как и координаты ее (неизменного в этом случае) радиуса-вектора $\vec{OM}$, т. е. по закону (3.69). Если же, кроме того, и начало *O* испытывает сдвиг на вектор **a**, то радиусы-векторы всех точек *M* изменяются вследствие этого на вектор —**a** и тем самым координаты x^i всех точек *M* увеличиваются на $A^{i'}$, где $A^{i'}$— координаты вектора — **a**. В результате окончательная формула для преобразования координат x^i неподвижной точки *M* имеет вид

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{3.70}$$

3.4. Об *m*-мерных плоскостях в *n*-мерном аффинном информационном пространстве

Рассмотрим в аффинном информационном пространстве плоскости различных измерений.

Мы будем называть плоскостью множество точек, обладающее следующим свойством. Пусть A, B, C— произвольные точки этого множества. Построим вектор $\vec{AB}$*, умножим его на произвольное число* α *и отложим от точки C, так что получится вектор*

$$\vec{CD} = \alpha \vec{AB}. \tag{3.71}$$

Тогда точка D должна тоже принадлежать нашему множеству.

Всякий вектор $\vec{AB}$, где *A* и *B* принадлежат данной плоскости, будем называть вектором этой плоскости. Из определения плоскости видно, что при умножении на любое число α вектор данной плоскости (например, $\vec{AB}$*)* переходит в вектор той же плоскости (т.е. $\vec{CD}$), и при откладывании вектора данной плоскости из любой ее точки мы приходим в точку той же плоскости (вытекает из определения при $\alpha = 1$).

Теперь ясно, что все аксиомы 1°—9° имеют место для точек и векторов плоскости. Что же касается аксиомы размерности 10°, то она видоизменится: максимально возможное число m линейно независимых векторов на плоскости будет, вообще говоря, меньше n. Число m будем называть *размерностью данной плоскости.*

Мы видим, что m-мерная плоскость в n-мерном аффинном информационном пространстве по свойствам своих точек и векторов представляет собой m-мерное аффинное информационное пространство.

Пользуясь этим обстоятельством, на плоскости всегда можно выбрать аффинный репер, т. е. некоторую точку O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Тогда радиус-вектор $\vec{O^*M}$ любой точки M на этой плоскости разлагается по векторам репера

$$\vec{O^*M} = t^1\,\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\,\mathbf{a}_m, \qquad (3.72)$$

где $t^1, \ldots, t^m$—коэффициенты разложения, которые пробегают всевозможные численные значения, когда точка M описывает данную плоскость.

Одним словом, мы повторяем построение аффинной координатной системы для m-мерного аффинного информационного пространства, каким и является данная m-мерная плоскость.

При этом $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ будет репером, а $t^1, \ldots, t^m$ — соответствующими координатами.

Отсюда вытекает, что всякая m-мерная плоскость может быть построена следующим образом.

Берется некоторая точка O^* и m линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ и *строится множество всех точек M, для которых вектор $\vec{O^*M}$ допускает разложение по* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Последний вопрос, который нам нужно выяснить,—получим ли мы этим путем m-мерную плоскость при *любом* выборе точки O^* и m линейно независимых векторов.

Легко проверить, что ответ будет утвердительным. В самом деле, вектор $\vec{AB}$, соединяющий любые две точки A, B из построенного нами множества, может быть записан в виде

$$\vec{AB} = \vec{O^*B} - \vec{O^*A}$$

и вместе с векторами $\vec{O^*B}$ и $\vec{O^*A}$ допускает разложение по

a$_1$, ..., **a**$_m$; то же остается верным и для вектора $\alpha\vec{AB}$; откладывая этот вектор от произвольной точки C нашего множества, получаем вектор $\vec{CD} = \alpha\vec{AB}$; так как $\vec{O^*D} = \vec{O^*C} + \vec{CD}$, то $\vec{O^*D}$ вместе с $\vec{O^*C}$ и $\vec{CD}$ разлагается по **a**$_1$, ..., **a**$_m$, а следовательно, точка принадлежит построенному множеству. Тем самым это множество представляет собой плоскость (согласно определению последней) и притом m-мерную, так как m линейно независимых векторов на ней имеются по построению, но все остальные от них линейно зависимы.

Векторы **a**$_1$, ..., **a**$_m$ мы будем называть *направляющими векторами* данной плоскости.

Соотношения (3.72) легко позволяют записать уравнения m-мерной плоскости в n-мерном аффинном информационном пространстве. Отнесем последнее к какому-либо аффинному реперу $\{O$, **e**$_1$, ..., **e**$_n\}$. Тогда радиус-вектор любой точки M из m-мерной плоскости может быть записан в виде

$$\vec{OM} = \vec{OO^*} + \vec{O^*M} = \vec{OO^*} + t^1\mathbf{a}_1 + \ldots + t^m\mathbf{a}_m. \tag{3.73}$$

Здесь $\vec{OO^*}$, **a**$_1$, ..., **a**$_m$ — постоянные векторы, а t^1, ..., t^m — независимые переменные (аффинные координаты на плоскости), так что (3.73) можно рассматривать как параметрическое уравнение данной плоскости в векторной форме.

Переходя в равенстве (3.73) от векторов к их координатам относительно аффинного репера $\{O$, **e**$_1$, ..., **e**$_n\}$, получим параметрические уравнения данной плоскости в координатной форме:

$$x^i = a^i + t^1a^i_1 + t^2a^i_2 + \ldots + t^m a^i_m. \tag{3.74}$$

Здесь x^i — координаты вектора $\vec{OM}$, а значит, и самой точки M, a^i — постоянные координаты вектора $\vec{OO^*}$, a^i_1 — постоянные координаты вектора **a**$_1$ и т. д.

В итоге текущие координаты x^i произвольной точки M нашей m-мерной плоскости выражаются линейными функциями m независимых *параметров* t^1, . . ., t^m, *причем все* m *столбцов матрицы коэффициентов линейно независимы между собой* (что равносильно линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_m$).

Очевидно, что и обратно, уравнения вида (3.74) с условием максимального ранга (= m) для матрицы коэффициентов (т. е. с условием линейной независимости столбцов этой матрицы) всегда определяют m-мерную плоскость. Это легко проверить обратным переходом к векторной записи.

Наконец, уравнения m-мерной. плоскости можно дать в неявной записи. Для этого достаточно из n уравнений (3.74) исключить m параметров t^1, ..., t^m, что всегда выполнимо в силу максимального ранга m матрицы коэффициентов. Считая, что ранговый минор матрицы образован, например, первыми m ее строками, мы можем выразить
t^1, ..., t^m через x^1, ..., x^m из первых m уравнений (i =1, 2, ...,m). Подставляя эти выражения в остальные уравнения (i = m+1, ..., n), мы получим:

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} = b_1^{m+1}x^1 + \ldots + b_m^{m+1}x^m + b^{m+1}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad x^n = b_1^n x^1 + \ldots + b_m^n x^m + b^n. \end{array}\right\} \tag{3.75}$$

Коэффициенты b^p_q выражаются через коэффициенты a^i_i, но как именно — нас сейчас не интересует.

Итак, m-мерная плоскость может быть задана n — m независимыми линейными уравнениями между текущими координатами
x^1, ..., x_n. Независимость полученных уравнений ясна из того, что в каждом из них выражена координата, отсутствующая в остальных.

То, что, обратно, уравнения вида (3.75) всегда определяют m-мерную плоскость, становится очевидным, если принять x^1, . . ., x^m за независимые параметры x^1, ..., x^n; тогда мы получаем частный случай параметрического задания m-мерной плоскости. Размерность плоскости m может принимать значения 0, 1, 2, ...,n.

В случае m=0 уравнении (3.74) дают

$$x^i = a^i, \tag{3.76}$$

и плоскость сводится к точке. В случае m= 1

$$x^i = a^i + t^1 a^i_1 \tag{3.77}$$

и текущие координаты суть линейные функции одного параметра. Одномерную плоскость мы будем называть *прямой линией.* В векторной форме она задается начальной точкой O^* и одним направляющим вектором $\mathbf{a}_1 \neq 0$.

В случае m=2 мы получаем двумерную плоскость

$$x^i = a^i + t^1 a^i_1 + t^2 a^i_2 \tag{3.78}$$

для которой текущие координаты суть линейные функции двух независимых параметров. В векторной форме она задается начальной точкой O^* и двумя линейно независимыми направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

Аналогично обстоит дело и при остальных значениях *m.* Особо следует отметить случай $m = n—1$, когда плоскость называется *гиперплоскостью.* Гиперплоскость может быть охарактеризована тем, что она задается *одним линейным* уравнением между текущими координатами. Действительно, $n — m$ уравнений (3.75) сводятся в этом случае к одному.

Наконец, определение плоскости допускает и случай $m = n$. Но тогда, очевидно, плоскость просто заполняет все информационное пространство.

Для нас будет особенно важен случай, когда все рассматриваемые плоскости принадлежат одной связке — проходят через фиксированную точку O (которую мы примем за начало координат). Тогда для задания m-мерной плоскости достаточно знать ее направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ \ldots, \mathbf{a}_m$.

Но та же самая плоскость может быть определена и любой другой системой направляющих векторов $\mathbf{a}_{1'}, \ \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ — лишь бы они тоже принадлежали плоскости и были линейно независимы. Разумеется, как здесь, так и далее индекс m' имеет то же численное значение, что и m, и лишь в записи снабжен штрихом. Связь между старыми и новыми направляющими векторами m-мерной плоскости — это в сущности связь между векторами старого и нового репера в n-мерном аффинном информационном пространстве. Мы можем записать ее:

$$\mathbf{a}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{a}_1 + \ldots + A^m_{i'}\mathbf{a}_m \quad (i' = 1', 2', \ldots, m') \ (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| \neq 0), \tag{3.79}$$

и обратное преобразование:

$$\mathbf{a}_i = A^{1'}_i \mathbf{a}_{1'} + \ldots + A^{m'}_i \mathbf{a}_{m'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.80}$$

Неудобство здесь заключается в том, что одна и та же плоскость связки задается весьма разнообразными системами направляющих векторов. Возникает вопрос, нельзя ли систему направляющих векторов заменить чем-то другим, что было бы уже однозначно или почти однозначно связано с плоскостью данной связки. Ответом на этот вопрос является понятие простого поливектора. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

3.5. Бивектор и задание двумерной плоскости

Мы будем называть *бивектором* дважды контравариантный кососимметрический тензор

$$a^{ij} = - a^{ji}. \tag{3.81}$$

Бивектор мы будем называть *простым,* если он составлен из каких-нибудь двух векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ с координатами

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{a}_1\,(a_1^1,\ \ldots,\ a_1^n),\\ \mathbf{a}_2\,(a_2^1,\ \ldots,\ a_2^n)\end{array}\right\} \qquad (3.82)$$

по формуле

$$a^{ij} = \frac{1}{2}\left(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i\right) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix}. \qquad (3.83)$$

Другими словами, простой бивектор получается перемножением контравариантных тензоров a^i_1, a^j_2 с последующей альтернацией:

$$a^{ij} = a_1^{[i} a_2^{j]}. \qquad (3.84)$$

Очевидно, порядок перемножаемых тензоров, т, е. порядок задания векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, играет здесь важную роль: если порядок заменить на обратный, бивектор, как легко заметить из (3.83), умножается на — 1.

Простой бивектор, составленный из двух заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ согласно (3.83), мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и кратко обозначать $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$.

Выясним основные свойства косого произведения. Прежде всего при перестановке множителей оно, как уже отмечалось, меняет знак:

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = -[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1]. \qquad (3.85)$$

Отсюда в случае $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}$ получаем:

$$[\mathbf{aa}] = -[\mathbf{aa}], \quad \text{т. е.} \quad [\mathbf{aa}] = 0. \qquad (3.86)$$

Далее, из *линейной* зависимости координат косого произведения $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$ от координат одного из векторов, например $\mathbf{a}_1$, очевидно, следует, что при умножении $\mathbf{a}_1$ на произвольное число α бивектор умножается на то же число:

$$[\alpha\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2], \qquad (3.87)$$

а также, что при замене $\mathbf{a}_1$ суммой двух (или нескольких) векторов бивектор распадается на сумму соответствующих бивекторов:

$$[\mathbf{a}'_1+\mathbf{a}''_1\mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}'_1\mathbf{a}_2] + [\mathbf{a}''_1\mathbf{a}_2]. \qquad (3.88)$$

Теперь нетрудно заметить, что для *линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *необходимо и достаточно обращение в нули их косого произведения.*

В самом деле, если $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ линейно зависимы, например $\mathbf{a}_2=\alpha\mathbf{a}_1$, то

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = [\mathbf{a}_1, \alpha\mathbf{a}_1] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0.$$

Обратно, если $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2] = 0$, то согласно (3.83)

$$\begin{vmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. обращаются в нуль все миноры 2-го порядка матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 a_2^2 & \dots & a_2 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, между строками этой матрицы, а тем самым и между векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, имеется линейная зависимость.

Далее, исследуем вопрос, как меняется косое произведение векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ при их линейном преобразовании:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_{1'} &= A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2, \\ \mathbf{a}_{2'} &= A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \right\} \qquad (3.89)$$

Составим косое произведение преобразованных векторов $\mathbf{a}_{1'}$, $\mathbf{a}_{2'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'} \mathbf{a}_{2'}] = [(A_{1'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{a}_2)\,(A_{2'}^1 \mathbf{a}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{a}_2)].$$

Раскрывая в правой части скобки, т. е. перемножая сумму на сумму почленно (согласно (3.88)), отбрасывая равные нулю косые произведения линейно зависимых векторов и вынося численные множители за знак косого произведения (согласно (4.87)), получим:

$$[\mathbf{a}_{1'} \mathbf{a}_{2'}] = A_{1'}^1 A_{2'}^2 [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] + A_{1'}^2 A_{2'}^1 [\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1] = \begin{vmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 \end{vmatrix} [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]. \qquad (3.90)$$

При последнем преобразовании мы воспользовались свойством (3.85).

Итак, косое произведение двух векторов в результате линейного преобразования этих векторов умножается на определитель линейного преобразования.

Допустим теперь, что векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ играют роль направляющих векторов некоторой двумерной плоскости и, следовательно, линейно независимы. Тогда линейное преобразование (3.89) с определителем, отличным от нуля, означает, очевидно, переход к любой другой паре направляющих векторов той же плоскости. Так как косое произведение $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$ приобретает при этом лишь численный множитель (не равный нулю), то мы получим следующий результат.

Косое произведение направляющих векторов двумерной плоскости, рассматриваемое с точностью до численного множителя (не равного нулю), зависит только от самой плоскости и не зависит от выбора направляющих векторов на ней.

Таким образом, каждой двумерной плоскости сопоставляется определенный с точностью до численного множителя простой бивектор $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2]$, который мы будем называть ее *направляющим бивектором.* Он никогда не равен 0 в силу линейной независимости $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$.

Ясно, что, беря всевозможные плоскости, мы будем получать в качестве направляющих бивекторов всевозможные простые бивекторы.

Будем называть две плоскости одного числа измерений *параллельными,* если одна получается из другой сдвигом всех ее точек на постоянный вектор. Очевидно, при этом векторы одной плоскости переходят в равные им векторы другой плоскости. Следовательно, и направляющие векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ можно брать для параллельных плоскостей общими. А следовательно, в случае параллельных *двумерных* плоскостей общими будут и направляющие бивекторы.

Итак, параллельные двумерные плоскости обладают одним и тем же (определенным с точностью до численного множителя) направляющим бивектором.

Обратно, если две двумерные плоскости имеют один и тот же (определенный с точностью до численного множителя) направляющий бивектор, то эти плоскости параллельны. В самом деле, пусть одна плоскость имеет направляющий бивектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]$, а другая - $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$. С точностью до численного множители эти бивекторы должны совпадать, так что

$$[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]=\alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2],$$

т. е. согласно (3.83)

$$\frac{1}{2}\left(b_1^i b_2^j - b_1^j b_2^i\right) = \frac{\alpha}{2}\left(a_1^i a_2^j - a_1^j a_2^i\right).$$

Свернем это равенство почленно с ковариантным тензором c_j, который подобран так, что

$$b_1^j c_j = 0, \quad b_2^j c_j = 1. \tag{3.91}$$

Этого, очевидно, всегда можно добиться ввиду линейной независимости направляющих векторов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, а следовательно, и строк матрицы

$$\begin{Vmatrix} b_1^1 & \ldots & b_1^n \\ b_2^1 & \ldots & b_2^n \end{Vmatrix}.$$

В результате свертывания получим (отбрасывая множители $\frac{1}{2}$):

$$b_1^i \cdot b_2^j c_j - b_2^i \cdot b_1^j c_j = a_1^i\left(\alpha a_2^j c_j\right) - a_2^i\left(\alpha a_1^j c_j\right).$$

Учитывая равенства (3.91) и обозначая инварианты $\alpha a^j_1 c_j$,—a $a^j_2 c_j$ через β^1, β^2, получаем окончательно:

$$b_1^i = \beta^1 a_1^i + \beta^2 a_2^i. \tag{3.92}$$

Мы видим, что тензор b^j_1 оказывается линейной комбинацией тензоров a^j_1, a^j_2, т. е. вектор $\mathbf{b}_1$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. То же самое справедливо и для $\mathbf{b}_2$.

В результате направляющие векторы $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ второй плоскости принадлежат и первой плоскости, а следовательно, могут служить и ее направляющими векторами. Таким образом, при построении обеих плоскостей разница может быть лишь в выборе начальной точки O^*. Пусть O^*_1, O^*_2—начальные точки наших плоскостей. Тогда сдвигом на вектор $\overrightarrow{O^*{}_1 O^*{}_2}$, мы приводим начальную точку O^*_1 в совпадение с O^*_2, а так как направляющие векторы и без того общие, то первая плоскость придет в совпадение со второй. Следовательно, наши плоскости параллельны, и утверждение доказано.

Окончательный вывод: *для того чтобы две двумерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие бивекторы были одинаковы с точностью до численного множителя.*

Таким образом, направляющий бивектор характеризует целую совокупность параллельных между собой двумерных плоскостей, заполняющих все пространство, т.е., как мы будем говорить, *характеризует двумерное направление в пространстве.*

Если мы рассматриваем только плоскости некоторой связки (т. е. плоскости, проходящие через фиксированную точку O), то в нашей формулировке вместо *параллелизма* плоскостей следует говорить просто об их *совпадении.*

3.6. Основные свойства *m*-векторов

Результаты предыдущего пункта полностью переносятся с двумерного случая на случай любого числа измерений.

Тензор $a^{i_1 \dots i_m}$, m раз контравариантный и кососимметрический по всем своим индексам, мы будем называть *m-вектором (поливектором).*

m -вектор мы будем называть *простым,* если он составлен из каких-нибудь m заданных в определенном порядке векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ по формуле

$$a^{i_1 i_2 \dots i_m} = a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]} = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} a_1^{i_1} & a_1^{i_2} & \dots & a_1^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{i_1} & a_m^{i_2} & \dots & a_m^{i_m} \end{vmatrix}. \qquad (3.93)$$

Другими словами, мы перемножаем в заданном порядке тензоры $a^{i_1}{}_1$, $a^{i_2}{}_2$,. . ., $a^{i_m}{}_m$, образованные координатами наших векторов, и результат альтернируем по всем индексам $i_1, i_2, \dots, i_m$.

Нужно помнить при этом, что нижние индексы здесь не тензорные, а номера заданных векторов; альтернация, следовательно, к ним относится не может.

Правильность записи в виде определителя проверяется без труда, если сопоставить определение альтернации по m индексам с правилом составления определителя m -го порядка в виде суммы m! членов. Действительно, и в том и другом случае мы должны в произведении $a^{i_1}{}_1,\ a^{i_2}{}_2, \ldots,\ a^{i_m}{}_m$ (это произведение элементов по главной диагонали определителя) проделать всевозможные подстановки из индексов $i_1, i_2, \ldots, i_m$ и сложить полученные результаты, беря их со знаком ± в зависимости от четности или нечетности подстановки (в случае альтернации к этому еще присоединяется деление на m!).

Простой m -вектор (3.93) мы будем называть *косым произведением* векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и обозначать кратко $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$.

m -векторы вообще и простые в частности имеет смысл рассматривать лишь при $m = 1, 2, 3, \ldots, n$. Дело в том, что при $m > n$ всякий m - вектор тождественно ранен нулю.

Действительно, среди m индексов каждой его координаты обязательно должны найтись, по крайней мере, два одинаковых, а следовательно, каждая его координата равна нулю.

Полагая $m = n$, рассмотрим произвольный n -вектор $a^{i_1 \ldots i_n}$ (как увидим, он всегда будет простым). Всякий n-вектор имеет лишь одну существенную координату $a^{12\ldots n}$. Действительно, все остальные его координаты $a^{i_1 \ldots i_n}$ или равны нулю, если среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ имеется хоть два одинаковых, или равны $\pm a^{12\ldots n}$, если все индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ различные и, следовательно, получаются из $1, 2, \ldots, n$ некоторой подстановкой (± в зависимости от четности или нечетности этой подстановки).

В связи с этим любые два n-вектора $a^{i_1 \ldots i_n}$ и $b^{i_1 \ldots i_n}$ отличаются друг от друга лишь инвариантным численным множителем:

$$b^{i_1 \ldots i_n} = \lambda a^{i_1 \ldots i_n}, \tag{3.94}$$

если положить

$$\lambda = \frac{b^{12\ldots n}}{a^{12\ldots n}} \tag{3.95}$$

(предполагается, что $a^{12\ldots n} \neq 0$).

Действительно, λ подобрано так, что (3.94) соблюдается при $i_1 i_2 \ldots i_n = 12 \ldots n$. Но тем самым оно соблюдается и всегда, так как остальные координаты дпнных n-векторов или такие же, как при

$i_1 i_2$ ... i_n=12 ... n или отличаются лишь знаком, или равны нулю. Инвариантность же коэффициента λ вытекает из того, что $a^{i_1 \dots i_n}$ и $b^{i_1 \dots i_n}$ преобразуются по одинаковому закону.

Решим теперь еще один важный вопрос, касающийся n-вектора. Так как все его координаты выражаются через координату $a^{12\dots n}$, то закон их преобразования сводится к закону преобразования этой единственно существенной координаты. Этот последний мы и хотим вывести. Запишем тензорный закон преобразования для нашего случая

$$a^{1'2'\dots n'} = A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \dots A^{n'}_{i_n} a^{i_1 i_2 \dots i_n}. \tag{3.96}$$

При суммировании по $i_1 i_2$ ... i_n мы откинем все слагаемые, где среди этих индексов встречаются равные, так как в этом случае все равно $a^{i_1 \dots i_n}$ = 0. Остаются слагаемые, в которых $i_1 i_2$ ... i_n все различны, т. е. получены некоторой подстановкой из 1, 2, . . ., n. Но в таком случае

$$a^{i_1 i_2 \dots i_n} = \pm a^{12\dots n}, \tag{3.97}$$

знак ± выбирается в зависимости от четности или нечетности подстановки. Вставляя выражение для $a^{i_1 \dots i_n}$ из (3.97) в (3.96) и вынося $a^{12\dots n}$ за скобки, получим:

$$a^{1'2'\dots n'} = a^{12\dots n} \sum \pm A^{1'}_{i_1} A^{2'}_{i_2} \dots A^{n'}_{i_n},$$

где сумма берется по всевозможным подстановкам 12 . . . $n \rightarrow i_1 i_2$ ... i_n и представляет собой, очевидно, определитель Det|$A^{i'}_{i}$|. Окончательно получаем:

$$a^{1'2'\dots n'} = a^{12\dots n} \operatorname{Det} | A^{i'}_{i} |. \tag{3.98}$$

Единственная существенная координата n-вектора при переходе в новую координатную систему умножается на определитель Det|$A^{i'}_{i}$|. В связи с этим $a^{12\dots n}$ можно назвать *относительным инвариантом веса* —1. Вообще же *относительным инвариантом веса p (p* — целое) называется величина, имеющая определенное численное значение в каждой координатной системе и при переходе от старой к новой координатной системе умножающаяся на

$$\{\operatorname{Det} | A^{i'}_{i} | \}^{-p} = \{\operatorname{Det} | A^{i}_{i'} | \}^{p}. \tag{3.99}$$

Вернемся к общему случаю простого m -вектора (m = 2, 3, ..., n) (при m =1 мы получаем просто вектор) и установим его основные свойства. Когда в косом произведении [$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m$] мы меняем местами два множителя, то в определителях (3.93), выражающих его координаты, меняются местами две строки, и косое произведение умножается на -1.

Отсюда совершенно так же, как в предыдущем пункте, вытекает, что при наличии двух одинаковых множителей косое произведение обращается в нуль.

Далее, из той же записи (3.93) виден *линейный* характер зависимости координат косого произведения от координат любого из множителей (например, множителя $\mathbf{a}_1$), m координатами которого образована первая строка определителя.

Отсюда совершенно так же, как для бивектора, вытекает

$$[\alpha\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \alpha[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \qquad (3.100)$$

и

$$[\mathbf{a}_1' + \mathbf{a}_1'', \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + [\mathbf{a}_1''\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]. \qquad (3.101)$$

Совершенно теми же свойствами обладает любой множитель косого произведения.

Теперь докажем теорему: *для линейной зависимости векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ *необходимо и достаточно обращение в нуль их косого произведения.*

Необходимость. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ линейно зависимы, например, $\mathbf{a}_1$ разлагается по остальным векторам с коэффициентами $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$

$$\mathbf{a}_1 = \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m$$

Тогда

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = [\alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = \\ = \alpha_2[\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] + \ldots + \alpha_m[\mathbf{a}_m\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0.$$

Равенство нулю вытекает из того, что в каждом из полученных косых произведений имеется два одинаковых множителя.

Достаточность. Пусть $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] = 0$; тогда обращаются в нуль все определители (3.93), т. е. все миноры m-го порядка матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_1^1\, a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_m^1\, a_m^2 & \ldots & a_m^n \end{Vmatrix}, \qquad (3.102)$$

образованной координатами наших векторов. Тем самым между строками матрицы, а следовательно, и между нашими векторами имеется линейная зависимость.

Из доказанной теоремы следует, что простой n-вектор $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n]$ в случае линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ отличен от нуля. Следовательно, *любой другой n-вектор,* отличаясь от него лишь численным множителем λ, *тоже будет простым* (множитель λ можно включить, например, в $\mathbf{a}_1$).

Заметим, что любой n—1-вектор тоже всегда является простым.

Выясним теперь, как преобразуется косое произведение m векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ при их произвольном линейном преобразовании в векторы $\mathbf{a}_{1'}$, $\mathbf{a}_{2'}$, ..., $\mathbf{a}_{m'}$:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{a}_{1'} = A_{1'}^{1}\mathbf{a}_1 + A_{1'}^{2}\mathbf{a}_2 + \ldots + A_{1'}^{m}\mathbf{a}_m = A_{1'}^{i_1}\mathbf{a}_{i_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_{m'} = A_{m'}^{1}\mathbf{a}_1 + A_{m'}^{2}\mathbf{a}_2 + \ldots + A_{m'}^{m}\mathbf{a}_m = A_{m'}^{i_m}\mathbf{a}_{i_m} \end{array}\right\} \qquad (3.103)$$

при помощи квадратной матрицы $A_{i'}^{i}$ порядка m. Мы используем здесь в виде исключения сокращенную запись суммирования, несмотря на то, что индексы суммирования i_1, ..., i_m пробегают значения 1, 2, . . ., m, а не 1, 2, ..., n.

Составим косое произведение:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [A_{1'}^{i_1}\mathbf{a}_{i_1},\ A_{2'}^{i_2}\mathbf{a}_{i_2},\ \ldots,\ A_{m'}^{i_m}\mathbf{a}_{i_m}] =$$
$$= A_{1'}^{i_1}A_{2'}^{i_2} \ldots A_{m'}^{i_m}[\mathbf{a}_{i_1}\mathbf{a}_{i_2} \ldots \mathbf{a}_{i_m}].$$

Полученное выражение с формальной стороны вполне аналогично (3.96), отличаясь от него только тем, что число множителей $A^{i_k}{}_{k'}$ здесь m, а не n, и индексы суммирования пробегают значения 1, ..., m (а не 1, ..., n), а также тем, что верхние и нижние индексы поменялись ролями. Роль $a^{i_1 \ldots i_n}$ играет сейчас $[\mathbf{a}_{i_1}, \ldots \mathbf{a}_{i_m}]$, также кососимметрическое по всем своим индексам. Поэтому аналогичным образом получим:

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]\,\mathrm{Det}\,|A_{i'}^{i}|\,. \qquad (3.104)$$

Итак, косое произведение m векторов в результате их линейного преобразования умножается на определитель матрицы этого преобразования.

Докажем теперь следующую теорему.

Для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ *(a^1,a^2, . . . , a^n) разлагался по линейно независимым векторам* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$, *необходимо и достаточно соблюдение условия*

$$a^{[i}\,a^{i_1 i_2 \ldots i_m]} = 0, \qquad (3.105)$$

где $a^{i_1 \ldots i_m}$ — *координаты косого произведения* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$.

Разберемся прежде всего в смысле условия (3.105). В процессе альтернации мы, строго говоря, должны взять среднее арифметическое $(m+1)!$ слагаемых, полученных в результате всевозможных подстановок m+l индексов (с изменением знака в случае нечетной подстановки). Однако фактически у нас будет лишь m+l существенно различных слагаемых, так как каждое слагаемое встретится им m! раз. В самом деле, те m! подстановок индексов в слагаемом, наример, $a^i a^{i_1 i_2 \ldots i_m}$, которые затрагивают лишь последние m индексов, дадут нам (в силу косой симметрии $a^{i_1 \dots i_m}$ и правила изменения знака в случае нечетной постановки) одинаковые слагаемые. В таком случае достаточно взять среднее арифметическое лишь m+1 существенно различных слагаемых. В качестве таковых можно взять слагаемое $a^i a^{i_1 \dots i_m}$ и те m слагаемых, которые получаются из него поочередной транспозицией индекса i с i_1, i_2, . . ., i_m, конечно, с изменением знака (ввиду нечетности транспозиции). Получаем развернутое выражение:

$$a^{[i} a^{i_1 i_2 \dots i_m]} =$$

$$= \frac{1}{m+1} \left(a^i a^{i_1 i_2 \dots i_m} - a^{i_1} a^{i i_2 \dots i_m} - a^{i_2} a^{i_1 i \dots i_m} - \dots - a^{i_m} a^{i_1 i_2 \dots i} \right). \quad (3.106)$$

Для доказательства теоремы нам придется преобразовать условие (3.105). Координаты косого произведения имеют по определению вид

$$a^{i_1 \dots i_m} = a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]}.$$

Вставляя это выражение в (3.105), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m]]} = 0. \quad (3.107)$$

Внутреннюю альтернацию (и это общее правило) можно выкинуть, раз она покрывается внешней альтернацией. Результат от этого не изменится. В самом деле, пользуясь выражением (3.106), получаем:

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} =$$

$$= \frac{1}{m+1} \left(a^i a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]} - a^{i_1} a_1^{[i} \dots a_m^{i_m]} - \dots - a^{i_m} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i]} \right).$$

Осуществляя теперь оставшиеся альтернации, в каждом случае по m индексам, мы получим из каждого члена m! слагаемых (с последующим делением на m!).

Всего мы получим (m+1)! слагаемых, составленных по правилу альтернации выражения $a^i a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m}$ по всем его верхним индексам и с последующим делением на $m! (m+1) = (m+1)!$.
Другими словами,

$$a^{[i} a_1^{[i_1} \dots a_m^{i_m]]} = a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]}. \quad (3.108)$$

Теперь условие (3.105) принимает вид

$$a^{[i} a_1^{i_1} \dots a_m^{i_m]} = 0, \quad \text{т. е.} \ [\mathbf{a} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m] = 0. \quad (3.109)$$

Но в таком виде наше условие по выше доказанному равносильно линейной зависимости векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_m$, а так как $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_m$ линейно независимы, то равносильно линейной зависимости $\mathbf{a}$ от $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_m$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь какую-либо m-мерную плоскость с направляющими (и тем самым линейно независимыми) векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_m$.

Косое произведение этих векторов [$\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$], очевидно, не равное нулю, мы будем называть *направляющим m-вектором нашей плоскости.*

При любом выборе направляющих векторов на данной плоскости ее направляющий m-вектор с точностью до численного множителя остается прежним. Это непосредственно следует из результата (3.104), если считать, что формулы (3.103) дают переход от старых к новым направляющим векторам на данной m-мерной плоскости (при этом $\mathrm{Det}|A^{i}_{i'}|\neq 0$).

Обратно, *если у двух m-мерных плоскостей направляющие векторы отличаются лишь численным множителем*

$$[\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m]= \alpha[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m], \qquad (3.110)$$

*то эти плоскости параллельны (*т. е. получаются одна из другой сдвигом всех точек на постоянный вектор).

Действительно, пусть $a^{i_1 \ldots i_m}$ и $b^{i_1 \ldots i_m}$ — координаты направляющих m-векторв [$\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m$] и [$\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_m$] первой и второй плоскости. Нам дано, что

$$b^{i_1 \ldots i_m} = \alpha\, a^{i_1 \ldots i_m} .$$

Согласно (3.105), для того чтобы вектор $\mathbf{a}$ разлагался по $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, т. е. чтобы он принадлежал первой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли условию

$$a^{[i} a^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \qquad (3.111)$$

Совершенно аналогично, для того чтобы a принадлежал второй плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{[i} b^{i_1 \ldots i_m]} = 0. \qquad (3.112)$$

Но оба последних условия равносильны вследствие (3.110). Поэтому все векторы, принадлежащие второй плоскости, принадлежат и первой плоскости, и наоборот. В частности, векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ принадлежат и первой плоскости и могут служить направляющими векторами на ней наряду с $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Теперь достаточно сделать параллельный сдвиг, переводящий какую-нибудь одну точку второй плоскости в какую-нибудь точку первой плоскости, чтобы обе плоскости совместились. Тем самым наше утверждение доказано.

Резюмируем: *для того чтобы две m-мерные плоскости были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их направляющие m-векторы, рассматриваемые с точностью до численного множителя, были одинаковы.*

Это можно выразить и в такой форме, что направляющий m -вектор, заданный с точностью до численного множителя, характеризует *m-мерное направление в пространстве,* т. е. совокупность параллельных между собой m -мерных плоскостей, заполняющих все пространство.

Если мы ограничиваемся плоскостями некоторой связки O, то параллелизм плоскостей будет означать просто их совпадение, которое и будет равносильно совпадению направляющих m-векторов.
Наконец, последнее замечание. Вся *алгебраическая* теория, развитая здесь для кососиммегрпческих *контравариантных* тензоров $a^{i_1 \dots i_m}$ (m-векторов), повторяется дословно и для кососимметрических *ковариантных* тензоров $a_{i_1 \dots i_m}$ (которые мы будем называть m-*ковекторами).* Более того, можно установить своеобразный принцип двойственности, по которому каждому m-вектору взаимно однозначно сопоставляется n— m-ковектор, и обратно (при условии задания некоторого фиксированного n-вектора). Мы не будем останавливаться здесь на этом подробнее. Укажем только, что совершенно аналогично (3.98) можно получить, что единственная существенная координата $a_{12\dots n}$ n-ковектора $a_{i_1 \dots i_n}$ преобразуется по закону

$$a_{1'2' \dots n'} = a_{12 \dots n} \operatorname{Det} | A^i_{i'} | . \tag{3.113}$$

Тем самим, согласно (3.99), $a_{12\dots n}$ представляет собой относительный инвариант веса +1 (определители в (3.98) и (3.113) представляют собой взаимно обратные величины как определители взаимно обратных матриц). Отсюда вытекает, что произведение существенных координат n-вектора и n-ковектора $a^{12\dots n} \cdot a_{12\dots n}$ представляет собой инвариант.
Если, в частности,

$$a^{12 \dots n} \cdot a_{12 \dots n} = 1, \tag{3.114}$$

то n-вектор и n-ковектор мы будем называть *взаимно сопряженными.* Ясно, что по данному n-вектору всегда можно построить сопряженный ему n-ковектор, и обратно.

Что касается *геометрического* истолкования m-ковекторов, то на нем мы останавливаться не будем. Укажем лишь, что по упомянутому принципу двойственности (кстати, имеющему непосредственное отношение к принципу двойственности в n—1-мерной проективной геометрии в связке *O)* каждое m-мерное направление в пространстве характеризуется n — m-ковектором, заданным с точностью до численного множителя. Так, например (при m — n—1), n—1-мерное направление характеризуется 1-ковектором a_i, а именно, это есть направление гиперплоскости, уравнение которой

$$a_i x^i = 0.$$

3.7. Ориентация в *n*-мерном аффинном информационном пространстве

Будем рассматривать в *n*-мерном *вещественном* аффинном информационном пространстве всевозможные реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, ..., \mathbf{e}_{n'}\}$. Легко заметить, что они распадаются на два класса аналогично «правым» и «левым» реперам в обычном трехмерном информационном пространстве. А именно, выбрав произвольно некоторый начальный репер $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$, мы распределим все вообще реперы $\{O', \mathbf{e}_{1'}, ..., \mathbf{e}_{n'}\}$ на два класса по следующему принципу. Запишем разложение векторов произвольного репера по векторам начального репера

$\mathbf{e}_{i'}=A^i_{i'}\mathbf{e}_i$.

Если Det$|A^i_{i'}|> 0$, то мы относим произвольно взятый репер к первому классу, если же Det$|A^i_{i'}|<0$, то — ко второму классу. Начальный репер попадет, очевидно, в первый класс (матрица $A^i_{i'}$ будет в этом случае единичной). Покажем теперь, что это распадение реперов на два класса не зависит от выбора начального репера (если не считать нумерации этих классов, которая, конечно, определяется выбором начального репера).

Для этого достаточно показать, что *любые два репера одного класса связаны между собой преобразованием с положительным определителем, а в случае разных классов — с отрицательным определителем.* Тогда действительно, исходя из любого начального репера, мы получим разбиение реперов на те же два класса (с точностью до их нумерации).

Возьмем два произвольных репера $(O', \mathbf{e}_{1'}, ..., \mathbf{e}_{n'})$ и $(O'', \mathbf{e}_{1''}, ..., \mathbf{e}_{n''})$. Пусть они связаны с исходным репером и между собой преобразованиями:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''}\mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''}\mathbf{e}_i. \tag{3.115}$$

Очевидно, третье преобразование есть результат наложения первых двух, так что его матрица есть произведение матриц:

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''}A^i_{i'}, \tag{3.116}$$

а значит,

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i''}| = \mathrm{Det}\,|A^{i'}_{i''}|\cdot \mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,. \tag{3.117}$$

Если взятые реперы одного класса, т. е. Det$|A^i_{i''}|$ и Det$|A^i_{i'}|$ одного знака, то отсюда следует

$$\mathrm{Det}\,|A^{i'}_{i''}| > 0,$$

если же разных классов и, следовательно, указанные определители разных знаков, то

$$\mathrm{Det}\,|A^{i'}{}_{i''}| < 0.$$

Этим наше утвержден доказано.

Мы условимся говорить, что два репера имеют *одинаковую ориентацию* или *различные ориентации* в зависимости от того, принадлежат ли они к одному классу или к различным классам.

В случае n =1 (прямая линия) репер (O, $\mathbf{e}_1$) имеет одну ориентацию, если вектор $\mathbf{e}_1$ направлен в данную сторону, и другую, если он направлен в противоположную сторону. Таким образом, выбор ориентации сводится к выбору определенного направления на прямой. В случае двумерного аффинного пространства, т. е. в сущности в случае обычной плоскости, рассматриваемой в пределах ее аффинных свойств, ориентацию можно представлять себе наглядно в виде определенным образом заданного *направления вращения* на плоскости (против или по часовой стрелке).

Тогда реперами (O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) данной ориентации будут те, для которых направление вектора $\mathbf{e}_1$, вращаясь около O в заданную сторону, приходит в совпадение с направлением вектора $\mathbf{e}_2$ в течение первого полуоборота.

Нужно пояснить, что в этой формулировке мы не выходим за пределы аффинных свойств, так как вращаются не целые фигуры, а лишь направления, исходящие из данной точки.

В случае n = 3 распадение реперов на два класса вполне аналогично их распадению на «правые» и «левые» в обычном пространстве.

Мы говорим, что n-мерное аффинное информационное пространство *ориентировано,* если из двух возможных ориентаций избрана одна определенная (т. е. избран один из двух классов реперов).

Все сказанное относится и к m-мерным плоскостям n-мерного информационного пространства, так как они по своей геометрии являются также аффинными информационными пространствами. Соответствующий m-мерный репер, ориентация которого будет рассматриваться, образуется какой-нибудь точкой O^* и направляющими векторами $\mathbf{a}_1$, ..., $\mathbf{a}_m$ данной m-мерной плоскости. При этом не нужно забывать, что ориентация репера в той же мере зависит от нумерации его векторов, как и от выбора самих этих векторов. Составим направляющий m-вектор [$\mathbf{a}_1$ ... $\mathbf{a}_m$] данной m-мерной плоскости. Если мы перейдем в ней к другому реперу $\mathbf{a}_{1'}$ ... $\mathbf{a}_{m'}$ посредством линейного преобразования с матрицей m-го порядка $\| A^i{}_{i'} \|$

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{a}_i,$$

то согласно (3.104)

$$[\mathbf{a}_{1'}\mathbf{a}_{2'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m] \operatorname{Det} | A^i_{i'} |.$$

Если новый репер имеет ту же ориентацию, что и старый, то определитель, на который множится направляющий m-вектор, будет, как мы видим, положительным; в противном случае — отрицательным. Мы получаем следующий результат.

Все направляющие т-векторы данной т-мерной плоскости, отвечающие т-мерным реперам одинаковой ориентации, отличаются лишь положительными численными множителями; при изменении ориентации репера на обратную направляющий т-вектор приобретает отрицательный численный множитель.

Отсюда вытекает, что *если направляющий т-вектор задан нам с точностью до положительного численного множителя, то у нас определено не только т-мерное направление в информационном пространстве, но и определенная ориентация на каждой т-мерной плоскости этого направления (т. е. из двух классов реперов на ней избран один определенный).*

3.8. Измерение объемов

Пусть в вещественном n-мерном аффинном информационном пространстве дано некоторое тело D. Отнесем информационное пространство к какой-нибудь аффинной координатной системе $(x^1, ..., x^n)$ и составим n-кратный интеграл

$$V_D = \int\limits_D dx^1\, dx^2 \ldots dx^n, \tag{3.118}$$

распространенный по информационной области D. Мы будем рассматривать лишь такие информационные области D (например, ограниченные кусочно гладкими гиперповерхностями), для которых существование этого интеграла не вызывает сомнений.

При переходе в другую координатную систему $(x^{1'}, ..., x^{n'})$ получаем в силу (3.70)

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \tag{3.119}$$

Аналогичный интеграл имеет вид

$$V'_D = \int\limits_D dx^{1'}\, dx^{2'} \ldots dx^{n'} = \int\limits_D \left| \frac{\partial (x^{1'}, \ldots, x^{n'})}{\partial (x^1, \ldots, x^n)} \right| dx^1\, dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \int\limits_D |\operatorname{Det} | A^{i'}_i || \, dx^1 \ldots dx^n = |\operatorname{Det} | A^{i'}_i || \cdot \int\limits_D dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= |\operatorname{Det} | A^{i'}_i || \cdot V_D. \tag{3.120}$$

Мы воспользовались здесь формулой преобразования переменных под знаком кратного интеграла, причем якобиан преобразования совпадает с Det | $A^{i}{}_{i'}$ |, так как из преобразования (3.119) следует, что

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = A_{i}^{i'}.$$

Итак, интегралы V_D для всех информационных областей D умножаются при переходе в новую координатную систему на общий множитель | Det | $A^{i}{}_{i'}$ ||,

Другими словами, интеграл V_D для данного тела D можно рассматривать как относительный информационный инвариант веса — 1 с той только разницей, что его преобразование сводится к умножению не на Det|$A^{i}{}_{i'}$|, а на | Dct | $A^{i}{}_{i'}$ || (ср. (3.98)).

Чтобы отметить это, мы будем называть V_D *знакопостоянным относительным информационным инвариантом веса* —1; впрочем, прилагательное «знакопостоянный» мы будем для краткости большей частью опускать.

Относительный информационный инвариант V_D мы будем называть объемом тела D.

Таким образом, в аффинной геометрии объем данного тела не выражается каким-либо определенным числом и меняется вместе с координатной системой. Тем не менее между объемами существуют соотношения, вполне аналогичные обычным и в отличие от самого объема *инвариантные относительно выбора координатной системы.*

1. Равенство объемов двух тел

$$V_{D_1} = V_D, \tag{3.121}$$

сохраняется при переходе в любую другую координатную систему.

2. Если объем тела D равен сумме объемов тел D_1 и D_2

$$V_D = V_{D_1} + V_{D_2} \tag{3.122}$$

в одной координатной системе, то это верно и в любой другой.

3. Отношение объемов двух тел D и D'

$$\frac{V_D}{V_{D'}} = k \tag{3.123}$$

есть информационный инвариант преобразования координатной системы.

Все эти утверждения очевидным образом следуют из одинакового для всех V_D закона преобразования (3.120).

Введенное нами понятие объема, вернее, те информационные информационные инвариантные соотношения, к которым оно приводит, хорошо согласуются с нашим обычным представлением об объеме.

Так, при параллельном сдвиге тела D на вектор **a** в положение $\tilde{D}$ его объем не изменится. Действительно,

$$V_D = \int_D dx^1 \dots dx^n, \quad V_{\tilde{D}} = \int_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n.$$

Но при этом $\tilde{x}^i = x^i + a^i$, где a^i — постоянные координаты вектора сдвига **a**. Преобразуя интеграл $V_{\tilde{D}}$ к переменным x^i получим, очевидно:

$$V_{\tilde{D}} = \int_{\tilde{D}} d\tilde{x}^1 \dots d\tilde{x}^n = \int_D dx^1 \dots dx^n = V_D. \quad (3.124)$$

Далее, для тела D, составленного из (неперекрывающихся) тел D_1 и D_2, объем будет равен сумме объемов этих тел:

$$V_D = V_{D_1} + V_{D_2},$$

так как, очевидно:

$$\int_D dx^1 \dots dx^n = \int_{D_1} dx^1 \dots dx^n + \int_{D_2} dx^1 \dots dx^n. \quad (3.125)$$

Эти и подобные им свойства объемов показывают, что хотя объем у нас — относительный информационный инвариант и не выражается определенным числом, тем не менее он характеризует информационную пространственную протяженность тела независимо от его формы и места расположения подобно численно выраженному объему в обычном информационном пространстве.

Рассмотрим, в частности, *n-мерный параллелепипед,* построенный на n линейно независимых векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$, исходящих из данной точки O. Так мы будем называть множество точек M, для которых радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ разлагается по векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами, меняющимися от 0 до 1:

$$\overrightarrow{OM} = t^1\mathbf{a}_1 + \dots + t^n\mathbf{a}_n,$$

где

$$0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \ \dots, \ 0 \leqslant t^n \leqslant 1. \quad (3.126)$$

В случае $n = 1$

$$\overrightarrow{OM} = t^1\mathbf{a}_1, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1,$$

и получаемый при этом «одномерный параллелепипед» мы будем называть *отрезком* одномерного аффинного информационного пространства (прямой линии).

В случае $n = 2$ мы получаем «двумерный параллелепипед»

$$\overrightarrow{OM} = t^1\mathbf{a}_1 + t^2\mathbf{a}_2, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1,$$

который будем называть *параллелограммом* в двумерном аффинном информационном пространстве.

Эти определении, очевидно, вполне согласуются с нашими обычными представлениями об отрезке на прямой, полученном откладыванием вектора $\mathbf{a}_1$ от точки O, и о параллелограмме на плоскости, построенном на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, отложенных от точки O.

Совершенно аналогично при $n = 3$ наше определение параллелепипеда вполне согласуется с обычным.

Отнесем информационное пространство к какой-нибудь координатной системе $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ и вычислим интеграл V_D для нашего n-мерного параллелепипеда. При этом всегда можно считать, что параллелепипед построен, исходя из начала O (так как V_D не меняется при параллельном сдвиге тела D).

Обозначим координаты векторов $\mathbf{a}_k$ через a^i_k, так что

$$\mathbf{a}_k = a^i_k\mathbf{e}_i. \tag{3.127}$$

Вычисление интеграла V_D мы для краткости проведем обходным путем. Примем на время $\mathbf{a}_k$ за векторы $\mathbf{e}_{k'}$ нового репера (с прежним началом O). Тогда *в новой координатной системе* коэффициенты $t^1, \ldots, t^n$ будут служить координатами, причем в пределах нашего параллелепипеда они меняются от 0 до 1. Поэтому *в новой координатной системе*

$$V'_D = \int_0^1 \ldots \int_0^1 dt^1 \ldots dt^n = 1. \tag{3.128}$$

Но V_D и V'_D согласно (3.120) связаны соотношением

$$V'_D = |\operatorname{Det}|A^{i'}_i||\cdot V_D. \tag{3.129}$$

В нашем случае матрица $\|A^i_{i'}\|$, как видно из (3.127), совпадает с матрицей $\|a^i_k\|$, а следовательно, матрица $\|A^{i'}_i\|$ — с ее братной матрицей, и мы получаем:

$$\operatorname{Det}|A^{i'}_i| = \frac{1}{\operatorname{Det}|a^i_k|}.$$

Теперь соотношение (3.129) дает (если учесть, что $V'_D = 1$):

$$V_D = |\operatorname{Det}|a^i_k||. \tag{3.130}$$

Итак, относительный информационный инвариант V_D *в случае n-мерного параллелепипеда выражается модулем определителя* Det | a^i_k|, *составленного из координат векторов, на которых построен параллелепипед.*

Сам этот определитель является относительным информационным инвариантом веса —1, так как согласно (3.93) он равен $n!\ a^{12\ldots n}$, где $a^{12\ldots n}$ — координата n-вектора [$\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n$].

В частности, если D_0 — параллелепипед, построенный на векторах репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, то аналогично (3.128) $V_{D_0} = 1$, так что

$$V_D : V_{D_0} = |\,\mathrm{Det}\,|\,a^i_k\,|\,|\,. \tag{3.131}$$

Итак, отношение объемов двух n-мерных параллелепипедов, построенных соответственно на векторах $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *и* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, *равно модулю определителя той матрицы, посредством которой векторы* $\mathbf{a}_i$ *выражаются через векторы* $\mathbf{e}_i$. Этот результат получен в предположении, что векторы $\mathbf{e}_i$ совпадают с векторами репера. Но, в силу того, что отношение двух объемов есть информационный инвариант, наш результат остается верным и в любой координатной системе.

Все сказанное до сих пор об объемах в n-мерном аффинном информационном пространстве полностью переносится и на его m-мерные плоскости, поскольку они также представляют собой аффинные информационные пространства. При этом m-мерные объемы тел D, расположенных на *разных* m-мерных плоскостях, вообще говоря, нельзя сравнивать друг с другом. Действительно, речь идет об относительных информационных инвариантах V_D, меняющихся в зависимости от выбора репера $\{O^*, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, в одном случае — на одной плоскости, в другом случае — на другой. Так как выбор реперов на разных m-мерных плоскостях происходит совершенно независимо, то никаких информационных инвариантных соотношений между значениями V_D на разных плоскостях установить нельзя.

Однако из этого правила имеется исключение. Если речь идет о *параллельных m*-мерных плоскостях, то их можно относить к одному и тому же реперу (если не обращать внимания на положение начала O^*). В самом деле, векторы репера $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, построенного на одной плоскости, можно отложить и на параллельной ей плоскости из какой-нибудь ее точки.

Относя параллельные m-мерные плоскости к одному и тому же (в указанном смысле) *реперу* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, мы можем сравнить значения m-мерных объемов V_D не только для тел D на данной плоскости, но и на различных параллельных ей плоскостях. Отношение двух таких объемов по-прежнему будет информационным инвариантом, и, вообще, все информационные инвариантные соотношения между объемами повторяются и в этом случае по прежним причинам.

Рассмотрим частные случаи.

Пусть m=1; мы рассматриваем связку параллельных прямых; в качестве областей D на этих прямых берем их отрезки *(a, b);* «одномерные объемы»

$$V_D = \int_a^b dt^1 = b - a \qquad (b>a)$$

представляют собой длины этих отрезков, вычисленные при условном выборе направляющего вектора $\mathbf{a}_1$ (общего для всех прямых связки) за единичный вектор. Однако отношения длин отрезков на параллельных прямых будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что длина данного отрезка есть сумма длин двух параллельных ему отрезков (если это имеет место при одном выборе вектора $\mathbf{a}$), и т. д.

Пусть m = 2; мы рассматриваем связку параллельных двумерных плоскостей; двумерные области D берутся на этих плоскостях. Их «двумерные объемы»

$$V_D = \iint_D dt^1\, dt^2$$

— это площади, которые получатся, если условно выбрать в качестве единицы измерения площадь параллелограмма, построенного на направляющих векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (общих для всех плоскостей связки). Однако отношения площадей параллельно расположенных плоских фигур будут уже инвариантными, равно как и такие факты, что площадь данной плоской фигуры есть сумма площадей параллельных ей плоских фигур, и т. д.

В заключение мы дадим окончательную информационную характеристику простого m-вектора.

Задание простого m-вектора, отличного от нуля, равносильно заданию некоторой m-мерной плоскости (с точностью до параллельного сдвига), с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней. Это мы будем кратко называть *информационной характеристикой m*-вектора. Переходим к доказательству нашего утверждения.

Каждый простой m-вектор, не равный нулю, можно (хотя и неоднозначно) представить в виде косого произведения $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_m]$. Если принять $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ за направляющие векторы некоторой m-мерной плоскости, то эта плоскость определяется с точностью до параллельного сдвига, на ней определяется некоторая ориентация (т. е. ориентация репера $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$) и некоторый m-мерный объем, именно, объем параллелепипеда, построенного на $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Мы получаем информационную характеристику нашего m-вектора. Однако нужно еще показать, что эта характеристика будет одной и той же независимо от того, каким косым произведением представлен данный m-вектор.

Пусть данный m-вектор представлен косым произведением других векторов $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$:

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0. \qquad (3.132)$$

Мы имеем два равных между собой косых произведения, т. е. можно сказать, отличающихся друг от друга численным множителем $\alpha=1$. Такое положение вещей разбиралось ранее (см. (3.110)) и приводило к тому, что $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ и $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ служили направляющими векторами одной и той же m-мерной плоскости, а следовательно, могли разлагаться одни по другим. Таким образом, и в нашем случае

$$\mathbf{a}_{i'} = A^i_{i'}\, \mathbf{a}_i. \qquad (3.133)$$

Теперь согласно (3.104)

$$[\mathbf{a}_{1'} \ldots \mathbf{a}_{m'}] = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \cdot \mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|. \qquad (3.134)$$

Сравнивая с (3.132), получаем:

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1. \qquad (3.135)$$

Это показывает, во-первых, что реперы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ определяют на n-мерной плоскости одну и ту же ориентацию (так как $\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1 > 0$) и, во-вторых, что построенные на них параллелепипеды имеют одинаковый объем. В самом деле, отношение этих объемов согласно (3.131) равно $|\mathrm{Det}|\,A^i_{i'}\,||$, т. е. единице.

Итак, информационная характеристика данного m-вектора действительно не зависит от способа его записи в виде косого произведения и будет, таким образом, вполне определенной.

Теперь нужно показать, что и обратно, *данной информационной характеристике* отвечает только один простой m-вектор.

Пусть $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m]$ и $[\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}]$ — два не равных нулю простых m-вектора с *данной* информационной характеристикой. Поскольку, таким образом, как $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$ являются направляющими векторами *заданной* (с точностью до параллельного сдвига) m-мерной плоскости, то одни из них разлагаются по другим; мы снова получаем (3.133), а следовательно, и (3.134). Так как ориентация на m-мерной плоскости нам также задана, то $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a}_{1'}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$, должны иметь общую ориентацию, и таким образом

$$\mathrm{Det}|\,A^i_{i'}\,| > 0. \qquad (3.136)$$

Далее, объем в m-мерной плоскости нам также задан, так что объемы параллелепипедов, построенных на $\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{a_{1'}}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}$, должны быть одинаковыми, т. е. отношение этих объемов равно единице:

$$|\mathrm{Det}|\, A^{i}_{\ i'}\,|\,|=1. \qquad (3.137)$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем:

$$\mathrm{Det}|\, A^{i}_{\ i'}\,| =1,$$

откуда согласно (3.134) следует:

$$[\mathbf{a_{1'}}, \mathbf{a}_{2'}, \ldots, \mathbf{a}_{m'}]=[\mathbf{a_1}, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m],$$

а это мы и хотели показать. Теперь наше утверждение доказано полностью.

4. Тензоры как средства отображения и преобразования информации

Необходимость применения тензороров, как средств отображения и преобразования информации о сущностях вызвана не столько удобством и наглядностью математических формулировок законов, сколько объективными информационными свойствами изучаемых сущностей. Так, например, векторное исчисление давно уже применяется в гидромеханике, теории упругости, электротехнике. Углубление теоретической базы различных наук требует от современного ученого умения свободно оперировать таким информационным аппаратом, который представляется в виде тензорного исчисления, особенно в части, связанной с введением декартовой системы координат.

Современная научно-методическая литература изобилует примерами широкого использования тензорного и векторного исчисления. Лучшие учебники для вузов по специальным дисциплинам учитывают эту тенденцию совершенствования математического аппарата современных естественных наук. Программы по математике наших вузов включают необходимый материал по важному разделу основ векторной алгебры и векторного анализа. Однако зачастую изложение этих разделов носит формальный характер, и это естественно, ибо физическое содержание этого математического аппарата наиболее полно может быть раскрыто в тех научных дисциплинах, которые используют его.

Нам представляется, что наиболее эффективный способ овладения информацией в области векторных и тензорных исчислениях состоит в рассмотрении возможных их применений в современной науке, в первую очередь в таких ее разделах, как гидромеханика, теория упругости, теория электромагнетизма. Поэтому мы пытались наполнить содержание книги примерами из этих дисциплин.

4.1. Задача тензорного исчисления

Прежде чем приступить к построению тензорного аппарата, как средства, обеспечивающего отображение информации о сущности и преобразовующую эту информацию — а к этому мы уже вплотную подошли,— постараемся уяснить себе в общих чертах его цели.

Исходным пунктом нашего построения m-мерного аффинного информационного пространства послужила аксиоматика векторного исчисления (в его аффинной части). Векторное исчисление представляет собой важнейший пример прямого геометрического исчисления: и объекты его и операции носят непосредственно геометрический характер. Всякое вычисление, проводимое в векторах, может быть истолковано как геометрическое построение.

Вместе с тем большую и часто ведущую роль в информационном процессе играет координатный метод. Здесь информационные сущности, представленные геометрическими образами, изучаются не непосредственно геометрически, а методами алгебры (аналитическая геометрия), а затем и анализа (дифференциальная геометрия). Огромная сила этого метода основана на том, что он использует в общей теории информации сильный, хорошо развитый вычислительный аппарат алгебры и анализа. В результате удается ставить и решать вопросы, лишь малая часть которых укладывается в сравнительно узкие рамки прямых геометрических методов.

Однако эти успехи достаются недаром. В основе координатного метода всегда лежит условность, заключающаяся в приписывании каждой сущности, которая представима точкой (или вектором и т. п.), координат, например, аффинных координат $x^1, x^2, \dots, x^n$, как было сделано нами для точек и векторов n-мерного аффинного информационного пространства. Но сама точка (или вектор) никоим образом не порождает эти n чисел; чтобы получить такой результат, нужно, как мы видели, задаться некоторым репером, т. е. некоторой аффинной координатной системой, а аффинный репер можно выбирать с большим произволом, вне связи с изучаемыми информациоными образами сущностей.

Аналогичным образом дело обстоит и во всех случаях применения координатного метода: *на изучаемую информационную картину накладывается случайный выбор координатной системы, и те аналитические данные о сущности, которые мы получаем, отражают не только то, что нас интересует (информационную картину), но и то,* *что нас совсем не интересует (произвольный выбор координатной системы) и что без надобности усложняет результаты информационного исследования.*

Приведем элементарный пример: в обычном пространстве в прямоугольных декартовых координатах вектор, соединяющий точки $M_1(1, -2, 3)$ и $M_2(2, -2, 5)$, имеет координаты (1, 0, 2). В этом результате то обстоятельство, что вторая координата вектора равна нулю, является случайным, зависящим от выбора координатной системы. Напротив, выражение $1^2 + 0^2 + 2^2$ не случайно дает 5. И в любой другой прямоугольной системе координат мы получим тот же результат, хотя координаты вектора будут уже другие. Первое обстоятельство не имеет информационного смысла для вектора самого по себе, второе — имеет (получается квадрат длины). Возникает потребность и в сложных построениях *научиться отделять информационно существенно важное от случайно привнесенного выбором координатной системы.*

Решением этой информационной задачи и занимается тензорное исчисление. Общая схема его построения такова.

Строятся прежде всего тензоры, т. е. системы величин, отражающие определенные информационные сущности, представляемые геометрическими (и/или физическими) конструкциями и преобразующиеся по некоторому простому закону при переходе от одной координатной системы к другой. Далее, между тензорами вводятся операции и соотношения инвариантного характера, т. е. сохраняющие свой вид при переходе в любую другую координатную систему. Таким образом, все соотношения пишутся в форме, годной не только в избранной, но и в любой координатной системе, а значит, эти соотношения отражают информационно-геометрические (или физические) факты, независимые от выбора определенной координатной системы; искажающее влияние случайного выбора этой системы устраняется.

Из дальнейшего будет видно, каким образом целый ряд информационных вопросов поддается именно этой трактовке.

4.2. Нольвалентные и одновалентные тензоры

В информационном пространстве величины, для определения которых достаточно знать одно число (положительное, отрицательное или нуль), называются *скалярами.* Таковы температура, плотность, масса, работа силы. Сравниваться могут скаляры одинаковой размерности. Два скаляра одинаковой размерности равны, если их знаки и численные значения, получающиеся при измерении одной и той же единицей измерения, одинаковы.

Часто приходится иметь дело с величинами, для определения которых, кроме численного значения, необходимо указать направление в пространстве. Это перемещение, скорость, ускорение, сила, момент силы, напряжение электрического поля, диэлектрическая поляризация и т. п. Изучение такого рода величин приводит к понятию вектора.

Скаляр имеет одну компоненту, вектор — три. Иными словами, какую бы мы ни выбрали систему координат, для полного описания скаляра достаточно одного числа, а для такой величины, как вектор, необходимо три числа. Более сложные объекты требуют для своего определения большего числа компонент. Так, для описания деформации упругого тела в точке необходимо $3^2 = 9$ чисел, а для полной характеристики упругих свойств анизотропного тела — $3^4 = 81$ число.

Числа (или функции), которые полностью определяют величину в какой-то системе координат, называются компонентами этой величины.

Определение. Информационная сущность, представленная геометрическим (или физическим) объектом, которая определяется совокупностью коэффициентов $a_{ijk\ldots m}$ полилинейной формы $\varphi = \varphi\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w})$, записанной в некотором ортонормированием базисе, называется *ортогональным тензором.* Сами числа $a_{ijk\ldots m}$ называются *компонентами,* или *координатами,* этого тензора.

Будем говорить, что тензор $a_{ijk\ldots m}$ определяется полилинейной формой $\varphi = \varphi\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{w})$. Коэффициенты $a_{ijk\ldots m}$ формы φ степени p вычисляются, как мы видели, по формулам

$$\varphi = a_{ijk\ldots m} x_i y_j z_k \ldots w_m,$$

где

$$a_{ijk\ldots m} = \varphi\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_m).$$

Коэффициенты $a_{ijk\ldots m}$ этой формы имеют p индексов, каждый из которых может принимать 3 значения. Всего такая полилинейная форма имеет 3^p коэффициентов. Поэтому тензор, соответствующий полилинейной форме степени p, называют тензором *валентности p.*

Если форма φ задана в информационном пространстве L_3, то каждый из индексов тензора может принимать независимо от других индексов значения 1, 2 и 3. Поэтому тензор валентности p в трехмерном пространстве будет иметь 3^p компонент. На плоскости такой тензор будет иметь 2^p компонент, в линейном пространстве L_n — n^p компонент.

Таким образом, совокупность коэффициентов a_i линейной формы $\varphi = \varphi\,(\mathbf{x})$ представляет собой тензор валентности 1. А так как скалярное произведение произвольного постоянного вектора **a** на переменный вектор **x** представляет собой линейную форму, то совокупность координат a_i произвольного вектора **a** также представляет собой тензор валентности 1.

Точно так же совокупность коэффициентов a_{ij} билинейной формы $\varphi = \varphi$ (**x, y**), образующая матрицу $A = (a_{ij})$, представляет собой тензор. Это тензор валентности 2.

Выше уже отмечалось, что такие величины, как температура, объем, давление и др., называются скалярами. Приведем определение скаляра в связи с законом его изменения при преобразованиях координатной системы.

Скаляр — это величина, полностью определяемая в любой координатной системе одним числом (или функцией), которое не меняется при изменении пространственной системы координат.

Скаляр имеет одну компоненту.

Таким образом, если φ — значение скаляра в одной системе координат, а φ' — в другой, то

$$\varphi' = \varphi.$$

Отметим еще, что скалярную величину, которая не зависит от выбора ортонормированного базиса пространства, назы вают *тензором нулевой валентности.* Тензор нулевой валентности можно рассматривать как единственный коэффициент линейной формы нулевой степени. Тензор нулевой валентности называют также *инвариантом* (т. е. неизменным), так как его единственная компонента не меняет своего значения при преобразованиях информационного базиса.

Векторные величины (перемещение, ускорение, сила и др.), как уже указывалось, требуют для своего определения трех действительных чисел или функций. Векторы — величины более высокого уровня по сравнению со скалярами; они могут быть названы *тензорами первой влентности.*

Приведем определение тензора 1-й валентности.

Будем говорить, что нам дан тензор 1-й *валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы три занумерованных числа* x_1, x_2, x_3 *преобразующихся при повороте осей по закону*

$$x_i = \sum_p A'_{ip} x'_p = \sum_p A_{pi} x'_p. \tag{4.1}$$

Эти числа мы будем называть *координатами тензора.*

Мы видим, что координаты данного вектора, рассматриваемые во всевозможных координатных системах, образуют *вектор 1-й валентности.* Очевидно и обратное: координаты каждого тензора 1-й валентности можно рассматривать как координаты некоторого постоянного вектора. Для этого достаточно подобрать вектор так, чтобы это имело место в одной координатной системе; в силу того что и для координат вектора, и для координат одновалентного тензора действует закон преобразования (4.1), это же будет иметь место и в любой, координатной системе.

Однако не нужно думать, что одновалентный тензор может иметь истолкование только лишь в виде вектора. Пусть, например, нам задана фиксированная плоскость, не проходящая через начало координат *О*. Уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2+a_3x_3=1.$$

Когда мы совершаем поворот координатных осей, коэффициенты уравнения $a_1,$ $a_2,$ a_3 подвергаются, как нетрудно подсчитать преобразованию по тому же закону (4.1) и образуют, следовательно, одновалентный тензор (как и координаты вектора).

4.3. Понятие о двухвалентном тензоре

Понятие о двухвалентном и вообще многовалентном тензоре естественно возникает при рассмотрении уже простейших информационных образов.

Возьмем, например**,** (неконическую) центральную поверхность 2-го порядка с центром в начале *О*. Ее уравнение можно записать в виде

$$\sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 1. \qquad (4.2)$$

Как мы условились, каждый индекс суммирования пробегает значение 1, 2, 3. Матрица коэффициентов $\|a_{ij}\|$ предполагается симметричной:

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (4.3)$$

Мы будем называть коэффициентами именно числа a_{ij}, хотя после приведения подобных членов в уравнении (4.2) коэффициенты при произведениях координат будут иметь вид 2 a_{ij} (при $i\neq j$).

Совершаем поворот координатных осей. Новые координаты каждого вектора (и тем самым каждой точки) выражаются через старые согласно (4.1). Обратное преобразование согласно (3.35) запишется в виде

$$x_i = \sum_k A_{pi} x'_p. \qquad (4.4)$$

И аналогично,

$$x_j = \sum_q A_{qj} x'_q.$$

Вставляя эти выражения в (4.2), получим уравнение той же поверхности в новых координатах:

$$\sum_p \sum_q \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} x'_p x'_q = 1.$$

Очевидно, коэффициенты преобразованного уравнения имеют вид

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij} \qquad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3). \tag{4.5}$$

Получается, что наша поверхность определяет в каждой координатной системе (с началом *O* в центре поверхности) совокупность девяти чисел a_{ij}, занумерованных двумя индексами, каждый из которых независимо от другого пробегает значения 1, 2, 3. При повороте координатных осей (3.34) эти числа преобразуются по закону (4.5), который повторяет закон (3.32) для каждого из двух индексов, имеющихся у a_{ij}.

Мы будем говорить, что нам дан тензор 2-*й валентности, если в каждой из координатных систем нам заданы девять чисел, занумерованных двумя индексами*

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{4.6}$$

и преобразующихся при повороте координатных осей по закону (4.5). Сами числа a_{ij} мы будем называть *координатами* тензора.

Условия (4.3) не являются обязательными. В тех случаях, когда они соблюдаются, тензор 2-й валентности называется *симметрическим.* Таким образом, коэффициенты уравнения центральной поверхности 2-го порядка с центром в начале *O* образуют симметрический тензор 2-й валентности. Нетрудно показать и обратное: координаты (ненулевого) симметрического тензора 2-й валентности всегда можно истолковать как коэффициенты уравнения некоторой фиксированной поверхности 2-го порядка с центром *O*.

Нетрудно получить примеры и несимметрических тензоров 2-й валентности. Возьмем два вектора **x**(x_1, x_2, x_3) и **y** (y_1, y_2, y_3) и обозначим через a_{ij} всевозможные попарные произведения их координат:

$$a_{ij} = x_i y_j. \tag{4.7}$$

Определенные таким образом в каждой координатной системе числа a_{ij} занумерованы двумя индексами и образуют тензор 2-й валентности. В самом деле, при повороте осей получаем согласно (4.1)

$$x'_p = \sum_i A_{pi} x_i. \tag{4.8}$$

И аналогично

$$y'_q = \sum_j A_{qj} y_j. \tag{4.9}$$

Перемножая эти равенства почленно, получим:

$$x'_p y'_q = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} x_i y_j, \tag{4.10}$$

а значит,

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}, \tag{4.11}$$

т. е. имеет место закон преобразования (4.5). Здесь особенно наглядно выступает то обстоятельство, что этот закон преобразования получается повторением закона преобразования (4.1) для каждого из двух индексов. В частности, если в формулах (4.7) векторы **x** и **y** равны, то тензор a_{ij} - симметрический.

4.4. Двухвалентный тензор как аффинор

Важнейшее значение двухвалентного тензора a_{ij} состоит в том, что он всегда определяет некоторый аффинор.

Аффинором $\mathfrak{A}$ называется закон, посредством которого каждому вектору **x** в пространстве сопоставляется некоторый вектор **y**, обозначаемый нами

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\,\mathbf{x}, \tag{4.12}$$

причем должны соблюдаться следующие условия:

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = \mathfrak{A}\mathbf{x} + \mathfrak{A}\mathbf{x}', \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{4.14}$$

Здесь **x, x**' — произвольные векторы, а α — произвольное (вещественное) число.

Другими словами, аффинор $\mathfrak{A}$ означает задание функциональной зависимости вектора **y** от вектора-аргумента **x**, причем эта зависимость должна быть линейной, т. е. при сложении двух значений аргумента **x** складываются и соответствующие значения функции **y** (согласно (4.13)), а при умножении аргумента **x** на какое-либо число функция **y** также умножается на это число (согласно (4.14)).

Рассмотрим, в частности, те векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1, \mathfrak{A}\mathbf{e}_2, \mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, в которые перейдут орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Если аффинор $\mathfrak{A}$ не задан наперед, то его всегда можно подобрать (и притом единственным образом) так, чтобы векторы $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1, \mathfrak{A}\mathbf{e}_2, \mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ имели любые наперед заданные значения. В самом деле, задавшись этими значениями, мы можем вычислить $\mathfrak{A}\,\mathbf{x}$ для любого вектора **x** с координатами x_1, x_2, x_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 + x_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_3. \tag{4.15}$$

Мы воспользовались здесь свойствами (4.13), (4.14) искомого аффинора A. Таким образом, искомый аффинор, если он существует, определяется формулой (4.15). Нетрудно проверить, что эта формула действительно определяет аффинор, т. е. свойства (4.13), (4.14) всегда имеют место.

Можно следующим образом наглядно представить себе действие аффинора.

Для каждой точки M информационного пространства строим ее радиус-вектор

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OM} \tag{4.16}$$

и подвергаем его действию аффинора A. Новый вектор $A\mathbf{x}$, отложенный также из начала O, укажет своим концом некоторую, вообще говоря, новую точку M':

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \overline{OM'}. \tag{4.17}$$

В результате каждая точка M информационного пространства перейдет в новое положение M', и тем самым информационное пространство подвергнется некоторой деформации.

В частности, единичный кубик, построенный на ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, перейдет в параллелепипед, построенный на векторах $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1, \mathfrak{A}\mathbf{e}_2, \mathfrak{A}\mathbf{e}_3$, *если предположить, что эти векторы некомпланарны.* Действительно, точкам кубика будут отвечать координаты x_i, для которых $0 \leq x_i \leq 1$ (i==1, 2, 3), а тогда согласно (4.15) преобразованные точки M' заполняют указанный параллелепипед.
Вообще пространственная решетка, составленная из единичных (или любых других) одинаковых кубиков, растянется (сожмется) и перекосится так, что кубики превратятся в параллелепипеды, однако тоже одинаковые.

В случае некомпланарности векторов $\mathfrak{A}\mathbf{e}_1, \mathfrak{A}\mathbf{e}_2, \mathfrak{A}\mathbf{e}_3$ рассматриваемая деформация информационного пространства называется его *центроаффинным преобразованием.* В случае компланарности этих векторов все информационное пространство отображается в одну плоскость или в одну прямую, или, наконец, даже в одну точку O (случай, когда $A\mathbf{x} \equiv 0$). Это — различные случаи вырождения аффинора A.

Переходим к координатной записи аффинора A. Мы знаем, что аффинор A вполне определяется заданием векторов $A\mathbf{e}_i$, а эти последние можно задать их разложением по ортам. Запишем это разложение, обозначая коэффициенты через a_{pq}:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3,\\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3,\\ \mathfrak{A}\mathbf{e}_3 &= a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3,\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

или в краткой записи:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_q = \sum_p a_{pq}\mathbf{e}_p. \tag{4.19}$$

Вполне определяющие аффинор A коэффициенты a_{pq} мы будем называть его *координатами.* Умножая скалярно первое из уравнений (4.18), например, на $\mathbf{e}_3$, получим в силу (3.23) $\mathbf{e}_3\mathfrak{A}\mathbf{e}_1 = a_{31}$.
Аналогичным образом и вообще

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p\mathfrak{A}\mathbf{e}_q. \tag{4.20}$$

Будем рассматривать один и тот же аффинор A, но в разных координатных системах. Его координаты a_{pq} будут иметь при этом каждый раз другие численные значения. Спрашивается, по какому закону эти численные значения будут меняться при повороте координатных осей?

Запишем формулы (4.20) в новой координатной системе:

$$a'_{pq} = \mathbf{e}'_p\mathfrak{A}\mathbf{e}'_q.$$

Но согласно (3.32)

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i, \qquad \mathbf{e}'_q = \sum_j A_{qj}\mathbf{e}_j,$$

а следовательно,

$$a'_{pq} = \sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}\mathbf{e}_i\mathfrak{A}\mathbf{e}_j = \sum_i\sum_j A_{pi}A_{qj}a_{ij} \qquad (p,\ q = 1,\ 2,\ 3).$$

Полученный закон преобразования совпадает с (4.5), и это показывает, *что координаты аффинора a_{ij} образуют двухвалентный тензор.*

Нетрудно проверить и обратное: координаты всякого двухвалентного тензора a_{ij}, могут быть истолкованы как координаты некоторого аффинора A. Для этого достаточно построить аффинор A с данными координатами в какой-либо одной координатной системе. В силу одинакового закона преобразования (4.5) для координат двухвалентного тензора и координат аффинора равенство между этими координатами сохранится и при переходе в любую другую координатную систему.

Дадим, наконец, координатную запись аффинора A, выразив координаты вектора $\mathbf{y}= A\,\mathbf{x}$ через координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}$. Запишем разложения:

$$\mathbf{x} = \sum_q x_q \mathbf{e}_q, \tag{4.21}$$

$$\mathbf{y} = \sum_p y_p \mathbf{e}_p \tag{4.22}$$

и подействуем на (4.21) аффинором $\mathfrak{A}$.

Получим, пользуясь линейными свойствами аффинора и формулами (4.19):

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}\sum_q x_q \mathbf{e}_q = \sum_q x_q \mathfrak{A}\mathbf{e}_q = \sum_q x_q \sum_p a_{pq}\mathbf{e}_p. \tag{4.23}$$

Так как (4.22) и (4.23) дают разложение одного и того же вектора **y**, то коэффициенты при ортах $\mathbf{e}_p$, должны быть одинаковы. Следовательно:

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \tag{4.24}$$

Итак, координаты вектора **y**=$\mathfrak{A}$ **x** *получаются из координат вектора* **x** *линейным преобразованием, матрица которого совпадает с матрицей* a_{pq} *координат аффинора* (в то время как в преобразовании (4.18) мы пользовались транспонированной матрицей). Заметим еще, что для вырождения аффинора $\mathfrak{A}$, т. е. для компланарности векторов (4.18), необходимо и достаточно обращение в нуль определителя | a_{pq}|. В этом и только в этом случае преобразование (4.24) необратимо.

Отметим частный случай аффинора $\mathfrak{A}$, *когда он сводится к умножению каждого вектора* **x** *на одно и то же число* λ*:*

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{4.25}$$

Очевидно, в этом случае

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3). \tag{4.26}$$

Сравнивая с (4.24) убеждаемся, что матрица координат нашего аффинора *в любой координатной системе* имеет вид

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}. \tag{4.27}$$

Следовательно, соответствующий двухвалентный тензор (4.27) обладает тем свойством, что его координаты остаются постоянными во всех координатных системах.

Центроаффинное преобразование, отвечающее аффинору в нашем случае, есть преобразование подобия (при $\lambda\neq 0$).

При λ =1 аффинор (4.25) называется *единичным* и дает тождественное преобразование. Мы будем обозначать единичный аффинор через *E*, так что *E*$\mathbf{x}$ = $\mathbf{x}$. Соответствующий ему тензор

$$\| a_{ij} \| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{4.28}$$

также называется единичным. Для координат единичного тензора принято обозначение δ_{ij}, причем во всех координатных системах

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}. \tag{4.29}$$

Пользуясь обозначениями (4.29), можно переписать (4.27) (при любом λ) в следующем виде:

$$a_{ij} = \lambda \delta_{ij}. \tag{4.30}$$

По аналогии с двухвалентным тензором можно ввести понятие о тензоре любой валентности.

Мы говорим, что нам дан тензор валентности ν, *если в каждой из координатных систем нам заданы* 3^ν *чисел* $a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$, *занумерованных* ν *индексами* i_1, i_2,..., i_ν, *каждый из которых независимо от других пробегает значения* 1,2, 3 *(и которые в записи различаются друг от друга* 1-*м,* 2-*м,...,*ν-*м местом записи при букве а), причем при повороте координатных осей эти числа преобразуются по закону:*

$$a'_{p_1 p_2 \ldots p_\nu} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \ldots \sum_{i_\nu} A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \ldots A_{p_\nu i_\nu} a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}. \tag{4.31}$$

Здесь предполагается, что поворот осей задается, как и прежде, формулами (3.32).

Закон преобразования (4.31) получается, очевидно, повторением закона преобразования одновалентного тензора (4.1) для каждого из индексов многовалентного тензора.

Как и раньше, мы будем называть числа $a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$ *координатами* тензора в данной координатной системе.

Многовалентные тензоры также выражают различные информационные сущности, представляемые геометрическими и физическими объектами. В связи с этим существенно помнить, что тензор есть нечто единое и целое, а «распадение» его на координаты $a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$ происходит лишь по отношению к данной координатной системе. В законе преобразования (4.31) это сказывается в том, что *каждая* координата тензора в новой системе выражается, вообще говоря, через *все* его координаты $a_{i_1 i_2 \dots i_v}$ в старой системе, т. е. распадение на координаты не имеет инвариантного смысла.

4.5. Понятие о ковариантном тензоре

Мы рассмотрим сначала *одновалентный ковариантный тензор.* Он появляется наиболее естественным образом в связи с линейной скалярной функцией вектора.

Пусть каждому вектору **x** *поставлено в соответствие число* φ

$$\varphi = \varphi\,(\mathbf{x}) \qquad (4.32)$$

таким образом, что для любых двух векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$

$$\varphi\,(\mathbf{x_1}+\mathbf{x}_2) = \varphi\,(\mathbf{x}_1)+ \varphi\,(\mathbf{x}_2) \qquad (4.33)$$

и для любого числа α

$$\varphi(\alpha\mathbf{x}) — \alpha\varphi(\mathbf{x}). \qquad (4.34)$$

Тогда φ(**x**) *называется линейной функцией вектора* **x**.

Будем рассматривать φ(**x**) в какой-нибудь координатной системе, т. е. будем задавать аргумент **x** его координатами $x^1, x^2, \dots , x^n$ и выражать φ(**x**) как функцию этих координат. Так как

$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1+\dots+ x^n\mathbf{e}_n,$

то пользуясь свойствами (4.33), (4.34), легко получаем:

$\varphi(\mathbf{x})= \varphi\,(x^1\mathbf{e}_1+\dots+ x^n\mathbf{e}_n) = x^1\varphi(\mathbf{e}_1)+ \dots+ x^n\varphi(\mathbf{e}_n).$

Обозначим для краткости

$$\varphi_i= \varphi(\mathbf{e}_i). \qquad (4.35)$$

Тогда окончательно

$$\varphi(\mathbf{x})= \varphi_i x^i, \qquad (4.36)$$

где подразумевается суммирование по индексу *i*. Итак, линейная функция вектора φ(**x**) выражается через его координаты линейной формой. Запишем зависимость (4.36) в какой-нибудь другой координатной системе:

$$\varphi(\mathbf{x})= \varphi_{i'} x^{i'}. \qquad (4.37)$$

Функция φ(**x**) остается прежней, но так как x^i — координаты вектора-аргумента—примут преобразованные значения x^i, то должны преобразоваться и коэффициенты φ_i линейной формы (4.36). Спрашивается, по какому закону происходит это преобразование. Применим формулу (4.35) в новой координатной системе:

$$\varphi_{i'}= \varphi(\mathbf{e}_{i'}). \qquad (4.38)$$

Согласно (3.54)

$$\mathbf{e}_{i'} = A^1_{i'}\mathbf{e}_1+\dots + A^n_{i'}\mathbf{e}_n = A^i_{i'}\,\mathbf{e}_{i'}. \qquad (4.39)$$

Пользуясь свойствами (4.33), (4.34), можно переписать (4.38) в виде

$$\varphi_{i'} = \varphi\,(A^1_{i'}\mathbf{e}_1 + \dots + A^n_{i'}\mathbf{e}_n) = A^1_{i'}\varphi\,(\mathbf{e}_1) + \dots + A^n_{i'}\varphi\,(\mathbf{e}_n).$$

Вспоминая (4.35), получаем окончательно

$$\varphi_{i'} = A^i_{i'}\varphi_i. \qquad (4.40)$$

Сравнивая (4.40) с (4.39), мы замечаем, что закон преобразования коэффициентов φ_i в точности совпадает с законом преобразования векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Итак, когда нам задана линейная функция вектора $\varphi(\mathbf{x})$, то в каждой координатной системе у нас возникает n чисел $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, преобразующихся по тому же закону, что и векторы соответствующего репера. Мы пришли к понятию одновалентного ковариантного тензора.

Мы говорим, что нам дан одновалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам задано n чисел a_i, *занумерованных при помощи одного индекса (пробегающего значения* 1, 2, ... , *n) и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'} = A^i_{i'}a_i. \qquad (4.41)$$

Эти числа a_i мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Термин «ковариантный», т. е. сопреобразующийся, выражает то обстоятельство, что закон преобразования a_i такой же, как и для векторов репера $\mathbf{e}_i$.

Коэффициенты φ_i линейной функции вектора доставляют нам важный пример одновалентного ковариантиого тензора a_i как показывает закон преобразования (4.40). Обратно, легко убедиться, что любой одновалентный ковариантный тензор a_i при желании всегда можно истолковать именно таким образом. В самом деле, *определим* $\varphi(\mathbf{x})$ по формуле $\varphi(\mathbf{x}) = a_i x^i$ в некоторой исходной координатной системе. Очевидно, $\varphi(\mathbf{x})$ будет линейно зависеть от $\mathbf{x}$ и, самое главное, ее коэффициенты φ_i будут совпадать с a_i не только в исходной координатной системе (что имеет место по определению), но и в любой другой тоже, так как φ_i и a_i подчиняются одному и тому же закону преобразования (ср. (4.40), (4.41)).

Пример. *Гиперплоскостью* мы будем называть множество всех точек, координаты которых в какой-нибудь координатной системе удовлетворяют линейному уравнению

$$a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + a = 0. \qquad (4.42)$$

Определение это имеет инвариантный смысл: вследствие линейности закона преобразования для координат x^i уравнение (4.42) остается линейным — конечно, с другими коэффициентами — и в любой другой координатной системе.

Коэффициенты уравнения (4.42) заданы с точностью до умножения на отличное от нуля число. Чтобы уничтожить эту неопределенность, приведем свободный член к —1 (предполагая, что гиперплоскость не проходит через начало O) и запишем уравнение гиперплоскости в виде

$$a_1x^1+\ldots+a_nx^n - 1 = 0,$$

т. е.

$$a_ix^i = 1. \qquad (4.43)$$

Будем рассматривать всевозможные координатные системы с фиксированным началом O. При переходе от одной из них к другой радиус-вектор $\vec{OM}$ любой точки M не меняется, а следовательно, координаты точки $M(x^1, \ldots, x^n)$ преобразуются как координаты инвариантного вектора по закону (3.66):

$$x^i = A^i_{i'}\, x^{i'}.$$

Подставляя это x^i в уравнение (4.43), получим:

$$a_i\, A^i_{i'}\, x^{i'} = 1.$$

Мы пришли к уравнению прежней гиперплоскости, но в новых координатах $x^{i'}$. Если записать это уравнение аналогично уравнению (4.43):

$$a_{i'}\, x^{i'} = 1, \qquad (4.44)$$

то коэффициенты $a_{i'}$, очевидно, будут иметь вид

$$a_{i'} = A^i_{i'}\, a_i. \qquad (4.45)$$

Закон преобразования совпадает с (4.41), и следовательно, *коэффициенты уравнения гиперплоскости*

$$a_i\, x^i = 1$$

ведут себя как одновалентный ковариантный тензор при всех преобразованиях координатных систем с фиксированным началом O.

Рассмотрим теперь двухвалентный ковариантный тензор. К нему лучше всего подойти, рассматривая скалярную билинейную функцию двух векторов. А именно, пусть каждой паре векторов **x, y**, заданных в определенном порядке, поставлено в соответствие число

$$\varphi = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (4.46)$$

причем функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ является линейной по каждому из двух аргументов. Таким образом, $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по самому определению не зависит от выбора координатной системы. Выразим теперь φ через координаты векторов **x, y** в какой-нибудь координатной системе. Так как

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, пользуясь билинейным характером функции φ, получаем:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi\,(x^i\mathbf{e}_i, y^j\mathbf{e}_j) = x^iy^j\varphi\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \qquad (4.47)$$

В этой записи подразумевается двойное суммирование по i и j. Обозначая для краткости

$$\varphi_{ij} = \varphi\,(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \qquad (4.48)$$

получаем окончательно

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij}x^iy^j. \qquad (4.49)$$

Таким образом, билинейная функция двух векторов выражается билинейной формой их координат. Коэффициенты φ_{ij} этой билинейной формы зависят от выбора координатной системы и преобразуются по закону, который нетрудно установить. А именно, в новой координатной системе аналогично (4.48)

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(\mathbf{e}_{i'}, \mathbf{e}_{j'}),$$

а так как

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{j'} = A^j_{j'}\mathbf{e}_j,$$

то

$$\varphi_{i'j'} = \varphi(A^i_{i'}\mathbf{e}_i, A^j_{j'}\mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = A^i_{i'}A^j_{j'}\varphi_{ij}. \tag{4.50}$$

Закон преобразования коэффициентов φ_{ij}, который мы таким образом установили, как бы повторяет формулу (4.40) для каждого из двух индексов.

Сформулируем теперь общее определение двухвалентного ковариантного тензора, пример которого мы только что получили, в виде совокупности коэффициентов φ_{ij}.

Мы говорим, что нам дан двухвалентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам задано n^2 чисел a_{ij}, которые занумерованы при помощи двух индексов (пробегающих один независимо от другого значения 1, 2, ... , *n) и преобразуются при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'j'} = A^i_{i'}A^j_{j'}a_{ij}. \tag{4.51}$$

Числа a_{ij} мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Двухвалентный ковариантный тензор мы будем называть более коротко *дважды ковариантным тензором.*

Дословным повторением предыдущего рассуждения для одновалентного случая мы покажем и здесь, что не только коэффициенты φ_{ij} билинейной функции двух векторов образуют всегда дважды ковариантный тензор, но и обратно, координаты a_{ij} любого такого тензора всегда можно истолковать как коэффициенты φ_{ij} некоторой билинейной функции. Для этого достаточно построить $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *в какой-либо исходной координатной системе* по формуле

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{ij}x^i y^j, \tag{4.52}$$

и тогда, поскольку, таким образом, $\varphi_{ij} = a_{ij}$ в одной координатной системе, это равенство будет соблюдаться и в любой другой (в силу одинакового характера законов преобразования (4.50) и (4.51)). Отметим важный частный случай, когда билинейная функция $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ будет симметрической:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \tag{4.53}$$

В координатной записи это означает:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ij}y^i x^j.$$

Меняя обозначения индексов суммирования в правой части, получим:

$$\varphi_{ij}x^i y^j = \varphi_{ji}y^j x^i.$$

Так как это равенство должно соблюдаться тождественно относительно x^i, y^j, то из него следует:

$$\varphi_{ij} = \varphi_{ji} \tag{4.54}$$

т. е. матрица коэффициентов φ_{ij} является симметрической. Тензор φ_{ij} и вообще тензор a_{ij}, удовлетворяющий условию

$$a_{ij}=a_{ji}, \tag{4.55}$$

называется *симметрическим.* При этом, если это условие удовлетворяется в какой-либо исходной координатной системе, то удовлетворяется и в любой другой, как без труда вытекает из закона преобразования (4.51).

Это вытекает также и из того, что функция $\varphi(x, y)$, построенная в исходной координатной системе согласно (4.52), будет в нашем случае симметрической, а это ее свойство, как мы видели, влечет за собой в любой координатной системе соотношение $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$, т. е. $a_{ij}=a_{ji}$.

Пример. Гиперповерхность 2-го порядка, не проходящая через начало O, может быть задана уравнением вида

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_k x^k + 1 = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{4.56}$$

При всевозможных преобразованиях координатных систем с закрепленным началом O коэффициенты уравнения a_{ij} ведут себя как симметрический дважды ковариантный тензор, а a_k — как одноковариантный тензор. Это легко показать тем же путем, как и в случае гиперплоскости.

Теперь ясно, как формулировать определение ковариантного тензора в общем случае.

Мы говорим, что нам дан k-валентный ковариантный тензор, если в каждой координатной системе нам заданы n чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, *занумерованных при помощи k индексов и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A^{i_1}_{i'_1} A^{i_2}_{i'_2} \ \ldots \ A^{i_k}_{i'_k} a_{i_1 i_2 \ldots i_k}. \tag{4.57}$$

Индексы при $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ различаются друг от друга 1-м, 2-м, ... , k-м местом записи и пробегают независимо друг от друга значения 1,2, ..., n.

Числа $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ мы будем называть *координатами* нашего тензора в соответствующей координатной системе. Мы будем называть k - валентный ковариантный тензор также k *раз ковариантным тензором.* Совершенно так же, как в случае билинейной скалярной функции, можно показать, что всякая полилинейная (линейная относительно всех своих аргументов) скалярная функция $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ с векторами-аргументами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ допускает координатную запись

$$\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) = \varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k}. \qquad (4.58)$$

Здесь $x^{i_1}{}_1$ —координаты вектора-аргумента $\mathbf{x}_1$, и т. д. Аналогично предыдущему коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ определяются формулами

$$\varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_k) \qquad (4.59)$$

и преобразуются но закону (4.57), т. е. образуют k раз ковариантный тензор.

Обратно, координаты всякого k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$ могут быть при желании истолкованы как коэффициенты $\varphi_{i_1 i_2 \dots i_k}$ некоторой полилинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ от k векторных аргументов. Все это проверяется совершенно аналогично двухвалентному случаю.

Подчеркнем, что, говоря о функции $\varphi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$, мы, как и в предыдущих случаях, имеем в виду функцию инвариантную, т. е. определенную независимо от выбора координатной системы.

4.6. Общее понятие о тензоре

Прежде чем сформулировать общее понятие о тензоре, мы займемся так называемыми контравариантными тензорами.

Важнейший пример одновалентного контравариантного тензора доставляют нам координаты x^i фиксированного вектора $\mathbf{x}$. Поскольку вектор $\mathbf{x}$ фиксирован, координаты $x^1, x^2, \dots, x^n$ имеют определенные численные значения в каждой координатной систете и преобразуются по закону (3.69):

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \qquad (4.60)$$

В общем случае мы будем говорить, что нам дан одновалентный контравариантный тензор, если в каждой координатной системе нам *заданы n чисел a^1, a^2, ... , a^n, занумерованных при помощи одного индекса и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a^{i'} = A_i^{i'} a^i. \tag{4.61}$$

Числа a^i мы будем называть *координатами* нашего тензора.

В обозначении контравариантные тензоры отличаются от ковариантных записью индексов наверху. Этим соглашением мы фактически пользовались и ранее (хотя смысл его раскрывается лишь теперь) и систематически будем пользоваться в дальнейшем. Термин «контравариантный», т. е. «противопреобразующийся», напоминает о том, что координаты контравариантного тензора a^1, a^2, ... , a^n преобразуются не так, как векторы репера $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, а при помощи (транспонированной) обратной матрицы (о чем подробно говорилось в р. 3.3 в применении к координатам вектора $x^1, x^2, \ldots, x^n$).

Как уже отмечалось, координаты x^i любого фиксированного вектора **x** образуют одновалентный контравариантный тензор. Но верно и обратное: координаты любого одновалентного контравариантного тензора a^i можно истолковать как координаты x^i некоторого фиксированного вектора **x**.

В самом деле, построим в какой-нибудь исходной координатной системе вектор **x** с координатами $x^i = a^i$. Тогда это равенство продолжает соблюдаться и в любой координатной системе ввиду одинакового характера законов преобразования (4.60) и (4.61).

Ясно, что определение k раз контравариантного тензора $x^i = a^i$ может быть теперь без труда сформулировано аналогично определению k раз ковариантного тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ единственно с той разницей, что закон преобразования вместо (4.57) будет иметь вид

$$a^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = A_{i_1}^{i'_1} A_{i_2}^{i'_2} \ldots A_{i_k}^{i'_k} a^{i_1 i_2 \ldots i_k}, \tag{4.62}$$

повторяя, таким образом, для каждого из индексов закон (4.60).

Мы, однако, не будем останавливаться на этом более подробно, так как общее определение тензора, обладающего и ковариантными и контравариантными индексами в любом числе, покрывает все до сих пор перечисленные частные случаи.

Начнем с примера.

Мы будем называть аффинором $\mathfrak{A}$ закон, ставящий в соответствие каждому вектору **x** *информационного пространства определенный вектор* **y**:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \tag{4.63}$$

причем зависимость **y** *от* **x** *носит линейный характер, т. е. соблюдаются условия:*

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathfrak{A}\mathbf{x}_1 + \mathfrak{A}\mathbf{x}_2, \tag{4.64}$$

$$\mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathfrak{A}\mathbf{x} \tag{4.65}$$

для любых $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}$, α *(*α *—число).*

Рассмотрим аффинор A в координатной записи, т. е. выразим координаты y^j вектора **y** как функции координат x^i вектора **x** в какой-нибудь координатной системе. Дли этой цели разложим предварительно векторы $A\,\mathbf{e}_i$ (т. е. результат действии аффинора на векторы репера) по векторам репера. Коэффициенты разложения обозначим a^j_i:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = a_i^1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i^n\mathbf{e}_n = a_i^j\mathbf{e}_j. \tag{4.66}$$

Тогда, учитывая, что, как обычно,

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i,$$

и пользуясь свойством линейности аффинора A, мы можем написать:

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{A}(x^i\mathbf{e}_i) = x^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = x^i a_i^j\mathbf{e}_j.$$

Так как, с другой стороны,

$$\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_j,$$

то, сравнивая оба разложения, получим:

$$y^j = a_i^j x^i. \tag{4.67}$$

Таким образом, координаты вектора-функции **y** выражаются линейно через координаты вектора-аргумента **x** с коэффициентами a^j_i.

Эти коэффициенты a^j_i мы будем называть *координатами аффинора* A. Выясним теперь закон их преобразования.

Запишем (4.66) в новой системе координат:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = a_{i'}^{j'}\mathbf{e}_{j'}. \tag{4.68}$$

Пользуясь формулами

$$\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_j = A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'},$$

а также формулами (4.66), мы можем, с другой стороны, написать:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_{i'} = \mathfrak{A}(A_{i'}^i\mathbf{e}_i) = A_{i'}^i\mathfrak{A}\mathbf{e}_i = A_{i'}^i a_i^j\mathbf{e}_j = A_{i'}^i a_i^j A_j^{j'}\mathbf{e}_{j'}.$$

Сравнивая это разложение с разложением (4.68), мы можем приравнять коэффициенты при одинаковых векторах нового репера.

Получаем:

$$a_{i'}^{j'} = A_{i'}^i A_j^{j'} a_i^j. \tag{4.69}$$

Это и есть искомый закон преобразования координат аффинора.

Мы видим, что нижний индекс участвует в преобразовании по схеме (4.69), т. е. как ковариантный, а верхний индекс—по схеме (4.60), т. е. как контравариантный. В связи с этим совокупность координат аффинора a^j_i, заданную в каждой координатной системе, мы будем называть *тензором один раз ковариантным и один раз контравариантным.* Как мы видим, закон преобразования для координат аффинора a^j_i существенно отличается от закона преобразования коэффициентов билинейной функции a_{ij}, хотя в обоих случаях мы имеем двухвалентный (т. е. с двумя индексами) тензор.

Заметим, что мало того, что координаты аффинора подчинены закону преобразования (4.69), но и, обратно, величины a^j_i, подчиненные этому закону, всегда представляют собой координаты некоторого аффинора $\mathcal{A}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно определить $\mathcal{A}$ формулами (4.67) в какой-нибудь одной исходной координатной системе. Тогда величины a^j_i продолжают служить координатами аффинора и в любой другой координатной системе, так как преобразуются по тому же закону (4.69), как и координаты аффинора.

Отметим еще важный частный случай, когда аффинор означает тождественное преобразование, т. е. когда

$$\mathbf{y}= \mathcal{A}\,\mathbf{x}\equiv\mathbf{x},$$

а следовательно, $y^j=x^j$.

Сравнивая эти формулы с (4.67), мы замечаем, что в нашем случае в *любой координатной системе*

$$a^j_i = \delta^j_i = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}. \qquad (4.70)$$

Таким образом, мы получаем пример тензора один раз ковариантного и один раз контравариантного, имеющего в *любой координатной системе одни и те же координаты* δ^j_i. Этот тензор мы будем называть *единичным.* То, что числа δ^j_i действительно подчиняются закону преобразования (4.69), оставаясь в то же время неизменными, легко проверить и непосредственно. В самом деле, вычисляя правую часть (4.69), получим:

$$A^i_{i'} A^{j'}_j \delta^j_i = A^k_{i'} A^{j'}_k = \delta^{j'}_{i'}.$$

Мы сначала применили соотношение (4.70) и сохранили в сумме лишь члены, где $i=j$ (обозначив их общее значение через k), а затем использовали (3.60).

Дадим, наконец, общее определение тензора.

Мы говорим, что нам дан $k+l$-валентный тензор, k раз ковариантный и l раз контравариантный, если в каждой координатной *системе нам заданы* n^{k+l} чисел $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$, *занумерованных k индексами внизу и l индексами наверху и преобразующихся при переходе от одной координатной системы к другой по закону*

$$a_{i'_1 i'_2\ldots i'_k}^{j'_1 j'_2\ldots j'_l} = A_{j_1}^{j'_1} A_{j_2}^{j'_2}\ldots A_{j_l}^{j'_l} A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2}\ldots A_{i'_k}^{i_k} a_{i_1 i_2\ldots i_k}^{j_1 j_2\ldots j_l}. \qquad (4.71)$$

Индексы внизу отличаются друг от друга 1-м, 2-м, ..., *k-м* местом написания; аналогично отличаются друг от друга и верхние индексы. Все индексы пробегают значения 1, 2, . .., *n* независимо друг от друга. Числа $a_{i_1\ldots i_k}^{j_1\ldots j_l}$ мы будем называть *координатами тензора* в соответствующей координатной системе.

Смысл закона преобразования (4.71) состоит в том, что каждый нижний индекс участвует в преобразовании один раз по схеме ковариаутуого тензора

$$a_{i'} = A_{i'}^{i} a_{i},$$

а каждый верхний — один раз по схеме контравариантного тензора

$$a^{j'} = A_{j}^{j'} a^{j}.$$

Общее число индексов $k+l$ будем называть *валентностью* тензора.

Числу нижних индексов k и числу верхних индексов l можно придавать любые значения 0, 1, 2, ..., одному независимо от другого. Если $k = l = 0$, то, как мы будем считать, тензор имеет лишь одну координату *а*, совсем лишенную индексов, и сводится к *инварианту,* т. е. координата *а* имеет одно и то же численное значение в любой координатной системе. Кстати, в случае $k = l = 0$ имеем $n^{k+l} = 1$. Особое внимание следует обратить на то обстоятельство, что в правой части (4.71) происходит суммирование по всем $k+l$ нештрихованным индексам, и, таким образом, *каждая* координата тензора в новой координатной системе зависит от *всех* его координат в старой системе. Это означает, что в конечном счете тензор не сводится просто к совокупности отдельных чисел — его координат,— а представляет собой единое целое.

Последнее связано с тем, что каждый тензор, как мы видели на примерах, отражает какую-либо цельную сущность, которой может быть геометрический или физический объект и «распадается» на свои координаты лишь условно, т. е. по отношению к той или иной координатной системе.

4.7. Сложение тензоров

В ближайших пунктах мы займемся тензорной алгеброй, т. е. рассмотрим основные инвариантные операции, позволяющие по тензорам составлять новые тензоры. Этих операций четыре: сложение, умножение, свертывание тензоров и подстановка индексов у тензора. Инвариантность тензорных операций нужно понимать в том смысле, что, примененные к данным тензорам, они дают в результате вполне определенный тензор, *не зависящий от того, в какой координатной системе происходит выкладка.* Тем самым тензорные операции отражают по существу те операции над сущностями, как, например, геометрическими и физическими объектами (**заданными посредством тензоров**), которые имеют геометрический или физический смысл и совершаются независимо от выбора координатной системы.

В этом пункте мы рассмотрим сложение тензоров. Пусть нам даны два тензора *одинакового строения, т. е. с одинаковым числом верхних индексов и с одинаковым числом нижних индексов.* Пусть, для примера, эти тензоры будут трижды ковариантными и дважды контравариантными:

$$a^{ij}_{pqr}, \quad b^{ij}_{pqr}.$$

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора сложим с соответствующей (т. е. занумерованной теми же индексами на тех же местах) координатой второго тензора, и результат примем за координату нового тензора

$$c^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{pqr} + b^{ij}_{pqr}. \tag{4.72}$$

Координату нового тензора нумеруем, конечно, теми же индексами на тех же местах.

Однако нужно еще проверить, что c^{ij}_{pqr} действительно представляют собой координаты одного и того же тензора, независимо от того, в какой координатной системе мы их вычислили. Другими словами, нужно убедиться, что c^{ij}_{pqr} подчиняются тензорному закону преобразования:

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} c^{ij}_{pqr}. \tag{4.73}$$

Здесь

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'j'}_{p'q'r'} + b^{i'j'}_{p'q'r'}, \tag{4.74}$$

т. е. $c^{i'j'}_{p'q'r'}$, вычисляются в новой (как и вообще в любой) координатной системе по схеме (4.72).

Но равенство (4.73) легко вытекает из справедливости тензорного закона преобразования для a^{ij}_{pqr}, b^{ij}_{pqr}:

$$a^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} a^{ij}_{pqr}, \qquad (4.75)$$

$$b^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} A^{r}_{r'} b^{ij}_{pqr}. \qquad (4.76)$$

Действительно, складывая эти равенства почленно, вынося общие множители в правой части за скобки и принимая во внимание (4.72) и (4.74), мы получаем равенство (4.73).

В нашем рассуждении ничего по существу не изменится, если мы будем складывать *любые* тензоры, но обязательно *одинакового строения.* В результате получается вполне определенный тензор *того же строения.* Ясно также, что если вместо двух тензоров складывать несколько тензоров одинакового строения, то все сказанное остается справедливым.

Поясним еще инвариантный характер операции сложения на примере. Допустим, что складываются два одновалентных контравариантных тензора x^i, y^i, в результате чего получается тензор того же строения z^i:

$$z^i = x^i + y^i. \qquad (4.77)$$

Инвариантный характер операции сложения означает, что z^i дают нам координаты вполне определенного тензора, независимо от того, в какой координатной системе они вычислены.

Истолкуем теперь x^i, y^i как координаты фиксированных векторов, **x**, **y**, что, как мы знаем, всегда возможно. Поскольку z^i — координаты вполне определенного тензора, то и их можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора **z**. Тогда равенство (4.77) выражает информационно-геометрический факт, независимый от выбора координатной системы, именно, что вектор **z** есть сумма векторов **x** и **y**. Аналогичным образом и в более сложных случаях инвариантность тензорных операций означает по существу рассмотрение сущностных фактов вне зависимости от случайностей выбора координатной системы.

4.8. Умножение тензоров

В отличие от сложения перемножать можно любые тензоры (не требуя, чтобы они были одинакового строения), но при этом обязательно указывать порядок множителей, так как результат будет зависеть не только от самих множителей, но и от их порядка.

Рассмотрим для примера перемножение тензоров a^{i}_{pq}, b^{j}_{r}, заданных в порядке их записи.

В каждой координатной системе каждую координату первого тензора множим на каждую координату второго тензора и полученные произведения $a^i_{pq}b^j_r$ *принимаем за координаты нового тензора* c^{ij}_{pqr}, *причем нумеруем эти координаты так: внизу выписываем сначала нижние индексы первого множителя, а затем нижние индексы второго множителя, сохраняя в обоих случаях их прежний порядок, и аналогично поступаем с верхними индексами.*

Полученный тензор c^{ij}_{pqr} мы будем называть *произведением* тензоров a^i_{pq}, b^j_r.

Если бы множителей было несколько, то мы совершенно таким же образом перенесли бы поочередно индексы 1-го, 2-го, ... и т. д. множителей на координату произведения.

Однако мы должны еще, конечно, доказать, что определенные в каждой координатной системе числа

$$c^{ij}_{pqr} = a^i_{pq}b^j_r \tag{4.78}$$

действительно являются координатами тензора. С этой целью выпишем закон преобразования для координат множителей:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq},$$

$$b^{j'}_{r'} = A^{j'}_j A^r_{r'} b^j_r.$$

Перемножая эти равенства почленно и принимая во внимание, что в новой (как и во всякой) координатной системе имеет место равенство (4.78), так что

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = a^{i'}_{p'q'} b^{j'}_{r'},$$

получим окончательно

$$c^{i'j'}_{p'q'r'} = A^{i'}_i A^{j'}_j A^p_{p'} A^q_{q'} A^r_{r'} c^{ij}_{pqr}. \tag{4.79}$$

Этот результат показывает нам, что в какой бы координатной системе мы ни вычисляли величины c^{ij}_{pqr} согласно (4.78), они являются всегда координатами *одного и того же тензора.* Таким образом, операция умножения тензоров действительно определяет некоторый новый тензор.

Очевидно, все сказанное дословно повторяется и при перемножении любых тензоров в любом числе.

Заметим, что если мы станем перемножать те же тензоры в другом порядке, то получим другой результат. А именно, хотя координаты произведения будут те же, но они будут иначе занумерованы индексами. Так, при изменении порядка множителей в нашем примере получаем:

$$\tilde{c}^{ij}_{pqr} = b^i_p a^j_{qr}. \tag{4.80}$$

Сравнивая это выражение с (4.78), убеждаемся, что *соответствующие* (т. е. занумерованные одинаковыми индексами на одинаковых местах) координаты тензоров c^{ij}_{pqr} и $\tilde{c}^{ij}_{pqr}$, не совпадают, хотя *совокупность* координат у этих тензоров одна и та же. Так как в понятие тензора входит и способ нумерации его координат при помощи индексов, то мы должны признать полученные тензоры различными. Более подробно см. об этом в п. 4.10.

Отметим простой частный случай, когда из двух перемножаемых тензоров один — нулевой валентности, т. е. попросту инвариант *a*. Тогда дело сводится к умножению всех координат другого множителя, например b^{ij}_p, на этот инвариант, в результате чего получается тензор того же строения:

$$c^{ij}_p = ab^{ij}_p .$$

В связи с этим мы не рассматриваем особо операцию вычитания тензоров (одного строения), поскольку ее всегда можно представить как сложение уменьшаемого с вычитаемым, умноженным на —1.

Пример. Перемножением одновалентных тензоров b^i и c_j получается двухвалентный тензор

$$a^i_j = b^i c_j. \tag{4.81}$$

Тензор a^i_j, как мы знаем (п.4.6), всегда может быть истолкован как некоторый аффинор A *:*

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}, \text{ т. е. } y^i = a^i_j x^j.$$

Рассмотрим, как сказывается на аффиноре A то обстоятельство, что соответствующий тензор a^i_j *мультипликативный* (т. е. получен произведением одновалентных тензоров).

Пользуясь тем, что $a^i_j = b^i c_j$ перепишем:

$$y^i = b^i c_j x^j$$

Мы знаем (п.4.5), что $c_j x^j$ можно всегда истолковать как некоторую линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$ вектора **x**, так что

$$y^i = b^i \varphi(\mathbf{x})$$

А так как b^i всегда можно истолковать как координаты некоторого фиксированного вектора **b**, то окончательно

$$\mathbf{y} = \mathbf{b}\varphi(\mathbf{x}).$$

Таким образом, в нашем случае действие аффинора на вектор-аргумент **x** дает произведение постоянного вектора **b** на линейную скалярную функцию $\varphi(\mathbf{x})$. Аффинор A в этом случае называют иногда *диадой.*

4.9. Свертывание тензора

Операции сложения и умножения тензоров естественно переносят в тензорную область привычные нам арифметические операции. В противоположность этому операция свертывания носит специфически тензорный характер и не имеет прообраза в более элементарных разделах математики.

Пусть дан тензор произвольный, но имеющий, по крайней мере, один индекс внизу и, по крайней мере, один индекс наверху, например, $a^{ijq}{}_{pq}$. Выберем какой-нибудь индекс наверху, например, 2-й, и какой-нибудь индекс внизу, например, 1-й. Отберем те координаты тензора, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения 1, 2, ..., n, и просуммируем все эти координаты при фиксированных значениях остальных индексов:

$$a^{i1k}_{1q} + a^{i2k}_{2q} + \ldots + a^{ink}_{nq} = a^{ik}_{q}. \tag{4.82}$$

Мы обозначили сумму $a^{ik}{}_{q}$, так как она зависит лишь от остальных (фиксированных) индексов. Пользуясь краткой записью суммирования, можно (4.82) переписать:

$$a^{ixk}_{xq} = a^{ik}_{q}. \tag{4.83}$$

Как оказывается, числа $a^{ik}{}_{q}$, определенные согласно (4.83) в каждой координатной системе, являются координатами одного и того же тензора, потерявшего по сравнению с исходным тензором по одному индексу вверху и внизу.

В самом деле, запишем закон преобразования координат исходного тензора:

$$a^{i'j'k'}_{p'q'} = A^{i'}_{i} A^{j'}_{j} A^{k'}_{k} A^{p}_{p'} A^{q}_{q'} a^{ijk}_{pq}.$$

Придадим второму индексу наверху (j') и первому внизу (p') одно и то же значение x' и по x' произведем суммирование. Получим:

$$a^{i'x'k'}_{x'q'} = A^{i'}_{i} A^{x'}_{j} A^{k'}_{k} A^{p}_{x'} A^{q}_{q'} a^{ijk}_{pq}.$$

В правой части происходит суммирование по шести индексам. Мы выполним сначала суммирование по x'. В силу (3.61)

$$A^{x'}_{j} A^{p}_{x'} = \delta^{p}_{j},$$

и мы получаем:

$$a^{i'x'k'}_{x'q'} = A^{i'}_{i} A^{k'}_{k} A^{q}_{q'} \delta^{p}_{j} a^{ijk}_{pq}.$$

Так как

$$\delta^{p}_{j} = \begin{cases} 0 \\ 1, \end{cases}$$

то в сумме следует оставить лишь те члены, для которых $p=j$ (общее значение $p=j$ обозначим через x), причем $\delta^{x}{}_{x}=1$ (здесь по x

суммирования не предполагается), так что множитель δ^x_x можно не писать. Получим окончательно:

$$a^{i'x'k'}_{x'q'} = A^{i'}_i A^{k'}_k A^q_{q'} a^{ixk}_{xq}. \tag{4.84}$$

Заметим, что во всех случаях, когда в выражение входит множитель δ^p_i, причем по обоим индексам происходит суммирование, этот множитель, как мы видели, следует выкинуть, а в оставшемся выражении индексам p и j придать общее значение (и по нему суммировать). Это правило нам пригодится в дальнейших выкладках.

Пользуясь обозначениями (4.83), мы можем переписать последний результат в виде

$$a^{i'k'}_{q'} = A^{i'}_i A^{k'}_k A^q_{q'} a^{ik}_q. \tag{4.85}$$

Эта формула показывает, что величины a^{ik}_q действительно подчиняются тензорному закону преобразования и, следовательно, дают нам вполне определенный тензор.

Мы будем говорить, что тензор a^{ik}_q, *составленный из тензора* a^{ijq}_{pq} *согласно* (4.83), *получен из него свертыванием по индексам j и p, или, точнее, по индексам второму сверху и первому снизу.*

В то время как сложение дает нам тензор той же валентности, как и слагаемые, умножение дает тензор, вообще говоря, высшей валентности, чем множители, свертывание приводит, наоборот, к снижению валентности на 2 единицы: пропадает один индекс вверху и один индекс внизу. В связи с этим свертывание является важным источником получения инвариантов: повторяя его достаточное число раз, мы можем уничтожить все индексы у тензора, если у того сначала было одинаковое число индексов внизу и вверху. Полученный в итоге тензор нулевой валентности представляет собой, как мы знаем, инвариант.

Например, тензор a^i_j, отвечающий, как всегда можно считать, некоторому аффинору A, порождает посредством свертывания инвариант

$$a = a^i_i = a^1_1 + a^2_2 + \ldots + a^n_n, \tag{4.86}$$

который называется *следом* аффинора A.

Особенно часто применяется свертывание к тензорам, полученным перемножением данных тензоров. Например, запись линейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x})$ (п. 4.6)

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_i x^i \tag{4.87}$$

мы можем теперь истолковать как получение инварианта $\varphi(\mathbf{x})$ путем свертывания тензора $\varphi_i x^p$ (представляющего собой произведение тензоров φ_i и x^p).

Совершенно аналогично этому и запись билинейной скалярной функции

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{ij} x^i y^j$$

нужно понимать как результат двукратного свертывания тензора $\varphi_{ij} x^p y^q$ по индексам *i, p* и *j, q*.

В подобных случаях мы для краткости будем говорить, что «тензор φ_{ij} свертывается с тензорами x^i, y^j», вместо того, чтобы говорить: «тензор φ_{ij} перемножается с тензорами x^p, y^q и в полученном результате производится свертывание по индексам *i, p* и *j, q»*. После введения операции свертывания раскрывается полностью и смысл сокращенного обозначения суммирования по индексу, встречающемуся один раз наверху и один раз внизу. Это обозначение именно потому и имеет право на существование, что оно выражает важную и часто встречающуюся операцию свертывания. И действительно, во всех случаях, когда мы его применяли, оно имело именно этот смысл, хотя операция свертывания и была нам неизвестна. Исключительно этот смысл оно будет иметь и в дальнейшем.

4.10. Операция подстановки индексов

Пусть нам дан какой-либо тензор, например, a^{ij}_{pqr}. Мы можем составить из него новый тензор того же строения b^{ij}_{pqr}, не меняя его координат самих по себе, а лишь иначе нумеруя их посредством индексов. Условимся каждую координату нумеровать теперь так, чтобы прежний первый индекс снизу стал писаться на втором месте, второй — на третьем, а третий — на первом. Формулой это можно выразить так:

$$b^{ij}_{pqr} = a^{ij}_{qrp}. \tag{4.88}$$

Так как в определение тензора входит и способ нумерации его координат посредством 1-го, 2-го,... и т. д. индексов внизу, и то же самое наверху, то b^{ij}_{pqr} мы должны признать за тензор, отличный от a^{ij}_{pqr}.

Мы будем говорить, что тензор b^{ij}_{pqr} *получен из* a^{ij}_{pqr} *подстановкой его индексов* (в данном случае круговой подстановкой трех нижних индексов при неизменных верхних).

В общем случае можно задаться любой подстановкой нижних индексов и одновременно любой подстановкой верхних индексов (причем, как и в нашем примере, имеются в виду подстановки не численных значений индексов, а *мест их написания* при координате тензора). То, что в результате снова получается тензор и притом того же строения, легко следует из одинакового поведения всех нижних индексов при тензорном законе преобразования и равным образом из одинакового поведения всех верхних индексов.

Но, разумеется, подстановки, при которых верхние индексы могли бы переходить в нижние и наоборот, не рассматриваются, так как они не являются инвариантными операциями. Ввиду различного поведения верхних и нижних индексов при преобразовании координатной системы мы при такой подстановке не получили бы вновь тензора.

Операция подстановки индексов производит впечатление формальной и мало содержательной и действительно является такой, если ее рассматривать изолированно. Но основное ее значение сказывается в тех операциях, где она комбинируется со сложением и вычитанием, особенно в операциях *симметрирования и альтернации.*

Операция *симметрирования* производится следующим образом. Из одноименных (например, нижних) индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся N! *всевозможных* подстановок и берется среднее арифметическое всех полученных при этом N! тензоров. Результат симметрирования обозначается тем, что участвующие и симметрировании индексы берутся в круглые скобочки.

В случае N= 1 симметрирование тривиально и не меняет тензора; подстановка только одна — тождественная.

В случае N =2 рассмотрим тензор a_{ij}, где явно выписаны лишь индексы, участвующие в симметрировании; остальные индексы, которых может быть сколько угодно (а может и совсем не быть), лишь подразумеваются. Подстановок здесь будет лишь две: тождественная и транспозиция 1-го и 2-го индексов. Результат симметрирования:

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}). \tag{4.89}$$

В случае N=3 рассмотрим тензор a_{ijk} с той же оговоркой, что он может иметь и другие индексы, хотя симметрированию подлежат лишь явно выписанные. Делая все шесть подстановок и беря среднее арифметическое, получим:

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{6}(a_{ijk} + a_{jki} + a_{kij} + a_{jik} + a_{ikj} + a_{kji}). \tag{4.90}$$

Аналогично производим симметрирование и при любом числе симметрируемых индексов. Для верхних индексов все происходит точно таким же образом.

Мы называем тензор *симметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он не меняется при транспозиции любых двух из этих индексов, а следовательно, и при любой их подстановке. Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют симметрическую матрицу

$$a_{ij}= a_{ji}. \qquad (4.91)$$

В результате симметрирования получается тензор *симметрический* по тем индексам, которые участвовали в симметрировании.

Переходим теперь к операции *альтернации.* Она производится так. Из одноименных индексов данного тензора произвольно выбирается некоторое их число N, над этими индексами производятся N! всевозможных подстановок, результаты четных подстановок берутся со своим знаком, а у результатов нечетных подстановок знак меняется на обратный, и берется среднее арифметическое всех полученных при этом N! тензоров. Результат альтернации обозначается тем, что участвующие в альтернации индексы берутся в прямые скобочки.

В случае $N = 1$ подстановка лишь одна, тождественная, альтернирование тривиально и не меняет тензора.

В случае N =2 альтернация имеет вид

$$a_{[ij]}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}). \qquad (4.92)$$

В случае N =3 получаем:

$$a_{[ijk]}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \qquad (4.93)$$

Кроме индексов, участвующих в альтернации, у рассматриваемых тензоров могут быть и другие, явно не выписанные индексы.

Мы называем тензор *кососимметрическим* по нескольким данным (обязательно одноименным) индексам, если он умножается на — 1 при транспозиции любых двух из этих индексов (и, следовательно, умножается на — 1 при любой нечетной подстановке и не меняется при четной подстановке этих индексов). Таков, например, дважды ковариантный тензор, координаты которого образуют кососимметрическую матрицу

$$a_{ij}= -a_{ji} \qquad (4.94)$$

или трижды ковариантный тензор, обладающий свойством

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}=-a_{jik}=-a_{kji}=-a_{ikj}. \qquad (4.95)$$

В результате альтернации *всегда* получается, как легко проверить, тензор кососимметрический по тем индексам, которые участвовали в альтернации.

Если тензор кососимметричен по данным индексам, то альтернация по этим индексам его не меняет. Действительно, если, например, a_{ijk} кососимметричен по трем своим индексам, т. е. обладает свойством (4.95), то в скобках (4.93) все шесть слагаемых равны между собой, и мы получаем:

$$a_{[ijk]} = a_{ijk}.$$

Отметим также, что если из тех индексов, по которым тензор кососимметричен, хотя бы два имеют одинаковые значения, то соответствующая координата обращается в нуль.

Действительно, при транспозиции этих двух индексов координата должна изменить знак в силу косой симметрии; с другой же стороны, она не изменится в силу равенства индексов. Следовательно, она равна нулю.

4.11. Кососимметрические тензоры

Свертывание не есть единственный источник получения инвариантов данного тензора. В этом пункте мы встретимся с другим важным способом; но предварительно вернемся к кососимметрическим тензорам.

Тензор называется кососимметрическим, если при транспозиции (перестановке) любых двух индексов у любой его координаты она меняет знак.

Рассмотрим прежде всего двухвалентный кососимметричсский тензор c_{ij}.

Согласно сказанному он характеризуется свойством

$$c_{ij} = -c_{ji} \qquad (i, j=1, 2. \ 3). \tag{4.96}$$

В частности, если $i = j$, мы получаем:

$$c_{ii} = -c_{ii}, \qquad \text{откуда} \qquad c_{ii} = 0. \tag{4.97}$$

Двухвалентный кососимметрический тензор называется кратко *бивектором.* Будем считать, что мы находимся в *правой* координатной системе. Тогда, обозначая

$$u_1 = -c_{23}, \quad u_2 = -c_{31}, \quad u_3 = -c_{12} \tag{4.98}$$

и принимая во внимание (4.96) и (4.97), мы можем составить матрицу координат нашего бивектора:

$$\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0, & -u_3, & u_2 \\ u_3, & 0, & -u_1 \\ -u_2, & u_1, & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4.99}$$

Как мы знаем (п.4.4), всякому двухвалентному тензору, в частности нашему бивектору c_{ij}, отвечает некоторый аффинор с теми же координатами. Обозначим этот аффинор через $\mathfrak{C}$ и выясним его характер. Для этой цели используем координатную запись аффинора (4.24), которая в нашем случае дает:

$$y_p = \sum_q c_{pq} x_q,$$

или в подробной записи при p=1, 2, 3

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_2u_3 + x_3u_2, \\ y_2 &= \quad x_1u_3 - x_3u_1, \\ y_3 &= -x_1u_2 + x_2u_1. \end{aligned}\right\} \tag{4.100}$$

Мы замечаем, что вектор $\mathbf{y} = \mathfrak{C}\mathbf{x}$ есть не что иное, как векторное произведение **u** на **x**, если обозначить через **u** вектор с координатами u_1, u_2, u_2. Итак,

$$\mathfrak{C}\mathbf{x} = [\mathbf{ux}]. \tag{4.101}$$

Из этой записи видно, в частности, что вектор **u** будет вполне определенным независимо от выбора координатной системы. В самом деле, если бы он мог меняться, то менялась бы и *зависимость* вектора **y** от **x**, что невозможно, так как мы рассматриваем некоторый вполне определенный аффинор $\mathfrak{C}$.

Таким образом, аффинор $\mathfrak{C}$*, отвечающий бивектору* $c_{ij\cdot}$*, сводится к векторному умножению некоторого постоянного вектора* **u** *на вектор-аргумент* **x**.

При этом *в правых координатных системах координаты бивектора* c_{ij} *и вектора* **u** *связаны формулами* (4.98).

В левых координатных системах, напротив, полагаем

$$u_1 = c_{23}, \qquad u_2 = c_{31}, \qquad u_3 = c_{12}. \tag{4.102}$$

Тогда в правых частях (4.100) тоже нужно изменить знаки на обратные; мы получаем запись (по-прежнему *правого)* векторного произведении **[ux]** в *левой* системе и снова переходим к (4.101).

Переходим к *трехвалентному кососимметрическому тензору,* который носит название *тривектора.* Обозначим его координаты c_{ijk}. Для любых двух его индексов, например 2-го и 3-го, имеет место соотношение

$$c_{ijk} = -c_{ikj}. \tag{4.103}$$

Если среди его индексов есть хотя бы два одинаковых, например 2-й и 3-й, то (4.103) принимает вид

$$c_{ijj} = -c_{ijj} \quad \text{откуда} \quad c_{ijj} = 0. \tag{4.104}$$

Итак, если мы хотим рассматривать отличные от нуля координаты тривектора, то должны брать все три индекса различными, т. е. придать им значения 1, 2, 3. Получим шесть следующих координат тривектора:

$$c_{123} = c_{231} = c_{312} = -c_{213} = -c_{321} = -c_{132} \tag{4.105}$$

Знаки равенства поставлены на основании (4.103) и аналогичных соотношений для любой пары индексов. Так, например, чтобы проверить первый знак равенства, достаточно в c_{123} переставить 1-й и 2- индексы, а у полученной координаты переставить 2-й и 3-й индексы. При двойной транспозиции дважды меняется знак, и полученная в итоге координата c_{231} равна c_{123}.

Нетрудно заметить, что общий смысл (4.105) состоит в том, что при четной подстановке индексов координата тривектора не меняется, а при нечетной — меняет только знак.

В результате у тривектора имеется лишь одна, как говорят, существенная координата, например, c_{123}. Остальные координаты или равны ей, или отличаются от нее только знаком, или, наконец, равны нулю.

Пусть **x, y, z** —три произвольных вектора, x_p, y_q, z_r — их координаты. Подсчитаем инвариант, полученный путем полного свертывания тензоров c_{ijk}, x_i, y_j, z_k:

$$I=\sum_i\sum_j\sum_k c_{ijk}x_iy_jz_k. \tag{4.106}$$

Сумма в правой части формально содержит 27 членов, но большинство членов равно нулю в силу (4.104). Остается лишь шесть членов, не равных нулю, а именно, те, для которых индексы i, j, k все различны (и представляют собой, следовательно, некоторую подстановку из 1, 2, 3). Эти члены имеют коэффициенты c_{ijk}, выражающиеся через c_{123} согласно (4.105).

Выписывая теперь (4.106) в развернутом виде, получим окончательно:

$$I=c_{123}(x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1-x_1y_3z_2)=$$
$$=c_{123}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}=\begin{cases}c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в правой системе)},\\ -c_{123}(\mathbf{xyz}) & \text{(в левой системе)}.\end{cases} \tag{4.107}$$

Мы использовали то обстоятельство, что полученный определитель выражает смешанное произведение (**xyz**) в праной координатной системе и отличается от этого произведения лишь знаком в левой координатной системе (само смешанное произведение трех векторов мы берем всегда *правое).*

Из полученного результата вытекает, в частности, что

$$\left.\begin{aligned}c_{123}&=\frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в правой системе)},\\ c_{123}&=-\frac{I}{\mathbf{xyz}} \quad \text{(в левой системе)}.\end{aligned}\right\} \tag{4.108}$$

Мы предполагаем здесь, что **xyz**≠0. Так как *I* и **xyz** инвариантны, то c_{123} сохраняет одно и то же численное значение во всех правых системах и одно и то же численное значение во всех левых системах, причем эти дна значения отличаются только знаком. Величина, обладающая таким свойством, называется *относительным инвариантом.*

Итак, единственная существенная координата тривектора есть относительный инвариант. Это позволяет нам использовать тривекторы как источник получения инвариантов.

Заметим, что в рассматриваемом нами трехмерном пространстве невозможен кососимметрический тензор более чем 3-й валентности. Говоря точнее, такой тензор всегда имеет лишь нулевые координаты.
В самом деле, совершенно так же, как и в (4.104), убеждаемся, что наличие двух одинаковых индексов обращает координату нашего тензора в нуль. Между тем, его координаты всегда имеют по меньшей мере два одинаковых индекса, так как индексов у них четыре или больше, а принимать они могут лишь значения 1, 2, 3. Следовательно, все координаты нашего тензора равны нулю.

4.12. Получение инвариантов с помощью кососимметрических тензоров

Если нам задан трехвалентный тензор a_{pqr} (не обязательно кососимметрический), то мы можем получить из него кососимметрический тензор c_{ijk} путем так называемой операции *альтернации;* а именно, каждая координата c_{ijk} определяется как среднее арифметическое шести координат тензора a_{pqr}, индексы при которых получены из i, j, k всевозможными подстановками (в том числе и тождественной), причем в случае четной подстановки координата берется со своим знаком, а в случае нечетной — с обратным:

$$c_{ijk}=\frac{1}{6}(a_{ijk}+a_{jki}+a_{kij}-a_{jik}-a_{kji}-a_{ikj}). \tag{4.109}$$

Нетрудно заметить, что c_{ijk} представляют собой тензор, так как операция альтернирования, которой мы их получили, сводится к комбинации известных нам тензорных операций подстановки индексои и сложения (вычитания) тензоров. Кроме того, из соотношений (4.109) следует, что c_{ijk} меняет знак при транспозии двух индексов, так как в правой части первая тройка членом превращается во вторую тройку со знаками + вместо —, а вторая тройка превращается в первую со знаками — вместо +. Таким образом, альтернация по трем индексам дает нам тензор, кососимметрический по этим индексам.

Когда тензор c_{ijk} *получен из тензора* a_{ijk} *по формуле* (4.109), *то мы будем говорить, что он получен из* a_{ijk} *альтернацией по индексам* i, j, k*; при этом мы будем применять взамен развернутого выражения* (4.109) *краткое обозначение*

$$a_{ijk} = a_{[ijk]}. \qquad (4.110)$$

Альтернацию можно производить и над тремя произвольно выбранными индексами многовалентного тензора, например, над первыми тремя индексами тензора a_{ijklm}

Получаем тензор

$$c_{ijklm} = a_{[ijk]\,lm}, \qquad (4.111)$$

причем в правой части над индексами i, j, k проделывается в точности то же самое, что и в правой части (4.109); индексы l, m переписываются при этом без изменения. Полученный в результате тензор является *кососимметрическим по индексам* i, j, k (т. е. по тем, по которым произведена альтернация).

Альтернацию можно производить *и по двум индексам,* произвольно выбранным в каком-либо (по крайней мере, двухвалентном) тензоре, причем в этом случае она выглядит значительно проще и означает просто *составление полуразности данной координаты и координаты, полученной из нее транспозицией избранных индексов.*

Так, для двухвалентного тензора a_{ij} альтернация по его индексам означает составление тензора

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \qquad (4.112)$$

Для четырехвалентного тензора a_{ijkl} альтернация, например, по 2-му и 4-му индексам означает составление тензора

$$c_{ijkl} = \frac{1}{2}(a_{ijkl} - a_{ilkj}). \qquad (4.113)$$

Ясно, что результат альтернации и здесь будет кососимметричен по соответствующим двум индексам j, l.

Как мы вскоре увидим, альтернация по двум индексам в своем месте играет большую роль, но для составления инвариантов (в трехмерном пространстве) является полезной лишь альтернация по трем индексам. К ней мы и возвращаемся.

Ясно, что, проальтернировав трехвалентный тензор согласно (4.109), мы можем получить его относительный инвариант в виде одной существенной координаты кососимметрического тензора

$$c_{123} = \frac{1}{6}(a_{123} + a_{231} + a_{312} - a_{213} - a_{321} - a_{132}). \qquad (4.114)$$

Интересно, что выражение в скобке по способу своего составления весьма напоминает определитель 3-го порядка. И действительно, оно и в самом деле обращается в определитель 3-го порядка, если, в частности, в качестве тензора a_{ijk} взять произведение трех тензоров 1-й валентности:

$$a_{ijk} = x_i y_j z_k. \tag{4.115}$$

Эти тензоры можно всегда считать, как мы знаем, координатами некоторых определенных векторов **x, y**, **z**. Теперь (4.114) принимает вид

$$c_{123} = \frac{1}{6}(x_1 y_2 z_3 + \ldots) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{4.116}$$

Полученный определитель дает смешанное произведение (**xyz**), если он вычислен в правой координатной системе, и — (**xyz**), если он вычислен в левой, координатной системе. Это соответствует тому, что c_{123} есть *относительный инвариант.*

Однако при помощи кососимметрических тензоров можно составлять и абсолютные инварианты, а не только относительные.

Пусть шестивалентный тензор $c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$ будет кососимметрическим как по индексам первой тройки, так и по индексам второй тройки. Рассмотрим его единственную существенную координату c_{123123}.

Так как она является относительным инвариантом, если рассматривать ее в зависимости отдельно от первой или отдельно от второй тройки индексов, то при переходе от правой координатной системы к левой (или наоборот) она дважды умножается на —1, т. е. не меняется. *Следовательно,* c_{123123} *есть инвариант уже абсолютный.*

Пусть теперь нам задан произвольный шестивалентный тензор $a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3}$. Проальтернируем его как по первой, так и по второй тройке индексов, в каждом случае по схеме (4.109). Получим тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{[i_1 i_2 i_3]\,[j_1 j_2 j_3]},$$

кососимметричсский как по первой, так и по второй тройке индексов. Следовательно, мы можем составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = a_{[123]\,[123]}. \tag{4.118}$$

Особенно важен частный случай, когда этот шестивалентный тензор представляет собой произведение трех одинаковых двухвалентных тензоров:

$$a_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} a_{i_3 j_3} \tag{4.119}$$

Произведем альтернацию по индексам j_1, j_2, j_3. Получим новый тензор

$$c_{i_1 i_2 i_3 j_1 j_2 j_3} = a_{i_1 i_2 i_3 [j_1 j_2 j_3]} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix}. \qquad (4.120)$$

То, что в результате получается именно такой определитель, вытекает из близкого родства процесса альтернации согласно (4.109) и процесса составления определителя, а именно, исходное для альтернации выражение (4.119) представляет собой тот член определителя, который получается произведением элементов по главной диагонали, а в процессе альтернации к нему добавляется не что иное, как остальные члены определителя. Это легко усмотреть, вспомнив правило составления определителя. Впрочем, легко проверить равенство (4.120) и прямой выкладкой, написав результат альтернации в развернутом виде согласно (4.109) и убедившись, что он совпадает с разложением определителя.

В отличие от (4.117) мы произвели здесь альтернацию лишь по одной тройке индексов. Но этого в данном случае достаточно, так как полученный нами тензор (4.120) *будет кососимметричен не только по индексам j_1, j_2, j_3, по которым мы альтернировали, но и по индексам i_1, i_2, i_3 тоже.*

В самом деле, взаимная перестановка индексов, например j_1, j_2 означает перестановку первых двух столбцов определителя (4.120), а взаимная перестановка индексом, например, i_1, i_2, означает перестановку первых двух его строк. И в том и в другом случае определитель умножается на -1, чем и доказывается требуемая кососимметричность.

Мы можем теперь составить абсолютный инвариант

$$c_{123123} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \mathrm{Det}\,|a_{ij}|. \qquad (4.121)$$

Таким образом, определитель, составленный из координат двухвалентного тензора, есть инвариант преобразования координатной системы.

Этот результат, впрочем, можно было бы получить и совершенно самостоятельно следующим образом. Запишем закон преобразования координат двухвалентного тензора

$$a'_{pq} = \sum_i \sum_j A_{pi} A_{qj} a_{ij}.$$

Тогда из правила умножения детерминантов следует, что

$$\mathrm{Det}\,|a'_{pq}| = \mathrm{Det}\,|A_{pi}| \cdot \mathrm{Det}\,|A_{qj}| \cdot \mathrm{Det}\,|a_{ij}| = \mathrm{Det}\,|a_{ij}|,$$

так как Det | A_{pi}| и Det | A_{qi}| суть детерминанты одной и той же ортогональной матрицы и, следовательно, равны оба или + 1 или —1. *Инвариант* Det| a_{ij}| *имеет важный геометрический смысл, а именно, он дает то постоянное отношение, в котором изменяются объемы всех тел при центроаффинном преобразовании*

$$\mathbf{y} = A\,\mathbf{x},$$

где аффинор A *имеет координаты* a_{ij}.

Достаточно проверить это утверждение для кубов, так как объем любого тела можно сколь угодно точно приблизить объемом входящего тела, составленного из кубов, и выходящего тела, также составленного из кубов (имеются в виду тела с кусочно гладкой границей).

Возьмем какой-нибудь куб, помещенный для простоты одной вершиной в начале координат *O,* и направим координатные оси по ребрам куба (рис. 4.1).

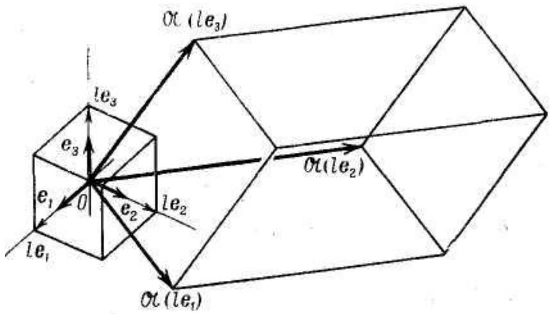


Рис. 4.1.

Тогда можно будет считать, что куб построен на векторах $l\mathbf{e}_1$, $l\mathbf{e}_2$, $l\mathbf{e}_3$, где l—ребро куба. Эти векторы согласно (4.19) перейдут в векторы:

$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_1) = l\,(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + a_{31}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_2) = l\,(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{32}\mathbf{e}_3),$$
$$\mathfrak{A}(l\mathbf{e}_3) = l\,(a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3).$$

Куб перейдет в построенный на этих векторах параллелепипед, объем которого $\tilde{V}$ равен, как известно, смешанному произведению векторов, а значит, равен определителю

$$\tilde{V} = \mathrm{Det}\,|\,la_{ij}\,| = l^3 \cdot \mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|\,.$$

Мы считаем при этом, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ образуют правую тройку; объем $\tilde{V}$ берется со знаком ± в зависимости от правой или левой ориентации векторов

$$\mathfrak{A}\,(l\mathbf{e}_1),\ \mathfrak{A}\,(l\mathbf{e}_2),\ \mathfrak{A}\,(l\mathbf{e}_3),$$

на которых он построен.

Если учесть, что объем куба $V=i^3$, то оказывается, что изменение объема произошло в отношении Det | a_{ij} |. Тем самым и для всякого тела коэффициент объемного расширения (со знаком!) имеет вид

$$\frac{\tilde{V}}{V} = \mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|\,. \tag{4.122}$$

Исходя из инварианта Det|a_{ij}|, можно построить и другие инварианты двухвалентного тензора a_{ij}. Для этой цели вычтем из a_{ij} тензор (4.30) с постоянными координатами $\lambda\delta_{ij}$, где λ—произвольное число, и составим детерминант из координат нового двухвалентного тензора

$$\mathrm{Det}\,|\,a_{ij}-\lambda\delta_{ij}\,| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Мы получаем снова инвариант преобразования координатной системы.

Если развернуть определитель и собрать члени с одинаковыми степенями λ, то получится, очевидно, кубический многочлен относительно λ

$$\mathrm{Det}\,|\,a_{ij}-\lambda\delta_{ij}\,| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \tag{4.123}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_i a_{ii}, \tag{4.124}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{4.125}$$

$$I_3 = \mathrm{Det}\,|\,a_{ij}\,|\,. \tag{4.126}$$

Так как (4.123) представляет собой инвариант *при любом значении* λ, то коэффициенты I_1, I_2, I_3 по отдельности также должны являться инвариантами.

Таковы основные *инварианты тензора* a_{ij}. Что же касается добавка — $\lambda\delta_{ij}$, то он уже сыграл свою роль и в окончательном результате, как мы видим, не участвует.

4.13. Степень произвола в выборе тензора данного строения

Мы установили основы тензорной алгебры, оперируя с произвольными тензорами, однако мы, строго говоря, до сих пор не знаем, существуют ли тензоры любого строения (т. е. с любым числом индексов наверху и внизу), и если существуют, то с какой степенью произвола определяются. Ясно одно, что если координаты тензора заданы в одной координатной системе, то в силу тензорного закона преобразования они определятся и в любой координатной системе. Но всегда ли можно построить тензор, задавшись *произвольно* его координатами в какой-либо одной координатной системе? На этот вопрос ответ утвердительный и жиздется он на основе следующих соображений.

Зададимся произвольно координатами искомого тензора, например, a^i_{pq}, в какой-нибудь одной координатной системе S. *Если искомый тензор существует,* то его координаты в любой другой координатной системе S' будут определяться по тензорному закону преобразования:

$$a^{i'}_{p'q'} = A^{i'}_i A^p_{p'} A^q_{q'} a^i_{pq}. \qquad (4.127)$$

Однако это еще не значит, что искомый тензор уже построен. Нужно еще убедиться, что тензорный закон преобразования действует не только при переходе от *данной к любой* координатной системе, но и при переходе от *любой к любой* координатной системе. Для этой цели рассмотрим еще одну произвольную координатную систему S''. Для нее аналогично (4.127) получаем:

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_i A^p_{p''} A^q_{q''} a^i_{pq}. \qquad (4.128)$$

Очевидно, по смыслу наших обозначений

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^{i'}_{i''} \mathbf{e}_{i'}, \quad \mathbf{e}_{i''} = A^i_{i''} \mathbf{e}_i, \qquad (4.129)$$

откуда легко следует (подстановкой из первого равенства во второе и сравнением с третьим), что

$$A^i_{i''} = A^{i'}_{i''} A^i_{i'}, \qquad (4.130)$$

т. е. матрица, преобразующая $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i''}$, есть произведение матриц, преобразующих $\mathbf{e}_i$ в $\mathbf{e}_{i'}$ и $\mathbf{e}_{i'}$ в $\mathbf{e}_{i''}$.

Аналогично для обратных преобразований имеем:

$$A^{i''}_i = A^{i'}_i A^{i''}_{i'}. \qquad (4.131)$$

Заменяя теперь в формуле (4.128)

$$A^{i''}_i, \ A^p_{p''}, \ A^q_{q''}$$

их значениями согласно (4.130) и (4.131), приведем ее к виду

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i'}_i A^{i''}_{i'} A^p_{p'} A^{p'}_{p''} A^q_{q'} A^{q'}_{q''} a^i_{pq}.$$

Пользуясь (4.127), получим окончательно

$$a^{i''}_{p''q''} = A^{i''}_{i'} A^{p'}_{p''} A^{q'}_{q''} a^{i'}_{p'q'}, \qquad (4.132)$$

т. е. действительно тензорный закон преобразования имеет место и при переходе от любой координатной системы к любой другой. Этим наше доказательство закончено. Основа его заключается просто в том, что наложению двух линейных преобразований над векторами репера
$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отвечает наложение соответствующих (и, очевидно, тоже линейных) преобразований над координатами тензора.

4.14. Симметрический аффинор

В теории информации, при испльзовании тензорного исчисления, исключительно важную роль играет понятие симметрического аффинора.

Аффинор A называется *симметрическим,* если для любых двух векторов **x, x'** имеет место соотношение

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'\mathfrak{A}\mathbf{x}. \qquad (4.133)$$

Другими словами, скалярное произведение одного вектора на функцию A от другого вектора не меняется при перестановке этих векторов между собой.

Необходимым и достаточным признаком симметричности аффинора служит симметричность матрицы его координат. В самом деле, пусть аффинор A симметрический. Согласно (4.20)

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p\mathfrak{A}\mathbf{e}_q, \qquad a_{qp} = \mathbf{e}_q\mathfrak{A}\mathbf{e}_p, \qquad (4.134)$$

а в силу симметричности аффинора правые части равны и, следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}, \qquad (4.135)$$

т. е. матрица координат аффинора симметрическая.

Обратно, пусть соблюдаются соотношения (4.135). Тогда в силу формул (4.134) получаем:

$$\mathbf{e}_p\mathfrak{A}\mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q\mathfrak{A}\mathbf{e}_p. \qquad (4.136)$$

Тем самым соотношение (4.133) проверено для ортов. Но тогда оно будет справедливым и для любых двух векторов **x, x'**. Чтобы убедиться в этом, достаточно помножить равенство (4.136) почленно на $x_p x'_q$ (где x_p—координаты **x**, а x'_q — координаты **x'**) и просуммировать почленно по p и q. Так как

$$\sum_p x_p\mathbf{e}_p = \mathbf{x}, \qquad \sum_q x'_q\mathbf{e}_q = \mathbf{x}',$$

то в результате мы получим соотношение (4.133).

Важнейшее свойство симметрического аффинора — наличие у него трех взаимно ортогональных собственных направлений. Вообще *собственным направлением аффинора* A (не обязательно симметрического) называется направление, все векторы которого **x** при действии на них аффинора $\mathcal{A}$ умножаются на некоторое число λ:

$$\mathcal{A}\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \qquad (4.137)$$

Для того чтобы направление было собственным, достаточно, чтобы хоть один его вектор **x** обладал свойством (4.137); тогда и все векторы этого направления обладают этим свойством, причем λ имеет для всех них одно и то же значение. Для проверки этого достаточно умножить (4.137) почленно на произвольное числб $\alpha\neq 0$ и внести α в левой части равенства под знак $\mathcal{A}$. Тогда оказывается, что вектор $\alpha\mathbf{x}$, т. е. любой вектор, коллинеарный с **x**, также обладает свойством (4.137).

Число α может быть и отрицательным: собственное направление всегда рассматривается с точностью до замены на обратное.

Коэффициент λ называется *собственным значением* аффинора $\mathcal{A}$ для данного собственного направления,

Запишем условие (4.137) в координатах, обозначая через y_p координаты $\mathcal{A}\,\mathbf{x}$:

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1, 2, 3).$$

Пользуясь формулами (4.24), получим:

$$\sum_q a_{pq}x_q = \lambda x_p \qquad (p=1, 2, 3). \qquad (4.138)$$

Выписывая каждое из трех равенств отдельно в развернутом виде и перенося все члены налево, получим:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + a_{23}x_3 &= 0,\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)\,x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.139)$$

Для отыскания собственных направлений и собственных значений достаточно решить эту систему относительно неизиестных λ, x_1, x_2, x_3. При этом , x_1, x_2, x_3 не должны одновременно обращаться в нуль (иначе вектор не укажет направления!) и ищутся они, как вытекает и из смысла задачи и из однородного характера уравнений (4.138), с точностью до умножения на общий множитель.

Чтобы система линейных однородных уравнений (4.139) относительно x_1, x_2, x_3 имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.140)$$

Таким образом, чтобы удовлетворить системе (4.139), необходимо брать в качестве λ корень кубического уравнения (4.140) (которое называется *характеристическим уравнением* аффинора A). Обратно, если в качестве λ взят корень уравнения (4.140), то система (4.139) имеет ненулевое решение x_1, x_2, x_3.

Однако это не всегда означает отыскание собственного направления, так как взятый нами корень λ может оказаться комплексным.

До сих пор мы говорили о произвольном аффиноре A . *Теперь предположим, что он симметрический,* а следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}. \tag{4.141}$$

В этом случае все три корня уравнения (4.140) *обязательно вещественные.* Действительно, возьмем какой-нибудь корень λ уравнения (4.140), подставим его в систему (4.139) и найдем ненулевые x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие (4.139), а следовательно, и (4.138). При этом мы не предрешаем вопроса, будут ли значения λ, x_1, x_2, x_3 вещественными или существенно комплексными. Во всяком случае мы не ошибемся, считая их комплексными, так как вещественные числа есть частный случай комплексных.

Умножим обе части равенства (4.138) на x^*_p, где x^*_p комплексно сопряжено с x_p, и просуммируем почленно по p=1, 2, 3. Получим:

$$\sum_p \sum_q a_{pq} x^*_p x_q = \lambda \sum_p x_p x^*_p. \tag{4.142}$$

Произведения вида $x_p x^*_p$ — вещественные (и даже неотрицательные) числа. Поэтому те члены суммы в левой части, для которых $p=q$, будут вещественными. Те же члены, для которых $p \neq q$, мы будем рассматривать попарно, объединяя, например, члены с p=1, q = 2 и с p = 2, q =1. Получим (пользуясь затем (4.141)):

$$a_{12} x^*_1 x_2 + a_{21} x^*_2 x_1 = a_{12}(x^*_1 x_2 + x^*_2 x_1).$$

Выражение в скобках есть сумма двух комплексно сопряженных чисел, и следовательно, число вещественное. Тем самым левая часть (4.142) есть число вещественное, равно как и коэффициент при λ в правой части (который, кроме того, не равен нулю, так как x_p не обращаются в нуль одновременно). Отсюда и λ всегда оказывается числом вещественным, а следовательно, ему отвечает определяемое из (4.139) собственное направление нашего симметрического аффинора A , для которого λ, таким образом, является собственным значением.

Теперь мы можем показать существование трех взаимно ортогональных собственных направлений. Возьмем какой-нибудь корень λ_1 уравнения (4.140) и отвечающее ему собственное направление, представленное, например, единичным вектором $\mathbf{e}'_1$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_1' = \lambda_1 \mathbf{e}_1'. \tag{4.143}$$

Рассмотрим плоскость E_2, ортогональную к $\mathbf{e}_1'$. Будем утверждать, что векторы этой плоскости под действием аффинора $\mathcal{A}$ переходят в векторы этой же плоскости. В самом деле, пусть $\mathbf{x}$—-вектор плоскости E_2, так что $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}_1'$:

$$\mathbf{e}_1'\mathbf{x} = 0. \tag{4.144}$$

Умножая скалярно обе части равенства (4.143) на $\mathbf{x}$, получим:

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{e}_1' = \lambda_1 \mathbf{e}_1'\mathbf{x} = 0.$$

Пользуясь свойством (4.133), можем переписать это в виде

$$\mathbf{e}_1' \mathcal{A}\, \mathbf{x} = 0. \tag{4.145}$$

Другими словами, $\mathcal{A}\,\mathbf{x}$ ортогонален к $\mathbf{e}_1'$ и, следовательно, тоже принадлежит плоскости E_2 (точнее, может быть в ней отложен).

Мы можем теперь рассматривать наш симметрический аффинор $\mathcal{A}$ на плоскости E_2, поскольку он переводит векторы этой плоскости в векторы этой же плоскости. Вводим на плоскости E_2 прямоугольные декартовы координаты и ищем собственные направления и собственные значения аффинора $\mathcal{A}$ совершенно так же, как и ранее с тем лишь упрощением, что вместо трехмерного пространства у нас будет двумерное, и вместо трех координат x_1, x_2, x_3 будут лишь две x_1, x_2. Матрица координат аффинора $\mathcal{A}$ будет иметь, теперь вид

$$\begin{Vmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' \end{Vmatrix}, \quad a_{12}' \quad a_{21}',$$

а вместо уравнения (4.140) мы получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11}' - \lambda & a_{12}' \\ a_{21}' & a_{22}' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы снова обнаружим наличие собственного направления, которое зададим некоторым единичным вектором $\mathbf{e}_2'$; соответствующее собственное значение обозначим λ_2. Так как $\mathbf{e}_2'$ принадлежит E_2, то $\mathbf{e}_2' \perp \mathbf{e}_1'$.

Наконец, построим единичный вектор $\mathbf{e}_3'$, ортогональный и к $\mathbf{e}_1'$ и к $\mathbf{e}_2'$. Так как из (4.144) следует (4.145), то $\mathcal{A}\,\mathbf{e}_3'$ тоже будет ортогонален к $\mathbf{e}_1'$ и аналогично к $\mathbf{e}_2'$. Другими словами, $\mathcal{A}\,\mathbf{e}_3'$ оказывается коллинеарным $\mathbf{e}_3'$, а следовательно, определяет собственное направление. Соответствующее собственное значение обозначим λ_3.

Итак, у нас построены три взаимно ортогональных собственных направления $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ с *собственными значениями* λ_1, λ_2, λ_3*:*

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}_1' = \lambda_1\mathbf{e}_1', \quad \mathfrak{A}\mathbf{e}_2' = \lambda_2\mathbf{e}_2', \quad \mathfrak{A}\mathbf{e}_3' = \lambda_3\mathbf{e}_3'. \tag{4.146}$$

Возникает вопрос, почему мы не построили сразу всех этих собственных направлений, используя поочередно все три корня уравнения (4.140) (подобно тому как мы построили $\mathbf{e}_1'$ используя корень λ_1). И действительно, это было бы самым простым способом доказательства, но лишь для случая *различных* корней уравнения (4.140). Для случая же, когда два или даже все три корня равны между собой, этот способ не годится. Поэтому мы пошли другим путем, пригодным во всех случаях.

Мы уже давали толкование аффинора как центроаффинного преобразования информационного пространства. В случае симметрического аффинора это толкование принимает простой вид, а именно, так как векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ взаимно ортогональны, то согласно (4.146) симметрический аффинор производит растяжение (сжатие) пространства по трем взаимно ортогональным направлениям в отношениях λ_1, λ_2, λ_3.

Примем $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ за орты новой координатной системы. Тогда каждая точка с координатами (x_1', x_2', x_3') переходит, очевидно, в точку (y_1', y_2', y_3') по формулам:

$$y_1' = \lambda_1 x_1', \quad y_2' = \lambda_2 x_2', \quad y_3' = \lambda_3 x_3'. \tag{4.147}$$

Если среди λ_1, λ_2, λ_3 нет нулей, то получающееся таким образом специального вида центроаффинное преобразование пространства называется *чистой деформацией.* При отрицательном знаке, например у λ_1, в растяжение (сжатие) по оси X_1' нужно включить и ее «перепрокидывание» в обратную сторону (т. е. зеркальное отражение пространства относительно плоскости $X_2'X_3'$).

В случае, когда, например, $\lambda_1 = 0$, преобразование (4.147) вырождается: все точки пространства переходят в точки плоскости $X_2'X_3'$.

Строго формально соотношения (4.147) можно получить так. Сравнивая (4.146) с (4.18), мы видим, что в новой координатной системе координаты нашего аффинора имеют вид

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}' & a_{21}' & a_{31}' \\ a_{12}' & a_{22}' & a_{32}' \\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{matrix} \right\|. \tag{4.148}$$

Отсюда координатная запись аффинора (4.24) принимает вид

$$y_p' = \sum_q a_{pq}' x_q' = \lambda_p x_p',$$

т. е. мы снова получим (4.147).

Если λ_1, λ_2, λ_3 все различны, то аффинор не имеет собственных направлений кроме трех найденных. Действительно, из формул (4.147) легко следует, что всякий вектор, не направленный по одной из осей, под действием аффинора уклоняется в сторону от своего первоначального направления.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то всякий вектор *в плоскости* $X'_1X'_2$ (т. е. при $x'_3 = 0$) под действием аффинора, как видно из (4.147), умножается на λ ($= \lambda_1 = \lambda_2$):

$$y'_1 = \lambda x'_1, \quad y'_2 = \lambda x'_2, \quad y'_3 = 0. \tag{4.149}$$

Поэтому двойному собственному значению λ ($= \lambda_1 = \lambda_2$) будет отвечать целая собственная плоскость $X'_1X'_2$, любое направление которой будет собственным. Направления, не принадлежащие ни этой плоскости, ни оси X'_3 очевидно, собственными быть не могут.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то (4.147) принимают вид

$$y_1 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda x_2, \quad y_3 = \lambda x_3. \tag{4.150}$$

т. е. для *любого* вектора **x**

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

и аффинор A вообще сводится к умножению на данное число λ. Любое направление является собственным.

Мы разобрали все возможные случаи расположения собственных направлений. Нам нужно показать, наконец, что корни уравнения (4.140) (с учетом их кратности) совпадают с нашими собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3.

Прежде всего в осях X'_1, X'_2, X'_3 уравнение (4.140) принимает вид (согласно (4.148)):

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, действительно, видно, что в этом случае его корни совпадают с собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3, а так как коэффициенты уравнения (4.140) суть инварианты преобразования координатной системы (см. (4.123)), то корни этого уравнения суть тоже инварианты и, следовательно, вычисленные в любых координатных осях дают наши собственные значения λ_1, λ_2, λ_3.

Пример. *Тензор моментов инерции.* Дано твердое тело, вращающееся около закрепленной точки *O*. Эту точку мы примем за начало координат. Будем для простоты записи считать, что тело состоит из конечного числа *n* материальных точек, жестко скрепленных между собой. Массы этих точек обозначим $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, ... ,$m^{(n)}$, а координаты их (в данный момент) через $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, 3$).
Составим матрицу

$$a_{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} + \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)^2}. \tag{4.151}$$

Нетрудно убедиться, что эта матрица, построенная в любой координатной системе, дает координаты одного и того же симметрического тензора. В самом деле, в первом слагаемом при умножении тензора $x_i^{(\alpha)}$ на $x_j^{(\alpha)}$ (т. е. на себя) получается симметрический двухвалентный тензор; дальнейшее умножение на инвариант $m^{(\alpha)}$ и сложение полученных результатов дают тензор той же валентности. Второе слагаемое представляет собой единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант; действительно, как $m^{(\alpha)}$, так и

$$\mathbf{x}^{(\alpha)^2} = x_1^{(\alpha)^2} + x_2^{(\alpha)^2} + x_3^{(\alpha)^2}, \tag{4.152}$$

т. е. квадрат расстояния данной точки от начала *О,* суть инварианты преобразования координатной системы.

Полученный симметрический тензор a_{ij} называется *тензором моментов инерции* данного твердого тела. Информационный смысл этого тензора следующий. Пусть через точку *О* проведена некоторая ось с единичным направляющим вектором 1 (l_1, l_2, l_3). Вычислим инвариант

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j,$$

полученный в результате полного свертывания тензора a_{ij} с дважды взятым тензором l_1:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \sum_i x_i^{(\alpha)} l_i \sum_j x_j^{(\alpha)} l_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)^2}.$$

Так как

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases},$$

то

$$\sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1;$$

кроме того.

$$\sum_i x_i^{(\alpha)} l_i = \mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{1},$$

и мы получаем:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \{ -(\mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{1})^2 + \mathbf{x}^{(\alpha)^2} \}. \tag{4.153}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, дает квадрат расстояния точки с массой $m^{(\alpha)}$ до выбранной нами оси, и мы получаем момент инерции относительно этой оси.

Момент инерции данного твердого тела относительно произвольной оси вращения, проходящей через точку О, получается путем свертывания тензора момента инерции с дважды взятым тензором l_i (направляющие косинусы оси). Собственные направления аффинора A с координатами a_{ij} параллельны так называемым главным осям инерции. В них тензор моментов инерции принимает вид (4.148).

4.15. Разложение аффинора на симметрическую и кососимметрическую части

Рассмотрим произвольный аффинор

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{4.154}$$

Соответствующая координатная запись имеет вид (4.24):

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \tag{4.155}$$

Здесь a_{pq} — координаты аффинора, образующие двухвалентный тензор. В правой части (4.155) происходит тензорная операция умножения этого тензора на тензор x_q с последующим свертыванием по двум последним индексам. В результате получается снова тензор, именно, y_p.

Мы хотим теперь детальнее представить себе информационную структуру аффинора A, разложив его на симметрическую и кососимметрическую части. Для этой цели произведем альтернацию над тензором a_{ij}, т. е. составим новый тензор c_{ij} согласно (4.112):

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \tag{4.156}$$

С другой стороны, составим новый тензор b_{ij}, беря в формуле (4.156) полусумму вместо полуразности:

$$b_{ij} = a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}). \tag{4.157}$$

Здесь $a_{(ij)}$ есть сокращенное обозначение для выражения в правой части. Операция составления тензора

$$a_{(ij)} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$$

называется *симметрированием* тензора a_{ij} по его индексам i, j (аналогично тому как операция составления тензора

$$a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

называется *альтернацией* тензора a_{ij} по его индексам i, j). В обозначениях различие состоит в том, что симметрируемые индексы заключаются в круглые скобки, в то время как альтернируемые — в прямые скобки.

То, что операция (4.157) приводит действительно к тензору, видно из того, что она сводится (не считая деления на 2) к операции сложения двух тензоров, причем второй из них образован из первого также тензорной операцией — подстановкой индексов. Очевидно, тензор b_{ij} будет симметрическим, а c_{ij} —кососимметрическим:

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad c_{ij} = -c_{ji}.$$

Складывая тензоры (4.156) и (4.157) почленно, мы видим, что первоначальный тензор a_{ij} можно представить в виде

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}. \tag{4.158}$$

Итак, любой двухвалентный тензор a_{ij} *можно разложить на сумму симметрического тензора* b_{ij} *и кососимметрического тензора* c_{ij}.

Такого рода разложение будет единственным. В самом деле, симметрируя какое-либо разложение вида (4.158) почленно, мы получаем, что b_{ij} обязательно выражается формулой (4.157), а альтернируя его, видим, что c_{ij} выражается формулой (4.156).

Обозначим теперь аффиноры, координатами которых служат b_{ij} и c_{ij}, соответственно через $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$. Тогда (4.158) можно переписать в виде

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}\mathbf{x} = \mathfrak{B}\mathbf{x} + \mathfrak{C}\mathbf{x}. \tag{4.159}$$

Итак, любой аффинор A разлагается на сумму симметрического аффинора $\mathfrak{B}$, выражающего чистую деформацию информационного пространства (п.4.14), и кососимметрического аффинора $\mathfrak{C}$ (4.11), сводящегося к векторному умножению вектора аргумента **x** на некоторый постоянный вектор **u**.

Разложение (4.159) *играет особенно важную роль в одном частном случае, а именно, когда рассматривается аффинор, бесконечно мало отличающийся от единичного.*

Будем рассматривать аффинор $E + \varepsilon\mathfrak{A}$, где E—единичный аффинор (п.4.4), A — произвольный аффинор, а ε — бесконечно малый множитель. Разумеется, аффинор $E + \varepsilon\mathfrak{A}$ будет переменным и стремится к единичному аффинору E как к своему пределу при $\varepsilon \to 0$.

Переход к пределу для аффинора можно определить, чтобы не вдаваться в излишние подробности, хотя бы как переход к пределу для каждой из его координат.

Важное значение аффинора вида $E + \varepsilon\mathfrak{A}$ выяснится несколько позже.

Разложим аффинор A на симметрический и кососимметрический аффиноры согласно (4.159). Тогда

$$E+\varepsilon\mathfrak{A}=E+\varepsilon\mathfrak{B}+\varepsilon\mathfrak{C}, \tag{4.160}$$

и соответствующее центроаффинное преобразование запишется в виде

$$\mathbf{y}=(E+\varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x}, \tag{4.161}$$

где **x**—произвольный век гор.

Ввиду того что рассматриваемый аффинор бесконечно близок к единичному, формула (4.161) определяет *бесконечно малое* центроаффинное преобразование информационного пространства (если понимать под **x**, как мы это ранее и делали, радиус-вектор произвольной точки информационного пространства).

Рассмотрим сначала частный случай, когда в (4.160) отсутствует $\mathfrak{C}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{B}$.

Вместе с E и $\mathfrak{B}$ этот аффинор будет симметрическим и, следовательно, дает чистую деформацию информационного пространства, т. е. его растяжение (сжатие) по трем взаимно ортогональным направлениям.

Координаты аффинора E и $\mathfrak{B}$, очевидно, равны $\delta_{ij}+\varepsilon b_{ij}$, т. е. в подробной матричной записи имеют вид

$$\begin{Vmatrix} 1+\varepsilon b_{11} & \varepsilon b_{12} & \varepsilon b_{12} \\ \varepsilon b_{21} & 1+\varepsilon b_{22} & \varepsilon b_{23} \\ \varepsilon b_{31} & \varepsilon b_{32} & 1+\varepsilon b_{33} \end{Vmatrix}. \tag{4.162}$$

Чтобы найти собственные направления и собственные значения для аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, достаточно найти их для аффинора $\mathfrak{B}$. В самом деле, пусть λ_1, λ_2, λ_3 —собственные значения $\mathfrak{B}$ и пусть **x** — вектор, идущий по одному из собственных направлений, например, первому. Тогда

$$(E+\varepsilon\mathfrak{B})\mathbf{x}=E\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\lambda_1\mathbf{x}=(1+\varepsilon\lambda_1)\,\mathbf{x}. \tag{4.163}$$

Следовательно, направление **x** будет собственным и для $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ и притом с собственным значением $1+\varepsilon\lambda_1$.

Итак, собственные направления аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ совпадают с собственными направлениями аффинора $\mathfrak{B}$, и соответствующие собственные значения равны

$$1+\varepsilon\lambda_1,\quad 1+\varepsilon\lambda_2,\quad 1+\varepsilon\lambda_3.$$

Таковы будут коэффициенты бесконечно малого растяжения (сжатия), производимого аффинором $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ по трем взаимно ортогональным собственным направлениям.

Теперь рассмотрим противоположный частный случай, когда в (4.160) отсутствует $\mathfrak{B}$, так что речь идет об аффиноре $E+\varepsilon\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ кососимметричен.
Согласно (4.101) для любого **x**

$$\mathfrak{C}\mathbf{x}=[\mathbf{ux}],$$

где **u** — некоторый постоянный вектор. Следовательно,

$$(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}]. \tag{4.164}$$

Легко заметить, что соответствующее центроаффинное преобразование

$$\mathbf{x}\to(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}] \tag{4.165}$$

означает *поворот около оси, проходящей через O и направленной по* **u**, *на бесконечно малый угол* ε | **u** |.

В самом деле, рассмотрим вращение информационного пространства как твердого тела около точки *O* с постоянным вектором угловой скорости **u**. Это значит, что вращение совершается вокруг оси, направленной по **u**, причем за единицу времени происходит поворот на угол |**u**| (против часовой стрелки, если смотреть от конца к началу вектора **u**).

Как известно из кинематики твердого тела, линейная скорость движения каждой точки *M* выражается при этом вектором

$$\mathbf{v}=[\mathbf{ux}],$$

где $\mathbf{x}=\vec{OM}$ —радиус-вектор точки *M*.

За бесконечно малый промежуток времени ε точка *M* сместится на вектор

$$\varepsilon\mathbf{v}=\varepsilon\,[\mathbf{ux}],$$

если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка. Следовательно, радиус-вектор смещенной точки *M'* будет:

$$\overrightarrow{OM'}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathbf{v}=\mathbf{x}+\varepsilon\,[\mathbf{ux}]=(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}.$$

Итак, переход

$$\vec{OM}\to\vec{OM'},$$

или , что то же,

$$\mathbf{x}\to(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,\mathbf{x}, \tag{4.166}$$

означает поворот информационного пространства за бесконечно малое время ε *при векторе угловой скорости* и (координаты которого определяются согласно (4.98) или (4.102)). Угол этого бесконечно малого поворота равен ε | **u** |. Этим утверждение доказано.

Рассмотрим, наконец, общий случай аффинора (4.160). Подействуем на произвольный вектор **x** сначала аффинором $E+\varepsilon\mathfrak{B}$

$$(E+\varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x},$$

а на полученный вектор подействуем аффинором $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. Получим:

$$(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,(E+\varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x}=\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{C}\mathbf{x}+\varepsilon\mathfrak{B}\mathbf{x}+\varepsilon^2\mathfrak{C}\mathfrak{B}\mathbf{x}.$$

Последний член мы отбросим, пренебрегая бесконечно малыми 2-го порядка, и, пользуясь (4.161), получим окончательно:

$$(E+\varepsilon\mathfrak{C})\,(E+\varepsilon\mathfrak{B})\,\mathbf{x}\approx(E+\varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}. \tag{4.167}$$

Этот результат показывает, что если пренебречь бесконечно малыми высшего порядка, аффинор $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ *представляет собой результат наложения аффиноров* $E+\varepsilon\mathfrak{B}$ *и* $E+\varepsilon\mathfrak{C}$, *т.е. бесконечно малой чистой деформации и бесконечно малого поворота.* Изменение формы и размеров тел происходит при этом за счет чистой деформации; при повороте, они не меняются.

Заметим, что и произвольный аффинор (а не только вида $E+\varepsilon\mathfrak{A}$) можно свести к последовательному выполнению чистой деформации и поворота, и притом совершенно точным образом. Однако доказательство в этом случае будет значительно сложнее, а чистая деформация и поворот уже не отвечают симметрической и кососимметрической частям рассматриваемого аффинора.

Для дальнейшего нам будет необходим коэффициент объемного расширения (4.122) в случае бесконечно малого центроаффинного преобразования

$$\mathbf{y}=(E+\varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{x}.$$

Согласно (4.122) в нашем случае мы получим:

$$\frac{\tilde V}{V}=\operatorname{Det}|\delta_{ij}+\varepsilon a_{ij}|=$$
$$=\begin{vmatrix}1+\varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{13}\\ \varepsilon a_{21} & 1+\varepsilon a_{22} & \varepsilon a_{23}\\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{32} & 1+\varepsilon a_{33}\end{vmatrix}\approx 1+\varepsilon\,(a_{11}+a_{22}+a_{33}). \tag{4.168}$$

Здесь при раскрытии определителя мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка.

Мы видим, что коэффициент объемного расширения отличается от 1 на след аффинора A, умноженный на ε.

4.16. Тензорные поля

Начиная с этого пункта, мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа. Смысл перехода от тензорной алгебры к тензорному анализу заключается в том, что вместо отдельных тензоров мы будем рассматривать тензорные поля, в связи с чем появляется дифференцирование тензоров.

Как правило, **информационные задачи приводят нас к рассмотрению тензорных полей**.

Мы говорим, что в n-мерном аффинном информационном пространстве задано поле тензора $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$, *если для каждой точки М задан определенный тензор указанного строения*

$$a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l} = a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}(M). \tag{4.169}$$

Этот тензор мы будем называть *тензором поля.* Он задается, следовательно, как функция точки *М,* причем его валентность остается постоянной, например, 3-й:

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(M). \tag{4.170}$$

Эту формулу нужно понимать в том смысле, что координаты тензора зависят от выбора точки *М* (и от выбора координатной системы, преобразуясь по обычному тензорному закону).

Если мы рассматриваем тензорное поле в определенной координатной системе, то точка *М* характеризуется своими координатами x_1, x_2, x_3, и формула (4.170) принимает вид

$$a_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3}(x_1, x_2, x_3), \tag{4.171}$$

т. е. координаты тензора заданы как функции координат точки М. Мы будем предполагать, что функции (4.171) *непрерывно дифференцируемы столько раз, сколько нам будем нужно.*

Тензорное поле может быть задано и не во всем информационном пространстве, а лишь в некоторой его *n*- мерной информационной области *D*. Это значит, что точка *М* в (4.169) пробегает не все информационное пространство, а только его область *D* (или даже *n*-мерную поверхность), а для остальных точек тензор $a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$ не определен. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, подразумевается, что тензорное поле задано в *n*-мерной информационной области *D* (в частности, во всем информационном пространстве). Кстати, здесь уместно дать общее определение *n-мерной информационной области D: это такое множество точек, что вместе с каждой точкой* x^i_0 *к нему принадлежат все точки* x^i, *для которых* $| x^i — x^i_0|<\varepsilon$, *если только* $\varepsilon >0$ *взято достаточно малым.* Для различных точек x_0 значения ε, вообще говоря, различны.

Нетрудно было бы показать инвариантность этого определения относительно преобразования аффинной координатной системы x^i.

Еели информационное пространство отнесено к определенной координатной системе, то (4.169) можно переписать в виде функциональной зависимости

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}(x^1, \dots, x^n), \quad (4.172)$$

где $x^1, \dots, x^n$ — координаты точки *М*. Эта функциональная зависимость предполагается достаточное (для будущих выкладок) число раз непрерывно дифференцируемой.

Инфорационное значение понятия тензорного поля заключается в том, что соответствующий геометрический объект обычно меняется от точки к точке (как, например, кривизна кривой или поверхности), а физический, кроме того, зависит и от момента времени. Так, например, напряженности электрического и магнитного полей зависят от точки, где они наблюдаются, и от момента времени. В связи с этим эти напряженности задаются в теории информации тензорным полем в четырехмерном пространстве (выражающем пространственно-временную протяженность материи).

Рассмотрим простейшие частные случаи тензорных полей.

Тензорное *поле нулевой валентности* называется иначе *скалярным полем.* Так как тензор нулевой валентности есть инвариант, то скалярное поле означает задание в каждой точке *М* некоторой области *D* определенного числа *а:*

$$a = a(M), \quad (4.173)$$

причем *a(M)* зависит только от выбора точки *М*, но не зависит от выбора координатной системы. Если зависимость (4.173) записывается в определенной координатной системе, то она принимает вид

$$a = a(x_1, x_2, x_3). \quad (4.174)$$

Примеры скалярных полей: температура неравномерно нагретого тела, имеющая свое значение в каждой его точке; потенциал электростатического поля как функция точки; плотность неоднородного тела, в каждой его точке имеющая свое значение; давление в газовой среде, меняющееся, вообще говоря, от точки к точке, и т. п.

Рассмотрим теперь одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i(M). \quad (4.175)$$

Мы знаем, что координаты одновалентного тензора a_i всегда можно истолковать как координаты некоторого инвариантного вектора **а**, причем

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i.$$

Поэтому задать поле одновалентного тензора (4.175) все равно, что указать в каждой точке *М* определенный вектор

$$\mathbf{a} = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i = \mathbf{a}(M), \tag{4.176}$$

т. е. все равно, что задать векторное поле.

Примеры векторных полей: вектор электрического или магнитного поля; вектор скорости движения жидкой или газовой среды, имеющий в каждой ее точке свое значение; вектор плотности электрического тока в массивном проводнике и т. п.

О двухвалентных и т. д. тензорных полях мы будем говорить позже.

Настоящий смысл ипользования в теории информации тензорного исчисления заключается, конечно, в изучении тензорных полей, и для приложений нужны, как правило, именно тензорные поля, а не отдельные тензоры.

Над тензорными полями мы производим все операции тензорной алгебры, установленные нами для отдельных тензоров. Это не требует особого обоснования, так как мы подразумеваем, что эти операции производятся над тензорами наших полей в каждой точке M по отдельности (а в этом случае каждое тензорное поле представлено отдельным тензором).

Поэтому на тензорную алгебру, изложенную раньше, где рассматривались операции над отдельными тензорами, следует смотреть как на необходимый подготовительный материал, а именно, все операции, установленные там для отдельных тензоров, автоматически переносятся и на тензорные поля, если подразумевать, что эти операции производятся над тензорами поля *в каждой точке M области D*.

Так, например, сложение тензоров двух полей одинаковой валентности

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M), \quad b_{ijk} = b_{ijk}(M)$$

означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijk}(M) = a_{ijk}(M) + b_{ijk}(M) \tag{4.177}$$

путем сложения тензоров a_{ijk} и b_{ijk} в каждой точке M области D.

Аналогично и перемножение тензоров двух нолей, например, $a_{ijk}(M)$ и $b_{lm}(M)$, означает построение нового тензорного поля

$$c_{ijklm}(M) = a_{ijk}(M)b_{lm}(M) \tag{4.178}$$

путем перемножения тензоров a_{ijk} и b_{lm} в каждой точке M области D.

Аналогично операции свертывании и подстановки индексов производятся над тензором поля в каждой точке M области D.

Но помимо алгебраических операций над тензорными полями можно производить еще операцию дифференцировании, которая и определяет лицо тензорного анализа.

4.17. Дифференцирование тензора поля

Для тензорных полей возможна одна инвариантная операция— *абсолютное дифференцирование,* вместе с которой мы переходим из области тензорной алгебры в область тензорного анализа.

Рассмотрим какое-нибудь тензорное иоле, для примера, трехвалентное:

$$a_{ijk} = a_{ijk}(M) = a_{ijk}(x_1, x_1, x_3). \qquad (4.179)$$

Нас интересует вопрос (действительно очень важный для теории информации): как меняется наш тензор от точки к точке в *бесконечно малой окрестности данной точки M* (x_1, x_1, x_3). Для этой цели мы смещаемся из точки M в произвольную бесконечно близкую точку M'. Говоря более точно, это бесконечно малое смещение состоит в том, что мы движемся по некоторой параметрически заданной кривой

$$x_1 = x_1(t), \qquad x_2 = x_2(t), \qquad x_3 = x_3(t), \qquad (4.180)$$

причем при данном значении t мы находимся в M, а при бесконечно близком значении $t+\Delta t$ попадаем в бесконечно близкую точку M'. Все дифференциалы, которые мы будем выписывать, предполагаются взятыми по отношению к аргументу t.

Функции $x_i(t)$ мы считаем непрерывно дифференцируемыми.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M в силу (4.180) выражается формулой

$$\overrightarrow{OM} = \sum_i x_i(t)\, \mathbf{e}_i, \qquad (4.181)$$

а его дифференциал, который дает главную линейную часть вектора смещения $\overrightarrow{MM'}$ и который мы будем обозначать $d\mathbf{M}$, имеет вид

$$\overrightarrow{d\mathbf{M}} = \sum_i dx_i(t)\, \mathbf{e}_i \approx \overrightarrow{MM'}. \qquad (4.182)$$

В силу (4.179) и (4.180) координаты тензора a_{ijk} меняются как сложные функции от t; их дифференциалы при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ вычисляются по формулам

$$da_{ijk} = \sum_l \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}\, dx_l. \qquad (4.183)$$

Тензор с координатами da_{ijk} *мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора поля* a_{ijk}.

Дадим более общее определение абсолютного дифференциала

Пусть в области *D,* где определено тензорное поле $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$, проведена кривая, т. е. дано геометрическое место точек *M=M(t),* или в координатной записи

$$x^i = x^i(t), \tag{4.184}$$

где параметр *t* пробегает определенный интервал изменения. Функции $x^i(t)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми, по крайней мере, один раз. Вдоль данной кривой координаты тензора $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ будут являться, как видно из (4.172) и (4.184), сложными функциями параметра *t.* Вычисляем дифференциалы этих функций

$$da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i} dx^i. \tag{4.185}$$

В правой части подразумевается суммиронапио но *i,* так что написанное неравенство есть просто формула полного дифференциала.

Будем утверждать, что $da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *образуют тензор того же строения, что и* $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$; *этот тензор мы будем называть абсолютным дифференциалом тензора* $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *(при данном бесконечно малом смещении по данной кривой).*

Проверка данного утверждения производится просто. Выпишем закон преобразования координат тензора данного поля при переходе в новую координатную систему

$$a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k}(M) = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}(M). \tag{4.186}$$

Конечно, $A^{j'_1}_{j_1}$ и т. д. — величины постоянные, не зависящие от точки *M,* бегущей по кривой, а следовательно, и от параметра *t.* Дифференцируя по *t,* получим:

$$da^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots da^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}. \tag{4.187}$$

Этим наше утверждение доказано.

Абсолютный дифференциал da_{ijk} зависит, очевидно, и от точки *M* и от данного бесконечно малого смещения из *M* в *M'.* То, что это действительно тензор, легко проверить. В самом деле, при переходе к новой координатной системе

$$\mathbf{e}'_p = \sum_i A_{pi}\mathbf{e}_i \tag{4.188}$$

координаты тензора a_{ijk} испытывают преобразование

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} a_{ijk};$$

(4.189)

дифференцируя почленно, получим:

$$da'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} da_{ijk},$$

(4.190)

так как A_{pi} от выбора точки M не зависят и при переходе от M к M' ведут себя как постоянные.

Таким образом, для da_{ijk} также имеет место тензорный закон преобразования.

Как видно из формулы (4.183), для характеристики изменения тензора a_{ijk} от точки M к любой бесконечно близкой точке M' нужно знать частные производные

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$$

от координат тензора a_{ijk} по координатам точки M (x_1, x_2, x_3). Мы будем обозначать для краткости

$$\frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l} = \nabla_l a_{ijk}.$$

(4.191)

Выясним, по какому закону будет происходить преобразование этих величин при переходе к новой координатной системе (4.188).

Как мы знаем, при этом переходе старые координаты точки M выражаются через новые согласно (4.35):

$$x_l = \sum_s A_{sl} x'_s.$$

(4.192)

Вычислим теперь величины (4.191) в новой координатной системе:

$$\nabla_s a'_{pqr} = \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x'_s} = \sum_l \frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_s}.$$

(4.193)

Последнее выражение получено по правилу дифференцирования функции от функции (можно считать a'_{pqr} функциями от x_1, x_2, x_3, причем эти переменные сами являются функциями от x'_1, x'_2, x'_3 в силу (4.192)). Так как согласно (4.192)

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_s} = A_{sl}$$

и согласно (4.189)

$$\frac{\partial a'_{pqr}}{\partial x_l} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qj} A_{rk} \frac{\partial a_{ijk}}{\partial x_l}$$

(A_{pi} — величины постоянные), то окончательно (4.193) принимает вид

$$\nabla_s a'_{pqr} = \sum_l \sum_i \sum_j \sum_k A_{sl} A_{pi} A_{qj} A_{rk} \nabla_l a_{ijk}. \quad (4.194)$$

Мы видим, что $\Delta_l a_{ijk}$ преобразуются как координаты четырехвалентного тензора (при трехвалентном исходном тензоре a_{ijk}).

Наши рассуждения дословно повторяются и при любой валентности исходного тензора.

Так, например, рассмотрим теперь в каждой точке M совокупность частных производных от функций (4.172) по всем их аргументам, причем введем для них обозначения

$$\nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k} = \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^i}. \quad (4.195)$$

Будем утверждать, что $\nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$ *образуют тензор с тем же числом верхних индексов и на единицу большим числом нижних индексов, чем у исходного тензора, причем увеличение происходит за счет индекса дифференцирования i.*

Этот тензор мы будем называть *абсолютной производной* исходного тензора в $a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}$. Так как абсолютная производная определена в каждой точке *М,* то она в свою очередь образует тензорное ноле.

Проверку данного утверждения проводим следующим образом. Положение точки M можно определять как старыми координатами x^i, так и новыми координатами $x^{i'}$, а потому члены равенства (4.186) можно рассматривать и как функции от $x^{'}$, и как функции от $x^{i'}$. Дифференцируя (4.186) почленно по координате $x^{i'}$, получим:

$$\frac{\partial a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i'}} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots \frac{\partial a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^{i}} \cdot \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}.$$

В последнем выражении мы использовали правило дифференцирования сложной функции (по i происходит суммирование). Так как по общим формулам

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'},$$

то

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = A^i_{i'}$$

и предыдущий результат можно переписать (пользуясь обозначением (4.195)):

$$\nabla_{i'} a^{j'_1 \dots j'_l}_{i'_1 \dots i'_k} = A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{i_1}_{i'_1} \dots A^i_{i'} \nabla_i a^{j_1 \dots j_l}_{i_1 \dots i_k}. \quad (4.196)$$

Мы видим, что величины $\nabla_l a_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_l}$ действительно преобразуются по тензорному закону.

Таким образом, получаем следующий результат. *Совокупность всех частных производных 1-го порядка (например, $\Delta_l a_{ijk}$) от координат тензора поля по координатам x_l той точки, где этот тензор в данный момент рассматривается, образует снова тензор на единицу высшей валентности, а именно, в качестве добавочного индекса появляется индекс той координаты, по которой берется производная.*

Заметим, что абсолютный дифференциал можно брать и в том случае, когда поле тензора задано хотя бы только вдоль той кривой, вдоль которой этот дифференциал вычисляется. Но для вычисления абсолютной производной нужно, чтобы поле тензора было задано в *n*-мерной области, по крайней мере, в некоторой окрестности данной точки.

Новый тензор $\Delta_l a_{ijk}$, можно построить в любой точке *M* области *D*, так что по существу мы из тензорного поля a_{ijk} получили новое тензорное поле $\Delta_l a_{ijk}$.

Тензор поля $\Delta_l a_{ijk}$ называется абсолютной производной тензора поля a_{ijk}.

Формулу (4.183) теперь можно переписать в виде

$$da_{ijk} = \sum_l dx_l \nabla_l a_{ijk} \tag{4.197}$$

и понимать в том смысле, что тензор da_{ijk} есть результат свертывания двух тензоров dx_l и $\Delta_l a_{ijk}$.

В качестве простейшего случая рассмотрим дифференцирование скалярного поля

$$a = a\ (M) = a\ (x_1,\ x_2,\ x_3). \tag{4.198}$$

Абсолютная производная есть одновалентный тензор

$$\nabla_i a = \frac{\partial a}{\partial x_i}. \tag{4.199}$$

Как и всякий одновалентный тензор, $\Delta_i a$ может быть истолкован как вектор с теми же координатами. Этот вектор называется *градиентом скалярного поля*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a = \sum_i \nabla_i a \cdot \mathbf{e}_i. \tag{4.200}$$

Формула (4.197) принимает вид

$$da = \sum_l dx_l \cdot \nabla_l a = \overrightarrow{d\mathbf{M}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a. \tag{4.201}$$

Последняя запись в виде скалярного произведения легко получается при помощи формул (4.182) и (4.200).

Итак, дифференциал скаляра а (М) при бесконечно малом смещении $\overrightarrow{MM'}$ *равен скалярному произведению дифференциала радиуса-вектора* $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$ *на градиент скалярного поля.*

Градиент скалярного поля определяется, разумеется, в каждой точке области *D*, в которой скалярное поле задано, и *образует векторное поле.*

Приведем примеры.

1°. Рассмотрим силовое поле как источник информации. Силовое поле **F** *(М)* (где **F** *(М)* — напряженность поля, т. е. сила, действующая в точке *М* на единицу заряда (массы)) называется *потенциальным,* если **F** *(М)* в каждой точке есть градиент некоторого скалярного поля *а (М):*

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, a. \tag{4.202}$$

Функция *а (М)* называется *потенциальной функцией* данного силового поля и лишь знаком отличается от его потенциала.

Физический смысл формулы (4.201) состоит в том, что *приращение потенциальной функции при бесконечно малом смещении* $\overrightarrow{MM'}$ *равно работе, производимой силой поля при этом же смещении над единицей заряда (массы).* Правда, в формуле (4.201) выписаны не сами названные величины, а их главные линейные части, но если (4.201) почленно проинтегрировать по какому-либо пути, то наше утверждение оправдается, и притом для любого конечного пути (а не только для бесконечно малого).

2°. Рассмотрим скалярное поле как источник информации. Рассматриваем скалярное поле *а (М),* где *а (М)* выражает давление в произвольной точке идеальной жидкости, заполняющей некоторую область *D*. Тогда $\overrightarrow{\text{grad}}\, a$ имеет следующий физический смысл: вектор

$$\mathbf{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, a\, d\omega \tag{4.203}$$

выражает равнодействующую сил давления, приложенных к элементарному объему $d\omega$.

3°. Скалярное поле *а (М)* выражает температуру в различных точках однородного, по неравномерно нагретого тела. Здесь вектор

$$\mathbf{F} = -k\,\overrightarrow{\text{grad}}\, a \tag{4.204}$$

выражает плотность теплового потока, идущего от более теплых к более холодным местам тела; *k*—коэффициент теплопроводности. Роль вектора **F** состоит в том, что тепловой поток в каждой точке идет по его направлению, причем через ортогональный к **F** элемент площади $d\sigma$ за единицу времени проходит количество тепла, равное $|\mathbf{F}|\, d\sigma$.

4.18. Дифференцирование одновалентного тензора

Пусть в некоторой информационной области D нам дано одновалентное тензорное поле

$$a_i = a_i\,(M) = a_i\,(x_1, x_2, x_3), \qquad (4.205)$$

или, что то же самое, векторное поле

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}\,(M) = \sum_i a_i\,(M)\,\mathbf{e}_i. \qquad (4.206)$$

Его дифференцирование, которым мы сейчас займемся, исключительно важно в теории информации. Формулы (4.183), (4.197) для нашего случая примут вид

$$da_i = \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l}\,dx_l = \sum_l \nabla_l a_i dx_l. \qquad (4.207)$$

Абсолютная производная представляет собой в нашем случае поле двухвалентного тензора, координаты которого мы обозначим:

$$a_{il} = \nabla_l a_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \qquad (4.208)$$

Вводя обозначение a_{il} для координат тензора, мы сознательно сделали так, чтобы индекс дифференцирования занимал второе место. Двухвалентному тензору a_{il} всегда отвечает, как мы знаем, аффинор A с теми же координатами a_{il}. Вместе с тензором a_{il} аффинор A определится в каждой точке M, так что мы получаем *аффинорное поле*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,(M). \qquad (4.209)$$

Итак, абсолютной производной вектора поля **a**(M) *можно считать аффинор поля* A (M), *где координаты аффинора определяются через координаты вектора по формуле*

$$a_{il} = \frac{\partial a_i}{\partial x_l}. \qquad (4.210)$$

Этот аффинор мы будем называть *производным аффинором* векторного поля **a**(M).

Перепишем теперь (4.207) в виде

$$da_i = \sum_l a_{il}\,dx_l, \qquad (4.211)$$

где дифференциалы взяты при произвольном смещении из данной точки M в бесконечно близкую точку M'. При этом согласно (4.182) dx_l — координаты вектора

$$\overrightarrow{d\mathbf{M}} \approx \overrightarrow{MM'},$$

а da_i — координаты вектора $\overrightarrow{d\mathbf{a}}$, что легко получить, дифференцируя (4.206) почленно:

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}} = \sum_i da_i \mathbf{e}_i.$$

В таком случае (4.211) можно переписать в виде

$$\overrightarrow{d\mathbf{a}} = \mathfrak{A}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{4.212}$$

В самом деле, (4.211) можно рассматривать согласно (4.24) как координатную запись действия аффинора A на вектор $\overrightarrow{d\mathbf{M}}$, причем получается вектор $d\mathbf{a}$.

Итак, абсолютная производная A *(M), действуя на вектор* $\overrightarrow{d\mathbf{M}} \approx \overrightarrow{MM'}$, *дает вектор* $d\mathbf{a}\,(M) \approx \Delta\mathbf{a}\,(M)$. *Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно сказать, что* A *(M), действуя на вектор бесконечно малого смещения* $\overrightarrow{MM'}$, *дает соответствующее приращение вектора поля* **a***(M):*

$$\mathbf{a}\,(M') - \mathbf{a}\,(M) = \Delta\mathbf{a}\,(M) = \mathfrak{A}\mathbf{z}, \tag{4.213}$$

где

$$\mathbf{z} = \overrightarrow{MM'}.$$

Аффинор A *(M)* можно разложить на симметрическую и кососимметрическую части:

$$\mathfrak{A}\,(M) = \mathfrak{B}\,(M) + \mathfrak{C}\,(M), \tag{4.214}$$

причем координаты a_{ij} разложатся соответственно

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}. \tag{4.215}$$

Здесь

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\,(a_{ij} + a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right), \tag{4.216}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\,(a_{ij} - a_{ji}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.217}$$

Формула (4.212) принимает вид

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + \mathfrak{C}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}}. \tag{4.218}$$

Действие аффинора $\mathfrak{C}$ можно заменить согласно (4.101) векторным умножением (слева) на определенный вектор **u**, координаты которого в правой координатной системе выражаются через координаты аффинора по формулам (4.98). В нашем случае эти формулы принимают вид (после почленного умножения на 2, что будет для нас удобно в дальнейшем):

$$\left.\begin{aligned} 2u_1 &= -2c_{23} = \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \\ 2u_2 &= -2c_{31} = \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \\ 2u_3 &= -2c_{12} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.219)$$

Формулу (4.218) можно теперь переписать следующим образом:

$$d\mathbf{a} = \mathfrak{B}\,\overrightarrow{d\mathbf{M}} + [\mathbf{u}\; d\mathbf{M}]. \qquad (4.220)$$

Так как вектор **u** определяется вместе с аффинором $\mathfrak{C}(M)$ в каждой точке *M* области *D*, то он образует векторное поле

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(M),$$

порожденное, как мы видим, исходным векторным полем **a**(*M*).

Удвоенный вектор **u***(M) называется ротором векторного поля* **a** (*M*) *и обозначается* rot **a**. Итак:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = 2\mathbf{u} = \mathbf{e}_1\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{e}_2\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{e}_3\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.221)$$

Мы пользовались здесь формулами (4.219)

В правильности последней записи rot **a** в виде символического определителя 3-го порядка нетрудно убедиться, развертывая его по элементам первой строки.

Что касается симметрического аффинора $\mathfrak{B}(M)$, то он не может быть охарактеризован столь же просто, как $\mathfrak{C}(M)$. Во многих приложениях играет роль не столько он сам, сколько его след $\sum_i b_{ii}$, совпадающий со следом аффинора $\mathfrak{A}(M)$,), т. е. с $\sum_i a_{ii}$.

Действительно,

$$\sum_i a_{ii} = \sum_i (b_{ii} + c_{ii}) = \sum_i b_{ii}, \text{ так как } c_{ii} = 0.$$

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ есть инвариант, зависящий вместе с самим аффинором от выбора точки *М.*

След аффинора $\mathfrak{A}(M)$ *называется дивергенцией исходного векторного поля* **а** (*М*) *и обозначается* div **а**:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \sum_i a_{ii} = \sum_i b_{ii} = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i}. \tag{4.222}$$

Дивергенция образует, таким образом, скалярное поле, порожденное данным векторным полем **а** (*М*).

4.19. Информационное истолкование кинематики векторного поля и его производного аффинора

Построения предыдущего пункта получают наглядный информационный смысл, если исходному векторному полю

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(M) = \sum_i a_i(M)\,\mathbf{e}_i. \tag{4.223}$$

придать следующее истолкование.

Пусть информационная область D, в которой задано векторное поле, заполнена некоторой подвижной деформирующейся средой, например жидкостью, и пусть вектор **а** (*М*) *выражает ту скорость, с которой движется частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке М.*

Для простоты движение жидкости будем считать *стационарным,* т. е. поле скоростей **а** (*М*) не зависящим от времени.

Спрашивается, какой кинематический смысл получает производный аффинор A нашего векторного поля.

Для этой цели мы проследим, что делается с бесконечно малой «каплей» жидкости в процессе ее движения. Вырежем из жидкости шарик с центром в какой-нибудь точке *М* и с бесконечно малым радиусом ρ. С течением времени жидкость, заключенная в этом шарике, перемешается с общим потоком жидкости, одновременно вращаясь и деформируясь. Этот процесс мы и проследим.

Каждая точка, увлекаемая потоком жидкости,- мы ее будем кратко называть «частицей жидкости» — описывает с течением времени *t* - определенную траекторию

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t). \tag{4.224}$$

При этом проекции вектора скорости на координатные оси равны, как известно, $\frac{dx_i}{dt}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$. С другой стороны, вектор скорости совпадает в каждой точке *М* с вектором поля **а** (*М*), и его проекции равны a_i (*М*), т. е. $a_i(x_1, x_2, x_3)$. В результате

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{4.225}$$

Таким образом, функции (4.224) должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений (4.225).

Частица жидкости, находящаяся в данный момент в точке *M,* спустя бесконечно малый промежуток времени ε сместится на вектор ε**a***(M),* если пренебрегать бесконечно малыми высшего порядка.

В самом деле, скорость движения частицы жидкости в данный момент выражается вектором **a***(M),* и если бы эта скорость оставалась постоянной, то за время ε смещение частицы точно выразилось бы вектором ε**a** *(M).*

Но так как скорость движения частицы зависит от ее положения, то в процессе движения скорость будет, вообще говоря, меняться. Однако за бесконечно малый промежуток времени она успевает измениться, начиная от значения **a***(M),* лишь на бесконечно малую величину. В результате ε**a** *(M)* дает смещение с ошибкой бесконечно малой высшего порядка (грубо говоря, бесконечно малая ошибка в скорости умножается еще на ε).

Будем рассматривать смещения всех частиц жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε, пренебрегая бесконечно малыми высшего порядна относительно ε. Тогда эти смещения можно считать равными ε**a** *(M), где M — начальное положение частицы жидкости.*

Пусть *M'* — какая-нибудь точка в шарике бесконечно малого радиуса ρ с центром в *M.* Подвергнем все точки шарика указанному смещению; в частности, точки *M, M'* переходят в некоторые точки *L, L'* (рис. 4.2).

Рис. 4.2.

При этом, как мы знаем,

$$\overrightarrow{ML} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M), \quad \overrightarrow{M'L'} \approx \varepsilon \mathbf{a}(M'). \tag{4.226}$$

Нас интересует, что произошло в результате смещения с вектором $\overrightarrow{MM'}$, ведущим из центра шарика M в его произвольную точку M'. Очевидно, он перейдет в вектор $\overrightarrow{LL'}$, который можно представить в следующем виде:

$$\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'L'} = \overrightarrow{MM'} + (\overrightarrow{M'L'} - \overrightarrow{ML}) \approx$$
$$\approx \overrightarrow{MM'} + \varepsilon(\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)). \tag{4.227}$$

В дальнейшем мы пренебрегаем бесконечно малыми высшего порядка не только относительно ε, но и относительно ρ. Это нужно оговорить особо, так как ε и ρ — независимые друг от друга бесконечно малые. Тогда можно принять согласно (4.213)

$$\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M) = \Delta\mathbf{a}(M) \approx \mathfrak{A}\mathbf{z},$$

где **z** — краткое обозначение для $\overrightarrow{MM'}$. Теперь (4.227) дает:

$$\overrightarrow{LL'} \approx \mathbf{z} + \varepsilon\mathfrak{A}\mathbf{z} = (E + \varepsilon\mathfrak{A})\,\mathbf{z}. \tag{4.228}$$

Итак, преобразование вектора $\overrightarrow{MM'}$ *в вектор* $\overrightarrow{LL'}$ *происходит* (с *указанной степенью точности) посредством аффинора* $E + \varepsilon\mathfrak{A}$, *где* $\mathfrak{A}$ — *производный аффинор векторного поля скоростей, а* ε — *протекший бесконечно малый промежуток времени.*

Другими словами, бесконечно малые векторы, исходящие из центра M первоначальной «капли» (т. е. нашего шарика радиуса ρ), переходят в векторы, исходящие из центра L смещенной (и деформированной) капли, подвергаясь действию аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{A}$. Но действие такого аффинора, как мы знаем, сводится к чистой деформации, порождаемой аффинором $E + \varepsilon\mathfrak{B}$, и к повороту посредством аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. При этом $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — симметрическая и кососимметрическая части аффинора $\mathfrak{A}$. В нашем случае их координаты выражаются согласно (4.216) и (4.217), так как у нас $\mathfrak{A}$ *(M)* — производный аффинор векторного поля **a** *(M)*.

В результате бесконечно малая шаровая капля жидкости за бесконечно малый промежуток времени ε *подвергается (помимо* *параллельного сдвига вместе со своим центром М на вектор* $\overrightarrow{ML}$ ≈ε**a** (*М*)), *во-первых, бесконечно малой чистой деформации* $E+\varepsilon\mathfrak{B}$, *т. е. растяжению (сжатию) по трем взаимно ортогональным направлениям, превращаясь из шара в эллипсоид, и, во-вторых, вращению* $E+\varepsilon\mathfrak{C}$. В силу (4.166) это вращение происходит с вектором угловой скорости **u**, который согласно (4.221) равен в нашем случае $\frac{1}{2}$ rot **a**.

Вращение любой бесконечно малой капли жидкости в процессе ее движения происходит с (переменным) вектором угловой скорости, равным в каждой точке $\frac{1}{2}$ rot **a**, *где* **a** — *векторное поле скоростей.*

Аффинор $\mathfrak{B}$ *называется аффинором скоростей деформации, а соответствующий тензор*

$$b_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}+\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right) \qquad (4.229)$$

— *тензором скоростей деформации.*

Как отмечалось в п. 4.15, коэффициент объемного расширения при действии аффинора $E+\varepsilon\mathfrak{A}$ равен (согласно (4.168)):

$$\frac{\tilde{V}}{V}=1+\varepsilon\sum_i a_{ii}.$$

Но в нашем случае в силу формулы (4.222)

$$\sum_i a_{ii}=\operatorname{div}\mathbf{a},$$

и следовательно,

$$\frac{\tilde{V}}{V}=1+\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Отсюда видно, что в процессе движения жидкости относительное объемное расширение θ каждой ее бесконечно малой капли за бесконечно малый промежуток времени ε равно ε div **a** (т. е. происходит со скоростью div **a**):

$$\theta\approx\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{a}=\varepsilon\sum_i b_{ii}\quad\left(\text{где }\theta=\frac{\tilde{V}-V}{V}\right). \qquad (4.230)$$

В этом и заключается информационно-кинематический смысл дивергенции векторного поля.

Отметим важные частные случаи.

Векторное поле **a** *(М)* называется *соленоидальным,* если

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(M) = 0. \qquad (4.231)$$

В нашем кинематическом истолковании это означает, что объемное расширение происходит с нулевой скоростью, т. е. любая пространственная область, заполненная частицами жидкости в начальный момент, с течением времени смещается и деформируется, не меняя своего объема (строго говоря, это показано у нас лишь для бесконечно малых капель жидкости, и переход к конечному объему требовал бы еще некоторых рассуждений). Таким образом, условие (4.231) при кинематическом истолковании векторного поля **a***(M)* означает *несжимаемость жидкости.*

Векторное поле **a** *(M)* называется *потенциальным,* если **a** *(M)* представляет собой градиент некоторого скалярного поля

$$\mathbf{a}(M) = \operatorname{grad} \mathbf{a}(M). \qquad (4.232)$$

Согласно (4.200) координаты вектора **a** (*M*) выражаются формулами:

$$a_i = \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \qquad (4.233)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что для потенциального поля rot **a** (вычисляемый по формуле (4.221)) тождественно равен нулю:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \qquad (4.234)$$

Возвращаясь к кинематическому истолкованию, рассмотрим случай *потенциального поля скоростей* **a**(*M*). Тогда обращение в нуль rot **a** означает, что вращение любой бесконечно малой капли жидкости происходит с нулевой угловой скоростью, т. е. в каждый бесконечно малый промежуток времени капля испытывает лишь смещение и чистую деформацию. Движение жидкости — незавихренное. Условие (4.234), т. е. незавихренность движения жидкости, является и достаточным для того, чтобы поле скоростей было потенциальным, по крайней мере, в любой односвязной области *D*. Действительно, из (4.234) в силу формулы (4.221) вытекает:

$$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0, \qquad (4.235)$$

а при этих условиях в односвязной области всегда можно подобрать скалярное поле **a** *(M)* такое, что a_i выражаются согласно (4.233), т. е.
a (*M*) = grad *a (M).*

4.20. Малая деформация твердого тела

Все, что было сделано в п. 4.19 для течения жидкости, применимо в известном смысле и для малой деформации твердого тела. Аналогично предыдущему мы будем представлять себе, что **a** *(M)* есть поле скоростей, но теперь уже частиц твердого тела.

Однако перемещение частиц твердого тела мы будем допускать лишь в течение некоторого малого промежутка времени ε, в результате чего получается малое, но конечное смещение каждой точки M на вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$. Это малое смещение точек твердого тела мы и будем рассматривать.

Итак, разница по сравнению с трактовкой течения жидкости заключается в следующем. Раньше промежуток времени ε был бесконечно малым, т. е. стремящейся к нулю переменной величиной. Теперь ε — малая постоянная величина. Раньше за время ε происходила лишь бесконечно малая доля неограниченно продолжающегося процесса течения жидкости. Теперь за малый промежуток времени ε происходит и заканчивается весь процесс смещения частиц твердого тела. Добавим к этому, что в данном случае нас интересует не сам процесс смещения, а только его результат, т. е. тот факт, что каждая точка M сместилась на малый вектор $\varepsilon\mathbf{a}(M)$.

Если мы говорим все-таки о *процессе* смещения, то в сущности лишь условно, чтобы подогнать наши построения под предыдущие результаты и не повторять снова почти тех же рассуждений. Строго говоря, нас интересует лишь векторное поле окончательных перемещений, которое мы будем обозначать:

$$\mathbf{w}(M) = \varepsilon\mathbf{a}(M). \tag{4.236}$$

Разделение же $\mathbf{w}(M)$ на множители ε и $\mathbf{a}(M)$, как было сказано, является по существу условным.

Несмотря на то, что ε уже не бесконечно малая величина, мы по-прежнему будем пренебрегать малыми второго порядка относительно ε. При достаточно малых деформациях твердого тела это приближение является практически допустимым, и на нем основывается простейшая (линейная) форма теории упругости.

В таком случае результаты п. 4.19 переносятся и на наш случай, а именно, мысленно вырезанный из твердого тела бесконечно малый шарик радиуса ρ с центром в точке M испытывает (помимо параллельного сдвига вместе со своим центром на вектор **w**(/M)), во-первых, чистую деформацию $E + \varepsilon\mathfrak{B}$, во-вторы.х, поворот $E + \varepsilon\mathfrak{C}$. Оба аффинора применяются к бесконечно малым векторам, исходящим из центра шарика.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \varepsilon\mathfrak{A}, \quad \tilde{\mathfrak{B}} = \varepsilon\mathfrak{B}, \quad \tilde{\mathfrak{C}} = \varepsilon\mathfrak{C}. \tag{4.237}$$

Соответственно обозначим координаты этих аффиноров:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= \varepsilon a_{ij} = \varepsilon \frac{\partial a_i}{\partial x_j},\\ \tilde{b}_{ij} &= \varepsilon b_{ij} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right),\\ \tilde{c}_{ij} &= \varepsilon c_{ij} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right).\end{aligned}\right\} \tag{4.238}$$

Мы воспользовались здесь формулами (4.216), (4.217). Так как $\varepsilon\mathbf{a}(M) = \mathbf{w}(M)$, а значит, $\varepsilon a_i = w_i$, то окончательно получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= \frac{\partial w_i}{\partial x_j},\\ \tilde{b}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right),\\ \tilde{c}_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} - \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right).\end{aligned} \qquad (4.239)\ \text{-}\ (4.241)$$

Так выражаются через вектор поля перемещений **w** *(M) координаты аффиноров* $\tilde{\mathfrak{A}}, \tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{\mathfrak{C}}$, *причем чистая деформация и вращение бесконечно малого шарика с центром в точке М вызываются соответственно аффинорами* $E+\tilde{\mathfrak{B}}$, $E+\tilde{\mathfrak{C}}$ *(воздействующими на всевозможные бесконечно малые векторы, отложенные из точки М внутри этого шарика).*

Аффинор $\tilde{\mathfrak{B}}$ называется *аффинором деформаций* и соответствующий тензор $\vec{b}_{ij}$ — *тензором деформаций.* Если предположить тело упругим, то упругие силы, развивающиеся в нем, определяются в каждой точке тензором деформаций, так как аффинор $E+\tilde{\mathfrak{C}}$ создает лишь поворот, а следовательно, не меняет взаимного расположения частиц тела в пределах вырезанного нами бесконечно малого шарика.

В формулах (4.238), (4.239) малый множитель ε включен в рассматриваемые величины и в явном виде не выписывается. Поэтому нужно просто помнить, что координаты w_i вектора перемещения **w** и их частные производные $\frac{\partial w_i}{\partial x_j}$ мы считаем величинами малыми, так что их квадратами можно пренебрегать (сравнительно с 1). Очевидно, то же относится и к координатам тензоров $\tilde{b}_{ij}$ и $\tilde{c}_{ij}$.

Отметим еще, что относительное объемное расширение будет равно в нашем случае (согласно (4.230) и принимая во внимание соотношение (4.236)):

$$\theta \approx \operatorname{div} \mathbf{w}(M). \tag{4.242}$$

При этом, умножая почленно (4.222) на ε, мы имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = \sum_i \tilde{a}_{ii} = \sum_i \tilde{b}_{ii} = \sum_i \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \tag{4.243}$$

4.21. Тензор напряжений

Пусть упругое тело подверглось некоторой деформации, и в нем появились упругие напряжения. Это означает следующее.

Рассмотрим какую-нибудь плоскую площадку, мысленно внесенную нами внутрь упругого тела и там как-либо установленную. Проведем нормаль к этой площадке и выберем какое-либо из двух направлений на нормали за положительное. Площадку мы в этом случае будем называть *ориентированной.*

Вблизи данной ориентированной площадки упругое тело будет рассечено ею на две части: одна из них расположена с положительной стороны площадки (т. е. в сторону положительного направления нормали), другая—с отрицательной стороны.

Наличие в теле напряжений означает, что первая из этих частей действует на вторую через отделяющую их площадку с известной силой. Эту силу мы будем называть *силой напряжения,* действующей на данную ориентированную площадку. Разумеется, вторая часть тела также действует на первую (по закону равенства действия и противодействия), но, чтобы при подсчете силы напряжения не сбиваться в знаке, мы условимся рассматривать действие именно первой части на вторую.

Охарактеризовать напряжения, существующие в теле, значит уметь установить силу напряжения для любой ориентированной площадки, указанной в теле.

Однако наша постановка вопроса является слишком грубой и нуждается в уточнении. Дело в том, что сила, действующая на площадку, большей частью непрерывно по ней распределена, и это распределение также должно быть указано.

Другими словами, мы должны указать силу, приложенную к каждому элементу (к каждому бесконечно малому кусочку) площадки.

Это показывает нам, что нет смысла класть в основу рассмотрение конечных площадок, а нужно ограничиться площадками бесконечно малыми. Так мы и поступим.

Выберем произвольно какую-нибудь точку M в рассматриваемом теле и будем проводить через нее всевозможные ориентированные бесконечно малые площадки. Каждую из этих площадок мы будем характеризовать, во-первых, единичным вектором $\mathbf{n}$, направленным по ее нормали в положительную сторону, и, во-вторых, ее площадью dS.

При этом мы представляем себе дело так, что вектор **n** является для данной площадки постоянным; следовательно, ортогональная к **n** плоскость, проходящая через *М,* в которой расположена площадка, тоже постоянная, но сама площадка — переменная и стремится стянуться в точку М; при этом $dS \to 0$.

Форма площадки нас интересовать не будет.

Более коротко нашу площадку можно задать одним бесконечно малым вектором

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} dS, \tag{4.244}$$

по которому, очевидно, можно определить и **n**, и *dS* (**n** — как единичный вектор того же направления, а *dS* — как модуль).

Обозначим **F** силу напряжения, действующую на площадку **s**. Естественно предположить, что в данной точке *М* и при данном **n** сила **F**, действующая на площадку, пропорциональна (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка) ее площади *dS.*

Тем самым сила **F** не зависит от формы площадки и вполне определяется вектором площадки **s**, причем при умножении **s** на число на то же число умножается и **F**. Итак, **F** мы должны искать как функцию от **s**:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}), \tag{4.245}$$

учитывая, что для всякого числа α

$$\mathfrak{F}(\alpha \mathbf{s}) = \alpha \mathfrak{F}(\mathbf{s}). \tag{4.246}$$

Последнее показывает, что достаточно знать $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$, чтобы определить и $\mathfrak{F}(\mathbf{s})$:

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s}) = \mathfrak{F}(\mathbf{n}\, dS) = \mathfrak{F}(\mathbf{n})\, dS. \tag{4.247}$$

Кроме того, отсюда видно, $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выражает силу напряжения на данной площадке, отнесенную к единице площади, т. е. *напряжение* **P** *на данной площадке.* Итак,

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}\, dS. \tag{4.248}$$

Характер зависимости $\mathfrak{F}(\mathbf{n})$ выводится в курсах теории упругости из некоторых механических соображений, которые мы повторять здесь не будем. Воспользуемся готовым результатом, а именно, оказывается, что в произвольной координатной системе проекции напряжения $\mathbf{P} = \mathfrak{F}(\mathbf{n})$ на координатные оси выражаются линейно через направляющие косинусы положительной нормали **n**, т. е. в наших обозначениях через координаты n_1, n_2, n_3 единичного вектора **n**:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= f_{11}n_1 + f_{12}n_2 + f_{13}n_3, \\ P_2 &= f_{21}n_1 + f_{22}n_2 + f_{23}n_3, \\ P_3 &= f_{31}n_1 + f_{32}n_2 + f_{33}n_3. \end{aligned}\right\} \tag{4.249}$$

Мы обозначили f_{11}, f_{12}, . . . напряжении X_x, X_y, ... на площадках, параллельных координатным осям. В данной координатной системе и в данной точке *M* это будут постоянные величины.

Запишем (4.249) в кратких обозначениях

$$P_i = \sum_j f_{ij} n_j. \tag{4.250}$$

Умножим эти равенства почленно на *dS*. Тогда вектор **P** согласно (4.248) превратится d **F**, а вектор **n** в силу формулы (4.244) в **s**, и мы получим:

$$F_i = \sum_j f_{ij} s_j. \tag{4.251}$$

Таким образом, для всевозможных бесконечно малых ориентированных площадок, проведенных через данную точку M, координаты вектора силы **F** *линейно выражаются через координаты вектора площадки* **s**, *а следовательно, сила* **F** *получается из вектора площадки* **s** *действием на него некоторого аффинора* $\mathfrak{F}$ *с координатами* f_{ij}*:*

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s}. \tag{4.252}$$

В самом деле, из линейного характера формул (4.251) следует, что для функциональной зависимости $\mathbf{F} = \mathfrak{F}(\mathbf{s})$ соблюдается свойство $\mathfrak{F}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) = \mathfrak{F}(\mathbf{s}_1) + \mathfrak{F}(\mathbf{s}_2)$, что в сочетании с (4.246) и означает, что эта зависимость является некоторым аффинором.

Этот аффинор $\mathfrak{F}$ называется *аффинором напряжений,* а соответствующий ему тензор f_{ij} — *тензором напряжений.*

В каждой точке *M* будет свой тензор напряжений, так что в деформированном упругом теле возникает поле тензора напряжений. Чтобы уяснить себе смысл координат тензора напряжений в данной точке *M,* достаточно, например, положить $\mathbf{n} = \mathbf{e}_1$.

Тогда

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0.$$

и формулы (4.249) дают

$$P_1 = f_{11}. \qquad P_2 = f_{21}, \qquad P_3 = f_{31}. \tag{4.253}$$

Мы получаем координаты напряжения **P** на площадке, ортогональной к $\mathbf{e}_1$.

Таким образом, f_{ij} выражает *i*-ю координату напряжения **P** на площадке, ортогональной к *j*-му орту $\mathbf{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Из механических соображений можно получить, далее, что тензор напряжений должен быть симметрическим

$$f_{ij}= f_{ji}. \qquad (4.254)$$

Тензор напряжений возникает не только в деформированном упругом теле, но и, например, в жидкости. Если жидкость *идеальная,* т. е. силы внутреннего трения отсутствуют, то сила напряжения **F**, действующая на площадку, может быть лишь силой нормального давления на эту площадку, т. е. направлена по нормали **n** (в отрицательную сторону). Так как вектор площадки **s** тоже всегда направлен по **n**, то в формуле (4.252) функция **F** оказывается всегда коллинеарной с аргументом **s**, т. е. у аффинора $\mathfrak{F}$ все направления собственные.

Исследуя собственные направления симметрического аффинора, мы обнаружили, что этот случай возможен лишь тогда, когда действие аффинора сводится к умножению на некоторое определенное число. Следовательно,

$$\mathbf{F} = \mathfrak{F}\mathbf{s} = -p\mathbf{s}, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{F} = -pE, \qquad (4.255)$$

где число — p означает взятое с обратным знаком давление в данной точке жидкости. Тензор напряжений имеет в этом случае вид

$$f_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad f_{ii} = -p. \qquad (4.256)$$

Если же жидкость *вязкая,* то тензор напряжений не обязан иметь столь простой вид, так как помимо нормального давления на данную площадку действуют еще силы, порождаемые трением.

4.22. Зависимость тензора напряжения от тензора деформаций

Основой теории упругости является установление зависимости тензора напряжений от тензора деформаций. В самом деле, каждый элемент деформированного упругого тела испытывает, как мы знаем, параллельный сдвиг, поворот и чистую деформацию. Только последняя вызывает появление упругих сил, а следовательно, тензор напряжений должен в каждой точке тела зависеть от тензора деформаций, который как раз и выражает чистую деформацию. Если такая зависимость будет установлена, то становится ясной и основная схема теории упругости, которая в грубых чертах такова: ускорения, испытываемые частицами упругого тела, зависят от напряжений в нем, эти последние зависят от тензора деформаций, а тензор деформаций выражается уже известным нам образом через перемещения частиц тела. Следовательно, ускорения частиц тела выражаются в зависимости от их перемещений, что и приводит к основным дифференциальным уравнениям теории упругости.

Итак, речь идет о зависимости тензора напряжений f_{ij} от тензора деформаций $\tilde{b}_{ij}$.

В первом приближении (как это большей частью и делается в теории упругости) эту зависимость можно считать линейной. Для однородных и изотропных тел она имеет вид

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij}. \qquad (4.257)$$

Здесь λ и μ — *коэффициенты Ламе,* постоянные для данного тела, а θ — относительное объемное расширение (4.242):

$$\theta = \sum_i \tilde{b}_{ii} \qquad (4.258)$$

θ —инвариант преобразования координатной системы и по своему геометрическому смыслу, и как след аффинора $\tilde{\mathfrak{B}}$.

Обратим внимание на инвариантный характер зависимости (4.257): в какой бы координатной системе ни вычислять f_{ij} по этой формуле, они всегда будут служить координатами одного и того же тензора.

В самом деле, f_{ij} получаются сложением координат двух тензоров, из которых один — единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант λθ, а другой — тензор деформаций $\tilde{b}_{ij}$, умноженный на инвариант (и даже константу) 2μ. Операция носит, таким образом, тензорный характер. Легко заметить, что три взаимно ортогональных собственных направления являются общими для тензора деформаций и для тензора напряжений (главные оси деформаций и напряжений). В них картина деформаций и напряжений становится особенно простой.

На обосновании формулы (4.257) мы останавливаться не будем, отсылая за этим к курсам теории упругости.

Несколько иной вид принимает зависимость (4.257) в случае жидкости (вообще говоря, вязкой). Аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ состоит здесь из двух слагаемых $\mathfrak{F}^{(1)}$, $\mathfrak{F}^{(2)}$, первое из которых представляет собой реакцию жидкости на изменение ее формы. Его мы сейчас и рассмотрим. Жидкость не оказывает сопротивления изменению ее формы, если это изменение уже произошло, однако оказывает сопротивление в самом процессе изменения, что и выражается в силах внутреннего трения.

Поэтому та часть тензора напряжений, которая связана с силами внутреннего трения, будет зависеть не от аффинора деформаций $\tilde{\mathfrak{B}}$, а от аффинора *скоростей* деформации $\mathfrak{B}$ (4.229) с координатами

$$b_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right). \qquad (4.259)$$

Здесь, как и в п. 4.19, a_i — координаты вектора поля скоростей $\mathbf{a}(M)$.

При этом нужно учитывать даже не весь аффинор скоростей деформации $\mathfrak{B}$, а только ту его часть $\mathfrak{B}^{(1)}$, которая отвечает изменению формы элемента жидкости, откинув другую часть $\mathfrak{B}^{(2)}$, отвечающую лишь изменению объема.

Говоря точнее, мы разлагаем аффинор $\mathfrak{B}$ на два слагаемых:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{B}^{(2)} \tag{4.260}$$

таким образом, чтобы $\mathfrak{B}^{(2)}$ имело вид

$$\mathfrak{B}^{(2)} = bE \tag{4.261}$$

и, следовательно, вызывало бы в элементе жидкости происходящее с известной скоростью преобразование подобия.

Действительно, как мы знаем из п. 4.19, за бесконечно малый промежуток времени ε элемент жидкости подвергается деформации при помощи аффинора $E + \varepsilon\mathfrak{B}$; в том числе за счет $\mathfrak{B}^{(2)}$ получается аффинор

$$E + \varepsilon\mathfrak{B}^{(2)} = (1 + \varepsilon b)\, E, \tag{4.262}$$

который означает преобразование подобия с изменением линейных размеров в отношении $1+\varepsilon b$. Коэффициент b в формуле (4.261) мы выбираем так, *чтобы это преобразование подобия могло принять на себя все изменение объема элемента жидкости.* Тогда оставшееся слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$ определяет как бы чистое «изменение формы» элемента жидкости без изменения объема. За возникновение сил внутреннего трения мы будем считать ответственным именно это первое слагаемое $\mathfrak{B}^{(1)}$. Действительно, второе слагаемое $\mathfrak{B}^{(2)}$ означает лишь преобразование подобия, т. е. равномерное объемное расширение (сжатие) элемента жидкости; это изменяет лишь давление p (в более детальной теории соответствующее слагаемое в p рассматривается отдельно).

Подсчитаем теперь коэффициент b. Преобразование подобия (4.262) означает изменение объема в отношении

$$(1 + b\varepsilon)^3 \approx 1 + 3b\varepsilon. \tag{4.263}$$

Мы отбросили здесь бесконечно малые высшего порядка относительно ε.

Поскольку преобразование подобия (4.262) мы подбираем так, чтобы оно приняло на себя все изменение объема, нам приходится положить:

$$3b = \operatorname{div} \mathbf{a} = \sum_i b_{ii}, \tag{4.264}$$

Действительно, как видно из (4.263), при нашем преобразовании подобия относительное объемное расширение за время ε равно $3b\varepsilon$, Оно должно совпадать с имеющим место в действительности относительным объемным расширением (4.230), откуда и получаем (4.264). Итак, мы от аффинора скоростей деформации $\mathfrak{V}$ отщепляем аффинор

$$\mathfrak{V}^{(2)} = \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot E, \tag{4.265}$$

принимающий на себя все изменение объема элемента жидкости, а оставшийся аффинор

$$\mathfrak{V}^{(1)} = \mathfrak{V} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot E, \tag{4.266}$$

означающий лишь изменение формы без изменении объема, считаем целиком ответственным за возникновение сил внутреннего трения. В гидродинамике принимается, что в изотропной вязкой жидкости первая часть $\mathfrak{F}^{(1)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, вызванная силами внутреннего трения, пропорциональна аффинору $\mathfrak{V}^{(1)}$:

$$\mathfrak{F}^{(1)} = 2\mu\mathfrak{V}^{(1)} = 2\mu \left\{\mathfrak{V} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot E\right\}. \tag{4.267}$$

Коэффициент μ — для данной жидкости величина постоянная — называется ее *коэффициентом вязкости.*

Если записать (4.267) в координатной форме, то получим:

$$f_{ij}^{(1)} = 2\mu \left\{b_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij}\right\}, \tag{4.268}$$

где b_{ij} определяется по формуле (4.229), а δ_{ij} — координаты единичного аффинора E. Как легко проверить, пользуясь (4.264), след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю.

Вторая часть $\mathfrak{F}^{(2)}$ аффинора напряжений $\mathfrak{F}$, не связанная с силами внутреннего трения, принимается такой же, как и в идеальной жидкости, где эти силы полностью отсутствуют. В силу (4.255) получаем:

$$\mathfrak{F}^{(2)} = -pE, \tag{4.269}$$

где $p = p(M)$—давление в данной точке жидкости (в данном случае после исключения сил внутреннего трении).

В координатной записи:

$$f_{ij}^{(2)} = -p\delta_{ij}. \tag{4.270}$$

Складывая почленно (4.267) и (4.269) , получим окончательное выражение тензора напряжений:

$$\mathfrak{F} = 2\mu \left\{ \mathfrak{B} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot E \right\} - pE. \tag{4.271}$$

Соответственно в координатах:

$$f_{ij} = 2\mu \left\{ b_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} \right\} - p\delta_{ij} = \\ = \mu \left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2\mu}{3} \operatorname{div} \mathbf{a} \cdot \delta_{ij} - p\delta_{ij}. \tag{4.272}$$

Так как след аффинора $\mathfrak{F}^{(1)}$ равен нулю, то след $\mathfrak{F}$ совпадает со следом $\mathfrak{F}^{(2)}$, т. е. имеет значение 3*p*. Отсюда давление *p* в каждой точке можно вычислить по формуле

$$p = -\frac{1}{3} \sum_i f_{ii}. \tag{4.273}$$

В случае несжимаемой жидкости, плотность которой $\rho(M)$ = const, давление *p (M)* связывается с вектором скорости дифференциальными уравнениями движения жидкости, — ими мы еще будем заниматься. В случае сжимаемой жидкости *p(M)* связано, кроме того, с плотностью $\rho(M) \neq$ const определенными соотношениями, которыми мы заниматься не будем.

4.23. Поток векторного поля через поверхность

Возвратимся к общей теории векторного поля **a***(M)*. Пусть нам дана некоторая ограниченная кусочно гладкая поверхность *S*. Это значит, что она склеена из конечного числа ограниченных кусков, на каждом из которых (включая границу куска) она обладает непрерывно меняющейся касательной плоскостью. Говоря более точно, мы требуем, чтобы поверхность могла быть склеена из конечного числа кусков, каждый из которых при подходящем выборе координатных осей можно задать уравнением

$$x_3 = f(x_1, x_2), \tag{4.273}$$

где $f(x_1, x_2)$ — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка, определенная в некоторой области *D* на плоскости x_1, x_2; при этом *D* ограничена кусочно гладким (не самопересекающимся) контуром. Функция *f* определена на *D*, включая и ее границу. Далее предполагается, что склеивание производится так, что кусочек поверхности в окрестности каждой точки склеивания допускает взаимно однозначное и непрерывное отображение на кружок. В дальнейшем мы будем рассматривать только такие поверхности. Кроме того, мы будем считать, что поверхность двусторонняя и, следовательно, ее нормаль (определенная во всяком случае на каждом отдельном ее куске) может быть снабжена положительным направлением так, что единичный вектор **n**, идущий в этом направлении, указывает в местах склейки «в одну и ту же сторону» от поверхности, независимо от того, какому из склеиваемых кусков он принадлежит. Предполагается, что в пределах каждого отдельного куска вектор **n** меняется от точки к точке непрерывно.

Если поверхность ограничивает некоторое пространственное тело, то вектор **n** мы будем направлять по внешней нормали, если же нет, то предполагаем, что выбор **n** произведен каким-нибудь одним из двух возможных способов.

Поверхность S мы будем называть в этом случае *ориентированной* и только такие поверхности будем рассматривать.

Если поверхность S помещена в той области Ω, в которой задано векторное поле **a** *(M),* то для этой поверхности можно определить понятие потока векторного поля.

Потоком векторного поля **a**(*M*) *через данную поверхность S называется взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади dS, умноженного на нормальную составляющую вектора поля* **a** (*M*):

$$p = \iint_S \mathbf{an}\, dS. \tag{4.275}$$

Так как **n** — единичный вектор нормали, то скалярное произведение **an** выражает как раз проекцию вектора поля **a** на положительное направление нормали к поверхности. Двойной интеграл по поверхности следует понимать как сумму соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность.

Значение введенного нами понятия выясняется из следующих примеров.

1°. Пусть **a** *(M)* — поле скоростей стационарного движения жидкости.

Тогда поток p выражает объем жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность с отрицательной ее стороны на положительную (если жидкость сжимаемая, то объем каждой «капли» жидкости мы оцениваем в момент ее протекания через поверхность S). Если течение жидкости происходит в обратном направлении, то поток засчитывается с отрицательным знаком.

В самом деле, за бесконечно малый промежуток времени ε частицы жидкости, находящиеся на элементе поверхности dS, сместятся на вектор ε**a** (рис. 4.3).

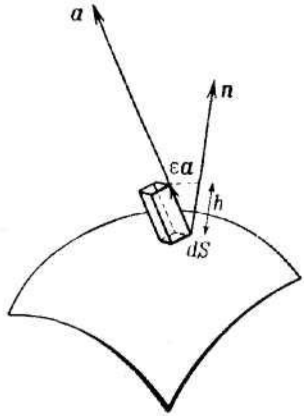


Рис. 4.3

В результате этого через площадку dS вытеснится некоторый объем жидкости, заключенный в наклонном цилиндре с основанием dS и с образующей, которая совпадает с вектором $\varepsilon\mathbf{a}$. Этот объем dV мы найдем, умножая площадь основания цилиндра dS на его высоту h, которая равна проекции образующей $\varepsilon\mathbf{a}$ на перпендикуляр к основанию dS, т, е. на нормаль к поверхности:

$$h = \varepsilon\mathbf{an},\ dV = hdS = \varepsilon\mathbf{an}dS.$$

Интегрируя полученный элементарный объем по всей поверхности S, мы видим, что полный объем жидкости, протекающий через S за время ε, равен

$$\varepsilon \iint_S \mathbf{an}\, dS,$$

а за единицу времени он, следовательно, равен потоку p, как видно из (4.275).

Рассуждение, которое мы сейчас провели, нельзя, разумеется, считать доказательством, так как оно было проведено чрезвычайно грубо; мы путали маленький кусочек кривой поверхности dS с кусочком плоскости, переменный вектор $\mathbf{a}$ (M) считали в пределах dS постоянным, а в заключение суммирование по кусочкам поверхности подменили двойным интегрированием. Однако это грубое рассуждение содержит правильную идею, и, уточняя его, можно было бы показать, что все допущенные ними ошибки исчезают при предельном переходе к интегралу, так что окончательный результат является правильным. Чтобы не загромождать изложения, мы ограничимся здесь, как и в других примерах этого пункта, лишь такого рода ориентировочными рассуждениями.

2°. По-прежнему **a**(*M*) — поле скоростей стационарного движения жидкости, а ρ*(M)* — ее плотность. Тогда поток вектора ρ*(M)***a**(*M*) через поверхность *S*

$$\iint_S \rho \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS \tag{4.276}$$

дает массу жидкости, протекающую через *S* за единицу времени.

В самом деле, подсчитывая массу жидкости, протекшую за время ε через элемент поверхности *dS,* мы должны умножить на плотность ρ соответствующий объем *dV:*

ρ *dV*=ερ**an***dS.*

Интегрируя затем по всей поверхности *S* и относя результат к единице времени (т. е. деля на ε), получаем (4.276).

Возвращаясь к общему определению потока (4.275), отметим, что его (в целях последующих выкладок) можно переписать так:

$$p = \iint_S \sum_i a_i n_i dS. \tag{4.277}$$

Здесь скалярное произведение векторов **a** и **n** записано как результат свертывания соответствующих тензоров.

4.24. Поток аффинорного поля через поверхность

Пусть теперь в области Ω, где выбрана поверхность *S,* вместо векторного поля **a** (*M*) задано аффинорное поле $\mathfrak{A}(M)$, т.е. вместо поля одновалентного тензора a_i—поле двухвалентного тензора a_{ij}.

Мы определяем поток аффинорного поля $\mathfrak{A}(M)$ *через поверхность S как взятый по этой поверхности двойной интеграл от элемента площади dS, умноженного на результат дейстиин аффинора* A *на вектор единичной нормали* **n**.

$$\mathbf{p} = \iint_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS. \tag{4.278}$$

Поток **p** аффинора $\mathfrak{A}(M)$ как результат интегрировании вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ также будет *вектором* и отличие от потока *p* вектора **a** (*M*), который представлял собой *число.* Что же касается интегрирования вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$, то, не вдаваясь в излишние разъяснения, его можно определить просто как интегрирование каждой из координат этого вектора по отдельности. Тогда формула (4.278) распадется на три координатные формулы:

$$p_i = \iint\limits_S \sum_j a_{ij} n_j dS \qquad (i = 1,\ 2,\ 3).$$

(4.279)

Мы выразили здесь координаты вектора $\mathfrak{A}\mathbf{n}$ согласно (4.24) при помощи тензорной операции свертывания.

В этой записи обнаруживается глубокое формальное родство понятий потока векторного поля и потока аффинорного поля. В самом деле, формула (4.279) представляет собой как бы повторенную в трех вариантах (при i = 1, 2, 3) формулу (4.277). Этим родством мы в дальнейшем воспользуемся.

Не нужно забывать, что величины a_{ij}, n_j, стоящие под знаком интеграла (4.279), меняются от точки к точке поверхности, хотя мы и не выписываем явно их аргументов. Аналогично дело обстоит и в случае (4.277).

Теперь укажем важнейшее приложение понятия потока аффинора.

Пусть в какой-либо сплошной среде имеются силы напряжения, характеризуемые полем аффинора напряжений $\mathfrak{F}$ с координатами f_{ij}. Составим поток этого аффинора через какую-либо поверхность S, мысленно построенную нами в рассматриваемой среде. Тогда в силу (4.278)

$$\mathbf{p} = \iint\limits_S \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS.$$

(4.280)

Но подынтегральное выражение согласно (4.247) представляет собой силу напряжения, приложенную к элементарной площадке dS (которая предполагается ориентированной соответственно ориентации всей поверхности S). Поэтому в результате интегрирования мы получаем *равнодействующую* **p** *всех сил напряжения, приложенных к поверхности S.* Таков смысл потока аффинора напряжений.

4.25. Теорема Остроградского

Теорема Остроградского сводит вычисление потока векторного поля **a** *(M)* через замкнутую поверхность S, ограничивающую некоторое пространственное тело ω, к тройному интегралу по этому телу от дивергенции вектора **a**:

$$\iint\limits_S \mathbf{a}\mathbf{n}\, dS = \iiint\limits_\omega \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\omega.$$

(4.281)

Здесь $d\omega$ обозначает элемент объема, **n** — единичный вектор внешней нормали. Для доказательства удобно переписать (4.281) в координатной форме:

$$\iint\limits_S (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3)\, dS = \iiint\limits_\omega \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) d\omega. \tag{4.282}$$

Мы докажем сначала формулу (4.282) в частном случае, когда $a_1 = a_2 = 0$. Тогда она принимает вид

$$\iint\limits_S a_3 n_3\, dS = \iiint\limits_\omega \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega. \tag{4.283}$$

На время можно забыть, что a_3— координата вектора **a**, а просто рассматривать ее как некоторую (непрерывно дифференцируемую) функцию от координат x_1, x_2, x_3. Предположим сначала, что поверхность S такова, что каждая параллель оси X_3 пробивает ее не более чем в двух точках. Для краткости будем называть поверхность S в этом случае *правильно расположенной.* Проектируя S на плоскость X_1X_2, получим на последней некоторую область D (рис. 4.4).

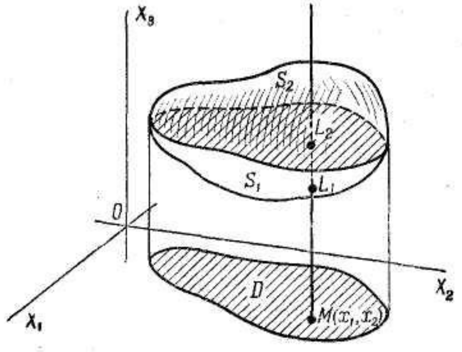


Рис. 4.4.

Проводя параллели оси X_3 через точки $M(x_1, x_2)$ области D, мы отмечаем на каждой из них точки L_1, L_2 пересечения с поверхностью S.

Пусть L_1 расположена «ниже» L_2 (или в крайнем случае с ней совпадает (когда M лежит на границе области D), т. е. обладает меньшей координатой x_3. Когда точка M описывает область D, L_1 описывает нижнюю часть поверхности S, которую обозначим S_1, а L_2 — верхнюю часть, которую обозначим S_2. При этом и для L_1, и для L_2 координата x_3 меняется в зависимости от x_1, x_2:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= f_1(x_1,\ x_2) \quad (\text{для } L_1); \\ x_3 &= f_2(x_1,\ x_2) \quad (\text{для } L_2). \end{aligned}\right\} \tag{4.284}$$

Уравнения, которые мы записали, определяют, таким образом, соответственно поверхности S_1 и S_2.

Функции f_1, f_2 однозначны по определению и непрерывны, как можно вывести из наших общих предположений о характере поверхности S.

Вычисляем теперь правую часть (4.283), производя сначала интегрирование по x_3 при данных x_1, x_2 от f_1 до f_2, а затем интегрирование по x_1, x_2 в пределах области D:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega = \iint\limits_{D} \int\limits_{f_1(x_1,\, x_2)}^{f_2(x_1,\, x_2)} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, dx_3\, dx_2\, dx_1 =$$
$$= \iint\limits_{D} \{a_3(x_1, x_2, f_2(x_1, x_2)) - a_3(x_1, x_2, f_1(x_1, x_2))\}\, dx_1\, dx_2. \qquad (4.285)$$

С другой стороны, рассмотрим левую часть (4.283), разбивая ее на два интеграла — по S_1 и по S_2:

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\, dS = \iint\limits_{S_1} a_3 n_3\, dS + \iint\limits_{S_2} a_3 n_3\, dS. \qquad (4.286)$$

Если функция $x_3=f_1(x_1, x_2)$ обладает непрерывными частными производными 1-го порядка, то для соответствующей поверхности S_1 элемент площади dS и единичный нормальный вектор **n** можно записать, как известно, в виде

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}\, dx_1\, dx_2, \qquad (4.287)$$

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}{\pm\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \qquad (4.288)$$

Знак ± соответствует тому или другому выбору положительного направления на нормали. Отсюда, в частности,

$$n_3 = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)^2}}. \qquad (4.289)$$

Так как S_1 образует нижнюю границу рассматриваемого объема, то внешняя нормаль будет направлена «вниз» (т. е. в сторону убывания x_3), и проекция n_3 вектора **n** на ось X_3 будет отрицательной; в формуле (4.289) мы выбираем знак минус. Перемножая (4.287) и (4.289), получим:

$$n_3 dS = -\, dx_1 dx_2, \qquad (4.290)$$

и следовательно,

$$\iint\limits_{S_1} a_3 n_3 dS = -\iint\limits_{S_1} a_3\, dx_1\, dx_2 =$$
$$= -\iint\limits_{D} a_3 (x_1,\ x_2,\ f_1 (x_1,\ x_2))\, dx_1\, dx_2. \tag{4.291}$$

В последней записи мы свели интеграл по поверхности S_1 к двойному интегралу по переменным x_1, x_2, которые пробегают область D, когда точка пробегает поверхность S_1. При этом пришлось уже явно указать, что a_3 берется для точек поверхности S_1, т. е. аргументу x_3 придается значение $f_1(x_1, x_2)$.

Совершенно аналогично мы поступаем с интегралом по S_2 с той только разницей, что S_2 ограничивает рассматриваемый объем сверху, вектор **n** будет направлен «вверх» (в сторону возрастания x_3), и в формуле (4.289) мы должны будем взять знак плюс. Соответственно и в формуле (4.290) знак — заменяется на +, и мы получаем:

$$\iint\limits_{S_2} a_3 n_3\, dS = \iint\limits_{D} a_3 (x_1,\ x_2,\ f_2 (x_1,\ x_2))\, dx_1\, dx_2. \tag{4.292}$$

Две последние формулы позволяют переписать (4.286) в виде

$$\iint\limits_{S} a_3 n_3\, dS = -\iint\limits_{D} a_3 (x_1,\ x_2,\ f_1 (x_1,\ x_2))\, dx_1\, dx_2 +$$
$$+ \iint\limits_{D} a_3 (x_1,\ x_2,\ f_2 (x_1,\ x_2))\, dx_1\, dx_2.$$

Сравнивая это выражение с (4.285), убеждаемся в справедливости формулы (4.283), которую нам и требовалось доказать.

При доказательстве мы предположили, что $f_1\ (x_1, x_2)$ (и аналогично $f_2\ (x_1,\ x_2))$ имеют непрерывные частные производные. В действительности это не везде соблюдается, так как поверхность S, вообще говоря, лишь кусочно гладкая и, кроме того, на ней могут встречаться точки, особенно по линии соединения S_1 и S_2, в которых касательная плоскость параллельна оси X_3.

В таком случае доказательство равенства (4.292) (и аналогично (4.291)) следует видоизменить: сначала это равенство устанавливается для отдельных гладких кусков $S^{(i)}_2$ поверхности S_2 и соответствующих кусков $D^{(i)}$ области D, откуда почленным сложением приходим к равенству (4.292). При доказательстве равенства для отдельного гладкого куска $S^{(i)}_2$ мы относим его к параметрам u_1, u_2, причем текущие координаты x_1, x_2, x_3 являются функциями u_1, u_2 с непрерывными частными производными 1-го порядка.

Из дифференциальной геометрии известно, что тогда

$$\left.\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG-F^2}\,du_1\,du_2, \\ n_3 &= \pm\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(u_1,\ u_2)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.293}$$

где

$$\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(u_1,\ u_2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

В случае S_2 мы берем n_3 положительным, вернее неотрицательным, так как $n_3 = 0$ в точках, где касательная плоскость параллельна оси X_2. Следовательно

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left|\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(u_1,\ u_2)}\right|, \tag{4.294}$$

а значит,

$$n_3\,dS = \left|\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(u_1,\ u_2)}\right| du_1 du_2. \tag{4.295}$$

Отсюда

$$\iint\limits_{S_2^{(i)}} a_3 n_3\,dS = \iint\limits_{S_2^{(i)}} a_3\left|\frac{\partial(x_1,\ x_2)}{\partial(u_1,\ u_2)}\right| du_1\,du_2 = \iint\limits_{D^{(i)}} a_3\,dx_1\,dx_2.$$

Последний знак равенства поставлен на основании формулы преобразования переменных под знаком двойного интеграла. Этим равенство (4.292) доказано для отдельных кусков $S^{(i)}{}_2$, а значит, и для S_2.

Аналогично поступаем с S_1 и его гладкими кусками $S^{(i)}{}_1$ с той лишь разницей, что в формуле (4.294), а значит, и в формуле (4.295), в правой части добавляется знак минус, и мы приходим к (4.291).

Итак, формула (18.283) у нас доказана, правда, пока только для «правильно расположенных» поверхностей S. Но она будет верна и для произвольной замкнутой поверхности S, ограничивающей некоторое пространственное тело ω. В самом деле, это тело всегда можно разбить на куски ω_i таким образом, чтобы ограничивающие их поверхности S_i были «правильно расположенными» (не вдаваясь в подробности, будем считать это наглядно очевидным; см. рис. 4.5).

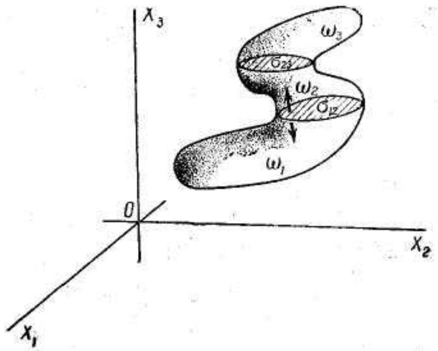


Рис. 4.5.

В таком случае мы выписываем формулу (4.283) по отдельности для каждого куска

$$\iint\limits_{S_i} a_3 n_3\, dS = \iiint\limits_{\omega_i} \frac{\partial a_3}{\partial x_3}\, d\omega \tag{4.296}$$

и все эти формулы складываем почленно. В правой части сумма интегралов по телам ω_i даст соответствующий интеграл по ω, а в левой части сумма интегралов по поверхностям S_i даст интеграл по поверхности S. В самом деле, интегралы по дополнительным поверхностям, рассекающим тело ω, берутся по два раза с противоположными знаками и в сумме уничтожаются. Так, например, интеграл по поверхности σ_{12} войдет, во-первых, в состав интеграла по поверхности S_1, ограничивающей тело ω_1, и, во-вторых, в состав интеграла по поверхности S_2, ограничивающей тело ω_2. Так как тела ω_1 и ω_2 примыкают к σ_{12} с противоположных сторон, то внешние нормали к σ_{12} будут направлены в том и другом случае в противоположные стороны, так что вектор **n** меняет направление на обратное, а его проекция n_3 меняет знак. Но вместе с n_3 меняет знак и интеграл

$$\iint\limits_{\sigma_{12}} a_3 n_3\, dS.$$

Итак, формула (4.283) доказана окончательно. Но ввиду полного равноправия координатных осей она будет верна и с заменой 3-го индекса на 1-й или 2-й. Складывая все три формулы почленно, получаем равенство (4.282), а следовательно, и (4.281). Доказательство закончено.

Рассмотрим еще поток аффинорного поля A через замкнутую поверхность S. Пользуясь координатной записью (4.279), получим:

$$p_i = \iint_S (a_{i1}n_1 + a_{i2}n_2 + a_{i3}n_3)\, dS =$$

$$= \iiint_\omega \left(\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3} \right) d\omega. \tag{4.297}$$

Последнее выражение получено на основании формулы (4.282). Введем понятие *дивергенции аффинорного поля,* а именно, сопоставим аффинорному полю A векторное поле $\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}$, определив координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}$ формулами:

$$\{\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}\}_i = \sum_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^j} = \sum_j \nabla_j a_{ij}. \tag{4.298}$$

Мы видим, что координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}$ образуют одновалентный тензор, полученный свертыванием тензора $\nabla_k a_{ij}$ по 1-му и 3-му индексам; следовательно, вектор $\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}$ будет в каждой точке вполне определенным (не зависит от выбора координатной системы, в которой вычисляются его координаты).

Теперь (4.297) можно переписать в виде

$$p_i = \iiint_\omega \{\overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}\}_i\, d\omega,$$

или, что то же,

$$\mathbf{p} = \iiint_\omega \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \tag{4.299}$$

Записав **p** в развернутом виде согласно (4.278), получим окончательно

$$\iint_S \mathfrak{A}\mathbf{n}\, dS = \iiint_\omega \overrightarrow{\mathrm{div}}\,\mathfrak{A}\, d\omega. \tag{4.300}$$

Мы получили теорему Остроградского для потока аффинора через замкнутую поверхность.

4.26. Основные уравнения гидродинамики

Теперь мы можем составить основные дифференциальные уравнения гидродинамики. Они, в сущности, сводятся к записи второго закона Ньютона для элемента жидкости.

Предположим для общности, что внутри жидкости действуют (кроме сил напряжения) объемные силы, т. е. нам задано векторное поле **Q** *(M, t),* выражающее в каждой точке и в каждый момент времени силу, действующую на элемент жидкости и отнесенную к единице ее массы.

Мы рассматривали до сих пор в случае течения жидкости лишь стационарные процессы, когда все изучаемые нами величины, например, вектор поля скоростей **a**, плотность **ρ**, аффинор напряжений $\mathfrak{F}$ и т. д. зависели лишь от точки *M,* в которой мы их рассматривали; теперь будем считать их, кроме того, и функциями времени:

$$\mathbf{a}(M,\ t),\ \rho(M,\ t),\ \mathfrak{F}(M,\ t)\ \text{и т. д.}$$

Полученные ранее выводы этим затронуты не будут, так как стационарность процесса мы предполагали лишь для простоты и по существу не использовали.

Сначала составим равнодействующую сил напряжения, действующих на замкнутую поверхность *S,* которая выделяет каким-либо образом часть нашей жидкой среды. Относительно поверхности *S* сохраняем прежние предположения; **n** направляем по внешней нормали.

Эта равнодействующая согласно (4.280) имеет вид

$$\mathbf{p} = \iint_S \mathfrak{F}\mathbf{n}\, dS.$$

Пользуясь теоремой Остроградского (4.300), этот результат можно переписать так:

$$\mathbf{p} = \iiint \operatorname{div} \mathfrak{F}\, d\omega, \tag{4.301}$$

где тройной интеграл берется по области, ограниченной поверхностью *S*.

Далее, составим равнодействующую объемных сил

$$\iiint \mathbf{Q}\rho\, d\omega. \tag{4.302}$$

Этот интеграл также берется по области, ограниченной поверхностью *S,* причем $d\omega$ — элемент объема, $\rho\, d\omega$ — элемент массы, а $\mathbf{Q}\rho\, d\omega$ — объемная сила, действующая на этот элемент массы.

Составим, наконец, равнодействующую сил инерции для жидкости, заключенной внутри *S.* Скорость каждой частицы жидкости выражается вектором **a** *(M, t)*, ускорение же ее будет выражаться вектором

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a},$$

где $\mathfrak{A}(M, t)$ — производный аффинор векторного поля **a** *(M, t)* (который составляется в каждый данный момент времени так же, как и в п. 4.18).

Действительно, прослеживая движение одной частицы жидкости, мы видим, что ее координаты x_i являются функциями от *t*, причем в каждой точке *M* и в каждый момент времени *t* скорость ее движения выражается вектором **a** *(M, t)*. Это можно записать так:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mathbf{a}(M, t),$$

или в проекциях на оси:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x_1, x_2, x_3, t). \tag{4.303}$$

Чтобы найти проекции ускорения, дифференцируем по *t* еще раз. Получаем:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \frac{\partial a_i}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial x_2}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial a_i}{\partial x_3}\cdot\frac{dx_3}{dt}.$$

Пользуясь формулами (4.210) и (4.303), получаем окончательно:

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial a_i}{\partial t} + a_{i1}a_1 + a_{i2}a_2 + a_{i3}a_3 = \frac{\partial a_i}{\partial t} + \sum_i a_{ij}a_j, \tag{4.304}$$

где a_{ij} — координаты производного аффинора A. Обозначая вектор ускорения $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}$, можно перейти теперь от координатной записи к векторной:

$$\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a}. \tag{4.305}$$

Умножая ускорение на элемент массы *ρ dω*, интегрируя по области, ограниченной *S*, и беря результат с обратным знаком, мы получаем равнодействующую сил инерциим

$$-\iiint\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a}\right)\rho\, d\omega. \tag{4.306}$$

Сумма всех сил, действующих на рассматриваемую часть жидкости, включая силы инерции, должна равняться нулю. Складывая выражения (4.301), (4.302), (4.306) и приравнивая результат нулю, получаем:

$$\iiint \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F} + \mathbf{Q} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} - \mathfrak{A}\mathbf{a} \right) \rho \, d\omega = 0. \tag{4.307}$$

Так как этот тройной интеграл равен нулю для любой области, вырезанной в нашей жидкой среде, то подынтегральное выражение должно равняться нулю тождественно. Мы получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a} = \mathbf{Q} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathfrak{F}. \tag{4.308}$$

При этом, пользуясь формулами (4.298) и (4.272), мы можем вычислить координаты вектора $\operatorname{div} \mathfrak{F}$:

$$[\operatorname{div} \mathfrak{F}]_i = \sum_i \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j} =$$

$$= \mu \sum_j \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{2\mu}{3} \sum_j \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_j} \delta_{ij} - \sum_j \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \Delta$$

есть *оператор Лапласа,* то первый член дает $\mu\Delta a_i$; во втором члене операцию $\frac{\partial}{\partial x_i}$ можно вынести за знак суммы, а сумма дает тогда div **a**; в последних двух слагаемых от суммы фактически остается по одному члену, именно, тому, где $j=i$ (остальные обращаются в нуль). Окончательно получим:

$$[\operatorname{div} \mathfrak{F}]_i = \mu\Delta a_i + \mu \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{2\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i} =$$

$$= \mu\Delta a_i + \frac{\mu}{3} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{a}}{\partial x_i} - \frac{\partial p}{\partial x_i}. \tag{4.309}$$

В векторной форме это же равенство принимает вид

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \mu\Delta\mathbf{a} + \frac{\mu}{3} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \mathbf{a} - \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p. \tag{4.310}$$

Подставляя полученное выражение в (4.308), имеем окончательно:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathfrak{A}\mathbf{a} = \mathbf{Q} + \frac{\mu}{\rho} \Delta\mathbf{a} + \frac{\mu}{3\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \mathbf{a} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, p. \tag{4.311}$$

Это *уравнение Навье-Стокса* в инвариантной форме. Здесь фигурируют неизвестные функции $\mathbf{a}(M, t)$, $\rho(M, t)$ и $p(M, t)$.

Производный аффинор A самостоятельного значения не имеет — его координаты выражаются через координаты **а** *(M,t)* по формулам (4.210):

$$a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}.$$

Следует отметить еще, что оператор Лапласа Δ (в применении к скалярному или векторному полю безразлично) носит инвариантный характер. Действительно,

$$\Delta a = \sum_i \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}$, полученного двойным дифференцированием скалярного поля *a* (x_1, x_2, x_3), и, следовательно, представляет собой инвариант. Аналогично

$$\Delta a_k = \sum_i \frac{\partial^2 a_k (x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i \partial x_i}$$

есть результат свертывания тензора $\nabla_i \nabla_j a_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j}$ по индексам *i* и *j* и представляет собой, следовательно, снова тензор. Тем самым вектор Δ**a**, обладающий координатами Δa_k, будет *инвариантно определенным вектором.*

К уравнению (4.311) нужно присоединить так называемое уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{a}) = 0, \tag{4.312}$$

выражающее закон сохранения массы.

4.27. Дифференциальные уравнения теории упругости в перемещениях

Мы будем рассматривать малые колебания однородного изотропного упругого тела под действием объемных сил, которые (аналогично п.4.26) заданы переменным векторным полем **Q** *(M, t)*. Вектор **Q** выражает объемную силу, отнесенную к единице массы, в данной точке *M* и в данный момент времени *t.* Искомым является переменное векторное поле **w** *(M, t)*, выражающее перемещение каждой точки упругого тела (сравнительно с положением равновесия) в каждый момент времени. Мы не будем ставить задачу в полном виде и ограничимся инвариантной записью дифференциальных уравнений, накладываемых на **w** *(M, t)*.

Тензор деформаций выражается формулой (4.240):

$$\tilde{b}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right), \tag{4.313}$$

а тензор напряжений — согласно (4.257):

$$f_{ij} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\tilde{b}_{ij}, \qquad \theta = \sum_i \tilde{b}_{ii}. \tag{4.314}$$

Выделим из упругого тела произвольный кусок ω, ограниченный некоторой поверхностью *S*. Подсчитаем равнодействующую **p** сил напряжения, действующих на ω через его поверхность *S*.

Аналогично (4.301) получаем:

$$\mathbf{p} = \iiint_\omega \overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} \cdot d\omega, \tag{4.315}$$

где $\mathfrak{F}$ — аффинор напряжений, координаты которого имеют вид (4.314). Далее, равнодействующая объемных сил тоже аналогично (4.302) имеет вид

$$\iiint_\omega \mathbf{Q}\rho\, d\omega, \tag{4.316}$$

где ρ — плотность упругого тела.

Заметим, что ввиду малости перемещений **w** мы позволяем себе брать все интегралы по той области ω, которую занимает выделенный кусок упругого тела в состоянии равновесия (а не по той переменной области, которую он занимает в процессе колебаний).

По той же причине считаем, что плотность ρ не меняется в процессе колебаний.

Теперь составим равнодействующую сил инерции:

$$-\iiint_\omega \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}\, d\omega. \tag{4.317}$$

Действительно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}(M,\, t)}{\partial t^2}$$

выражает в момент времени *t* ускорение точки, которая в положении равновесия совпадала с *M,* а ρ *d*ω дает элемент массы. Равнодействующая всех сил, действующих на ω, должна равняться нулю. Складывая выражения (4.315), (4.316) и (4.317) и приравнивая нулю, получаем:

$$\iiint_\omega \left(\overrightarrow{\operatorname{div}}\, \mathfrak{F} + \mathbf{Q}\rho - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) d\omega = 0.$$

Поскольку равен нулю интеграл, взятый в любой момент времени по *любому куску* ω нашего упругого тела, то это значит, что подынтегральная функция в любой момент времени и в любой точке равна нулю. Поделив на ρ, получаем:

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\mathfrak{F}+\mathbf{Q}-\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=0. \tag{4.318}$$

Пользуясь формулами (4.298) и (4.314), вычисляем координаты $\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}$:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i=\sum_j\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_j}=\sum_j\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\delta_{ij}+\sum_j 2\mu\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_j}.$$

Так как δ_{ij}, равно 1, если $i=j$, и 0, если $i\neq j$, то в первой из двух сумм остается лишь один член $\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$; во второй сумме производим замену, используя формулу (4.313). Получим:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i=\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\sum_j\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2}+\mu\sum_j\frac{\partial^2 w_j}{\partial x_j\partial x_i}. \tag{4.319}$$

Согласно (4.314), (4.313)

$$\theta=\sum_i b_{ii}=\sum_i\frac{\partial w_i}{\partial x_i}=\operatorname{div}\mathbf{w} \tag{4.320}$$

Поэтому последний член в (4.319) равен $\mu\frac{\partial\theta}{\partial x_i}$, так что окончательно можно написать:

$$\{\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}\}_i=(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}+\mu\Delta w_i. \tag{4.321}$$

Отсюда, возвращаясь к векторной записи, получаем:

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}\,\mathfrak{F}=(\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta+\mu\,\Delta\mathbf{w}. \tag{4.322}$$

Вставляя это выражение в (4.318), получаем *дифференциальные уравнения упругих колебаний в перемещениях (Ламе),* записанные в инвариантной форме:

$$\frac{1}{\rho}(\lambda+\mu)\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\theta+\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{w}+\mathbf{Q}-\frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2}=0,\ \text{где}\ \theta=\operatorname{div}\mathbf{w}. \tag{4.323}$$

Таким образом, неизвестной функцией является здесь лишь **w** *(M, t)*. Функция **Q** *(M, t)* и константа ρ предполагаются заданными. Кроме дифференциального уравнения на искомую функцию **w** накладываются обычно граничные и начальные условия.

5. Евклидово информационное пространство

5.1. Понятие об евклидовом информационном пространстве

Мы уже говорили о том, что аффинное информационное пространство может быть построено на основе евклидового путем отвлечения от метрических свойств информационного пространства. Но мы пошли обратным путем: аффинное информационное пространство мы построили на основе самостоятельной аксиоматики, а переход к евклидовому информационному пространству осуществим путем дополнительного включения метрических свойств. Это проще всего сделать, введя в n-мерном аффинном информационном пространстве *скалярное произведение* векторов, что повлечет за собой и все другие метрические свойства и будет означать превращение нашего информационного пространства в евклидово.

Для этой цели зададимся в n-мерном аффинном информационном пространстве некоторой билинейной скалярной функцией $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ двух векторных аргументов **x**, **y**. Мы потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла *условию симметрии*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tag{5.1}$$

и *условию невырожденности,* которое заключается в том, что *для каждого вектора* $\mathbf{x}\neq 0$ *можно найти такой вектор* **y**, *что*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0. \tag{5.2}$$

В остальном функцию $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ мы выбираем произвольно, но затем уже раз и навсегда присваиваем ее нашему информационному пространству и в дальнейшем менять не будем.

Евклидовым информационным пространством n измерений мы будем называть n-мерное аффинное информационное пространство, в котором задана раз и навсегда фиксированная билинейная скалярная функция двух векторных аргументов **x**, **y**, *удовлетворяющая условиям симметрии и невырожденности.*

Эту функцию векторов **x**, **y** мы будем называть их *скалярным произведением* и обозначать просто **xy** или (**x**,**y**) (вместо $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$). *Скалярный квадрат* вектора **x** определяется формулой

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}\mathbf{x}. \tag{5.3}$$

Два вектора **x**, **y** будут называться *ортогональными,* если их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}=0. \tag{5.4}$$

Длиной вектора **x** мы будем называть $\sqrt{\mathbf{x}^2}$ и обозначать ее будем $|\mathbf{x}|$:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2}. \tag{5.5}$$

Расстоянием между двумя точками *A, B* мы будем называть длину вектора $\vec{AB}$:

$$AB=\sqrt{\mathbf{x}^2},\ \text{где } \mathbf{x} = \vec{AB}. \tag{5.6}$$

Вообще, как мы увидим, из факта существования скалярного произведения векторов можно вывести метрические свойства *n*-мерного евклидова информационного пространства, причем в одном частном случае мы получим в точности обычное информационное пространство.

Скалярное произведение, как и всякая билинейная функция двух векторов, обладает свойствами

$$(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x_2}, \mathbf{y}), \qquad (\alpha\mathbf{x},\mathbf{y}) = \alpha\,(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

которыми мы будем широко пользоваться. Относительно второго аргумента оно обладает такими же свойствами.

Евклидовы информационные пространства распадаются на два больших класса: *вещественные и комплексные.* В самом деле, евклидово информационное пространство можно строить как на базе *вещественного* аффинного информационного пространства, так и *комплексного.* Соответствующие обозначения: R_n и R^+_n, где *n*-размерность.

В первом случае мы сохраняем прежнее соглашение, по которому в теории вещественного аффинного информационного пространства все рассматриваемые числа считаются вещественными. В частности, и скалярное произведение **xy** двух векторов **x, y**, как мы будем подразумевать, принимает лишь вещественные численные значения. Полученное при этом евклидово информационное пространство также будет называться *вещественным. Вещественные евклидовы информационные пространства* в свою очередь разделяются на два класса: *собственно евклидовы,* в которых для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$:

$$\mathbf{x}^2>0, \tag{5.7}$$

и *псевдоевклидовы,* в которых $\mathbf{x}^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Собственно евклидовы информационные пространства по своей природе вполне аналогичны обычному информационному пространству и отличаются от него лишь числом измерений: при $n = 3$ мы получаем в точности обычную информационную стереометрию, равно как при $n = 2$ — обычную информационную планиметрию, а при *n*— 1 — информационную геометрию на обычной прямой.

Псевдоевклидовы информационные пространства по характеру своей метрики обладают весьма своеобразными чертами, не имеющими аналогов в обычной геометрии. Укажем уже сейчас, что, хотя подкоренное выражение $\mathbf{x}^2$ в (5.5) и вещественное, но может принимать в псевдоевклидовом случае и положительные, и отрицательные, и нулевые значения, а значит, *длина вектора* $|\mathbf{x}|$ *может быть и вещественной, и чисто мнимой, и нулем.* Мы условимся в первом случае брать $|\mathbf{x}|$ положительной, а во втором случае — с положительным коэффициентом при i. Тогда умножение вектора $\mathbf{x}$ па *положительное* число означает умножение $|\ \mathbf{x}\ |$ на то же число. Таким образом, отрезки *АВ* в псевдоевклидовом информационном пространстве будут трех сортов: *вещественной, чисто мнимой и нулевой* длины (причем последний случай, как мы увидим, возможен и без совпадения точек *А, В).* Заметим, что наличие мнимых длин (расстояний) в псевдоевклидовом информационном пространстве будет являться *единственным* нарушением нашего общего соглашения о том, что в вещественном информационном пространстве рассматриваются лишь вещественные численные значения.

Псевдоевклидово информационное пространство играет основную роль в теории относительности, причем разнотипность отрезков вещественной и чисто мнимой длины отражает разнотипность пространственных и временных «расстояний».

При данном числе измерений п собственно евклидово информационное пространство будет по существу *единственным,* т. е. все другие будут с ним изоморфны. Напротив, псевдоевклидовых информационных пространств будет целых n, различных по своим свойствам.

Во втором, комплексном, случае евклидово информационное пространство строится на базе *комплексного* аффинного информационного пространства. Рассматриваемые числа считаются комплексными, причем тогда, конечно, и функция $\mathbf{xy}$ принимает комплексные значения; евклидово информационное пространство называется в этом случае *комплексным.* Расстояния *АВ* будут комплексными числами (определенными с точностью до знака). Комплексное евклидово информационное пространство при данном числе измерений n будет, как мы увидим, единственным (с точностью до изоморфизма).

Возвращаемся к общему случаю. Вообще задание билинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ равносильно, как мы знаем, заданию дважды ковариантного тензора φ_{ij} ее коэффициентов

$$\varphi_{ij}=\varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \quad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi_{ij}x^i x^j.$$

В частности, в случае скалярного произведения $\mathbf{xy}$ тензор коэффициентов мы будем обозначать g_{ij} и называть *метрическим тензором.*

нашего евклидова информационного пространства. Тогда соответственно

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j, \tag{5.8}$$

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^ix^j. \tag{5.9}$$

Координаты метрического тензора представляют собой, таким образом, попарные скалярные произведения векторов репера. В частности, в случае **y** = **x** мы получаем скалярный квадрат вектора **x**, который выражается *квадратичной формой*

$$\mathbf{x}^2 = g_{ij}x^ix^j. \tag{5.10}$$

Условие *симметрии,* наложенное нами на скалярное произведение

$$\mathbf{xy}=\mathbf{yx},$$

равносильно, как мы знаем, симметричности тензора коэффициентов, в данном случае

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{5.11}$$

Условие *невырожденности*, как оно было нами сформулировано, заключается в том, что для каждого вектора **x** ≠ 0 найдется неортогональный ему вектор **y**, т. е. *не существует векторов* **x**≠ 0, *ортогональных ко всем векторам пространства.*

Если допустить, что это условие не соблюдается (т. е., как мы будем говорить, происходит вырождение метрики), то существует такой вектор **x**≠0, что

$$\mathbf{xy} = 0 \tag{5.12}$$

при любом **y**; или в координатной записи:

$$g_{ij}x^iy^j=0 \tag{5.13}$$

при любых $y^1, . . . y^n$. Это значит, что коэффициенты при y^j должны по отдельности обращаться в нуль:

$$g_{ij}x^i=0. \tag{5.14}$$

Так как **x** ≠ 0 и, значит, все x^i одновременно в нуль не обращаются, то система *n* однородных линейных уравнений (5.14) с *n* неизвестными x^i имеет ненулевые решения, а значит,

$$\mathrm{Det}|g_{ij}| =0. \tag{5.15}$$

Обратно, если имеет место последнее равенство, то можно найти ненулевое решение $x^1, ... , x^n$ системы (5.14), для которого, очевидно, при любых $y^1,..., y^n$ имеет место (5.13). В результате вектор **x** будет ортогонален ко всем **y**, и происходит вырождение метрики.

Итак, для вырождения метрики необходимо и достаточно обращение в нуль $\mathrm{Det}|g_{ij}|$.

Тем самым условие невырожденности равносильно условию

$$\mathrm{Det}|g_{ij}| \neq 0. \tag{5.16}$$

Мы можем теперь резюмировать: *внесение в n-мерное аффинное информационное пространство операции скалярного умножения векторов равносильно заданию в нем метрического тензора* g_{ij}, *удовлетворяющего условиям симметрии* (5.11) *и невырожденности* (5.16) (а в остальном выбранного произвольно).

Заметим, что достаточно потребовать соблюдения условия (5.16) в *одной* координатной системе; из нашего рассуждения видно, что отсюда следует невырожденность скалярного произведения, а тем самым соблюдение условия (5.16) в *любой* координатной системе.
Это нетрудно проверить и прямой выкладкой. В самом деле, закон преобразования g_{ij} имеет вид

$$g_{i'j'}= A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}.$$

Если считать номером строки в матрицах g_{ij}, $g_{i'j'}$ первый индекс, в матрице g_{ij}— нижний индекс, а в матрице $A^i_{i'}$ — верхний индекс, то можно сказать, что матрица $\| g_{i'j'}\|$ получена умножением матриц $\| A^i_{i'} \|$, $\| g_{ij} \|$, $\| A^j_{j'}\|$ в порядке их записи. Но отсюда следует, что определители матриц также перемножаются, причем определители матриц $\| A^i_{i'} \|$, $\| A^j_{j'}\|$ равны. В результате

$$\mathrm{Det}\, | g_{i'j'}|= (\mathrm{Det}\, | A^i_{i'}|)^2 \cdot \mathrm{Det}\, | g_{ij} |. \qquad (5.17)$$

Другими словами, Det | g_{ij} | *есть относительный инвариант веса* 2. Ясно, что обращение его в нуль (или, наоборот, неравенство нулю) *в одной координатной системе* влечет тот же самый результат *в любой координатной системе.*

5.2. Тензорная алгебра в евклидовом информационном пространстве

Все, что было сказано о тензорных операциях в аффинном информационном пространстве, остается верным и для евклидова информационном пространства. При этом появляется, однако, и кое-что новое, а именно, исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами и возникает возможность переводить одни в другие.

Составим прежде всего в каждой координатной системе матрицу величин g^{ij} обратную матрице координат g_{ij} метрического тензора. В силу условия невырожденности обратная матрица существует, а в силу условия симметрии будет симметрической вместе с матрицей g_{ij}.
Можно утверждать, что величины g^{ij} образуют дважды контравариантный тензор, т. е. преобразуются по закону

$$g^{i'j'}= A^{i'}_i A^{j'}_j g^{ij}. \qquad (5.18)$$

Проще всего показать это, обратив постановку вопроса: построим матрицу g^{ij}, обратную матрице g_{ij}, *в одной координатной системе;* затем, переходя к любой другой (штрихованной) координатной системе, преобразуем g^{ij} по закону (5.18) и покажем, что полученная при этом матрица $g^{i'j'}$ будет обратной матрице $g_{i'j'}$. Тот факт, что g^{ij} есть матрица, обратная g_{ij}, мы запишем уравнениями

$$g^{ij}g_{jk}=\delta^i_k, \qquad (5.19)$$

выражающими, что произведение наших матриц дает единичную матрицу. При переходе в новую координатную систему мы учтем, что g_{jk} — координаты дважды ковариантного тензора, g^{ij} мы условились преобразовывать как координаты дважды контравариантного тензора, а значит, у нас записано, что результат свертывания двух этих тензоров по индексу j дает единичный тензор δ^i_k . Соотношения (5.19) имеют, таким образом, инвариантный характер, так что в новой координатной системе получаем снова

$$g^{i'j'}g_{j'k'}=\delta^{i'}_{k'},$$

а это показывает, что матрица $g^{i'j'}$ полученная преобразованием (5.18), действительно оказывается обратной матрице $g_{i'j'}$.

Дважды контравариантный тензор g^{ij} мы тоже будем называть метрическим тензором, но, в отличие от g_{ij}, контравариантный.

Теперь покажем, как в евклидовом информационном пространстве каждый контравариантный индекс можно «переделать» в ковариантный, и обратно. Начнем с одновалентного контравариантного тензора x^i. Путем свертывания с метрическим тензором его можно «переделать» в ковариантный тензор:

$$x_i = g_{ij}x^j. \qquad (5.20)$$

Поскольку метрический тензор евклидова информационного пространства задан раз и навсегда, то эта операция *«опускания индекса»* у тензора x^i определена однозначно.

Обратно, любой одновалентный ковариантный тензор x_j можно «переделать» в контравариантный путем свертывания с контравариантным метрическим тензором:

$$x^i = g^{ij}x_j. \qquad (5.21)$$

Эта операция *«поднятия индекса»* также однозначно определена. С алгебраической точки зрения опускание индекса представляет собой линейное преобразование x^i в x_i при помощи матрицы g_{ij}, а поднятие индекса — преобразование x_i в x^i при помощи матрицы g^{ij}. Так как матрицы g_{ij} и g^{ij} взаимно обратные, то операции опускания и поднятия индекса взаимно уничтожают друг друга. Так, например, сначала «опустив» и затем «подняв» индекс у x^i, мы возвращаемся *к прежнему* контравариантному тензору x^i.

Координаты контравариантного тензора x^i, как мы знаем, всегда можно истолковать как координаты некоторого нектора

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i. \qquad (5.22)$$

Спрашивается, какое отношение к вектору **x** имеет тензор x_i , полученный из тензора x^i опусканием индекса, На этот вопрос легко ответить, пользуясь (5.8) и переписав (5.20) в виде

$x_i= g_{ij} x^j=(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j) x^j =(\mathbf{e}_i, x^j\mathbf{e}_j),$

т. е. окончательно

$$x_i =\mathbf{x}\mathbf{e}_i. \qquad (5.23)$$

Итак, опускание индекса у координат x^i вектора **x** *приводит нас к скалярным произведениям этого вектора на векторы репера. Эти скалярные произведения мы будем называть ковариантными координатами x_i вектора* **x**.

Очевидно, ковариантные координаты x_i однозначно определяются по вектору **x**, как и обратно, по ним можно однозначно определить этот вектор, перейдя предварительно к контравариантным координатам x^i поднятием индекса.

По той же схеме (5.20) и (5.21) производятся опускание и поднятие индекса (любого по выбору) у многовалентных тензоров. Единственное, что к этому нужно добавить,— это необходимость изменить нумерацию индексов у тензора в евклидовом информационном пространстве. В самом деле, индексы тензора отличались друг от друга: контравариантные — порядком их записи наверху, а ковариантные—внизу. Но если мы, например, второй верхний индекс опускаем, то нельзя дать общего правила, на какое место его следует ставить внизу (второе место внизу может быть уже занято или внизу может и совсем не быть индексов).

Чтобы избежать связанной с этим неопределенности в обозначениях, мы часто будем *нумеровать места индексов верхних и нижних в совокупности,* так что каждому номеру отвечает лишь один индекс, стоящий или наверху или внизу. Если например, 3-й индекс стоит наверху, то третье место внизу остается «пустым», что отмечается точкой, и наоборот. Например, $a^{..k.}{}_{ij.l}$ обозначает тензор, у которого 1-й и 2-й индексы ковариантные, 3-й — контравариантный, 4-й — снова ковариантный. Если 1-й индекс мы захотим «поднять», то для него заготовлено свободное место наверху, и мы получаем:

$$a^{i.k}{}_{.j.l} = g^{ip}\, a^{..k}{}_{pj.l}. \qquad (5.24)$$

Аналогично, если мы захотим опустить верхний индекс, то получим:

$$a^{....}{}_{ijkl}=g_{kp}a^{..p}{}_{ij.l}. \qquad (5.25)$$

Отметим важный пример: поднятие одного, например 2-го, индекса у g_{ij} дает единичный тензор:

$$g^{\,.j}{}_{i.} =g^{jp}g_{ip}=\delta^j{}_i \qquad (5.26)$$

для которого мы сохраняем прежнее обозначение.

Если мы теперь поднимаем и нижний индекс, то получим:

$$g^{jp}\, \delta^j{}_p=g^{ij},$$

так как при суммировании уцелеет лишь один член, для которого $p=j$. Итак, поднимая оба индекса у метрического тензора, мы получаем контравариантный метрический тензор.

Еще один пример: пусть аффинор **y** = $\mathcal{A}$**x** задан посредством тензора a^i_j, или, как мы теперь будем писать, $a^{i\cdot}_{\cdot j}$, считая верхний индекс первым, а нижний — вторым. Тогда $y^i = a^{i\cdot}_{\cdot j}x^j$. Опуская индекс i, получаем:

$$y_i=a_{ij}x^j, \quad \text{где} \quad a_{ij} = g_{ip}a^{p\cdot}_{\cdot j}. \tag{5.27}$$

Таким образом, аффинор $\mathcal{A}$ можно задать и дважды ковариантным тензором a_{ij}, причем его координаты образуют матрицу преобразования *контравариантных* координат вектора-аргумента в *ковариантные* координаты вектора-функции. В частности, аффинор $\mathcal{A}$ называется *симметрическим* или *кососимметрическим* в случае симметричности и кососимметричности тензора a_{ij}. Следует подчеркнуть, что эти определения могут быть формулированы лишь в евклидовом информационном пространстве и не имеют никакого смысла в аффинном информационном пространстве, где опускание индексов невозможно. Это относится и к понятию ковариантных координат вектора.

5.3. Плоскости в *n*-мерном евклидовом информационном пространстве

Мы понимаем под *m*-мерной плоскостью в *n*-мерном евклидовом информационном пространстве то же самое, что и в *n*-мерном аффинном информационном пространстве (на базе которого евклидово информационное пространство построено). Нам известно, что такая *m*-мерная плоскость сама является *n*-мерным аффинным информационным пространством. Но теперь на ней (как и во всем вмещающем информационном пространстве) определено скалярное произведение **xy** для любых двух векторов **x, y**. Казалось бы, можно утверждать, что плоскость евклидова информационного пространства тоже представляет собой евклидово информационное пространство меньшего числа измерений. Однако это не всегда верно. Может случиться, что скалярное произведение на данной *m*-мерной плоскости *не удовлетворяет условию невырожденности* (хотя во вмещающем информационном пространстве это условие и удовлетворяется). Другими словами, возможно, что на данной плоскости найдется вектор **x**≠0, ортогональный *ко всем векторам этой плоскости,* но не ко всем векторам информационного пространства. В этом случае метрику на плоскости мы будем называть *вырожденной,* а соответствующую плоскость с такой метрикой будем называть *изотропной.*

Изотропную плоскость мы за евклидово информационное пространство не признаем ввиду того, что в определение последнего входит условие невырожденности; здесь же оно нарушено.

Очевидно, все остальные свойства скалярного произведения в *n*-мерном информационном пространстве имеют место и на любой плоскости этого информационного пространства.

Забегая вперед, следует сказать, что изотропные плоскости представляют собой исключение; как правило, плоскости являются неизотропными, т. е. несут на себе невырожденную метрику, и, следовательно, по своей геометрии являются евклидовыми информационными пространствами соответствующего числа измерений. Кроме того, в случае *собственно евклидова* информационного пространства вообще не существует изотропных плоскостей; в частности, их нет в обычном пространстве, в связи с чем нам трудно дается наглядное представление об этих плоскостях.

Чтобы показать, что в собственно евклидовом информационном пространстве все плоскости неизотропные, рассмотрим какую-нибудь *m*-мерную плоскость; на ней, как и во всем пространстве, соблюдается условие (5.7):

$$\mathbf{x}^2 > 0, \quad \text{если} \quad \mathbf{x}\neq 0. \qquad (5.28)$$

А в этом случае на плоскости невозможен вектор $\mathbf{x}\neq 0$, ортогональный ко всем векторам плоскости, так как такой вектор был бы ортогонален, в частности, и к себе и мы в противоречие с условием (5.28) имели бы

$$\mathbf{x}^2 = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{x}\neq 0. \qquad (5.29)$$

Вектор $\mathbf{x}\neq 0$, для которого $\mathbf{x}^2 = 0$ и который, следовательно, ортогонален к самому себе, называется *изотропным.* В собственно евклидовых информационных пространствах такие векторы, как мы только что сейчас видели, невозможны, зато в псевдоевклидовых и комплексных евклидовых информационных пространствах они встречаются обязательно.

Пусть *m*-мерная плоскость задана начальной точкой O^* и направлющими векторами $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$. Принимая эти векторы за векторы аффиного репера в плоскости, составим их скалярные произведения:

$$g^*_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (\alpha, \beta=1, 2.....m). \qquad (5.30)$$

И соответствии с (5.8) $g^*_{\alpha\beta}$ можно принять за координаты метрического тензора на нашей плоскости, если только соблюдается условие невырожденности (5.16):

$$\mathrm{Det}\,|\,g^*_{\alpha\beta}\,| \neq 0. \qquad (5.31)$$

В этом случае плоскость *неизотропная* и несет на себе евклидову геометрию с метрическим тензором (5.30). Если же оказывается

$$\mathrm{Det}\,|\, g^*_{\alpha\beta}\,| = 0, \qquad (5.32)$$

то плоскость будет *изотропной* и несет на себе вырожденную метрику.

Пусть теперь у нас имеется прямая линия с направляющим вектором $\mathbf{a}(a^1, ..., a^n) \neq 0$. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}(x^1, ...,x^n)$, ортогональных к данной прямой, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Очевидно, для этого достаточно, чтобы векторы **x** были ортогональны к **a**:

$$\mathbf{ax} = 0, \qquad (5.33)$$

т. е.

$$g_{ij}a^i x^j = 0.$$

Обозначая через a_i ковариантные координаты вектора **a** и пользуясь (5.20) (в применении к a^i), можно записать:

$$a_j x^j = 0. \qquad (5.34)$$

Таким образом, координаты x^j векторов **x** должны удовлетворять линейному уравнению (5.34). Откладывая векторы **x** от начала *О,* мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют *гиперплоскость* с уравнением (5.34), проходящую через начало *О*. *Все векторы этой гиперплоскости, очевидно, ортогональны ко всем векторам данной прямой; такую гиперплоскость мы будем называть ортогональной к данной прямой.*

Итак, через точку *О* (и совершенно так же через любую заданную точку) всегда можно провести гиперплоскость, ортогональную к данной прямой, и притом единственным образом. При этом нужно различать *основной случай,* когда данная прямая *неизотропная,* т. е. $\mathbf{a}^2 \neq 0$, и *исключительный случай,* когда она *изотропная.* т. е. $\mathbf{a}^2 = 0$. (Мы использовали условия (5.31) и (5.32), записанные для «одномерной плоскости», *т* — 1.) Будем для простоты рассматривать прямую и ортогональную к ней гиперплоскость, проходящие через общую точку *О.*

В первом случае прямая линия не лежит в ортогональной к ней гиперплоскости, что, конечно, представляется само собой разумеющимся. Действительно, вектор **a** не может лежать в гиперплоскости, построенной согласно (5.33), так как иначе он был бы ортогонален самому себе, а это невозможно в силу $\mathbf{a}^2\neq 0$. Таким образом, вектор **a** будет линейно независимым от n—1 направляющих векторов гиперплоскости $b_1,...,b_{n-1}$, а следовательно, все эти векторы в совокупности

$$\mathbf{a},\ \mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_{n-1} \qquad (5.35)$$

можно принять за векторы аффинного репера в пространстве. Далее, наша гиперплоскость сама будет неизотропной: если допустить противное, то в гиперплоскости найдется вектор $\mathbf{x}\neq 0$, ортогональный ко всем векторам гиперплоскости, в частности, к направляющим векторам $\mathbf{b}_1,...,\mathbf{b}_{n-1}$. Но, кроме того, вектор $\mathbf{x}$, как лежащий в нашей гиперплоскости, будет ортогонален и к $\mathbf{a}$, т. е. ко всем векторам репера (5.35), а тем самым и ко всем векторам пространства. Но это невозможно в силу условия невырожденности.

Итак, *если данная прямая неизотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже неизотропная и не содержит данной прямой (даже при наличии у них общей точки). При этом всегда можно построить репер* (5.35)*, один вектор которого принадлежит прямой, а остальные n—1 векторов ему ортогональны и принадлежат гиперплоскости.*

Во втором случае, когда данная прямая изотропная, ее направляющий вектор $\mathbf{a}$ входит в число векторов $\mathbf{x}$, к нему ортогональных (в силу $\mathbf{a}^2 = 0$), и принадлежит тем самым ортогональной гиперплоскости. Поэтому, если изотропная прямая и ортогональная к ней гиперплоскость проведены через общую точку *О,* то вместе с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и сама прямая принадлежит гиперплоскости. Кроме того, гиперплоскость тоже оказывается изотропной, так как содержит вектор $\mathbf{a}$, ортогональвый ко всем ее векторам.

Итак, если данная прямая изотропная, то ортогональная ей гиперплоскость тоже изотропная и при наличии общей точки проходит через данную прямую.

Эта картина резко противоречит нашим привычным представлениям, воспитанным на обычной (т. е. трехмерной, собственно евклидовой) геометрии. Мы получаем здесь первое серьезное предупреждение о непригодности наших привычных представлений в области псевдоевклидовой (и комплексной евклидовой) геометрии. Правда, это относится лишь к метрическим свойствам пространства; в области аффинных свойств разницы нет, так как все типы евклидовых пространств строятся на базе одного и того же (вещественного или комплексного) аффинного пространства.

То, что было сейчас сделано для прямой линии («одномерной плоскости»), нетрудно повторить и для любой m-мерной плоскости. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m$ — направляющие векторы этой плоскости. Рассмотрим совокупность всех векторов $\mathbf{x}$, ортогональных к нашей плоскости, т. е. ортогональных ко всем ее векторам. Но для этого достаточно, чтобы векторы $\mathbf{x}$ были ортогональны к ее направляющим векторам, т. е.

$$\mathbf{a}_1\mathbf{x} = 0,\ \mathbf{a}_2\mathbf{x} = 0,\ ...,\ \mathbf{a}_m\mathbf{x} = 0, \tag{5.36}$$

Запишем эти соотношения аналогично (5.34):

$$a_{(1)j}x^j = 0, \quad a_{(2)j}x^j = 0, \ldots, a_{(m)j}x^j = 0, \qquad (5.37)$$

где индексы в скобках обозначают номера соответствующих векторов. Уравнения (5.37) линейно независимы, так как в противном случае имелась бы линейная зависимость между векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, ковариантиые координаты которых служат коэффициентами уравнений, а это невозможно, так как направляющие векторы всегда берутся линейно независимыми. Откладывая векторы **x** от начала *O*, мы видим, что концы их (обладающие теми же координатами x^j) образуют n —m-мерную плоскость. В самом деле, m линейно независимых уравнений (5.37) всегда можно переписать в виде, разрешенном относительно m переменных, а такая система уравнений определяет n — m-мерную плоскость.

Каждый вектор этой n — m-мерной плоскости ортогонален к каждому вектору у исходной m -мерной плоскости; такие плоскости мы будем называть *ортогональными между собой.*

Итак, через начало O (как и вообще через любую точку) проходит одна и только одна n—m-мерная плоскость, ортогональная к данной m-мерной плоскости. Будем считать для простоты, что обе эти плоскости имеют общую точку *O*.

Здесь имеются две возможности. Если *m-мерная плоскость — неизотропная, то n — m-мерная плоскость — тоже неизотропная; между собой эти плоскости не пересекаются* (то есть не имеют общих точек кроме *O*), *и их направляющие векторы*

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m & (\text{для } m\text{-мерной плоскости}), \\ \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m} & (\text{для } n - m\text{-мерной плоскости}) \end{array}\right\} \qquad (5.38)$$

можно принять в совокупности за векторы пространственного репера.

Если же m-мерная плоскость — изотропная, то n — m-мерная плоскость тоже изотропная; эти плоскости пересекаются между собой, их направляющие векторы (в совокупности) линейно зависимы и, значит, не могут служить векторами пространственного репера.

Для доказательства этих утверждений разберем две возможности: случай непересечения и случай пересечения наших плоскостей.

В случае непересечения векторы (5.38) линейно независимы. В самом деле, если предположить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha^m\mathbf{a}_m + \beta^1\mathbf{b}_1 + \ldots + \beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m} = 0, \qquad (5.39)$$

то из нее вытекает существование не равного нулю вектора

$$\alpha^1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha^m\mathbf{a}_m = -\beta^1\mathbf{b}_1 - \ldots - \beta^{n-m}\mathbf{b}_{n-m}, \qquad (5.40)$$

общего для обеих плоскостей. Отсюда вытекает существование и общей прямой, а именно проходящей через общую точку O в направлении этого общего вектора, что противоречит непересечению наших плоскостей. Следовательно, векторы (5.38) линейно независимы, и их можно принять за векторы пространственного репера. Запишем для этого репера условие невырожденности (5.16):

$$\operatorname{Det}|g_{ij}| = \operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j| \neq 0. \tag{5.41}$$

В нашем случае

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m; \ \mathbf{e}_{m+1}, \ldots, \mathbf{e}_n = \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}, \tag{5.42}$$

причем векторы $\mathbf{a}_i$ и $\mathbf{b}^j$ ортогональны между собой (как принадлежащие ортогональным плоскостям). Матрица $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ имеет вид

$$\left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{a}_p\mathbf{a}_q & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{b}_r\mathbf{b}_s \end{array} \right\|, \tag{5.43}$$

а следовательно,

$$\operatorname{Det}|\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j| = \operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q| \cdot \operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s|, \tag{5.44}$$

и условие невырожденности (5.41) принимает вид

$$\operatorname{Det}|\mathbf{a}_p\mathbf{a}_q| \cdot \operatorname{Det}|\mathbf{b}_r\mathbf{b}_s| \neq 0. \tag{5.45}$$

Тем самым отличен от нуля и каждый из множителей, а значит (согласно (5.31)), обе плоскости неизотропные.

В случае пересечения, т. е. в случае существования у наших плоскостей, по крайней мере, одной общей прямой, ее направляющий вектор **c** также будет для них общим. Поэтому **c** можно разложить как по $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, так и по $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}$. Приравнивая эти разложения, получаем линейную зависимость между направляющими векторами обоих плоскостей в совокупности. Далее, так как вектор **c** принадлежит m-мерной плоскости, то он ортогонален к n—m-мерной плоскости, и наоборот, так как он принадлежит n—m-мерной плоскости, то ортогонален к m-мерной.

Итак, **c** принадлежит каждой из двух плоскостей и в то же время к ней ортогонален; отсюда вытекает, что каждая из плоскостей— изотропная.

В итоге из проведенного исследования случаев непересечения и пересечения видно, что первый имеет место тогда и только тогда, когда исходная m-мерная плоскость неизотропная, а второй — когда она изотропная. Этим наши утверждения доказаны.

5.4. Ортонормированный репер

В случае евклидова информационного пространства уже не все аффинные реперы равносильны по своим геометрическим свойствам, как это было к аффинном информационном пространстве. Среди них можно выделить теперь геометрически наиболее простые, так называемые *ортонормированньиг* реперы, которые в случае обычного пространства соответствуют прямоугольным декартовым координатам.

Нам понадобится следующая лемма: *в евклидовом информационном пространстве не могут быть изотропными все векторы,* т. е. не может быть, чтобы $\mathbf{x}^2 = 0$ при любом $\mathbf{x}$. Действительно, если это допустить, то, в частности,

$$\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}\right)^2 = 0, \quad \left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{2}\right)^2 = 0$$

при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Почленно вычитая из первого равенства второе, получим $\mathbf{xy} = 0$ при любых $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Оказывается, таким образом, что любой вектор ортогонален ко всем векторам, что противоречит условию невырожденности.

Мы начнем со случая n-мерного комплексного евклидова информационного пространства R_n^+. В силу леммы всегда можно найти неизотропный вектор $\mathbf{x}$, так что $\mathbf{x}^2 \neq 0$. Нормируем вектор $\mathbf{x}$, т. е. поделим его на его длину $\sqrt{\mathbf{x}^2}$. Это будет, вообще говоря, комплексное число, что нас не смущает, так как мы находимся в комплексном пространстве и имеем возможность умножать и делить на комплексные числа. Обозначим полученный вектор через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}}. \tag{5.46}$$

Очевидно,

$$\mathbf{e}_1^2 = \frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2} = 1, \tag{5.47}$$

т. е. скалярный квадрат вектора $\mathbf{e}_1$ равен единице. Такие векторы мы будем называть *единичными.*

Построим теперь гиперплоскость R_{n-1}^+, ортогональную к единичному вектору $\mathbf{e}_1$ и проходящую через фиксированную точку *O*. Гиперплоскость R_{n-1}^+, как ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_1$, сама будет неизотропной и несет на себе n—1-мерную (тоже комплексную) евклидову геометрию. Поэтому на гиперплоскости R_{n-1}^+ можно повторить наше построение, выбирая как-либо неизотропный вектор $\mathbf{y}$, нормируя его и получая второй единичный вектор $\mathbf{e}_2$. Обозначим далее R_{n-2}^+ гиперплоскость в R_{n-1}^+, ортогональную к $\mathbf{e}_2$ и проходящую через O. Гиперплоскость R_{n-2}^{+} в R_{n-1}^{+}, ортогональная к неизотропному вектору $\mathbf{e}_2$, сама будет неизотропной и несет на себе n — 2-мерную комплексную евклидову геометрию. Следовательно, на ней можно еще раз повторить то же самое, построив единичный вектор $\mathbf{e}_3$ и ортогональную к нему и проходящую через O гиперплоскость R_{n-3}^{+} и т. д. Процесс заканчивается на «одномерной плоскости» R_n^{+}, на которой мы берем какой-либо вектор $\mathbf{w}$ и, нормируя его, получаем единичный вектор $\mathbf{e}_n$. В итоге получаем последовательность вложенных друг в друга плоскостей убывающего числа измерений (начиная с самого пространства):

$$R_n^{+} \supset R_{n-1}^{+} \supset \ldots \supset R_2^{+} \supset R_1^{+} \qquad (5.48)$$

и последовательность единичных векторов:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n. \qquad (5.49)$$

При этом, как видно из построения, i-й вектор $\mathbf{e}_i$ принадлежит $R^{+}{}_{n-i+1}$ и ортогонален к $R^{+}{}_{n-i}$. Тем самым $\mathbf{e}_i$ ортогонален и ко всем последующим векторам $\mathbf{e}_{i+1}$, ..., $\mathbf{e}_n$, так как они принадлежат $R^{+}{}_{n-i}$, а так как i можно давать значения 1, 2, ...,n, то ясно, что все единичные векторы попарно ортогональны:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=0 \qquad (i\neq j)$$

кроме того,

$$\mathbf{e}_i^2=1.$$

Эти формулы можно объединить:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \qquad (5.50)$$

Векторы $\mathbf{e}_1$,.....,$\mathbf{e}_n$ будут линейно независимыми, что следует из способа их построения. Это легко обнаружить и непосредственно: если допустить линейную зависимость

$$\alpha^1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha^n\mathbf{e}_n = 0,$$

то, умножая левую часть скалярно на $\mathbf{e}_1$, получим (в силу (5.50)): $\alpha_1 = 0$.

Совершенно аналогично убедимся в исчезновении и всех других коэффициентов, т. е. предполагаемая линейная зависимость оказалась тождеством и, следовательно, не существует.

Мы можем принять теперь n единичных и взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e}_1$,.....,$\mathbf{e}_n$ за векторы некоторого репера $\{O, \mathbf{e}_1,....., \mathbf{e}_n\}$. Такой репер мы будем называть *ортонормированным,* а соответствующую ему координатную систему — *ортонормированной.* Векторы ортонормированного репера мы будем называть *ортами.*

В ортонормированной координатной системе происходит большое упрощение основных формул. Координаты метрического тензора приобретают вид

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \qquad (5.51)$$

Другими словами, матрица g_{ij} оказывается единичной; обратная ей матрица g^{ij} поэтому тоже будет единичной

$$g^{ij} = \delta^{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases} \qquad (5.52)$$

Исчезает разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора; действительно,

$$x_i = g_{ij}x^j = x^i, \qquad (5.53)$$

так как в процессе суммирования отличным от нуля окажется лишь член, где $j=i$, причем $g_{ii}=1$. На этом основании в ортонормиронанной системе мы будем пользоваться лишь одной записью координат вектора, именно x_i.

Скалярное произведение в координатной записи примет вид

$$\mathbf{xy} = g_{ij}x^iy^j = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n,$$

так как в сумме сохранятся лишь члены, где $i = j$, причем $g_{ii}=1$. В частности, скалярный квадрат запишется:

$$\mathbf{x}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2.$$

Пользуясь (5.53), запишем окончательно:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n. \qquad (5.54)$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \qquad (5.55)$$

Расстояние между точками A и B мы определяли по формуле (5.5). Если x_i — координаты точки A, а x'_i — координаты точки B, то вектор $\overrightarrow{AB}$ (как разность радиусов-векторов $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{OA}$) имеет координаты $x'_i - x_i$, так что

$$\overrightarrow{AB}^2 = (x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2, \qquad (5.56)$$

и следовательно,

$$AB = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + \ldots + (x'_n - x_n)^2}. \qquad (5.57)$$

Формулы эти обнаруживают близкое родство с формулами обычной векторной алгебры:

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \qquad (5.58)$$

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \qquad (5.59)$$

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2} \qquad (5.60)$$

и даже совпадают с ними в случае $n = 3$. Однако нужно помнить, что в обычном пространстве координаты вещественные, а у нас сейчас — комплексные.

Займемся теперь ортонормированным репером в вещественном евклидовом информационном пространстве R_n. Здесь мы также начинаем с выбора неизотропного вектора $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}^2 \neq 0$), всегда существующего согласно лемме. Однако мы не всегда можем пронормировать его согласно (5.46):

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2}} . \qquad (5.\ 61)$$

Это законно, если $\mathbf{x}^2 > 0$, причем, как и прежде, получаем:

$$\mathbf{e}_i^2 = 1. \qquad (5.62)$$

Если же $\mathbf{x}^2 < 0$, то знаменатель окажется чисто мнимым, и полученное выражение не имеет смысла, так как умножение вектора на число в вещественном пространстве определено лишь для вещественных чисел. Поэтому в этом случае мы проведем нормирование вектора $\mathbf{x}$ иначе:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{\sqrt{-\mathbf{x}^2}} . \qquad (5.63)$$

Теперь под знаком корня стоит положительная величина, делитель вещественный, и операция деления является законной. Полученный вектор, как непосредственно проверяется, обладает свойством

$$\mathbf{e}_i^2 = -1. \qquad (5.64)$$

Векторы со скалярным квадратом — 1 *мы будем называть мнимоединичными.* Не следует думать, что такие векторы сами являются в каком-то смысле мнимыми; это вещественные векторы вещественного псевдоевклидова пространства, обладающие тем не менее мнимой длиной $\sqrt{-1} = i$.

Построив единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_1$, мы проводим через фиксированную точку, O ортогональную к нему гиперплоскость R_{n-1}. Эта гиперплоскость, как ортогональная к неизотрпному вектору, сама будет неизотропной и несет на себе евклидову метрику n—1 измерений. Поэтому на ней снова можно найти единичный или мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_2$ и т. д. Очевидно, все построение, проведенное для комплексного случая, повторяется и дли вещественного с той только разницей, что нормировка каждого из векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ происходит в одном из двух вариантов (5.61), (5.63). В результате мы получаем *ортонормированный репер*

$\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$; так мы будем называть репер, в котором

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \qquad (i \neq j), \qquad \mathbf{e}^2_i = \pm 1, \tag{5.65}$$

т.е. векторы которого, вообще говоря, частью единичные, частью мнимоединичные и все ортогональны между собой. Такие векторы мы будем называть *ортами.* Занумеруем их так, чтобы сначала шли миимоединичные

$$\mathbf{e}^2_1 = \mathbf{e}^2_2 = \ldots = \mathbf{e}^2_k = -1, \tag{5.66}$$

а затем единичные

$$\mathbf{e}^2_{k+1} = \mathbf{e}^2_{k+2} = \ldots = \mathbf{e}^2_n = 1. \tag{5.67}$$

Число мнимоединичных векторов k может принимать значения 0, 1, 2, ..., n. Соответственно метрический тензор $g_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ в ортонормированной координатной системе примет вид

$$\left.\begin{aligned} &g_{ij} = 0 \quad (i \neq j); \quad g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{kk} = -1; \\ &g_{k+1,\,k+1} = \ldots = g_{nn} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{5.68}$$

Связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора

$$x_i = g_{ij}x^j$$

теперь перепишется в виде

$$x_i = -x^i \; (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k), \;\; x_i = x^i \; (i = k+1,\ \ldots,\ n), \tag{5.69}$$

так что разница между контравариантными и ковариантными координатами вектора хотя, вообще говоря, и не исчезает, но становится мало значительной.

Скалярное произведение и скалярный квадрат в координатной записи теперь примут вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= g_{ij}x^iy^j = -x^1y^1 - \ldots - x^ky^k + x^{k+1}y^{k+1} + \ldots + x^ny^n, \\ \mathbf{x}^2 &= g_{ij}x^ix^j = -(x^1)^2 - \ldots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \ldots + (x^n)^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.70}$$

Пользуясь зависимостями (5.69), эти формулы можно переписать в таком же виде для ковариантных координат:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= -x_1y_1 - \ldots - x_ky_k + x_{k+1}y_{k+1} + \ldots + x_ny_n, \\ \mathbf{x}^2 &= -x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.71}$$

Инвариантную квадратичную форму $g_{ij}x^ix^j$, выражающую скалярный квадрат вектора через его координаты, мы будем называть *метрической квадратичной формой.*

Мы видим, что в ортонормированной координатной системе метрическая квадратичная форма $g_{ij}x^ix^j$ приводится к каноническому виду суммы-разности квадратов переменных. Верно и обратное: из (5.70) следуют условия (5.68), а отсюда и условия (5.65), так что метрическая квадратичная форма приводится к каноническому виду только в ортонормированных координатах.

Покажем теперь, что при любом выборе ортонормированного репера в данном пространстве число k его мнимоединичных ортов всегда одно и то же. В самом деле, допустим, что мы построили два ортонормированных репера $(O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n)$ и $(O', \mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_l, \mathbf{e}_{l+1}, ..., \mathbf{e}'_n)$, причем в первом мнимоединичные орты — это первые k векторов, а во втором — первые l векторов.

Допустим, например, что $l > k$, и покажем, что это приводит нас к противоречию. В самом деле, рассмотрим в совокупности единичные орты $\mathbf{e}_{k+1}, ..., \mathbf{e}_n$ первого репера и мнимоединичные орты $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_l$ второго репера. Так как их число $> n$,

$$(n-k)+l>n,$$

то между ними обязательно должна иметь место линейная зависимость. Ее мы запишем, перенеся в одну часть члены с мнимоединичными, а в другую — с единичными ортами:

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1 + \ldots + \alpha_l\mathbf{e}'_l = \beta_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n. \tag{5.72}$$

Это равенство возводим почленно в скалярный квадрат. Учитывая, что

$\mathbf{e}'_i\mathbf{e}'_j = 0 \ (i \neq j)$ и $\mathbf{e}'^2_1 = \ldots = \mathbf{e}'^2_l = -1,$

а также, что

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = 0 \ (i \neq j) \text{ и } \mathbf{e}^2_{k+1} = \ldots = \mathbf{e}^2_n = 1,$$

получим:

$$-\alpha^2_1 - \ldots - \alpha^2_l = \beta^2_{k+1} + \ldots + \beta^2_n.$$

Ясно, что это равенство может иметь место только при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0$ (мы находимся в вещественном евклидовом информационном пространстве и в соответствии с общим соглашением все рассматриваемые численные величины должны быть тоже вещественными). Но тогда вопреки нашему предположению оказывается, что (5.72) есть тождество, а не линейная зависимость между рассматриваемыми иекторами. Мы получили искомое противоречие.

Итак, число k мнимоединичных ортов ортонормированного репера в вещественном евклидовом информационном пространстве, как, следовательно, и число n — k его единичных ортов, не зависит от выбора этого репера. Число k, которое представляет собой важную характеристику евклидова информационного пространства, мы будем называть *индексом евклидова информационного пространства.*

С алгебраической точки зрения наш результат представляет собой *«закон инерции»* для вещественной квадратичной формы: при любом способе приведения ее к каноническому виду число как отрицательных, так и положительных квадратов остается без изменения.

5.5. Собственно евклидовы информационные пространства

Мы определили *собственно евклидовы* информационные пространства как такие вещественные евклидовы информационные пространства, в которых для любого вектора $\mathbf{x}\neq 0$

$$\mathbf{x}^2>0. \tag{5.73}$$

Построение ортонормированного репера в этом случае можно провести проще, чем в случае псевдревклидова или комплексного евклидова информационного пространства. Дело в том, что в собственно евклидовом информационном пространстве, как мы знаем, все плоскости и все векторы, отличные от нуля, — неизотропные. Поэтому в процессе построения нет надобности в предосторожностях, обеспечивающих неизотропный характер векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, . . ., $\mathbf{w}$, и в ссылках на результаты п. 5.3 (именно, что гиперплоскость, ортогональная к неизотропному вектору, сама неизотропная).

Далее, среди векторов репера $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$ не может быть мнимоединичных (в силу (5.73)), так что индекс $k = 0$, и все векторы $\mathbf{e}_i$ — единичные:

$$\mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2= \ldots =\mathbf{e}_n^2=1. \tag{5.74}$$

Формулы (5.6) принимают вид

$$g_{ij} = 0 \quad (i\neq j), \quad g_{ii}=1. \tag{5.75}$$

Связь между ковариантными и контравариантмыми координатами вектора (5.69) теперь принимает вид (учитывая, что $k = 0$)

$$x_i = x^i, \tag{5.76}$$

т. е. те и другие координаты просто совпадают. Равенства (5.71) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1y_1 + \ldots + x_ny_n, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

Таким образом, в ортонормированной координатной системе и собственно евклидовом информационном пространстве мы получаем те же по внешнему виду формулы, что и в комплексном евклидовом информационном пространстве. Не нужно забывать при этом что сейчас у нас координаты точек и векторов принимают всевозможные вещественные значения, в то время как тогда они принимали всевозможные комплексные значения.

В частности, расстояние между двумя точками A, B будет выражаться (в результате аналогичного вывода) формулой (5.57):

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_n' - x_n)^2}. \qquad (5.78)$$

Ясно, что у нас расстояние *AB* будет всегда вещественным, в то время как в формуле (5.57) оно, как правило, было комплексным. Особо рассмотрим случай трехмерного собственно евклидова информационного пространства, $n = 3$. Формулы (5.77), (5.78) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\ \mathbf{x}^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ AB &= \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.79)$$

Эти формулы уже буквально повторяют формулы векторной алгебры обычного пространства. В связи с этим нетрудно обнаружить совпадение трехмерного собственно евклидова информационного пространства с нашим обычным пространством, точнее, их изоморфизм. Этим мы хотим сказать следующее. Отобразим построенное нами трехмерное собственно евклидово информационное пространство на обычное пространство взаимно однозначно, а именно так, чтобы каждая точка первого пространства с координатами x_1, x_2, x_3 в ортонормированной координатной системе отобразилась в точку второго пространства с теми же координатами x_1, x_2, x_3 в прямоугольной декартовой системе. Очевидно, при этом отображении сохраняются все свойства точек и векторов трехмерного собственно евклидова информационного пространства (в том числе и метрические), так как они в ортонормированной координатной системе выражаются совершенно так же, как соответствующие свойства точек и векторов обычного пространства в прямоугольной декартовой системе (в частности, одинаково записывается расстояние между двумя точками). Проверка этого совершенно тривиальна. Единственный вопрос, который мог бы возникнуть,—это не имеется ли у обычного пространства еще таких свойств, которые отсутствуют у трехмерного собственно евклидова информационного пространства. Этого не может быть потому, что в конечном счете все свойства обычного пространства определяются измерением расстояний между точками по формуле

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2},$$

а эта формула совпадает с аналогичной формулой (5.79) для трехмерного собственно евклидова информационного пространства.

Однако точная проверка потребовала бы и точного определения того, что мы понимаем под свойствами обычного пространства.

Поясним, что до сих пор мы пользовались понятием «обычного пространства», имея в виду то пространство, которое изучается элементарными средствами в школьном курсе, затем средствами аналитической и дифференциальной геометрии в высшей школе и которое каждому знакомо, если и не в смысле строгого обоснования, то во всяком случае по основным свойствам. Между тем сейчас мы затронули вопрос, который для точного ответа потребовал бы и точного обоснования геометрии обычного пространства посредством той или иной ее аксиоматики. Одной из таких аксиоматик может служить и наша аксиоматика трехмерного собственно евклидова информационного пространства.

Вернемся к n-мерному случаю. Мы обнаружили, что *для собственно евклидова информационного пространства индекс k* равен 0. Конечно, верно и обратное: *евклидово информационное пространство индекса k = 0 будет собственно еваклидовым.* В самом деле, k = 0 означает, что все векторы ортонормированного репера — единичные и, следовательно, имеют место формулы (5.74) —(5.77). Но согласно (5.77)

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2,$$

а значит, $\mathbf{x}^2 > 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ (так как в этом случае среди координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ хоть одна не равна нулю). Добавим, что нетрудно обнаружить *изоморфизм* любых двух собственно евклидовых информационных пространств данного числа измерений n, отображая одно в другое тем же приемом, каким мы отображали трехмерное собственно евклидово информационное пространство на обычное пространство.

5.6. Двумерное псевдоевклидово информационное пространство

Мы начнем изучение псевдоевклидовых информационных пространств с простейшего случая двух измерений. Вообще в двумерном евклидовом информационном пространстве (n = 2) индекс k может принимать значения 0, 1, 2.

Случай k = 0 приводит к двумерной собственно евклидовой геометрии, т. е. к обыкновенной планиметрии.

Случай k = 2 отличается от предыдущего лишь формально. В самом деле, в этом случае оба вектора ортонормированного репера мнимоединичные и формулы (5.65) — (5.71) принимают вид

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = -1, \tag{5.80}$$

$$g_{11} = g_{22} = -1, \qquad g_{12} = 0, \tag{5.81}$$

$$x_1 = -x^1, \qquad x_2 = -x^2, \tag{5.82}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{xy} &= -x_1y_1 - x_2y_2, \\ \mathbf{x}^2 &= -x_1^2 - x_2^2. \end{aligned}\right\} \tag{5.83}$$

Таким образом, скалярные произведения и скалярные квадраты *лишь знаком* отличаются от того, что мы получаем для соответствующих векторов на обычной плоскости, а следовательно, все расстояния в нашем случае отличаются от соответствующих расстояний на обычной плоскости лишь множителем $i = \sqrt{-1}$. Поэтому и разница между обеими геометриями будет лишь формальной, т. е. сводится к разнице в терминологии. В самом деле, расстояние определяется формулой

$$AB = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$$

на обычной плоскости и формулой

$$AB = i\sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$$

в нашем случае. Таким образом, то, что мы называли расстоянием на обычной плоскости, теперь мы называем расстоянием после умножения на i. Ясно, что всякое предложение одной геометрии может быть повторено для другой в результате простой перефразировки. Такие случаи будут встречаться у нас и в дальнейшем. *Мы примем за общее правило, что если выражения скалярных произведений в ортонормированном репере различаются для двух n-мерных евклидовых геометрий лишь знаком, то эти геометрии мы не будем счи.~тать существенно различными и изучать будем лишь одну из них*. В частности, если в ортонормированном репере скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = -x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2, \tag{5.84}$$

то такую геометрию мы считаем сводящейся к собственно евклидовой. В *дальнейшем, говоря о псевдоевклидовом информационном пространстве, мы исключаем случай* (5.84).

В частности, двумерную псевдоевклидову геометрию при $k = 2$ мы считаем сводящейся к собственно евклидовой геометрии, имеющей место при $k = 0$.

Остается, таким образом, лишь случай $k = 1$, который заслуживает внимательного изучения. Соответствующее двумерное псевдосвклидово информационное пространство мы будем называть кратко *псевдоевклидовой плоскостью.*

Будем обозначать — это будет удобно для дальнейшего — мнимоединичный орт ортонормированного репера через $\mathbf{e}_0$, а единичный — через $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \qquad \mathbf{e}_1^2 = 1. \tag{5.85}$$

Соответственно координаты вектора **x** будут обозначаться x^0, x^1 и вообще тензорные индексы будут пробегать значения 0, 1 (вместо 1, 2).

По своим *аффинным* свойствам псевдоевклидова плоскость, как мы знаем, не отличается от обычной плоскости, однако по своим метрическим свойствам резко расходится с ней. Поэтому чертежам, которые мы будем делать, нужно доверять лишь в той мере, в какой речь идет об аффинных свойствах, но отнюдь не о метрических. Действительно, чертеж, сделанный на листе бумаги, отражает приблизительно геометрию обычной плоскости, мы же будем изучать псевдоевклидову плоскость. Поэтому чертеж будет «верен» лишь в тех пределах, в каких мы рассматриваем аффинные свойства, общие для обеих плоскостей. С метрическими свойствами дело будет обстоять иначе. Например, ортогональные векторы или равные отрезки псевдоевклидовой плоскости в условном изображении на чертеже (т. е. на обычной плоскости), вообще говоря, ортогональными векторами или равными отрезками выглядеть уже не будут. Не следует думать, что в этом положении вещей кроется что-то загадочное и своеобразное. По существу дело обстоит здесь совершенно так же, как и с картой земных полушарий, т. е. с изображением полусфер в виде плоских кругов. Это изображение неизбежно содержит искажения, поскольку геометрии на сфере и на плоскости существенно различны; неизбежно получается, что расстояния, равные в оригинале (т. е. на полусфере), выглядят, вообще говоря, различными в изображении (т. е. на плоском круге). Совершенно так же обстоит дело и в нашем случае, когда оригиналом является псевдоевклидова плоскость, а ее условным изображением — собственно евклидова плоскость чертежа.

Следует уточнить, как именно мы будем строить это изображение. Орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ какого-нибудь ортонормированного репера псевдо-еиклидовой плоскости мы изобразим в виде ортов на обычной плоскости; начало *O* изобразим в виде начала *O*. Далее, каждую точку *M* псевдоевклидовой плоскости изобразим точкой обычной плоскости с теми же координатами. Другими словами, вектор *OM* в изображении должен разлагаться по ортам $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ с теми же коэффициентами, как и в оригинале (рис. 5.1).

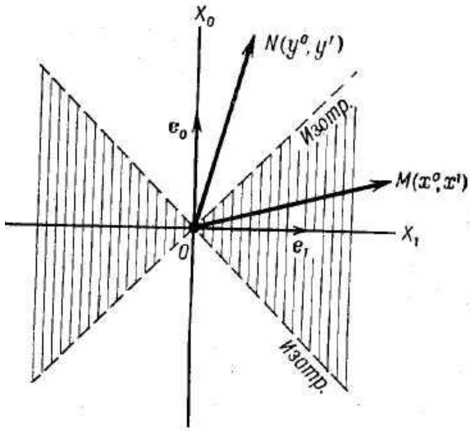


Рис. 5.1.

Заметим еще, что мы отнюдь не предполагаем, что *любой* ортонормированный в оригинале репер будет ортонормированным и в изображении: это будет верным лишь для одного первоначально выбранного ортопормированного репера, положенного в основу изображении.

Мы так подробно останавливаемся на этом вопросе, так как в дальнейшем мы будем таким же образом изображать трехмерное псевдоевклидово пространство в обычном трехмерном пространстве, причем все сделанные замечания остаются в силе.

Итак, рассмотрим псевдоевклидову плоскость, отнесенную к ортонормированной координатной системе с векторами репера: мнимоединнчным $\mathbf{e}_0$ и единичным $\mathbf{e}_1$.

Пользуясь условиями (5.85), получаем матрицу координат метрического тензора

$$\begin{Vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5.86}$$

Очевидно, обратная матрица, т. е. матрица координат контравариантного метрического тензора, имеет тот же вид:

$$\begin{Vmatrix} g^{00} & g^{01} \\ g^{10} & g^{11} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5.87}$$

Далее, зависимость между ковариантиыми и контранарнантными координатами вектора **x**,

$$x_i = g_{ij} x^j,$$

принимает следующий вид:

$$x_0 = -x^0, \qquad x_1 = x^1. \qquad (5.88)$$

Скалярное произведение **xy** $= g_{ij}x^i y^j$ теперь запишется так;

$$\mathbf{xy} = -x^0y^0 + x^1y^1. \qquad (5.89)$$

В частности

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} \qquad (5.90)$$

Мы предпочтем здесь пользоваться *контравариантными* координатами x^0, x^1 вектора **x**, так как они имеют аффинный характер (коэффициенты разложения **x** по $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$), и потому их можно без ошибок подсчитывать «по чертежу», т. е. так же, как и на обычной плоскости.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть «на чертеже» некоторые основные конструкции псевдоевклидовой плоскости.

Для простоты рассматриваемые векторы будем откладывать от начала O; однако нужно помнить при этом, что по существу O — любая точка псевдоевклидовой плоскости. Найдем прежде всего *изотропные* векторы **x**. Полагая $\mathbf{x}^2 = 0$, получим согласно (5.90)

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 0, \qquad \text{т. е. } x^0 = \pm x^1. \qquad (5.91)$$

Откладывая всевозможные изотропные векторы **x** от начала O мы видим, что их концы располагаются по двум прямым (5.91). *С точки зрения собственно евклидовой геометрии листа бумаги на котором сделан чертеж, эти прямые являются биссектрисами координатных углов.* С точки же зрения псевдоевклидовой геометрии такое их понимание не имеет, конечно, никакого смысла.

Итак, через каждую точку О псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые (которые испытывают параллельный сдвиг при сдвиге точки O в любое новое положение). Неизотропные векторы **x**, откладываемые от начала O, попадают в ту или другую пару вертикальных углов, образованных изотропными прямыми. При этом под углом понимается область на плоскости, выделенная двумя полупрямыми, исходящими из общей точки (в данном случае O), а не численная величина угла. В таком понимании угол есть аффинная конструкция, которая в псевдоевклидовой плоскости выглядит так же, как и на обычной плоскости, так что здесь мы можем довериться чертежу. Рассмотрим сначала векторы, лежащие в одной паре вертикальных углов с ортом $\mathbf{e}_1$ («первая пара вертикальных углов») для этих векторов, как видно из чертежа, $|x^1| > |x^0|$, а следовательно согласно (5.90)

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} > 0. \qquad (5.92)$$

Таким образом, в первой паре вертикальных углов расположатся векторы *вещественной* длины.

В противоположность этому векторы, лежащие во второй паре вертикальных углов, характеризуются тем, что для них

$$| x^1 | < | x^0 | ,$$

а следовательно,

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} < 0, \qquad (5.93)$$

и эти векторы обладают *мнимой* длиной.

Окончательно: *векторы вещественной длины, отложенные из начала О, располагаются в первой паре вертикальных углов, векторы мнимой длины — во второй паре вертикальных углов и, наконец, изотропные векторы — по сторонам этих углов.*

Посмотрим теперь, как выглядят в нашем изображении ортогональные векторы псевдоевклидоной плоскости. Но так как для ортогональности векторов существенно лишь их направление, то мы лучше рассмотрим взаимно ортогональные прямые линии (проведенные для простоты через начало *О*).

Пусть $M(x^0, x^1)$, $N(y^0, y^1)$— произвольные точки соответственно на первой и второй из этих прямых. Их радиусы-векторы $\mathbf{x} = \overrightarrow{OM}$ и $\mathbf{y} = \overrightarrow{ON}$ имеют те же координаты, что и сами точки, а условие ортогональности этих векторов имеет вид $\mathbf{xy} = 0$, т. е. согласно (5.89)

$— x^0y^0 + x^1y^1 = 0$, откуда

$$y^1 : y^0 = x^0 : x^1. \qquad (5.94)$$

Это означает, что *в изображении* наши прямые имеют взаимно обратные угловые коэффициенты и расположены, следовательно, симметрично относительно биссектрис координатного угла. Подчеркнем, что эта характеристика ортогональных прямых, данная с *точки зрения изображения,* не имеет ни малейшего смысла с *точки зрения оригинала,* т. е. геометрии псевдоевклидовой плоскости. Там эти прямые лишь ортогональны, и ничего более.

Из полученного результата ясно, что вопреки обычному поведению ортогональных прямых вращение одной из них вызывает *встречное* вращение другой, причем когда одна приходит в совпадение с изотропной прямой, другая совпадает с ней же. Это и неудивительно, если принять во внимание, что изотропная прямая, как направленная по изотропному вектору, ортогональна к себе самой.

Теперь, чтобы составить себе представление о метрике псевдоевклидовой плоскости, будем откладывать от начала *О* отрезки данной постоянной длины ρ во всех направлениях, в которых это возможно сделать. Другими словами, мы описываем окружность данного радиуса ρ с центром *О.* Эту окружность образуют концы наших отрезков. При этом радиус ρ может быть как вещественным, так и чисто мнимым.

Запишем условие того, что вектор **x** имеет длину ρ: $\mathbf{x}^2 = \rho^2$, или в координатной записи

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = \rho^2. \qquad (5.95)$$

Если откладывать переменный вектор **x** постоянной длины ρ от начала *O*, то его конец опишет окружность радиуса ρ с центром в *O*, причем (5.95) будет уравнением этой окружности.

Разберем теперь отдельно три случая. Пусть *a* обозначает какое-либо положительное число. Положим сначала ρ = *a* (радиус окружности вещественный). Уравнение (5.95) дает

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = a^2. \qquad (5.96)$$

Таким образом, изображением окружности с центром *O* и вещественным радиусом *a* служит на плоскости чертежа равнобочная гипербола (5.96) с центром *O* и действительной осью OX_1 (рис. 5.2).

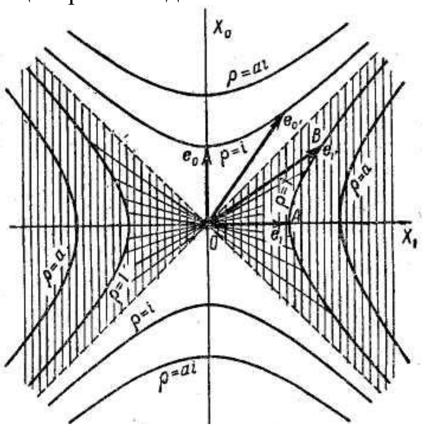


Рис. 5.2.

Как мы уже отмечали, не следует смущаться тем, что радиусы окружности, равные в оригинале, получились в изображении различными: это неизбежное искажение получается в результате несовпадения геометрических свойств оригинала и изображения. Далее, непривычное для нас распадение окружности на две разомкнутые ветви вытекает из свойств псевдоевклидовой метрики, непохожих на обычные.

Рассмотрим теперь случай ρ = *ai* (радиус окружности мнимый). Тогда уравнение (5.95) дает

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = -a^2 \qquad (5.97)$$

т. е. в этом случае изображением окружности служит равнобочная гипербола с центром *O* и действительной осью OX_0. Итак, в псевдоевклидовой плоскости окружности (при $\rho \neq 0$) принадлежат к числу гипербол, а не эллипсов, как в собственно евклидовой плоскости. Наконец, в случае $\rho = 0$ мы возвращаемся к уравнению (5.91), и окружность нулевого радиуса сводится к паре изотропных прямых.

5.7. Вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости

Выясним, как будет выглядеть переход от одного ортонормированного репера к другому в псевдоевклидовой плоскости.

Сдвиг начала O совершается тривиальным образом, так что мы займемся лишь преобразованием ортов при неподвижном начале. Такое преобразование ортонормированного репера мы будем называть его *вращением.*

Пусть $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — старые и $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$— новые орты. По общим формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= A^0_{0'}\mathbf{e}_0 + A^1_{0'}\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= A^0_{1'}\mathbf{e}_0 + A^1_{1'}\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.98}$$

Заметим, что здесь $A^0_{0'} \neq 0$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что мнимоединичный вектор $\mathbf{e}_{0'}$ лишь численным множителем отличается от единичного вектора $\mathbf{e}_1$, что после почленного возведения в скалярный квадрат приводит к противоречию (все коэффициенты $A^i_{i'}$ — вещественные ввиду вещественного характера псевдоевклидовой плоскости). По той же причине $A^1_{1'} \neq 0$. В силу ортогональности ортов $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ мы получаем согласно (5.94)

$$A^1_{0'} : A^0_{0'} = A^0_{1'} : A^1_{1'}. \tag{5.99}$$

Обозначая

$$A^0_{0'} = a, \quad A^1_{1'} = b, \tag{5.100}$$

а также обозначая общее значение отношений (5.99) через β, получим:

$$A^1_{0'} = a\beta, \quad A^0_{1'} = b\beta, \tag{5.101}$$

и преобразование (5.98) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= a(\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1), \\ \mathbf{e}_{1'} &= b(\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1). \end{aligned}\right\} \tag{5.102}$$

Запишем теперь, что орт $\mathbf{e}_{0'}$ — мнимоединичный:

$$\mathbf{e}^2_{0'} = -(A^0_{0'})^2 + (A^1_{0'})^2 = -a^2 + a^2\beta^2 = -1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.103}$$

Записывая аналогично, что орт $\mathbf{e}_{1'}$ — единичный, получим:

$$\mathbf{e}_{1'}^2 = -(A_{1'}^0)^2 + (A_{1'}^1)^2 = -b^2\beta^2 + b^2 = 1,$$

откуда

$$b = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.104}$$

Пользуясь последними результатами, можно окончательно переписать закон преобразования (5.102):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.105}$$

Ясно, что β можно давать лишь значения, по модулю меньшие единицы, иначе коэффициенты преобразования оказались бы мнимыми или (в случае β =1) вообще не существовали бы. Итак,

$$-1 < \beta < 1. \tag{5.106}$$

Зато в этих пределах β можно давать любые значения, а также можно в каждой из двух формул (5.105) брать $\sqrt{1-\beta^2}$ с любым знаком, в одной *независимо* от другой. То, что при этом формулы (5.105) всегда переводят ортонормированный репер снова в ортонормированный, ясно и из нашего вывода, и легко устанавливается простой проверкой.

Мы получаем четыре типа вращений ортонормированного репера в зависимости от знака, с каким берется $\sqrt{1-\beta^2}$ в верхней и нижней формулах (5.1058). Этот знак в верхней формуле, очевидно, совпадает со знаком $A^0_{0'}$, причем, если он положительный, то $\mathbf{e}_{0'}$ продолжает быть направленным «вверх» от OX_1, т. е. к той же ветви мнимоединичной окружности, что и $\mathbf{e}_0$; если же он отрицательный, то $\mathbf{e}_{0'}$ - «перепрокидывается» к другой («нижней») ее ветви.

Аналогично знак $\sqrt{1-\beta^2}$, избранный нами для нижней формулы совпадает со знаком $A^1_{1'}$. При этом $\mathbf{e}_{1'}$ остается направленным к той же, как и $\mathbf{e}_1$ («правой»), ветви единичной окружности, если этот знак положительный, и «перепрокидывается» к другой («левой») ее ветви, если этот знак отрицательный.

В результате можно следующим образом охарактеризовать четыре типа вращений ортонормированного репера:

1°. *Собственное вращение.* Так мы будем называть вращение при условии $A^0_{0'} > 0$, $A^1_{1'} > 0$. Тогда (5.105) дает

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.107}$$

В согласии со сказанным при собственном вращении концы векторов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{0'}$ остаются на прежних ветвях единичной и соответственно мнимоединичной окружностей (рис. 5.2; чертеж отвечает случаю $\beta > 0$). Векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ - *будут в изображении* симметричными относительно «биссектрисы координатного угла» (как и полагается ортогональным векторам). Неравноправие реперов $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ и $\{O, \mathbf{e}_{0'}, \mathbf{e}_{1'}\}$ кажущееся и связано с условностью их изображения на обычной плоскости (отчего и получается, что один как бы «настоящий», а другой «искаженный»). Мы могли бы условиться, наоборот, векторы $\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$ изображать ортами обычной плоскости, и тогда $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ изобразились бы более длинными векторами, образующими тупой угол (рис. 5.3).

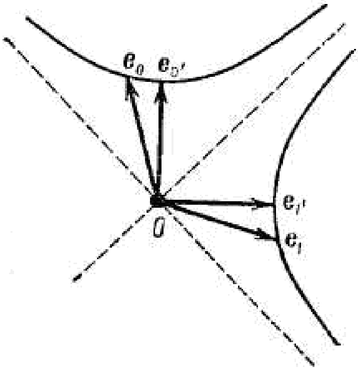


Рис. 5.3.

При непрерывном изменении β в допустимых для него пределах (5.106) непрерывно меняется и соответствующее собственное вращение, причем при $\beta = 0$ мы имеем тождественное преобразование. Отсюда видно, что собственное вращение репера может быть осуществлено за счет *непрерывного* процесса вращения, а именно при непрерывном изменении β от 0 до требуемого значения. Вычислим еще определитель преобразования:

$$\operatorname{Det}|A_{i'}^{i}| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1. \tag{5.108}$$

Собственное вращение не меняет ориентации репера.

2°. *Несобственное вращение 1-го рода.* Так мы будем называть вращение репера при условии

$A^0_{0'} > 0,\ A^1_{1'} < 0.$

Это значит, что конец единичного орта $\mathbf{e}_1$ «перепрокидывается» на другую ветвь единичной окружности, конец же орта $\mathbf{e}_0$ остается на прежней ветви мнимоединичной окружности. Формулы (5.105) принимают вид

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.109}$$

При β, непрерывно меняющемся в пределах (5.106), непрерывно меняется и несобственное вращение 1-го рода, причем тождественное преобразование из него получить невозможно. При β =0 мы получаем:

$$\mathbf{e}_{0'} = \mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \tag{5.110}$$

т. е. происходит как бы зеркальное отражение репера за счет перепрокидывания оси OX_1 при неподвижной оси OX_0 (зеркальное отражение относительно оси OX_0). Нетрудно заметить, сравнивая формулы (5.109) с (5.107), что всякое несобственное вращение 1-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения (5.110). Заметим еще, что в нашем случае

$$\operatorname{Det}|A^i_{i'}| = -1, \tag{5.111}$$

и следовательно, ориентация репера меняется на обратную.

3°. *Несобственное вращение 2-го рода* определяется условием

$$A^0_{0'} < 0, \quad A^1_{1'} > 0.$$

Оно вполне аналогично несобственному вращению 1-го рода с той лишь разницей, что теперь конец орта $\mathbf{e}_0$ перепрокидывается на другую ветвь мнимоединичной окружности, а конец орта $\mathbf{e}_1$ остается на прежней ветви единичной окружности. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.112}$$

При β =0 получаем:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'} = \mathbf{e}_1, \tag{5.113}$$

т. е. происходит зеркальное отражение репера относительно оси OX_1. Принципиальная разница сравнительно с (5.110) заключается в том, что зеркальное отражение происходит там относительно прямой с мнимыми расстояниями вдоль нее, а здесь относительно прямой с вещественными расстояниями.

Сравнивая формулы (5.112) с (5.107), замечаем, что несобственное вращение 2-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркального отражения. (5.113). Отметим еще, что в нашем случае

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = -1, \tag{5.114}$$

так что ориентация репера меняется на обратную.

4°. *Несобственное вращение 3-го рода* определяется условием

$$A^0_{0'} < 0, \quad A^1_{1'} < 0.$$

Концы обоих ортов перескакивают на другие ветви соответствующих окружностей. Формулы преобразования будут:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\frac{\mathbf{e}_0 + \beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\frac{\beta\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.115}$$

Очевидно, в этом случае

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = 1,$$

и ориентация репера сохраняется. При непрерывном изменении β в пределах (5.106) несобственные вращения 3-го рода меняются непрерывно; конечно, тождественное преобразование в их число не входит. При β = 0 получаем:

$$\mathbf{e}_{0'} = -\mathbf{e}_0, \quad \mathbf{e}_{1'} = -\mathbf{e}_1, \tag{5.116}$$

т. е. репер испытывает как бы отражение относительно начала *О*. Заметим, что в нашем случае нельзя получить такое преобразование непрерывным «вращением на 180°», как мы сделали бы на обычной плоскости; изотропные прямые представляют непреодолимую преграду для непрерывного вращения орта (который, оставаясь единичным или мнимоединичным вектором, не может принять изотропное направление).

Сравнивая формулы (5.115) с (5.107), мы замечаем, что несобственное вращение 3-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него отражения (5.116).

Как мы видели, вращения репера в пределах каждого из четырех типов непрерывно переходят одно в другое за счет непрерывного изменения β. Зато два вращения разных типов не могут быть непрерывным образом переведены одно в другое. В самом деле, такие вращения всегда отличаются друг от друга тем, что при одном из них конец орта $\mathbf{e}_0$ (или $\mathbf{e}_1$) остается на прежней ветви окружности, а при другом перескакивает на другую ветвь. Так как этот переход нельзя осуществить непрерывным образом, то нельзя осуществить и непрерывный переход от вращения одного типа к вращению другого типа. То же самое легко установить и из того, что $A^0{}_{0'}$ и $A^1{}_{1'}$ не могут обращаться в нуль, а следовательно, при непрерывном изменении не могут менять знака.

Мы рассматривали вращения ортонормированного репера. Но следом за вращением данного ортонормированного репера всегда можно заставить вращаться и саму псевдоевклидову плоскость. А именно, каждую точку плоскости мы будем переводить в новую точку, расположенную относительно нового репера точно так же, как прежняя точка была расположена относительно прежнего репера. Другими словами, координаты x^0, x^1 новой точки относительно нового репера должны совпадать с координатами x^0, x^1 прежней точки относительно прежнего репера. Такое преобразование псевдоевклидовой плоскости в себя мы будем называть ее *вращением* около фиксированной точки O и относить к одному из четырех типов в соответствии с характером вращения репера. При этом классификации вращений можно придать форму, независимую от выбора начального репера: при собственных вращениях каждая ветвь и единичной и мнимоединичной окружностей переходит в себя; при несобственных вращениях соответственно 1-го, 2-го и 3-го рода меняются местами: 1) ветви единичной окружности, 2) ветви мнимоединичной окружности, 3) ветви обеих окружностей.

Сходство вращения псевдоевклидовой плоскости с вращениями обычной плоскости заключается в том, что как при тех, так и при других остается неподвижной одна точка (точка O), и, главное, геометрические свойства фигур не испытывают никаких изменений. В самом деле, поскольку координаты перемещенных точек относительно повернутого репера остались прежними, а повернутый репер остался ортонормированным и обладает, следовательно, в точности прежними геометрическими свойствами, то и свойства фигур в результате вращения не меняются. Позже мы уточним сказанное здесь.

Комбинируя произвольные вращения около точки O с произвольными параллельными сдвигами, мы получаем преобразования ортонормированного репера, а вслед за ним и преобразования плоскости в себя, которые мы будем называть *движениями* в псевдоевклидовой плоскости. Движения, очевидно, тоже сохраняют геометрические свойства фигур и, как позже мы увидим, исчерпывают все преобразования псевдоевклидовой плоскости в себя, обладающие этим свойством.

На обычной плоскости существуют движения двух сортов: собственные движения, при которых сохраняется ориентация плоскости и которые можно осуществить, переводя плоскость из начального положения в конечное непрерывным образом, и несобственные движения, которые меняют ориентацию плоскости на обратную и которые можно получить, комбинируя собственные движения с зеркальным отражением относительно какой-либо прямой.

На псевдоевклидовой плоскости движения будут уже четырех типов, в зависимости от того, какого типа будет вращение около точки *O,* входящее в его состав (наряду с параллельным сдвигом).

Эти четыре типа движений мы будем называть соответственно *собственными движениями* и *несобственными движениями* 1-го, 2-го и 3-го рода. Согласно ранее сказанному в пределах каждого типа возможен непрерывный переход от одного движения к другому. В частности, собственные движения включают в себя тождественное преобразование и их можно осуществлять непрерывным переходом от начального положения плоскости к конечному; несобственные же движения 1-го, 2-го и 3-го рода получаются наложением на собственные движения отражений соответственно относительно прямой с мнимыми расстояниями, относительно прямой с вещественными расстояниями и относительно точки.

В связи с этим и ортонормированные реперы распадаются на четыре класса, в зависимости от того, какого типа движением они получаются из какого-либо исходного репера: собственным движением или несобственным движением 1-го, 2-го или 3-го рода. В пределах одного класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому; между двумя различными классами он невозможен.

В терминах теории групп Ли можно сказать, что группа движений на псевдоевклидовой плоскости несвязная и состоит из четырех связных компонент. То, что движения действительно образуют группу, легко проверяется (мы сейчас не будем этим заниматься, так как затем все сказанное будет выведено в общем случае n-мерного псевдоевклидова пространства).

5.8. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости

В п. 3.8 мы определили объем произвольного тела D в n-мерном аффинном информационном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int\limits_D dx^1 \dots dx^n$$

в какой-либо аффинной координатной системе. В частности, «двумерный объем», т. е. площадь в случае двумерного аффинного информационного пространства, имеет вид

$$V_D = \iint\limits_D dx^1\, dx^2. \tag{5.117}$$

Определенная таким образом площадь (как и объем в общем случае) представляет собой лишь относительный инвариант, принимающий различные численные значения в различных координатных системах, а именно, умножающийся на $|\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}||^{-1}$ при переходе от одного репера к другому:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i. \tag{5.118}$$

Но в случае двумерного *евклидова* информационного пространства мы находимся в лучшем положении, так как у нас среди аффинных координатных систем выделены *ортонормированные* координатные системы.

Мы условимся называть площадью фигуры D в двумерном евклидовом информационном пространстве интеграл V_D (5.117), *вычисленный в ортонормированной координатной системе.*

Определенная таким образом площадь будет уже *инвариантом.* В случае собственно евклидовой, т. е. обычной, плоскости хорошо известно, что интеграл V_D действительно дает площадь в обычном смысле слова, не зависящую от той ортонормированной координатной системы, в которой она вычисляется.

В случае псевдоевклидовой плоскости матрица преобразования (5.118) при всех вращениях ортонормированного репера удовлетворяет (как мы видели в п. 5.7) следующему условию:

$$\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}| = \pm 1,\ \text{следовательно,}\ |\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|| = 1, \tag{5.119}$$

а отсюда следует, что интеграл (5.117) при переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой не меняется (умножается на единицу).

Переходим теперь к измерению углов на псевдоевклидовой плоскости. Мы воспользуемся здесь следующим построением обычной планиметрии. Желая измерить данный угол, мы строим единичный круг с центром в вершине угла и берем *удвоенную площадь сектора,* вырезанного из этого круга сторонами угла. Очевидно, это и будет как раз величина угла, измеренного в естественной мере — в радианах.

Аналогично мы будем поступать и на псевдоевклидовой плоскости. Однако здесь *мы будем измерять лишь углы, для которых все полупрямые, исходящие из вершины и проходящие внутри угла или по его сторонам, будут неизотропными.* Другими словами, если представить себе, что угол описывается вращением одной его стороны до совпадения ее с другой стороной, то мы хотим, чтобы в течение этого процесса вращающаяся сторона нигде не принимала изотропного направления. Смысл этого ограничения вскоре станет ясным. Углы, удовлетворяющие нашему условию, мы будем называть *допустимыми.*

Опишем теперь единичную и мнимоединичную окружности с центром в вершине *O* данного допустимого угла (рис. 5.4).

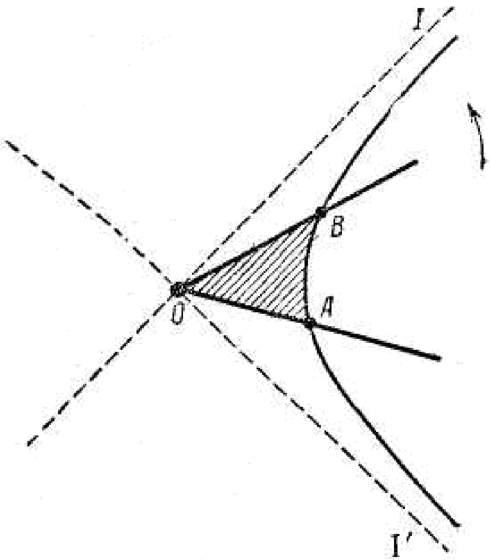


Рис. 5.4.

Тогда (в силу нашего условия) стороны угла пересекутся *с одной и той же ветвью* какой-нибудь из этих окружностей. Образуется сектор *AOB, удвоенную площадь которого мы будем называть величиной угла* $\widehat{AOB}$ (или, кратко, просто углом $\widehat{AOB}$*).*

Из этого определения ясно, что величина угла обладает аддитивным свойством: если допустимый угол разделить полупрямой, исходящей из его вершины, на два угла, то его величина будет равняться сумме величин составляющих его углов.

Таким образом, измерение углов производится по отдельности внутри каждого из четырех «основных углов», образованных в данной точке проходящими через нее изотропными прямыми. При этом мы отказываемся измерять углы, «перекидывающиеся» из одного основного угла в другой. Причина этого станет ясна, если мы будем менять угол $\widehat{AOB}$ (рис. 5.4), вращая, например, его сторону *OB* против часовой стрелки и стремясь к совпадению с изотропным направлением *OI*. Тогда площадь сектора *AOB* стремится к бесконечности. Действительно, площадь в оригинале (на псевдоевклидовой плоскости) и площадь в изображении (на обычной плоскости) одинаково выражаются интегралом (5.117) в ортонормированной координатной системе и, следовательно, совпадают. В изображении же площадь сектора *AOI* как площадь, ограниченная ветвью гиперболы и ее асимптотой, является бесконечной.

Итак, величина угла $\widehat{AOB}$ стремится к бесконечности, когда хоть одна из его сторон стремится к изотропному направлению. Отсюда ясно, что угол, в котором сторона *OB* достигла изотропного направления *OI*, мы измерять не будем (его величину пришлось бы признать бесконечной) и тем более не будем измерять угол, в котором сторона *OB* перешла за изотропное направление *OI* (величина угла как бы сверхбесконечная).

Подсчитаем, в частности, угол, на который поворачивается вектор $\mathbf{e}_1$ при собственном вращении (5.107) ортонормнрованного репера $\{O, \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1\}$ (рис. 5.2).

Требуется подсчитать, следовательно, площадь сектора *AOB,* причем это можно сделать, как мы только что отмечали, и в изображении. Воспользуемся полярными координатами на плоскости изображения. Тогда

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} r^2\, d\varphi. \tag{5.120}$$

Здесь r — полярный радиус — выражается через полярный угол φ из уравнения единичной окружности

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 1.$$

Так как x^1, x^0 в изображении играют роль прямоугольных декартовых координат, то

$$x^1 = r\cos\varphi, \qquad x^0 = r\sin\varphi, \tag{5.121}$$

и мы получаем:

$$r^2(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 1, \qquad r^2 = \frac{1}{\cos 2\varphi}. \tag{5.122}$$

Вставляя это значение в (5.120), имеем:

$$\text{пл. } AOB = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{4}\ln\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \tag{5.123}$$

Здесь α —конечное значение полярного угла φ — совпадает с углом наклона вектора $\mathbf{e}_{1'}$ к вектору $\mathbf{e}_1$ (в изображении!). Обозначим через θ псевдоевклидов угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_{1'}$. Тогда по общему определению

$$\theta = 2 \text{ пл. } AOB = \frac{1}{2}\ln \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{e^{2\theta}-1}{e^{2\theta}+1} = \operatorname{th}\theta. \qquad (5.124)$$

Итак, гиперболический тангенс угла между $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ *в псездоевклидовой плоскости равен тангенсу угла между этими векторами в плоскости изображения* (при условии, что $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_0$ в изображении тоже являются ортонормированными, как мы все время это и предполагаем).

При вычислении угла θ мы приписали ему (как и площади *AOB)* знак, совпадающий со знаком полярного угла α. В этом смысле нужно понимать и формулу (5.124).

Из (5.124) видно еще раз, что когда направление $\mathbf{e}_{1'}$ стремится к изотропному, т.е. когда $\alpha \to \pm\frac{\pi}{4}$ и, значит, $\operatorname{tg}\alpha \to \pm 1$, то $\operatorname{th}\theta \to \pm 1$, а следовательно, $\theta \to \pm\infty$.

Таким образом, заставляя $\mathbf{e}_{1'}$ вращаться в пределах основного угла *I'*O*I*, мы заставляем псевдоевклидов угол θ его наклона к $\mathbf{e}_1$ меняться от —∞ до +∞.

Можно выразить формулы преобразования (5.107)

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0+\beta\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta\mathbf{e}_0+\mathbf{e}_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad (5.125)$$

через угол θ. Так как координаты вектора $\mathbf{e}_{1'}$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0\}$ равны, как мы видим, $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$, то, пользуясь обычной геометрией на плоскости изображения, получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \beta,$$

а отсюда

$$\beta = \operatorname{th}\theta, \qquad (5.126)$$

и следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = \operatorname{ch}\theta, \qquad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} = \operatorname{sh}\theta.$$

Формулы собственного вращения (5.125) примут теперь вид

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \operatorname{sh}\theta\mathbf{e}_0 + \operatorname{ch}\theta\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \qquad (5.127)$$

Эти формулы внешне напоминают формулы собственного вращения ортонормированпого репера на обычной плоскости

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{0'} &= \cos\alpha\mathbf{e}_0 - \sin\alpha\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_{1'} &= \sin\alpha\mathbf{e}_0 + \cos\alpha\mathbf{e}_1. \end{aligned}\right\} \tag{5.128}$$

Но замена тригонометрических функций гиперболическими (а также изменение знака в одном члене) сильно преобразует всю картину. В частности, в формулах (5.127) можно менять θ от —∞ до +∞ без периодического повторения результата, как это будет в обычных формулах (5.128).

Мы можем теперь ввести *измерение углов в любом n-мерном вещественном евклидовом информационном пространстве.* Проводим через стороны угла двумерную плоскость. Она или несет на себе собственно евклидову геометрию (как это всегда будет в случае собственно евклидова информационного пространства), и тогда угол измеряется как на обычной плоскости, или является псевдоевклидовой, и тогда угол измеряется так, как было только что показано, или является изотропной, и тогда измерение угла не имеет смысла.

В первом случае острый (или прямой) угол между векторами **a**, **b** определяется обычной формулой

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{5.129}$$

во втором же случае формулой

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{|\mathbf{ab}|}{\sqrt{\mathbf{a}^2\cdot\mathbf{b}^2}}, \tag{5.130}$$

причем здесь предполагается, что $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ — одного знака (иначе угол не имеет смысла). В самом деле, если этот знак положительный, то можно принять:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_1, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{1'}, \tag{5.131}$$

причем $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_{1'} > 0$, т. е. $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'}$ лежат в одном основном угле. Тогда, умножая скалярно на $\mathbf{e}_1$ второе из уравнений (5.127), получаем:

$$\mathbf{e}_{1'}\,\mathbf{e}_1 = \operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (5.131), приходим к формуле (5.130).

Если же знак $\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{ab}$ отрицательный, то положим:

$$\frac{\mathbf{a}}{\sqrt{-\mathbf{a}^2}} = \mathbf{e}_0, \qquad \frac{\mathbf{b}}{\sqrt{-\mathbf{b}^2}} = \mathbf{e}_{0'}, \tag{5.132}$$

причем $\mathbf{e}_0\mathbf{e}_{0'} < 0$, т. е. $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_{0'}$ лежат в одном основном угле. Умножая скалярно на $\mathbf{e}_0$ первое из уравнений (5.127), получаем:

$$\mathbf{e}_{0'}\,\mathbf{e}_0 = -\operatorname{ch}\theta$$

и, пользуясь (5.132), снова приходим к (5.130).

Заметим, что для данных неколлинеарных векторов **a**, **b** первый, второй или третий случай имеет место в зависимости от положительного, отрицательного или нулевого значения $\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2—(\mathbf{ab})^2$.

5.9. Трехмерное псевдоевклидово информационное пространство индекса 1

После евклидовых информационных пространств индекса $k = 0$, т.е. собственно евклидовых, наибольший интерес представляют евклидовы информационные пространства индекса $k =1$ (они принадлежат к псевдоевклидовым информационным пространствам). Псевдоевклидова плоскость, рассмотренная нами в пп. 5.7, 5.8, — это двумерный случай такого пространства. Евклидово информационное пространство индекса 1 представляет интерес с точки зрения теории дифференциальных уравнений (волновое уравнение с n аргументами) и особенно с точки зрения теории пространства событий. В последнем случае играет роль именно *четырехмерное евклидово информационное пространство индекса* 1. Однако для наглядности мы рассмотрим сначала *трехмерный случай.* Здесь индекс k может принимать значения 0, 1, 2, 3.

При $k = 0$ получаем собственно евклидово (обычное) пространство и при $k = 3$ фактически снова его же. Действительно, все орты будут вместо единичных мнимоединичными, и скалярный квадрат вместо вида

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2}$$

будет иметь вид

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - x^{2^2} - x^{3^2},$$

что означает лишь формальную разницу, сводящуюся к изменению знака у скалярного произведения.

Точно такая же лишь формальная разница будет между случаем $k =1$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}$$

и случаем $k = 2$

$$\mathbf{x}^2 = x^{0^2} - x^{1^2} - x^{2^2}.$$

Поэтому вещественное трехмерное евклидово информационное пространство имеет смысл рассматривать лишь в случаях $k = 0$ (собственно евклидово информационное пространство) и $k=1$ (псевдоевклидово информационное пространство).

К изучению последнего мы и переходим.

Выберем какой-либо ортонормированнми репер. Так как индекс пространства равен единице, то один орт будет мнимоединичным — его мы обозначим $\mathbf{e}_0$, а два других единичными: $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Итак,

$$\mathbf{e}_0^2 = -1, \quad \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1, \quad \text{кроме того,} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{5.133}$$

В соответствии с формулой $g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ мы получаем:

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{ij} = 0 \quad (i \neq j). \tag{5.134}$$

Согласно формуле $x_i = g_{ij} x^j$ получаем связь между ковариантными и контравариантными координатами вектора в виде

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1, \quad x_2 = x^2. \tag{5.135}$$

Скалярное произведение и скалярный квадрат выразятся формулами:

$$\mathbf{xy} = -x^0 y^0 + x^1 y^1 + x^2 y^2, \tag{5.136}$$

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \tag{5.137}$$

Выясним некоторые основные свойства нашего пространства. Прежде всего рассмотрим всевозможные изотропные векторы $\mathbf{x}$, причем для наглядности будем откладывать их от начала O (за начало O можно принять любую точку пространства). Тогда концы векторов $\mathbf{x}$ будут иметь те же координаты x^l, что и сами векторы, а так как векторы изотропные, то $\mathbf{x}^2 = 0$, а следовательно:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = 0. \tag{5.138}$$

Как и в случае псевдоевклидовой плоскости, мы будем пользоваться изображением нашего пространства в обычном пространстве. А именно, орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ данного репера изобразим обыкновенными ортами, начало O — некоторой точкой обычного пространства, а все остальные точки M изобразим такими точками обычного пространства, чтобы вектор $\overrightarrow{OM}$ в изображении разлагался по $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ всегда с теми же коэффициентами, как и в оригинале.

Очевидно, аффинные свойства изображения точно передают аффинные свойства оригинала (мы имеем здесь аффинный изоморфизм), но метрические свойства будут резко различными.

Мы видим, что в изображении концы изотропных векторов располагаются на конусе 2-го порядка (5.138). И в оригинале новерхность (5.138) мы вправе называть конусом 2-го порядка ввиду аффинного характера этого понятия. А именно, конус 2-го порядка в трехмерном вещественном аффинном информационном пространстве можно определить как поверхность, имеющую уравнение вида (5.138) в некоторой аффинной координатной системе.

Конус 2-го порядка, на котором располагаются концы всевозможных изотропных векторов, отложенных из данной точки О, мы будем называть изотропным конусом. В изображении изотропный конус выглядит как прямой круглый конус с осью OX_0 и с углом 45° между осью и образующей. Очевидно, при переходе в другую точку O* изотропный конус переносится параллельным сдвигом на вектор $\overrightarrow{OO^*}$.

Будем откладывать теперь от начала O всевозможные векторы **x** мнимой длины. Для этих векторов $\mathbf{x}^2<0$, а значит, координаты их концов удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}<0, \quad \text{т. е.} \quad |x^0|>\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}. \tag{5.139}$$

Концы этих векторов расположены внутри изотропного конуса, так как в *изображении* их расстояния от оси конуса меньше расстояний от плоскости OX_1X_2 (в то время как для точек конуса эти расстояния равны). Напротив, концы векторов **x** вещественной длины ($\mathbf{x}^2>0$) удовлетворяют условию

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}>0, \quad \text{т. е.} \quad |x^0|<\sqrt{x^{1^2}+x^{2^2}}, \tag{5.140}$$

и располагаются вне изотропного конуса. Аналогичная картина повторяется и при откладывании векторов **x** от любой точки пространства O^*.

Таким образом, прямые, исходящие из данной точки, распадаются на три класса: прямые, расположенные внутри изотропною конуса (длины мнимые), вне изотропного конуса (длины вещественные) и по самому конусу (длины нулевые). Эта картина повторяется в псевдоевклидовом информационном пространстве любого числа измерений (см. рис. 5.5).

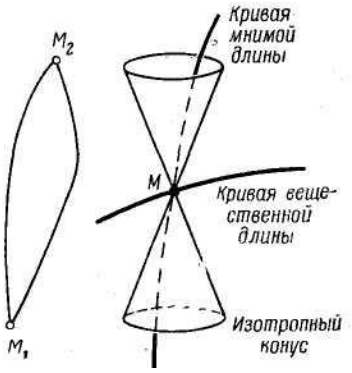


Рис. 5.5.

В двумерном случае роль изотропного конуса играет пара изотропных прямых.

Рассмотрим теперь двумерные плоскости трехмерного псевдоевклидова информационного пространства, причем для простоты будем проводить их также через начало *O*. Здесь возможны три случая.

1°. *Плоскость проходит, не считая точки O, целиком вне изотропного конуса.* Тогда все ее векторы **x** (не считая вектора **x** = 0) обладают положительным скалярным квадратом $\mathbf{x}^2>0$, так что плоскость обладает *собственно евклидовой геометрией* (т. е. на ней имеет место обычная планиметрия).

Примером такой плоскости может служить координатная плоскость X_1OX_2. Обратно, всякая собственно евклидова плоскость, проходящая через *O,* может быть принята за координатную плоскость X_1OX_2 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ строим в плоскости, $\mathbf{e}_0$ — ортогонально к ней).

2°. *Плоскость касается изотропного конуса по одной образующей.* Заметим прежде всего, что касание плоскости с изотропным конусом по его образующей *равносильно* тому, что плоскость проходит через начало *O* и ортогональна к этой образующей.

В самом деле, пусть $\mathbf{u}(u^0, u^1, u^2)$ — радиус-вектор какой-либо (отличной от *O*) точки на образующей. Тогда, как видно из уравнения изотропного конуса, уравнение плоскости, касательной к нему, в этой точке (а следовательно, и вдоль всей образующей) будет:

$$— x^0u^0 + x^1u^1 + x^2u^2 = 0. \qquad (5.141)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\mathbf{xu} = 0, \qquad (5.142)$$

где **x** — радиус-вектор любой точки нашей плоскости. Таким образом, (5.141) равносильно тому, что радиус-вектор любой точки плоскости ортогонален к **u**, т. е. что плоскость проходит через *O* и ортогональна к образующей. Этим наше утверждение доказано.

Теперь ясно, что *плоскость, касающаяся изотропного конуса по образующей, будет изотропной* (так как она содержит вектор **u**, ортогональный ко всем ее векторам).

Обратно, *всякая изотропная плоскость, проходящая через O, будет касаться изотропного конуса по некоторой образующей.* В самом деле, прямая, ортогональная к изотропной плоскости, сама будет изотропной (вытекает из теоремы п. 5.3 при $n = 3>, m=2)$ и, следовательно, если ее провести через начало *O,* является образующей изотропного конуса. Таким образом, наша изотропная плоскость проходит через *O* и ортогональна к одной из образующих изотропного конуса, а это, как мы только что видели, равносильно касанию с изотропным конусом вдоль этой образующей.

3°. *Плоскость пересекается с изотропным конусом по двум образующим.* Тем самым случай касания с конусом устранен, а значит, плоскость неизотропная и несет на себе евклидову метрику. Остается выяснить, чему равен индекс этой метрики: 0, 1 или 2? Собственно евклидов случай $(k = 0)$ и сводящийся к нему $(k = 2)$ отпадают, так как в этих случаях на плоскости нет изотропных прямых, в то время как наша плоскость их содержит (а именно, две образующие, по которым она пересекается с изотропным конусом, и все параллельные им прямые).

Остается случай $k = 1$, т.е. наша плоскость *псевдоевклидова.* Примером такой плоскости может служить координатная плоскость X_0OX_1. Обратно, всякая псевдоевклидова плоскость, проходящая через O, может быть принята за плоскость X_0OX_1 при подходящем выборе ортов ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$ — на плоскости, $\mathbf{e}_2$ — ортогонально ней).

Заметим, что в случае n-мерного псевдоевклидова информационного пространства индекса k=1 все наши рассуждения (проведенные для случая n =3) повторяются дословно; только вместо изотропного конуса нужно рассматривать *изотропный гиперконус*

$$-{x^0}^2 + {x^1}^2 + \ldots + {x^{n-1}}^2 = 0,$$

а вместо плоскостей — гиперплоскости.

Рассмотрим теперь картину взаимно ортогональных направлений в нашем пространстве. Здесь будет более наглядным рассматривать не взаимно ортогональные прямые, а взаимно ортогональные прямую и плоскость (проходящие для простоты через начало O). Пусть прямая задана направляющим вектором $\mathbf{u}$. Тогда радиусы-векторы $\mathbf{x}$ точек плоскости удовлетворяют условию

$$\mathbf{ux} = 0,$$

т. е. плоскость определяется уравнением

$$-u^0x^0 + u^1x^1 + u^2x^2 = 0. \qquad (5.143)$$

С *точки зрения изображения* эта плоскость ортогональна к вектору $\mathbf{u}'(-u^0,\ u^1,\ u^2)$, который представляет собой зеркальное отражение вектора $\mathbf{u}$ относительно плоскости X_1OX_2. Можно сказать и так, что, проводя плоскость, ортогональную к данной прямой с *точки зрения изображения,* и беря ее зеркальное отражение относительно плоскости X_1OX_2 (тоже с точки зрения изображения!), получаем плоскость, ортогональную к данной прямой с точки зрения псевдоевклидовой геометрии. Очевидно, что, когда данная прямая вращается в направлении к изотропному конусу, ортогональная плоскость вращается ей навстречу, причем, когда прямая занимает положение образующей, ортогональная плоскость становится касательной к конусу вдоль этой образующей.

Рассмотрим еще изображения сфер нашего псевдоевклидова информационного пространства, для простоты, с центром в *О*. Снова (как и для окружностей) рассмотрим случаи вещественного, мнимого и нулевого радиуса.

Вообще уравнение сферы с центром в *О*, т. е. уравнение геометрического места точек с постоянным расстоянием ρ от *О*, записывается в виде

$$\mathbf{x}^2 = \rho^2, \text{ т. е. } -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = \rho^2. \qquad (5.144)$$

Если ρ = *а* (радиус вещественный), то полумаем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = a^2,$$

т. е. в нашем *изображении* сфера вещественного радиуса выглядит как однополостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

Если ρ = *ai* (радиус чисто мнимый), то имеем:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2} = -a^2,$$

и сфера чисто мнимого радиуса выглядит в изображении как двуполостный гиперболоид вращения с осью вращения OX_0.

В обоих случаях асимптотическим конусом гиперболоидов служит изотропный конус.

Если же ρ = 0, то уравнение (5.144) совпадает с (5.138), так что сфера нулевого радиуса совпадает с изотропным конусом, что ясно и из его определения.

5.10. *n*-мерное псевдоевклидово информационное пространство индекса 1

Мы уже упоминали, что в *n*-мерном случае псевдоевклидово информационное пространство индекса 1 будет выглядеть в основном сходно с трехмерным случаем. Действительно, мнимоединичный орт $\mathbf{e}_0$ остается по-прежнему единственным, увеличивается лишь число единичных ортов: вместо $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ мы будем иметь $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_{n-1}$. Скалярный квадрат вектора будет теперь выражаться формулой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} \qquad (5.145)$$

вместо частного случая этой формулы

$$\mathbf{x}^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} + x^{2^2}. \qquad (5.146)$$

Нетрудно повторить все построения и выводы п. 5.9 и для *n*-мерного случая. Так, *изотропный гиперконус* определяется уравнением

$$-x^{0^2} + x^{1^2} + \ldots + x^{n-1^2} = 0, \qquad (5.147)$$

его внутренняя область определяется условием

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}<0, \tag{5.148}$$

а внешняя —условием

$$-x^{0^2}+x^{1^2}+\ldots+x^{n-1^2}>0. \tag{5.149}$$

Наименования «внешняя» и «внутренняя» можно оправдать без апелляции к наглядности тем, что внутренняя область *всегда* содержит вместе с двумя какими-нибудь точками *A, B* и соединяющий их отрезок; внешняя область этим свойством не обладает.

Таким же образом и далее можно воспроизвести почти автоматически все построения р. 5.9. Разница будет лишь в том, что в трехмерном случае мы могли широко использовать наглядное представление, построив в обычном пространстве изображение нашего псевдоевклидова инфомационного пространства. При этом искажались метрические свойства, но по отношению к аффинным свойствам, в частности, к числу измерений пространства, изображение было точным. Таким образом, трудность, если таковая вообще была, заключалась лишь в непривычном характере метрики. Теперь на эту трудность накладывается и другая — многомерный характер пространства. Тем не менее мы не отказываемся и здесь от использования наглядных представлений по аналогии с трехмерным случаем. Мы будем делать чертежи, апеллирующие, конечно, к трехмерному наглядному представлению, но используемые нами по аналогии для многомерного случая.

Для дальнейшего нам будет особенно важен четырехмерный случай, когда ортонормированный репер имеет орты $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{e}_0^2=-1,\ \ \mathbf{e}_1^2=\mathbf{e}_2^2=\mathbf{e}_3^2=1, \tag{5.150}$$

и скалярный квадрат вектора имеет вид

$$\mathbf{x}^2=-x^{0^2}+x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}. \tag{5.151}$$

Трехмерная гиперплоскость R_3, построенная на единичных ортах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и проходящая через начало O, имеет уравнение

$$x^0=0. \tag{5.152}$$

Положение точки на гиперплоскости R_3 определяется тремя координатами x^1, x^2, x^3, причем формула скалярного квадрата (5.147) принимает вид

$$\mathbf{x}^2=x^{1^2}+x^{2^2}+x^{3^2}.$$

Ясно, что R_3 несет на себе обычную (трехмерную собственно евклидову) геометрию. Этим же свойством будет обладать и любая трехмерная плоскость, проходящая через вершину изотропного гиперконуса и лежащая в остальном вне его (в соответствии с результатами п. 5.9, если их повторить для четырехмерного случая).

Изучим теперь преобразование одного ортонормированного репера в другой. Орты нового репера обозначим:

$$\mathbf{e}_{0'},\ \mathbf{e}_{1'},\ \mathbf{e}_{2'},\ \mathbf{e}_{3'}. \qquad (5.153)$$

Начало *O* будем считать прежним. Плоскость R_3 для нового репера обозначим R'_3.

Вообще преобразование старых ортов в новые в четырехмерном случае — вещь достаточно громоздкая. Но мы сумеем свести его к двумерному случаю следующим приемом.

Будем называть *тривиальным вращением* репера такое его преобразование, при котором плоскость R_3 остается без изменения и, следовательно, ортогональный к ней орт $\mathbf{e}_0$ или не меняется или меняется на обратный, а орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ испытывают вращение в плоскости R_3. Это вращение, происходящее, таким образом, в обычном трехмерном пространстве (геометрию которого несет на себе R_3), изучается в элементарном курсе аналитической геометрии и никаких затруднений для нас не представляет.

Оказывается, что если старый и новый реперы подвергнуть предварительно тривиальному вращению, то переход от одного к другому становится очень простым.

Мы предполагаем, что плоскости R_3 и R'_3 не совпадают; в противном случае переход от старого репера к новому можно было бы совершить просто при помощи тривиального вращения.

Поскольку трехмерные плоскости R_3 и R'_3 в четырехмерном пространстве не совпадают и имеют общую точку, то они пересекаются по двумерной плоскости R_2. Это видно из того, что место их пересечения будет определяться парой независимых однородных линейных уравнений. Итак, плоскость R_2 принадлежит и R_3 и R'_3.

Выполним теперь в трехмерной плоскости R_3 такое вращение ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, чтобы орты $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ поместились на двумерную плоскость R_2. После этого в трехмерной плоскости R'_3 выполним вращение ортов $\mathbf{e}_{1'}$, $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$, таким образом, чтобы $\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$ тоже поместились на R_2 и притом совпали с $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (уже помещенными на ней). Возможность всех этих операций не вызывает сомнений, так как они происходят в обычных трехмерных пространствах R_3 и R'_3.

Итак, за счет тривиальных вращений старого и нового реперов можно добиться совпадения ортов:

$$\mathbf{e}_{2'} = \mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{e}_{3'} = \mathbf{e}_3. \qquad (5.154)$$

Теперь нужно рассмотреть оставшуюся часть преобразования. Плоскости ортов ($\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) и ($\mathbf{e}_{2'}$, $\mathbf{e}_{3'}$) совпадают, следовательно, совпадают и ортогональные к ним псевдоевклидовы плоскости ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$) и ($\mathbf{e}_{0'}$, $\mathbf{e}_{1'}$). Преобразование свелось, таким образом, к преобразованию репера $\mathbf{e}_0$,

$\mathbf{e}_1$ в псевдоевклидовой плоскости, а это преобразование было нами хорошо изучено и имеет вид (5.105):

$$\mathbf{e}_{0'} = \frac{\mathbf{e}_0 + \beta \mathbf{e}_1}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{e}_{1'} = \frac{\beta \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1}{\pm \sqrt{1-\beta^2}}. \tag{5.155}$$

Мы считали, что начало O у старого и нового реперов общее. Но если это не так, то начала O, O' можно предварительно совместить параллельным сдвигом одного из реперов.

В результате всякое преобразование ортоноржированного репера $\{O,\ \mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ *с точностью до тривиальных вращений и параллельного сдвига сводится к преобразованию* (5.154), (5.155).

5.11. Ортогональные преобразования

Выясним теперь степень произвола в выборе ортонормированного репера в евклидовом информационном пространстве. Уже из способа построения репера ясно, что такой произвол имеется; мы хотим теперь точно определить, как в общем случае преобразуется один ортонормированный репер $\mathfrak{R}$ в другой $\mathfrak{R}'$. Ясно также, что начало O можно передвигать при этом произвольно, так что мы займемся лишь преобразованием ортов. Пусть они преобразуются по формуле

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i. \tag{5.156}$$

Какова должна быть матрица $A^i_{i'}$, для того, чтобы преобразование переводило векторы ортонормированного репера снова в векторы ортонормированного репера?

Мы рассмотрим сначала случаи *комплексного евклидова и собственно евклидова* информационных пространств и притом параллельно; будем помнить лишь, что в первом случае все рассматриваемые численные величины, вообще говоря, комплексные, а во втором — вещественные. В остальном изложение протекает одинаково.

Вслед за преобразованием репера преобразуются ковариантные и контравариантные координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ соответственно по формулам:

$$x_{i'} = A^i_{i'} x_i, \tag{5.157}$$

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i. \tag{5.158}$$

Но в силу (5.53) и (5.76) в ортонормированных реперах $x_i = x^i$, а следовательно, закон преобразования для них должен быть одинаковым (тем самым для ортонормированных реперов исчезает разница между ковариантными и контравариантными индексами), и мы получаем:

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i. \quad (5.159)$$

Другими словами, матрица $A^i_{i'}$ преобразования ортонормированного репера в ортонормированный репер должна *совпадать со своей транспонированной обратной матрицей* $A^{i'}_i$. Транспонирование обратной матрицы сказывается в том, что в (5.159) приравниваются элементы матриц с одинаковыми, но поменявшимися местами индексами. Матрицу со свойством (5.159) мы будем называть *ортогональной,* при этом *вещественной* или *комплексной* в зависимости от характера ее элементов.

Обратно, если соблюдается условие (5.159), то, преобразуя ортонормированный репер при помощи (5.156), мы снова получаем ортонормированный репер. В самом деле, до преобразования мы в ортонормированием репере имеем для любого вектора $x_i = x^i$. Но в силу (5.159) это равенство сохраняется и в преобразованном репере, как видно из (5.157), (5.158):

$$x_{i'} = x^{i'},$$

т. е.

$$g_{i'j'} x^{j'} = x^{i'}.$$

Так как это равенство верно для любого вектора **x**, то оно представляет собой тождество относительно $x^{j'}$, откуда следует:

$$g_{i'j'} = \begin{cases} 0 & (j' \neq i') \\ 1 & (j' = i') \end{cases}.$$

Тем самым преобразованный репер оказывается тоже ортонормированным.

Итак, для того чтобы матрица $A^i_{i'}$ отвечала переходу от одного ортонормированного репера к другому, необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была ортогональной, т. е. чтобы

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i.$$

Произведение взаимно обратных матриц в любом порядке дает единичную матрицу:

$$A^k_{i'} A^{j'}_k = \delta^{j'}_{i'}, \qquad A^j_{k'} A^{k'}_i = \delta^j_i. \quad (5.160)$$

В нашем случае

$$A^{j'}_k = A^k_{j'}, \qquad A^{k'}_i = A^i_{k'}, \quad (5.161)$$

и мы получаем:

$$\sum_k A_{i'}^k A_{j'}^k = \begin{cases} 0 & (i' \neq j') \\ 1 & (i' = j') \end{cases}, \qquad \sum_{k'} A_{k'}^i A_{k'}^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}, \tag{5.162}$$

т. е. в ортогональной матрице произведение двух строк дает нуль, если эти строки различны, и единицу, если они совпадают; тем же самым свойством обладают и столбцы. Обратно, если такое свойство имеет место хотя бы только для строк или только для столбцов, то справедливо одно из соотношений (5.162), например, первое. Но в этом соотношении, как можно убедиться, сравнивая его с первым соотношением (5.160), роль обратной матрицы $A^{j'}{}_k$ играет транспонированная данная матрица, так что мы возвращаемся к условию (5.159), и наша матрица будет ортогональной.

Ортогональные матрицы обладают определителем, равным ± 1, и в соответствии с этим распадаются на два класса.

Действительно, согласно (5.159) матрицы $A^i{}_{i'}$ и $A^{i'}{}_i$ должны обладать одним и тем же определителем; но в то же время эти матрицы, как матрицы взаимно обратные, должны обладать и обратными (т. е. дающими в произведении единицу) определителями. Таким образом, определитель матрицы $A^i{}_{i'}$ должен быть обратным самому себе, т. е. равным + 1.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\mathrm{Det}|\,A^i{}_{i'}| = 1 \tag{5.163}$$

мы будем называть его *собственным движением,* в частности, при неподвижном начале *О* — *собственным вращением около О.* Собственные движения репера $\mathfrak{R}$, как можно было бы показать, всегда допускают непрерывный переход от одного из них к другому за счет непрерывного изменения репера $\mathfrak{R}'$ при постоянном $\mathfrak{R}$. В частности, любое из них может быть осуществлено непрерывным переходом от тождественного преобразования (которое, конечно, входит в число собственных движений). Геометрически это значит, что если в результате собственного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, то $\mathfrak{R}'$ можно получить непрерывным изменением $\mathfrak{R}$. При этом здесь и в дальнейшем подразумевается что в процессе изменения репер остается ортонормированным.

Преобразование репера $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ при условии

$$\mathrm{Det}|\,A^i{}_{i'}| = -1 \tag{5.164}$$

мы будем называть его *несобственным движением.* Несобственные движения легко получить из собственных, накладывая на каждое из них зеркальное отражение репера относительно одной из его гиперплоскостей: например, оставляя начало *О* и все орты $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ без изменения, а орт $\mathbf{e}_1$ заменяя через $-\mathbf{e}_1$. Очевидно, это элементарное преобразование, наложенное на любое собственное движение, приводит к изменению знака Det| $A^i_{i'}$|, т. е. к превращению этого движения в несобственное.

Между любыми двумя несобственными движениями возможен непрерывный переход, что вытекает из аналогичного свойства собственных движений. Но, конечно, непрерывный переход от собственного к несобственному движению невозможен, так как Det| $A^i_{i'}$| не может непрерывным образом перейти от значения +1 к значению — 1.

Если выбрать какой-нибудь репер $\mathfrak{R}_0$ и отнести к одному классу все реперы $\mathfrak{R}'$, получающиеся из него собственными движениями, а к другому — все реперы $\mathfrak{R}''$, получающиеся из него несобственными движениями, то все реперы распадаются на два класса, причем в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, а от одного класса к другому непрерывный переход невозможен. Полученное разбиение на реперы данной и противоположной ориентации аналогично рассмотренному в вещественном аффинном информационном пространстве. Разница только в том, что сейчас нас интересуют не любые аффинные, а лишь ортонормированные реперы; это приводит и в *комплексном* случае к той же картине (в то время как комплексные *аффинные* реперы на два класса не распадаются).

5.12. Псевдоортогональные преобразования

Рассмотрим теперь случай, когда (5.156) дает преобразование репера $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ *в псевдоевклидовом информационном пространстве индекса* k. Мы будем считать, что k принимает значения 1, 2, ..., n—1. Случай k — n исключаем, как приводящий по существу к собственно евклидову информационному пространству; в этом случае $A^i_{i'}$ — тоже вещественная ортогональная матрица.

Пусть, как обычно, $\mathbf{e}_1$, . . ., $\mathbf{e}_k$ (соответственно $\mathbf{e}_{1'}$, . . ., $\mathbf{e}_{k'}$) — мнимоединичные орты; остальные орты—единичные. Пусть индексы α, β, γ, … пробегают у нас значения 1, 2, . .., k, а индексы λ, μ, ν, ...— значения k+1, ..., n.

Тогда разложение

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i$$

можно записать в детализированном виде, отличая единичные и мнимоединичные орты:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{e}_{\alpha'} &= A^{\alpha}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha} + A^{\lambda}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\lambda}\,, \\ \mathbf{e}_{\lambda'} &= A^{\alpha}_{\lambda'}\mathbf{e}_{\alpha} + A^{\lambda}_{\lambda'}\mathbf{e}_{\lambda}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (5.165)$$

В правых частях по α и λ происходит суммирование. Вся матрица преобразования состоит, таким образом, из четырех матриц:

$$\|A^i_{i'}\| = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\hphantom{A^\alpha_{\alpha'}}}^{k} & \overbrace{\hphantom{A^\lambda_{\alpha'}}}^{n-k} \end{array} \\ \left\|\begin{array}{c|c} A^\alpha_{\alpha'} & A^\lambda_{\alpha'} \\ \hline A^\alpha_{\lambda'} & A^\lambda_{\lambda'} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{A^\alpha_{\alpha'}}\right\} k \\ \left.\vphantom{A^\alpha_{\lambda'}}\right\} n-k \end{array}. \qquad (5.166)$$

При помощи этой же матрицы преобразуются, как мы знаем, ковариантные координаты x_i произвольного вектора **x**:

$$\left.\begin{aligned} x_{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'} x_\alpha + A^\lambda_{\alpha'} x_\lambda , \\ x_{\lambda'} &= A^\alpha_{\lambda'} x_\alpha + A^\lambda_{\lambda'} x_\lambda . \end{aligned}\right\} \qquad (5.167)$$

Но его контравариантные координаты x^i преобразуются при помощи транспонированной обратной матрицы, а именно:

$$x^{i'} = A^{i'}_{\ i}\, x^i,$$

или, как мы теперь можем записать:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^{\alpha'}_\alpha x^\alpha + A^{\alpha'}_\lambda x^\lambda, \\ x^{\lambda'} &= A^{\lambda'}_\alpha x^\alpha + A^{\lambda'}_\lambda x^\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (5.168)$$

Но в любом ортонормированном репере между x^i и x_i существует связь (5.69), которую мы теперь можем записать в виде

$$x_\alpha = -x^\alpha, \qquad x_\lambda = x^\lambda. \qquad (5.169)$$

Заменяя согласно этим формулам ковариантные координаты через контравариантные в преобразовании (5.167), получим:

$$\left.\begin{aligned} x^{\alpha'} &= A^\alpha_{\alpha'} x^\alpha - A^\lambda_{\alpha'} x^\lambda, \\ x^{\lambda'} &= -A^\alpha_{\lambda'} x^\alpha + A^\lambda_{\lambda'} x^\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (5.170)$$

В правых частях по α и λ по-прежнему подразумевается суммирование. Матрица, посредством которой производится преобразование (5.170), отличается от матрицы (5.166) лишь изменением знака у элементов с разнородными индексами. Но преобразование (5.170) — это лишь другая запись преобразования (5.168), и матрицы у них должны совпадать:

$$\left.\begin{aligned} A^{\alpha'}_\alpha &= A^\alpha_{\alpha'}, & A^{\alpha'}_\lambda &= -A^\lambda_{\alpha'}, \\ A^{\lambda'}_\alpha &= -A^\alpha_{\lambda'}, & A^{\lambda'}_\lambda &= A^\lambda_{\lambda'}. \end{aligned}\right\} \qquad (5.171)$$

Таким образом, *матрица* (5.166) *после изменения знаков элементов в правой верхней и левой нижней клетках совпадает со своей транспонированной обратной матрицей.*

Такие матрицы мы будем называть *псевдоортогональными матрицами* индекса *k*. Если матрица $A^i_{i'}$ псевдоортогональная, то обратная матрица $A^{i}_{i'}$ тоже псевдоортогональная того же индекса *k*. Это видно хотя бы из полной симметрии формул (5.171) относительно обеих матриц.

Таким образом, переход от ортов старого к ортам нового репера осуществляется при помощи псевдоортогональной матрицы. Обратно, всякая псевдоортогональная матрица (индекса *k)* переводит любой данный ортонормированный репер (в пространстве индекса *k)* снова в ортонормированный репер. Это следует из того, что при наличии условий (5.171) закон преобразования контравариантных координат (5.168) можно переписать в виде (5.170); далее, сравнивая закон преобразования (5.170) с (5.167) и пользуясь соотношениями (5.169), которые имеют место в *данном ортонормированием репере,* убеждаемся, что и *в преобразованном репере* эти соотношения также справедливы:

$$x_{\alpha'} = -x^{\alpha'}, \quad x_{\lambda'} = x^{\lambda'}. \tag{5.172}$$

Сравнивая полученные формулы с общей формулой опускания индекса

$$x_{i'} = g_{i'j'}x^{j'},$$

убеждаемся, что в полученном репере

$$g_{\alpha'\alpha'} = -1, \quad g_{\lambda'\lambda'} = 1, \quad g_{i'j'} = 0 \quad (i' \neq j'),$$

т. е. что репер *ортонормированный.*

Псевдоортогональные матрицы (подобно ортогональным) можно было бы характеризовать условиями, наложенными на попарные произведения их строк, однако теперь произведение двух строк нужно понимать как сумму произведений соответствующих элементов перемножаемых строк, *причем первые k произведений берутся с обратными знаками.* Тогда произведение разных строк всегда давало бы нам нуль, а произведение одинаковых или — 1 (для первых *k* строк) или +1 (для остальных).

Все сказанное справедливо и для столбцов.

Нетрудно обнаружить, что, как и для ортогональных матриц,

$$\mathrm{Det}\,|A^{i}_{i'}| = \pm 1. \tag{5.173}$$

В самом деле, изменение знаков в правой верхней и левой нижней клетках матрицы (5.166) не меняет ее определителя, так как сводится к умножению на — 1 первых *k* ее строк и первых *k* ее столбцов (а определитель умножается при этом на $(-1)^{2k} = 1$). В то же время это изменение знаков означает согласно (5.171) переход к транспонированной обратной матрице, а значит, и определитель меняет свое значение на обратное. Таким образом, Det| $A^{i}_{i'}$| равен своей обратной величине, а это влечет равенство (5.173).

Однако в случае псевдоортогональных матриц их классификация по значению определителя ± 1 оказывается слишком грубой. Фактически псевдоортогональные матрицы данного порядка *n* и данного индекса *k* распадаются не на два, а на четыре класса (аналогично простейшему случаю псевдоевклидовой плоскости, когда *n* = 2, *k* = 1).

В самом деле, заметим, прежде всего, что в матрице (5.166) левая верхняя и правая нижняя клетки содержат неособенные матрицы (порядков *k* и *n*—*k* соответственно):

$$\mathrm{Det}\,|A^{\alpha}_{\alpha'}| \neq 0, \quad \mathrm{Det}\,|A^{\lambda}_{\lambda'}| \neq 0. \tag{5.174}$$

Чтобы показать это, допустим противное, например,

$$\mathrm{Det}\,|A^{\alpha}_{\alpha'}| = 0.$$

Тогда между строками матрицы $A^{\alpha}_{\alpha'}$ (α'— номер строки) существует линейная зависимость, которую можно написать в виде

$$a^{\alpha'}A^{\alpha}_{\alpha'} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ k); \tag{5.175}$$

по α' происходит суммирование. Умножая верхнее равенство (5.165) на $a^{\alpha'}$ и суммируя по $\alpha'=1', \ldots, k'$, получаем (учитывая (5.175)):

$$\sum_{\alpha'} a^{\alpha'}\mathbf{e}_{\alpha'} = \sum_{\alpha'} a^{\alpha'}A^{\lambda}_{\alpha'}\mathbf{e}_{\lambda}.$$

Так как коэффициенты линейной зависимости $a^{\alpha'}$ не обращаются в нуль одновременно, то скалярный квадрат левой части равенства будет отрицательным (так как $\mathbf{e}^2_{\alpha'}= -1$, $\mathbf{e}_{\alpha'}\,\mathbf{e}_{\beta}= 0$), а скалярный квадрат правой части будет положительным, в крайнем случае нулем (так как $\mathbf{e}^2_{\lambda}=1$, $\mathbf{e}_{\lambda}\mathbf{e}_{\mu} = 0$). Полученное противоречие показывает справедливость нашего утверждения (5.174). В результате для определителей (5.174) возможны следующие четыре комбинации знаков, соответственно чему распадаются на четыре класса и *движения* ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ (как мы будем кратко называть переход от одного ортонормированного репера $\mathfrak{R}$ к другому $\mathfrak{R}'$*).*

	$\mathrm{Det}\,\|A^{\alpha}_{\alpha'}\|$	$\mathrm{Det}\,\|A^{\lambda}_{\lambda'}\|$	Тип движения
1°	+	+	Собственное движение
2°	+	—	Несобственное движение 1-го рода
3°	—	+	Несобственное движение 2-го рода
4°	—	—	Несобственное движение 3-го рода

(5.176)

Простейшими примерами движений каждого из четырех типов служат:

1°. Тождественное преобразование.

2°. $\mathbf{e}_n$ переходит в $-\mathbf{e}_n$ ⎫ остальные орты
3°. $\mathbf{e}_1$ » » $-\mathbf{e}_1$ ⎬ и начало O не меняются.
4°. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n$ » » $-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_n$ ⎭

Так как рассматриваемые определители не могут принимать нулевых значений, то при неизменном $\mathfrak{R}$ и непрерывном изменении $\mathfrak{R}'$ движение всегда остается в пределах одного из указанных четырех типов. Можно было бы показать также (этого мы делать не будем), что в пределах одного типа всегда возможен непрерывный переход от одного движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ к любому другому $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$ в смысле *непрерывного* перехода репера $\mathfrak{R}'$ в $\mathfrak{R}''$.

В результате движения каждого типа можно характеризовать тем, что они могут быть получены непрерывным переходом от простейшего движения этого же типа. В частности, собственные движения $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ характеризуются тем, что их можно получить непрерывным переходом от тождественного преобразования, т. е. $\mathfrak{R}'$ *получается непрерывным изменением* $\mathfrak{R}$.

Отсюда вытекает также, что последовательное выполнение двух собственных движений $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}' \to \mathfrak{R}''$ дает снова собственное движение $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}''$. В самом деле, поскольку переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}'$ и от $\mathfrak{R}'$ к $\mathfrak{R}''$ происходит в результате непрерывного изменения репера, то тем же свойством обладает и переход от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}''$.

Нетрудно было бы составить таблицу, которая указывала бы, какой тип движения мы получим в результате наложения движений двух данных типов. За образец можно принять простейшие движения каждого из четырех типов; наложение их дает всегда одно из этих же простейших движений. Если перейти теперь от простейших движений к произвольным движениям *этих же типов,* то ввиду непрерывности такого перехода тип результирующего движения не изменится; таблица, составленная для простейших движений, будет пригодна во всех случаях.

Далее, так как при непрерывном изменении движения Det$|A^{i}_{i'}|$ (равный ± 1) не меняется, то для любого движения он будет таким же, как и для простейшего движения этого же класса, т. е.

Det$|A^{i}_{i'}| = 1$ для движений классов 1°, 4°;
Det$|A^{i}_{i'}| = -1$ » » » 2°, 3°.

Таким образом, наша классификация (5.176) является действительно подразделением более грубой классификации (5.173).

Нетрудно уяснить себе наглядный смысл нашей классификации движении: собственное движение не меняет ориентации не только

всего репера в целом, но и отдельно его частей: $\mathbf{e}_\alpha$ (совокупность мнимоединичных ортов) и $\mathbf{e}_\lambda$, (совокупность единичных ортов); несобственное движение 1-го рода не меняет ориентации $\mathbf{e}_\alpha$, но меняет ее для $\mathbf{e}_\lambda$; несобственное движение 2-го рода ведет себя обратным образом; наконец, несобственное движение 3-го рода меняет ориентацию и для $\mathbf{e}_\alpha$, и для $\mathbf{e}_\lambda$, но не меняет ее для репера в целом.
При этом мы говорим, что векторы $\mathbf{e}_{\alpha'}$ и $\mathbf{e}_\alpha$ имеют одинаковую ориентацию тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Det}|\, A^{\alpha}{}_{\alpha'}| > 0, \qquad (5.177)$$

и аналогично для $\mathbf{e}_{\lambda'}$ и $\mathbf{e}_\lambda$.

Чтобы это понятие об одинаковой ориентации векторов $\mathbf{e}_{\alpha'}$ и $\mathbf{e}_\alpha$ (и аналогично $\mathbf{e}_{\lambda'}$, $\mathbf{e}_\lambda$) имело смысл, нужно чтобы оно обладало транзитивностью. Другими словами, нужно, чтобы сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ при переходе от первого репера ко второму и от второго к третьему влекло бы за собой сохранение ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ и при переходе от первого репера к третьему. Но это можно показать так: ввиду сохранения ориентации $\mathbf{e}_\alpha$ оба перехода будут принадлежать к типам 1°, 2° таблицы (5.176). Наложение двух таких движений дает движение снова типа 1° или 2°, что легко усмотреть, беря для образца простейшие движения типов 1°, 2°. Таким образом, для результирующего движения условие (5.177) снова соблюдается и $\mathbf{e}_\alpha$ для первого и третьего реперов имеют снова одинаковую ориентацию.

Для $\mathbf{e}_\lambda$ проводится совершенно аналогичное рассуждение, но для типов 1°, 3°.

Обращает на себя внимание то, что имеет смысл говорить об одинаковой (или различной) ориентации векторов, например, $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{e}_{\alpha'}$, несмотря на то, что они определяют различные *k*-мерные плоскости. Но дело в том, что эти плоскости в нашем пространстве — максимально-мерные плоскости со знакоотрицательной метрикой
($\mathbf{x}^2 < 0$), а такие плоскости, как можно было бы показать, нельзя вращать слишком свободно (иначе в них появятся $\mathbf{x}^2 > 0$), в частности, нельзя «перевертывать» и накладывать на себя с обратной ориентацией. Поэтому ориентацию, выбранную на одной из них, можно однозначно перенести, непрерывно вращая эту плоскость, и на все другие такие плоскости, — подобно тому, как это можно сделать (применяя грубое сравнение) для всех плоскостей обычного пространства, наклоненных к данной плоскости под углом не более чем, например, 20°.

Выберем какой-нибудь репер $\Re_0$ и разобьем все реперы пространства на четыре класса в зависимости от того, получаются ли они из $\Re_0$ движениями собственными или несобственными 1-го, 2-го и 3-го рода. Тогда согласно выше сказанному в пределах каждого класса возможен непрерывный переход от одного репера к другому, но непрерывный переход от одного класса к другому невозможен. Очевидно, такое разбиение всех реперов $\mathfrak{R}$ на четыре класса от выбора начального репера $\mathfrak{R}_0$ не зависит (если нумерацией этих классов не интересоваться).

5.13. Квазиаффинная и аффинная группы преобразований

В этом и следующем пунктах мы хотим отчетливо выявить некоторые основные идеи, лежащие в основе аффинной, евклидовой и вообще всех «однородных» информационных пространств. В самом деле, однородный в каком-то смысле характер рассмотренных нами до сих пор информационных пространств, их одинаковое строение в разных местах и в разных направлениях, с наглядной точки зрения представляется очевидным. Этой идее однородности мы придадим точную математическую форму, в этом пункте для аффинных, а в следующем — для евклидовых информационных пространств. Попутно мы уточним и понятие о преобразованиях репера; с этого мы и начнем.

Произвольный репер в n-мерном аффинном информационном пространстве $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ определяется $n^2 + n$ независимыми информационными параметрами (в комплексном случае — комплексными, в вещественном— вещественными). Действительно, начало O и каждый из векторов e_i определяется n координатами. При этом из условия линейной независимости векторов репера следует, что определитель, образованный их координатами, отличен от нуля. В остальном $n^2 + n$ информационных параметров совершенно произвольны.

Мы рассматривали до сих пор обычно преобразование одного определенного репера в другой. Сейчас мы станем на более широкую точку зрения и будем применять данное преобразование сразу ко всем ∞^{n^2+n} аффинным реперам, в результате чего каждый из них переходит в некоторый другой. А именно, *применить данное преобразование к информационному многообразию* (множество всех аффинных реперов мы будем называть информационным многообразием, намекая на его некоторые информационные свойства; общая формулировка понятия информационного многообразия будет дана позже) *аффинных реперов это значит указать для каждого репера* $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ *новый репер* $\{O', \mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}$, *имеющий заданное расположение относительно старого репера.* Другими словами, для каждого репера $\{O, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$

векторы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ и вектор сдвига $\overrightarrow{OO'}$ разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ *с одними и теми же численными коэффициентами:*

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO'} = A^i\,\mathbf{e}_i. \tag{5.178}$$

Произвольно взятыми численными коэффициентами $A^i_{i'}$, A^i (при условии Det$|A^i_{i'}| \neq 0$) и характеризуется данное преобразование в информационном многообразии реперов.

Можно также вместо коэффициентов A^i задаваться коэффициентами $A^{i'}$, положив

$$\overrightarrow{OO'} = -A^{i'}\mathbf{e}_{i'}.$$

Тогда

$$A^{i'} = -A^{i'}_i A^i \text{ и, обратно, } A^i = -A^i_{i'}A^{i'}. \tag{5.179}$$

Последние соотношения легко получить, пользуясь зависимостью между $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i'}$.

Рассматриваемые нами в информационном многообразии реперов преобразования (5.178) являются взаимно однозначными и *образуют группу.*

Последнее означает, что совокупность наших преобразований содержит, во-первых, обратное преобразование для каждого из них и, во-вторых, результирующее преобразование для любых двух из них (а следовательно, и тождественное преобразование).

Проверка этих утверждений тривиальна: достаточно убедиться, что при построении обратного и результирующего преобразований мы получаем преобразование того же вида (5.178), причем его коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i полностью выражаются через коэффициенты исходных преобразований (и следовательно, вместе с ними имеют одни и те же численные значения для всех реперов).

Преобразования информационного многообразия аффинных реперов в себя (5.178) *мы будем называть квазиаффинными преобразованиями, а группу этих преобразований — квазиаффинной группой.*

Квазиаффинная группа в информационном многообразии реперов является *однотранзитивной,* т. е. квазиаффинное преобразование вполне определяется заданием двух произвольно выбранных реперов $\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $\{O', \mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, если потребовать, чтобы первый из них при этом переходил во второй. Действительно, коэффициенты $A^i_{i'}$, A^i вполне определятся из разложений (5.178), а тем самым определится и соответствующее квазиаффинное преобразование (путем применения формул (5.178) с теми же численными значениями $A^i_{i'}$, A^i к *каждому* реперу).

Очень важно отчетливо представлять себе, что квазиаффинная группа действует не в аффинном информационном пространстве, а в информационном многообразии его реперов. Более того, ее нельзя даже истолковать как группу, действующую в самом аффинном информационном пространстве. В самом деле, попробуем истолковать квазиаффинное преобразование как точечное преобразование в аффинном информационном пространстве. Для этого рассмотрим всевозможные реперы, имеющие общим началом какую-нибудь точку *О,* и подвергнем их одновременно *одному и тому же* квазиаффинному преобразованию. Векторы сдвига $\overrightarrow{OO'}$, именно потому, что они будут разлагаться в *разных реперах с одними и теми же* коэффициентами A^i, будут, вообще говоря, различными, и начала наших реперов «расползутся» из общей точки *О* по разным направлениям. Точка *О* в результате квазиаффинного преобразования не будет иметь образа.

Квазиаффинное преобразование информационного многообразия реперов можно также рассматривать как преобразование соответствующих аффинных координатных систем; а именно, каждая координатная система преобразуется в другую согласно (3.70):

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}, \tag{5.180}$$

где $A^{i'}_i$, $A^{i'}$ имеют фиксированные значения: $A^{i'}_i$ — матрица, обратная $A^i_{i'}$, A^i имеет то же значение, как и в (5.179). Здесь x^i—координаты произвольной точки относительно старого репера, а $x^{i'}$ —координаты той же точки относительно преобразованного репера; коэффициенты преобразования произвольны с единственным ограничением

$$\mathrm{Det}|A^{i'}_i| \neq 0 \tag{5.181}$$

Оставим теперь квазиаффинные преобразования и займемся вопросом «об однородности» аффинного информационного пространства. Прежде всего сформулируем понятие об изоморфизме двух *п*-мерных аффинных информационных пространств.

Мы называем аффинным изоморфизмом двух аффинных информационных пространств такое взаимно однозначное отображение точек одного информационного пространства в точки другого и векторов одного информационного пространства в векторы другого, что: 1) *если точкам А, В первого информационного пространства отвечают точки А*, В* второго информационного пространства, то вектору* $\overrightarrow{AB}$ *отвечает вектор* $\overrightarrow{A^*B^*}$; 2) *если вектору* **x** *первого информационного пространства отвечает вектор*

x* *второго информационного пространства, то вектору* α**x** *отвечает вектор* α**x*** *(где* α *— любое число, комплексное в случае комплексного информационного пространства и вещественное в случае вещественного информационного пространства).*

В частности, когда рассматриваемые информационные пространства совпадают и речь идет о взаимно однозначном отображении точек и векторов аффинного информационного пространства в точки и векторы того же информационного пространства (с соблюдением прежних требований), то изоморфизм мы будем называть *автоморфизмом* или *аффинным преобразованием* аффинного информационного пространства в себя.

Наше определение изоморфизма подобрано так, что, переходя от точек и векторов первого информационного пространства к точкам и векторам второго информационного пространства, мы не нарушаем никаких их аффинных свойств и соотношений; эти взаимоотношения в точности повторяются и после перехода. Действительно, если внимательно просмотреть нашу аксиоматику аффинного информационного пространства, то нетрудно заметить, что в ней фигурируют по существу лишь два основных взаимоотношения между точками и векторами: что данный вектор **x** определяется парой данных точек *A, B* ($\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$) и что данный вектор **y** есть вектор **x**, умноженный на число α ($\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$). В остальном аксиомы говорят о свойствах этих взаимоотношений, но каких-либо иных взаимоотношений не устанавливают.

Из определения изоморфизма легко получается, в частности, что вектор-нуль отображается в вектор-нуль, сумма векторов отображается в сумму отображенных векторов и т. д. Линейная зависимость между векторами, как следует отсюда, переходит в линейную зависимость с теми же коэффициентами. Поэтому размерность *n,* т. е. максимальное возможное число линейно независимых векторов, будет в изоморфных пространствах обязательно одинаковой.

Выберем в первом аффинном пространстве какой-либо репер

$$\mathfrak{R}_0\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n\}.$$

В силу изоморфизма ему отвечает во втором информационном пространстве некоторый репер

$$\mathfrak{R}_0^*\{O^*,\ \mathbf{e}_1^*,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n^*\}.$$

Каждому вектору

$$\mathbf{x}=x^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} \tag{5.182}$$

отвечает вектор

$$\mathbf{x}^*=x^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha}^*; \tag{5.183}$$

с теми же координатами x^α в силу сохранения линейных зависимостей при изоморфизме.

В частности, радиус-вектор $\vec{OM}$ каждой точки *М* переходит в радиус-вектор $\vec{O^*M^*}$ преобразованной точки *М*,* сохраняя прежние координаты x^α. Тем самым и точка *М** имеет в преобразованном репере прежние координаты.

Итак, *всякий данный изоморфизм двух аффинных информационных пространств можно описать следующим образом. В первом информационном пространстве задаемся произвольным репером* $\Re_0(O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, *а во втором информационном пространстве берем соответствующий ему репер* $\Re_0^*(O^*, \mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*)$. *Каждой точке М (вектору* **x**) *в первом информационном пространстве ставим в соответствие точку М* (вектор* **x***) *во втором информационном пространстве так, чтобы координаты М* (вектора* **x***) *относительно второго репера были такими же, как и координаты М (вектора* **x**) *относительно первого репера.*

Обратно, задавшись реперами $\Re_0$, $\Re_0^*$ произвольно, мы при помощи указанного построения всегда получаем изоморфизм, что обнаруживается тривиальной проверкой. Этот изоморфизм переводит $\Re_0$ в $\Re_0^*$ и определяется однозначным образом.

Все сказанное справедливо и для частного случая, когда оба информационные пространства совпадают, и речь идет об *автоморфизме* — аффинном преобразовании информационного пространства в себя.

Оба репера $\Re_0$ и $\Re_0^*$ берутся тогда в одном и том же аффинном информационном пространстве, и каждая его точка *М* переводится в некоторую точку *М** с таким расчетом, чтобы *М** относительно $\Re_0^*$ имела те же координаты x^i, что и точка *М* относительно $\Re_0$. Пусть $x^{i'}$ суть координаты точки *М** относительно репера $\Re_0$, и, следовательно, связаны с x^i формулами (5.180)

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + A^{i'}. \tag{5.184}$$

Но так как x^i — координаты произвольной точки *М* относительно репера $\Re_0$, $x^{i'}$ — координаты преобразованной точки *М** относительно того же репера $\Re_0$, то теперь формулы (5.184) дают *аффинное преобразование информационного пространства в себя,* т. е. выражают координаты преобразованной точки как функции координат произвольно взятой исходной точки *в неизменной координатной системе.*

Очевидно, далее, что аффинные преобразования в данном аффинном информационном пространстве образуют *группу. В* самом деле, из определения автоморфизма следует, что обратное к автоморфизму преобразование есть тоже автоморфизм и наложение двух автоморфизмов есть снова автоморфизм. Группу аффинных автоморфизмов мы будем называть *аффинной группой. Наличие этой группы, и есть точное выражение идеи однородности аффинного информационного пространства.*

В отличие от квазиаффинных преобразований аффинные преобразования по самому определению суть *точечные* преобразования информационного пространства (соответствующие преобразования векторов можно при желании считать следствием точечных преобразований). Вместе с тем аффинное преобразование переводит *каждый* репер информационного пространства снова в репер, так что мы получаем взаимно однозначное преобразование информационного многообразия реперов в себя. Группа аффинных преобразований, рассматриваемых в информационном многообразии реперов, является согласно сказанному выше *однотранзитивной.*

Понятие группы автоморфизмов аффинного информационного пространства введено нами лишь на заключительном этапе его теории. Однако это не значит, что речь идет о маловажном понятии; напротив, эта группа играет огромную принципиальную роль в теории информации. С ее точки зрения необходимо переосмыслить некоторые наши прежние понятия. Так, мы рассматривали до сих пор аффинные реперы как специального вида конструкции, оказавшиеся нам полезными. Теперь мы можем сформулировать идею, лежащую в основе этого понятия.

Пусть нам дана (мы рассматриваем) совокупность образов сущностей $\Re$, обладающая следующим свойством: *любой образ сущности $\Re_1$ этой совокупности можно перевести в любой образ сущности $\Re_2$ этой же совокупности одним и только одним автоморфизмом данного информационного пространства и любой автоморфизм информационного пространства переводит каждый образ сущности $\Re_1$ нашей совокупности в некоторый образ сущности $\Re_2$ этой же совокупности. Тогда образы сущностей $\Re$ называются реперами данного информационного пространства.*

Это определение раскрывает настоящий смысл наших аффинных реперов, но применимо не только к ним. Так же определяются реперы и в любом однородном информационном пространстве, т. е. в пространстве, информационные свойства которого могут быть определены как инварианты некоторой транзитивной группы взаимно однозначных преобразований этого пространства в себя (которая и будет группой его автоморфизмов).

Заметим, что из нашего определения репера не вытекает его конкретный вид, например, что аффинный репер будет именно состоять из точки и *n* линейно независимых векторов; здесь остается произвол, который используется в целях наибольшей простоты и удобства. Интересно сравнить теперь группу *аффинных* и группу *квазиаффинных* преобразований в n^2+n-мерном информационном многообразии всевозможных реперов *n*-мерного аффинного информационного пространства.

Обе группы однотранзитивны, т. е. для любых двух реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ как в одной, так и в другой группе найдется точно одно преобразование, переводящее $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}_0^*$. Но характер этих преобразований существенно различный. В случае *аффинного* преобразования мы *изоморфно* отображаем аффинное информационное пространство в себя, точки переходят в точки, векторы в векторы с сохранением всех их аффинных взаимоотношений; в частности, и реперы переходят в реперы (причем $\mathfrak{R}_0$ переходит в $\mathfrak{R}_0^*$).

В случае квазиаффинного преобразования о преобразовании точек и векторов нет смысла говорить; каждый же репер $\mathfrak{R}$ переходит в новое положение $\mathfrak{R}^*$ так, что $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ расположен точно так же, как $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$. Мы уточняли это в том смысле, что векторы репера $\mathfrak{R}^*$ и смещение его начала сравнительно с началом $\mathfrak{R}$ разлагаются по векторам репера $\mathfrak{R}$ с теми же коэффициентами, как и в случае реперов $\mathfrak{R}^*$, $\mathfrak{R}_0$.

Но это равносильно тому, что, переводя аффинным преобразованием $\mathfrak{R}_0$ в $\mathfrak{R}$, мы заставим перейти и $\mathfrak{R}_0^*$ в $\mathfrak{R}^*$. Таким образом, информационный смысл того утверждения, что *репер* $\mathfrak{R}_0^*$ *относительно* $\mathfrak{R}_0$ *и* $\mathfrak{R}^*$ *относительно* $\mathfrak{R}$ *расположены одинаково, заключается в возможности перевести пару реперов* $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ *в пару реперов* $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ *некоторым автоморфизмом нашего пространства.* Это определение пригодно не только в аффинном, но и в любом однородном информационном пространстве.

Мы можем теперь сформулировать следующее правило, исчерпывающее связь между *аффинными и квазиаффинными* преобразованиями в информационном многообразии реперов.

Если четыре репера подобраны так, что

$$\left.\begin{array}{r}\mathfrak{R}_0 \rightarrow \mathfrak{R}_0^*, \\ \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*\end{array}\right\} \qquad (5.185)$$

при одном и том же квазиаффинном преобразовании, то

$$\left.\begin{array}{cc}\mathfrak{R}_0, & \mathfrak{R}_0^*, \\ \downarrow & \downarrow \\ \mathfrak{R} & \mathfrak{R}^*\end{array}\right\} \qquad (5.186)$$

при одном и том же аффинном преобразовании (и обратно).

Эту зависимость между аффинными и квазиаффшшыми преобразованиями в информационном многообразии реперов можно формулировать в виде *перестановочности любого аффинного преобразования с любым квазиаффинным преобразованием.* Действительно, из (5.185), (5.186) видно, что при выполнении данного аффинного и данного квазиаффинного преобразований, *в том или другом порядке безразлично,* репер $\mathfrak{R}_0$ все равно перейдет в репер $\mathfrak{R}^*$. Обратно, из перестановочности данных преобразований следует приведенное правило.

Две однотранзитивные взаимно перестановочные группы преобразований в информационном многообразии аффинных реперов представляют собой пример конструкции, играющей важную роль как в общей теории информации, так и в алгебраической теории информации, в частности, в алгебре Ли.

А именно, если в каком-либо информационном многообразии дана однотранзитивная группа взаимно однозначных преобразований этого информационного многообразия в себя, то единственным образом определяется вторая однотранзитивная группа, преобразования которой будут перестановочны со всеми преобразованиями первой.

В самом деле, задавшись как-либо элементами информационного многообразия A_0, A_0*, мы передвигаем эту пару элементов всевозможными преобразованиями первой группы в положения A, A^*; в силу однотранзитивности первой группы A пробегает все информационное многообразие, причем каждому положению A отвечает строго определенное положение A^*. Преобразование $A \rightarrow A^*$ будет перестановочным со всеми преобразованиями первой группы и, как мы видим, однозначно определяется выбором $A_0 \rightarrow A_0^*$. Совокупность таких преобразований и образует вторую, тоже однотраизитнвную группу. Обе группы играют взаимно симметрическую роль.

В случае информационного многообразия аффинных реперов все же естественно считать основной аффинную группу (группу автоморфизмов), а квазиаффинную группу — построенной дополнительно по принципу перестановочности с группой автоморфизмов.

5.14. Группа квазидвижений и группа движений в евклидовом информационном пространстве

Мы проведем сейчас в евклидовом информационном пространстве те построения, которые были выполнены в предыдущем пункте для аффинного информационного пространства. При этом под евклидовым информационным пространством можно понимать как комплексное евклидово информационное пространство, так и любое из вещественных евклидовых информационоых пространств; по внешности наши рассуждения зависеть от этого не будут. Вместо аффинных реперов соответствующую роль будут играть теперь ортонормированные реперы.

Мы подробно рассматривали в свое время переход от одного ортонормированного репера к другому; согласно (5.178) его можно записать в виде

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \quad \overrightarrow{OO^*} = A^i\,\mathbf{e}_i, \tag{5.187}$$

так как ортонормированные реперы — частный случай аффинных. Только теперь матрица $A^i_{i'}$ — уже не произвольная неособенная матрица, а обязательно или комплексная ортогональная, или вещественная ортогональная, или вещественная псевдоортогональная — в зависимости от характера рассматриваемого евклидова информационного пространства. Рассмотрим информационное многообразие всех ортонормированных реперов нашего пространства. Если вспомнить построение ортонормированного репера, то нетрудно подсчитать, что это информационное многообразие будет $\frac{n(n+1)}{2}$-мерным. Действительно, произвольный выбор начала O в n-мерном пространстве дает n независимых параметров, произвольный выбор единичного (или мнимоединичного) вектора $\mathbf{e}_1$ дает n—1 информационных параметров (один информационный параметр снимается за счет нормировки), далее $\mathbf{e}_2$ выбирается уже в n—1-мерной плоскости R_{n-1} и зависит поэтому от n — 2 информационных параметров и т. д. В итоге число информационных параметров равно:

$$n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Разумеется, в случае комплексного пространства эти информационные параметры будут комплексными. (Строго говоря, наш подсчет является лишь грубо ориентировочным: мы как бы упускаем из виду, что на самом деле информационное многообразие *всех* ортонормированных реперов не является элементарным и не может быть обслужено *одной* системой $\frac{1}{2}n(n+1)$ информационных параметров (одной координатной системой)).

Задавшись матрицей $A^i_{i'}$ и коэффициентами A^i, мы будем производить преобразование (5.187) над *каждым* ортонормированным репером нашего евклидова информационного пространства. Мы получаем взаимно однозначное преобразование информационного многообразия реперов в себя, которое будем называть *квазидвижением* в информационном многообразии реперов. Таким образом, наглядный смысл квазидвижения состоит в том, что каждый репер переходит в новый репер, расположенный относительно его вполне определенным образом. Действительно, так как мы задались определенными численными значениями $A^i_{i'}$ и A^i, то в аффинном смысле новый репер будет расположен всегда одним и тем же способом относительно старого; то так как, кроме того, старый репер ортонормированный и обладает строго определенными метрическими свойствами, то постоянство коэффициентов означает, что и в метрическом смысле расположение нового репера относительно старого будет всегда одним и тем же.

Так, на обычной плоскости квазидвижение можно определить, например, тем, что каждый ортонормированный репер $\{O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ сдвигается на три единицы длины в направлении вектора $\mathbf{e}_1$ и поворачивается затем около O на 60° в направлении от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$.

Квазидвижение в информационном многообразии реперов сопровождается преобразованием соответствующих им координатных систем по формуле (частный случай (5.180))

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}. \qquad (5.188)$$

Как и квазиаффинные преобразовании, квазидвижения суть преобразования в информационном многообразии реперов и не могут быть истолкованы как точечные преобразования евклидова информационного пространства.

Переходим теперь к изучению изоморфных соответствий (изоморфизмов) между евклидовыми информационными пространствами. *Изоморфизмом между двумя евклидовыми информационными пространствами мы будем называть аффинный изоморфизм между ними с добавочным требованием сохранения скалярного произведения,* т. е. мы требуем дополнительно, чтобы для любых двух векторов **x**, **y** первого пространства и соответствующих им векторов **x***, **y*** второго пространства имело место равенство

$$\mathbf{xy}=\mathbf{x}^*\mathbf{y}^*. \qquad (5.189)$$

Так как евклидово информационное пространство мы определили как аффинное информационное пространство с фиксированной в нем билинейной скалярной функцией двух векторов — скалярным произведением, то ясно, что изоморфизм переводит образы первого пространства в образы второго пространства с сохранением их аффинных и метрических свойств.

Изоморфное отображение евклидова информационного пространства на себя мы будем называть *автоморфизмом или движением в евклидовом информационном пространстве.* Всякий изоморфизм, в частности, автоморфизм переводит ортонормированный репер снова в ортонормированный репер, причем соответствующие точки будут иметь в этих реперах одинаковые координаты.

Обратно, зададимся произвольными ортонормированными реперами $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}^*_0$ или в разных евклидовых информационных пространствах (но тогда обязательно одинакового числа измерений *n* и, в вещественном случае, одинакового индекса *k*), или в одном и том же евклидовом информационном пространстве, и каждую точку *М* (вектор **x**) с координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}^*_0$ отобразим в точку *М** (вектор **x***) с теми же координатами x^i относительно репера $\mathfrak{R}^*_0$. Тривиальная проверка показывает, что при этом сохраняются аффинные свойства, и мы имеем, таким образом, аффинный изоморфизм; кроме того, сохраняется и скалярное произведение, так как в ортонормированном репере данного индекса *k* оно всегда одинаково выражается через координаты векторов

$$\mathbf{xy} = -x^1y^1-\ldots-x^ky^k+x^{k+1}y^{k+1}+\ldots+x^ny^n;$$

координаты же векторов **x, y** остаются в результате нашего преобразования неизменными, если их оценивать в преобразованном репере.

В частности, движения в данном евклидовом информационном пространстве, согласно сказанному, однозначно определяются произвольным выбором ортонормированных реперов $\mathfrak{R}_0$ и $\mathfrak{R}^*_0$ и требованием, чтобы репер $\mathfrak{R}_0$ переходил в репер $\mathfrak{R}^*_0$. Мы видим, что ортонормированные реперы в евклидовом информационном пространстве рассматриваются нами не случайно: они играют такую же роль, как аффинные реперы в аффинном информационном пространстве. А именно, в обоих случаях каждой паре реперов отвечает один и только один автоморфизм информационного пространства, переводящий первый репер во второй; и каждый репер любым автоморфизмом переводится снова в некоторый репер; это и есть то основное, что заключено в идее репера.

Совершенно аналогично п. 5.13 мы можем истолковать одинаковое расположение ортонормированных реперов $\mathfrak{R}^*$ относительно $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}_0^*$ относительно $\mathfrak{R}_0$ как возможность перевести пару реперов $\mathfrak{R}_0$, $\mathfrak{R}_0^*$ в пару реперов $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}^*$ некоторым движением евклидова информационного пространства, т. е. снова получаем схему (5.185) — (5.186). Дословно повторяются и последующие рассуждения, так что для движений и квазидвижений в информационном многообразии ортонормированных реперов справедливо все сказанное относительно аффинных и квазиаффинных преобразований в информационном многообразии аффинных реперов. В частности, идея *однородности* евклидова информационного пространства находит себе точное выражение в существовании *группы движений.*

Классификация движений ортонормированных реперов, т. е. переходов $\mathfrak{R}_0 \rightarrow \mathfrak{R}_0^*$, полностью переносится и на вызываемые этими переходами движения всего евклидова информационного пространства:

1) собственные движения и несобственные движения,

$$\operatorname{Det} | A_{i'}^{i} | = \pm 1, \tag{5.190}$$

в случае комплексных евклидовых или собственно евклидовых информационных пространств;

2) собственные движения и несобственные движения 1-го, 2-го, 3-го рода:

	$\operatorname{Det} \| A_{\alpha'}^{\alpha} \|$	$\operatorname{Det} \| A_{\lambda'}^{\lambda} \|$
1°	+	+
2°	+	−
3°	−	+
4°	−	−

(5.191)

в случае псевдоевклидовых информационных пространств.

Правда, может возникнуть следующее сомнение. Одно и то же движение в евклидовом пространстве можно задать как парой реперов $\mathfrak{R}_0 \rightarrow \mathfrak{R}_0^*$, так и парой реперов $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}^*$, где репер $\mathfrak{R}$ выбран произвольно, а $\mathfrak{R}^*$ ему соответствует в результате движения. Нужно показать, что при данном движении переход от $\mathfrak{R}_0$ к $\mathfrak{R}_0^*$ и от $\mathfrak{R}$ к $\mathfrak{R}^*$ будет принадлежать всегда к одному и тому же типу, который тем самым естественно принять и за тип движении.

Если мы непрерывно меняем репер $\mathfrak{R}$, причем, конечно, непрерывно меняется и соответствующий репер $\mathfrak{R}^*$, то тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$не может измениться, так как определители (5.190), (5.191), не принимая нулевых значений, не могут менять и знаков. Но непрерывным изменением репера $\mathfrak{R}$ мы можем получить, как нам известно, любой репер того же класса. (Ми имеем в виду, что все реперы в комплексном евклидовом и собственно евклидовом информационном пространстве распадаются на два класса, а в псевдоевклидовом информационном пространстве — на четыре класса.) Таким образом, тип перехода $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}^*$ будет одним и тем же, если реперы $\mathfrak{R}$ берутся из одного класса.

Но это же самое будет верным и при любом выборе репера $\mathfrak{R}$. В самом деле, заменим и в репере $\mathfrak{R}$, и в репере $\mathfrak{R}^*$ вектор $\mathbf{e}_1$ на — $\mathbf{e}_2$ Полученные в результате реперы $\tilde{\mathfrak{R}}$, $\tilde{\mathfrak{R}}^*$, , очевидно, по-прежнему соответствуют друг другу при том же движении: $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$, причем тип перехода останется прежним. Действительно, в силу замены $\mathbf{e}_1 \to -\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_{1'} \to -\mathbf{e}_{1'}$ в матрицах $\| A^i_{i'} \|$, $\| A^\alpha_{\alpha'} \|$ умножаются на —1 первая строка и первый столбец, т. е. соответствующие определители не изменятся; матрица же $\| A^\lambda_{\lambda'} \|$ вообще не изменится.

Итак, тип перехода $\tilde{\mathfrak{R}} \to \tilde{\mathfrak{R}}^*$ останется без изменения, хотя репер $\tilde{\mathfrak{R}}$ принадлежит к другому классу, чем репер $\mathfrak{R}$. В случае комплексного евклидова и собственно евклидова информационного пространств вопрос этим исчерпывается ввиду наличия лишь двух классов реперов. В случае псевдоевклидова информационного пространства имеется четыре класса реперов, и нужно провести совершенно аналогичное рассуждение, во-первых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на — $\mathbf{e}_n$ и, во-вторых, с заменой $\mathbf{e}_n$ на — $\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1$ на —$\mathbf{e}_1$ одновременно. В результате мы убеждаемся, что данное движение в евклидовом информационном пространстве, примененное к любому реперу, дает переход всегда одного и того же типа. Поэтому тип этого перехода законно принять за тип самого движения.

5.15. Вложение вещественных евклидовых информационных пространств в комплексное евклидово информационное пространство

Далеко идущая аналогии в свойствах комплексного и вещественного информационных пространств, ранее аффинных, а теперь евклидовых, не должна, однако, вводить нас в заблуждение. Комплексное n-мерное аффинное информационное пространство (мы начнем с него) обладает весьма своеобразной информационной структурой. Начать с того, что по существу это пространство обладает не n, а $2n$ измерениями. В самом деле, каждая из n комплексных координат x^p, определяющих положение точки, как и всякое комплексное число, может быть записана в виде

$$x^p = \alpha^p + i\beta^p,$$

а следовательно, положение точки определяется $2n$ независимыми вещественными параметрами, и фактически мы имеем $2n$-мерное информационное пространство. Может показаться, что комплексное n-мерное аффинное информационное пространство просто эквивалентно $2n$-мерному вещественному аффинному информационному пространству, но это тоже было бы неверно.

Так, например, m-мерные плоскости в комплексном аффинном информационном пространстве будут действительно $2m$-мерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном информационном пространстве с координатами α', β', но, однако, отнюдь *не любыми* такими плоскостями. В частности, прямые линии в комплексном пространстве $(m=1)$ будут по существу двумерными плоскостями в вещественном $2n$-мерном информационном пространстве, но также не произвольными, а принадлежащими к некоторому определенному классу.

Аффинные преобразования в комплексном n-мерном аффинном информационном пространстве зависят от n^2+n комплексных параметров, т. е. от $2(n^2+n)$ вещественных параметров.

Между тем аффинные преобразования в соответствующем $2n$-мерном вещественном аффинном информационном пространстве зависят от

$$(2n)^2 + 2n = 4n^2 + 2n$$

вещественных параметров и образуют более обширную группу.

Все это показывает, что формальное сходство между комплексным и вещественным аффинными информационными пространствами не затрагивает самую информационную структуру основу этих пространств. Это сказалось в п. 3.8 при рассмотрении объемов в аффинном информационном пространстве, где мы сознательно ограничились вещественным случаем. Если бы захотели рассматривать объемы в комплексном информационном пространстве, то нам не удалось бы удержаться в рамках формальной аналогии с вещественным информационным пространством и пришлось бы прямо трактовать n-мерное комплексное информационное пространство как $2n$-мерное вещественное.

Все, что было сказано, остается справедливым и при переходе к евклидовым информационным пространствам. Особенно следует подчеркнуть, что пара точек в вещественном евклидовом информационном пространстве обладает *одним* вещественным инвариантом (расстоянием), в то время как в комплексном евклидовом информационном пространстве таких инвариантов *два,* так как *комплексное расстояние* равносильно двум вещественным инвариантам. С этим связано и то, что группа движений в n-мерном комплексном евклидовом информационном пространстве зависит от существенно меньшего числа параметров, чем в $2n$-мерном вещественном евклидовом информационном пространстве (в первом случае $\frac{n(n+1)}{2}$ комплексных, а значит, $n(n+1)$ вещественных параметров, во втором случае $\frac{2n(2n+1)}{2}=n(2n+1)$ вещественных параметров).

Мы хотим теперь показать, что n-мерное вещественное евклидово информационное пространство всегда можно «вложить» в n-мерное комплексное евклидово информационное пространство, т. е. рассматривать как подпространство последнего.

Покажем это сначала для собственно евклидова информационного пространства. *Выберем какой-либо ортонормированный репер* $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *в комплексном евклидовом информационном пространстве и рассмотрим совокупность всех точек M и векторов* **x** *этого пространства, координаты которых* x^i *имеют вещественные значения.* Будем утверждать, что эта совокупность точек и векторов образует n-мерное собственно евклидово информационное пространство. В самом деле, прежде всего мы получаем таким образом n-мерное вещественное аффинное информационное пространство, так как все соответствующие аксиомы будут у нас соблюдаться. Так, например, вектор $\overrightarrow{AB}$, «соединяющий» точки *А, В* с вещественными координатами, сам имеет вещественные координаты; откладывание вектора **x** с вещественными координатами от точки *А* с вещественными координатами приводит нас в точку *В* тоже с вещественными координатами; умножение вектора **x** с вещественными координатами на вещественное число α дает нам вектор α**x**, снова обладающий этим свойством, и т. д. Размерность полученного *вещественного* аффинного информационного пространства будет равна *n,* так как *n* линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ существует, а любой вектор **x** с вещественными координатами тем самым разлагается по ним с вещественными коэффициентами. Но, кроме того, в полученном пространстве имеется и метрика (заимствованная из вмещающего комплексного евклидова информационного пространства)

$$\mathbf{x}^2 = x^{1^2} + x^{2^2} + \ldots + x^{n^2}.$$

Так как мы ограничиваемся векторами **x** с вещественными координатами x^1, x^2, .. ., x^n, то это есть метрика собственно евклидова информационного пространства.

Следует обратить внимание на то, что выделенное таким образозм в n-мерном комплексном евклидовом информационном пространстве n-мерное собственно информационное евклидово пространство *не образует в нем плоскости,* по крайней мере, в том смысле, как мы употребляем этот термин. В самом деле, плоскость строится у нас на основе каких-то $m < n$ линейно независимых направляющих векторов, из которых составляются всевозможные линейные комбинации с *комплексными* коэффициентами (поскольку пространство комплексное); полученные векторы откладываются от фиксированной точки O^*. Мы же вместо этого взяли все n ортов $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_n$, но, составляя их линейные комбинации, искусственно ограничились лишь вещественными коэффициентами.

Почти столь же просто можно выделить в n-мерном комплексном евклидовом информационном пространстве и псевдоевклидово информационное пространство, тоже n-мерное и обладающее любым индексом $k = 0, 1, \ldots, n$. Для этого достаточно взять за основу вместо какого-нибудь ортонормированного репера $\mathfrak{R}\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ репер

$$\tilde{\mathfrak{R}}\{O, i\mathbf{e}_1, \ldots, i\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}, \tag{5.192}$$

т. е. помножить первые k векторов на i (это вполне возможно, так как мы находимся в комплексном информационном пространстве). Нетрудно заметить, что тем самым эти векторы из единичных превратятся в мнимоединичные.

Рассмотрим теперь совокупность точек и векторов, имеющих вещественные координаты x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$. Совершенно так же, как и ранее, убеждаемся, что мы получили вещественное n-мерное аффинное информационное пространство. Кроме того, это пространство снабжено метрикой

$$\mathbf{x}^2 = -x^{1^2} - \ldots - x^{k^2} + x^{k+1^2} + \ldots + x^{n^2}, \tag{5.193}$$

так как вектор **x** с вещественными координатами x^i относительно репера $\tilde{\mathfrak{R}}$ имеет разложение

$$\mathbf{x} = ix^1\mathbf{e}_1 + \ldots + ix^k\mathbf{e}_k + x^{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \ldots + x^n\mathbf{e}_n, \tag{5.194}$$

откуда легко получается (5.193) почленным возведением в скалярный квадрат. Мы действительно выделили псевдоевклидово информационное пространство индекса *k*.

В ряде случаев бывает полезным трактовать этим путем вещественные евклидовы информационные пространства как подпространства комплексного евклидова информационного пространства того же (в комплексном смысле!) числа измерений *n*. Такое выделение вещественных евклидовых информационных пространств совершается бесчисленным количеством способов — при любом выборе репера $\mathfrak{R}$.

5.16. Измерение объемов в вещественном евклидовом информационном пространстве

Мы выражали объем какой-либо *n*-мерной области *D* в *n*-мерном вещественном аффинном информационном пространстве посредством интеграла

$$V_D = \int_D dx^1\, dx^2 \ldots dx^n, \tag{5.195}$$

вычисленного в какой-либо аффинной координатной системе. Этот интеграл не имеет определенного численного значения и является (знакопостоянным) относительным инвариантом веса — 1, т. е. он преобразуется по закону

$$V'_D = V_D \,|\,\mathrm{Det}\,|A^{i}_{i'}|\,|^{-1}. \tag{5.196}$$

В случае евклидова информационного пространства мы сужаем *определение объема,* а именно, *объемом области D мы называем интеграл V_D, вычисленный в любой ортонормированной координатной системе.*

Объем в евклидовом смысле будет уже *инвариантом,* так как при переходе от одного ортонормированпого репера к другому всегда

$$\mathrm{Det}\,|A^{i}_{i'}| = \pm 1,$$

а следовательно, (5.196) дает

$$V'_D = V_D. \tag{5.197}$$

Таким образом, теперь объем данной области *D* имеет вполне определенное численное значение. При этом следует иметь в виду, что задание объема в евклидовом смысле влечет его задание и в аффинном смысле: раз для данной области *D* известен интеграл V_D, вычисленный в ортонормированных координатах, то он будет известен и в любых аффинных координатах — достаточно воспользоваться законом преобразования (5.196),— а это и означает задание объема в аффинном смысле.

Обратно, если в евклидовом информационном пространстве нам задан объем некоторой области D в аффинном смысле, т. е. известен интеграл V_D, вычисленный в любых аффинных и, в частности, ортонормированных координатах, то, значит, известен объем и в евклидовом смысле.

В дальнейшем будем изучать свойства объемов в евклидовом смысле; будем обозначать эти объемы W_D. Объем составной области $D = D_1 + D_2$, где D_1 и D_2 — неперекрывающиеся составляющие области, по элементарному свойству кратного интеграла будет равен сумме объемов этих областей:

$$W_D = W_{D_1} + W_{D_2}. \tag{5.198}$$

Далее, если D и D^* — конгруэнтные области, т. е. переводятся одна в другую движением евклидова информационного пространства, то их объемы одинаковы

$$W_D = W_{D^*}. \tag{5.199}$$

В самом деле, будем вычислять интеграл (5.195) дли областей D и D^*, причем в первом случае берем координаты $x^1, \ldots, x^n$ относительно какого-либо ортонормированного репера $\mathfrak{R}$, а во втором случае— относительно репера $\mathfrak{R}^*$, полученного из $\mathfrak{R}$ тем движением, которое переводит D в D^*. Координаты x^i каждой точки области D^* относительно $\mathfrak{R}^*$ будут такими же, как координаты соответствующей точки области D относительно $\mathfrak{R}$, так что переменные под знаком интеграла пробегают в обоих случаях одну и ту же область изменения, и интегралы будут равны.

В ортонормированной координатной системе объем W_D области D выражается интегралом (5.195). В произвольной же аффинной координатной системе этот интеграл меняет свое значение, а именно, ведет себя как знакопостоянный относительный инвариант веса —1 так, что объема (в евклидовом смысле), вообще говоря, не выражает

Мы хотим получить выражение объема в произвольных аффинных координатах; в таком случае удобнее всего домножить интеграл (5.195) на (тоже знакопостоянный) инвариант веса +1 так, чтобы в результате получился бы уже настоящий инвариант, выражающий евклидов объем W_D области D в любой аффинной координатной системе.

Простейшим инвариантом веса 2, связанным с метрикой евклидова информационного пространства, является определитель, составленный из координат метрического тензора

$$g = \mathrm{Det}\,|g_{ij}|. \tag{5.200}$$

Действительно, согласно (5.17) при переходе из одной аффинной координатной системы в другую

$$g' = (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 \cdot g. \tag{5.201}$$

Очевидно, g и g' имеют всегда одинаковые знаки: мы находимся в вещественном евклидовом информационном пространстве, так что $(\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 > 0$. Чтобы получить теперь относительный инвариант веса 1, достаточно взять $\sqrt{g}$, причем, чтобы не иметь дела с мнимостями, мы предпочтем взять $\sqrt{|g|}$. Беря обе части (5.201) по модулю и извлекая из них квадратные корни (со знаком +), получаем:

$$\sqrt{|g'|} = |\,\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|\,| \cdot \sqrt{|g|}. \tag{5.202}$$

Таким образом, $\sqrt{|g|}$ есть знакопостоянный относительный инвариант веса +1, и перемножая (5.196) и (5.202) почленно, получаем:

$$\sqrt{|g'|} \cdot V'_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D, \tag{5.203}$$

т. е. произведение $\sqrt{|g|} \cdot V_D$ есть инвариант преобразования аффинных координат. Этот инвариант совпадает с W_D:

$$W_D = \sqrt{|g|} \cdot V_D = \sqrt{|g|} \int_D dx^1 \ldots dx^n. \tag{5.204}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно записать (5.204) в *ортонормированнои* координатной системе; тогда

$$g_{ij} = \begin{cases} 0 \ (i \neq j) \\ \pm 1 \ (i = j) \end{cases}, \quad g = \pm 1, \quad \sqrt{|g|} = 1,$$

и мы получаем первое равенство

$$W_D = \int_D dx^1 \ldots dx^n.$$

Займемся измерением объемов n-мерных параллелепипедов. Пусть параллелепипед построен на (линейно независимых) векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$. Интеграл (5.195), распространенный по нашему параллелепипеду, в любой аффинной координатной системе выражается формулой (3.130):

$$V_D = |\,\mathrm{Det}\,|a^i_k|\,|, \tag{5.205}$$

где a^i_k — координаты вектора $\mathbf{a}_k$. Следовательно, согласно (5.204) евклидов объем параллелепипеда выражается формулой

$$W_D = \sqrt{|g|} \cdot |\operatorname{Det} | a_k^i ||. \tag{5.206}$$

В частности, в ортонормированной координатной системе g= ±1, и следовательно,

$$W_D = |\operatorname{Det} | a_k^i ||.$$

Эта формула при $n = 3$ хорошо известна из элементарной аналитической геометрии.

Все сказанное относительно вычисления объемов в n-мерном евклидовом информационном пространстве остается справедливым и для его m-мерных *неизотропных* плоскостей, поскольку они также несут на себе евклидову метрику. В результате объемы плоских m-мерных областей также получают определенные *численные значения.* В связи с этим (в отличие от аффинного информационного пространства) мы можем сравнивать m-мерные объемы областей, расположенных в каких угодно (а не только параллельных) m-мерных плоскостях. Однако плоскости эти должны быть неизотропными; для изотропных же плоскостей мы не имеем никакого прогресса сравнительно с аффинным случаем.

В п. 3.8 было выяснено, что задание простого отличного от нуля m-вектора в вещественном аффинном информационном пространстве равносильно заданию m-мерной плоскости R_m (с точностью до параллельного сдвига) с определенной ориентацией и с определенным объемом, указанными на ней. При этом, если простой m-вектор имел вид $[\mathbf{a}_1 ... \mathbf{a}_m]$, то речь шла об объеме m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (линейно независимых в силу $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$).

Применяя этот результат в нашем вещественном евклидовом информационном пространстве, мы вправе понимать объем параллелепипеда в евклидовом смысле (если плоскость неизотропная), так как задание объема в аффинном смысле равносильно — при наличии евклидовой метрики —его заданию в евклидовом смысле.

Выясним теперь, как будет выражаться евклидов объем, отвечающий нашему простому m-вектору $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m] \neq 0$, *через его координаты* $a^{i_1 \ldots i_m}$, конечно, через координаты метрического тензора g_{ij}, (в произвольной аффинной координатной системе).

Один из простейших инвариантов, которые можно составить из указанных тензоров, мы будем называть *скалярным квадратом m-вектора* и определять путем свертывания следующим образом:

$$I = m! \, g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_m j_m} a^{i_1 i_2 \ldots i_m} a^{j_1 j_2 \ldots j_m}. \tag{5.207}$$

Множитель m! добавлен для упрощения окончательного результата. Здесь выделим в качестве леммы следующее предложение.

Пусть происходит свертывание тензоров $b_{i_1 \ldots i_m}$ *и* $a^{i_1 \ldots i_m}$, *причем тензор* $b_{i_1 \ldots i_m}$ *кососимметрический. Тогда*

$$b_{i_1 \ldots i_m} a^{i_1 \ldots i_m} = b_{[i_1 i_2 \ldots i_m]} a^{i_1 i_2 \ldots i_m}, \tag{5.208}$$

т. *е. результат свертывания не меняется, если тензор* $b_{i_1 \ldots i_m}$ *подвергнуть предварительно альтернации и сделать, таким образом, тоже кососимметрическим.*

Чтобы проверить равенство (5.208), достаточно обнаружить, что каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит в правую и левую части с одинаковыми коэффициентами (после приведения подобных членов). При этом мы рассматриваем лишь координаты $a^{p_1 \ldots p_m}$, при которых все индексы $p_1, \ldots, p_m$ различны, так как все прочие координаты равны нулю.

В процессе суммирования в левой части (5.208) каждая координата $a^{p_1 \ldots p_m}$ встретится m! раз, а именно, когда $a^{p_1 \ldots p_m}$ совпадают с $p_1, \ldots, p_m$ или получаются из них произвольной подстановкой; в случае нечетной подстановки $a^{p_1 \ldots p_m}$ входит с обратным знаком. В результате коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ будет иметь вид

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m}, \tag{5.209}$$

где суммирование идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1. . .p_m$, а знак ± берется в зависимости от четности или нечетности соответствующей подстановки. Но по определению альтернации сумма (5.209) после деления на m! дает координату проальтернированного тензора $b_{p_1 \ldots p_m}$:

$$b_{[p_1 \ldots p_m]} = \frac{1}{m!} \sum \pm b_{i_1 \ldots i_m},$$

так что

$$\sum \pm b_{i_1 \ldots i_m} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \tag{5.210}$$

Далее мы подсчитываем коэффициент при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой части равенства (5.208), который совершенно аналогично (5.209) оказывается равным

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]}. \tag{5.211}$$

Суммирование снова идет по перестановкам $i_1 \ldots i_m$ индексов $p_1 \ldots p_m$. При этом в силу косой симметрии тензора $b_{[p_1 \ldots p_m]}$

$$b_{[i_1 \ldots i_m]} = \pm b_{[p_1 \ldots p_m]},$$

где знак ± зависит от четности или нечетности соответствующей подстановки. Следовательно, все слагаемые под знаком суммы (5.211) равны $b_{[p_1 \ldots p_m]}$, так что

$$\sum \pm b_{[i_1 \ldots i_m]} = m! b_{[p_1 \ldots p_m]}. \qquad (5.212)$$

Сравнивая равенства (5.210) и (5.212), убеждаемся, что коэффициенты при $a^{p_1 \ldots p_m}$ в правой и левой частях (5.208) равны, и следовательно, лемма доказана.

Используя эту лемму для инварианта (5.207), мы можем, не меняя ничего по существу, произвести предварительно альтернацию по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$ в произведении *координат метрического тензора.* Выполним сначала эту альтернацию (с умножением на $m!$*):*

$$m!\, g_{[i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_m] j_m} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_1 j_2} & \cdots & g_{i_1 j_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{i_m j_1} & g_{i_m j_2} & \cdots & g_{i_m j_m} \end{vmatrix} = g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}. \qquad (5.213)$$

Запись результата альтернации в виде определителя, деленного на $m!$, получается совершенно аналогично (3.93). Из свойств определителя видно, что полученный тензор будет кососимметрическим не только по индексам $i_1 i_2 \ldots i_m$, но и по индексам $j_1 j_2 \ldots j_m$. Кратким обозначением полученного тензора будет служить $g_{i_1 i_2 \ldots i_m;\, j_1 j_2 \ldots j_m}$.

Теперь (5.207) можно переписать в виде

$$I = g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}. \qquad (5.214)$$

Чтобы установить геометрический смысл этого инварианта, мы рассмотрим аффинный репер, в котором первые m векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принадлежат m-мерной плоскости R_m нашего m-вектора $[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m]$.

В этом репере векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ полностью разлагаются по $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, а потому их координаты с индексами

$$i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$$

равны нулю. Согласно (3.93) равны нулю будут и все координаты простого m-вектора $a^{i_1 \ldots i_m}$, среди индексов которых встречается хоть один, больший чем m.

В результате в процессе свертывания (5.214) можно считать, что все индексы пробегают значения лишь 1, 2, .. ., m. Теперь нужно учесть, что $a^{i_1 \ldots i_m}$ — кососимметрический тензор, а потому при наличии двух одинаковых индексов его координаты обращаются в нуль. В сумме следует сохранить поэтому лишь те слагаемые, где все индексы $i_1 \dots i_m$ (и аналогично $j_1 \dots j_m$) различны между собой, т. е. получены из 1, 2, ..., m некоторыми подстановками.

В частности, в сумму (5.214) войдет слагаемое

$$g_{12\dots m;\,12\dots m}a^{12\dots m}a^{12\dots m}, \qquad (5.215)$$

для которого

$$i_1 i_2 \dots i_m = 12 \dots m \text{ и } j_1 j_2 \dots j_m = 12 \dots m,$$

а все остальные слагаемые будут получаться из этого всевозможными подстановками индексов $i_1 \dots i_m$ и индексов $j_1 \dots j_m$. Всего, таким образом, в сумме будет $(m\,!)^2$ слагаемых. Но в силу кососимметричности тензоров $a^{i_1 \dots i_m}$ и $g_{i_1 \dots i_m;\, j_1 \dots j_m}$ относительно $i_1 \dots i_m$ произведение этих тензоров не меняется при любой подстановке индексов $i_1 \dots i_m$ (так как или оба множителя не меняются или оба меняют знак). То же справедливо и для индексов $j_1 \dots j_m$. Поэтому в сумме (5.214) все слагаемые равны между собой и совпадают с (5.215), а так как их число равно $(m!)^2$, то окончательно

$$I = g_{12\dots m;\,12\dots m}(m\,!\,a^{12\dots m})^2. \qquad (5.216)$$

Согласно (3.93)

$$m\,!\,a^{12\dots m} = \mathrm{Det}\,|a_k^i| \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ m). \qquad (5.217)$$

В правой части мы получаем определитель, составленный из координат векторов $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ относительно репера $\{O, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ и нашей m-мерной плоскости R_m.

Далее, согласно (5.213)

$$g_{12\dots m;\,12\dots m} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} = \tilde{g}, \qquad (5.218)$$

где $\tilde{g}$, таким образом,—определитель метрического тензора плоскости R_m.

Теперь (5.216) принимает вид

$$I = \tilde{g}\cdot(\mathrm{Det}\,|a_k^i|)^2. \qquad (5.219)$$

Теперь мы можем установить *геометрический смысл инварианта I, который определен для какого-либо простого m-вектора* $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_m]$ *с координатами* $a^{i_1 i_2 \dots i_m}$ *при помощи формул* (5.207), *или, что то же,* (5.214).

Если $I \neq 0$, *то, как видно из* (5.219), $\tilde{g} \neq 0$ *и, следовательно, плоскость* R_m *данного простого m-вектора неизотропная и*

$$|I| = W_D^2, \tag{5.220}$$

где W_D*—евклидов объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

В самом деле, применяя к m-мерному параллелепипеду на плоскости R_m формулу (5.206), получаем:

$$W_D = \sqrt{|\tilde{g}|}\,|\operatorname{Det}|a_k^i|| \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{5.221}$$

Сравнивая эту формулу с (5.219), мы приходим к (5.220).

Если I= 0, *то из* (54.219) *следует, что* $\tilde{g}$ =0, *а следовательно, плоскость* R_m *данного простого m-вектора изотропная* (Det | a^i_k | ≠ 0, *так как* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *линейно независимы).*

Окончательно, объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (в неизотропной R_m*),* выражается через соответствующий m-вектор $[\mathbf{a}_1 \ \ldots \ \mathbf{a}_m]$ следующим образом:

$$W_D = \sqrt{|I|},$$

т. е.

$$W_D = \sqrt{|g_{i_1 \ldots i_m;\, j_1 \ldots j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|} = \\ = \sqrt{m!\,|g_{i_1 j_1} \ \ldots \ g_{i_m j_m} a^{i_1 \ldots i_m} a^{j_1 \ldots j_m}|}. \tag{5.222}$$

Добавим сюда еще одну формулу для объема m-мерного параллелепипеда. А именно, если за векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ принять, в частности, просто $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, то

$$a_k^i = \begin{cases} 0\ (i \neq k) \\ 1\ (i = k) \end{cases}, \qquad \operatorname{Det}|a_k^i| = 1,$$

и (5.219) принимает вид

$$I = \tilde{g} = \operatorname{Det}|g_{ij}| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Но, как мы знаем,

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j,$$

в нашем случае, следовательно,

$$g_{ij} = \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

и мы получаем:

$$I = \operatorname{Det}|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j| \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{5.223}$$

Отсюда

$$W_D = \sqrt{|\operatorname{Det}|\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j||}, \tag{5.224}$$

т. е. объем m-мерного параллелепипеда, построенного на векторах

$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, равен корню квадратному из модуля определителя, составленного из попарных скалярных произведений векторов
$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Эта формула при $m = 2, 3$ известна из обычной векторной алгебры.

5.17. Понятие об информационном объекте

Мы занимались до сих пор n-мерными информационными пространствами двух видов: аффинным и евклидовым. В аффинном пространстве мы ввели аффинные реперы $\Re\{O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, в информационном многообразии которых установили две однотранзитивные группы взаимно однозначных преобразований: аффинных и квазиаффинных преобразований. При аффинном преобразовании реперы просто увлекаются данным автоморфизмом аффинного информационного пространства; при квазиаффинном преобразовании каждый репер $\Re$ переходит в новый репер $\Re'$ расположенный относительно него вполне определенным образом, одинаковым при любом выборе исходного репера.

Последнее означает, что векторы репера $\Re'$ и сдвиг его начала разлагаются по векторам репера $\Re$ с фиксированными численными значениями коэффициентов $A^{i'}_{i}$, A^{i}:

$$\mathbf{e}_{i'} = A^{i}_{i'}\mathbf{e}_{i}, \qquad \overrightarrow{OO^*} = A^{i}\mathbf{e}_{i}. \tag{5.225}$$

С понятием квазиаффинного преобразования в информационном многообразии реперов тесно связано понятие тензора, хотя до сих пор это и не было показано у нас явно. Действительно, координаты тензора, например, V^{i}_{jk} имеют определенные численные значения при определенном выборе репера $\Re$, т. е. являются, можно сказать, функциями репера $\Re$:

$$V^{i}_{jk} = V^{i}_{jk}(\Re). \tag{5.226}$$

Однако выбор этих функций далеко не является произвольным: когда мы подвергаем реперы $\Re$ данному квазиаффинному преобразованию (5.225), координаты тензора подвергаются тоже вполне определенному преобразованию:

$$V^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_{i} A^{j}_{j'} A^{k}_{k'} V^{i}_{jk}. \tag{5.227}$$

Мы можем рассматривать при этом не один какой-либо тензор V^{i}_{jk}, а всевозможные тензоры данного строения; тогда численные значения V^{i}_{jk}, отвечающие данному тензору, могут быть какими угодно. В результате *вслед за каждым квазиаффинным преобразованием* (5.225) *в информационном многообразии реперов мы получаем линейное преобразование* (5.227) *над переменными* V^i_{jk} *или линейное преобразование в* n^3*-мерном пространстве переменных* V^i_{jk} . (Заметим, что, говоря о тензоре данного строения, можно учитывать и линейные зависимости (обязательно инвариантные), наложенные на его координаты. Так, например, можно рассматривать вместо всевозможных тензоров V^i_{jk} лишь кососимметрические по нижним индексам, т. е. удовлетворяющие линейным зависимостям $V^i_{jk} = -V^i_{kj}$. Тогда, беря всевозможные такие тензоры, мы располагаем не n^3, а $\frac{n^2(n-1)}{2}$ *независимыми* координатами и получаем линейное представление фактически в $\frac{n^2(n-1)}{2}$ мерном пространстве.) При этом наложению двух преобразований (5.225) отвечает наложение соответствующих преобразований (5.227).

Пусть каждому элементу некоторой группы G однозначно сопоставлено взаимно однозначное преобразование данного множества $\mathfrak{M}$ в себя, причем перемножению элементов группы отвечает наложение соответствующих преобразований в том же порядке (а тогда единице группы отвечает тождественное преобразование и обратному элементу — обратное преобразование). В этом случае мы говорим, что нам дано *представление группы О в виде группы, преобразований множества* $\mathfrak{M}$ *в себя.* (При этом мы, вообще говоря, не требуем, чтобы соответствие между элементами G и преобразованиями в $\mathfrak{M}$ было *взаимно* однозначным.)

В нашем случае мы имеем *линейное представление квазиаффинной группы, именно, представление в виде группы линейных преобразований* (5.227) в n^3*-мерном пространстве переменных* V^i_{jk}*;* это пространство играет роль множества $\mathfrak{M}$.

Нетрудно заметить, что задание этого *линейного представления квазиаффинной группы и есть самое существенное в понятии тензора.* В самом деле, если линейное представление (5.227) задано, то каждый отдельный тензор данного типа (в нашем примере один раз контравариантный и два раза ковариантный) можно получить следующим образом: какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ сопоставляем произвольно выбранную точку *(*V^i_{jk}*)* в пространстве представления, а затем любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставляем точку $(V^{i'}_{j'k'})$, пользуясь законом преобразования (5.227). Более подробно: берем квазиаффинное преобразование в информационном многообразии реперов, переводящее $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$*;* ему отвечает определенное линейное преобразование (5.227) в пространстве представления; это преобразование переводит точку *(V^i_{jk})* в некоторую точку $(V^{i'}_{j'k'})$, которую мы и ставим в соответствие реперу $\mathfrak{R}'$:

$$V^{i'}_{j'k'} = V^i_{jk}(\mathfrak{R}').$$

По существу мы повторили лишь в иных терминах построение тензора по наперед заданным его координатам в какой-нибудь одной координатной системе. Но теперь перед нами открывается путь к естественному обобщению понятия тензора. В самом деле, почему линейное представление квазиаффинной группы должно иметь вид обязательно тензорного закона преобразования, как, например, (5.227)? Можно предположить, что существуют и другие линейные представления квазиаффинной группы, которые можно положить в основу определения величин, аналогичных тензорам, но с иным законом преобразования.

Пусть в N-мерном пространстве некоторых переменных

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$$

нам задано линейное представление квазиаффинной группы. Это значит, что каждому квазиаффинному преобразованию (5.225) *однозначно сопоставлено линейное преобразование переменных*

φ_p (p=1, 2.....N):

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'}, \qquad \mathrm{Det}\,|B^p_{p'}| \neq 0, \tag{5.228}$$

так, что результирующему преобразованию двух квазиаффинных преобразований всегда сопоставлено результирующее преобразование соответствующих линейных преобразований.

Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$ являются функциями от коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i квазиаффинного преобразования. *Эти функции мы будем предполагать непрерывными.* Заметим (это можно было бы доказать), что тогда эти функции (по крайней мере в вещественном случае) являются обязательно непрерывно дифференцируемыми и даже аналитическими. (В комплексном случае этому заключению может помешать комплексная сопряженность, входящая в выражение функциональной зависимости.)

Сопоставим теперь какому-нибудь реперу $\mathfrak{R}$ произвольную точку φ_p в пространстве переменных φ_p. Любому другому реперу $\mathfrak{R}'$ сопоставим точку $\varphi_{p'}$, полученную из φ_p тем линейным преобразованием (5.228), которое отвечает квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ (т. е. переводящему $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}'$).

В таком случае каждому реперу $\mathfrak{R}'$ будет сопоставлена точка

$$\varphi_{p'} = \varphi_p(\mathfrak{R}'),$$

причем при переходе от любого репера $\mathfrak{R}'$ к любому реперу $\mathfrak{R}''$ будет действовать закон преобразования (5.228):

$$\varphi_{p''} = \sum_{p'=1}^{N} B_{p''}^{p'}\varphi_{p'} + B_{p''}, \tag{5.229}$$

где коэффициенты $B_{p''}^{p'}$, $B_{p''}$, отвечают квазиаффинному преобразованию $\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}''$.

Чтобы проверить равенство (5.229), рассмотрим его правую часть. Она представляет собой результат последовательного выполнения над φ_p линейных преобразований (5.228) и (5.229), отвечающих квазиаффинным преобразованиям $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$ и $\mathfrak{R}' \rightarrow \mathfrak{R}''$. Результирующее линейное преобразование над φ_p отвечает, следовательно, результирующему квазиаффинному преобразованию

$$\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}''$$

и, следовательно, согласно нашему построению дает

$$\varphi_p(\mathfrak{R}'') = \varphi_{p''}.$$

Этим (5.229) доказано.

Мы будем говорить, что нам дан линейный информационный объект в n-мерном аффинном пространстве, если каждому реперу $\mathfrak{R}$ *сопоставлены N занумерованных чисел* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$, *которые при переходе от репера* $\mathfrak{R}$ *к реперу* $\mathfrak{R}'$ *подвергаются линейному преобразованию* (5.228), *отвечающему в данном линейном представлении квазиаффинному преобразованию* $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$. *Числа* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ *мы будем называть координатами линейного информационного объекта относительно данного репера.*

Таким образом, для определения линейного информационного объекта в аффинном информационном пространстве нужно задаться прежде всего соответствующим законом преобразования (5.228), т. е. некоторым линейным представлением квазиаффинной группы. Мы будем говорить, что это *линейное представление определяет тип линейного информационного объекта.* Затем любой линейный информационный объект данного типа можно получить, задавшись произвольно его координатами φ_p для одного какого-нибудь репера $\mathfrak{R}$.

Очевидно, тензоры являются частным случаем линейных информационных объектов.

Можно рассматривать и нелинейные информационные объекты, т. е. такие, для которых закон преобразования координат φ_p является нелинейным и выражает некоторое нелинейное представление квазиаффинной группы в пространстве переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$. В остальном понятие информационного объекта в общем (нелинейном) случае строится аналогичным образом. Мы будем во всем дальнейшем заниматься лишь линейными информационными объектами, которые играют преобладающую роль.

В предыдущем изложении мы кое-где пользовались термином «информационный объект» в наглядном смысле — в смысле какого-то геометрического образа или конструкции. Теперь мы будем употреблять этот термин лишь в указанном точном смысле. Однако не нужно считать, что мы существенно изменили содержание понятия «информационный объект»; мы его лишь уточнили. Действительно, основные геометрические образы и конструкции будут характеризоваться информационными объектами в том смысле, как мы теперь этот термин понимаем. Возьмем, например, такой основной геометрический образ, как точка. Когда мы переходим от репера $\mathfrak{R}$ к реперу $\mathfrak{R}'$ квазиаффинным преобразованием (5.225), координаты x^i каждой фиксированной точки M подвергаются, как мы знаем, преобразованию

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i + A^{i'}, \tag{5.230}$$

где $A^{i'}{}_i$ — матрица, обратная $A^i{}_{i'}$, а $A^{i'} = -A^{i'}_i A^i$ (см. (5.179)).

Можно считать, что формула преобразования координат (5.230) есть частный случай (5.228) (линейного представления квазиаффинной группы), а координаты точки x^i являются примером линейного информационного объекта φ_p.

Роль коэффициентов $B^p{}_{p'}$, $B_{p'}$ играют $A^{i'}{}_i$, $A^{i'}$, которые действительно, как только что было отмечено, являются функциями $A^i{}_{i'}$, A^i. Таким образом, точка находит себе выражение в виде линейного информационного объекта, координаты которого совпадают с ее координатами, а закон преобразования имеет вид формулы преобразования координат (5.230).

Аналогичным образом коэффициенты уравнения данной гиперплоскости (или гиперповерхности 2-го порядка) образуют линейный информационный объект, который является представителем соответствующего геометрического образа.

5.18. Линейные информационные объекты в аффинном и евклидовом информационных пространствах

Теперь возникает вопрос о том, какого же вида линейные информационные объекты возможны в аффинном информационном пространстве. Прежде всего мы сузим постановку вопроса, а именно, ограничимся лишь теми информационными объектами $\varphi_p(\mathfrak{R})$, которые реагируют только на изменение векторов $\mathbf{e}_i$ репера $\Re$, но не реагируют на сдвиг его начала. Другими словами, мы предположим, что коэффициенты преобразования (5.228) зависят только от $A^{i'}{}_i$, но не зависят от A^i, так что квазиаффинное преобразование, сводящееся к параллельному сдвигу репера, порождает *тождественное* линейное преобразование (5.228) и координаты информационного объекта не меняются.

Наибольшую роль играют аффинные информационные объекты именно этого упрощенного вида (заметим, однако, что точки уже не входят в их число).

В частности, они появляются при переходе из аффинного информационного пространства в более простое *центроаффинное* информационное пространство. Так называется аффинное информационное пространство с раз навсегда фиксированной в нем точкой O — центром информационного пространства. Группа автоморфизмов центроаффинного информационного пространства состоит из аффинных преобразований, сохраняющих точку O неподвижной (центроаффинные преобразования). В качестве реперов центроаффинного информационного пространства можно принять всевозможные аффинные реперы с общим началом в центре O. Действительно, каждый репер с началом в O переводится центроаффинным преобразованием снова в репер с началом O и каждой паре таких реперов отвечает одно и только одно центроаффинное преобразование, переводящее первый репер во второй.

Квазицентроаффинное преобразование сводится к линейному преобразованию векторов каждого репера

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i \tag{5.231}$$

при постоянном начале O. Линейный информационный объект в центроаффинном информационном пространстве определяется совершенно так же, как и в аффинном, с той только разницей, что теперь коэффициенты $B^p{}_{p'}$, $B_{p'}$ в законе преобразования (5.228) должны зависеть от коэффициентов квазицентроаффиниого преобразования, т. е. только от $A^i{}_{i'}$ (ввиду отсутствия A^i в формуле квазицентроаффинного преобразования (5.225)). В результате мы приходим снова к линейным информационным объектам упрощенного вида, *где в закон преобразования* (5.228) *входят только* $A^i{}_{i'}$. *Такие линейные информационные объекты мы будем называть центроаффинными.*

Итак, центроаффинные линейные информационные объекты появляются в двух случаях: или мы имеем дело в аффинном информационном пространстве с таким объектом, координаты *которого не меняются при параллельном сдвиге репера (например, координаты вектора), или мы имеем дело с объектом в центроаффинном пространстве, где выделена точка О, играющая особую роль, так что естественно ограничиться реперами с началом в этой точке.*

Последний случай встречается при дифференциально-геометрическом исследовании сложной конструкции в бесконечно малой окрестности любой ее точки; тогда эту точку естественно принимать за центр пространства.

Итак, в дальнейшем мы ограничимся центроаффинными линейными информационными объектами (для краткости мы будем называть их просто центроаффинными объектами), причем будем предполагать, кроме того, что закон преобразования (5.228) является линейным *однородным:*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^{p}_{p'}\varphi_{p}, \tag{5.232}$$

где $B^{p}_{p'}$ суть функции $A^{i}_{i'}$.

Здесь на основании теории линейных представлений групп Ли можно утверждать следующее (приводим без доказательства).

Пока мы рассматриваем унимодулярные преобразования (5.231), т. е. пока Det | $A^{i}_{i'}$ | = 1, соответствующий закон преобразования (5.232) является *в вещественном случае* по существу тензорным; точнее, величины $\varphi_{1}, ..., \varphi_{N}$ за счет линейного преобразования с постоянными коэффициентами могут быть сведены к совокупности координат одного или нескольких тензоров.

Аналогично обстоит дело *в комплексном случае;* только здесь кроме тензоров приходится рассматривать и *псевдотензоры:* так мы будем называть информационные объекты, сходные с тензорами и отличающиеся от них лишь тем, что в законе преобразования (например, (5.227)) множители *А* все или частично заменяются комплексно сопряженными им величинами.

Если же брать всевозможные линейные преобразования (5.231) (Det | $A^{i}_{i'}$ | $\neq 0$), то здесь, кроме тензоров, могут встретиться и другие центроаффинные объекты, прежде всего *относительные тензоры.* Так мы будем называть величины, например, V^{i}_{jk}, для которых тензорный закон преобразования осложнен умножением на некоторую степень модуля определителя

$$V^{i'}_{j'k'} = A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}A^{k}_{k'}V^{i}_{jk}\,|\,\mathrm{Det}\,|\,A^{p}_{p'}\,|\,|^{s}. \tag{5.233}$$

Показатель *s* мы будем называть *весом* относительного тензора. В вещественном случае *s* может принимать любые вещественные значения, в комплексном — любые комплексные; мы считаем при этом, что

$$|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||^{s}=e^{s\ln|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||},$$

где значение логарифма берется вещественное. При s=0 относительный тензор превращается в обыкновенный тензор.

Закон преобразования относительного тензора (5.233) можно еще усложнить: в вещественном случае — домноженнем на —1, когда Det | $A^{p}{}_{p'}$ | является отрицательным, с сохраненном прежней формулы, когда Det | $A^{p}{}_{p'}$ |, | положителен; в комплексном случае — умножением на $e^{m\alpha i}$, где m—любое целое число, а $e^{\alpha i}$ определяется из разложения

$$\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}|=e^{\alpha i}\cdot|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||, \tag{5.234}$$

т. е. является тем комплексным числом модуля 1, на которое нужно умножить модуль Det | $A^{p}{}_{p'}$ | , чтобы получить сам Det | $A^{p}{}_{p'}$ |. Формула (5.233) заменяется соответственно формулами:

$$\begin{aligned}V^{i'}_{j'k'}&=\mathrm{sign}\,\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}|\cdot A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}A^{k}_{k'}V^{i}_{jk}\,|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||^{s}=\\&=\pm A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}A^{k}_{k'}V^{i}_{jk}\cdot|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||^{s}\qquad(\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}|\gtrless 0)\end{aligned} \tag{5.235}$$

в вещественном случае и

$$V^{i'}_{j'k}=e^{m\alpha i}A^{i'}_{i}A^{j}_{j'}A^{k}_{k'}V^{i}_{jk}\cdot|\mathrm{Det}\,|A^{p}_{p'}||^{s} \tag{5.236}$$

в комплексном случае.

Мы будем говорить, что вещественный относительный тензор с законом преобразования (5.233) *имеет вес s и показатель* 0, *а с законом преобразования* (5.235)—*вес s и показатель* 1, *а комплексный относительный тензор с законом преобразования* (5.236) *имеет вес s и показатель m.*

При m = 0 получаем как частный случай (5.233). Формулу (5.235) также можно считать частным случаем (5.236) при m=1, с той только разницей, что в (5.235) мы ограничиваемся вещественными величинами, так что $e^{\alpha i}=\pm 1$.

Далее, в комплексном случае возможны «псевдотензоры», в том числе и относительные, с законом преобразования (5.236), *в котором коэффициенты А все или частично заменены комплексно сопряженными им величинами.* Возможны центроаффинные линейные информационные объекты и более сложного типа. На них мы останавливаться не будем. Существенно, что все возможные усложнения в законе преобразования (не считая перехода к псевдотензорам) связаны здесь с наличием Det | $A^{p}{}_{p'}$ | ≠1 и исчезают в случае Det | $A^{p}{}_{p'}$| = 1.

Существенно иная картина наблюдается в евклидовом информационном пространстве.

В евклидовом информационном пространстве понятие линейного информационного объекта вводится совершенно аналогично тому, как мы делали это в аффинном информационном пространстве. При этом вместо квазиаффинной группы в информационном многообразии аффинных реперов *мы исходим из группы квазидвижений в информационном многообразии ортонормированных реперов* и задаемся каким-либо ее линейным представлением в пространстве переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$. А именно, каждому квазидвижению в информационном многообразии ортонормированных реперов мы сопоставляем линейное преобразование переменных

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p + B_{p'} \tag{5.237}$$

с таким расчетом, что наложению квазидвижений отвечает наложение соответствующих линейных преобразований (5.237). Коэффициенты $B^p_{p'}$, $B_{p'}$, должны по-прежнему непрерывно зависеть от коэффициентов $A^i_{i'}$, A^i квазидвижения

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = A^i\mathbf{e}_i, \tag{5.238}$$

где теперь матрица $A^i_{i'}$, либо ортогональная комплексная, либо ортогональная вещественная, либо псевдоортогональная, в зависимости от того, в каком евклидовом информационном пространстве мы находимся: в комплексном евклидовом, собственно евклидовом или псевдоевклидовом.

Задание линейного информационного объекта в евклидовом информационном пространстве означает сопоставление каждому *ортонормированному реперу* $\mathfrak{R}$ чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, которые при переходе к другому ортонормированному реперу $\mathfrak{R}'$ подвергаются линейному преобразованию (5.237), отвечающему квазидвижению $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}'$.

Аналогично аффинному случаю и по тем же причинам мы ограничимся частным случаем линейного информационного объекта, когда закон преобразования (5.237) не зависит от A^i, т. е. координаты информационного объекта не меняются при параллельном сдвиге репера. Такого частного вида информационные объекты могут быть истолкованы как информационные объекты в *центроевклидовом информационном пространстве,* т. е. евклидовом информационном пространстве с фиксированной точкой *O* — центром пространства. В самом деле, в центроевклидовом информационном пространстве группа движений сводится к группе вращений около центра *O*, а в

качестве реперов достаточно брать ортонормированные реперы с началом в центре *O*. Соответственно, вместо группы квазидвижений в информационном многообразии ортонормированных реперов мы можем ограничиться ее подгруппой — *группой квазивращений. Квазивращениями* мы будем называть квазидвижения, при которых начало каждого репера остается неподвижным *(*$A^i = 0$*),*
так что (5.238) принимает вид

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'}\mathbf{e}_i, \qquad \overrightarrow{OO'} = 0. \tag{5.239}$$

Линейные информационные объекты в цептроевклидовом информационном пространстве мы будем кратко называть *центроевклидовыми.* Их мы определяем, исходя из закона преобразования (5.237), где, однако, (5.237) есть линейное представление группы квазивращений (5.239), а не всей группы квазидвижений. Это значит, что коэффициенты в (5.237) зависят только от $A^i_{i'}$, но не от A^i, так что *центроевклидовы информационные объекты совпадают с этим частным случаем линейных информационных объектов в евклидовом информационном пространстве.*

Кроме того, мы будем предполагать $B_{p'} = 0$. В результате центроевклидов информационный объект задается следующим образом: каждому ортонор-мированному реперу $\mathfrak{R}$ сопоставлены *N* чисел $\varphi_1(\mathfrak{R}), \ldots, \varphi_N(\mathfrak{R})$, причем мы ограничиваемся реперами $\mathfrak{R}$ с фиксированным началом *O*; *эти числа при переходе от одного репера* $\mathfrak{R}$ *к другому* $\mathfrak{R}'$ *испытывают линейное преобразование*

$$\varphi_{p'} = \sum_{p=1}^{N} B^p_{p'}\varphi_p, \tag{5.240}$$

отвечающее квазивращению $\mathfrak{R} \to \mathfrak{R}'$ *в некотором линейном представлении группы квазивращений.* В качестве центросвклидовых информационных объектов могут служить прежде всего тензоры, а в комплексном случае — и псевдотензоры, рассматриваемые в ортонормированных реперах. Что же касается относительных тензоров, то мы не сможем их сконструировать ввиду того, что при ортогональном (псевдоортогональном) преобразовании Det | $A^i_{i'}$| = ± 1 и какую-либо степень модуля этого определителя бесполезно употреблять в качестве дополнительного множителя в тензорном законе преобразования. Единственное, что можно здесь сделать — это условиться о появлении дополнительного множителя sign Det | $A^i_{i'}$|, причем в псевдоевклидовом случае можно брать и другие множители: sign Det | $A^{\alpha}_{\alpha'}$| или sign Det | $A^{\lambda}_{\lambda'}$| (обозначения п. 5.12).

Литература

1. Мануэль Кастельс. Информационная эпоха: экономика, общество и культура. М., 2000.

2. Юзвишин И.И. Основы информациологии. М., 2001.

3.Энциклопедия информациологии / Под ред. А.М. Прохорова. М., 2000.

4. Абдеев Р.Ф. Философия информационной цивилизации. М., 1994;

5. Столяров Ю.Н. Сущность информации. М., 2000.

6. Энциклопедия информациологии / Под ред. А.М. Прохорова. М., 2000.

7. Зубов Ю.С., Сляднева Н.А. Человек в пространстве и времени: информационный аспект проблемы // Информационная культура личности: прошлое, настоящее, будущее. Краснодар, 1996.

8. Калина Н.М. Информатизация как социокультурный процес: Некоторые аспекты анализа. Казань, 1993.

9. Уханов В.А. Информационная деятельность человека: Социально-философский анализ. Екатеринбург, 1998.

10. Моль А. Социодинамика культуры. М., 1973.

11. Ковальченко И.Д. Исторический источ-ник в свете учения об информации / История СССР. 1982.

12. Бовыкин В.И. Проблемы изучения исторической информации (К вопросу об информационном источниковедении) // Информационный бюллетень Ассоциации "История и компьютер". Март 1998 г. М., 1998.

13. Бовыкин В.И. К вопросу о закономерностях фиксирования исторической информатики в письменных источниках // Круг идей: историческая информатика на по-роге XXI века. М.-Чебоксары, 1999.

14. Алексеев П. В., Панин А. В. Философия. Учебник. – М.: "Проспект", 1997.

15. Астафьев В. И. Организация информационных потоков в биологических системах и фундаментальный принцип распределенной обработки информации Э. В. Евреинова. Н.сб.т. "Информациология распределенной обработки информации". – М.: Международное издательство Информациология, 1998.

16. Бим И. Л. Немецкий язык. Базовый курс. Концепция, программа – М: "Новая школа", 1995.

17. Бим И. Л. Концепция обучения второму иностранному языку (немецкому на базе английского", М: 1997.

18. Диалектическая логика. Ростов-на-Дону. Ростовское книжное издательство, 1966.

19. Евреинов Э. В. Информациология распределенной обработки информации в средах, структурах и биокомпьютерных системах. Н.сб.т. "Информациология распределенной обработки информации". – М.– Международное издательство Информациология, 1995.

20. Искусственный интеллект. Справочное издание. Т. 2. М. 1990.

21. Клир Дж. Системология. Автоматизация решения системных задач. – М.: "Радио и связь", 1990.

22. Коротенков Ю. Г Некоторые свойства производных отношений в математической лингвистике. Деп. в ВИНИТИ в 1988 г .№ 2049-В88.

23. Краткий философский словарь. – М.: "Проспект", 1997.

24 Мамедов Э. Э., Коротенков Ю. Г. Философия информации и системы информационных знаний. – М.: Международное издательство "Информациология", 1999.

25. Маркус С. Теоретико-множественные модели языков М.: "Наука", 1970.

26. Полат Е. С., Моисеева М. В., Петров А. Е. и др. Дистанционное обучение – М.: "ВЛАДОС", 1998.

27. Роберт И. В. Современные информационные технологии в образовании. М.: "Школа-Пресс", 1994.

28. Управление государственной собственностью. Учебник под ред. В. И. Кошкина. М.: "Инфра-М", 1997.

28. Шаповалов В. И. Энтропийный мир. – Волгоград. "Перемена", 1995.

29. Юдин Э. Г Методология науки. Системность. Деятельность. "Эдиториал УРСС", 1997.

30. Юзвишин И. И., Евреинов Э. В., Кариман С. А. Информациология макровакуумо- и микроматериосфер мироздания. Н.сб.с. "Информациология распределенной обработки информации". – М.: Международное издательство Информациология, 1998.

31. Юзвишин И. И., Евреинов Э. В., Харитон А. Г., Салик М. М. Сущность информациологического подхода в науке. Н.сб.т. "Информациология распределенной обработки информации". – М.: Международное издательство Информациология, 1998.

32. Bertoline G. R. Visual Science: An emerging discipline / G. R. Bertoline // Journal for Geometry and Graphics. – 2(2). – 1998. – P. 181 – 187.

33. Murr L. E. In the visual culture / L. E. Murr // Engineering Education. – December. – 1998. – P. 170 – 172.

34. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. – М.: Радио и связь, 1982. – 432 с.

35. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А.П. Рыжов. – М.: Диалог-МГУ, 1998. – 82 с.

36. Наук П. Е. Тенденции формирования новых интегральных дисциплин в образовании / П. Е. Наук // Математика и информатика: наука и образование. – Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. – Омск, 2001. – Вып. 1. – С. 281 – 286.

37. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления: Пер. с англ. / Алефельд Г., Херцбергер Ю. – М .: Мир, 1987. – 360 с.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Информациология
Общая теория информации

Книга 1

Авторская редакция

Подписано в печать 30.03.2011 г.
Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 16,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:
Издательство «Освита Украины»
04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40
Свидетельство о внесении в Государственный реестр издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.
Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992
E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru