

Парадигма развития науки
Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ
МОДЕЛИРОВАНИЯ

Книга 3

Величины и размерности
как параметры моделей

Часть 1

Математические величины

Киев
Освіта України
2012

УДК 51 (075.8)

ББК В161.я7

К 213

Рецензент: *Н.К.Печурин* - д-р техн. наук, проф. (Национальный авиационный университет).

Кононюк А. Е.

К65 Обобщенная теория моделирования. Величины и размерности. К.3.Ч.1, К.4:"Освіта України", 2012. - 636 с.

ISBN 978-966-7599-50-8

Настоящая работа является систематическим изложением обобщенной теории моделирования. Основное внимание уделяется идейным основам теории моделирования, их сравнительному анализу и примерам использования. Рассмотрен широкий круг задач моделирования — от общих задач моделирования до частных задач моделирования, а именно: моделирование объектов по выполняемым функциям, по составу, по структуре, по форме, по организации, по управлению. Обсуждается методика постановки и решения проблем моделирования. Рассматриваются средства математического описания объектов и процессов моделирования. Описываются системы автоматизированного моделирования.

Работа предназначена для магистров, аспирантов, докторантов, инженеров, экономистов, статистиков, вычислителей и всех тех, кто сталкивается с задачами моделирования, прежде всего, математического.

ББК В161.я7

ISBN 978-966-7599-50-8

©А.Е. Кононюк, 2012

Оглавление

1. Общие сведения о величине.....	6
1.1. Величина.....	6
1.2. Приближенные значения величины.....	20
2. Функции и преобразования.....	28
2.1. Функции и графики.....	28
2.2. Обзор простейших функций.....	44
2.3. Отображения и функции.....	60
2.3.1. Формальное определение отображения и его свойства.....	61
2.3.2. Функция как отображение.....	69
2.3.3. Некоторые специальные классы функций.....	79
2.3.4. Комбинаторные операции и функции.....	100
2.4. Функции нескольких переменных.....	105
2.4.1. Функции двух переменных.....	105
2.4.2. Функции любого числа переменных.....	114
3. Векторные величины.....	117
3.1. Векторы и скаляры.....	117
3.2. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось.....	119
3.3. Умножение вектора на скаляр. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора.....	124
3.4. Скалярное и векторное произведения двух векторов.....	132
3.5. Произведения трех векторов.....	138
3.6. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора.....	141
3.7. Переменные векторы.....	154
3.8. Примеры векторного моделирования.....	157
4. Тензоры.....	163
4.1. Компоненты тензоров и их преобразование.....	163
4.2. Тензоры нулевого ранга (скаляры).....	166
4.3. Тензоры 1-го ранга (векторы).....	168
4.4. Тензоры 2-го ранга.....	171
4.5. Тензоры высших рангов.....	186
4.6. Преобразование компонент векторов и тензоров при повороте координатной плоскости вокруг перпендикулярной оси.....	187
4.7. Инвариантность тензорных уравнений.....	191
4.8. Криволинейные координаты.....	192

4.9. Тензоры в системах обобщенных координат.....	198
4.10. Примеры моделирования объектов.....	204
4.11. Тензорная алгебра.....	211
4.12. Главные оси тензора.....	220
4.13. Инварианты тензора.....	233
4.14. Псевдотензоры.....	239
4.15. Линейное n -мерное пространство. Векторы и тензоры в n -мерном пространстве.....	246
4.16. Примеры моделирования.....	248
5. Математические поля как средства моделирования.....	254
5.1. Тензорное поле. Циркуляция.....	254
5.2. Теорема Остроградского и теорема Стокса.....	257
5.3. Скалярное поле.....	267
5.4. Векторное поле.....	273
5.5. Поле тензора 2-го ранга.....	294
5.6. Ковариантное дифференцирование тензоров.....	297
5.7. Применение дифференциальных операций к различного вида векторным и скалярным функциям.....	303
5.8. Интегральные теоремы векторного и тензорного анализа.....	313
5.9. Потенциальное векторное поле.....	333
5.10. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал.....	338
5.11. Лапласово векторное поле. Гармонические функции.....	342
5.12. Основная теорема векторного анализа.....	348
5.13. Примеры моделирования объектов и процессов.....	360
6. Комплексные числа.....	383
6.1. Система комплексных чисел.....	483
6.2. Извлечение корня из комплексных чисел.....	397
6.3. Комплексные функции от вещественного аргумента.....	404
7. Ряды.....	410
7.1. Числовые ряды.....	410
7.2. Общие функциональные ряды.....	424
7.3. Степенные ряды.....	429
7.4. Тригонометрические ряды.....	447
7.5. Преобразование Фурье.....	470
8. Случайные величины и их обработка.....	476
8.1. Дискретные и непрерывные случайные величины.....	476
8.2. Преобразования случайных величин.....	503
8.3. Обработка наблюдений.....	515
9. Нечеткие величины и операции над ними.....	529
9.1. Нечеткие величины.....	529
9.2. Операции с нечеткими величинами.....	533
9.3. Понятия нечеткого максимума и нечеткого минимума.....	546

9.4. Примеры решения типовых задач с нечеткими величинами.....	551
9.5. Применение теории нечетких множеств для моделирования задач управления и принятия решений.....	561
9.6. Планирование работ системы технологических агрегатов с использованием методов нечетких множеств.....	598
9.7. Агрегатированное планирование работы технологических систем на основе метода нечетких множеств.....	620
Литература.....	635

1. Общие сведения о величине

1.1. Величина

Величина — одно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.

1. Понятие величины. Понятие величины настолько широко и всеобъемлюще, что ему трудно дать точное определение. Массы, давления, работы, заряды, длины и объемы, целые и дробные числа — все это примеры величин. На первой стадии *величиной можно считать то, что, выраженное в определенных единицах* (например, масса — в граммах или тоннах и т. п.), *характеризуется своим численным значением*. Так, площадь круга является величиной, поскольку она, выраженная, например, в квадратных сантиметрах, полностью характеризуется своим численным значением (5, π и т. п.); сам круг, конечно, не является величиной, так как для него характерна определенная *форма*, которая не выражается каким-либо числом.

Многие понятия, ранее воспринимавшиеся лишь качественно (такие, например, как эффективность, количество информации и даже степень правдоподобия), «повышены в должности» и переведены в разряд величин. Каждый такой перевод является важным событием, так как он дает возможность применить к указанным понятиям количественный математический анализ, что часто оказывается очень эффективным.

может означать:

- Величина (математика) — одно из основных математических понятий, смысл которого с развитием математики подвергался ряду обобщений.
- Величина (физика) — физическое свойство материального объекта, физического явления, процесса, которое может быть охарактеризовано количественно.

2. Размерность величины. *Размерностью величины называется та единица, через которую эта величина выражена.* Так, размерностью массы обычно служит грамм или килограмм; размерностью площади — квадратный сантиметр или квадратный метр и т. п. Размерность обозначается квадратными скобками; например, если M —масса, S —

площадь, то в международной системе единиц $[M] = \text{кг}$ (т. е. килограмм), $[S] = \text{м}^2$ (т. е. квадратный метр). Обычно размерности некоторых величин принимаются за основные, а размерности остальных величин выражаются через эти основные. Так, в механике в международной системе единиц размерности длины (*м*), массы (*кг*) и времени (*сек*) считаются основными; через них выражаются, например, размерности скорости (*м/сек*) или силы (*кгм/сек²*).

Складывать или вычитать можно только величины одинаковой размерности, причем размерность суммы такая же, как размерность слагаемых. Умножить или разделить друг на друга можно величины любой размерности; при умножении (или делении) величин их размерности тоже множатся (или соответственно делятся).

Часто рассматриваются величины безразмерные («отвлеченные»). Так, отношение двух величин одинаковой размерности является безразмерным. Численное значение величины, которое является отношением этой величины к ее выбранной единице, также безразмерно; например, численным значением массы в 5 кг служит «безразмерная масса» 5. Безразмерную массу можно получить также, взяв отношение изучаемой массы к некоторой *характерной* в рассматриваемом процессе массе (хорошо известной и принимаемой в данном процессе за эталон для сравнения). Подобным образом вводятся безразмерные длина, время и т. п.

В курсе математики величины обычно считаются безразмерными. Безразмерная величина полностью характеризуется своим численным значением, ее «единицей» служит число **1**.

История

Ещё в «Началах» Евклида (3 в. до н. э.) были отчётливо сформулированы свойства величины, называемых теперь, для отличия от дальнейших обобщений, положительными скалярными величинами. Это первоначальное понятие величины является непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объёма, массы и т. п. Каждый конкретный род величины связан с определённым способом сравнения физических тел или др. объектов. Например, в геометрии отрезки сравниваются при помощи наложения, и это сравнение приводит к понятию длины: два отрезка имеют одну и ту же длину, если при наложении они совпадают; если же один отрезок накладывается на часть другого, не покрывая его целиком, то длина первого меньше длины второго. Общеизвестны более сложные

приёмы, необходимые для сравнения плоских фигур по площади или пространственных тел по объёму.

Свойства

В соответствии со сказанным, в пределах системы всех однородных величин (то есть в пределах системы всех длин или всех площадей, всех объёмов) устанавливается отношение порядка: две величины **a** и **b** одного и того же рода или совпадают (**a = b**), или первая меньше второй (**a < b**), или вторая меньше первой (**b < a**). Общеизвестно также в случае длин, площадей, объёмов и то, каким образом устанавливается для каждого рода величины смысл операции сложения. В пределах каждой из рассматриваемых систем однородных величин отношение **a < b** и операция **a + b = c** обладают следующими свойствами:

1. Каковы бы ни были **a** и **b**, имеет место одно и только одно из трёх соотношений: или **a = b**, или **a < b**, или **b < a**
2. Если **a < b** и **b < c**, то **a < c** (транзитивность отношений «меньше», «больше»)
3. Для любых двух величин **a** и **b** существует однозначно определённая величина **c = a+b**
4. **a + b = b + a** (коммутативность сложения)
5. **a + (b + c) = (a + b) + c** (ассоциативность сложения)
6. **a + b > a** (монотонность сложения)
7. Если **a > b**, то существует одна и только одна величина **c**, для которой **b + c = a** (возможность вычитания)
8. Каковы бы ни были величины **a** и натуральное число **n**, существует такая величина **b**, что **nb = a** (возможность деления)
9. Каковы бы ни были величины **a** и **b**, существует такое натуральное число **n**, что **a < nb**. Это свойство называется аксиомой Евдокса, или аксиомой Архимеда. На нём вместе с более элементарными свойствами 1-8 основана теория измерения величин, развитая древнегреческими математиками.

Если взять какую-либо длину **l** за единичную, то система **s'** всех длин, находящихся в рациональном отношении к **l**, удовлетворяет требованиям 1-9. Существование несоизмеримых отрезков (открытие которых приписывается Пифагору, 6 в. до н. э.) показывает, что система **s'** ещё не охватывает системы **s** всех вообще длин.

Чтобы получить вполне законченную теорию величин, к требованиям 1-9 надо присоединить ещё ту или иную дополнительную аксиому непрерывности, например:

10) Если последовательности величин $a_1 < a_2 < \dots < \dots < b_2 < b_1$ обладают тем свойством, что $b_n - a_n < c$ для любой величины c при достаточно большом номере n , то существует единственная величина x , которая больше всех a_n и меньше всех b_n .

Свойства 1-10 и определяют полностью современное понятие системы положительных скалярных величин. Если в такой системе выбрать какую-либо величину 1 за единицу измерения, то все остальные величины системы однозначно представляются в виде $a = a \cdot 1$, где a - положительное действительное число.

Другие подходы

Рассмотрение направленных отрезков на прямой, скоростей, могущих иметь два противоположных направления, и т. п. Величина естественно приводит к тому обобщению понятия скалярной величины, которое является основным в механике и физике. Система скалярных величин в этом понимании включает в себя, кроме положительной величины, нуль и отрицательную величину. Выбирая в такой системе какую-либо положительную величину 1 за единицу измерения, выражают все остальные величины системы в виде $a = a \cdot 1$, где a - действительное число, положительное, отрицательное или равное нулю. Конечно, систему скалярных величин в этом понимании можно охарактеризовать и аксиоматически, не опираясь на понятие числа. Для этого пришлось бы несколько изменить требования 1-10, которыми выше охарактеризовано понятие положительной скалярной величины.

В более общем смысле слова величинами называют **векторы, тензоры** и другие «не скалярные величины». Такие величины можно складывать, но отношение неравенства ($a < b$) для них теряет смысл.

В некоторых более отвлечённых математических исследованиях играют известную роль «неархимедовы» величины, которые имеют с обычными скалярными величинами то общее, что для них сохраняются обычные свойства неравенств, но аксиома 9 не выполняется (для

скалярных величин в смысле пункта II она сохраняется с оговоркой, что $\mathbf{b} > \mathbf{0}$).

Так как система действительных положительных чисел удовлетворяет перечисленным выше свойствам 1-10, а система всех действительных чисел обладает всеми свойствами скалярных величин, то вполне **законно сами действительные числа называть величинами**. Это особенно принято при рассмотрении переменных величин. Если какая-либо конкретная величина, например длина l нагреваемого металлического стержня, изменяется во времени, то меняется и измеряющее её число $x = l / l_0$ (при постоянной единице измерения l_0). Само это меняющееся во времени число x принято называть **переменной величиной** и говорить, что x принимает в какие-либо последовательные моменты времени t_1, t_2, \dots «числовые значения» X_1, X_2, \dots . В традиционной математической терминологии говорить о «переменных числах» не принято. Однако логичнее такая точка зрения: числа, как и длины, объёмы и т. п., являются частными случаями величины и, как всякие величины, могут быть и переменными, и постоянными. Столь же законно и рассмотрение переменных векторов, тензоров и т. п.

3. Постоянные и переменные величины.

Величина, участвующая в некотором рассмотрении, может либо принимать различные значения, либо принимать одно определенное значение; в первом случае она называется переменной величиной, а во втором — постоянной (константой). Так, при рассмотрении воды в бассейне давление в различных точках есть величина переменная, оно зависит от места замера, тогда как плотность в разных точках можно с достаточной точностью считать величиной постоянной. Другой пример: при рассмотрении процесса сжатия определенной порции газа при постоянной температуре давление и объем будут величинами переменными, а масса и температура — постоянными. Впрочем, надо иметь в виду, что в любом реальном процессе и эти две последние величины несколько меняются, и только если это изменение незначительно и несущественно для остального, можно условно, схематизируя процесс, принять их за постоянные. И в других случаях постоянство тех или иных величин обычно является лишь условным; об этом надо время от времени вспоминать, так как если считать постоянной величину, изменение которой невелико, по существу для рассмотрения, то можно прийти к ошибочным выводам.

Переменная - признак (исследуемого объекта), который может принимать разные значения для различных случаев или для различных моментов времени в рамках одного случая.

- Переменная величина в математике — символ, обозначающий какое-то число в алгебраическом выражении.
 - Независимая и зависимая переменные в статистике.

Величина, постоянная в одном рассмотрении, может в другом аналогичном (похожем) рассмотрении принимать другое значение или даже быть переменной. Такие постоянные величины называются параметрами данного рассмотрения; они являются его характеристиками. Так, в процессе изотермического сжатия газа масса и температура служат параметрами. При выборе электрической лампочки ее параметрами служат сопротивление, напряжение в сети, на которое она рассчитана, и потребляемая мощность. Конечно, здесь имеются и другие параметры, которые иногда приходится принимать во внимание (например, габариты), но обычно именно эти считаются основными; и в других случаях важно уметь выделить из всевозможных параметров, характеризующих тот или иной объект или процесс, основные, наиболее важные параметры.

Термин **переменная** может означать:

- Переменная (программирование) — поименованная, либо адресуемая иным способом область памяти, адрес которой можно использовать для осуществления доступа к данным.

— атрибут физической или абстрактной системы, который может изменять своё значение. Значение может меняться в зависимости от контекста, в котором рассматривается система, или в случае уточнения, о какой конкретно системе идёт речь. Концепция переменной широко используется в таких областях как математика, естественные науки, техника и программирование. Примерами переменных могут служить температура воздуха, параметр функции и многое другое. В широком смысле, переменная характеризуется лишь множеством значений, которые она может принимать.

Переменные в математике

В математике **переменная** — это величина, характеризующаяся множеством значений, которое она может принимать. При этом может иметься в виду как реальная физическая величина, временно рассматриваемая в отрыве от своего физического контекста, так и некая абстрактная величина, не имеющая никаких аналогов в реальном мире. В математическом анализе и большинстве смежных разделов математики под «переменной» обычно понимают численную величину, множество принимаемых значений которой включено в множество вещественных чисел.

Множество всех значений, которые может принимать данная переменная, называется **областью изменения** этой переменной. Это множество и задаёт переменную, то есть формально и является ей.

При **моделировании** переменные необходимо отличать от параметров, несмотря на то что переменная в одном контексте может быть параметром в другом.

В прикладной статистике переменная — оценочный фактор, или характеристика, или индивидуальный или системный атрибут. Иными словами, нечто, изменение чего ожидается с течением времени или между отдельными лицами.

Обозначения

- Переменные обозначаются малыми буквами латинского или греческого алфавита (возможно, с индексами): x, y, ε .
- Области изменения соответствующих переменных обозначаются обычно теми же символами, взятыми в фигурные скобки: $\{x\}, \{y\}, \{\varepsilon\}$.

Нужно отметить, что аналогичным образом обозначаются неизвестные в уравнениях, неравенствах и других подобных задачах. Например, $2x = 6$. В этом случае имеются в виду не переменные, хотя понятия весьма схожи и зависят от контекста.

Суть этого различия между *неизвестной* и *переменной* можно пояснить так. Запись $2x = 6$ можно, с одной стороны, трактовать как утверждение о свойстве неизвестной (в момент высказывания утверждения) величины x , значение которой можно найти (или уточнить), отталкиваясь от приведенного утверждения как от исходной посылки. В этом случае x будет обозначением конкретной, но до проведения выкладок (например, решения уравнения) *неизвестной величины*. С другой стороны запись $2x = 6$ можно трактовать как предикат, принимающий значение «истина» при одних значениях, подставляемых на место x , и значение «ложь» при других. В этом случае x является обозначением *места в выражении*, на которое могут подставляться различные (переменные) значения с целью определения логического (булева) значения записанного предиката. В этом случае x правильнее рассматривать как *переменную*.

Переменные в программировании

В программировании **переменная** — это идентификатор, определяющий данные. Обычно это бывает имя, скрывающее за собой область памяти с хранящимися там данными. Переменная может иметь тип, характеризующий множество значений, которые она может принимать. В программировании, переменные, как правило, обозначаются одним или несколькими словами или символами, такими, как «time», «x», «foo» и тому подобное.

Следует отметить, что это значение в некотором смысле схоже с математическим. Математики в XVII веке придумали переменную именно для того, чтобы «забронировать» в формуле место, на которое в нужный момент можно подставить конкретное значение. Бумага в этом процессе является памятью, а обозначения (чаще, буквы) резервируют и именуют области этой памяти. Ощущение неоднозначности возникает из-за того, что формула в математике играет двоякую роль: если это алгоритм вычисления, смысл совпадает с программистским определением; если же формула визуализирует отношения своих элементов, мы абстрагируемся от роли переменной, как ячейки памяти, такое понимание теряет смысл.

Переменные в физике

В физике **переменная** — это некоторый атрибут модели реального физического процесса, принимающий количественные значения,

физическая величина. Множество значений, которые может принимать конкретная переменная, определяется из физических соображений. Физические переменные связываются друг с другом физическими законами, в результате чего получаются математические модели различной степени сложности. Переменные в физике, как правило, кроме количественного значения характеризуются также размерностью.

Некоторые избранные константы

Математическая константа — величина, значение которой не меняется; в этом она противоположна переменной. В отличие от физических констант, математические константы определены независимо от каких бы то ни было физических измерений.

Использованные сокращения: *И* — иррациональное число, *А* — алгебраическое число, *T* — трансцендентное число, *?* — неизвестно; *мат* — обычная математика, *ТЧ* — теория чисел, *ТХ* — теория хаоса, *комб* — комбинаторика, *АИТ* — Алгоритмическая теория информации.

Символ	Приближенное значение	Название	Область	Значение	Впервые описан	Число известных знаков
π	$\approx 3,141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 238\ 462\ 643\ 383\ 279\ 502\ 88$	<u>пи</u> , <u>архимедова</u> константа	<u>мат</u>	<u>T</u>	?	10 000 000 000 000 ^[1]
<i>e</i>	$\approx 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ 662\ 50$	<u>константа</u> <u>Непера</u> , основание <u>натурального</u> <u>логарифма</u>	<u>мат</u>	<u>T</u>		12 884 901 000
$\sqrt{2}$	$\approx 1,414\ 213\ 562\ 373\ 095\ 048\ 801\ 688\ 724\ 209\ 698$	константа <u>Пифагора</u> , <u>квадратный</u> <u>корень</u> из 2	<u>мат</u>	<u>A</u> , но <u>И</u>		137 438 953 444

	08				
$\sqrt{3}$	$\approx 1,732\ 050$	константа			
	807 568 877	<u>Теодоруса,</u>	<u>мат</u>	<u>A</u> , но <u>И</u>	
	293 527 446	<u>квадратный</u>			
	341 505 872	<u>корень из 3</u>			
37					
γ	$\approx 0,577\ 215$				
	664 901 532	<u>постоянная</u>	<u>мат.</u>	?	108 000 000
	860 606 512	<u>Эйлера —</u>			
	090 082 402	<u>Маскерони</u>			
43					
φ	$\approx 1,618\ 033$				
	988 749 894	<u>золотое</u>	<u>мат</u>	<u>A</u>	3 141 000 000
	848 204 586	<u>сечение</u>			
	834 365 638				
12					
β^*	$\approx 0,702\ 58$	<u>константа</u>			
		<u>Эмбри —</u>	<u>ТЧ</u>		
		<u>Трефтена</u>			
δ	$\approx 4,669\ 201$				
	609 102 990	<u>постоянная</u>	<u>ТХ</u>		
	671 853 203	<u>Фейгенбаума</u>			
	820 466 201				
61					
α	$\approx 2,502\ 907$				
	875 095 892	<u>константа</u>	<u>ТХ</u>		
	822 283 902	<u>Фейгенбаума</u>			
	873 218 215				
78					
C_2	$\approx 0,660\ 161$	<u>константа</u>			
	815 846 869	<u>простых</u>	<u>ТЧ</u>		5 020
	573 927 812	<u>близнецов</u>			
	110 014 555				
77					
M_1	$\approx 0,261\ 497$				
	212 847 642	<u>константа</u>	<u>ТЧ</u>	$\frac{1866;}{1874}$	8010
	783 755 426	<u>Мейсселя —</u>			
	838 608 695	<u>Мертенса</u>			
85					

B_2	$\approx 1,902\ 160$ $583\ 104^{[2]}$	<u>константа</u> <u>Бруна для</u> <u>простых</u> <u>близнецов</u>	<u>ТЧ</u>	<u>1919</u>	10
B_4	$\approx 0,870\ 588$ 380 0	<u>константа</u> <u>Бруна для</u> <u>простых</u> <u>четвёрок</u>	<u>ТЧ</u>		
A	$\approx -2,7 \cdot 10^{-9}$	<u>константа де</u> <u>Брюйна —</u> <u>Ньюмана</u>	<u>ТЧ</u>	<u>1950?</u>	
K	$\approx 0,915\ 965$ 594 177 219 015 054 603 514 932 384 11	<u>постоянная</u> <u>Каталана</u>	<u>комб</u>		31 026 000 000
K	$\approx 0,764\ 223$ 653 589 220 66	<u>константа</u> <u>Ландау —</u> <u>Рамануджана</u>	<u>ТЧ</u>	<u>И (?)</u>	30 010
K	$\approx 1,131\ 988$ 24	<u>константа</u> <u>Висваната</u> ¹	<u>ТЧ</u>		8
J	$\approx 3,058\ 198$ 247 456 354 132 564 564 787 888 767...	<u>константа</u> <u>Поля-Гаусса</u>	<u>ТЧ</u>		10343
B'_L	1 или $1,08366^{[3]}$	<u>константа</u> <u>Лежандра (а</u> <u>нгл.)</u>	<u>ТЧ</u>		
μ	$\approx 1,451\ 369$ 234 883 381 050 283 968 485 892 027	<u>константа</u> <u>Рамануджана</u> <u>— Солднера</u>	<u>ТЧ</u>		75 500
E'_B	$\approx 1,606\ 695$ 152 415 291 763	<u>константа</u> <u>Эрдёша —</u> <u>Борвейна</u>	<u>ТЧ</u>	<u>И</u>	
Ω	$\approx 0,007\ 874$ 996 997 812 384 4	<u>константа</u> <u>Хайтина</u>	<u>АИТ</u>	<u>Т</u>	

	$\approx 1,202\ 056$					
	903 159 594					
$\zeta(3)$	285 399 738	<u>постоянная</u>	<u>ТЧ</u>	<u>И</u>	<u>1735</u>	100 000 001
	161 511 449	<u>Аперри</u>				000
	99					
		число Дотти,				
	$\approx 0,739\ 085$	притягиваю				
	133 215 160	щая				
ω	641 655 312	<u>неподвижная</u>	<u>ТХ</u>			
	087 673 873	<u>точка</u>				
	40	функции				
		$\cos(x)$				

4. Числовая ось. Величины можно наглядно изображать при помощи *числовой оси*. Чаще всего применяется *прямолинейная ось с равномерной шкалой*. Для ее построения надо выбрать прямую линию, а на ней — начало отсчета, которое обычно обозначается буквой *O*. Затем надо на этой прямой выбрать одно из двух направлений за положительное (это направление обозначается стрелкой; рис. 1) и принять некоторый отрезок за единицу масштаба.

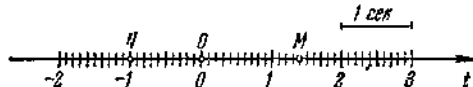


Рис. 1

Откладывая этот отрезок от начала отсчета в обоих направлениях, получим точки, отвечающие целым численным значениям рассматриваемой величины. Между этими «целыми точками» расположены точки, отвечающие нецелым значениям — дробным рациональным например, $\frac{1}{2}$, $-2,03$ и т. п.) и иррациональным (т. е. нерациональным, например $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$, $-\pi$ и т. п.). Если рассматриваемая величина размерная (именованная), то и отрезок, принятый за единицу, получает соответствующее наименование: например, на рис. 1 на оси изображаются численные значения времени t , выраженного в секундах; там же изображены точки $N(t = -1 \text{ сек})$, $O(t = 0 \text{ сек})$, $M(t = 1,37 \text{ сек})$.

Каждому значению величины отвечает некоторая точка на оси, и, наоборот, каждая точка на оси соответствует некоторому значению этой величины. (Здесь и далее имеются в виду лишь величины, принимающие вещественные, т. е. действительные значения; о том, как изображаются комплексные величины, мы поговорим далее) Поэтому часто значения величины и изображающие точки как бы отождествляются, и говорят просто: дана точка $t = 1,37$ сек и т. п.

Если величина переменная, то она изображается точкой, которая может занимать на оси различные положения (например, которая перемещается с течением времени); такая точка называется *текущей*. Постоянной величине отвечает точка, не меняющая своего положения. На практике начало отсчета и единицу масштаба выбирают так, чтобы наилучшим образом изобразить диапазон (промежуток) изменения рассматриваемой величины; при этом часто бывает, что само начало на рисунок не попадает, так как изображается, конечно, лишь часть оси. Например, на рис. 2 изображена ось значений длины стержня при его нагревании.



Рис. 2.

Иногда бывает удобно применять неравномерные шкалы. Так, часто применяется *логарифмическая шкала* (рис. 3), в которой число $n > 1$ изображается точкой, полученной откладыванием от некоторой выбранной точки A в положительном направлении отрезка длины $k \lg n$, где k — некоторый выбранный коэффициент пропорциональности.

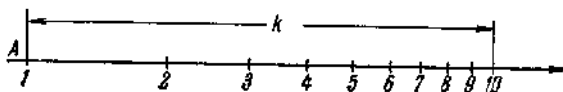


Рис. 3

Положительные числа $n < 1$ получаются на логарифмической шкале откладыванием от A отрезка $k |\lg n|$ в отрицательном направлении, так как для таких n будет $\lg n < 0$.

5. Характеристики переменных величин. *Переменная величина, которая принимает сплошь все числовые значения или все значения, заключенные между некоторыми границами, называется непрерывной.* В противоположность этому величина, принимающая

отдельные, «оторванные» друг от друга значения, называется дискретной.

Совокупность тех значений, которые может принимать данная переменная величина, принято называть **областью изменения этой величины**. Для указания этой области введем понятие **интервала**.

Конечным (ограниченным) интервалом называется совокупность всех чисел, заключенных между какими-либо двумя данными числами a и b , которые называются концами этого интервала. При этом **сами концы a и b или причисляются к интервалу, или нет, о чем необходимо указывать**. Тогда говорят соответственно о **замкнутом** интервале (если концы к нему причисляются) или об **открытом** (в противном случае). На числовой оси конечные интервалы изображаются отрезками.

Интервалы также могут быть **неограниченными (бесконечными)** с одной стороны или с обеих сторон. Например, если величина x может принимать любые значения, большие некоторого постоянного числа a , то область изменения величины можно записать неравенствами $a < x < \infty$. Эта область представляет собой неограниченный интервал; этот интервал не имеет правого конца, однако условно говорят, что в данном случае правый конец находится на бесконечности. Про такой интервал говорят, что он неограничен *сверху*, так как возрастание величины ассоциируется (связывается в обычном представлении) с ее «повышением»; если ось x проходит слева направо, то интервал $a < x < \infty$ можно также назвать неограниченным справа. Интервалом, неограниченным с обеих сторон, является совокупность всех чисел (геометрически — вся числовая ось).

Областью изменения непрерывной величины служит интервал или совокупность некоторого числа интервалов. Например, если треугольник ABC деформируется всевозможными способами, то угол A будет непрерывной переменной величиной, областью изменения которой будет интервал $0 < \angle A < \pi$, если брать численное значение угла, выраженного в радианной мере; областью изменения площади S будет интервал $0 < S < \infty$ (конечно, и здесь имеется в виду численное значение площади в определенных единицах, о чем мы впредь не будем все время упоминать). *Областью изменения дискретной величины служит совокупность конечного или бесконечного количества отдельных чисел* или, как говорят геометрически, отдельных точек (но не целых интервалов). Например, какой-либо номер может принимать значения 1, 2, ...; он будет дискретной переменной величиной.

Если переменная величина в некотором процессе меняется все время в одном направлении, т. е. все время возрастает или все время

убывает, она называется *монотонной*. Точка, изображающая монотонную величину на числовой оси, движется все время в одну и ту же сторону.

Чтобы не рассматривать постоянные величины отдельно, можно считать постоянную величину частным случаем переменной, которая в силу каких-то причин все время принимает одно и то же значение (ведь и в механике состояние покоя считается частным случаем движения). В этом случае область изменения состоит всего лишь из одной точки.

Величина называется *ограниченной сверху* (или справа), если в процессе своего изменения она все время остается меньше некоторой постоянной величины. Аналогично определяется *ограниченность снизу* (или слева). Величина, ограниченная сверху и снизу, называется просто *ограниченной*.

При исследовании величин часто применяется понятие *абсолютного значения* величины. Как известно, это понятие определяется так:

$$|a| = a, \text{ если } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Например, $|5| = 5$; $|0| = 0$; $|-5| = 5$ [т. е. $|-5| = -(-5)$].

Абсолютные значения имеют следующие простые свойства: $|a + b| \leq |a| + |b|$, причем это неравенство является строгим, если a и b имеют противоположные знаки, в противном же случае обращается в равенство;

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Значение $|a - b| = |b - a|$ равно расстоянию между точками a и b на числовой оси. Неравенство $|x| < h$ определяет интервал $-h < x < h$, а неравенство $|x - a| < h$ — интервал $-h < x - a < h$, т. е. $a - h < x < a + h$ (на рис. 4 эти интервалы заштрихованы).

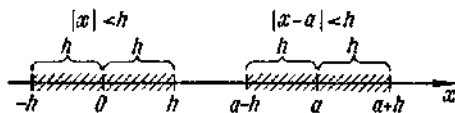


Рис. 4

1.2. Приближенные значения величины

1. Понятие приближенного значения. Обычно говорить об абсолютно точном численном значении физической величины невозможно. Например, мы никогда не можем знать длину какого-либо реального тела абсолютно точно. Это происходит не только из-за несовершенства измерения, но также и из-за несовершенства формы

самого тела, в результате чего невозможно указать точно, от какой точки и до какой надо производить отсчет (а если вспомнить, что тело состоит из молекул, которые все время движутся, то положение еще осложнится). Более того, в громадном большинстве случаев указание длины с чрезмерно большой степенью точности нецелесообразно, даже если оно возможно при современном уровне измерительной техники. Например, при обмере или проектировании жилого дома было бы нелепо указывать размеры с точностью до сотых долей миллиметра. То же можно сказать о массах, давлениях и т. п. Поэтому численные значения почти всех величин в физике и технике (например, всех непрерывных величин) задаются приближенно.

Математические действия над приближенными значениями величин называются приближенными вычислениями. Создана целая наука о приближенных вычислениях, с рядом положений которой мы познакомимся в дальнейшем. В России инициатором развития приближенных вычислений был А. Н. Крылов. Его книга «Лекции о приближенных вычислениях», изданная впервые в 1911 г., сохранила значение и в настоящее время.

Выбор степени точности, с которой производится изготовление какой-либо детали, или измерение, или вычисление,—это чрезвычайно ответственное дело. При этом выборе приходится руководствоваться многими соображениями —потребностями, техническими возможностями, экономичностью и т. п.

2. Погрешности. Пусть точное значение какой-либо величины равно A , а приближенное равно a . Тогда погрешность, т. е. отклонение точного значения от приближенного, равна $A - a$; она может получиться как положительной, так и отрицательной. Эта погрешность обычно бывает точно неизвестна, так как неизвестно значение A . Поэтому обычно задаются предельные погрешности α_1 и α_2 , между которыми содержится истинная погрешность:

$$\alpha_1 < A - a < \alpha_2, \text{ т. е. } a - \alpha_1 < A < a + \alpha_2.$$

В этом случае говорят, что задана двусторонняя оценка величины A . Таким образом, например, формула для длины $L = 9_{-0,1}^{+0,2}$ мм означает, что истинное значение длины заключено между $9 - 0,1 = 8,9$ мм и $9 + 0,2 = 9,2$ мм.

Так как задавать две предельные погрешности не всегда удобно, то часто задается предельная абсолютная погрешность α , т. е. величина, большая абсолютного значения погрешности:

$$|A - a| < \alpha, \text{ т. е. } -\alpha < A - a < \alpha \text{ или } a - \alpha < A < a + \alpha.$$

Пусть, например, при измерении некоторой длины l получилось 137 см, причем мы можем ручаться за точность до 0,5 см. Это значит, что в

данном случае $\alpha = 0,5$ см и $136,5 < l < 137,5$ см; можно написать $l = (137 \pm 0,5)$ см.

Предельная абсолютная погрешность не полностью характеризует точность измерения: например, если она равна 1 см, то еще неясно, грубая это ошибка или нет, так как важно, что измеряли—длину кита или длину жука. Качество измерения больше характеризуется *предельной относительной погрешностью* δ , которая вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{\alpha}{a}.$$

Предельная относительная погрешность безразмерна и часто выражается в процентах, причем для упрощения ее значение обычно округляется в сторону увеличения. Скажем, в приведенном примере с вычислением длины l предельная относительная погрешность в процентах равна $\frac{0,5 \cdot 100}{137} = 0,36 \dots < 0,4$, т. е. можно сказать, что измерение произведено с предельной относительной погрешностью в 0,4% (или даже просто в $\frac{1}{2}$ %).

Для многих прикидочных расчетов достаточна точность (т. е. предельная относительная погрешность) порядка процентов и даже десятков процентов. С другой стороны, например, точное измерение частоты электромагнитных колебаний, являющееся основой автоматического управления космическими кораблями, производится кварцевыми и атомными часами с погрешностью, соответствующей ошибке хода этих часов и одну стотысячную долю секунды в сутки.

3. Запись приближенных чисел. Запись *приближенных чисел*, т. е. приближенных численных значений величин, производится так, чтобы сам вид записи говорил о степени их точности. Обычно их записывают так, что *все цифры верны, кроме последней, сомнительной, в которой допускается ошибка не больше чем на единицу*; впрочем, если ошибка чуть больше, то особенно не придираются. Например, выражение для сопротивления $R = 1,35 \Omega$ означает, что $\alpha_R = 0,01 \Omega$, т. е. на самом деле $1,34 < R < 1,36 \Omega$. Между формулами $R = 1,35 \Omega$ и $R = 1,3500 \Omega$ огромная разница, так как эти записи говорят, что первое вычисление производилось с точностью до 0,01, а второе — до 0,0001 Ω . (Иногда говорят, что во втором случае точность на два *порядка* выше, или что погрешность на два *порядка* меньше, чем в первом.) Если при вычислении получилось значение $R = 2,377 \Omega$, но уже третья цифра сомнительна или четвертая нас не интересует, то надо произвести *округление*, т. е. написать $R = 2,38 \Omega$.

Число знаков после запятой говорит о предельной абсолютной погрешности; о предельной же относительной погрешности говорит общее *число верных знаков*, к которым не относят передние нули: например, числа 2,57, 1,7100, 0,015, 0,00210 имеют соответственно 3, 5, 2, 3 верных знаков. Чем больше верных знаков в числе, тем меньше предельная относительная погрешность.

Следует избегать записей вида $M = 1800 \text{ г}$, так как они зачастую не показывают точности измерения (или вычисления). Если вторая цифра сомнительна, следует писать $M = 1,8 \cdot 10^3 \text{ г}$, а если четвертая — то $1,800 \cdot 10^3 \text{ г}$. Строго говоря, запись $M = 1800 \text{ г}$ должна означать, что предельная абсолютная погрешность равна 1 г. Это правило не всегда соблюдается, поэтому могут возникнуть недоразумения.

4. Сложение и вычитание приближенных чисел. Рассмотрим пример. Пусть бутылка и пробка взвешивались раздельно, причем массы их оказались соответственно равными $M = 323,1 \text{ г}$ и $m = 5,722 \text{ г}$ (пробка взвешивалась на более точных весах). Для нахождения суммарного веса бутылки с пробкой было бы неправильно считать так:

$$\begin{array}{r} M = 323,1 \\ m = 5,722 \\ \hline M + m = 328,822 \text{ г.} \end{array}$$

Действительно, вес бутылки определен только с точностью до 0,1 г, и потому сотые и тысячные в ответе являются не только лишними цифрами, но даже вредными: форма ответа такова, как будто $M + m$ определено с точностью до 0,001, что неверно. Поэтому при сложении m следует округлить до 0,1, т. е. проводить вычисления так:

$$\begin{array}{r} M = 323,1 \\ m = 5,7 \\ \hline M + m = 328,8 \text{ г;} \end{array}$$

этот же ответ получится, если округлить результат, подсчитанный выше. Таким образом, в сумме берется столько знаков после запятой, сколько их имеется у слагаемого с наибольшей абсолютной погрешностью.

Если слагаемых много, то ошибки в них могут складываться и дать большую ошибку в сумме (систематический «недолив»). В таких случаях рекомендуется *правило лишнего знака*: оставлять один лишний знак, а в ответе произвести его округление.

Пусть, например, надо найти сумму

$$K = 132,7 + 1,274 + 0,06321 + 20,96 + 46,1521.$$

Самая большая абсолютная погрешность у первого слагаемого: она равна 0,1. Поэтому прочие слагаемые округляем до 0,01:

$$132,7 + 1,27 + 0,06 + 20,96 + 46,15 = 201,14.$$

т. е. $K = 201,1$. Если бы мы не воспользовались правилом лишнего знака и округляли все слагаемые до 0,1, то получили бы менее точный результат;

$$K = 132,7 + 1,3 + 0,1 + 21,0 + 46,2 = 201,3.$$

Другой пример. Пусть надо найти сумму $N = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8}$ с точностью до 0,01, причем считается, что целые числа, стоящие под знаками радикала, совершенно точные. Пользуясь правилом лишнего знака, берем из таблиц значения корней с точностью до 0,001:

$$2,236 + 2,449 + 2,646 + 2,828 = 10,159,$$

т. е. $N = 10,16$.

Если число слагаемых весьма велико, скажем несколько сотен, следует пользоваться двумя лишними знаками.

При вычислении суммы нескольких слагаемых, заданных с одинаковым числом знаков после запятой, следует иметь в виду, что предельная абсолютная погрешность у суммы будет больше, чем у слагаемых; поэтому ответ целесообразно округлить до предыдущего знака. Например, пусть

$$L = 1,38 + 8,71 + 4,48 + 11,96 + 7,33.$$

Складывая, получим $L = 33,86$. Однако последняя цифра очень сомнительная; поэтому следует написать ответ в виде $L = 33,9$.

Предельная абсолютная погрешность суммы или разности нескольких величин равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих величин. Например, если две величины определены с точностью до 0,1, то, как легко понять, сумма или разность этих величин определены с точностью до 0,2, так как ошибки могут сложиться. Если слагаемых много, то очень маловероятно, чтобы все ошибки сложились. В этом случае для определения погрешности суммы надо пользоваться методами теории вероятностей. Из них вытекает, что один знак в сумме надо округлять, как это было сделано при вычислении L , начиная примерно с пяти слагаемых, а два знака — примерно с 500.

При вычитании приближенных чисел правила те же, что при сложении, но надо дополнительно иметь в виду, что при вычитании близких чисел относительная точность резко ухудшается. Например, пусть надо найти $P = 327,48 - 326,91$. В вычитаемом и уменьшаемом $\alpha = 0,01$, т. е. $\delta < \frac{0,01}{300} \cdot 100\% < 0,004\%$.

В разности же $P = 0,57$ предельная абсолютная погрешность равна 0,02, поэтому предельная относительная погрешность

$$\delta_p \approx \frac{0,02}{0,57} \cdot 100\% = 3,5\%.$$

Относительная погрешность увеличилась в 1 000 раз!

Поэтому надо стараться измерять или вычислять разности близких чисел непосредственно, без выполнения такого вычитания: не следует вычислять вес шляпы, взвесившись сначала в шляпе, а затем без нее. Формулы же, содержащие разности близких величин, надо стараться преобразовать, избавляясь от таких разностей, если они могут существенно нарушить точность вычислений. Например, выражение вида $Q = a - \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > 0$, $b > 0$), где b в несколько раз меньше a (и потому $\sqrt{a^2 - b^2} \approx \sqrt{a^2} = a$; \approx — знак приближенного равенства), при вычислениях можно преобразовать так:

$$Q = \frac{(a - \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2})}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2}},$$

после чего оно уже не будет содержать этих опасных разностей.

5. Умножение и деление приближенных чисел. Общие замечания. Начнем с примера. Пусть надо найти площадь S прямоугольника со сторонами $a = 5,2$ см и $b = 43,1$ см. Было бы неправильно дать такой ответ: $S = 5,2 \cdot 43,1 = 224,12$ см².

Действительно, на самом деле a заключено между 5,1 и 5,3 см, а b — между 43,0 и 43,2 см и потому площадь заключена между

$$S_1 = 5,1 \cdot 43,0 = 219,3 \text{ см}^2 \text{ и } S_2 = 5,3 \cdot 43,2 = 228,96 \text{ см}^2,$$

т. е. в найденном значении S все цифры после второй сомнительные и могут только ввести в заблуждение. Ответ следует дать такой: $S = 2,2 \cdot 10^2$ см².

Заметим, кстати, что по тому образцу, как мы вычислили S_1 и S_2 , и в других примерах можно дать двусторонние оценки для ответа.

Итак, мы видим, что при умножении двух чисел с двумя и тремя верными знаками в ответе следует оставить два верных знака. Аналогичное правило справедливо в общем случае, а также при делении приближенных чисел: в ответе число верных знаков надо взять равным наименьшему (худшему) числу верных знаков в сомножителях (или в делимом и в делителе, если рассматривается частное). Дело в том, что при умножении или делении приближенных чисел предельные относительные погрешности складываются, а число верных знаков говорит примерно о том же, о чем и предельная относительная погрешность, т. е. об относительной точности.

В приведенном примере с вычислением S предельная относительная погрешность у b была значительно меньше, чем у a , а потому $\delta_S \approx \delta_a + \delta_b \approx \delta_a$, т. е. и число верных знаков у S такое же, как у a .

Если множители даны с разным числом верных знаков, то перед умножением следует произвести округление, оставив один лишний знак, который надо отбросить после выполнении действий. Если множители заданы с одинаковым числом верных знаков, но этих множителей много, например более четырех, то верных знаков в произведении следует взять на один меньше.

Таким образом, например, при вычислении количества тепла, выделяемого электрическим током, по формуле $Q = 0,24I^2Rt$ в ответе не может получиться более двух верных знаков, так как коэффициент 0,24 имеет лишь два верных знака; при этом нет смысла брать I , R и t более чем с тремя верными знаками (да и то третий знак, если берется, является лишь запасным). Если Q требуется с большей точностью, то надо прежде всего уточнить коэффициент.

Отметим, что совершенно точные множители не влияют на выбор числа верных знаков в произведении: например, в формуле для длины окружности $L = 2\pi r$ коэффициент 2 является совершенно точным (он может быть записан в виде 2,0 или 2,00 и т. п.), так что точность, с которой можно вычислить L , зависит только от числа верных знаков, с которыми взято π и определено r .

Приведем пример на применение всех этих правил. Пусть $D = 11,3^2 \cdot 5,4 + 0,381 \cdot 9,1 + 7,43 \cdot 21,1$. Для выяснения, насколько велики слагаемые, вычислим их, произведя округление всех чисел до одного верного знака. Получаем 500, 3,6 и 140. Значит, сумма будет содержать несколько сотен, а поскольку в первом, самом большом слагаемом один из множителей (5,4) дан только с двумя верными знаками, то и весь ответ получится с двумя верными знаками. Согласно правилу лишнего знака будем проводить вычисления с точностью до единиц, а потом ответ округлим до десятков. Получится $D = 690 + 3 + 157 = 850$, т. е. $D = 8,5 \cdot 10^3$.

Вычисления с лишними цифрами были бы не только бесплодными, но даже вредными, дающими иллюзию точности, когда ее на самом деле нет.

При выборе степени точности приближенных величин, над которыми надо производить те или иные вычисления, руководствуются *принципом равной точности*, согласно которому все эти выбираемые степени точности должны быть согласованы друг с другом и ни одна не должна быть чрезмерной или недостаточной.

Поясним этот принцип на примерах. Пусть мы вычисляем площадь прямоугольника по формуле $S = ab$. Тогда, если a измерено или вычислено, например, с тремя верными знаками, то и b следует взять с тремя верными знаками, так как четвертый знак у b все равно будет излишним, а если b взять только с двумя верными знаками, то

пропадет труд, затраченный на нахождение третьего знака у a . Таким образом, в произведении всегда выгодно множители (во всяком случае те, нахождение которых связано с теми или иными трудностями) брать с одним и тем же числом верных знаков. Аналогично в сумме надо брать слагаемые с одним и тем же числом знаков после запятой.

Приведем еще один пример. Пусть вычисляется выражение $M=ab+cd$, причем грубо известно, что $a \approx 30$, $b \approx 6$, $c \approx 0,1$, $d \approx 40$. Пусть a взято с тремя верными знаками; с каким числом знаков следует взять b , c и d ? Ясно, что b надо взять также с тремя верными знаками, руководствуясь числом знаков у a . Далее $ab \approx 180$, $cd \approx 4$, т. е. чтобы M было известно с тремя верными знаками (а точнее оно не может получиться при выбранном a), c и d достаточно взять лишь с одним верным знаком. Если это нетрудно, то точность b , c и d или некоторых из этих величин следует повысить на один знак, но этот знак будет запасной.

В практике приближенных вычислений часто сталкиваются с задачей, до некоторой степени обратной к только что рассмотренным. Бывает так, что степень точности результата вычислений задается заранее из каких-либо дополнительных соображений, а требуется определить необходимую степень точности величин, участвующих в этих вычислениях (эти величины могут, например, получаться из опыта, так что речь идет о необходимой степени точности эксперимента), и степень точности вычислений. Решение этой обратной задачи опирается на приведенные правила приближенных вычислений. Пусть, например, вычисляется полная поверхность кругового цилиндра по формуле

$$S = \pi(DH + \frac{D^2}{2})$$

причем грубо известно, что $D \approx 20$ см, $H \approx 2$ см. Тогда $S \approx 700$ см². Рассуждая аналогично предыдущему абзацу, увидим, что если, например, ответ желательно иметь с тремя верными знаками, т. е. с точностью до 1 см², то π и D надо взять с тремя верными знаками, а H — с двумя, т. е. измерение D и H проводить с точностью до 1 мм. Вычисление следует проводить с одним запасным знаком, да и π следует взять с одним запасным знаком, тогда как запасной знак при измерении D и H в данном случае потребовал бы повышения класса точности измерения.

2. Функции и преобразования

2.1. Функции и графики

1. Функциональная зависимость. Чисто бывает, что в одном и том же рассмотрении участвует одновременно несколько переменных величин, взаимосвязанных друг с другом таким образом, *что изменение одних величин сказывается на значениях других*. Тогда говорят, что между рассматриваемыми величинами имеется *функциональная зависимость*. Например, при изменении условий, в которых содержится какая-либо определенная порция газа, функциональная зависимость будет между объемом V , температурой T и давлением p этого газа, так как эти величины взаимосвязаны. Функциональная зависимость имеется между площадью круга и длиной его радиуса, между пройденным путем и временем в процессе движения и т. п.

Обычно среди функционально зависимых между собой величин можно указать некоторые величины (*независимые переменные*), значения которых могут выбираться более или менее произвольно, тогда как значения остальных величин (*зависимых переменных*) определяются значениями первых. Например, при рассмотрении связи между площадью S круга и длиной R его радиуса эту длину естественно принять за независимую переменную, так как ее значения можно задавать произвольно; при этом площадь, определяемая по формуле $S = \pi R^2$, будет зависимой переменной. При указанном выше рассмотрении порции газа за независимые переменные можно взять V и T ; давление p будет тогда зависимой переменной.

Закон (правило), по которому значения независимых переменных отвечают (соответствуют) значения рассматриваемой зависимой переменной, называется функцией. Таким образом, каждый раз, **когда нам дан такой закон соответствия**, мы можем сказать: **вот функция**. Функция — одно из важнейших математических понятий.

Впрочем, слово «функция» употребляется и в ином смысле. Именно, часто независимые переменные называются также *аргументами*, а зависимая переменная — *функцией* от этих аргументов. Обычно такое двойное употребление слова «функция» не приводит к ошибкам.

Следует отметить, что если между величинами имеется функциональная зависимость, то часто выбор того, какие из этих величин считать независимыми, а какие — зависимыми, является довольно условным. Так, в приведенном примере с порцией газа за независимые переменные можно было бы принять T и p , а V — за зависимую переменную; нетрудно привести схему опыта, в котором бы T и p

задавались, а объем V находился. Выбор того, какие переменные более естественно или более удобно принять за независимые, иногда довольно важен.

Функции могут быть от одного аргумента (как в примере площади круга) или от двух и более аргументов.

Заметим, что для того, чтобы некоторая величина y могла рассматриваться как функция от независимой переменной x , нет надобности, чтобы между изменениями этих величин существовала глубокая причинная связь. Достаточно только, чтобы существовал определенный закон, по которому значениям x отвечали бы значения y , этот закон может быть нам и неизвестен. Например, температуру θ в какой-либо точке можно считать функцией времени t , так как ясно, что значениям t отвечают определенные значения θ , хотя, конечно, изменение θ объясняется не просто течением времени, но рядом глубоких физических причин.

2. Обозначения. Если величина y является функцией от величины x , то обычно пишут $y=f(x)$ (читается: «игрек есть эф от икс»), где f , начальная буква латинского слова *functio*,—знак функции. Частные значения этой функции получаются, если аргументу x придавать частные (конкретные) значения.

Пусть, например, $y=f(x)$ имеет такой вид: $y = x^2$. Тогда при $x = 2$ будет $y = 4$, при $x = -0,6$ будет $y = 0,36$ и т. п. Это можно записать так: $f(2) = 4$, $f(-0,6) = 0,36$ и т. д.

Запись вида $y=f(x)$ применяется, если конкретное выражение функции слишком громоздкое или даже нам не известно, а также для формулировки правил и свойств, общих для всех или многих конкретных функций (как, например, в алгебре формула $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ приводится не для конкретных чисел, а для букв, вместо которых можно подставить любые конкретные числа).

Если одновременно рассматривается несколько различных функций, то, кроме f , приходится применять другие буквы F , ϕ , Φ и т. п. или применять *индексы* (значки): f_1 , f_2 и т. п. Однако в разных рассматриваниях одной и той же буквой f можно обозначить различные функции, как в алгебре в одной и той же задаче буквой a нельзя обозначить различные величины, но в другой задаче та же буква a может означать что-либо другое. Если же разные величины связаны одинаковой зависимостью, то можно применять один и тот же знак функции, так как f означает закон зависимости одной величины от другой. Например, если $y = x^3$, $z = u^5$, $v = t^3$, то можно написать $y=f(x)$, $z = \phi(u)$, $v=f(t)$; в данном случае знак f означает возведение аргумента в третью степень, а знак ϕ —в пятую.

Аналогично обозначаются функции от нескольких аргументов. Пусть, например, $z = x^2 - x2^y$, x и y — независимые переменные, z — зависимая; тогда можно написать $z = f(x, y)$, запятая в данном случае является признаком функции от двух аргументов. В этом случае частные значения находятся так:

$$f(2, 1) \text{ (т. е. } z/x=2, y=1) = 2^2 - 2 \cdot 2^1 = 0; f(1, 2) = 1^2 - 1 \cdot 2^2 = -3 \text{ и т. п.}$$

В разобранных примерах мы сталкиваемся с образованием «функции от функции» или, как говорят, с образованием *сложной функции*. Обычно сложная функция получается следующим образом. Пусть переменная y зависит от переменной u , которая в свою очередь зависит от переменной x , т. е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда при изменении x будет меняться u , а потому будет меняться и y . Значит, y является функцией x , $y = f(\varphi(x))$, которая и называется сложной функцией; переменная u в данном случае называется *промежуточной*. Может быть и несколько промежуточных переменных.

Если хотят только отметить, что y является функцией от x , но не производить подобные манипуляции, то пишут просто $y = y(x)$; так, $S = S(R)$, $p = p(V, T)$, $V = V(T, p)$.

3. Способы задания функций. Чтобы функцию, т. е. зависимость одной величины от другой, можно было изучить, она должна быть как-то задана. Имеется несколько способов задания функции.

Аналитический способ (при помощи формулы) чаще всего применяется в математике. В этом способе явно указываются математические действия, которые надо совершить над независимой переменной, чтобы получить значение функции. Например, формула $y = x^2 - 2x$ означает, что для того, чтобы получить значение функции y , нужно значение аргумента возвести в квадрат и из результата вычесть удвоенное значение этого аргумента.

Аналитический способ компактен (формула занимает мало места), легко воспроизводим (формулу легко переписать) и наиболее приспособлен к выполнению над функциями математических действий — алгебраических (сложение, умножение и т. п.), действий высшей математики (дифференцирование, интегрирование и т. п.) и других. Однако он не всегда нагляден (не всегда виден характер зависимости функции от аргумента) и для вычисления значений функции, если они требуются, необходимо произвести ряд выкладок, не всегда простых.

В табличном способе задания функции ее численные значения задаются с помощью таблицы при определенных дискретных численных значениях аргумента

Большим удобством табличного способа является то, что значения функции уже вычислены, так что ими можно немедленно пользоваться.

Однако могут понадобиться значения функции при значениях аргумента, которых нет в таблице; тогда приходится производить дополнительные вычисления—*интерполяцию* (для промежуточных значений аргумента) или *экстраполяцию* (для значений аргумента, лежащих за пределами таблицы), что иногда приводит к неверным результатам.

Третьим основным способом задания функции является *графический способ* (с помощью графика). Этот способ очень нагляден, так как по графику легко подробно проследить за характером изменения функции. Кроме того, по графику можно быстро находить значения функции с небольшой точностью (два-три верных знака), правда, только в изображенном диапазоне изменения аргумента.

Все эти способы задания функции как бы дополняют друг друга, так что часто возникает задача о переходе от одного способа к другому — о построении графика, о составлении таблицы (так называемое *табулирование*), о подборе формулы. В нашем курсе мы столкнемся с такими задачами.

Встречаются также и иные способы задания функций. Например, закон, по которому значения функции соответствуют значениям аргумента, иногда формулируется словесно: так, ежемесячный членский взнос может быть функцией заработной платы.

4. Графики функций. Графики служат для геометрического изображения функций. Напомним методику построения графиков функций. Пусть величина y является функцией величины x , т. е. $y=f(x)$. Для построения графика на плоскости выбираются две числовые оси: обычно ось переменной x проходит слева направо и называется *осью абсцисс*, а ось переменной y проходит перпендикулярно к оси x и называется *осью ординат*. Начало отсчета на каждой из осей часто выбирается в точке их взаимного пересечения (рис. 1)

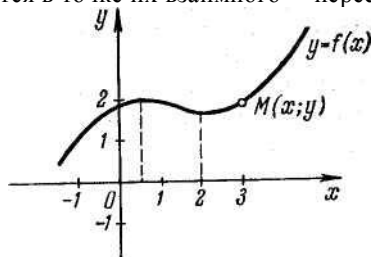


Рис. 1

После этого придают аргументу всевозможные значения, находят соответствующие значения $y=f(x)$ и строят точки графика.

На рис. 1 показана произвольная «текущая» точка M графика, имеющая координаты x, y . Практически мы можем построить не очень большое число точек графика, после чего соединяем их линией; теоретически же необходимо представлять себе, как будто переменная x пробегает *всю* область своего изменения; тогда текущая точка M пробежит весь график. На рис.1 показан пример графика. Из него видно, что в данном случае при возрастании аргумента x значение функции сначала возрастает; это продолжается примерно до значения $x=0,5$, после чего функция убывает, сравнительно медленно; начиная же примерно с $x=2$, функция вновь возрастает, причем все быстрее и быстрее.

Единицы масштаба и начала отсчета на каждой из осей выбираются так, чтобы лучше всего передать ход изменения функции на наиболее интересных интервалах изменения аргумента и функции.

Рассмотрим, например, график равноускоренного движения, протекающего по закону

$$s = 98 + 0,01t^2 \quad (t \geq 0) \quad (1)$$

где t выражено в *сек*, а s —в *см*. В этом случае возможно выбрать шкалы на обеих осях так, как показано на рис. 2.

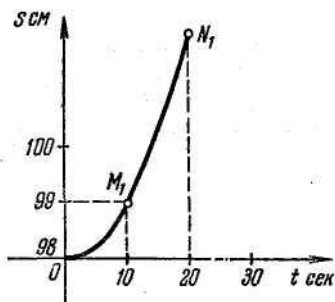


Рис. 2

Ясно, что изменение начала отсчета на оси аргумента (или оси функции) влечет за собой перенос графика как целого параллельно оси аргумента (или соответственно оси функции). Изменение масштаба какой-либо из осей в несколько влечет за собой растяжение во столько же раз графика от другой же раз графика от другой оси (или сжатие к ней); например, на рис. 3 показан график той же функции (1) после изменения масштаба по оси t .

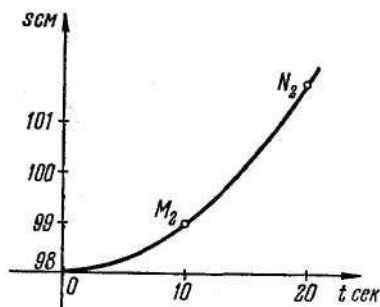


Рис. 3

Новый график получается из старого растяжением от оси s параллельно оси t .

Чтобы наилучшим образом передать поведение рассматриваемой функции, иногда применяются на осях неравномерные шкалы.

В дальнейшем мы будем всегда считать, если не оговорено противное, что переменные (аргументы и функция) — безразмерные. В этом случае в теории проще всего считать, как мы и будем делать, что единицы масштаба по обеим осям одинаковы, а отсчет ведется от точки их пересечения, которая называется началом координат.

5. Область определения функции. Областью определения функции называется совокупность значений независимой переменной, при которых эта функция определена, т. е. область изменения независимой переменной. Обычно эта переменная является непрерывной, и тогда эта область определения состоит из одного или нескольких интервалов.

В некоторых случаях область определения функции выясняется из физического или геометрического смысла этой функции. Например, если рассматривается зависимость $S = \pi R^2$ площади круга от длины его радиуса, то областью определения этой функции будет интервал $0 < R < \infty$, так как по геометрическому смыслу R может принимать именно такие значения. Если рассматривается зависимость плотности ρ атмосферы над данной точкой земной поверхности от высоты h над уровнем моря, то областью определения этой функции будет интервал $h_0 \leq h \leq H$, где h_0 — высота земной поверхности, а H — условная высота, принимаемая за границу атмосферы, и т. д. Если функция задана просто формулой, то областью определения служит совокупность значений аргумента, при которых формула дает определенное вещественное (действительное) значение функции. (Мы пока будем рассматривать только вещественные функции от вещественного аргумента, т. е. функции, у которых зависимая и

независимая переменные принимают лишь вещественные значения.) Например, если $y = x^3$, то x может принимать любые значения, т. е. областью определения служит вся числовая ось $-\infty < x < \infty$. Если $y = \sqrt{x^2 - 2}$, то при вычислении y встретится препятствие в извлечении корня, если окажется, что $x^2 - 2 < 0$; значит, должно быть $x^2 - 2 \geq 0$, т. е. $x^2 \geq 2$, а это будет при $x \leq -\sqrt{2}$ или $x \geq \sqrt{2}$, т. е. область определения в данном случае состоит из двух интервалов: $-\infty < x \leq -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} \leq x < \infty$. При нахождении области определения в аналогичных случаях надо выяснить, что может препятствовать получению значения функции, после чего выписывать неравенства (как в последнем примере $x^2 - 2 \geq 0$), гарантирующие возможность этого получения. Тогда задача сведется к решению этих неравенств.

Если независимая переменная дискретна, то область определения функции состоит из дискретных (отдельных) точек. Например, если $f(x) = x! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot x$, то x может принимать только значения 1, 2, 3, ... Если, как в этом примере, дискретный аргумент принимает лишь целые значения, то обычно его обозначают не x , а буквами n , m , k и т. п., а вместо $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... пишут $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и говорят, что дана *последовательность*; например, последовательностью служит геометрическая прогрессия

$$a_1 = a, \quad a_2 = aq, \quad a_3 = aq^2, \quad \dots, \quad a_n = aq^{n-1}, \quad \dots$$

и т. п. График функции от дискретного аргумента не является линией, а состоит из дискретных точек

Область изменения самой функции называется иначе *множеством значений этой функции*. Например, для функции $y = x^2$ областью определения служит интервал $-\infty < x < \infty$, а множеством значений — интервал $0 \leq y < \infty$, так как в данном случае y принимает только такие значения.

Выяснение области определения функции важно для построения ее графика, так как эта область — это та часть оси абсцисс, над или под которой пройдет график; точнее говоря, это — проекция графика на ось абсцисс. На рис. 4 показаны три простых графика; области определения этих функций заштрихованы.

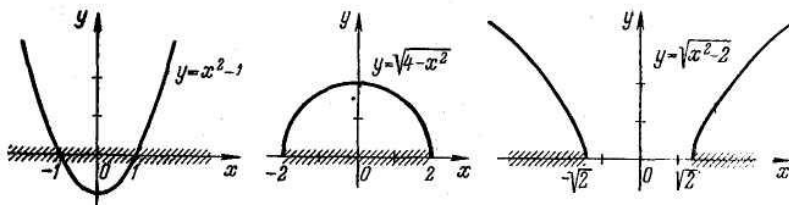


Рис. 4.

Ясно, что если область определения состоит из нескольких частей, то и график состоит из нескольких кусков.

6. Характеристики поведения функции.

Надо научиться свободно характеризовать различные качества функции аналогично тому, как мы характеризуем качества людей: спокойный, блондин и т. п.

Всюду, где не оговорено противоположное, мы будем считать исследуемые функции *однозначными*, т. е. считать, что каждому значению независимой переменной из ее области изменения отвечает одно вполне определенное значение функции. О *многозначных*, т. е. неоднозначных будем говорить далее.

Функция называется *возрастающей* (соответственно *убывающей*), если при росте аргумента значения функции возрастают (соответственно убывают). Как возрастающие, так и убывающие функции *называются монотонными*.

Если функция не является монотонной, то на оси аргумента можно указать *интервалы монотонности*, на которых функция монотонна, иногда они чередуются с *интервалами постоянства* функции. Так, на рис. 5 показаны графики возрастающей функции $f(x)$, убывающей функции $\varphi(x)$ и немонотонной функции $\psi(x)$; последняя функция имеет интервал возрастания $-\infty < x \leq a$, интервал убывания $a \leq x \leq b$, интервал постоянства $b \leq x \leq c$ и интервал возрастания $c \leq x < \infty$.

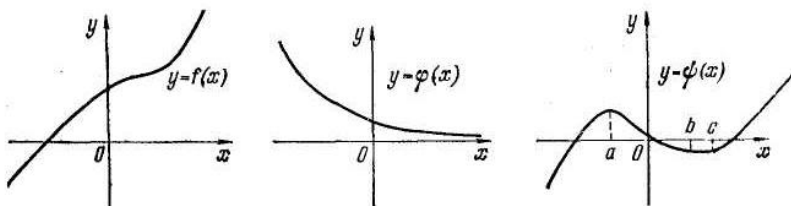


Рис. 5.

Условие возрастания функции $f(x)$ можно записать так: из $x_1 < x_2$ всегда следует, что $f(x_1) < f(x_2)$. Это дает возможность производить одинаковые действия над обеими частями неравенства: например, зная, что $y = x^3$ — возрастающая функция, мы получаем, что из неравенства $a < b$ всегда вытекает неравенство $a^3 < b^3$ и обратно. Если функция $f(x)$ не является монотонной, то такие действия можно производить на интервале ее возрастания; на интервале убывания функции $f(x)$ из $x_1 < x_2$ вытекает, что $f(x_1) > f(x_2)$. Например, функция $y = x^2$ — убывающая при $-\infty < x \leq 0$ и

возрастающая при $0 \leq x < \infty$; значит, из $a < b$ при $b < 0$ вытекает $a^2 > b^2$, а при $a \geq 0$ вытекает $a^2 < b^3$.

Функция называется *непрерывной*, если при постепенном (непрерывном) изменении аргумента значения функции меняются также постепенно, без скачков. В противном случае функция называется *разрывной*, а значения аргумента, при которых непрерывность (постепенность) изменения функции нарушается, называются *точками разрыва* функции. Так (рис. 6), функция $y = x^2$ непрерывна на всей оси x ; функция $y = 1/x$ имеет одну точку разрыва $x = 0$ (при приближении аргумента к значению $x = 0$ значения функции уходят в бесконечность), а при остальных x функция непрерывна; функция $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечное число точек разрыва $x = \pm 0,5\pi, \pm 3/2 \pi, \dots$. Если функция определена с обеих сторон от точки разрыва, то график этой функции также разрывен и состоит из двух или большего числа частей (кусков; см., например, рис. 6).

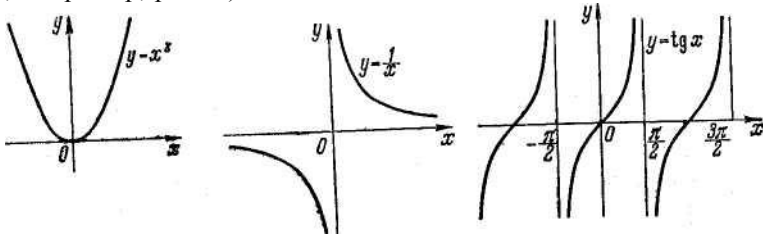


Рис. 6

Функция $y = \sin x$ является примером периодической функции. Именно (рис. 7), поведение этой функции на интервалах

$$\dots; \quad -4\pi \leq x \leq -2\pi; \quad -2\pi \leq x \leq 0; \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$2\pi \leq x \leq 4\pi, \dots$$

совершенно одинаковое.

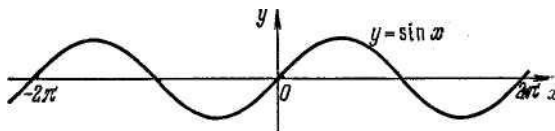


Рис. 7

Число 2π называется периодом функции $y = \sin x$.

В общем случае функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $A > 0$. Поведение такой функции на каждом из интервалов

$$\dots; \quad a-2A \leq x \leq a-A; \quad a-A \leq x \leq a; \quad a \leq x \leq a+A; \\ a+A \leq x \leq a+2A; \dots$$

(где a —произвольной выбранное число) совершенно одинаковое (рис. 8), так что достаточно рассматривать функцию на одном из таких отрезков. (На рис. 8 показано также равенство $f(x+A) = f(x)$ для одного из значений x .)

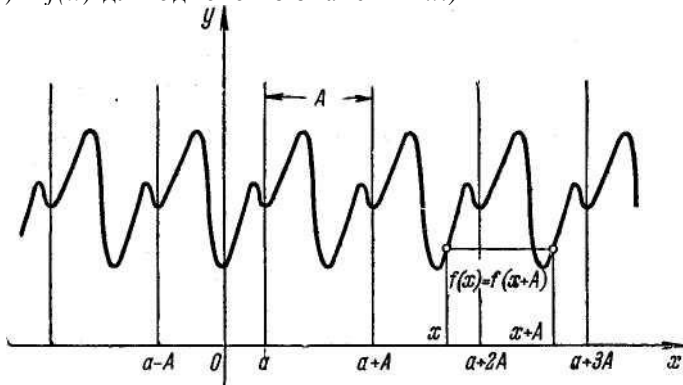


Рис. 8

Функция $f(x)$ называется *четной*, если она не меняется при изменении знака у аргумента. Примерами четных функций служат $y=x^2$, $y=x^6$, $y=\cos x$ и т. д. Из рис. 9 видно, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Функция $f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака у аргумента она умножается на -1 . Примерами могут служить $y = x$, $y=x^5$, $y=\sin x$ и т. д.

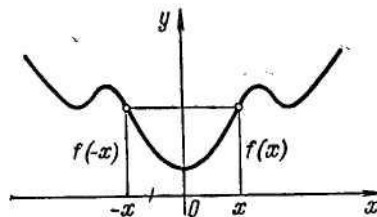


Рис. 9

Из рис. 10 видно, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

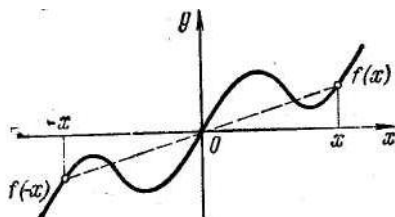


Рис.10

Отметим, что функция может не быть ни четной, ни нечетной; например, $y=1+\sin x$, $y=1-x$, $y=2^x$, $y=\lg x$ и т. д.

7. Алгебраическая классификация функций. Функции, заданные единой формулой, классифицируются в зависимости от характера алгебраических действий, которые надо совершить над аргументом, чтобы получить значение функций. Если применяются только сложение, вычитание и умножение, а также возведение в целую положительную степень, которое является частным случаем умножения, то функция называется целой рациональной, или многочленом; при образовании многочлена могут применяться произвольные постоянные коэффициенты. Примеры многочленов: $y=x^3-2x+3$; $y=x^2$; $y=3x$; $y=a^4x^3-2$ и т. д.

С другой стороны, функции $y=x^{-5}$, $y=x^3+2\sqrt{x}$ не являются многочленами в смысле приведенного определения. Каждый многочлен имеет *степень*, которая определяется старшей из участвующих степеней независимой переменной: так, степени приведенных многочленов равны 3, 2, 0, 3, 2.

Более широкий класс составляют *рациональные* функции, в которых допускается также и деление; при этом, если рациональная функция не является целой, то она называется *дробной рациональной функцией*.

После приведения к общим знаменателям по правилам элементарной алгебры *всякую дробную рациональную функцию можно представить в виде отношения двух многочленов*.

Еще более широкий класс составляют *алгебраические* функции, в которых допускается также и извлечение корня; при этом, если алгебраическая функция не является рациональной, она называется *иррациональной*. Пример иррациональной функции: $y=x^2-1/\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Неалгебраические функции называются *трансцендентными*. Примеры трансцендентных функций: $y=\sin x$, $y=x^2+\lg x$, $y=2^x$, $y=\lg x$ и т. д.; отметим, что две последние функции являются трансцендентными

Все эти определения автоматически переносятся на функции нескольких переменных. Единственным новым моментом является определение степени многочлена при помощи сложения показателей степеней аргументов в одночленах.

Так, функция $f(x, y) = x^4y - x^4y^2 - x^4y^2 + x$ является многочленом шестой степени от x и y ; если же, например, в этой функции считать y зафиксированным, то она будет многочленом четвертой степени от x .

Для любого числа переменных многочлен первой степени называется *линейной* функцией, многочлен второй степени — *квадратичной* и т. д.

8. Элементарные функции. Перечислим основные функции: $y = x^a$ (при постоянном a) — *степенная* функция; $y = a^x$ (при постоянном a) — *показательная* функция, она же называется *экспоненциальной* функцией или просто *экспонентой*; $y = \log_a x$ (при постоянном a) — *логарифмическая* функция; $y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ — *тригонометрические* функции; $y = \operatorname{arcsin} x, \operatorname{arccos} x$ и т. д. — *обратные тригонометрические* функции.

Элементарными функциями называются все функции, которые можно составить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий (с применением любых коэффициентов) и образовании сложных функций. Так, все алгебраические функции являются элементарными. Но элементарны и очень многие трансцендентные функции, например $x + \lg \sin x$.

Элементарные функции составляют значительную часть функций. Примером неэлементарной функции может служить, скажем, $y = x!$.

9. Преобразования графиков. Часто бывает, что известны графики каких-либо функций, а требуется построить графики других функций, так или иначе выражающихся через первые. Мы приведем несколько примеров таких преобразований графиков.

Пусть дан график функции $y = f(x)$ и требуется построить графики функций $z = f(x) + a$ и $u = f(x + b)$ (a и b — постоянные), причем величины z и u будем откладывать по той же оси, что и y (рис. 11).

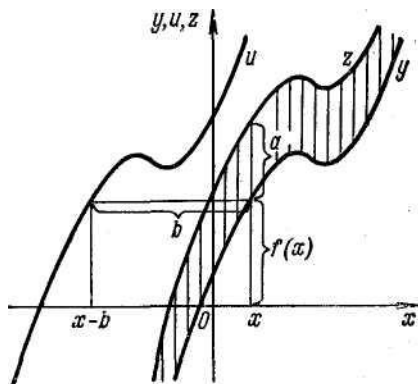


Рис. 11.

Тогда при любом x будет $z=y+a$, т. е. график функции $z(x)$ получается из графика функции $y(x)$ при помощи переноса вдоль оси y на a в положительном направлении (см. рис. 11, где каждый из вертикальных отрезков имеет длину a). Что касается графика функции $u(x)$, то часто по ошибке говорят, что он получается из графика $y(x)$ переносом на b вдоль оси x в положительном направлении. На самом деле направление переноса получается прямо противоположное. Действительно, чтобы $u=y$, надо в выражении для u взять аргумент на b меньше, чем в выражении для y , так как тогда $u=f/[x-b]+b]=f(x)=y$. Поэтому график функции $u(x)$ получается из графика функции $y(x)$ переносом на b вдоль оси x в отрицательном направлении. Конечно, если $a < 0$ и $b < 0$, то перенос будет в противоположном направлении, но этого не надо особо оговаривать, так как всегда подразумевается, что перенос на «-3» вверх — это все равно, что перенос на «3» вниз.

Подобным же образом строятся графики функций $v = kf(x)$ и $w=f(kx)$. График функции $v(x)$ получается из графика функции $y(x)$ путем равномерного растяжения от оси x в k раз, так как точки первого графика имеют при тех же абсциссах ординаты в k раз больше, чем у второго. График же функции $w(x)$ получается из графика функции $y(x)$ равномерным сжатием к оси y в k раз, так как $w(x/k)=f(k(x/k))=f(x)=y(x)$.

10. Неявные функции. *Неявной функцией* называется функция, определенная из неразрешенного уравнения, связывающего аргумент и функцию. Разрешая это уравнение, мы получаем ту же функцию, но уже заданную в явной форме. Так, равенства $x - y^3 + 2 = 0$ и $y = \sqrt[3]{x+2}$ равносильны; они определяют одну и ту же функцию $y(x)$, но первое равенство определяет ее в

неявной форме, как неявную функцию, а второе — в явной. Часто бывает, что разрешить уравнение относительно функции невозможно или нецелесообразно; в этом случае уравнение так и оставляют неразрешенным, в общей форме (после переноса всех членов в левую часть)

$$F(x, y) = 0. \quad (2)$$

Этого не нужно бояться, так как позже мы узнаем ряд приемов, приспособленных к изучению функций, заданных в неявной форме.

Если в уравнении (2), определяющем неявную функцию $y(x)$, задавать значения независимой переменной x , то для нахождения соответствующего значения y надо решать уравнение. Как известно, **если в уравнение подставить его решение, то получится тождество**. Поэтому можно сказать также, что неявная функция $y = y(x)$, определенная уравнением (2), — это такая функция, которая, будучи подставлена в уравнение (2), обращает его в тождество (проверьте это на приведенном выше примере).

Уравнение (2) при заданном x может иметь более одного решения. Тогда функция $y(x)$ будет многозначной, т. е. при заданном значении аргумента принимает более одного значения. Например, рассматривая неявную функцию $y(x)$, определенную из уравнения

$$x - y^2 = 0 \quad (3)$$

мы получаем при любом заданном $x > 0$ два значения y : $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$; *само значение радикала всегда подразумевается взятым в арифметическом смысле*. Рассмотрение многозначных функций неудобно и его стараются избежать, разбивая такую функцию на однозначные ветви, отвечающие тому или иному значению функции. Так, в нашем примере двузначная функция $y = \pm\sqrt{x}$, определенная из уравнения (3), имеет две однозначные ветви: $(y)_1 = \sqrt{x}$ и $(y)_2 = -\sqrt{x}$.

Каждая ветвь неявной функции представляет собой однозначную функцию и потому имеет график обычного вида. Все эти ветви составляют обычно единую линию, которая и является графиком функции, определенной уравнением (2). Так в нашем примере уравнение (3) можно переписать в виде $x = y^2$ откуда ясно, что графиком служит обычная «школьная» парабола, но необычно расположенная, так как оси x и y поменялись ролями по сравнению со «стандартным» уравнением $y = x^2$ (рис. 12).

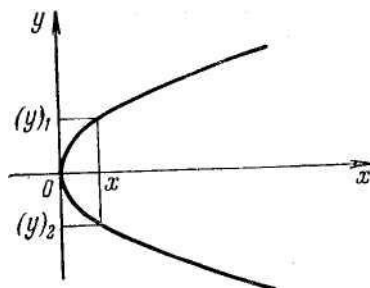


Рис. 12.

Каждая из однозначных ветвей изображается половиной параболы, первая — верхней, вторая — нижней.

График неявной функции может иметь, например, вид, изображенный на рис. 13.

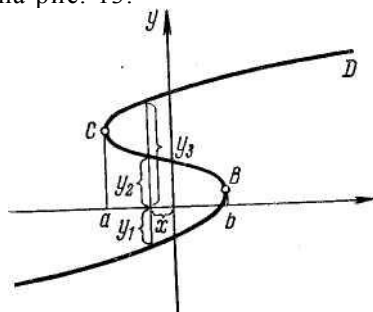


Рис. 13.

Здесь видно, что при $a < x$ и при $x > b$ функция $y(x)$ является однозначной, а при $a < x < b$ — трехзначной; при разделении значений на ветви естественно считать дугу AB графиком первой ветви, дугу BC — графиком второй и CD — графиком третьей ветви.

В связи с рассмотрением многозначных функций заметим, что возможны такие функции, для которых каждому значению независимой переменной отвечает целый интервал значений функции. Например, такое соотношение будет между ростом и возможным весом человека. Такие функции рассматриваются обычно в теории вероятностей.

11. Обратные функция. Пусть рассматривалась функция

$$y=f(x) \tag{4}$$

Будем придавать y различные значения и находить соответствующие значения x , т. е. примем бывшую зависимую переменную за аргумент, а бывшую независимую — за функцию. Полученная функция (зависимость) $x(y)$ называется *обратной* по отношению к исходной функции $y(x)$. Она задается тем же равенством (4), в котором, однако, надо рассматривать y как независимую переменную, а x — как зависимую. Но ранее мы обращали внимание на то, что при рассмотрении одной и той же функции можно по-разному обозначать переменные. Поэтому если мы захотели бы для обратной к (4) функции обозначить, как обычно, независимую переменную через x , а зависимую — через y , то надо просто подставить в (4) x вместо y , а y вместо x , т. е. равенство, определяющее обратную функцию, надо переписать в виде

$$x=f(y) \tag{5}$$

Таким образом, обратная функция оказывается заданной в неявной форме и поэтому оказывается, вообще говоря, многозначной. Легко указать условие однозначности обратной функции — им служит монотонность исходной функции, так как тогда, задаваясь значениями y , мы каждый раз будем получать единственное значение $x = x(y)$ (рис. 14).

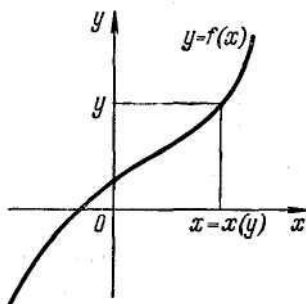


Рис. 14.

Примеры: Обратной к $y=x^3$ служит функция, определенная из равенства $x=y^3$, т. е. $y=\sqrt[3]{x}$; обратной к $y=x^2$ служит двужанная функция $y=\pm\sqrt{x}$

Равенства (4) и (5) получаются в результате простой перестановки величин x и y , т. е. в результате перемены их ролей. Поэтому из рис. 15 видно, что график обратной функции получается из графика исходной функции с помощью зеркального отражения последнего относительно биссектрисы угла между осями координат, указанной на рис. 15 пунктиром. (Обе точки M и M' на рис. 15 отвечают одному и тому же равенству вида $b=f(a)$.)

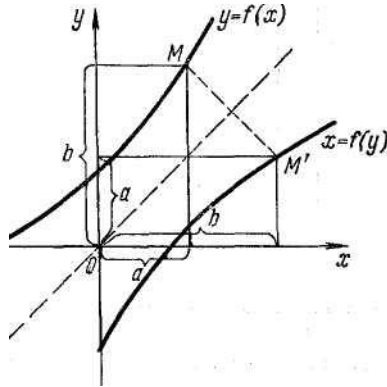


Рис. 15

В заключение отметим, что если функция $x(y)$ обратна по отношению к функции $y(x)$, то, наоборот, вторая обратна по отношению к первой; эти функции являются взаимно обратными.

2.2. Обзор простейших функций

Многие из функций, которые мы здесь рассмотрим, известны из курса средней школы. Они собраны вместе из-за их большого значения в теории моделирования.

Линейная функция. Линейная функция имеет общий вид $y=ax+b$, (1)

где a и b — постоянные коэффициенты.

Графикам линейной функции служит прямая линия (рис. 16).

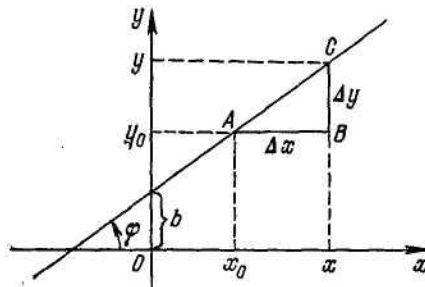


Рис. 16

Коэффициент a называется *угловым коэффициентом* этой прямой; чем $|a|$ больше, т. е. чем a больше по абсолютному значению, тем прямая идет круче.

Если аргумент изменился от некоторого значения x_0 до значения x , получив *приращение* Δx , а функция получила соответствующее приращение Δy , то из равенств $y_0 = ax_0 + b$, $y = ax + b$ следует $y - y_0 = a(x - x_0)$, т. е. $\Delta y = a\Delta x$ и

$$\Delta y / \Delta x = a \quad (2)$$

Итак, для линейной функции отношение приращения функции к приращению аргумента постоянно и равно угловому коэффициенту графика; *приращение линейной функции прямо пропорционально приращению аргумента.*

На рис. 16 изображен случай, когда $a > 0$. Если $a < 0$, то прямая проходит направо вниз (рис. 17).

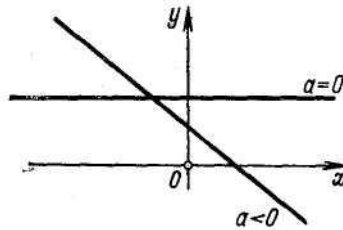


Рис. 17

Если $a = 0$, то прямая параллельна оси x ; в этом случае функция постоянна, т. е. получается график константы.

На свойстве приращения линейной функции основана *линейная интерполяция*, которая применяется уже в школьной практике и состоит в следующем. Пусть значения некоторой функции $y=f(x)$, график которой изображен на рис. 18 пунктиром, известны при $x = x_0$ и $x = x_0 + h$,

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_0 + h) = y_1$$

но неизвестны при промежуточных значениях x .

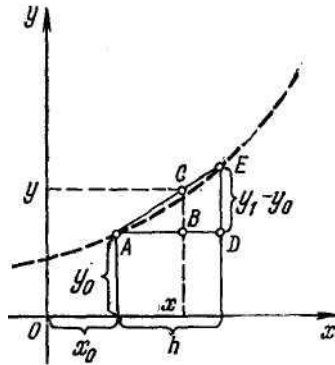


Рис. 18

Тогда мы приближенно заменяем данную функцию линейной, принимающей те же значения при $x = x_0$ и $x = x_0+h$, т. е. заменяем дугу AE отрезком прямой. Из подобия треугольников ABC и ADE получаем тогда

$$(y-y_0)/(x-x_0)=(y_1-y_0)/h, \text{ т.е. } y=y_0+[(y_1-y_0)/h](x-x_0).$$

Такая замена возможна, если функция $f(x)$ на рассматриваемом интервале мало отличается от линейной. Она широко применяется, в частности, для таблиц с достаточно малым шагом, когда последовательные значения функции мало отличаются друг от друга. Аналогично осуществляется *линейная экстраполяция*

Из формулы (7) и рис. 16 видно, что $a = \text{tg } \varphi$, т. е. *угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла, под которым она наклонена к оси абсцисс.*

Квадратичная функция. Квадратичная функция в общем виде такова:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Графиком квадратичной функции служит парабола. В наиболее простом случае, когда $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, т. е. $y = x^2$, график показан на рис. 19.

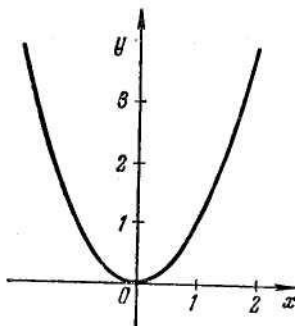


Рис.19.

Тогда функция будет четной, т. е. ось y для нее служит осью симметрии (*ось параболы*). Точка пересечения параболы с ее осью называется *вершиной параболы*; на рис. 19 эта вершина расположена в начале координат.

В общем случае, при любых a, b, c , парабола получится в результате равномерного растяжения и параллельного переноса из той параболы, которая изображена на рис. 19. При этом выяснить положение вершины можно по методу *дополнения до полного квадрата*, который мы поясним на числовом примере. Пусть $y = 2x^2 - 3x + 1$. Тогда, после совершения простых преобразований:

$$y = 2(x - 3/4)^2 - 1/8$$

Таким образом требуемый график получается из параболы, изображенной на рис. 19, в результате переноса вправо на $3/4$ равномерного растяжения от оси x в два раза и последующего переноса вниз на $1/8$. Полученный график изображен на рис. 20; для более точного его построения следует придать x несколько значений и найти соответствующие значения y , после чего построить соответствующие точки на графике (например, при $x = 0, 1$ и 2 получается $y = 1, 0$ и 3 ; соответствующие точки на графике отмечены).

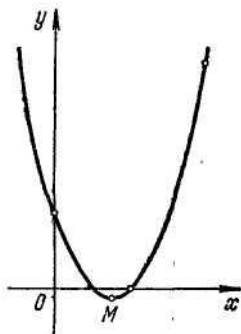


Рис. 20

Вершина полученной параболы находится в точке M с координатами $x = 3/4$, $y = -1/8$. Эта парабола более узкая, чем изображенная на рис. 19 (при той же единице масштаба).

Вообще, чем больше $|a|$, тем парабола уже. Если $a < 0$, то парабола уходит вниз, а если $a = 0$, то квадратичная функция превращается в линейную.

Степенная функция. Степенная функция имеет вид $y = x^n$

Если $0 < x < 1$, то чем больше n , тем значение функции меньше; если же $x > 1$, то чем больше n , тем значение функции больше. Соответствующие графики при $n=1,2,3,4$ изображены на рис. 21.

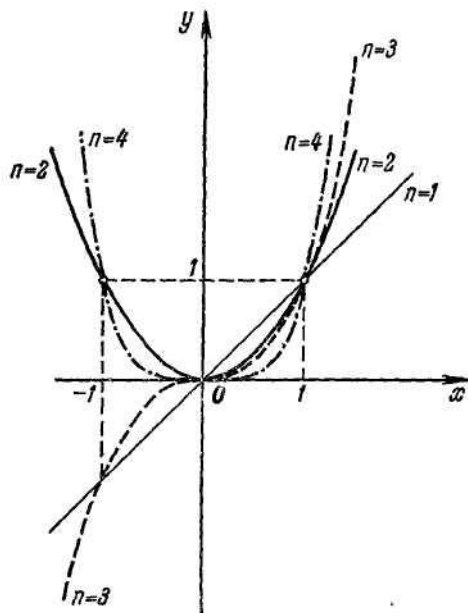


Рис. 21

При построении графиков в сторону $x < 0$ надо учесть, что при четном n функция получается четной, а при нечетном n — нечетной. Обратим, в частности, внимание на график функции $y = x^3$ (кубическая парабола). При $x < 0$ график *выпуклый вверх* (вогнутый книзу), т. е. лежит под касательной, проведенной в любой его точке. При $x > 0$ график *выпуклый книзу*. В начале координат выпуклость в одну сторону сменяется выпуклостью в другую сторону; здесь касательной к графику служит ось x , однако в точке касания O график переходит с одной стороны касательной на другую. Такие точки называются *точками перегиба* данной кривой линии. Таким образом, кубическая парабола имеет одну точку перегиба.

Если $0 < x < 1$, то чем больше n , тем значение функции больше. Соответствующие графики при $n=1, 2, 3, 4$ изображены на рис. 21.

При n нецелых графики располагаются между соответствующими графиками для целых n . Однако в этом случае при построении графика для отрицательных x надо соблюдать осторожность, так как отрицательное число в нецелой степени может дать мнимое значение; в этом случае график для $x < 0$ не строится.

Рассмотрим случай $0 < n < 1$. Пусть, например, $n = 0,5$ т.е. $y = x^{0,5} = \sqrt{x}$. Тогда графиком будет служить верхняя половина обычной (квадратной) параболы с осью, расположенной по оси x (рис. 22).

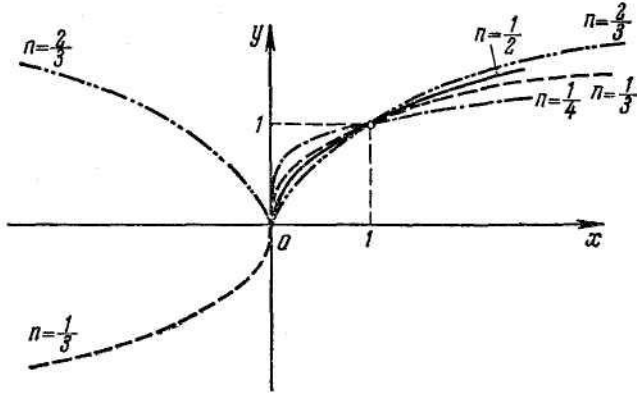


Рис. 22

На рис. 22 изображены графики степенных функций при некоторых других дробных n . Если дробь, представляющая n , имеет нечетный знаменатель, то график существует не только при $x > 0$, но и при $x < 0$, так как из отрицательных чисел возможно извлечь корень с нечетным показателем.

Рассмотрим, наконец, случай отрицательного $n = -m$. Тогда $y = 1/x^m$ и потому при весьма малых $|x|$ получаются весьма большие $|y|$ и наоборот. Соответствующие графики показаны на рис. 23 при $x > 0$.

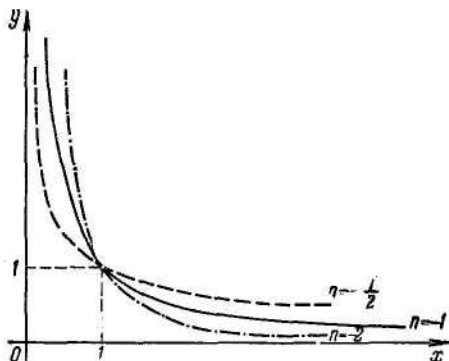


Рис. 23

Все эти графики при удалении в бесконечность вытягиваются вдоль координатных осей, безгранично к ним приближаясь. Если кривая и прямая расположены таким образом друг относительно друга, то прямая называется *асимптотой* этой кривой; таким образом, каждый из указанных графиков имеет по две асимптоты, которыми служат оси координат.

Не следует думать, что и в других случаях кривая не может пересекать свою асимптоту. Так, при рассмотрении затухающих колебаний получается график вида, изображенного на рис. 24.

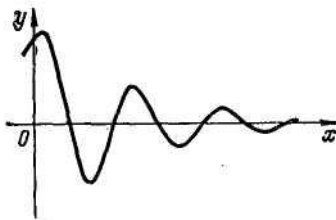


Рис. 24.

Здесь ось x также служит асимптотой графика.

Дробно-линейная функция. Дробно-линейная функция представляет собой отношение двух линейных функций и потому имеет общий вид

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (3)$$

В самом простом случае, когда $a = d = 0$, если обозначить $b/c = k$, получим $y = k/x$ т. е. обратную пропорциональную

зависимость. Соответствующий график, как известно, называется *гиперболой*. На рис. 25 этот график изображен в двух случаях: когда $k > 0$ и когда $k < 0$. Будучи графиком нечетной функции, гипербола имеет центр симметрии, на рис. 25 им служит начало координат; она обладает двумя асимптотами, на рис. 25 ими являются оси координат.

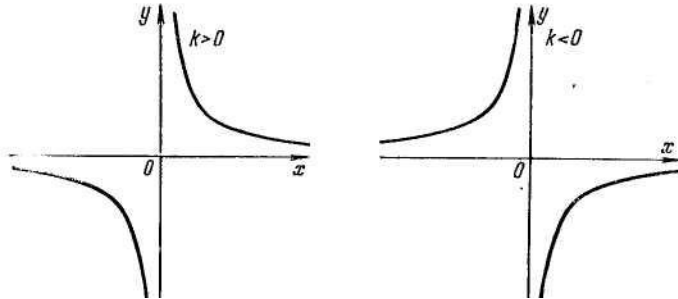


Рис. 25

Логарифмическая функция. Логарифмическая функция – это функция вида

$$y = \log_a x \quad (4)$$

Она определена только при $x > 0$, причем рассматривается при основаниях $a > 0 (a \neq 1)$. Графики логарифмических функций при различных основаниях показаны на рис. 26.

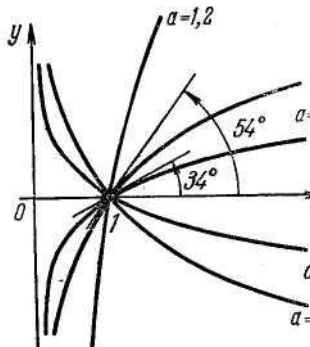


Рис. 26

Они не имеют ни оси симметрии, ни центра симметрии, но обладают асимптотой, которой служит ось y . Все логарифмические функции пропорциональны друг другу, так как прологарифмировав равенство $a^{\log_a x} = x$ по основанию b , получаем

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a = k \log_a x \quad (5)$$

$$(k = \log_b a = 1/\log_a b)$$

Таким образом, все графики рис. 26 получаются из одного путем равномерного растяжения от оси x или сжатия к этой оси. Для дальнейшего имеет значение тот угол, под которым эти графики пересекают ось x ; конечно, имеется в виду угол между осью x и касательной к графику в точке пересечения, так как *углом между двумя линиями в точке их пересечения называется угол между касательными к ним в этой точке*. При указанном растяжении графиков касательная поворачивается, причем для очень больших a она наклонена весьма полого, а при a , близких к 1, — весьма круто. При некотором значении a угол пересечения графика логарифмической функции (4) с осью x равен 45° ; это значение обозначается буквой e и играет в математике чрезвычайно большую роль.

На рис.26 видно, что при $a=2$ рассматриваемый угол пересечения больше 45° , а при $a=4$ — меньше; значит, e заключено между 2 и 4. Точные подсчеты показывают, что $e = 2,71828$, с точностью до 10^{-5} . Обозначение числа e ввел Эйлер.

Логарифм по основанию e называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln x = \log_e x$. График натурального логарифма показан на рис. 27.

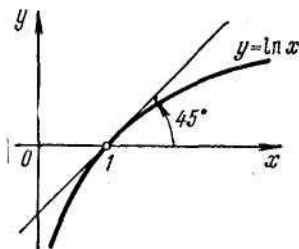


Рис. 27.

Логарифм при любом другом основании можно выразить через натуральные логарифмы согласно формуле (5):

$$\log_a x = \ln x / \ln a \quad (6)$$

Например, формулы для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и обратно таковы

$$\lg x = 0,4343 \ln x, \quad \ln x = 2,303 \lg x$$

где коэффициент пропорциональности указан с четырьмя верными знаками.

Помимо натуральных логарифмов, в математике широко применяются десятичные (при численных расчетах) и двоичные (в теории информации).

Показательная функция. Показательной функций называется функция

$$y = a^x. \quad (7)$$

Она определена при всех x , причем рассматривается только при основаниях $a > 0$ так как для $a < 0$ при возведении в нецелую степень результат может получиться мнимым. Равенство (7) получится, если формулу (4) разрешить относительно x , что даст $x = a^y$, а затем переставить x и y . Таким образом, показательная и логарифмическая функции обратны друг другу.

Поэтому графики показательных функций, показанные при различных основаниях на рис. 28, получаются из соответствующих графиков рис. 26 логарифмических функций с помощью зеркального отражения относительно биссектрисы угла между осями координат.

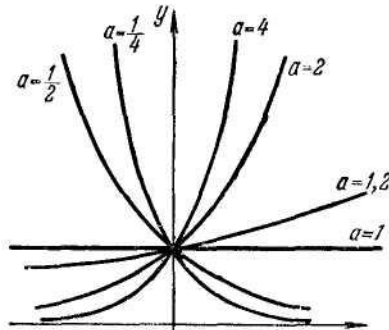


Рис. 28

Если $a > 1$, то показательная функция является возрастающей, причем тем быстрее, чем больше a . Если $0 < a < 1$, то показательная функция убывающая.

Обычно за основание показательной функции принимается число e ; в этом случае показательная (экспоненциальная) функция имеет специальное обозначение $y = e^x = \exp x$.

Показательную функцию с другим основанием можно привести к основанию e .

Тригонометрические функции. Периодическая с периодом 2π функция $y = \sin x$ хорошо известна из курса тригонометрии; ее график (*синусоида*) показан на рис. 29.

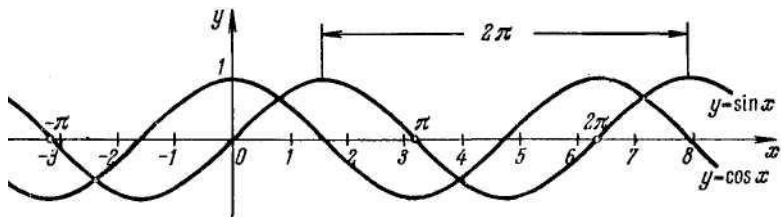


Рис. 29

Эта функция нечетная, не имеет точек разрыва и ограничена (заключена между -1 и $+1$). Так как $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ то график функции $\cos x$ — это та же синусоида, но сдвинутая на $\pi/2$ влево; он также показан на рис. 29. Синусоидальная зависимость появляется в виде

$$y = M \sin(\omega t + \alpha) \quad (8)$$

где независимая переменная t — время, постоянная $M > 0$ называется *амплитудой*, $\omega > 0$ *частотой* (круговой), сумма $\omega t + \alpha$ — *фазой*, постоянная α — *начальной фазой* (она получается из фазы при $t=0$). Легко выяснить, как влияют параметры M , ω и α на форму и расположение синусоиды. Амплитуда M увеличивает размах синусоиды от $-M$ до M , частота ω делает период вместо 2π равным $T = 2\pi/\omega$, а из-за наличия начальной фазы синусоида сдвигается влево на α/ω , так как $\omega t + \alpha = \omega(t + \alpha/\omega)$, т. е. к аргументу прибавляется α/ω . Получившийся график показан на рис. 30

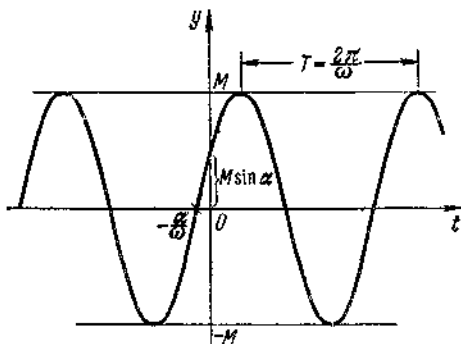


Рис. 30

Функция вида (8) получается, при преобразовании выражения $A \cos \omega t + B \sin \omega t$. Так как правую часть (8) можно переписать в виде $M \sin \alpha \cos \omega t + M \cos \alpha \sin \omega t$, то для равенства

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t \equiv M \sin(\omega t + \alpha) \quad (9)$$

должно быть $A = M \sin \alpha, B = M \cos \alpha$. Отсюда легко найти M и α : $M = \sqrt{A^2 + B^2}, \operatorname{tg} \alpha = A/B$; четверть, в которой нужно взять α , определяется знаками $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$, т. е. знаками A и B .

График этой функции (*тангенсоида*) показан на рис. 31; он состоит из бесконечного числа одинаковых кусков и имеет бесконечное число асимптот.

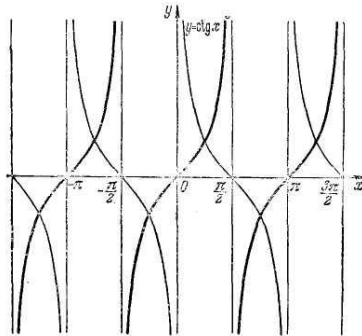


Рис. 31.

На рис. 31 показан также график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Так как $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}(x - \pi/2)$ то линия получается та же, но иначе расположенная.

Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ обратна по отношению к функции $y = \sin x$,

поэтому график первой (рис. 32) получается из графика второй путем зеркального отображения относительно биссектрисы угла между осями координат.

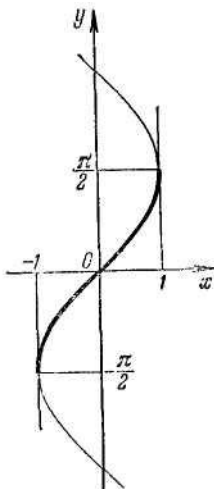


Рис. 32

Эта функция многозначная (точнее, бесконечнозначная) и поэтому обычно рассматривается ее главная ветвь (главное значение арксинуса), которая показана на рис. 32 более жирно. Эта ветвь обозначается

$$y = \arcsin x, \quad -\pi/2 \leq \arcsin x \leq \pi/2$$

и представляет собой однозначную функцию.

В заключение отметим, что значения $\arcsin x$ всегда будут браться отвлеченными (безразмерными).

Аналогичным образом $\sin x$ берется от отвлеченного значения x ; при этом, конечно, синус числа x — это синус угла в x радиан. Например, $\sin 1 = \sin 57^\circ 18' = 0,8415$.

Подбор эмпирической формулы. Как говорилось ранее в результате эксперимента часто интересующая нас функция $y=f(x)$ оказывается заданной в табличном виде, и тогда может возникнуть вопрос о подборе для нее приближенной эмпирической формулы. При этом обычно начинают с того, что изображают значения функции на миллиметровке или иной приспособленной для этого бумаге. После этого выбирают вид формулы, которой будут пользоваться. Если этот вид не вытекает из каких-либо общих соображений, то обычно выбирают одну из функций, или простую комбинацию таких функций (сумму степенных или

показательных функций и т. п.); конечно, для этого надо хорошо представлять себе графики этих функций. При этом следят за тем, чтобы подбираемая функция $\varphi(x)$ имела те же характерные особенности, что изучаемая функция $f(x)$: скажем, если по своему физическому смыслу $f(x)$ четная и $f(0) = 0$, то и функция $\varphi(x)$ должна обладать этими свойствами и т. п. Иногда не удается подобрать единую формулу на всем интервале изменения x и приходится разбивать этот интервал на части и на каждой подбирать свою формулу.

После выбора вида формулы нужно определить значения параметров, входящих в эту формулу.

Пусть, например, после построения точек получилась картина, изображенная на рис. 33.

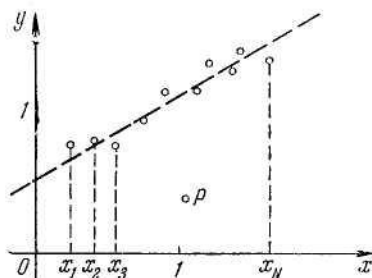


Рис. 33.

Если при эксперименте или при вычислениях не были исключены существенные ошибки, то точки, значительно выпадающие из общего хода зависимости, как точка P на чертеже, отбрасываются. Впрочем, иногда такие точки свидетельствуют о каких-то важных неучтенных факторах, и тогда их надо принять во внимание.

Оставшиеся точки на рис. 33 напоминают о линейной зависимости вида $y = ax + b$. Чтобы найти параметры a и b , проведем на чертеже прямую, к которой экспериментальные точки лежат ближе всего; это легко сделать, наложив на чертеж прозрачную линейку и передвинув ее на глаз в нужное положение. Так, на рис. 33 получаем $b = 0,50$, $a = \Delta y / \Delta x = 0,58$, т. е. $y = 0,58x + 0,50$. Описанный подбор линейной зависимости сравнительно прост. Поэтому при выборе зависимости другого типа часто стараются так ввести новые переменные, чтобы в них зависимость стала линейной, после чего уже найти параметры, входящие в эту зависимость (это *метод выравнивания*). Конечно, так можно делать, если таких

параметров не более двух, так как у линейной функции имеются два параметра.

Пусть, например, эксперимент привел к таблице значений:

<i>x</i>	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
<i>y</i>	0,00	0,01	0,03	0,08	0,17	0,29	0,45	0,66	0,91	1,22	1,57

Изображение экспериментальных точек на миллиметровке напоминают о степенной функции вида $y=ax^a$. Чтобы найти параметры a и α , прологарифмируем это равенство и обозначим $lgy = Y$, $lgx = X$, $lga=A$. Тогда мы приходим к равенству $Y = aX + A$, т. е. в новых переменных зависимость является линейной. С помощью таблицы логарифмов построим таблицу значений новых переменных:

<i>X</i>	-1,0	-0,70	-0,52	-0,40	-0,30	-0,22	-0,15	-0,10	-0,05	0,00
<i>Y</i>	-2	-1,5	-1,1	-0,77	-0,54	-0,35	-0,18	-0,041	0,086	0,196

Полученные точки хорошо ложатся на прямую (рис. 34), при проведении которой надо больше ориентироваться на последние точки, известные с лучшей точностью.

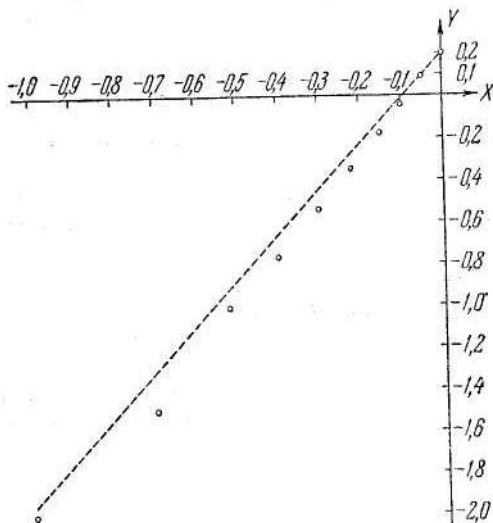


Рис. 34

Из чертежа получаем $A=0,196$, $\alpha=2,44$, т.е. $a=1,57$ и окончательно получаем $y=1,57x^{2,44}$

2.3. Отображения и функции

Возвратимся к функциональному соответствию (т.е. к функции). Если это соответствие и вдобавок еще и всюду-определенное, то оно называется ОТОБРАЖЕНИЕМ.

Если отобразить множество студентов в группе, множество фамилий в группе, то это скорее всего будет ОТОБРАЖЕНИЕ множества студентов НА множество фамилий. Т.е. сюръективное соответствие. Если же отобразить множество студентов группы на множество фамилий студентов университета, то говорят, что имеет место ОТОБРАЖЕНИЕ множества студентов В множество фамилий. Т.е., в области значений будут и "незадействованные фамилии".

Мы подошли к одному из самых фундаментальных понятий в теории математики, мы подошли к ГОМОМОРФИЗМУ.

Пример. Отобразим множество точек участка земной поверхности на множество точек карты. Сейчас оставим в стороне то, что какое-то множество точек земной поверхности отобразится в одну точку на карте, в таких случаях неинъективность - обычное дело. Для нас

существенным образом важно то, что чем выше точки земной поверхности над уровнем моря, тем в более коричневые точки карты они отображаются.

Таким образом, мы рассматриваем не просто множества элементов. В первом случае здесь между элементами множества существует отношение "выше", а во втором - "более коричневые". Где выше в первом - там более коричневые во втором. "Выше" и "более коричневые" - это отношения, которые заданы на своих множествах.

Отображение земной поверхности НА карту не просто ставит всем элементам одного множества элементы другого. Но, кроме того, если между двумя элементами первого множества существует отношение "выше", то между их образами во втором множестве имеет место отношения "более коричневые". Очевидно, если точки земной поверхности лежат на одной высоте, то они отобразятся в точки карты с одинаковой коричневостью. Такое отображение называется ГОМОМОРФНЫМ. Или говорят, что между этими множествами существует ГОМОМОРФИЗМ.

Обратим внимание на то, что слово это не очень благозвучное, а по американским меркам и громоздкое. Поэтому по обыкновению используется более короткий (усеченный) термин - МОРФИЗМ.

Морфизмы играют в математике исключительную роль. Так как мамематику часто отождествляют с математическим моделированием, то приведем афоризм из одной умной философской книжки: КРАСИВАЯ МОДЕЛЬ ВСЕГДА ГОМОМОРФНА.

2.3.1. Формальное определение отображения и его свойства

Пусть X и Y — некоторые множества и $\Gamma \subseteq Y \times X$, причем $\text{Pr}_1 \Gamma = X$.

Тройка множеств (X, Y, Γ) определяет некоторое соответствие, которое обладает, однако, тем свойством, что его область определения $\text{Pr}_1 \Gamma$ совпадает с областью значений, т.е. X , и, следовательно, это соответствие определено всюду на X . Другими словами, для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, так что $(x, y) \in \Gamma$. Такое всюду определенное соответствие называется *отображением* X в Y , и записывается как

$$\Gamma: X \rightarrow Y$$

Под словом «отображение» часто понимают однозначное отображение. Однако мы не будем придерживаться этого правила и

будем считать, что каждому элементу $x \in X$ отображение Γ ставит в соответствие некоторое подмножество

$$\Gamma x \subseteq Y, \quad (1)$$

которое называют образом элемента x . Закон, в соответствии с которым осуществляется соответствие, определяется множеством Γ .

Обратимся к рассмотрению некоторых свойств отображения. Пусть $A \subseteq X$. Для любого $x \in A$ образом x будет множество $\Gamma x \subseteq Y$. Совокупность всех элементов Y , которые являются образами Γx для всех $x \in A$, назовем образом множества A и будем обозначать ΓA . Согласно этому определению

$$\Gamma A = \bigcup_{x \in A} \Gamma x. \quad (2)$$

Если A_1 и A_2 — подмножества X , то

$$\Gamma(A_1 \cup A_2) = \Gamma A_1 \cup \Gamma A_2. \quad (3)$$

Однако соотношение

$$\Gamma(A_1 \cap A_2) = \Gamma A_1 \cap \Gamma A_2 \quad (4)$$

справедливо только в том случае, если отображение является однозначным. В общем же случае

$$\Gamma(A_1 \cap A_2) \subseteq \Gamma A_1 \cap \Gamma A_2. \quad (5)$$

Полученные соотношения легко обобщаются и на большее число подмножеств A_i . Так, если A_1, \dots, A_n — подмножества X , то

$$\Gamma\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \bigcup_{i=1}^n \Gamma A_i; \quad (6)$$

$$\Gamma\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^n \Gamma A_i. \quad (7)$$

Для отображения имеют место понятия обратного отображения и композиции отображений.

Типы отображений

При *отображении* X в Y каждый элемент x из X имеет один и только один образ $y = \Gamma(x)$ из Y . Однако совсем не обязательно, чтобы и всякий элемент из Y был образом некоторого элемента из X (рис. 1, а). Если же любой элемент из Y есть образ, по крайней мере, одного элемента из X (рис. 1, б), то говорят, что имеет место *отображение X на Y* (*сюрьекция* или *накрытие*).

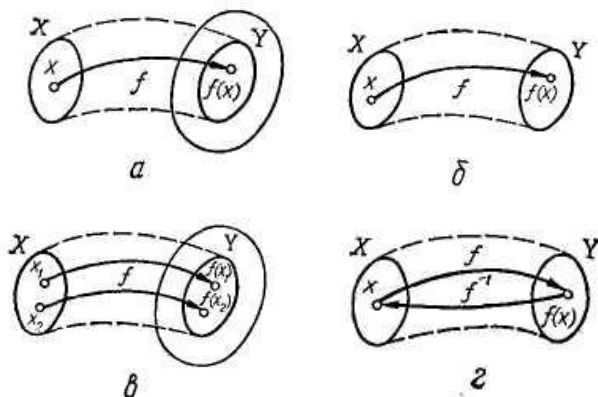


Рис. 1. Типы отображений:

- a* — отображение X в Y ;
- б* — отображение X на Y (сюръекция);
- в* — взаимно-однозначное отображение X в Y (инъекция);
- з* — взаимно-однозначное отображение X на Y (биекция).

Если для любых двух разных элементов x_1 и x_2 из X их образы $y_1 = \Gamma(x_1)$ и $y_2 = \Gamma(x_2)$ также разные, то отображение называется *инъекцией* (рис. 1, в). Отображение, которое является одновременно сюръективным и инъективным (рис. 1, з), называется *биекцией* (*наложением*). В этом случае говорят, что $\Gamma: X \rightarrow Y$ есть *взаимно-однозначное* отображение, а между элементами X и Y есть *взаимно-однозначное* соответствие. При этом, обратное отношение Γ^{-1} также взаимно-однозначное отображение, $x = \Gamma^{-1}(y)$ равносильно $y = \Gamma(x)$ и $(\Gamma^{-1})^{-1}$ совпадает с Γ .

Любое отображение Γ из X в Y есть элемент множества $U(X \times Y)$, которое обозначается также через Y^X (напомним, что $U(X \times Y)$ — это множество всех подмножеств прямого произведения $X \times Y$, а элементами последнего являются упорядоченные пары (x, y) , где $x \in X$ и $y \in Y$). Если Γ — взаимно-однозначное отображение, а множества X и Y совпадают ($X = Y$), то $\Gamma: X \rightarrow X$ называют *отображением множества X на себя*. Элементы $(x, x) \in X \times X$ образуют *тождественное отображение e* , причем

$$\Gamma \Gamma^{-1} = \Gamma^{-1} \Gamma = e.$$

Отображения, заданные на одном множестве

Важным частным случаем отображения является случай, когда множества X и Y совпадают. При этом отображение $\Gamma: X \rightarrow X$ будет представлять собой отображение множества X самого в себя и будет определяться парой

$$(X, \Gamma), \quad (8)$$

где $\Gamma \subseteq X^2$.

Подробным изучением таких отображений занимается теория графов. Затронем здесь лишь некоторые операции над подобными отображениями.

Пусть Γ и Δ — отображение множества X в X . Композицией этих отображений назовем отображение $\Gamma\Delta$, которое в соответствии с известным правилом определяется следующим образом:

$$(\Gamma\Delta)x = \Gamma(\Delta x). \quad (9)$$

В частном случае, если $\Delta = \Gamma$, получаем отображение

$$\Gamma^2 x = \Gamma(\Gamma x); \quad (10)$$

$$\Gamma^3 x = \Gamma(\Gamma^2 x) \text{ и т.д.} \quad (11)$$

Таким образом, в общем случае для любого $s \geq 2$

$$\Gamma^s x = \Gamma(\Gamma^{s-1} x). \quad (12)$$

Специальным определением введем соотношение

$$\Gamma^0 x = x. \quad (13)$$

Это дает возможность распространить соотношение (12) и на отрицательные s . Действительно, согласно (12)

$$\Gamma^0 x = \Gamma(\Gamma^{-1} x) = \Gamma\Gamma^{-1} x = x. \quad (14)$$

Это означает, что $\Gamma^{-1} x$ представляет собой обратное отображение. Тогда

$$\Gamma^{-2} x = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1} x) \quad (15)$$

и т.д.

Пример 1. Пусть X — множество людей. Для каждого человека $x \in X$ обозначим через Γx множество его детей. Тогда $\Gamma^2 x$ — множество внуков x ; $\Gamma^3 x$ — множество правнуков x ; $\Gamma^{-1} x$ — множество родителей x и т. д.

Изображая людей точками и рисуя стрелки, которые идут из x в Γx , получаем родословное или генеалогическое дерево (рис. 2).

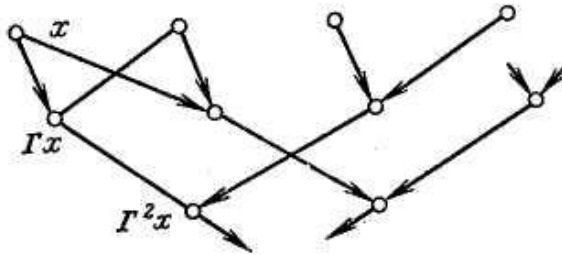


Рис. 2. Гениалогическое дерево

Пример 2. Рассмотрим шахматную игру. Обозначим через x некоторое положение (расположение фигур на доске), которое может создаваться в процессе игры, а через X множество всевозможных положений. Тогда Γx для любого $x \in X$ будет означать множество положений, которые можно получить из x , делая один ход при соблюдении правил игры. При этом $\Gamma x = \emptyset$, если x матовое или патовое положение; $\Gamma^3 x$ — множество положений, которые можно получить из x тремя ходами; $\Gamma^{-1} x$ — множество положений, из которых данное положение может быть получено за один ход.

Для отображений, заданных на одном множестве часто используют некоторые другие названия, которые у нас встретятся в дальнейшем.

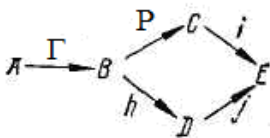
Так, если элементы $x \in X$ представляют собой состояние динамической системы, то отображение Γx может рассматриваться как множество состояний, в которые система может перейти из данного состояния. В этом случае удобно использовать термин *преобразования состояния динамической системы*. Для обозначения некоторых специальных видов отображений, заданных на одном том же множестве, используется также термин *отношение*.

Композиция отображений.

Если $\Gamma: X \rightarrow Y$ и $P: Y \rightarrow Z$, то их композиция $(P \circ \Gamma): X \rightarrow Z$, причем $(P \circ \Gamma)(x) = P(\Gamma(x))$. Пусть, например, $\Gamma = \sin$, $P = \ln$; тогда

$$(P \circ \Gamma)(x) = (\ln \circ \sin)x = \ln \sin x.$$

Для наглядности представления соотношений, где встречается несколько отображений, пользуются диаграммами, например:



Такая диаграмма называется *коммутативной*, если в любом случае, когда можно пройти от одного множества к другому по различным последовательностям стрелок, соответствующие композиции совпадают (в приведенном выше примере условие коммутативности $i \circ P = j \circ h$).

Подстановки как отображение.

Взаимно-однозначное отображение множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ на себя называется *подстановкой* n чисел (или подстановкой n -й степени). Обычно принято записывать подстановку двумя строками, заключенными в скобки. Первая строка содержит аргументы (первые координаты) подстановки, а вторая - соответствующие им образы (вторые координаты). Например, взаимно-однозначное соответствие четырех чисел, заданное множеством упорядоченных пар $\{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1)\}$ запишется как подстановка a четвертой степени

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

в которой 1 переходит в 2, 2 — в 4, 3 — в 3 и 4 — в 1.

Так как безразлично, в каком порядке идут упорядоченные пары отображения, то одна и та же подстановка допускает различные представления:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и т.д.}$$

Каждая строка в записи подстановки n -й степени содержит n различных чисел, расположенных в определенном порядке, т.е. представляет собой некоторую *перестановку* n чисел $1, 2, \dots, n$. Если обозначить i -е элементы перестановок через α_i и β_i ($i = 1, 2, \dots, n$), причем $\alpha_i, \beta_i \in N$, то подстановку n -й степени можно представить как

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \end{pmatrix}.$$

Поскольку число всех перестановок из n чисел равно $n!$, то число всех различных подстановок n -й степени, как и число всевозможных способов записи каждой из таких подстановок, также равно $n!$

Тождественная подстановка n -й степени e_n переводит каждое число в себя. Очевидно, одной из записей e_n является следующая:

$$e_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Если в подстановке a поменяем местами ее перестановки, то получим подстановку a^{-1} , *симметричную* a . Например

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad a^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Композицией подстановок n -й степени a и b называется подстановка n -й степени $c = ab$, являющаяся результатом последовательного выполнения сначала a , потом b . Например:

$$c = ab = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

так как 1 переходит в 2 и 2 — в 4, т.е. в результате 1 переходит в 4 и т.д.

Очевидно, если a — подстановка n -й степени, то

$$ae_n = e_na = a, \quad aa^{-1} = a^{-1}a = e_n.$$

Подстановка называется *четной*, если общее число инверсий в ее строках (перестановках) четно, и *нечетной* — в противном случае. Как известно, *инверсию* образуют два числа в перестановке, когда меньшее из них расположено правее от большего. Каждой перестановке можно сопоставить число инверсий в ней, которое подсчитывается следующим образом: для каждого из чисел определяется количество стоящих правее его меньших чисел, и полученные результаты складываются. Например, подстановка

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

нечетная, так как количество инверсий в верхней перестановке

$$3+1+2+0+0+0=6$$

и в нижней перестановке

$$4+2++0+1+0+0=7,$$

т.е. общее число инверсий $6+7=13$.

Разложение подстановки в циклы.

Всякую подстановку можно разложить в *произведение циклов*, множество элементов которых попарно не пересекаются. *Цикл* — это такая подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, & \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \\ \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, & \alpha_1, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$$

которая переводит α_1 в α_2 , α_2 в α_3 , ..., α_{k-1} в α_k и α_k в α_1 , а другие элементы $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n$ переходят в самих себя.

Сокращенная запись цикла $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ сводится к перечислению множества элементов, которые циклически переходят друг в друга, а количество этих элементов k определяет *длину (порядок) цикла*. Так,

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1, 4, 5)(2, 3)(6).$$

Цикл длины 1 представляет собой тождественную подстановку и часто не записывается. Подстановка, все n элементов которой образуют цикл, называется *круговой* или *циклической*. Цикл длины 2 называют *транспозицией* (это подстановка, которая переставляет только два элемента). Всякая подстановка представляется произведением транспозиций, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$=(1, 2)(1, 5)(3, 4)(1, 3).$$

Заметим, что подобное разложение может содержать циклы с общими элементами и при этом оно не является единственным. В то же время разложение подстановки на *независимые циклы* (без общих элементов) всегда можно осуществить только единственным способом.

Разность между числом всех элементов подстановки n и количеством ее циклов m (с учетом циклов длины 1) называется *декрементом* подстановки $d = n - m$. Четность подстановки совпадает с парностью ее декремента.

2.3.2. Функция как отображение

Рассмотрим некоторое отображение

$$f: X \rightarrow Y \quad (16)$$

Это отображение называется *функцией*, если оно является однозначным, т.е. если для любых пар $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из $x_2 = x_1$ следует $y_2 = y_1$.

Из определения отображения и из приведенных ранее примеров следует, что элементами множества X и Y могут быть объекты любой природы. Однако в задачах моделирования особый интерес представляют отображения, которые являются однозначными и множество значений которых представляет собой множество вещественных чисел R . Однозначное отображение f , которое определяется (16) называется функцией с вещественными значениями, если $Y \subseteq R$.

Рассмотрим некоторые общие наиболее фундаментальные свойства функции, не касаясь свойств конкретных классов функций.

Пример 3. Из данного города в другой можно проехать по железной дороге, автобусом или самолетом. Стоимость билета будет соответственно 70, 90 и 120 грн. Стоимость билета в этом примере можно представить как функцию от вида транспорта. Для этого рассмотрим множества

$$X = \{\text{ж.д., авт., сам.}\}; \quad Y = \{70, 90, 120\}.$$

Функция $f: X \rightarrow Y$, получаемая из условий примера, может быть записана в виде множества

$$f = \{(\text{ж.д., } 70), (\text{авт., } 90), (\text{сам., } 120)\}.$$

Значение y в любой из пар $(x, y) \in f$ называется функцией от данного x , которая записывается в виде $y = f(x)$.

Такая запись позволяет ввести следующее формальное определение функции:

$$f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}. \quad (17)$$

Таким образом, символ f используется при определении функции в двух смыслах:

- 1) f является множеством, элементами которого являются пары (x, y) , которые принимают участие в соответствии;
- 2) $f(x)$ является обозначением для $y \in Y$, соответствующего данному $x \in X$.

Формальное определение функции в виде соотношения (17) позволяет установить способы задания функции.

1. Перечисление всех пар (x, y) , составляющих множество f , как это было сделано в примере 3. Такой способ задания функции применим, если X является конечным множеством. Для большей наглядности пары (x, y) удобно располагать в виде таблицы.

2. Во многих случаях как X , так и Y представляют собой множества вещественных или комплексных чисел. В таких случаях очень часто под $f(x)$ понимают формулу, т.е. выражение, которое содержит перечень математических операций (сложение, вычитание, деление, логарифмирование и т.п.), которые нужно выполнить над $x \in X$, чтобы получить y .

Пример 4. Пусть

$$X = Y = R \quad \text{и} \quad f = \{(x, y) \in R^2 \mid y = x^2\}.$$

Тогда

$$f(x) = x^2$$

Иногда для разных подмножеств множества X функции приходится пользоваться различными формулами. Пусть A_1, \dots, A_n — попарно непересекающиеся подмножества X . Обозначим через $f_i(x), i=1, 2, \dots, n$ формулу, которая определяет y при $x \in A_i$. Тогда функция $f(x)$ будет определяться выражением

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ при } x \in A_1; \\ \dots \\ f_n(x) \text{ при } x \in A_n. \end{cases} \quad (18)$$

Так, функцию $y=f(x) = |x|$ можно задать в виде

$$y = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0; \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

3. Если X и Y — множества вещественных чисел, то элементы $(x, y) \in f$ можно изобразить в виде точек на плоскости R^2 . Полная совокупность таких точек будет представлять собой *график* функции $f(x)$.

Если в выражении (16) $X=U \times V$, то приходим к функции от двух переменных u и v , обозначаемой через $f(u, v)$, где $u \in U$ и $v \in V$. Формальное определение функции двух вещественных переменных будет следующим :

$$f = \{(u, v, y) \in U \times V \times Y \mid y = f(u, v)\}. \quad (19)$$

Рассмотрим определение функции с применением декартова произведения множеств.

Напомним, что декартовым произведением $M_a \times M_b$ множеств M_a и M_b называется множество M вида

$$M = \{(m_i, m_j) / m_i \in M_a, m_j \in M_b\}.$$

Подмножество $F \in M_x \times M_y$, называется *функцией*, если для каждого элемента $x, x \in M_x$, имеется не более одного элемента $y \in M_y$ вида $(x, y) \in F$; при этом если для каждого элемента x существует один элемент y вида $(x, y) \in F$, то функция называется *всюду (полностью) определенной*, в противном случае - *частично определенной (недоопределенной)*. Множество M_x образует *область определения функции F* , множество M_y — *область значений функции F* . Часто вместо записи $(x, y) \in F$ используют запись $y = F(x)$; при этом элемент x называют *аргументом* или *независимой переменной*, а y — *значением функции F* , или *зависимой переменной*.

Сопоставим с декартовым произведением двух множеств прямоугольную решетку, узлы которой взаимно однозначно соответствуют элементам декартова произведения. Подмножество декартова произведения на рисунках будем отмечать штриховкой соответствующих элементов.

Пример 5. На рис. 3,а изображено подмножество декартова произведения множеств $M_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $M_y = \{y_1, y_2, y_3\}$, не являющееся функцией; на рис. 3,б, - являющееся полностью определенной функцией; на рис. 3, в — частично определенной функцией.

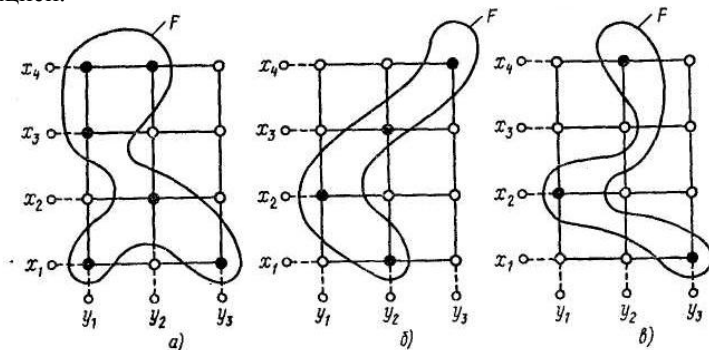


Рис. 3.

Количество аргументов определяет *местность функции*. Выше были рассмотрены одноместные функции.

Аналогично понятию декартова произведения двух множеств определим декартово произведение n множеств.

Декартовым произведением

$$M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n = \prod_{i=1}^n M_i$$

множеств M_1, M_2, \dots, M_n называется множество

$$M = \{(m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_n}) / m_{i_1} \in M_1, m_{i_2} \in M_2, \dots, m_{i_n} \in M_{i_n}\}$$

Элементами декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ являются всевозможные последовательности, каждая из которых состоит из n элементов, причем первый элемент принадлежит множеству M_1 , второй - множеству M_2, \dots , n -й элемент — множеству M_n .

Если множество M_x в определении функции $y=F(x)$ является декартовым произведением множеств

$$M_{x_1} \times M_{x_2} \times \dots \times M_{x_n},$$

то получаем определение n -местной функции

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Частным случаем n -местной функции $y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является

n -местная операция. Под n -местной операцией O_n в множестве M понимается n -местная функция $y=F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, в которой область определения аргументов и область значений функции совпадают:

$$M_{x_1} = M_{x_2} = \dots = M_{x_n} = M_y.$$

Таким образом, n -местная операция по n элементам множества M определяет $(n+1)$ -й элемент этого же множества.

Сужение и продолжение функции. Пусть функция $f: X \rightarrow Y$ определена на множестве X , а f_1 — на множестве $Q \subset X$, причем для каждого $x \in Q$ значение функций f и f_1 совпадают. Тогда f_1 называют *ограничением (сужением) функции f на Q* , а f — *продолжением функции f_1 на X* .

Например, функция $f(x)=x^3$ (другая запись $x \rightarrow x^3$), определенная на множестве действительных чисел R , отображает это множество на себя. Если ограничить область определения этой функции множеством целых чисел Z , то получим сужение $f_i(x)$ функции $f(x)$ на Z , причем $f_i(x)$ отображает множество Z в Z (а не на Z), так как не всякое число является кубом целого числа. Операцию сужения функции часто используют для табличной задачи функций с бесконечной областью определения X . В качестве множества A берут обычно выборку равнозначных значений x множества X . Получаемое при этом сужение f_A функцию f уже легко представить в виде таблицы. По этому принципу построены таблицы логарифмов, тригонометрических функций и другие. Функции f и g равны, если их область определения – то же самое множество A и для любого $a \in A$ $f(a) = g(a)$.

Пример 6. 1) Функция $f(x)=2^x$ является отображением N в N и N на M_{2^n}

2) Всякая нумерация счетного множества есть его отображением на N .

3) Функция $f(x)=\sqrt{x}$ не полностью определена, если ее тип $N \rightarrow N$, и полностью определена, если ее тип $N \rightarrow R$ или $R_+ \rightarrow R$ (R_+ положительное подмножество R).

4) Пусть зафиксирован список $\{a_1, \dots, a_n\}$ всех элементов конечного множества A . Тогда любой вектор $v_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_n})$ из A^n можно рассматривать как описание функции $f_i: A \rightarrow A$ (т.е. преобразование A), определяемой следующим образом: $f_i(a_j) = a_{ij}$, т.е. значение f_i для a_j равно j -й компоненте v_i . Число всех преобразований A равно, следовательно, $|A^n| = n^n$. Аналогично всякую функцию типа $N \rightarrow N$ можно представить бесконечной последовательностью элементов N , т.е. натуральных чисел; отсюда нетрудно показать, что множество всех преобразований счетного множества континуально.

5) Каждое натуральное число n единственным образом разлагается на произведение простых чисел (простых делителей этого числа). Поэтому, если договориться располагать простые делители n в определенном порядке (например, в порядке неубывания), то получим функцию $q(n)$ типа

$$N \rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} N^i,$$

которая отображает N в множество векторов произвольной длины. Например,

$$q(42)=(2, 3, 7), q(23)=23, q(100)=(2, 2, 5, 5).$$

Это отображение не является сюръективным, так как в область значений q не входят векторы, для компонентов которых не выполнено условие неубывания.

б) Каждому человеку соответствует множество его знакомых. Если зафиксировать момент времени (например, 10 января 2010 г., 5 ч. 00 мин), то это соответствие будет однозначным и является отображением множества M людей, которые живут в этот момент, в множество подмножеств M .

Пример 7. Функция $\sin x$ имеет тип $R \rightarrow R$. Отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ она взаимно-однозначно отображает на отрезок $[-1, 1]$. Поэтому на отрезке $[-1, 1]$ для нее есть обратная функция $\arcsin x$.

Пример 8. 1) Функции $\sin x$ и \sqrt{x} имеют тип $R \rightarrow R$, т.е. отображают одно и то же множество в себя. Поэтому их композиция возможна в произвольном порядке и дает функции $\sin\sqrt{x}$ и $\sqrt{\sin x}$. Заметим, что области определения их различны: первая функция определена на положительной полуоси; вторая функция определена на множестве отрезков $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Таким образом, область определения композиции может быть уже области определения обеих исходных функций и даже быть пустой.

2) Множество $K = \{k_1, \dots, k_m\}$ команд ЭВМ отображается в машинные коды этой ЭВМ, т.е. в натуральные числа. Кодировочная функция φ имеет тип $K \rightarrow N$. С помощью суперпозиции этой функции и арифметических функций оказываются возможными арифметические действия над командами (которые сами по себе числами не являются), т.е. функции вида $\varphi(k_1) + \varphi(k_2)$, $\varphi(k_1) + 4$ и т.д.

3) В функции $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 7x_3$ переименование x_3 в x_2 , приводит к функции $f_1(x_1, x_2, x_2) = x_1 + 2x_2 + 7x_2$, что равно функции двух аргументов $f_2(x_1, x_2) = x_1 + 9x_2$. Переименование x_1 и x_3 в x_2 приводит к одноместной функции $f_3(x_2) = 10x_2$.

4) Элементарной функцией в математическом анализе называется всякая функция f , которая является суперпозицией фиксированного (т.е. не зависящего от значений аргументов f) числа арифметических функций, а также функций e^x , $\log x$, $\sin x$, $\arcsin x$. Например, функция $\log^2(x_1 + x_2) + 3\sin x_1 + x_3$ элементарна, так как является результатом нескольких последовательных суперпозиций $x_1 + x_2$, x^2 , $\log x$, $3x$, $\sin x$.

5) Всякая непрерывная функция n переменных представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных.

Числовые функции. Проиллюстрируем введенные понятия на функциях, определенных на числовых множествах, элементами которых являются действительные числа. Такая функция каждому числу x из области определения ставит в соответствие число $y=f(x)$ из области ее значений. Иначе говоря, числовая функция f определяется множеством упорядоченных пар чисел (x, y) .

Говоря геометрическим языком, множеству действительных чисел отвечает множество *точек прямой (числовой оси)*. Пары чисел (x, y) представляются в декартовой системе координат *точками плоскости* с координатами $x \in X$ и $y \in Y$, причем первая координата x — *абсцисса*, а вторая y — *ордината* точки. Числовые оси, которые отвечают множествам X и Y , есть *осями координат*, а декарто произведение $X \times Y$, представляет собой множество точек плоскости. Таким образом, между элементами множества $X \times Y$ и точками плоскости устанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Различные подмножества действительных чисел, на которых определяется функция, отвечают подмножествам точек прямой. В качестве таких подмножеств часто используют следующие:

отрезок (замкнутый интервал) $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$;

полуинтервал, открытый слева $(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$;

полуинтервал, открытый справа $[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$;

открытый интервал (или просто интервал) $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$.

Область определения функции может быть задана и отдельными точками числовой прямой. Множество точек плоскости, которая отвечает множеству упорядоченных пар $(x, y) \in f$, называется *графиком функции f* . На рис. 4 изображен график функции $y=f(x)$, определенной на множестве G с областью значений F .

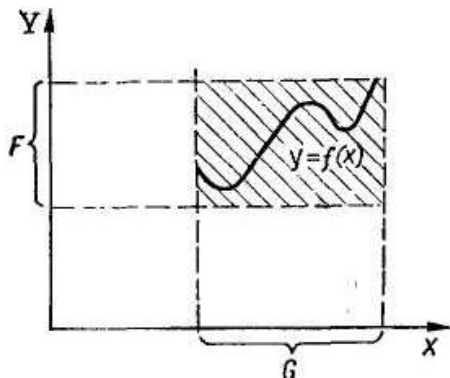


Рис. 4. График числовой функции $y=f(x)$ (G — область определения; F — область значений).

В заключение отметим, что при более строгом рассмотрении между отображением и функцией все же имеется некоторое различие, характеризующее способ определения этих отношений на множестве X , причем отображение следует рассматривать как частный случай функции. Функциональное отношение $A \subset X \times Y$ называют отношением множества X в Y , если это отношение всюду определено на X , т. е. его область определения $D_0(A)$ совпадает с множеством X .

Отношение $A \subset X \times Y$ называют функциональным, если все его элементы (упорядоченные пары) имеют различные первые координаты, т. е. каждому элементу $x \in X$, такому, что $(x, y) \in A$, соответствует один и только один элемент $y \in Y$. При этом первая координата x упорядоченной пары $(x, y) \in A$ является аргументом (переменной), а вторая y — образом (значением) функции.

Пример. Во множестве $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ заданы отношения:

$$\{(1, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 5), (3, 2)\}, \quad (\text{a})$$

$$\{(1, 6), (2, 2), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\}. \quad (\text{б})$$

Какие из этих отношений являются функциями и какие отображениями?

Решение. В выражениях (а) и (б) первое отношение является отображением, второе — функцией, так как для второго отношения все первые координаты отличны друг от друга, а для первого это условие не выполняется.

Рассмотрим пример конструирования печатной платы. Пусть x — некоторое исходное расположение конструктивных элементов на плате; X — множество различных расположений таких элементов на плате. Тогда Γx для любого $x \in X$ — множество положений, которые можно получить из x , например с помощью парных перестановок конструктивных элементов, делая один шаг перестановок в направлении улучшения некоторого показателя качества размещения. При этом $\Gamma^4 x$ — множество перестановок конструктивных элементов, которые можно выполнить из состояния x четырьмя шагами; $\Gamma^{-1} x$ — множество положений (состояний) конструктивных элементов, из которых данное положение может быть получено за один шаг. Если из положения x перестановками с другими элементами не удастся улучшить показатель качества размещения (достичь локальный оптимум показателя качества), то $\Gamma x = \emptyset$.

Обратная функция

Понятие обратной функции может быть применено для такого отображения $f: X \rightarrow Y$, которое, во-первых, является однозначным, т. е.

для любых $(x_1, y_1) \in f$ и $(x_2, y_2) \in f$ из $x_2 = x_1$ следует $y_2 = y_1$ и, наоборот, является взаимно-однозначным, т.е. из $x_2 \neq x_1$ следует $y_2 \neq y_1$. При выполнении этих условий отображение $f: X \rightarrow Y$ является однозначным, т.е. определяет функцию $y = f(x)$. Обратное отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$ также является однозначным и определяет функцию $x = f^{-1}(y)$, которую называют обратной по отношению к функции $y = f(x)$. При аналитическом задании функции f принято аргумент как прямой, так и обратной функции обозначать одной и той же буквой, например, x . Поэтому для нахождения обратной функции нужно уравнение $y = f(x)$ решить относительно x и поменять обозначения, заменив x на y и y на x . При этом обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Пусть заданы множества A, B и C и отношение σ между A и B и ρ между B и C . Определим отношение между A и C таким образом: оно действует из A в B с помощью σ , а потом из B в C с помощью ρ . Такое отношение называют *составным* и обозначают $\rho \circ \sigma$, т.е.

$$(\rho \circ \sigma)(a) = \rho(\sigma(a)).$$

Следовательно, $(x, y) \in (\rho \circ \sigma)$, если существует $z \in B$ такое, что $(x, z) \in \sigma$ и $(z, y) \in \rho$. Отсюда следует, что $G_{\rho \circ \sigma} = \sigma^{-1} G_{\rho}$. Чтобы проиллюстрировать ситуацию, рассмотрим рис. 5.

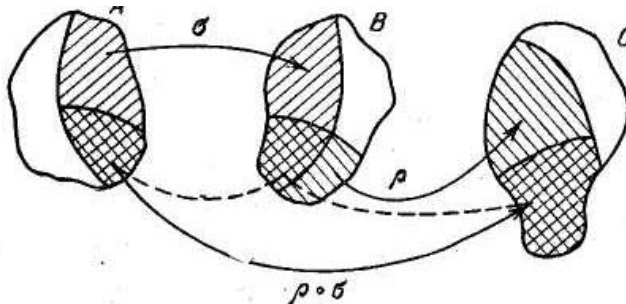


Рис. 5.

Области определения и значений σ и ρ заштрихованы в разных направлениях. Следовательно, сегменты с двойной штриховкой на A, B и C представляют собой $G_{\rho \circ \sigma}, G_{\rho} \cap F_{\rho}, F_{\rho \circ \sigma}$ соответственно.

Замечание. Из записи отношений σ и ρ следует, что они применяются справа налево. Следовательно, $(\rho \circ \sigma)(a)$ означает, что вначале берется a и преобразуется посредством σ , а затем преобразуется посредством ρ . В алгебре это иногда записывают в виде

аср. Следует обращать внимание при чтении других математических книг на то, какой порядок выполнения отношений принят в той книге.

Пример 9. Пусть σ и ρ — отношения на N такие, что

$$\sigma = \{(x, x+1): x \in N\}, \quad \rho = \{(x^2, x): x \in N\}.$$

Тогда

$$G_\rho = \{x^2: x \in N\}, \quad G_\sigma = \{x: x, x+1 \in N=N\},$$

$$G_{\rho \circ \sigma} = \sigma^{-1}G_\rho = \{x: x \in N \text{ и } x+1=y^2, \text{ где } y \in N\} = \{3, 8, 15, 24, \dots\}$$

(рис. 6).

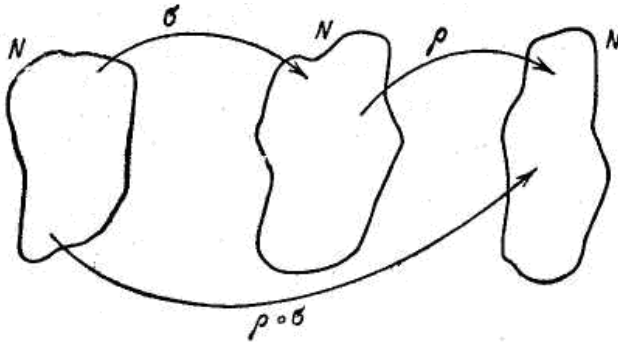


Рис. 6

Используя результаты, полученные выше, выполним исследование сложных функций. Пусть дана функция $f: A \rightarrow B$; в этом случае f^{-1} является функцией тогда и только тогда, когда f инъективна, а отображением тогда и только тогда, когда f биективна. В большинстве рассматриваемых нами случаев f — биекция; тогда f^{-1} — также биекция, а функции $f^{-1} \circ f$ и $f \circ f^{-1}$ являются тождественными отображениями.

Рассмотрим функции $f: A \rightarrow B$ и $g: B \rightarrow C$. Тогда:

- а) если f и g инъективны, то существует $g \circ f$;
- б) если f и g сюръективны, то также существует $g \circ f$.

Обратным отношением к $g \circ f$ есть $f^{-1} \circ g^{-1}$. Порядок должен быть обратным, как указано на рис. 7.

Заметим, что если g — отображение, т.е. $G_g = B$, то $F_f \subseteq G_g$ и, следовательно, $G_{g \circ f} = F_g$. Аналогично, если $F_f \supseteq G_g$, то $F_{g \circ f} = F_g$. Если f и g инъективны, то существует $g \circ f$; следовательно, $f^{-1} \circ g^{-1}$ — функция.

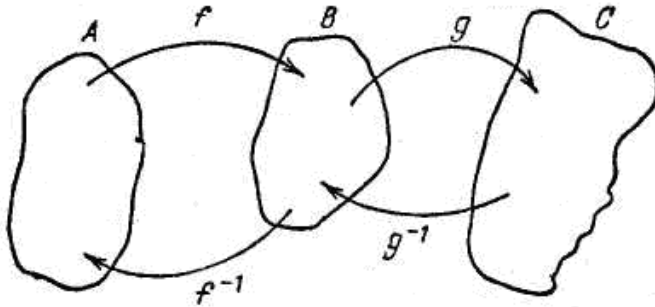


Рис. 7.

Подытоживая вышесказанное, имеем: из $F_f = G_g$ следует, что $g \circ f: G_f \rightarrow F_g$ — отображение; если f и g также инъективны, то $f^{-1} \circ g^{-1}: F_f \rightarrow G_g$ — биекция. Очевидно, что эти критерии выполняются, если f и g — биекции.

2.3.3. Некоторые специальные классы функций

Рассмотрим следующих три важных класса функций: *подстановки, последовательности, функционалы*.

Эти функции часто используются теории моделирования; особенно отметим их приложение к теории графов, к трассированию вычислений, к определению языков программирования и перевода, к машинной графике.

Начнем из подстановок и перстановок. Частично мы их уже рассматривали выше.

Понятие подстановок и последовательности

Определение. *Подстановкой* множества A называется биекция на A . Подстановки конечных множеств представляют особый интерес в вычислениях. Когда A конечно, мы можем вычислить число разных подстановок A .

Пусть $|A|=n \in N$. Обозначим через ${}_n P_n$ число таких подстановок. Значение ${}_n P_n$ легко вычислить. Можно рассматривать задачу построения биекции на A как задачу заполнения ящиков, пронумерованных от 1 до n (рис. 8), объектами a_1, \dots, a_n .

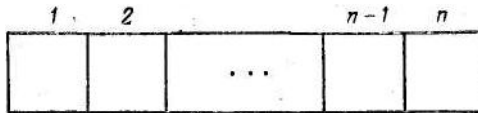


Рис. 8

Порядок, в котором заполняются ящика - несущественен (любой другой порядок можно получить перемешиванием ящиков). Поэтому будем заполнять их слева направо. Первый ящик может быть заполнен n способами, так как мы имеем свободный выбор из всего множества A . Убирая выбранный элемент из A , получим множество из $n - 1$ элементов. Следовательно, второй ящик может быть заполнен $n - 1$ способами, третий ящик — $n - 2$ способами и т.д. Продолжая этот процесс, получим, что $(n - 1)$ -й ящик может быть заполнен двумя способами, а ящик с номером n — единственным оставшимся элементом из A . Следовательно, число разных подстановок из A равно

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Это произведение называется *факториалом* n (обозначается $n!$). Следовательно, ${}_n P_n = n!$

Так как $A \sim N_n$, то можно свести наше рассмотрение к N_n . Любая подстановка на N_n должна определять образ каждого элемента в N_n (который, безусловно, должен быть единственным и отличным от других). Пусть ψ — подстановка на N_n . Тогда ψ можно определить как множество из n пар следующим образом:

$$\psi = \{(1, x_1), (2, x_2), \dots, (n, x_n)\},$$

где

$$\{x_1, \dots, x_n\} = N_n.$$

Не обязательно, конечно, должно быть $x_1=1$ и т.д. Можно также представить ψ следующим образом;

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Пример 10. Пусть σ — подстановка на N_6 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Тогда $\sigma(1) = 5$, $\sigma(3) = 3$ и т.д.

Достоинством этого обозначения - является простота, с которой могут быть вычислены сложные подстановки. Предположим, что ψ — подстановка на N_n , которая определена выше, а χ - другая подстановка

на том же самом множестве. Тогда подстановка χ может быть записана как совокупность пар в порядке, определяемом x_1, x_2, \dots, x_n . Если две последовательности записать одну над другой (первая применяемая подстановка должна быть записана первой), то верхняя и нижняя строки дадут результирующую подстановку.

Пример 11. Пусть σ - подстановка из примера 10 и

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Можно переписать ρ в виде

$$\rho = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Поэтому $\rho \circ \sigma$ может быть вычислено следующим образом:

$$\rho = \begin{matrix} & \sigma = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \left. \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \right\} \text{одинаковые} \\ \rho = & \begin{matrix} \left[\begin{matrix} \left(\begin{matrix} 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right) \end{matrix} \right. & \end{matrix} \\ \rho \circ \sigma = & \left[\begin{matrix} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{matrix} \right) \end{matrix} \right. & \end{matrix}$$

Следовательно, например,

$$\rho \circ \sigma(2) (= \rho(\sigma(2))) = \rho(6) = 5 \text{ и т.д.}$$

Отсюда следует, что представление обратной (конечной) подстановки выходит перестановкой строк, которые представляют исходную подстановку. Хотя такое представление полезно в вычислениях, оно требует много лишнего места, особенно в тех случаях, когда много элементов не меняются в процессе подстановки. Существует более простое определение, которое может употребляться непосредственно для некоторых простых подстановок и косвенно для всех конечных.

Определение. Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Подстановку ρ называют *циклом (циклической подстановкой)*, если

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $A \subseteq B$ и B конечно. Распространяя ρ на все B , можно определить подстановку σ так, что

$$\sigma : x \mapsto \begin{cases} \rho(x), & \text{если } x \in A, \\ x, & \text{если } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

В этом случае σ ведет себя подобно ρ во всех случаях, когда элементы B не остаются на месте. Применение σ к A передвигает элементы по кругу циклическим образом, и, если известна область A , мы можем обозначить подстановку как (a_1, a_2, \dots, a_n) . Эта подстановка называется *циклом длины n* .

Пример 12. Рассмотрим опять подстановку

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Подстановка является циклом длины 5 и может быть записана как $(1, 3, 6, 5, 4)$.

Не все подстановки являются циклами. Например, подстановка σ в примере 10 не является циклом. Напомним, что σ имела вид

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Поэтому $\sigma(1)=5$, $\sigma(5)=4$, $\sigma(4)=1$, откуда следует, что σ содержит цикл $(1, 5, 4)$. Начиная с 2, получаем другой цикл — $(2, 6)$. Таким образом, имеем $\sigma = (1, 5, 4) \circ (2, 6)$ и $\sigma = (2, 6) \circ (1, 5, 4)$.

В действительности каждая конечная подстановка может быть представлена как произведение циклов, при этом циклы могут располагаться в любом порядке. Из построения следует, что один элемент не может встретиться более чем в одном цикле, т.е. циклы *не пересекаются*.

Теорема. *Каждая подстановка ρ на конечном множестве A выражается в виде произведения непересекающихся циклов.*

Доказательство. Поскольку $|A|=n \in N$, то $A \sim N_n$. Поэтому без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением подстановки ρ на N_n .

В теореме утверждается, что $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2 \dots \circ \sigma_r$, где каждое σ_i является циклом и циклы не пересекаются. Для доказательства теоремы построим необходимые циклы. Сначала найдем наименьший элемент $x_1 \in N_n$ такой, что $\rho(x_1) \neq x_1$ и $\rho(x) = x$ для всех x , $1 \leq x < x_1$. Если такого x_1 не существует, то $\rho = 1$ (т.е. ρ есть тривиальным пустым произведением циклов). В противном случае вычислим x_1 , $\rho(x_1)$, $\rho^2(x_1)$, $\rho^3(x_1)$ и т.д. Все эти элементы находятся в N_n . Поэтому элементы в этой последовательности должны содержать повторение.

Предположим, что $\rho^k(x_1)$ - первый такой элемент (который уже повторялся в последовательности). Покажем, что $\rho^k(x_1)=x_1$. Предположим, что это соотношение не выполняется. Тогда $\rho^l(x_1) = \rho^k(x_1)$ для некоторого l , $0 < l < k$. Следовательно,

$$\rho^{l-1}(x_1) = \rho^{-1}(x_1) \circ \rho^l(x_1) = \rho^{-1}(x_1) \circ \rho^k(x_1) = \rho^{k-l}(x_1) \text{ и т.д.}$$

Поэтому $\rho^{l-l}(x_1) = \rho^{k-l}(x_1)$, т.е. $\rho^{k-l}(x_1) = \rho^0(x_1) = x_1$, что противоречит минимальности k (так как $k - l < k$). Таким образом, $\rho^k(x_1) = x_1$, и подстановка

$$\sigma_1 = (x_1, \rho(x_1), \rho^2(x_1), \rho^3(x_1), \dots, \rho^{k-1}(x_1))$$

задает цикл внутри ρ .

Если все элементы $x \in N_n$ такие, что $\rho(x) \neq x$ (будем называть такие элементы *нестационарными*), содержатся в σ_1 , то $\rho = \sigma_1$ — единственный цикл (который, естественно, не пересекается). В противном случае найдем следующий наименьший элемент $x_2 \in N_n$ такой, что $\rho(x_2) \neq x_2$ и x_2 не встречается в σ_1 . Из x_2 строим множество различных степеней ρ :

$$\sigma_2 = (x_2, \rho(x_2), \rho^2(x_2), \rho^3(x_2), \dots, \rho^m(x_2)) \dots$$

Это цикл длины не менее 2, и он не пересекается с σ_1 . Если все нестационарные элементы исчерпаны, то $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно, что множество нестационарных элементов, которые не входят в эти циклы, можно уменьшить, и в конце концов придем к \emptyset . Следовательно, $\rho = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 \dots \circ \sigma_r$, для некоторого $r \in N$.

Рассмотрим теперь несколько другую ситуацию. Возьмем множества $A: |A|=n$ и $B \subseteq A$, $|B|=r \leq n$. Возникает вопрос: сколько биективных функций существует из A в B ? Или, что эквивалентно, сколько существует инъективных отображений из B в A ? Число перестановок (без повторений) из n элементов по r обозначается ${}_n P_r$, и вычисляется так же, как и ${}_n P_n$, за исключением того факта, когда процесс прекращается после заполнения r ящиков. Таким образом,

$${}_n P_r = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1).$$

Легко видеть, что, продолжая процесс заполнения ящиков, оставшиеся $n-r$ элементов можно разместить по последним $n-r$ ящикам ${}_{n-r} P_{n-r}$ способами. Поэтому и

$${}_n P_r = \frac{{}_n P_n}{{}_{n-r} P_{n-r}} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

При вычислении ${}_n P_r$ мы находим число биективных функций из A в B . Подсчитаем число таких функций.

Определение. Пусть A — конечное множество и $B \subseteq A$, $|A|=n \geq r=|B|$. Множество B называется *сочетанием* (без повторов) из n элементов по r . Число таких сочетаний обозначается через C_n^r .

Вычисление C_n^r производится следующим образом. Положим $|A|=n$. Возьмем произвольное подмножество $B \subseteq A$ такое, что $|B|=r$. Тогда B является образом подстановки из n элементов по r . Число инъективных функций на A , которые имеют B своим образом, является ${}_n P_r$. Если f является такой функцией и g — другая такая функция, которая имеет ту же самую область значений, то g связана с f соотношением $g=\varphi f$, где φ — подстановка на B . Функции g и f определяют одну и ту же комбинацию, и в действительности число функций, которые определяют эту комбинацию, равно числу подстановок φ на B . Следовательно,

$${}_n P_r = C_n^r \cdot {}_r P_r$$

откуда

$$C_n^r = \frac{{}_n P_r}{{}_r P_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Поскольку относительные дополнения единственны и $|A \setminus B|=n-r$, то отсюда следует, что $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Вернемся теперь к математическим объектам, которые упоминались нами раньше, но которые не рассматривались как функции.

Определение. *Последовательностью* на множестве S называют отображение $N \rightarrow S$.

Если $\sigma: N \rightarrow S$ заданная последовательность и $\sigma(n)=s_n$, то, обычно, обозначают последовательность не σ , а (s_n) или $(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots)$. В этом случае s_n называют n -м членом последовательности.

Часто при изучении свойств последовательностей возникает понятие «расстояние» между соседними элементами последовательности (скажем, s_n и s_{n+1}) и между элементами s_n при $n \geq n_0$ (где n_0 — некоторый фиксированный элемент N) и фиксированным элементом из S .

Мы возвратимся к этим вопросам чуть позже, поскольку в данный момент у нас в общем случае нет понятия расстояния.

Понятие функционала

Говоря об отображении $f: X \rightarrow Y$ как о функции с вещественными значениями, мы не накладывали на характер элементов множества X каких-либо особых ограничений. В простейших задачах множество X , как и множество Y представляет собой множество вещественных чисел. В этом случае каждая пара $(x, y) \in f$ ставит в соответствие одному вещественному числу x другое вещественное число y . Однако важным для практики есть случай, когда множество X представляет собой множество функций, а множество Y — множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию функционала, подробное рассмотрение которого удобно провести на примере.

Представим себе некоторую линию $y=f(x)$, которая соединяет фиксированные точки A и B , как показано на рис. 9, по которой скатывается свободно движущийся шарик. Обозначим через t время, которое шарик затратит на перемещение из точки A в точку B . Это время зависит от характера линии AB , т.е. от вида функции $f(x)$. Если обозначить через $F(x)$ множество различных функций, которые изображают линию AB , а через T множество вещественных чисел t , определяющих время движения шарика, то зависимость времени движения от вида функции может быть записана как отображение

$$J: F(x) \rightarrow T.$$

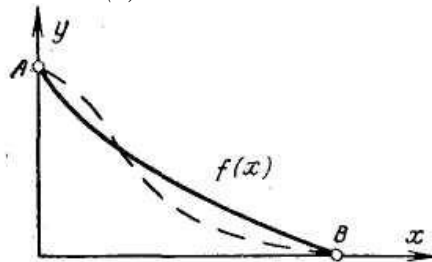


Рис. 9. Линия наискорейшего спуска.

Элементами множества J будут пары $(f(x), t)$, в которых $f(x) \in F(x)$, а $t \in T$. В этом случае говорят, что вещественное число $t \in T$ представляет собой функционала J от функции $f(x) \in F(x)$, и записывают это в виде

$$t = J[f(x)]$$

В задачах управления функционалы используются как критерии качества управления. Так, в рассмотренном примере время

перемещения шарика из точки A в точку B можно трактовать как критерий «качества» избранной функции $f(x)$. При этом говорят об *оптимальном управлении* как о таком, при котором соответствующий критерий качества оборачивается в минимум. С этой точки зрения определения «оптимального» вида функции $f(x)$ сводится к выполнению условия

$$\min_{f \in F} J[f(x)],$$

при котором время t будет минимальным. В математике подобная линия наискорейшего спуска получила название *брахистохроны*.

Особый интерес представляют функционалы в задачах, связанных с трансляцией языков программирования. Это связано с тем, что рассматриваемые функционалы используются как объекты особого рода, в ряде случаев отличные от элементов, которые были в области определения и области значения функций. Конечно, множества функций могут рассматриваться так же, как и любые другие множества.

В развитых языках программирования имена целых переменных не отличаются от имен переменных функций и могут изучаться аналогичными способами. Хотя эти функции являются довольно сложными, языки программирования редко дают примеры важности функционалов.

Пример 13. Пусть P — множество программ, т.е. текстов программ (строка символов), что должны быть обработаны компилятором. Аналогично пусть I и O — множества соответственно входных и выходных значений, которые доступны программе для ввода и вывода. Тогда компилятор (с соответствующего языка) является функционалом типа $P \rightarrow [I \rightarrow O]$; для данной $p \in P$ он может создать машинный код, который при выполнении будет читать $i \in I$ и выдавать $o \in O$.

Пример 14. Пусть все данные принадлежат R . Тогда, если $f: a \mapsto [x \mapsto a+x]$, то

$$f(2): x \mapsto 2+x \text{ и } f(2)(3) = 5,$$

в то время, как $f(3): x \mapsto 3+x$ и $f(3)(3) = 6$ и т.д.

Обращение с функционалами не вызывает трудностей при условии, что ссылка делается на основной функционал (т. е. $A \rightarrow B$ или $A \rightarrow [B \rightarrow C]$). Следовательно, в дальнейшем мы будем рассматривать их просто как функции, имеющие нетривиальные области значений, и будем обращаться с ними соответствующим образом.

В заключение определим функции, которые сохраняют некоторые структуры. Из дальнейшего будет видно, что в некоторых ситуациях

желательно сохранить многие из алгебраических свойств, которыми множества могут обладать. Ограничимся вначале рассмотрением простейшего случая.

Определение. Пусть X — множество, на котором задано отношение эквивалентности ρ . Тогда X *разбивается отношением ρ на ρ -эквивалентные классы*; множество классов обозначается как X/ρ .

Определение. Пусть X и Y — множества, ρ_X и ρ_Y — отношения эквивалентности на них, и пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение. Обозначим через \hat{f} отношение

$$\hat{f}: X/\rho_X \rightarrow Y/\rho_Y$$

такое, что

$$\hat{f} = \{([x], [f(x)]) : x \in X\},$$

где $[x]$ — класс эквивалентности x . Если \hat{f} — функция, то

$$x_1 \rho_X x_2 \Rightarrow \hat{f}([x_1]) = \hat{f}([x_2]),$$

и \hat{f} является *отображением, сохраняющим эквивалентность*. В этом случае говорят, что $f: X \rightarrow Y$ *индуцирует* отображение

$$\hat{f}: X/\rho_X \rightarrow Y/\rho_Y. \quad \#$$

Наглядный способ представления такого отображения дан на рис. 10.

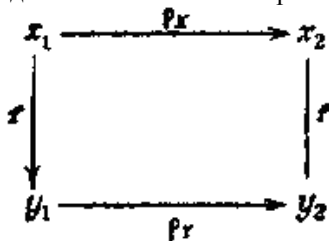


Рис. 10

Если рассмотреть отображение f , согласованное с отношением эквивалентности, то можно переходить от x_1 к y_1 или через x_2 , используя соотношения $y_2=f(x_2)$ и $x_2 \rho_X x_1$, или через y_1 , используя соотношения $y_1=f(x_1)$ и $y_2 \rho_Y y_1$.

Пример. Пусть $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 4, 9\}$, и пусть ρ_X и ρ_Y таковы, что

$$X/\rho_X = \{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad Y/\rho_Y = \{\{1\}, \{4, 9\}\},$$

и $f: X \rightarrow Y$ такое, что $x \mapsto x^2$. Тогда

$$\widehat{f}(\{1\}) = [f(1)] = [1] = \{1\},$$

$$\widehat{f}(\{2\}) = [4] = \{4, 9\},$$

$$\widehat{f}(\{3\}) = [9] = \{4, 9\}.$$

В этом случае $\{2, 3\} \in X/\rho_x \Rightarrow 2\rho_x 3 \Rightarrow [2] = [3]$ и $\widehat{f}(\{2\}) = \widehat{f}(\{3\})$.

Поэтому \widehat{f} является функцией и f сохраняет отношения эквивалентности.

Пример. Пусть X , Y и f те же, что и раньше, и отношение эквивалентности σ_x и σ_y индуцируют разбиения $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ и $\{\{1, 4\}, \{9\}\}$ соответственно. В этом случае индуцированные отношения дают

$$\widehat{f}(\{2\}) = [f(2)] = [4] = \{1, 4\},$$

$$\widehat{f}(\{3\}) = [f(3)] = [9] = \{9\}.$$

Так как $2\sigma_x 3$, то $[2] = [3]$ в X/σ_x , но $(4, 9) \notin \sigma_y$, поскольку $[4] \neq [9]$ в Y/σ_y . По сравнению с рис. 10 этот пример дает отношения, показанные на рис. 11.

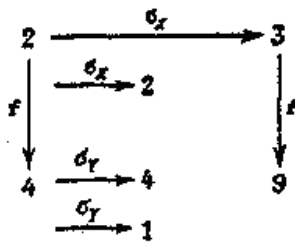


Рис. 11

Так как нельзя соединить стороны прямоугольника во всех случаях, то отношения эквивалентности не сохраняются. Эти диаграммы могут быть использованы для определения операций таким образом, чтобы соединить углы прямоугольника. После этого можно будет объединять диаграммы подобно строительным блокам.

Функция времени

В основе понятия функции времени лежит множество $T \subseteq R$ с элементами t , которое называют множеством моментов времени. **Время обладает той характерной особенностью, что имеет направление.** Это означает, что если $t_1, t_2 \in T$ и $t_1 < t_2$, то момент t_1 предшествует моменту t_2 . Другими словами T — упорядоченное множество.

Функция времени определяет отображение f множества моментов времени T на множество вещественных чисел R :

$$f: T \rightarrow R. \quad (20)$$

Элементами f будут пары (t, x) , которые обозначаются также через $x(t)$, где $t \in T, x \in R$. Каждая такая пара определяет значение функции в момент t и называется **событием** или **мгновенным значением функции**. Полная совокупность пар (t, x) , т.е. значений $x(t)$ для всех $t \in T$, и представляет собой функцию времени. Дальнейшее уточнение функции времени связано с уточнением ее области определения, т.е. вида множества T .

Если $T=R$, т.е. t может принимать любое вещественное значение от $-\infty$ до $+\infty$, то функция $x(t)$ называется функцией с *непрерывным временем*. Примером может служить синусоидальная функция времени $x(t)=A \sin (\omega t+\varphi)$, описывающая напряжение в сети переменного тока.

Однако нас обычно не интересуют весьма удаленные моменты времени как в прошлом, так и в будущем. Поэтому производят сужение $x(t)$ на ограниченный интервал $t_1 < t \leq t_2$, который обычно считают полузакрытым интервалом и обозначают $(t_1, t_2]$. Полузакрытые интервалы времени удобны тем, что допускают последовательное сочленение друг с другом. Так, если интервал $(t_1, t_2]$ разбить моментом t' на два интервала $(t_1, t']$ и $(t', t_2]$, то не будет сомнений, к которому интервалу отнести t' .

Сужение функции $x(t)$, заданной на интервале $-\infty < t < +\infty$, на интервал $(t_1, t_2]$ называется *отрезком функции $x(t)$* и обозначается $x_{(t_1, t_2]}$. Итак, по определению

$$x_{(t_1, t_2]} = \{x(t) | t \in (t_1, t_2]\} \quad (21)$$

Для осуществления операции сужения часто используют специальную функцию времени, которую называют *единичной функцией* или единичным скачком:

$$l(t-\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \lambda; \\ 1 & \text{при } t > \lambda, \end{cases} \quad (22)$$

приведенную на рис. 12,а.

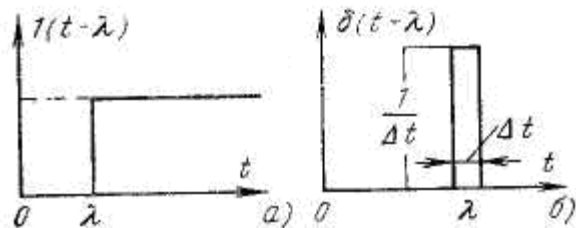


Рис. 12. Единичный скачок и импульсная функция .

Так, напряжение, которое подается на вход прибора, который подключается к сети в момент $t=\lambda$, будет равно:

$$u(t)=\mathbf{1}(t-\lambda)x(t)=\mathbf{1}(t-\lambda)A \sin(\omega t+\varphi).$$

Другой широко используемой функцией времени является импульсная функция $\delta(t-\lambda)$, определяемая соотношениями:

$$\delta(t-\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \lambda; \\ \infty & \text{при } t = \lambda, \end{cases} \quad (23)$$

$$\int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \delta(t-\lambda) dt = 1, \quad \varepsilon > 0. \quad (24)$$

Функцию $\delta(t-\lambda)$ можно рассматривать как предельный случай приведенного на рис. 12,б прямоугольного импульса шириной Δt и высотой $1/\Delta t$, появляющегося в момент $t=\lambda$ при $\Delta t \rightarrow 0$.

Импульсная функция позволяет выделять мгновенные значения функции $x(t)$ для фиксированных моментов времени. Так, если $t_1 < \lambda < t_2$, то

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta(t-\lambda) dt = x(\lambda) \int_{\lambda-\varepsilon}^{\lambda+\varepsilon} \delta(t-\lambda) dt = x(\lambda). \quad (25)$$

Если множество T представляет собой множество натуральных чисел

$$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots,$$

то говорят о функциях с *дискретным временем*. В этом случае элементы множества T обозначают через n , так что пара (n, x) , которая обозначается также $x[n]$ или x_n , определяет значение функции в момент n . На рис. 13 приведен пример функции с дискретным временем.

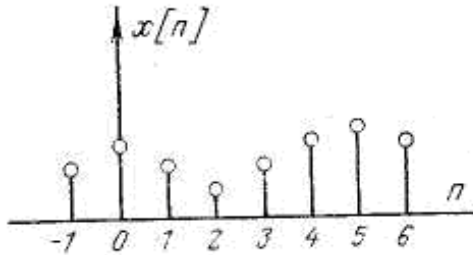


Рис. 13. Функция с дискретным временем.

Понятие оператора

Оператором L называется отображение

$$L: X \rightarrow Y, \quad (26)$$

в котором множества X и Y являются множествами функций с элементами $x(t)$ и $y(t)$, так что элементами множества L будут пары $(x(t)$ и $y(t))$. В этом случае говорят, что оператор L преобразует функцию $x(t)$ в функцию $y(t)$, и пишут:

$$y(t) = L[x(t)].$$

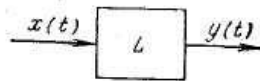


Рис. 14. Представление управляющей системы в виде оператора.

Примером оператора служит оператор дифференцирования p , который ставит в соответствие функции $f(x)$ другую функцию $f'(x) = df(x)/dx$, что может быть записано в виде

$$f'(x) = p[f(x)].$$

В задачах управления роль оператора часто выполняет сама управляющая система, которая преобразует по некоторому закону L входной сигнал $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$, как это показано на рис. 14.

Последовательности

Здесь содержится материал, использующий теорию множеств. Цель, которая при этом преследуется, состоит не в развитии техники вычислений, а в создании строгих утверждений типа:

«Предел $f(x)$ при x , стремящемся к 0 , есть u »,

«Наклон графика f в точке a равен b »,

« f имеет гладкий график» и т. п.

(Два последних понятия относятся к графике.) Мы приведем основные определения, которые используются при получении некоторых результатов. Этого достаточно для того, чтобы проиллюстрировать доказательство большинства теорем.

Определение. *Вещественной последовательностью* называется отображение \mathbb{N} на \mathbb{R} .

Последовательность записывают в виде (a_n) или $\{a_n\}$. Если при возрастании n члены a_n становятся «близкими» к некоторому фиксированному значению $a \in \mathbb{R}$, то говорят, что последовательность (a_n) имеет предел a или что a_n стремится к a при стремлении n к бесконечности. Дадим строгое определение сказанному.

Определение. Если (a_n) - вещественная последовательность и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что $N > N_\varepsilon \Rightarrow |a_N - a| < \varepsilon$, то говорят, что (a_n) имеет *предел* a , и записывают это как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

или $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. (Здесь $|x|$ обозначает модуль числа $x \in \mathbb{R}$).

Если (a_n) имеет предел, то говорят, что последовательность *сходится*. Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

Пример.

1. Последовательность (a_n) , где $a_n = 1/n$, имеет предел 0 ; для $\varepsilon > 0$ можно выбрать N_ε — любое натуральное число, большее $1/\varepsilon$. Тогда

$$N > N_\varepsilon \Rightarrow |a_N - 0| = 1/N < 1/N_\varepsilon < \varepsilon;$$

следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

2. Последовательность (a_n) , где $a_n = (-1)^n$, *расходящаяся*.

Предложение. Если (s_n) и (t_n) — последовательности и $\lambda \in \mathbb{R}$, тогда $(s_n + t_n)$, $(s_n t_n)$ и (λs_n) также являются последовательностями, и если $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$,

то:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t;$

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = st;$

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda s_n) = \lambda s;$

г) если $\varepsilon \neq 0$, то $\varepsilon_n/t_n \rightarrow s/t$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|s_N - s| < \varepsilon/2 \text{ и } |t_N - t| < \varepsilon/2.$$

при $N > N_\varepsilon$. Так как при $N > N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} |s_N + t_N - (s + t)| &= |s_N - s + t_N - t| \leq \\ &\leq |s_N - s| + |t_N - t| < \varepsilon, \end{aligned}$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = s + t$.

Аналогично для случая б)

$$\begin{aligned} |s_N t_N - st| &= |s_N t_N - s_N t + s_N t - st| \leq \\ &\leq |s_N t_N - s_N t| + |s_N t - st| \leq |s_N| \cdot |t_N - t| + |s_N - s| \cdot |t|. \end{aligned}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для $N > N_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |s_N - s| &< \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{|t| + 1}, \\ |t_N - t| &< \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{|s| + 1}, \quad |s_N| < |s| + 1, \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |s_N| |t_N - t| + |s_N - s| |t| &\leq (|s| + 1) |t_N - t| + \\ &+ |s_N - s| |t| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{|t| + 1} |t| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда получаем $(s_n t_n) \rightarrow st$.

Определение. Пусть (a_n) — последовательность в R . Последовательность

$$s_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

определяет ряд $\sum a_n$. При этом s_n называют n -й *частичной суммой ряда*. Если последовательность (s_n) сходится, то говорят, что ряд *сходящийся*, и число

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

называют *суммой ряда*. Оно обозначается

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Операции

Определение. *Операцией над множеством S называется функция $f: S^n \rightarrow S, n \in \mathbb{N}$.*

В этом определении есть два важных момента, которые заслуживают особого вспоминания. Во-первых, раз операция является функцией, то результат применения операции *однозначно определен*. Поэтому данный упорядоченный набор из n элементов S функция f переводит только в один элемент S . Во-вторых, поскольку область значений операции лежит в S , на которое операция действует, будем говорить, что операция *замкнута* на S ,

Говорят, что операция $S^n \rightarrow S$ *имеет порядок n* . Ограничимся рассмотрением ситуаций, когда порядок равен 1 или 2. В этом случае операции называют *монадическими* (или *унарными*) и *диадическими* (или *бинарными*) соответственно. Элементы набора из n элементов в области определения называют операндами. Операции обычно обозначают символами, которые называют операторами. В случае унарных операций обычно символ оператора ставят перед операндом.

Наиболее простым примером является операция изменения знака на R . В предположении, что операция сложения уже определена, $-x$ определяет операцию $x \mapsto y: x+y=0$ (x отображается в $y: x+y=0$).

Определение. Бинарные операции обозначают одним из трех способов. В первом случае оператор ставится между операндами (*infix*), во втором — перед операндами (*prefix*) и в третьем — после операндов (*postfix*).

Пример 15.

$a+b$ *infix*,
 $+ab$ *prefix*,
 $ab+$ *postfix*.

Переход от одной формы к другой нетруден и лучше всего описывается в терминах ориентированных графов.

В соответствии с большинством математических традиций, кроме некоторых работ по алгебре и формальной логике, мы будем использовать обозначение *infix*. Другие обозначения имеют то преимущество, что не требуют скобок при определении порядка вычислений сложных выражений, и это делает их особенно удобными для автоматической обработки. Можно проверить соответствие между следующими парами выражений, записанными в формах *infix* и *postfix* соответственно:

- а) $a+b \cdot c+(d+e \cdot (f+g))$,
 $abc \cdot + defg+ \cdot ++$;
 б) $(a+b) \cdot c+d+e \cdot f+g$,
 $ab+c \cdot d+ef \cdot +g+$;
 в) $a+(b \cdot (c+d)+e) \cdot f+g$,
 $abed+ e+f +g+$.

Пример 16. Рассмотрим алгебраическое выражение

$$a + b \cdot c + (d + e \cdot (f + g))$$

и его представление на рис. 15, которое называют деревом.

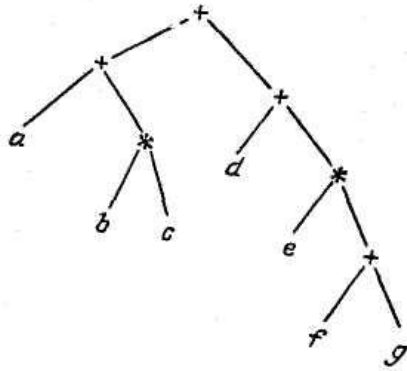


Рис. 15.

Из свойств арифметических операций мы знаем, что значение этого выражения можно вычислить многими способами. Однако если двигаться слева направо и снизу вверх, то получаем

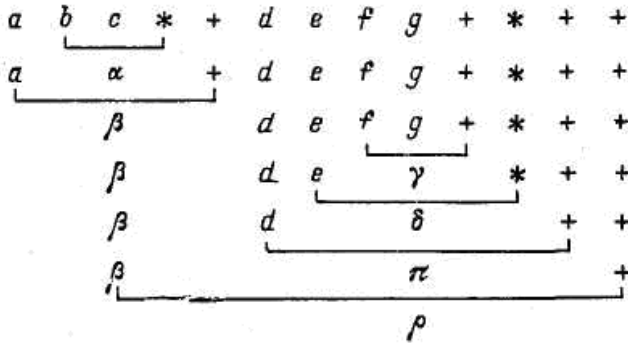
$$\alpha \leftarrow b \cdot c, \quad \beta \leftarrow a + \alpha, \quad \gamma \leftarrow f + g,$$

$$\delta \leftarrow e \cdot \gamma, \quad \pi \leftarrow d + \delta, \quad \rho \leftarrow \beta + \pi.$$

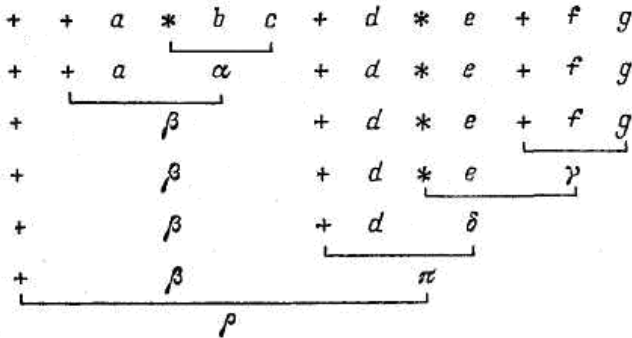
Здесь греческими буквами обозначаются промежуточные результаты, за исключением ρ - искомого результата.

Вычисление значения этого выражения с помощью дерева выполняется очень просто, однако если работать непосредственно с исходным выражением, то это можно сделать по-иному. Действительно, обычно (*infix*) выражения, как это показано в примере, нерегулярно потому, что некоторые подвыражения заключены в скобки, а некоторые нет. Особенно такая ситуация будет наблюдаться в том случае, если проинтегрировать информацию о разных символах на дереве (поскольку на самом деле его нет). Очевидно, что формы записи *prefix* и *postfix* этого выражения несут больше информации.

Вычисление значения выражения в форме *postfix* осуществляется следующим образом:



Аналогично в форме *prefix* вычисления осуществляются следующим образом:



«Переходы» по дереву показаны на рис. 16, *a* (форма *prefix*) на рис.16, *b* (форма *postfix*) и на рис.16, *c* (форма *infix*) со скобками:

$$((a + (b \cdot c)) + (d + (e \cdot (g + g))))).$$

К этим вопросам мы возвратим позднее.

Мы уже знакомые с многими бинарными операциями, например с арифметическими операциями $+$, \cdot , $-$, $/$ и операциями над множествами — объединением (\cup) и пересечением (\cap).

Операции, которые определены на конечных множествах, часто удобнее задавать с помощью таблиц.

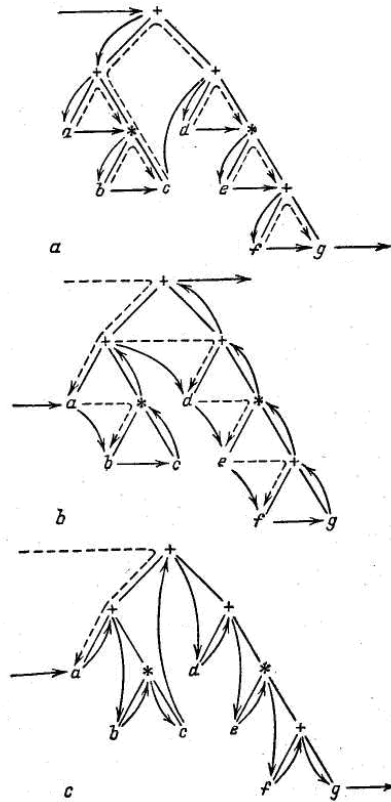


Рис.16.

Пример 17. Пусть операция \otimes определена на множестве $\{a, b, c\}$ с помощью таблицы

\otimes	a	b	c
a	a	a	b
b	b	a	c
c	a	b	b

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 a \otimes b &= a, \\
 b \otimes b &= a, \\
 c \otimes b &= b, \dots
 \end{aligned}$$

Такие символы, как \otimes и \oplus , будут использоваться для обозначения разных операций, которые будут вводиться в процессе изложения.

Очевидно, что использование таблиц имеет важное значение, так как некоторые операции, с которыми приходится иметь дело в дискретной математике, непригодны для словесного задания.

Обратим теперь внимание на свойства операций. Операции вместе со своими следствиями обеспечивают основу всех алгебраических вопросов математики, так как они определяют порядок работы с объектами.

Определение. Говорят, что бинарная операция \otimes на множестве A коммутативна, если

$$a \otimes b = b \otimes a \text{ для всех } a, b \in A.$$

Следовательно, обычная операция сложения на Z коммутативна, а вычитания — нет.

Определение. Говорят, что операция \otimes на множестве A ассоциативна, если

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \text{ для всех } a, b, c \in A.$$

Заметим, что в определении ассоциативности порядок операндов a , b и c сохранен (операция может быть некоммутативной!) и использованы круглые скобки, чтобы определить порядок вычислений.

Таким образом, выражение $(a \otimes b) \otimes c$ требует, чтобы сначала вычислялось $a \otimes b$ и результат этого (скажем, x) принимал участие в операции с c , т.е. давал $x \otimes c$. Если операция ассоциативна, то порядок вычислений несуществен и, следовательно, скобки не требуются.

Пример 18. Над Z имеем

$$(1+2)+3 = 1+2+3 = 1+(2+3),$$

но

$$(1-2)-3 = -4 \text{ и } 1-(2-3) = 2.$$

Таким образом, операция вычитания не ассоциативна.

Коммутативность и ассоциативность являются двумя важными свойствами, которые могут быть определены для простых операций. Перед тем как описывать свойства, которые связывают две операции, определим некоторые термины, относящиеся к специальным элементам множеств, к которым эти операции применяются.

Определение. Пусть \otimes — бинарная операция на множестве A и $l \in A$ такая, что

$$l \otimes a = a \text{ для всех } a \in A.$$

Тогда l называется *левой единицей* относительно \otimes на A . Аналогично, если существует $r \in A$ такое, что

$$r \otimes a = a \text{ для всех } a \in A,$$

то r является *правой единицей* относительно \otimes . Далее, если существует элемент e , который является и левой, и правой единицей, т.е.

$$e \otimes a = a \otimes e = a \text{ для всех } a \in A,$$

то e называется (*двусторонней*) *единицей* по отношению к \otimes .

Пример 19. Над \mathbb{R} 0 является правой единицей по отношению к вычитанию и единицей по отношению к сложению, так как

$$a - 0 = a,$$

но

$$0 - a \neq a, \text{ если } a \neq 0;$$

$$a + 0 = a \text{ и } 0 + a = a \text{ для всех } a.$$

Определение. Пусть \otimes — операция на A с единицей e и $x \otimes y = c$. Тогда говорят, что x — *левый обратный* элемент к y , а y — *правый обратный* элемент к x . Далее, если x и y такие, что

$$x \otimes y = e = y \otimes x,$$

это y называется *обратным элементом* к x по отношению к \otimes , и наоборот.

Замечание. В некоторых книгах левые (правые) обратные элементы относят к левой (правой) единицы, однако, в большинстве случаев единицы являются двусторонними и, следовательно, не требуется делать никаких различий. Для решения уравнений необходимо существование и единственность единиц и обратных элементов. Менее общим свойством операций является идемпотентность, хотя оно используется в алгебре логики.

Определение. Пусть операция \otimes на множестве A и произвольный элемент $x \in A$ таковы, что $x \otimes x = x$. Тогда говорят, что x *идемпотентен* по отношению к \otimes .

Очевидно, что любое подмножество идемпотентно по отношению к операциям пересечения и объединения.

Определение. Пусть дано множество A , на котором определены две операции \otimes и \oplus . Тогда, если

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \text{ для всех } a, b, c \in A,$$

то говорят, что \otimes *дистрибутивна* по отношению к \oplus .

Если сказанное выше не совсем понятно, следует провести соответствие между этим тождеством и обычной арифметикой на R , например,

$$3*(1 + 2) = (3*1)+(3*2).$$

Наиболее общеизвестная алгебра может быть построена из относительно небольшого набора основных правил. Сейчас мы продемонстрируем, как из элементарных предположений можно извлечь некоторые простые следствия; большинство примеров дано в виде упражнений.

Пример 20. Пусть \otimes — операция на множестве A и существует единица по отношению к \otimes . Тогда единичный элемент единствен.

Доказательство. Предположим, что x и y — единицы по отношению к \otimes , т.е.

$$\begin{aligned} x \otimes a &= a \otimes x = a, \\ y \otimes a &= a \otimes y = a \text{ для всех } a \in A. \end{aligned}$$

Тогда $x = x \otimes y$, так как y — единица, и $x \otimes y = y$, поскольку x — единица. Итак, $x = y$.

Пример 21. Пусть \otimes — ассоциативная операция на множестве A и e — единица по отношению к \otimes . Тогда если $a \in A$ и x имеет обратный, то обратный элемент единствен по отношению к \otimes .

Доказательство. Допустим, что x' и x'' - обратные элементы к x , так что

$$x \otimes x' = x' \otimes x = e \text{ и } x \otimes x'' = x'' \otimes x = e.$$

Тогда

$$x' = x' \otimes e = x' \otimes (x \otimes x'') = (x' \otimes x) \otimes x'' = e \otimes x'' = x''.$$

2.3.4. Комбинаторные операции и функции

1. Имеются два основных типа операций над множествами. К первому типу относятся так называемые *алгебраические* операции, такие как объединение $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^n A_i$ или пересечение

$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^h A_i$ нескольких множеств, а также теоретико-

множественная разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$ и ее частный случай — дополнение $\bar{A} \Rightarrow B \setminus A$ множества A до множества B , когда $A \subseteq B$ и из контекста ясно, о каком B идет речь, симметрическая разность

$A \otimes B \Rightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Для операций этого типа характерно, что результирующее множество состоит из тех же элементов, из которых составлены множества, которые подвергаются операции, либо пусто. Операции другого типа называют *кардинальными*, при их применении возникают новые элементы. Таковы: прямое произведение $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ элементами которого являются всевозможные упорядоченные наборы вида $\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$, где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$ (иногда эту операцию рассматривают как ассоциативную, иногда — нет, это всегда ясно из контекста; в частности, использование $A^k \Rightarrow A \times A \times \dots \times A$ раз подразумевает обычно ассоциативный вариант) (в ассоциативном случае элементы $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$ называют также словами и записывают в виде $a_1 a_2 \dots a_k$. Связную часть $a_i a_{i+1} \dots a_{i+j}$ слова $a_1 a_2 \dots a_k$ называют фрагментом этого слова; если $i = 1$, то префиксом, а если $i+j = k$, то суффиксом), булевская степень 2^A — множество всех подмножеств $A: 2^A \Rightarrow \{X/X \subseteq A\}$ и кардинальная степень A^B — множество всех функций с областью определения B и областью значений A (т. е. отображений, сопоставляющих каждому $b \in B$ единственный элемент $f(b) \in A$).

2. Один из способов задания множеств при определенном универсальном множестве U (универсе) есть *характеристические функции*. По существу этот способ — одна из форм задания множества свойством его элементов. Характеристической функцией множества A в универсе U называется функция $s_A \in \{0, 1\}^U$, определенная правилом

$$s_A(x) = s_A^{(U)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Любую функцию, принимающую только два значения, скажем, f из $\{0, 1\}^U$ можно рассматривать как характеристическую функцию множества $N_f \Rightarrow \{x/f(x) = 1\}$, так как, очевидно, $s_{N_f}(x) \equiv f(x)$ (и равным образом $N_{s_A} \equiv A$) Следующее соотношение выражает фундаментальный принцип подсчета *мощности* конечного множества:

$$|A| = \sum_{x \in U} s_A(x) \quad (27)$$

3. Соотношения, перечисляемые в этом пункте, устанавливают связь алгебраических операций над множествами с арифметическими и булевскими операциями над их характеристическими функциями, после чего легко прослеживается и связь с операциями над соответствующими комбинаторными функциями:

$$s_U^{(U)}(x) \equiv 1, \quad s_\emptyset^{(U)}(x) \equiv 0, \quad (28)$$

$$s_A^{(U)}(x) = 1 - s_A^{(U)}(x) = \overline{s_A(x)}, \quad (29)$$

$$s_{A \cap B}(x) = s_A(x) \cdot s_B(x) = s_A(x) \& s_B(x), \quad (30)$$

$$s_{A \setminus B}(x) = s_A(x) - s_{A \cap B}(x) = s_A(x) \& \overline{s_B(x)}, \quad (31)$$

$$s_{A \oplus B}(x) = s_A(x) + s_B(x) - 2s_{A \cap B}(x) = s_A(x) \oplus s_B(x). \quad (32)$$

Проверка соотношений (28) — (32) вполне тривиальна, как и переход к комбинаторным функциям на основе (27). Проследим этот переход на одном примере:

$$s_{A \cup B}(x) = s_A(x) \vee s_B(x) = s_{A \cap B}(x) \vee (s_A(x) - s_{A \cap B}(x)) \vee (s_B(x) - s_{A \cap B}(x))$$

влечет

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= \sum_{x \in U} s_{A \cup B}(x) = \sum_{x \in U} s_A(x) + \sum_{x \in U} s_B(x) - \\ &\quad - \sum_{x \in U} s_{A \cap B}(x) = |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

Используя индукцию по k , этот результат обобщается на случай объединения любого конечного числа k множеств:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| &= \\ &= \sum_{\sigma=1}^k (-1)^{\sigma} \sum_{(j_1, \dots, j_{\sigma})} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_{\sigma}}|, \quad (33) \end{aligned}$$

где внутренняя сумма распространяется на всевозможные σ -элементные множества индексов. Метод подсчета на основе (33) называют *методом включения и исключения*.

4. Своеобразие обозначений для кардинальных операций находит оправдание в связи с соответствующими операциями над комбинаторными функциями:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k|, \quad (34)$$

$$|2^A| = 2^{|A|}, \quad |A^B| = |A|^{|B|}. \quad (35)$$

Правило произведения (34) доказывается легко — при $k=2$ индукцией по мощности одного из множеств и затем индукцией по k . Заметим, что (34) сохраняет силу независимо от того, рассматриваем ли мы операцию прямого произведения как ассоциативную или нет, т. е.

$$|A_1 \times (A_2 \times A_3)| = |(A_1 \times A_2) \times A_3| = |A_1 \times A_2 \times A_3|.$$

Соотношения (35) доказаны в п. 6.

5. Наиболее общее представление о функциях связано с табличным способом задания функций. Для функции $f \in A^B$ часто рассматривают ее «естественное» продолжение на 2^B , полагая $f(\emptyset) = \emptyset$, и для непустых $C \subseteq B$ —

$$f(C) = \bigcup_{x \in C} \{f(x)\}. \quad (36)$$

Важным случаем функциональной связи между множествами являются *взаимно однозначные соответствия*. Между множествами A и B взаимно однозначное соответствие (если оно существует) устанавливается функцией $f \in A^B$ такой, что $f(B) = A$, и если $x, y \in B$ и $x \neq y$, то $f(x) \neq f(y)$. Для бесконечных множеств это понятие позволяет ввести понятие мощности множества, не обращаясь к понятию «количества», а для конечных позволяет получать оценки мощности, не прибегая к прямому подсчету. Если между изучаемым множеством A и множеством B , мощность которого известна, установлено взаимно однозначное соответствие, то это сразу приводит к определению комбинаторной функции множества A .

6. Примеры. (а) Функции $v(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 2^{n-i}$

устанавливает взаимно однотипное соответствие между множествами $A_n = \{0, 1\}^n$ и $B_n = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$,

Свойство $v(A_n) = B_n$ докажем индукцией по n . При $n = 1$ проверяем, затем, полагая справедливым для $n - 1$, имеем

$$\begin{aligned} v(A_n) &= v(\{0\} \times A_{n-1}) \cup v(\{1\} \times A_{n-1}) = \\ &= B_{n-1} \cup \{2^{n-1} + x \mid x \in B_{n-1}\} = B_n. \end{aligned}$$

Второе свойство: пусть $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ и f — наименьшее, для которого $x_i \neq y_i$, скажем, $x_i = 1, y_i = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_n) - v(y_1, \dots, y_n) &= \\ &= 2^{n-j} + \sum_{i=j+1}^n (x_i - y_i) \cdot 2^{n-i} \geq 2^{n-j} - \sum_{i=j+1}^n 2^{n-i} = 1, \end{aligned}$$

т. е. $v(x_1, \dots, x_n) \neq v(y_1, \dots, y_n)$, ч. т. д.

(б) $|2^A| = |\{0, 1\}^A| = |\{0, 1\}^{|A|}| = 2^{|A|}$. Взаимно однозначное соответствие между 2^A и $\{0, 1\}^A$ было установлено в п. 2: $B \rightarrow s_B^{(A)}(x)$. Соответствие между функциями $\{0, 1\}^A$ и элементами $\{0, 1\}^{|A|}$ получим, сопоставляя функции $f(x)$ упорядоченный набор ее значений

$$\langle f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{|A|}) \rangle \in \{0, 1\}^{|A|}, \text{ где } f(a_i) \in \{0, 1\}.$$

Например, при $A = \{0, 1\}$ эти соответствия таковы:

$$\begin{aligned}
 2^A &\leftrightarrow \{0, 1\}^A \leftrightarrow \{0, 1\}^{|A|}, \\
 \emptyset &\leftrightarrow f_1 = 0 \leftrightarrow \langle 0, 0 \rangle, \\
 \{0\} &\leftrightarrow f_2 = \bar{x} \leftrightarrow \langle 1, 0 \rangle, \\
 \{1\} &\leftrightarrow f_3 = x \leftrightarrow \langle 0, 1 \rangle, \\
 \{0, 1\} &\leftrightarrow f_4 = 1 \leftrightarrow \langle 1, 1 \rangle.
 \end{aligned}$$

(в) Рассмотрим более подробно взаимно однозначное соответствие между A^B и $A^{|B|}$, доказывающее (35). Пусть $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, и пусть все функции A^B перечислены в левой части таблицы 1.

Таблица 1

x	b_1	b_2	\dots	b_n
$f_1(x)$	$f_1(b_1)$	$f_1(b_2)$	\dots	$f_1(b_n) \rightarrow \langle f_1(b_1), f_1(b_2), \dots, f_1(b_n) \rangle$
$f_2(x)$	$f_2(b_1)$	$f_2(b_2)$	\dots	$f_2(b_n) \rightarrow \langle f_2(b_1), f_2(b_2), \dots, f_2(b_n) \rangle$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$f_i(x)$	$f_i(b_1)$	$f_i(b_2)$	\dots	$f_i(b_n) \rightarrow \langle f_i(b_1), f_i(b_2), \dots, f_i(b_n) \rangle$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$f_m(x)$	$f_m(b_1)$	$f_m(b_2)$	\dots	$f_m(b_n) \rightarrow \langle f_m(b_1), f_m(b_2), \dots, f_m(b_n) \rangle$

Справа от каждой функции показан соответствующий ей элемент A^n , это просто набор значений этой функции, упорядоченный в согласии с избранным упорядочением множества B . Очевидно, что каждый набор из A^n соответствует некоторой функции A^B , а различным функциям соответствуют различные наборы. Поэтому $|A^B| = |A|^{|B|}$.

(г) Число размещений элементов $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ по k ящикам $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ равно k^n . Это следует из того, что каждому размещению можно сопоставить функцию $f \in A^B$ такую, что $f(x)$ есть номер ящика, в который помещен x . Любая функция из A^B задает некоторое размещение, а различным размещениям соответствуют различные функции.

(д) В примере (а) мы воспользовались рекурсией для определения множества A^n и его комбинаторной функции $|A^n|$:

$$\begin{aligned}
 A^1 &= A, \quad A^n = A \times A^{n-1}; \\
 |A^1| &= |A|, \quad |A^n| = |A| \cdot |A^{n-1}|.
 \end{aligned}$$

Такой вид рекурсии, когда общий член параметрического семейства определяется схемой, включающей члены этого же семейства с меньшими значениями параметра, называют *рекуррентностью* (возвратом). Именно рекуррентность часто является итогом

комбинаторного анализа множеств, так как последующее исследование — получение явного выражения комбинаторной функции или оценок для этой функции — перемещается в область функционального анализа. Рассмотрим, в качестве последней иллюстрации, множества $P_{A,k}$ всех k -элементных *перестановок* элементов из $A = \{1, 2, \dots, n\}$, т. е. $P_{A,k}$ есть подмножество A^k , состоящее из всех наборов $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, у которых все элементы x_1, \dots, x_k различны. Пусть $A_i \Rightarrow A \setminus \{i\}$. Легко понять, что $P_{A,1} = A$ и

$$P_{A,k} = \bigcup_{i=1}^n \{i\} \times P_{A_i, k-1} \text{ для } k = 2, 3, \dots, n.$$

Учитывая, что $|P_{A,k}| = |P_{B,k}|$ при $|A| = |B|$, имеем

$$P_{n,k} \Rightarrow |P_{A,k}|, \quad P_{n,1} = n, \quad P_{n,k} = n \cdot P_{n-1, k-1}.$$

Полученная простая рекуррентность дает

$$P_{n,n} = n! \Rightarrow n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 \quad (0! \Rightarrow 1)$$

— одну из основных комбинаторных функций наряду с k^n , и для произвольного $k = \overline{1, n}$

$$P_{n,k} = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2.4. Функции нескольких переменных

2.4.1. Функции двух переменных

1. Способы задания. Понятия о функциях любого числа независимых переменных и об обозначениях для них были даны ранее. Однако о способах задания таких функций надо поговорить более подробно.

Аналитический способ задания функции $z=f(x, y)$ двух переменных не отличается существенно от того, как это делается для функций одной переменной. В то же время табличный способ оформляется значительно более громоздко: так как нужно задавать значения двух независимых переменных, то приходится применять таблицу с двумя входами.

Таблица с двумя входами

$$z=f(x,y)$$

$x \backslash y$	y_1	y_2	y_3	...	y_N
x_1	$z_{11}=f(x_1, y_1)$	$z_{12}=f(x_1, y_2)$	$z_{13}=f(x_1, y_3)$...	$z_{1N}=f(x_1, y_N)$
x_2	$z_{21}=f(x_2, y_1)$	$z_{22}=f(x_2, y_2)$	$z_{23}=f(x_2, y_3)$...	$z_{2N}=f(x_2, y_N)$
...
x_M	$z_{M1}=f(x_M, y_1)$	$z_{M2}=f(x_M, y_2)$	$z_{M3}=f(x_M, y_3)$...	$z_{MN}=f(x_M, y_N)$

Значения функции здесь приходится снабжать двумя индексами (двойная нумерация). Ясно, что если число значений для x и y велико, то такую таблицу трудно составить.

При составлении таблицы можно также пользоваться тем, что если фиксировать значение одной из независимых переменных, например x , то z станет функцией только y . Тогда получится система таблиц с одним входом, что, конечно, равносильно таблице с двумя входами.

Система таблиц с одним входом

$$x = x_1$$

y	y_1	y_2	...	y_N
z	$z_{11}=f(x_1, y_1)$	$z_{12}=f(x_1, y_2)$...	$z_{1N}=f(x_1, y_N)$

$$x = x_2$$

y	y_1	y_2	...	y_N
z	$z_{21}=f(x_2, y_1)$	$z_{22}=f(x_2, y_2)$...	$z_{2N}=f(x_2, y_N)$

и т. д.

Такой же принцип фиксирования значений одной из переменных может быть использован при графическом изображении функции двух переменных, в результате чего получится система графиков, например, такого вида, как показано на рис. 17.

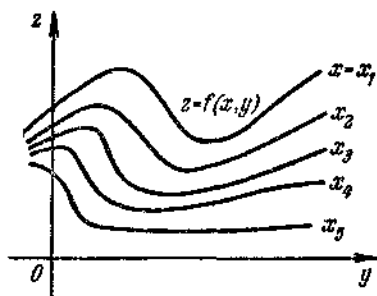


Рис. 17.

В теоретических рассуждениях встречается еще следующий способ графического изображения функции $z = f(x, y)$. Рассмотрим декартовы координаты x, y, z в пространстве (можно применять и другие системы координат). Придавая независимым переменным какие-либо численные значения $x = x_1, y = y_1$ получим точку N_1 (рис. 18) в плоскости аргументов xOy .

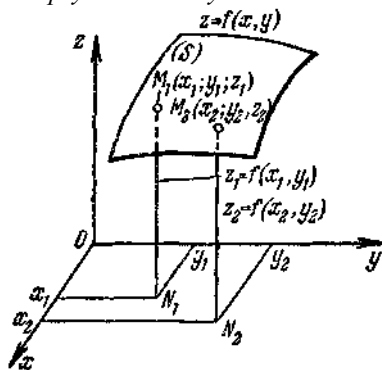


Рис. 18.

Вычислив соответствующее значение функции $z_1 = f(x_1, y_1)$, мы сможем построить соответствующую точку M_1 в пространстве. Придавая независимым переменным другие значения, мы сможем построить точку M_2 и т. д. Если теперь теоретически представить, что независимые переменные принимают все возможные значения, то построенные точки N заполнят всю плоскость xOy или часть ее, а так как над (или под, в зависимости от знака функции) каждой точкой N имеется соответствующая точка M , то все точки M заполнят некоторую

поверхность (S). Эта поверхность и будет служить «графиком» рассматриваемой функции.

Мы будем пользоваться этим методом, чтобы мысленно представить себе характер изменения рассматриваемой функции; однако значение этого метода ограничено трудностями в практическом исполнении поверхности в пространстве.

Теперь рассмотрим способ, который применяется на практике. Придавая z постоянные значения h_1, h_2, h_3, \dots , мы получим в плоскости аргументов линии $f(x, y) = h_1, f(x, y) = h_2, \dots$, так называемые *линии уровня* функции f . Геометрически они получаются (рис. 19), если пересекать поверхность $z=f(x, y)$ плоскостями, параллельными плоскости xOy , и проектировать линии пересечения на эту плоскость.

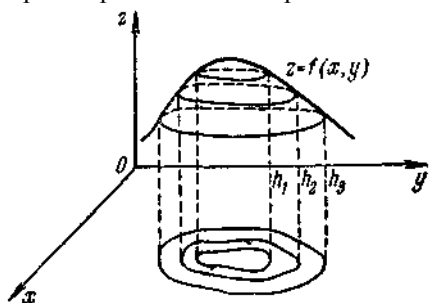


Рис. 19.

Этот способ, в частности, широко применяется при черчении географических карт; там функцией служит высота над уровнем океана. Полученная система линий уровня может иметь вид, например, изображенный на рис. 20; маленькие черточки указывают направление убывания функции от линии уровня, для географической карты это—направление стока воды.

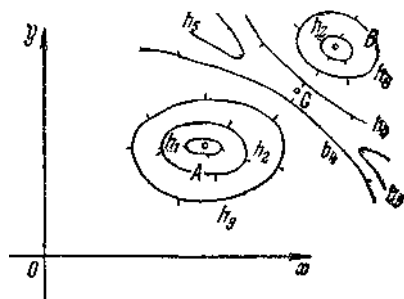


Рис. 20.

Из рис. 20 видно, что рассматриваемый график имеет «вершины» в точках *A* и *B* (причем в *A* более высокую), в точке *C*—*перевал* и т. п.

2. Область определения. *Область определения функции* $z = f(x, y)$ — это область изменения независимых переменных x, y . Если независимые переменные непрерывные, то ею служит или вся плоскость аргументов, или некоторая ее область, или, наконец, совокупность некоторого числа областей на плоскости x, y . При этом под *областью* на плоскости x, y понимается совокупность точек, *связная*, т. е. состоящая из одного куска, и *не вырождающаяся*, т. е. не линия и, тем более, не точка. Иногда различают области *замкнутые*, если граничная линия причисляется к области, и *открытые* — в противном случае; можно сказать, что области на плоскости играют ту же роль, как интервалы на прямой.

Например, для функции $z = x + y$ область определения — это вся плоскость x, y . Для функции $z = \sqrt{y - x}$, если допускать только вещественные значения z , область определения получается из неравенства $y - x \geq 0$, т. е. $y \geq x$. Для функции $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ область определения получается из неравенства $x^2 + y^2 < 1$ и т. п. Эти области показаны на рис. 21.

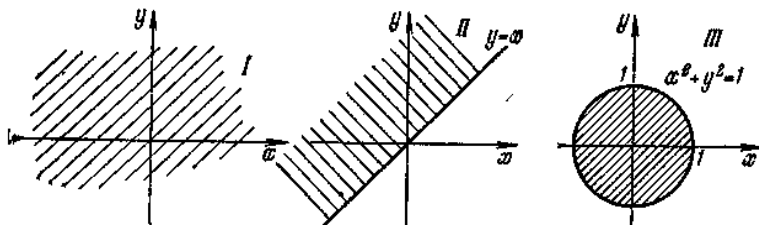


Рис. 21.

3. Линейная функция. *Линейная функция* двух переменных имеет вид

$$z = ax + by + c, \quad (37)$$

где a, b, c — постоянные коэффициенты. Легко получить формулу для ее приращения

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y;$$

аналогичная формула справедлива для линейной функции любого числа переменных.

Так как формула (37) имеет три коэффициента, то при *линейной аппроксимации*, т. е. при приближенной замене некоторой функции на линейную, требуется три условия. Пусть, например, известны значения некоторой функции $f(x, y)$:

$$f(x_1, y_1) = z_1; \quad f(x_2, y_2) = z_2; \quad f(x_3, y_3) = z_3.$$

Если мы хотим построить линейную функцию (37), принимающую такие же значения, т. е. произвести *линейную интерполяцию*, заменив функцию f на (1), то должно быть

$$\left. \begin{aligned} ax_1 + by_1 + c &= z_1; \\ ax_2 + by_2 + c &= z_2; \\ ax_3 + by_3 + c &= z_3. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Из этой системы уравнений мы находим коэффициенты. Такая замена f на (37) дает неплохие результаты внутри треугольника с вершинами (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) (рис. 22), если он невелик, чтобы не слишком проявлялась нелинейность функции f , и не имеет слишком острых углов. (В пределе, когда один из углов равен нулю, треугольник вырождается в отрезок, а определитель системы (38) обращается в нуль и вычисления неприменимы.)

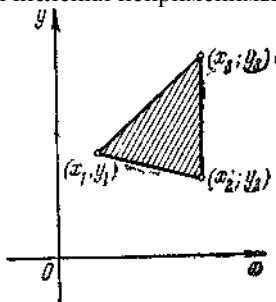


Рис. 22.

При замене f на (37) вне указанного треугольника (*линейная экстраполяция*) ошибка при удалении от него, вообще говоря, возрастает.

Аналогично производится линейная интерполяция в случае любого числа переменных.

4. *Непрерывность и разрывы.* Понятие непрерывности функции $z=f(x, y)$ совершенно аналогично тому, которое было дано для случая функции одного переменного. Приведем, например, такое определение непрерывности: функция f называется *непрерывной* при значениях аргументов $x=x_0, y=y_0$, если в процессе, когда $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ (произвольным образом), будет $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0)$.

В противном случае функция f называется *разрывной* при указанных значениях аргумента, а точка с координатами (x_0, y_0) на плоскости аргументов называется *точкой разрыва* этой функции.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Отметим, что наряду с отдельными точками разрыва функции могут иметь целые *линии разрыва*, т. е. линии, целиком состоящие из точек разрыва. Например, из двух функций

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \text{и} \quad z = \frac{1}{(y-x)^2}$$

первая имеет единственную точку разрыва $(0; 0)$, а вторая—целую линию разрыва (прямую) $(y-x)^2 = 0$, т. е. $y = x$. Линии уровня этих функций показаны на рис. 23.

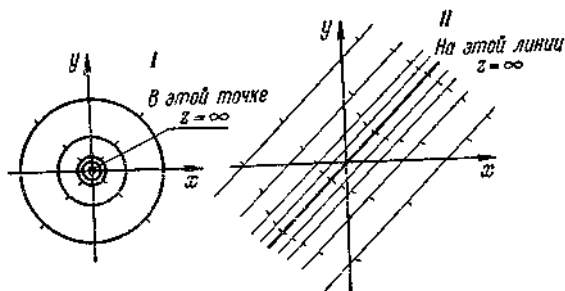


Рис. 23.

В обоих случаях в самих точках разрыва функции обращаются в бесконечность. Однако, как и в случае функций одного переменного, бывают и другие виды разрывов. В практических задачах довольно часто встречаются такие линии разрыва, что при приближении к любой точке этой линии с одной стороны функция имеет один конечный предел, а при приближении к той же точке с другой стороны — другой конечный предел. В этом случае функция имеет при переходе через эту линию конечный скачок; примерный график такой функции изображен на рис. 24.

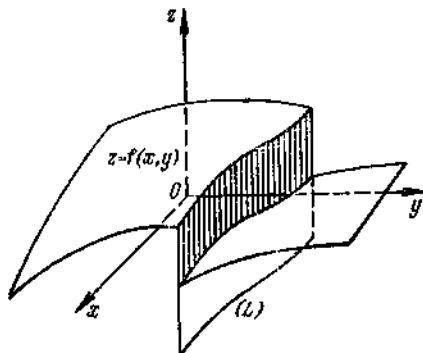


Рис. 24

(L)-линия разрыва функции f - лежит в плоскости xOy

Поведение функции при приближении к точке разрыва может существенно зависеть от способа этого приближения: так, при приближении по одним путям может существовать предел функции, зависящий от выбора пути, при приближении по другим путям может не существовать ни конечного, ни бесконечного предела и т. д. Так как способов приближения к точке разрыва имеется бесконечное число (тогда как для функций одного переменного имеется лишь два основных способа приближения к точке разрыва — справа или слева), то в целом точки разрыва функций нескольких переменных имеют более сложный вид, чем для функций одной переменной. Например, функция

$$z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

имеет единственную точку разрыва там, где знаменатель обращается в нуль, т. е. при $x = 0, y = 0$. Если теперь $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ и обозначить $y/x = k$, т. е. $y = kx$, то получим $z = \frac{2xkx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$, т. е. предел зависит от соотношения между y и x (рис. 25).

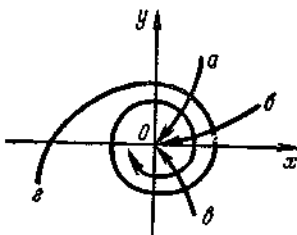


Рис. 25

При приближении по направлению a предел z равен 1; по направлению b - равен 0; по направлению c - равен -1 ; по по спирали z предела не существует.

Если при приближения к некоторой точке пет единого конечного или бесконечного предела функции, то при вычислении предела нужно указывать способ такого приближения.

Свойства непрерывных функций двух переменных на замкнутой конечной области аналогичны тем, которые были описаны для функций одного переменного на замкнутом конечном интервале.

Иногда возникает задача о решении неравенств вида $f(x, y) > 0$. Это делается аналогично решению неравенства; на плоскость x, y надо нанести линию $f(x, y) = 0$ и линии разрыва функции f , если они имеются. Все эти линии разобьют плоскость на части, в каждой из которых функция f сохраняет знак; каков этот знак, можно узнать, определяя знак функции в какой-нибудь точке каждой из этих

Решим, например, неравенство

$$\frac{x^2 + y^2 - 4}{x + y} > 0. \quad (39)$$

Здесь *линией нулей* функции служит окружность $x^2 + y^2 - 4 = 0$, а линией разрыва—прямая $x + y = 0$. Вместе они делят плоскость на четыре части (рис. 26).

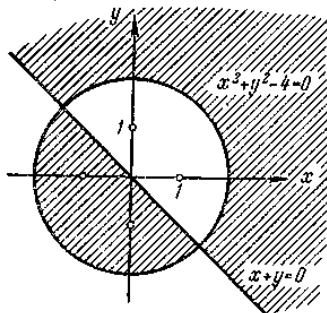


Рис. 26

Беря в каждой из этих частей по точке, например $(-3, 0)$, $(-1; 0)$, $(1; 0)$ и $(3; 0)$, определяем знак функции $(-, +, -$ и $+)$. На рис. 26 области, в которых неравенство (39) справедливо, заштрихованы.

5. Неявные функции. Определение неявной функции двух переменных аналогично тому, какое было дано для функций одной переменной. Неявная функция $z(x, y)$ задается уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (40)$$

Здесь функция $z(x, y)$ может получиться многозначной, и тогда приходится рассматривать ее однозначные ветви.

Уравнение (40) может определять поверхность любой формы, тогда как поверхность, заданная уравнением $z=f(x, y)$, протыкается любой прямой, параллельной оси z , не более чем в одной точке (см. рис. 18).

2.4.2. Функции любого числа переменных

6. Способы задания. Основные понятия, относящиеся к аналитическому виду функции, к ее свойствам, переносятся и на функции любого числа переменных. В то же время при исследовании таких функций имеются дополнительные трудности. Прежде всего табличный и графический способы задания этих функций становятся чрезвычайно громоздкими. Правда, функцию трех переменных можно задавать при помощи системы таблиц с двумя входами (см. п. 1) или набора картинок вида рис. 17 или 20, но и это очень трудно.

Однако в отдельных случаях вычисление значений функции большого числа переменных может быть сведено к вычислению значений нескольких функций меньшего числа переменных. Тогда можно широко применять способы, описанные в п. 1. Например, функция четырех переменных вида $u = f(x, y) + \varphi(z, t)$ требует для своего вычисления или наглядного представления таблиц или графиков для функций f и φ , каждая из которых зависит лишь от двух переменных. Аналогично функция четырех переменных вида $u = f[\varphi(x) + y, \psi(z) - t]$ требует задания одной функции двух переменных и двух функций одной переменной и т. п. В этих случаях вычисление и исследование функции значительно облегчаются. К сожалению, далеко не всякую функцию можно представить в подобном виде.

7. Функции трех переменных. Другая трудность возникает при геометрическом истолковании функции, так как в пространстве «не хватает размерности». Сравнительно лучше дело обстоит для функций трех переменных $u=f(x, y, z)$. В этом случае областью определения

служит или все *пространство аргументов* x, y, z , или некоторая его часть, т. е. одна или несколько *областей* в пространстве x, y, z (см. п. 2, где понятие невырожденности должно быть естественно изменено), и потому эту область определения можно представить вполне наглядно. Например, для функции $u = x^2 + y^2 - z$ областью определения служит все пространство, тогда как функция $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ определена, только если

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad |r| \leq 1,$$

т. е. в данном случае областью определения служит шар радиуса 1 с центром в начале координат.

Аналогично п. 1 можно рассматривать *поверхности уровня* функции $f(x, y, z)$, т. е. такие поверхности в пространстве x, y, z , на которых эта функция постоянна, $f(x, y, z) = \text{const}$.

Точки разрыва, если они имеются, находятся в пространстве аргументов и потому их также можно представить наглядно. При этом для функции трех переменных могут быть отдельные точки, линии и даже целые *поверхности разрыва*, т. е. поверхности, целиком состоящие из точек разрыва. Например, **при изучении различных сред многие из рассматриваемых величин имеют разрывы на поверхностях раздела (вода — воздух, стекло — воздух и т. п.)**.

8. Общий случай. Понятие о пространстве аргументов очень наглядное, поэтому желательно сохранить представление об этом пространстве и для случая функций любого числа независимых переменных, даже большего трех. Это делается с помощью многомерного числового пространства. Пусть, например, рассматривается функция четырех переменных $w = f(x, y, z, u)$. Тогда каждый набор значений x, y, z, u определяет точку в пространстве E_4 . Строго говоря, он и является такой точкой. Таким образом, *пространством аргументов* в данном случае служит E_4 , областью определения функции f служит область пространства E_4 или совокупность некоторого числа таких областей. Эта функция может быть непрерывной либо иметь отдельные точки, линии, двумерные поверхности или трехмерные гиперповерхности разрыва.

«График» функции $u = f(x, y, z, t)$ уже требует пятимерного пространства аргументов и функции x, y, z, t, u ; для нахождения точек этого графика надо придавать x, y, z, t произвольные значения и находить соответствующие значения u . [Например, легко проверить, что график функции $u = xz - 2y^2t$ проходит через точки (1; 1; 2; 0; 2), (—1; 2; 0; —2; 16) и т. п.] Поэтому в п. 7, когда мы говорили о функциях трех переменных, наглядное геометрическое истолкование допускало только пространство аргументов, но не график: он

содержится в четырехмерном пространстве E_4 , которому мы непосредственно наглядного истолкования не даем.

Многомерное пространство допускает менее формальное истолкование, чем числовое пространство.

9. Поле. Говорят, что в *пространстве задано поле некоторой величины*, если в каждой точке пространства или некоторой его области определено значение этой величины. Например, при рассмотрении потока газа приходится исследовать температурное поле (в каждой точке температура имеет определенное значение), поле плотностей, поле скоростей и т. д. Поле может быть *скалярным* или *векторным* в зависимости от характера исследуемой величины: например, поля температур или плотностей являются скалярными, а поля скоростей или сил — векторными. Поле может быть *стационарным* (*установившимся*), если в каждой точке пространства оно не меняется с течением времени, или *нестационарным* (*неустановившимся*), если такое изменение имеет место.

Обозначим рассматриваемую, для определенности, скалярную величину буквой u , а произвольную (текущую) точку пространства буквой M . Тогда каждому положению точки M отвечает численное значение величины u , т. е. u можно считать *функцией точки M* , $u=f(M)$. Конечно, это — функция иного рода, чем те, которые мы рассматривали ранее, **так как точка не является величиной**. Но оказывается, что о функции, в расширенном понимании этого термина, можно говорить всегда, когда **имеется определенный закон, согласно которому объектам одного «сорта» (в данном случае точкам пространства) отвечают, соответствуют объекты другого «сорта» (в данном случае значения величины u)**. Если поле нестационарное то $u=f(M, t)$.

Легко перейти от функции точки к функции трех переменных — трех пространственных координат. Для этого достаточно ввести декартову систему координат x, y, z в пространство. Тогда положение точки M в пространстве будет полностью характеризоваться значениями x, y, z , т. е. можно написать $u = u(x, y, z)$; наоборот, в заданной системе координат x, y, z любую функцию от x, y, z можно рассматривать как функцию точки. Однако надо иметь в виду, **что поле $u=f(M)$ (функция точки M) имеет смысл и может быть исследовано без всяких систем координат**. Кроме того, если вводить системы координат различным способом, то зависимости $u(x, y, z)$ получатся, вообще говоря, различными для одной и той же функции точки $u=f(M)$, т. е. при рассмотрении поля функция точки является *первичной* по отношению к функции координат этой точки. Если **исследуемая величина по своему смыслу задана в плоскости, то**

соответствующее поле называется *плоским*; такие поля получаются, например, при исследовании **тепловых процессов в пластинке**, толщиной которой мы пренебрегаем.

Если поле величины u пространственное, но в некоторой декартовой системе координат x, y, z эта величина окажется не зависящей от z , то поле называется *плоскопараллельным*. **В таких случаях часто можно отвлечься от координаты z и рассматривать поле только в плоскости x, y , т. е. рассматривать плоскопараллельное поле как плоское, помня о том, что во всех параллельных плоскостях поле имеет в точности тот же вид.**

3. Векторные величины

3.1. Векторы и скаляры

Величины, для определения которых достаточно знать одно число (положительное, отрицательное или нуль), называются *скалярами*. Таковы температура, плотность, масса, работа силы. Сравниваться могут скаляры одинаковой размерности. Два скаляра одинаковой размерности равны, если их знаки и численные значения, получающиеся при измерении одной и той же единицей измерения, одинаковы.

Часто приходится иметь дело с величинами, для определения которых, кроме численного значения, необходимо указать направление в пространстве. Это перемещение, скорость, ускорение, сила, момент силы, напряжение электрического поля, диэлектрическая поляризация и т. п. Изучение такого рода величин приводит к понятию вектора. (Вектор – направленный отрезок от латинского слова *vehere* – влечь).

Действия над векторами подчиняются правилам векторной алгебры, которые будут приведены ниже.

Многие величины, рассматриваемые в математике и физике, имеют более сложную структуру, чем векторы и скаляры. Для определения их недостаточно знать числовые значения и направления. Такие величины называются **тензорами второго и высших рангов**. Так, совокупность векторов упругих напряжений на всевозможных площадках, которые можно провести через некоторую точку в упругом теле, приводит к понятию тензора 2-го ранга упругих напряжений, анализ деформаций произвольного элементарного объема упругого тела — к понятию тензора деформаций.

Вначале более подробно остановимся на векторах.

Вектор A изображается отрезком прямой, направление которого совпадает с направлением рассматриваемой величины, а длина в выбранном масштабе характеризует ее численное значение (модуль вектора $A = |A|$).

Нулевым вектором называется вектор, модуль которого равен нулю. Такому вектору нельзя приписать определенное направление; он может иметь любое направление в пространстве. Для обозначения нулевого вектора применяется обычный ноль.

Сравнивать можно только векторы, имеющие одинаковую размерность, т.е. одинаковый физический или геометрический смысл. При сравнении двух векторов одинаково существенны как величины, так и направления их.

Два вектора A и B одинаковой размерности равны, если модули их одинаковы и направления совпадают. Тогда пишут $A = B$.

Векторы свободные, скользящие, связанные. Иногда различают векторы свободные, скользящие и связанные.

Свободный вектор можно переносить параллельно самому себе и прилагать в любой точке (например, скорость поступательного движения тела).

Свободный вектор (рис. 1, а) в пространстве полностью определяется тремя числами, например, тремя его проекциями на оси декартовой системы координат; его можно задать величиной (длиной отрезка, модулем вектора) и двумя независимыми углами, образуемыми вектором с осями координат и т. п.

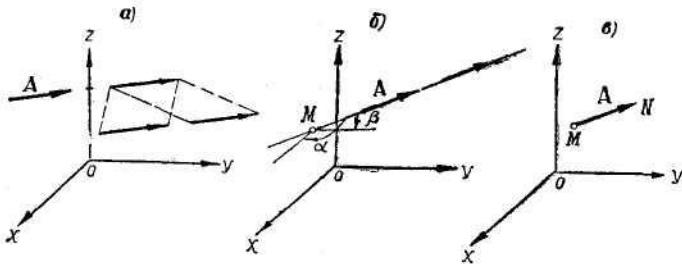


Рис. 1. Свободные и скользящие векторы:

- а) свободный вектор может быть перенесен параллельно самому себе;
- б) скользящий вектор может быть перенесен по линии его действия;
- в) связанный вектор.

Скользящие векторы можно переносить по прямой, определяющей направление вектора (например, вектор силы, приложенной к твердому телу). Скользящий вектор (рис. 1, б) требует для своего определения в пространстве пяти чисел, например, координат точки M пересечения прямой, на которой лежит вектор, с какой-либо координатной плоскостью (два числа), длины вектора (одно число) и двух независимых углов α и β с осями (два числа).

Связанный вектор относится к определенной точке (например, скорость и ускорение точки твердого тела, движущегося произвольным образом). Связанный вектор (рис. 1, в) определяется шестью числами, например, координатами начала и конца вектора (точки M и N).

Свободные векторы являются наиболее общим случаем задания величин, определяемых численным значением и направлением.

3.2. Сложение и вычитание векторов. Проекция вектора на ось

Сложение векторов и его свойства.

Определением векторного сложения служит следующее правило. Суммой двух векторов (A и B) является третий вектор (C), изображаемый диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах (рис. 2, а).

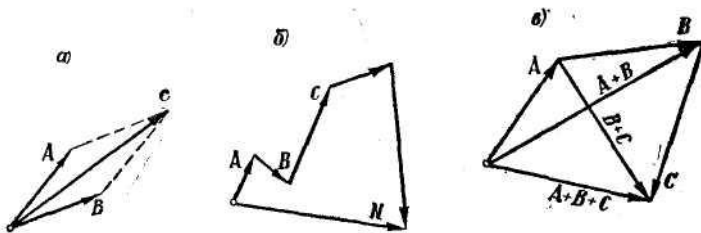


Рис. 2. Сложение векторов:

- а) сумма двух векторов;
- б) сумма нескольких векторов;
- в) ассоциативность векторного сложения:

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C).$$

Следствием этого определения является правило суммирования нескольких векторов:

Суммой нескольких векторов (A, B, C, ...) является вектор (N), представляющий замыкающую многоугольника, построенного на слагаемых векторах (рис. 2,б).

Это правило приобретает ясный физический смысл, если под слагаемыми векторами понимать последовательные перемещения некоторой точки в пространстве. Тогда их сумма будет результатом этих последовательных перемещений и даст общее перемещение точки.

Из определения векторного сложения следует, что действие сложения векторов обладает характерными свойствами обычного алгебраического суммирования, а именно:

1) *коммутативностью*, т.е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

2) *ассоциативностью*, т.е.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}.$$

Таким образом, *при векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и сумму более чем двух векторов можно писать без скобок (рис. 2, в).*

Что касается сложения любого вектора с нулем, то справедливо правило

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}.$$

Величина вектора характеризуется численным значением и направлением. Это необходимый, но отнюдь не достаточный признак того, что данная величина является вектором. Она обязательно должна подчиняться действиям векторной алгебры, в частности векторному (геометрическому) сложению.

Для иллюстрации этого положения рассмотрим поворот твердого тела вокруг некоторой оси; он может быть представлен отрезком, равным по величине углу поворота и направленным по оси вращения, например, в ту сторону, откуда поворот виден против хода часовой стрелки. Однако можно показать, что такие отрезки не подчиняются правилу векторного сложения, причем их сумма зависит от порядка слагаемых.

А. Пусть сфера (рис. 3, а) повернулась вокруг оси Oy на угол α_1 так, что некоторая точка сферы из положения A_1 переместилась в положение A_2 ; изобразим этот поворот в виде направленного отрезка α_1 . Пусть второй поворот сферы совершается вокруг оси Oz на угол α_2 , так что точка перейдет из положения A_2 в A_3 .

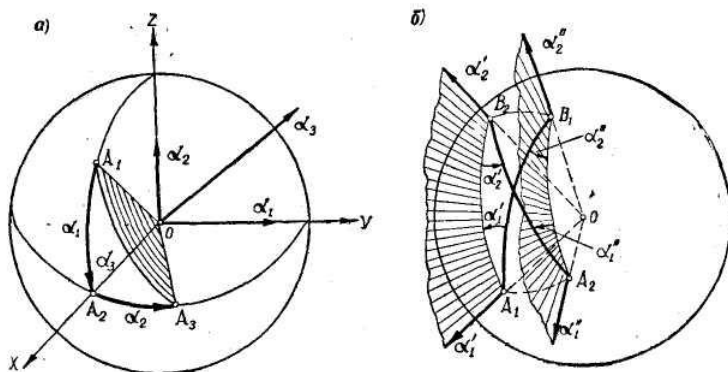


Рис. 3. Конечные повороты твердого тела

Этот поворот изобразится направленным отрезком α_2 . Тогда по определению введенных нами направленных отрезков поворот сферы, переводящий точку из положения A_1 в A_3 , с одной стороны, должен быть суммой отрезков α_1 и α_2 , а с другой — изображен отрезком α_3 перпендикулярным к плоскости A_1OA_3 . Поскольку α_3 не лежит в плоскости zOy , этот отрезок не может быть суммой α_1 и α_2 . Этот пример особенно нагляден для случая

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2.$$

Б. Поворот сферы, переводящий некоторую дугу на ней из положения A_1B_1 в положение A_2B_2 , может быть осуществлен двумя путями (рис. 3,б):

а) поворот вокруг оси OA_1 на угол α'_1 , («вектор» α'_1) + поворот вокруг оси OB_2 на угол α'_2 («вектор» α'_2);

б) поворот вокруг оси OB_1 на угол α''_2 («вектор» α''_2) + поворот вокруг оси OA_2 на угол α''_1 («вектор» α''_1).

Хотя слагаемые поворота равны по величине и изменение их последовательности не меняет результата (дуга из A_1B_1 перейдет в A_2B_2), нетрудно видеть, что изображение поворота в виде векторов влечет за собой некоммутативность суммы «векторов», т. е.

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 \neq \alpha''_2 + \alpha''_1$$

В противоположность конечным поворотам твердого тела, бесконечно малые повороты являются векторами .

Вычитание векторов и нулевой вектор. Рассмотрим действие вычитания векторов.

Под вектором $-A$ (минус A) подразумевается вектор, величина которого равна величине вектора A , а направление противоположное. Будем считать в этом случае, что векторы A и $-A$ *противоположны*. Очевидно, вектор, равный своему противоположному вектору, есть нулевой.

Вычитание как действие, обратное сложению, сводится к определению одного из слагаемых X по известной сумме A и другому слагаемому — вектору B :

$$B + X = A$$

Используя понятие противоположных векторов, нетрудно получить

$$X = A + (-B) = A - B.$$

Таким образом, *вычитание векторов сводится к сложению уменьшаемого с вектором, противоположным вычитаемому* (рис. 4).

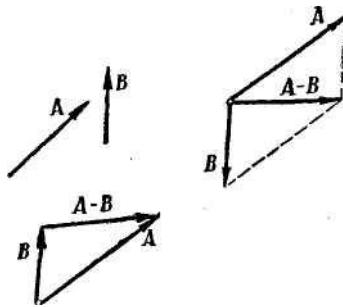


Рис. 4. Построение разности двух векторов

Проекция вектора на ось. Проекцией A_u вектора A на ось (u) (рис. 5) называется длина отрезка, отсекаемого на этой оси перпендикулярными к ней плоскостями, проведенными через концы вектора A . Эта длина отрезка берется со знаком плюс, если направление от проекции начала вектора на ось к проекции его

конца совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус — а противном случае.

Ортом оси (u) называется вектор u_0 , направленный в положительную сторону оси и равный по величине единице, т. е.

$$u_0 = |u_0| = 1$$

Обозначим угол (угол между векторами всегда берется в пределах от 0 до π) между вектором A и u_0 через $\varphi = (A, u_0)$. Проекцию A_u вектора A на ось (u) можно вычислять по формуле

$$A_u = A \cos \varphi = A \cos (A, u_0).$$

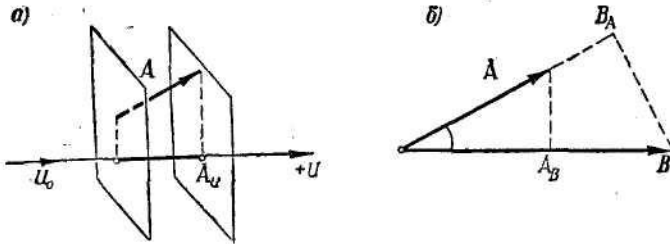


Рис.5. Проекция вектора:

а) проекция вектора на ось; б) проекция одного вектора на направление другого.

Действительно, легко видеть, что $|A \cos \varphi|$ всегда дает длину отрезка оси (u) между плоскостями, проведенными через концы вектора перпендикулярно к оси. Если $\varphi < \pi/2$, то направление от проекции начала вектора к проекции конца вектора совпадает с положительным направлением (u). В этом случае $\cos \varphi > 0$, так что и $A_u > 0$. Если $\varphi > \pi/2$, то $\cos \varphi < 0$ и $A_u < 0$ в соответствии с определением проекции.

Следовательно, проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением оси.

Нетрудно показать, что проекция суммы векторов на какую-либо ось равна сумме проекций слагающих этой суммы на эту же ось.

3.3. Умножение вектора на скаляр. Линейная зависимость векторов. Разложение вектора

Умножение вектора на скаляр. Произведение вектора A на скаляр m представляет собой вектор B , модуль которого в $|m|$ раз больше модуля вектора A , а направление совпадает с A при $m > 0$ и противоположно A , если $m < 0$.

Таким образом,

$$mA = B; |B| = B = |m| \cdot |A| = |m|A.$$

В частном случае $m = -1$, векторы B и A противоположны.

Векторы A и mA параллельны между собой. Они представляют простейший случай линейно зависимых векторов. Умножение вектора на число удовлетворяет правилам:

$$\begin{aligned} m(nA) &= (mn)A, \\ m(A+B) &= mA+mB, \\ (m+n)A &= mA+nB. \end{aligned}$$

Линейная зависимость векторов. Векторы коллинеарные и компланарные.

Векторы A, B, C, \dots (всего n) называются линейно зависимыми, если существуют скаляры $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$, не все равные нулю, такие, что

$$c_1A + c_2B + c_3C + \dots + c_nN = 0,$$

т.е. если существует линейная комбинация векторов, обращаящаяся в нуль.

Два линейно зависимых вектора параллельны между собой.

Действительно, пусть $c_1A + c_2B = 0$, причем, по крайней мере, $c_2 \neq 0$. Тогда, обозначая $c_1/c_2 = -m$, получим $B = mA$. Отсюда следует параллельность векторов A и B . Такие векторы называются *коллинеарными*.

Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (или параллельны одной плоскости).

Действительно, пусть $c_1A + c_2B + c_3C = 0$, причем, по крайней мере, $c_3 \neq 0$. Тогда, обозначая $c_1/c_2 = -m$, $c_2/c_3 = -n$, получим

$$C = mA + nB.$$

Отсюда следует, что вектор C лежит в одной плоскости с векторами A и B (ибо C является суммой векторов mA и nB , коллинеарных A и B). Такие векторы называются *компланарными*.

Разложение векторов. Рассмотрим два принципиально важных утверждения, касающихся представления любого вектора в виде линейной комбинации двух или трех других векторов (разложение вектора по двум или трем другим векторам).

1. Если два вектора A и B линейно независимы (не являются коллинеарными векторами), то любой вектор C , компланарный с A и B , может быть единственным образом разложен по этим векторам, т. е. справедлива формула

$$C = mA + nB. \quad (1)$$

Поскольку векторы A, B, C компланарны, имеет место равенство

$$c_1A + c_2B + c_3C = 0 \quad (*)$$

Так как векторы A и B по условию линейно независимы, то $c_3 \neq 0$. Разделив (*) на c_3 и обозначив $c_1/c_3 = -m, c_2/c_3 = -n$, получим разложение (1). Покажем, что оно единственно. Пусть наряду с (1) имеет место другое разложение:

$$C = m'A + n'B.$$

Вычитая это равенство из (1), получим $(m - m')A + (n - n')B = 0$. Отсюда следует, что $m = m', n = n'$, ибо по условию A и B линейно независимые векторы.

Таким образом, разложение (1) единственно.

2. Если три вектора A, B, C линейно независимы (не являются компланарными векторами), то любой вектор D может быть единственным образом разложен по этим векторам, т. е. справедлива формула

$$D = mA + nB + pC. \quad (2)$$

Отложим четыре вектора A, B, C, D от общего начала O (рис.6).

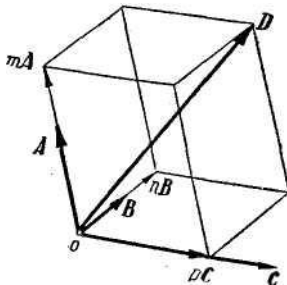


Рис.6. Разложение векторов.

Через конец вектора D проведем плоскости, параллельные плоскостям векторов A и B , A и C , B и C ; эти три плоскости вместе с плоскостями векторов A и B , A и C , B и C образуют параллелепипед. Одной из диагоналей этого параллелепипеда является вектор D . Векторы A , B и C , исходящие из начала O , направлены соответственно по трем его ребрам. В силу коллинеарности векторов A , B , C и mA , nB , pC , имеющих модули, равные длинам ребер параллелепипеда, можно показать справедливость формулы (2).

Если наряду с разложением (2) имеет место также и разложение

$$D = m'A + n'B + p'C,$$

то

$$(m - m')A + (n - n')B + (p - p')C = 0.$$

Отсюда $m = m'$, $n = n'$, $p = p'$, ибо по условию A , B , C — линейно независимые векторы.

Таким образом, из (2) следует: *любые четыре вектора в трехмерном пространстве линейно зависимы*.

Векторный базис. Система любых трех линейно независимых векторов e_1 , e_2 , e_3 образует, по определению, базис трехмерного пространства.

В силу доказанного выше, тройка базисных векторов обладает тем свойством, что для всякого вектора A существует разложение

$$A = me_1 + ne_2 + pe_3, \tag{3}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Подчеркнем, что в качестве базиса могут быть выбраны три *любых некопланарных вектора*. Откладывая тройку базисных векторов e_k ($k = 1, 2, 3$) от общего начала O и обозначая через Ox_k прямые, на которых лежат базисные векторы (k — индекс, а не степень; удобство такого обозначения станет ясным из дальнейшего), получим косоугольную декартову систему координат с осями Ox^1 , Ox^2 , Ox^3 и началом O (рис. 7).

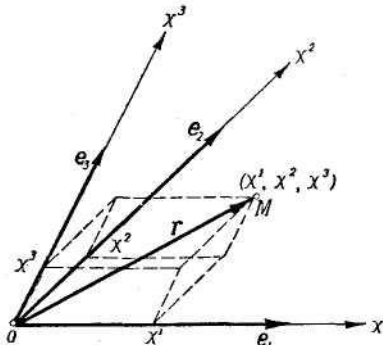


Рис. 7. Координатный базис косоугольной декартовой системы координат.

Базисные векторы e_k называются *масштабными векторами*, а концы этих векторов, отложенных от начала координат, — *единичными точками* осей координат.

Если базисные векторы e_1, e_2, e_3 взаимно-ортогональны и модули их равны единице, то они называются *ортами* прямоугольной декартовой системы координат и обозначаются через i_1, i_2, i_3 для осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 (рис. 7).

Положение точки M в пространстве определяется ее *радиусом-вектором* r . Это вектор $r(M)$, проведенный из начала координат в точку M (рис. 7 и 8).

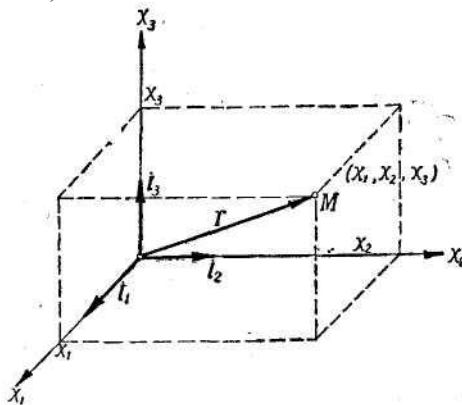


Рис. 8. Координатный базис прямоугольной декартовой системы координат и представление радиуса-вектора точки.

Координатами точки M в прямоугольной декартовой системе координат будут расстояния (со знаком) x_1, x_2, x_3 до плоскостей $x_2Ox_3, x_3Ox_1, x_1Ox_2$, и поэтому

$$\mathbf{r} = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3.$$

Одно из важнейших достоинств векторного исчисления состоит в том, что уравнения, описывающие то или иное физическое явление, можно формулировать безотносительно к координатным системам. Однако при решении конкретных задач, всегда связанных с вычислениями, каждую задачу обычно преобразуют к виду, содержащему скалярные величины. Это можно сделать, пользуясь подходящей (удобной) системой координат, когда векторное (тензорное) уравнение разлагается на эквивалентную систему скалярных уравнений, содержащих только скаляры (числа), подчиняющиеся правилам арифметического счета.

Каждое такое разложение связано с выбором подходящего базиса, который строится в соответствии с выбранной системой координат. На практике чаще всего пользуются прямоугольными системами координат — прямолинейной (декартовой) или криволинейными: цилиндрическими, сферическими, эллиптическими и т. п. **В прямолинейной системе координат базисные векторы одинаковы во всех точках по величине и направлению, в криволинейных — направления базисных векторов меняются от точки к точке.**

Рассмотрим сначала для простоты точку на плоскости — ее положение полностью определяется радиусом-вектором \mathbf{r} относительно некоторой фиксированной точки (полюса) O , который, конечно, не связан ни с какой системой координат и не зависит от нее. Чтобы производить вычисления, нужно выбрать какую-либо систему координат, и тогда положение точки на плоскости будет определяться двумя числами-координатами: назовем их p и q . Эти числа уже будут зависеть от принятой системы координат, от принятой системы отсчета.

В прямоугольной декартовой системе координат, например, это будут расстояния (со знаком) $p \equiv x_1$ и $q \equiv x_2$ до двух взаимно-перпендикулярных прямых, проходящих через начало координат.

Если сохранять постоянным значение одной координаты, например, $p = \text{const}$, и изменять непрерывно другую, получим координатную линию. Через каждую точку на плоскости про-

ходят две координатные линии. В прямоугольной декартовой системе это прямые, параллельные осям координат.

Если определять положение точки на плоскости двумя такими числами — расстоянием R ($0 \leq R < +\infty$) от некоторой фиксированной точки O на плоскости (полюса) и углом θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) между прямой, проведенной из полюса O в рассматриваемую точку, и фиксированной полупрямой из полюса (полярной осью), получим так называемую полярную систему координат. Координатные линии — это окружности радиуса $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и полупрямые (лучи) $\Theta = \arctg \frac{x_2}{x_1}$,

и обратно: $x_1 = R \cos \theta$, $x_2 = R \sin \theta$ (предполагается, что начало декартовых прямоугольных координат совпадает с полюсом и ось Ox_1 — с полярной осью). В этой системе криволинейных координат направления базисных векторов в каждой точке различны, но пересекаются все они под прямым углом — полярная система координат ортогональна (рис. 9, а).

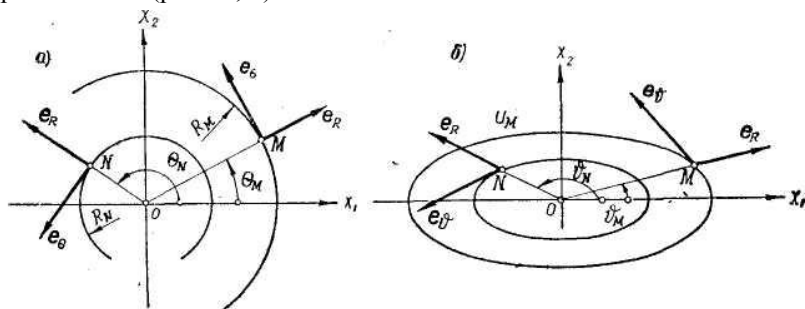


Рис. 9. Криволинейные системы координат на плоскости.

Координатными линиями обобщенной полярной системы координат являются эллипсы

$$u^2 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$$

и лучи

$$\vartheta = \arctg \frac{a}{b} \frac{x_2}{x_1}$$

($0 \leq u < +\infty$, $0 \leq \vartheta < 2\pi$; $a > 0$; $b > 0$; $a \neq b$); обратно:
 $x_1 = au \cos \vartheta$, $x_2 = bu \sin \vartheta$.

Подчеркнем еще раз, что при решении конкретных задач обычно пользуются ортогональными системами координат. Однако многие свойства их становятся значительно яснее, если рассматривать их как предельный случай обобщенных криволинейных координат, базис которых не прямоугольный, а координатные линии не прямые. Поэтому в дальнейшем основные свойства векторов (тензоров) рассматриваются главным образом в декартовой прямоугольной системе координат, хотя в некоторых местах применяются неортогональные базисы.

Прямое и обратное преобразование векторов двух произвольных базисов с общим началом. Пусть в некоторой точке O выбраны два векторных базиса (e_1, e_2, e_3) и (e'_1, e'_2, e'_3) . Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса, и наоборот (рис. 10).

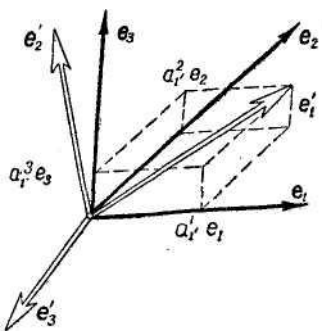


Рис. 10 Разложение вектора e'_1 по векторам e_1, e_2, e_3 .

Обозначим через $\alpha_i^1, \alpha_i^2, \alpha_i^3$ (цифры вверху — индексы) коэффициенты разложения вектора e'_i по векторам базиса e_1, e_2, e_3 , будем называть эти девять ($i = 1, 2, 3$) величин *коэффициентами прямого преобразования*, так что в соответствии с (3)

$$\begin{aligned}
 e'_1 &= \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \alpha_1^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_1^k e_k, \\
 e'_2 &= \alpha_2^1 e_1 + \alpha_2^2 e_2 + \alpha_2^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_2^k e_k, \\
 e'_3 &= \alpha_3^1 e_1 + \alpha_3^2 e_2 + \alpha_3^3 e_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_3^k e_k,
 \end{aligned} \tag{4}$$

или в общем виде

$$e'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k e_k.$$

Аналогично коэффициенты разложения вектора e_i по векторам e'_1, e'_2, e'_3 обозначим через $\alpha_j^{1'}, \alpha_j^{2'}, \alpha_j^{3'}$ ($j = 1, 2, 3$), и эти девять величин будем называть *коэффициентами обратного преобразования*:

$$e_j = \sum_{k=1}^3 \alpha_j^{k'} e'_k. \tag{5}$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразований существует связь. Подставив разложение каждого вектора e_k из (5) в (4), после перегруппировки слагаемых найдем

$$\begin{aligned}
 e'_i &= \alpha_i^1 e_1 + \alpha_i^2 e_2 + \alpha_i^3 e_3 = \alpha_i^1 (\alpha_1^{1'} e'_1 + \alpha_1^{2'} e'_2 + \alpha_1^{3'} e'_3) + \\
 &+ \alpha_i^2 (\alpha_2^{1'} e'_1 + \dots) + \alpha_i^3 (\alpha_3^{1'} e'_1 + \dots) = (\alpha_i^1 \alpha_1^{1'} + \alpha_i^2 \alpha_2^{1'} + \\
 &+ \alpha_i^3 \alpha_3^{1'}) e'_1 + (\alpha_i^1 \alpha_1^{2'} + \dots) e'_2 + (\alpha_i^1 \alpha_1^{3'} + \dots) e'_3 = \\
 &= e'_1 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^{1'} + e'_2 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^{2'} + e'_3 \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^{3'} = \sum_{k=1}^3 e'_k \sum_{l=1}^3 \alpha_i^l \alpha_l^{k'}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ана

$$e_i = e_1 \sum_{l=1}^3 \alpha_l^{i'} \alpha_l^i + e_2 \sum_{l=1}^3 \alpha_l^{i'} \alpha_l^{2'} + e_3 \sum_{l=1}^3 \alpha_l^{i'} \alpha_l^{3'} = \sum_{k=1}^3 e_k \sum_{l=1}^3 \alpha_l^{i'} \alpha_l^{k'}. \tag{6a}$$

Отсюда ясно, что для каждого значения индекса i ($i = 1, 2, 3$) имеют место следующие 18 соотношений:

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_l^i \alpha_l^{i'} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \tag{7}$$

$$\sum_{l=1}^3 \alpha_l^{i'} \alpha_l^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

3.4. Скалярное и векторное произведения двух векторов

Скалярное произведение. Скалярным произведением $A \cdot B$ двух векторов A и B называется произведение их модулей на косинус угла между векторами.

Таким образом,

$$A \cdot B = AB \cos(A, B).$$

Отсюда также следует, что скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора и проекции другого вектора на направление первого (рис. 5), т.е.

$$A \cdot B = A_B B = AB_A.$$

Скалярное произведение векторов обладает коммутативностью и дистрибутивностью:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ (коммутативность).}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ (дистрибутивность) (рис. 11).}$$

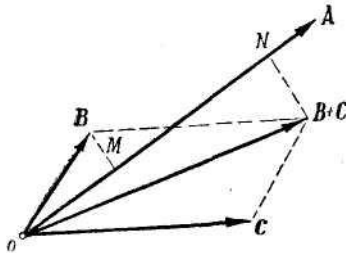


Рис. 11. Дистрибутивность скалярного произведения

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух векторов A и B выражается следующим равенством:

$$A \cdot B = 0.$$

Необходимость и достаточность этого условия очевидна (если $A \perp B$, то $\cos(A, B) = 0$; если один вектор есть нуль, то ему можно приписать направление, перпендикулярное ко второму вектору).

Проекция вектора на ось равна скалярному произведению орта оси на вектор:

$$A_u = A \cdot u_0 = A \cos(A, u_0).$$

Это следует из определения проекции вектора на ось.

Если $(x_1), (x_2), (x_3)$ — оси прямоугольной декартовой системы координат, то любой вектор A может быть разложен по ортам i_1, i_2, i_3 осей, и, следовательно, (см. формулу 2)

$$A = A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3$$

В силу взаимной перпендикулярности координатных осей имеем

$$i_l \cdot i_k = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq k, \\ 1, & \text{если } l = k. \end{cases} \quad (3.8)$$

Тогда

$$A \cdot i_1 = A_1; \quad A \cdot i_2 = A_2; \quad A \cdot i_3 = A_3.$$

Таким образом, A_1, A_2, A_3 суть проекции вектора A на координатные оси.

Итак, любой вектор A может быть записан в виде

$$A = (A \cdot i_1) i_1 + (A \cdot i_2) i_2 + (A \cdot i_3) i_3. \quad (9)$$

Скалярное произведение векторов может быть записано через произведения проекций этих векторов на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_1 i_1 + A_2 i_2 + A_3 i_3) \times \\ &\times (B_1 i_1 + B_2 i_2 + B_3 i_3) = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь использованы свойства дистрибутивности скалярного произведения, формула (9) разложения вектора по осям декартовой системы и условия (8).

Векторное произведение. Векторным произведением $A \times B$ двух векторов называется вектор $C \equiv A \times B$ (рис. 12), направленный перпендикулярно к плоскости векторов-сомножителей в ту сторону, откуда поворот от первого сомножителя ко второму на меньший угол виден против хода часовой стрелки, и равный по величине площади параллелограмма, построенного на этих векторах, т.е.

$$|C| = |A \times B| = AB \sin(A, B). \quad (11)$$

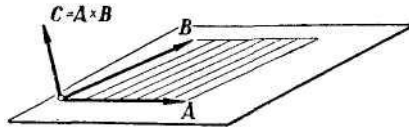


Рис. 12. Векторное произведение

Таким образом, направление векторного произведения соответствует движению правого винта при его вращении от A к B . В отличие от скалярного произведения, векторное произведение не обладает коммутативностью, а именно:

$$A \times B = -B \times A,$$

но, как и скалярное, оно удовлетворяет закону дистрибутивности, т.е. (рис. 13)

$$A \times (B+C) = A \times B + A \times C.$$

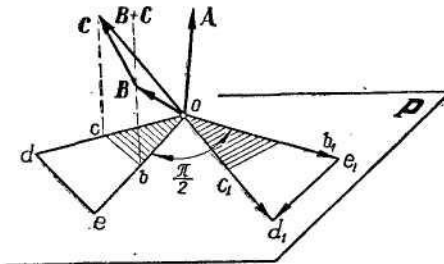


Рис. 13. Дистрибутивность векторного произведения

Необходимое и достаточное условие параллельности двух векторов A и B имеет вид

$$A \times B = 0.$$

Необходимость этого условия следует из того, что $\sin(A, B) = 0$, если $A \parallel B$, а при установлении достаточности следует помнить, что вектору, равному нулю, можно приписать любое направление.

Если принять вышеприведенное определение векторного произведения, то для ортов i_1, i_2, i_3 правой системы координат, в которой оси расположены, как показано на рис. 14,а, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 &= \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \\ \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i}_2; \\ \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 &= \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_3 = 0, \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{i}_k \times \mathbf{i}_l = \mathbf{i}_m; \quad \mathbf{i}_n \times \mathbf{i}_n = 0, \tag{12}$$

где индексы k, l, m составляют циклическую (цикличность перестановки чисел 1,2,3 суть 123, 231, 312) (четную) перестановку чисел 1,2,3.

Можно было бы иначе определить направление векторного произведения: по движению не правого, а левого винта при вращении от A к B . Тогда векторное произведение будет направлено в противоположную сторону. При этом формулы (12) имели бы место в левой системе координат, в которой оси расположены так, как показано на рис. 14,б, а векторное произведение имело бы направление противоположное тому, которое определено для правой системы координат (рис. 14, а).

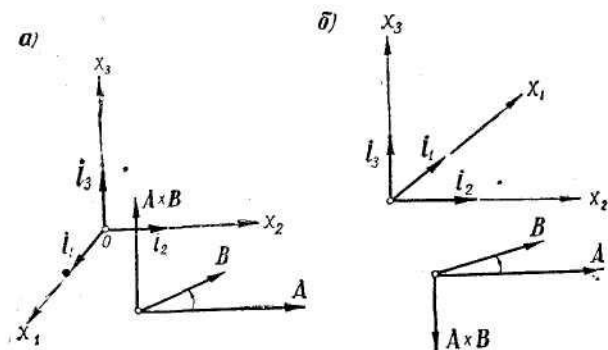


Рис. 14. Направление произведения $A \times B$ в правой (а) и левой (б) системах координат.

Векторы, направление которых устанавливается соглашением и которые в силу этого изменяют свое направление при замене правой системы координат на левую, называются *аксиальными* (момент силы, угловая скорость и т. п.). Векторы, направление которых определяется только

физическим смыслом (сила, скорость и т. п.) и которые в силу этого не меняют своего направления при изменении системы координат, называются *полярными*.

Для определения природы вектора можно представить отражение его в зеркале, перпендикулярном к нему. Если отражение сохраняет направление величины, описывающей явление, то вектор аксиальный (рис. 15).

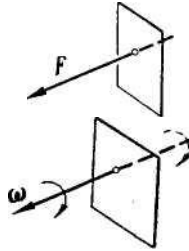


Рис. 3.15. Полярные и аксиальные векторы:

- а) сила \mathbf{F} — полярный вектор: направление ее действия изменяется на противоположное при отражении в зеркале;
 б) угловая скорость ω — аксиальный вектор; вращение сохраняет свое направление при отражении в зеркале.

В дальнейшем всюду мы будем пользоваться только правой системой координат.

Выразим проекции векторного произведения через проекции сомножителей:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3) \times (B_1 \mathbf{i}_1 + B_2 \mathbf{i}_2 + B_3 \mathbf{i}_3) = \\ = \mathbf{i}_1 (A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{i}_2 (A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{i}_3 (A_1 B_2 - A_2 B_1).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} C_1 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2; \\ C_2 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3; \\ C_3 &= (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1, \end{aligned}$$

или

$$C_l = A_k B_l - A_l B_k, \tag{13}$$

где (i, k, l) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Векторное произведение удобно записать в виде определителя:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (14)$$

Векторное и скалярное произведения тесно связаны со многими физическими понятиями.

Работа силы, приложенной к точке, измеряется произведением величины перемещения точки и проекции силы на направление перемещения. Сила, перпендикулярная к перемещению, «работы не совершает». В связи с этим, если F — сила, а s — перемещение, работа A силы по определению равна

$$A = F_s, \quad s = Fs \cos(F, s) = F \cdot s.$$

Если сила и перемещение составляют тупой угол (силы сопротивления), то их работе приписывают знак минус, что полностью согласуется с определением работы как скалярного произведения.

Простейшим физическим образом векторного произведения является момент силы F относительно некоторой точки O :

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

где \mathbf{r} — вектор, проведенный из точки O к началу вектора F .

Направление вектора M_0 выбирается условно, точно так же, как и направление вектора угловой скорости вращения, вызываемого этим моментом силы. Положительное направление устанавливается в зависимости от выбора системы координат.

Если E — напряженность электрического поля в точке, где расположен электрический заряд e , то сила, действующая на этот заряд, равна

$$\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}.$$

На электрический заряд e , движущийся со скоростью v в магнитном поле, напряженность которого в точке, где расположен заряд, равна H , действует сила $\mathbf{F}_M = \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})$. Таким образом, полная сила действия электромагнитного поля на заряд

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}).$$

Если за время dt заряд перемещается на расстояние dr , то работа электромагнитного поля

$$F \cdot dr = F \cdot \frac{dr}{dt} dt = F \cdot v dt = \left[eE + \frac{e}{c} (v+H) \right] \cdot v dt.$$

Работа эта идет на изменение кинетической энергии U заряда. Так как сила F_M магнитного поля в каждый момент перпендикулярна к скорости v , то работа магнитного поля равна нулю, и вся работа электромагнитного поля определяется работой только электрического поля, равной за единицу времени

$$\frac{dU}{dt} = eE \cdot v.$$

Магнитное поле, не изменяя величины скорости, изменяет только направление движения электрического заряда.

3.5. Произведения трех векторов

Здесь мы отметим два типа произведений.

Векторно-скалярное произведение $(A \times B) \cdot C$. В силу определения скалярного произведения можно записать

$$V \equiv (A \times B) \cdot C = |A \times B| C_{A \times B} = |A \times B| h.$$

Здесь $C_{A \times B} = h$ — проекция вектора C на направление вектора $A \times B$ (рис. 16) — является высотой параллелепипеда, построенного на векторах A , B и C .

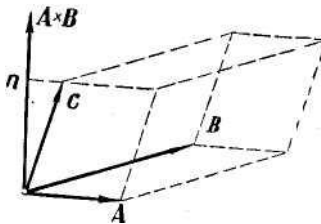


Рис. 16. Векторно-скалярное произведение трех векторов.

Поскольку $|A \times B|$ — площадь основания этого параллелепипеда, то векторно-скалярное произведение представляет собой объем параллелепипеда со знаком (+) или (—) в зависимости от того, будет ли острым или тупым угол между векторами C и $A \times B$.

Используя представления (10) и (14), получим удобную запись векторно-скалярного произведения через проекции сомножителей на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \cdot (C_1 i_1 + C_2 i_2 + C_3 i_3) = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Отсюда вытекает важное следствие о неизменяемости значения векторно-скалярного произведения при циклической перестановке его векторов:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}. \quad (16)$$

Если два вектора в векторно-скалярном произведении одинаковы (или параллельны), то это произведение равно нулю:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{A} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Если три вектора \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} лежат в одной плоскости (компланарны), то объем параллелепипеда, построенного на них, равен нулю.

Отсюда необходимое и, как нетрудно видеть, достаточное условие компланарности векторов \mathbf{A} , \mathbf{B} и \mathbf{C} можно записать в виде

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Итак, если $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq 0$, то векторы \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} образуют базис. При этом, по определению, если $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) > 0$, то базис $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ называется правым, если $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) < 0$, то базис называется левым.

Тройка ортов правой системы декартовых координат образует правый базис, а тройка ортов левой системы — левый.

Двойное векторное произведение $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$. Это произведение трех векторов представляет собой вектор, который лежит в плоскости векторов \mathbf{B} и \mathbf{C} и перпендикулярен к \mathbf{A} .

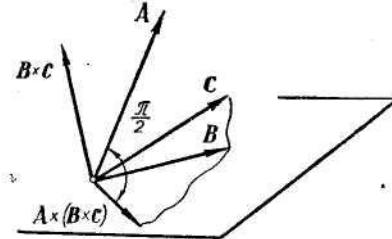


Рис. 17. Двойное векторное произведение трех векторов.

Поскольку векторы B и C неколлинеарны, то на основании (1) существует единственное представление вида

$$A \times (B \times C) = mB + nC. \quad (18)$$

Определим скалярные множители m и n .
Обозначим

$$E \equiv A \times (B \times C); \quad D \equiv (B \times C).$$

Вычислим проекции E_1, E_2, E_3 вектора E на оси прямоугольной декартовой системы координат, введенной произвольно.

Согласно (13) получим

$$E_1 = A_2 D_3 - A_3 D_2.$$

В свою очередь,

$$D_2 = (B \times C)_2 = B_3 C_1 - B_1 C_3;$$

$$D_3 = (B \times C)_3 = B_1 C_2 - B_2 C_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} E_1 &= A_2 (B_1 C_2 - B_2 C_1) - A_3 (B_3 C_1 - B_1 C_3) = \\ &= B_1 (A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_2 B_2 + A_3 B_3). \end{aligned}$$

Добавим и вычтем справа величину $A_1 B_1 C_1$. Тогда, учитывая (10), получим

$$\begin{aligned} E_1 &= B_1 (A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3) - C_1 (A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3) = \\ &= B_1 (A \cdot C) - C_1 (A \cdot B). \end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$E_2 = B_2 (A \cdot C) - C_2 (A \cdot B);$$

$$E_3 = B_3 (A \cdot C) - C_3 (A \cdot B).$$

Следовательно,

$$m = A \cdot C \text{ и } n = -A \cdot B.$$

Таким образом, окончательно

$$A \times (B \times C) = B (A \cdot C) - C (A \cdot B). \quad (19)$$

Как следствие, отсюда можно получить

$$(A \times B) \times C = B (A \cdot C) - A (B \cdot C). \quad (20)$$

Замечание о «делении» векторов. Решение уравнений обычно связано с действием деления, которое в векторном исчислении определяется неоднозначно. Действительно, определяя деление как действие, обратное умножению, прежде всего нужно рассматривать его отдельно для каждого из приведенных типов произведений. Но даже в простейшем случае скалярного произведения уравнение, определяющее неизвестный вектор x ,

$$a \cdot x = m \quad (a \neq 0),$$

имеет бесчисленное множество решений.

Аналитически это уравнение определяет только одну проекцию неизвестного вектора x на направление вектора a (рис. 18).

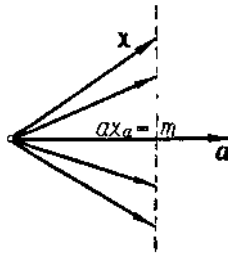


Рис. 18. Уравнение $x \cdot a = ax_a = m$.

Это уравнение определяет только проекцию неизвестного вектора x на заданный вектор a .

Поэтому в векторном исчислении предпочитают вовсе отказаться от операции деления на вектор.

3.6. Взаимные базисы векторов. Ковариантные и контравариантные составляющие вектора.

Взаимные базисы векторов. Нахождение проекции некоторого вектора A на оси прямоугольной системы координат с ортами i_1, i_2, i_3 сводится к определению скалярных произведений $A \cdot i_1, A \cdot i_2, A \cdot i_3$. Эти скаляры определяют разложение данного вектора по трем заданным взаимно-перпендикулярным направлениям, характеризуемым векторами a_1, a_2, a_3 . Если учесть, что

$$i_1 = a_1 : a_1, \quad i_2 = a_2 : a_2, \quad i_3 = a_3 : a_3,$$

то такое разложение может быть записано в виде

$$A = \sum_{k=1}^3 \left(A \cdot \frac{a_k}{a_k^2} \right) a_k. \quad (21)$$

Задача разложения заданного вектора B по трем произвольным некомпланарным векторам b_1, b_2, b_3 сводится к определению трех неизвестных B^1, B^2, B^3 (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени) из системы трех скалярных уравнений, получаемых проектированием выражения $B = B^1 b_1 + B^2 b_2 + B^3 b_3$ на оси какой-либо системы координат.

Прямой путь решения этой важной задачи — использование взаимных базисов векторов.

Два базиса (e_1, e_2, e_3) и (e^1, e^2, e^3) называются взаимными (биортогональными), если их векторы удовлетворяют соотношению

$$e^i \cdot e_k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \quad (22)$$

Подчеркнем, что e_k расположены друг к другу под произвольными углами (косоугольная система координат) и модули их могут отличаться от единицы.

Из этого определения видно, что каждый вектор одного базиса перпендикулярен к двум векторам взаимного базиса, а с третьим вектором, индекс которого имеет то же численное значение, составляет острый угол.

Таким образом, если на двух взаимных базисах построить параллелепипеды с объемами $|V| = |e_1 \cdot (e_2 \times e_3)|$ и $|V'| = |e^1 \cdot (e^2 \times e^3)|$, то ребра одного из них будут перпендикулярны к граням другого, и наоборот.

Условие $e_3 \cdot e^3 = 1$, например, означает, что

$$|e^3| = \frac{1}{|e_3| \cos(e^3, e_3)} = \frac{1}{h} \quad (23)$$

(рис. 19), т.е. модули векторов одного базиса равны обратным значениям параллельных им высот параллелепипеда взаимного базиса.

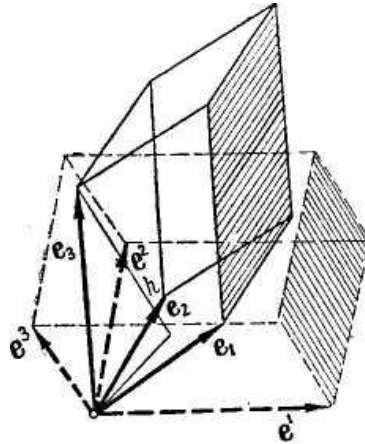


Рис. 19. Взаимные базисы и построенные на них параллелепипеды.

Рассмотрим построение базиса, взаимного данному.

Пусть дан базис (e_1, e_2, e_3) . Вектор e^1 взаимного базиса должен быть перпендикулярен к векторам e_2 и e_3 :

$$e^1 = m (e_2 \times e_3).$$

Скаляр m определяется из условия

$$e_1 \cdot e^1 = 1$$

т. е.

$$m e_1 \cdot (e_2 \times e_3) = 1.$$

Поскольку $e_1 \cdot (e_2 \times e_3) \neq 0$ (векторы e_1, e_2, e_3 составляют базис), получим

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} = \frac{e_2 \times e_3}{V}.$$

Здесь $|V|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса (e_1, e_2, e_3) .

Аналогично строятся векторы e^2 и e^3 :

$$e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{V}; \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{V}.$$

Эти соотношения можно записать короче

$$e^l = \frac{e_j \times e_k}{e_i \cdot (e_m \times e_n)}, \quad (24)$$

где (i, j, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3. Полученные формулы дают выражения для векторов e^1, e^2, e^3 через векторы e_1, e_2, e_3 . Аналогично можно получить выражения векторов первого базиса через векторы второго:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{e^2 \times e^3}{e^1 \cdot (e^2 \times e^3)} = \frac{e^2 \times e^3}{V'}, \\ e_2 &= \frac{e^3 \times e^1}{V'}, \\ e_3 &= \frac{e^1 \times e^2}{V'}, \end{aligned}$$

где $|V'|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах базиса (e^1, e^2, e^3) .

Сокращенная запись этих соотношений имеет вид

$$e_i = \frac{e^j \times e^k}{e^l \cdot (e^m \times e^n)}, \quad (25)$$

Отметим два важных свойства взаимных базисов.

1) Если (e_1, e_2, e_3) — базис прямоугольной системы координат, то взаимный к нему базис (e^1, e^2, e^3) совпадает с основным, т. е.

$$e_1 = e^1 = i_1, \quad e_2 = e^2 = i_2; \quad e_3 = e^3 = i_3.$$

Доказательство следует из свойств (8) и (12) ортов прямоугольной системы координат.

2) Взаимные базисы либо оба правые, либо оба левые. Это следует из того, что $V V' = 1$. Таким образом, если $V' > 0$, то $V > 0$

Для определения B^k из векторного уравнения

$$B = B^1 b_1 + B^2 b_2 + B^3 b_3 = \sum_{k=1}^3 B^k b_k, \quad (26)$$

где b_1, b_2, b_3 — некопланарные векторы, умножим скалярно B на b' — вектор взаимного базиса. Тогда

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}^i = \sum_{k=1}^3 B^k b_k \cdot \mathbf{b}^i = B^i. \quad (27)$$

Это и есть искомое решение. Так, например,

$$B^1 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}. \quad (28)$$

Таким образом, разложение вектора по базису выражается через проекции вектора на взаимный базис, т. е.

$$\mathbf{B} = \sum_{k=1}^3 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}^k) \mathbf{b}_k.$$

Используя построение взаимного базиса, можно легко решить задачу об определении вектора \mathbf{A} , удовлетворяющего трем уравнениям:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_1 = m_1; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_2 = m_2; \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_3 = m_3, \quad (*)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — некопланарные векторы, m_1, m_2, m_3 — скаляры.

Единственное решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{A} = m_1 \mathbf{a}^1 + m_2 \mathbf{a}^2 + m_3 \mathbf{a}^3.$$

Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет заданной системе. Если \mathbf{A}' — второе решение, т. е.

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{a}_1 = m_1; \quad \mathbf{A}' \cdot \mathbf{a}_2 = m_2; \quad \mathbf{A}' \cdot \mathbf{a}_3 = m_3, \quad (**),$$

то, вычитая из каждого уравнения системы соответствующее уравнение системы (**), получим

$$(\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{a}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{a}_2 = (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{a}_3 = 0.$$

вектор $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$, перпендикулярный ко всем векторам базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, может быть только нулем, т. е. $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, и найденное решение единственно.

Сокращенные обозначения. В современной физической и математической литературе принято считать:

1. Каждый буквенный индекс, встречающийся в выражении один раз, может принимать значения 1, 2, 3.

При этом, поскольку для обозначения координатных осей выбраны буквы с индексами (например, x_1, x_2, x_3 или x^1, x^2, x^3), под записью A_i , например, будем понимать совокупность трех величин A_{11}, A_{12}, A_{13} ; запись A_{ik} означает совокупность $3^2 = 9$ величин: $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$; запись A^{ik} — совокупность девяти величин: $A^{11}, A^{12}, \dots, A^{33}$.

2. По дважды повторяющемуся в одночлене индексу следует производить суммирование от 1 до 3. Таким образом, выражения A_{ii} , $A_i B^i$, $A_i B^k C^i$ означают

$$A_{ii} = \sum_{i=1}^3 A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

$$A_i B^i = \sum_{i=1}^3 A_i B^i = A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3,$$

$$A_i B^k C^i = B^k \sum_{i=1}^3 A_i C^i = B^k (A_1 C^1 + A_2 C^2 + A_3 C^3).$$

Равенства (4) и (5) можно поэтому записать в виде

$$e_i^* = \alpha_i^k e_k;$$

$$e_j = \alpha_j^{k'} e_{k'}.$$

Эти обозначения распространяются и на более сложные суммы, например, равенства (6) можно записать так:

$$e_i^* = \alpha_i^l \alpha_l^{k'} e_{k'};$$

$$e_i = \alpha_i^{l'} \alpha_{l'}^k e_k.$$

Индексы суммирования часто называются «немыми» в том смысле, что сумма, очевидно, не меняет значения, если заменить, «немой» индекс другой буквой:

$$A_{ii} \equiv A_{kkk} \equiv A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

и т.п.

Кроме этих общепринятых обозначений, условимся, что если имеются две системы координат (K) и (K'), то координаты какой-то точки в системе (K) будем обозначать через x_i (или x^i , если система (K) не является декартовой прямоугольной системой координат), а координаты *той же самой* точки в системе (K') будем обозначать через x_i' (или x'^i , если система (K') не является декартовой прямоугольной системой координат).

Аналогичных обозначений будем придерживаться и для компонент векторов (и тензоров вообще).

Условность здесь заключается в том, что, например, A_1 и A_1' суть компоненты *одного и того же вектора* A по первой оси системы (K) и по первой оси системы (K') соответственно, а

отнодь не компоненты двух разных векторов в какой-то одной системе.

Ковариантные и контравариантные компоненты вектора. При рассмотрении вопроса о взаимных базисах было показано, что один и тот же вектор (рис. 20) можно представить разложенным по векторам основного базиса

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= A^1 \mathbf{e}_1 + A^2 \mathbf{e}_2 + A^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 A^k \mathbf{e}_k \equiv A^k \mathbf{e}_k; \\
 A^k &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}^k
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

и взаимного

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= A_1 \mathbf{e}^1 + A_2 \mathbf{e}^2 + A_3 \mathbf{e}^3 = \sum_{k=1}^3 A_k \mathbf{e}^k \equiv A_k \mathbf{e}^k; \\
 A_k &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_k
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

(последние записи равенств даны в сокращенных обозначениях).

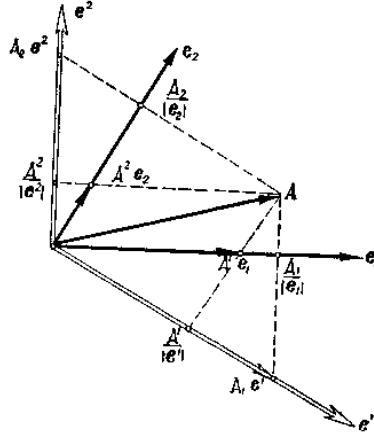


Рис. 20. Ковариантные и контравариантные компоненты вектора на плоскости.

Ковариантные компоненты A_1, A_2 могут быть найдены либо по составляющим $A_1|\mathbf{e}^1|, A_2|\mathbf{e}^2|$ вектора \mathbf{A} по направлениям взаимного базиса, либо по проекциям

$\frac{A_1}{|\mathbf{e}^1|}, \frac{A_2}{|\mathbf{e}^2|}$ вектора на оси основного базиса. Контравариантные компоненты A^1, A^2 можно найти из составляющих $A^1\mathbf{e}_1, A^2\mathbf{e}_2$ по направлениям основного базиса, а также из проекций на оси взаимного базиса $\frac{A^1}{|\mathbf{e}_1|}, \frac{A^2}{|\mathbf{e}_2|}$

Числа A^k называются *контравариантными*, а числа A_k *ковариантными* компонентами вектора \mathbf{A} .

Следует обратить внимание на рис. 20, где изображен вектор \mathbf{A} , лежащий в плоскости векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 и его ко- и контравариантные компоненты.

Названия компонент вектора связаны с тем, что *прямое* преобразование *ковариантных* компонент выполняется с помощью коэффициентов $\alpha_{i'}^k$, *прямого* преобразования, т. е.

$$A_{i'} = \alpha_{i'}^k A_k, \quad (31)$$

а *контравариантных* компонент — с помощью коэффициентов $\alpha^{i'k}$ *обратного* преобразования, т. е.

$$A^{i'} = \alpha^{i'k} A^k. \quad (32)$$

В случае обратного преобразования имеют место «обратные» формулы

$$A_i = \alpha_i^{k'} A_{k'}; \quad A^i = \alpha_i^{k'} A'^{k'}. \quad (33)$$

Действительно, пусть в системе определяемой базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, мы имеем ковариантные компоненты A_i и контравариантные A^i вектора \mathbf{A} .

Определим в другой координатной системе с базисом $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, ковариантные компоненты A'_i , (*того же вектора* \mathbf{A}) через его компоненты A_i и контравариантные компоненты A^i через A^i .

Заметим, прежде всего, что из (4) и (5) следуют выражения для коэффициентов прямого и обратного преобразования:

$$\alpha_{i'}^k = \mathbf{e}'_{i'} \cdot \mathbf{e}^k; \quad \alpha_i^{k'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'^{k'}. \quad (34)$$

Умножая обе части разложения

$$\mathbf{A} = A_k \mathbf{e}^k$$

скалярно на вектор $\mathbf{e}'_{i'}$, Получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}'_{i'} = A_k \mathbf{e}'_{i'} \cdot \mathbf{e}^k.$$

В силу (30) и (34) получаем закон преобразования (31).

Аналогично, умножая разложение $\mathbf{A} = A^k \mathbf{e}_k$ скалярно на \mathbf{e}'^i , в силу (29) и (34) получаем закон (32).

В связи с понятием контравариантных компонент вектора важно отметить, что *косугольные декартовы координаты* точки следует писать с индексом вверху x^1, x^2, x^3 . Это становится ясным, если учесть, что такие координаты являются контравариантными компонентами радиуса-вектора данной точки (см. рис. 7) так что

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \equiv x^k \mathbf{e}_k.$$

Физические компоненты вектора. Следует отметить, что размерности компонент A^i и A_i одного и того же вектора $\mathbf{A} = A^i \mathbf{e}_i = A_i \mathbf{e}^i$ различны: они определяются размерностями базисных векторов и соотношением $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = 1$.

При определении операций векторы рассматриваются геометрически как направленные отрезки с длиной, пропорциональной величине вектора, и физическая размерность их не принимается во внимание (за исключением основного правила, что все векторы, входящие в уравнение слагаемыми, должны иметь одинаковую физическую размерность).

Можно, однако, ввести так называемые «физические» (иногда «фактические») компоненты вектора, размерности которых будут совпадать с размерностями рассматриваемого вектора. Для этого определим *векторный единичный базис* \mathbf{e}_i^* и, соответственно, взаимный ему \mathbf{e}^{*i} с помощью соотношений

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|}; \quad \mathbf{e}^{*i} = \mathbf{e}^i |\mathbf{e}_i|, \quad (35)$$

и тогда

$$\mathbf{A} = A^{*i} \mathbf{e}_i^* = A_i^* \mathbf{e}^{*i}, \quad (36)$$

где A^{*i} , A_i^* — физические компоненты вектора \mathbf{A} .

Связь физических компонент с ко- и контравариантными компонентами найдется без труда:

$$A^{*i} = A^i |\mathbf{e}_i|; \quad A_i^* = \frac{A_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (\text{лет суммирования по } i). \quad (37)$$

Как видно (рис. 21), A^{*i} являются *компонентами* (параллельными проекциям) вектора \mathbf{A} при разложении его по ортам \mathbf{e}_i^* основного базиса, а — *проекции* (ортогональные) этого же вектора \mathbf{A} на оси того же базиса. A_i^*

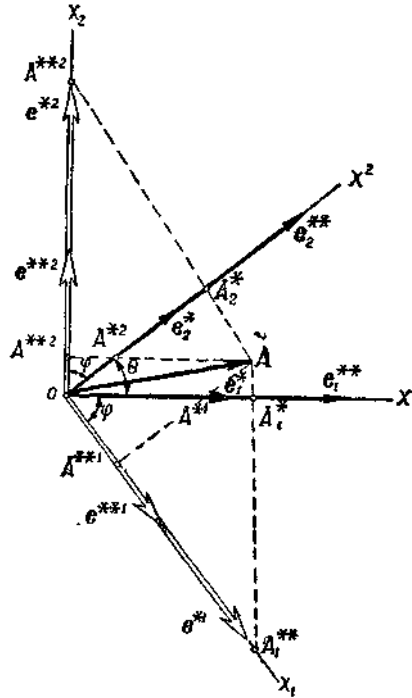


Рис. 21. Физические составляющие вектора

Можно за основу принять взаимный базис и определить единичный векторный базис соотношениями:

$$e^{**k} = \frac{e^k}{|e^k|}; \quad e_k^{**} = e_k |e^k|.$$

Это дает

$$e^{**k} = e^k \cos(e^k, e_k);$$

$$e_k^{**} = \frac{e_k^*}{\cos(e^k, e_k)}$$

и

$$A_k^{**} = \frac{A_k^*}{\cos(e^k, e_k)};$$

$$A^{**k} = A^{*k} \cos(e^k, e_k),$$

т. е. оба определения равнозначны и все сводится к выбору масштаба для единицы.

Подчеркнем, что все вычисления почти всегда производятся с обычными ко- и контравариантными компонентами и только в конце, если нужно, делается пересчет на физические компоненты.

Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора. Выражение ковариантных компонент вектора через его контравариантные компоненты, и наоборот, можно получить, если разложения (29) умножить скалярно на e_i , а (30) — на e^j :

$$\begin{aligned} A \cdot e_i &= A^k (e_k \cdot e_i), \\ A \cdot e^i &= A_k (e^k \cdot e^i). \end{aligned} \quad (38)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} e_k \cdot e_i &= g_{ik} = g_{ki}, \\ e^k \cdot e^i &= g^{ik} = g^{ki}, \\ e^k \cdot e_i &= g_i^k \equiv \delta_i^k = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Тогда из (38) следуют формулы

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad (40)$$

$$A^i = g^{ik} A_k, \quad (41)$$

которые и дают искомые выражения. Девять величин g_{ik} (и соответственно g^{ik} и $g_i^k \equiv \delta_i^k$), как в дальнейшем будет показано, составляют тензор второго ранга — так называемый *метрический тензор*. Здесь мы рассмотрим некоторые свойства этих величин, ибо они являются основной характеристикой пространства, арифметизированного введенной системой координат с базисом (e_1, e_2, e_3) . Рассмотрим квадрат длины дуги Δs между двумя бесконечно близкими точками x^i и $x^i + \Delta x^i$ в системе координат с базисом (e_1, e_2, e_3) .

Получим

$$\Delta s^2 = |\Delta r|^2 = \Delta r \cdot \Delta r = e_i \Delta x^i \cdot e_k \Delta x^k = e_i \Delta x^i \cdot e^k \Delta x_k = e^i \Delta x_i \cdot e^k \Delta x_k.$$

Используя обозначения (39), имеем

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= g_{ik} \Delta x^i \Delta x^k, \\ \Delta s^2 &= g^{ik} \Delta x_i \Delta x_k, \\ \Delta s^2 &= \Delta x_i \Delta x^i, \end{aligned} \quad (42)$$

где Δx_i — ковариантные, а Δx^i — контравариантные компоненты вектора Δr .

Формулы (42) определяют квадрат элементарной дуги в выбранной системе координат через g_{ik} (или g^{ik}). Говорят, что величины g_{ik} (или

g^{ik}) определяют метрику пространства, арифметические свойства которого устанавливаются введенной системой координат x^1, x^2, x^3 .
Связь между величинами g_{ik} и g^{ik} можно установить, если рассмотреть выражения

$$A_i = g_{ik} A^k \quad (i = 1, 2, 3)$$

как систему трех линейных уравнений относительно A^1, A^2, A^3 .
Решение этой системы имеет вид

$$A^i = \frac{\sum_{k=1}^3 G^{ik} A_k}{G} \equiv \frac{G^{ik} A_k}{G}, \quad (43)$$

где

$$G = \det \|g_{ik}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix};$$

G^{ik} — алгебраическое дополнение, соответствующее члену g_{ik} детерминанта G , может быть записано в виде

$$G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix},$$

где индексы (i, p, r) и (k, s, t) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. Таким образом, например, имеем

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}; \quad G^{12} = \begin{vmatrix} g_{23} & g_{21} \\ g_{33} & g_{31} \end{vmatrix}; \quad G^{13} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} \\ g_{31} & g_{32} \end{vmatrix}.$$

Сравнивая теперь (43) с (41), получим искомую связь:

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}. \quad (44)$$

Аналогичным путем можно получить выражение

$$g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \quad (45)$$

где

$$G' = \det \|g'^{ik}\|, \quad G_{ik} = \begin{vmatrix} g'^{ps} & g'^{pt} \\ g'^{rs} & g'^{rt} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, непосредственным вычислением, учитывая (39) и (24), получим

$$g^{ik} = e^i \cdot e^k = \frac{1}{V^2} (e_p \times e_r) \cdot (e_s \times e_t) = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} e_p \cdot e_s & e_p \cdot e_t \\ e_r \cdot e_s & e_r \cdot e_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix}.$$

Здесь использовано свойство (15) векторно-скалярного произведения и выражение (19) для двойного векторного произведения. Сравнивая это выражение для g^{ik} с (40), получим

$$G = V^2; \quad V, = \pm \sqrt{G}. \quad (46)$$

В соответствии с принятыми определениями знак у корня в случае правой системы выбирается положительным. Поскольку аналогичным путем можно получить

$$V' = \pm \sqrt{G'}, \quad (47)$$

то, учитывая $V_i \cdot V' = 1$, найдем как следствие

$$G \cdot G' = 1. \quad (48)$$

Таким образом, объем параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен \sqrt{G} , а на векторах взаимного базиса $-\sqrt{G'}$.

Случай ортогональных базисов. Рассмотрим его особо, так как ортогональные системы координат наиболее распространены в теории моделирования.

Как уже отмечалось, ортогональный базис совпадает со своим взаимным. В этом случае из величин g_{ik} согласно (39) отличны от нуля только g_{33} ,

Тогда из (40) и (41) следует

$$\begin{aligned} A_1 &= g_{11}A^1; & A_2 &= g_{22}A^2; & A_3 &= g_{33}A^3; \\ A^1 &= g^{11}A_1; & A^2 &= g^{22}A_2; & A^3 &= g^{33}A_3. \end{aligned} \quad (49)$$

Значит,

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}; \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}; \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}; \quad (50)$$

и, кроме того, имеем

$$\Delta s^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2. \quad (51)$$

Коэффициенты $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ (не суммируется по i) носят название

коэффициентов Лямэ. (52)

В случае ортогональных координат физические компоненты A^{*i} и A^*_i совпадают. В прямоугольной декартовой системе координат физические, ковариантные и контравариантные компоненты совпадают.

Замечание по поводу «верхних» и «нижних» индексов. Для контроля написания формул может служить правило, носящее в некоторой степени мнемонический характер. Оно гласит: *суммирование может производиться только по разноименным (верхний и нижний) «немым» индексам.*

Например, формулы $A_i B^i$, $g^{ik} A_k$ и т. п. означают правильно написанные суммы. Но выражения $A^k B^k$, $g^{ik} A^k$ не имеют смысла как суммы.

В связи с этим о выражении $A^i = g^{ik} A_k$ иногда говорят как об операции «поднятия индекса», а о выражении $A_i = g_{ik} A^k$ — как

об операции «опускания индекса» (оператор—совокупность девяти коэффициентов g_{ik} или g^{ik}).

Эти замечания полезно иметь в виду и в дальнейшем, особенно при алгебраических действиях с тензорами. Все сказанное выше относится к компонентам тензоров в системах обобщенных координат. В прямоугольной декартовой системе, конечно, допустимы записи $A_i B_i$, $C_{ik} A_k$ и т. п.

3.7. Переменные векторы

Вектор-функция скалярного аргумента. Векторы, так же как и скаляры, могут изменяться в пространстве от точки к точке и с течением времени: $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Здесь рассматриваются векторы, зависящие только от одной скалярной величины — *вектор-функции скалярного аргумента*. Не определение строится аналогично определению скалярной функции скалярного аргумента.

Если каждому допустимому численному значению скалярной величины t соответствует одно вполне определенное значение вектора \mathbf{A} , то говорят, что задана вектор-функция от скалярного аргумента t : $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$. При этом, вообще говоря, все компоненты являются функциями t : $A_i = A_i(t)$.

Изменение вектор-функции означает изменение как величины, так и направления вектора.

Изменение вектор-функции от скалярного аргумента графически изображается *годографом вектора*. *Годографом* вектора \mathbf{A} называется геометрическое место, образованное концами вектора при изменении t , если вектор откладывать (рис. 22) из некоторой фиксированной точки (полюса).

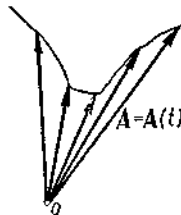


Рис. 22

Годограф вектор-функции скалярного аргумента. Геометрической характеристикой вектор-функции служит ее годограф – кривая, описываемая концом вектора.

Если вектор меняется только по величине, его годографом является прямая (рис. 23), если вектор меняется только по направлению, — сферическая кривая (рис. 23).



Рис. 1.23. Примеры годографов:

а) годограф вектор-функции, меняющейся только по величине, — прямая;
 б) годограф вектор-функции, меняющейся только по направлению, — сферическая кривая; в) вектор-функция, имеющая годографом прямую, может быть представлена в виде суммы постоянного вектора и вектора, меняющегося только по величине.

Если вектор имеет годографом прямую, то в общем случае он может меняться как по величине, так и по направлению (рис. 23), но всегда может быть представлен в виде суммы постоянного вектора и вектора переменного только по величине:

$$A(t) = c + a(t),$$

где c , $\frac{a_i}{|a|}$ — постоянные величины.

Векторная производная. Если для переменного вектора $A(t)$ при $t \rightarrow t_0$ существует такой постоянный вектор A_0 , что

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |A(t) - A_0| = 0,$$

то вектор A_0 называется пределом при $t \rightarrow t_0$ вектор-функции $A(t)$.

Производной $\frac{dA}{dt}$ от вектор-функции по скалярному аргументу (векторной производной) называется предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(t + \Delta t) - A(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}. \quad (53)$$

Поскольку вектор $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ направлен по секущей к годографу, вектор $\frac{dA}{dt}$, являющийся пределом $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, направлен по касательной к годографу вектора $A(t)$ (рис. 24).

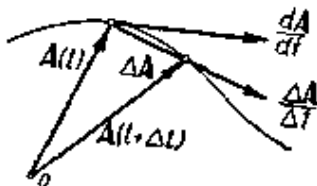


Рис. 24. Производная вектор-функции скалярного аргумента. Это вектор, направленный по касательной к годографу этой функции.

Векторная производная

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt}$$

всегда направлена по касательной к годографу вектора $\mathbf{A}(t)$.

Если выбрать *постоянные* (не зависящие от изменения аргумента t) *оси декартовой прямоугольной системы координат*, то

$$\mathbf{A}(t) = A_k(t) \mathbf{i}_k,$$

где \mathbf{i}_k — постоянные векторы. Тогда

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{i}_k \frac{dA_k}{dt}; \quad \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_k = \frac{dA_k}{dt}.$$

Компоненты векторной производной $\frac{d\mathbf{A}}{dt}$ являются производными от компонент вектор-функции $\mathbf{A}(t)$, если координатная система не меняется с течением аргумента t . При этом величина векторной производной может быть вычислена по формуле

$$\left|\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dA_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dA_3}{dt}\right)^2}. \quad (54)$$

Если \mathbf{r} — радиус-вектор материальной точки, а t — время, то движение точки в самом общем случае характеризуется ее уравнением движения или вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

Истинной скоростью \mathbf{V} в момент времени t является вектор-функция

$$\mathbf{V}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

В истинном ускорении \mathbf{W} — вектор-функция

$$\mathbf{W}(t) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Правила дифференцирования вектор-функций устанавливаются из определения производной вектор-функции и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \pm \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \\
 2) \quad \frac{d}{dt} (\varphi \mathbf{A}) &= \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{A} + \varphi \frac{d\mathbf{A}}{dt}; \\
 3) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \\
 4) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Рассмотрим, например, доказательство правила (4):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \Delta \mathbf{B}) + (\Delta \mathbf{A} \times \Delta \mathbf{B})}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \mathbf{B} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{A} \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} \right) + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} \times \Delta \mathbf{B} = \\
 &= \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что при использовании правила (4) следует всегда учитывать некоммутативность векторного произведения.

Неопределенный интеграл от вектор-функции. *Неопределенным интегралом от вектор-функции $\mathbf{A}(t)$ называется вектор-функция $\mathbf{B}(t) \equiv \int \mathbf{A}(t) dt$, векторная производная которой равна $\mathbf{A}(t)$, т. е.*

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mathbf{A}(t).$$

Таким образом,

$$\mathbf{B}(t) = \int \mathbf{A}(t) dt + \mathbf{C}, \tag{56}$$

где \mathbf{C} — постоянный вектор.

Если выбрана неизменная (не зависящая от t) система координат, то компоненты неопределенного интеграла полностью определяются неопределенными интегралами от компонент вектор-функции, т. е.

$$B_i = \int A_i(t) dt + C_i. \tag{57}$$

Величины B_i являются компонентами вектора.

Аналогично можно ввести понятие определенного интеграла.

3.8. Примеры векторного моделирования.

Пример 1. Построим формулы линейного ортогонального преобразования координат, используемые при моделировании объектов.

Пусть в пространстве введены две прямоугольные декартовы системы координат (K) и (K') (рис. 25). Задача состоит в выражении координат (x_1, x_2, x_3) произвольной точки M в системе (K) через координаты (x'_1, x'_2, x'_3) в системе (K') , и наоборот.

Пусть r и r' — соответственно радиусы-векторы точки M в системах (K) и (K') , орты которых (i_1, i_2, i_3) и (i'_1, i'_2, i'_3) . Положение начала O_1 системы (K') в системе (K) определяется радиусом-вектором r_{01} а положение начала системы (K) в системе (K') — радиусом-вектором r'_0 , так что $r_{01} = -r'_0$. Пусть, наконец, $\alpha_{i'k}$ — косинус угла между i' -й осью системы (K') и k -й осью системы (K) , так что

$$\alpha_{i'k} = \cos(x'_{i'}, x_k) = i'_i \cdot i_k. \quad (*)$$

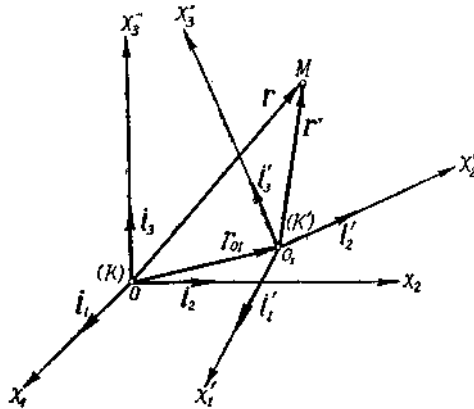


Рис. 25. Преобразование декартовых координат.

Тогда (рис. 25)

$$r = r' + r_{01}; \quad r' = r + r'_0.$$

Используя выражение для радиуса-вектора, получим

$$x_k i_k = x'_k i'_k + x_k^{01} i_k; \quad (**)$$

$$x'_k i'_k = x_k i_k + x_k^{0'} i'_k. \quad (***)$$

При этом следует помнить, что

$$x_k i_k \equiv \sum_{k=1}^3 x_k i_k = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3.$$

Умножая (**), скалярно на i_i , а (***) на i'_i и используя (8) и (*), найдем

$$x_i = (i'_k \cdot i_i) x'_k + x_i^{01} = \alpha_{ki} x'_k + x_i^{01};$$

$$x'_i = (i_k \cdot i'_i) x_k + x_i^{0'} = \alpha_{ik} x_k + x_i^{0'}.$$

Эти выражения и представляют формулы линейного ортогонального преобразования координат.

Коэффициенты $\alpha_{i'k}$ удовлетворяют условиям ортогональности, которые можно получить, используя формулу (9) для разложения ортов i_k системы (K) по ортам i'_k системы (K') и ортов i'_k по ортам i_k .

Полагая в (9) $A = i'_i$, получим $i'_i = \alpha_{i'j} i_j$.

Аналогично $i_i = \alpha_{i'j} i'_j$.

Умножая первое разложение скалярно на i'_k , а второе — на i_k , найдем

$$i'_i \cdot i'_k = \alpha_{i'j} \alpha_{k'j};$$

$$i_i \cdot i_k = \alpha_{i'j} \alpha_{j'k}.$$

Используя (8) и вводя символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

получим

$$\alpha_{i'j} \alpha_{k'j} = \delta_{ik},$$

$$\alpha_{i'j} \alpha_{j'k} = \delta_{ik}.$$

Пример 2. Пусть в точках, определяемых радиусами-векторами $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_n$ относительно некоторого начала O , расположены заряды, равные соответственно $e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n$.

Дипольным моментом этой системы зарядов относительно начала O называется вектор

$$p = \sum_{k=1}^n e_k r_k.$$

Назовем центром зарядов (по аналогии с центром масс) этой системы точку C , определяемую радиусом-вектором:

$$R = \frac{p}{\sum_{k=1}^n e_k} = \frac{\sum_{k=1}^n e_k r_k}{\sum_{k=1}^n e_k}.$$

Эту точку можно определить, если $\sum_{k=1}^n e_k \neq 0$.

Если

$$\sum_{k=1}^n e_k = 0,$$

то система зарядов нейтральна.

1. Покажем, что дипольный момент нейтральной системы не зависит от начала, относительно которого он вычисляется.
2. Выразим дипольный момент через центры систем положительных и отрицательных зарядов, составляющих нейтральную систему.

1. Пусть $\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k$ — дипольный момент относительно начала O , а

$$\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}'_k$$

— относительно начала O' , причём $\overline{OO'} = \mathbf{r}_0$.

Тогда $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}'_k + \mathbf{r}_0$. Следовательно,

$$\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}'_k = \sum_{k=1}^n e_k (\mathbf{r}_k + \mathbf{r}_0) = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k + \mathbf{r}_0 \sum_{k=1}^n e_k.$$

Так как система зарядов нейтральна $\left(\sum_{k=1}^n e_k = 0 \right)$, то

$$\mathbf{p}' = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k = \mathbf{p}.$$

2. Пусть $\sum_{k=1}^n e_k = 0$. Тогда в системе есть отрицательные заряды e_k^- и положительные e_k^+ . Разобьём всю сумму зарядов на суммы положительных и отрицательных, т. е.

$$\sum_{k=1}^n e_k = \sum e_k^- + \sum e_k^+ = 0.$$

Тогда обозначим

$$\sum e_k^+ = -\sum e_k^- = Q.$$

По определению, центры положительных и отрицательных зарядов находятся в точках, радиусы-векторы которых равны

$$R^+ = \frac{\sum e_k^+ \mathbf{r}_k^+}{\sum e_k^+}; \quad R^- = \frac{\sum e_k^- \mathbf{r}_k^-}{\sum e_k^-}.$$

Тогда дипольный момент системы равен

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^n e_k \mathbf{r}_k = \sum e_k^+ \mathbf{r}_k^+ + \sum e_k^- \mathbf{r}_k^- = R^+ \sum e_k^+ + R^- \sum e_k^- = Q (R^+ - R^-).$$

Пример 3. *Моделирование столкновения частиц.*

Пусть две частицы одинаковой массы до столкновения имели скорости V_1 и V_2 , а после столкновения приобрели скорости V'_1 и V'_2 (рис. 26).

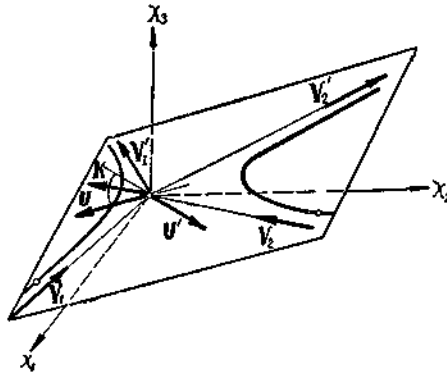


Рис. 26

Поскольку столкновение частиц происходит под действием центральных сил, то, как известно из механики, их траектории будут лежать в одной плоскости в системе координат, где покоится центр инерции. Для такого столкновения справедливы законы сохранения количества движения и кинетической энергии системы (потенциальная энергия до и после столкновения равна нулю), поэтому

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= V'_1 + V'_2, \\ V_1^2 + V_2^2 &= V'^2_1 + V'^2_2. \end{aligned} \quad (*)$$

1. Выразим скорости после столкновения V'_1 и V'_2 через начальные скорости V_1 и V_2 .
2. Покажем, что относительные скорости

$$U = V_2 - V_1,$$

$$U' = V'_2 - V'_1$$

до (U) и после (U') столкновения равны по абсолютной величине.

1. Система (*) представляет собой систему четырех скалярных уравнений относительно шести компонент скоростей V'_1 , V'_2 . Таким образом, явное выражение V'_1 , V'_2 через V_1 и V_2 может быть осуществлено введением двух дополнительных параметров, характеризующих геометрию столкновения (положение плоскости траектории в некоторой системе (x_1, x_2, x_3)). Это означает, что столкновение двух частиц может быть полностью охарактеризовано значением двух геометрических параметров. Эти геометрические

параметры мы введем с помощью орта k ($|k| = 1$) по направлению изменения скорости первой частицы (рис. 26), т. е.

$$V'_1 - V_1 = kA. \quad (**)$$

Два независимых угла, которые составляют k с осями системы (x_1, x_2, x_3) , могут быть приняты за геометрические параметры столкновения. Тогда из первого уравнения системы (*) следует

$$V'_2 - V_2 = -kA. \quad (***)$$

Подставляя V'_1 и V'_2 из (**) и (***) во второе уравнение системы (*), получим выражение для A . Имеем

$$\begin{aligned} V_1^2 + V_2^2 &= (V_1 + kA)^2 + (V_2 - kA)^2 = \\ &= V_1^2 + 2A(V_1 \cdot k) + A^2 + V_2^2 - 2A(V_2 \cdot k) + A^2 \end{aligned}$$

Отсюда

$$A = k \cdot (V_2 - V_1) = k \cdot U.$$

Тогда из (**) и (***) имеем

$$V'_1 = V_1 + k(k \cdot U); \quad V'_2 = V_2 - k(k \cdot U).$$

Эти формулы и дают явное выражение конечных скоростей V'_1 и V'_2 через скорости V_1 и V_2 до столкновения и вектор k .

2. Вычитая из второго уравнения системы (****) первое, получим

$$U' = U - 2k(k \cdot U).$$

Возводя в квадрат, найдем

$$U'^2 = U^2,$$

т. е. $U' = U$ — величина относительной скорости частиц сохраняется при столкновении.

Нетрудно показать, что вектор k делит угол между U и U' пополам. Действительно, умножив (****) скалярно на k , получим

$$U' \cdot k = -U \cdot k.$$

Пример 4. Рассмотрим столкновение частиц с разными массами m_1 и m_2 . Покажем, что величина относительной скорости $U = V_2 - V_1$ сохраняется при столкновении.

Пусть $p_1 = m_1 V_1$; $p_2 = m_2 V_2$; $p'_1 = m_1 V'_1$; $p'_2 = m_2 V'_2$, где V_1, V_2 — скорости частиц до столкновения, а V'_1 и V'_2 — после столкновения.

Закон сохранения количества движения и кинетической энергии имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2, \\ p_1^2 + p_2^2 &= p_1'^2 + p_2'^2 \quad \left(m = \frac{m_1}{m_2}\right). \end{aligned} \quad (*)$$

Вводя орт k соотношениями

$$p'_1 - p_1 = kA, \quad p'_2 - p_2 = -kA$$

и определяя A из второго уравнения (*), получим

$$A = \frac{2}{1+m} k \cdot (mp_2 - p_1) = \frac{2m_1}{1+m} (k \cdot U).$$

Следовательно,

$$p'_1 = p_1 + \frac{2}{1+m} k [k \cdot (mp_2 - p_1)] = p_1 + \frac{2m_1}{1+m} k (k \cdot U);$$

$$p'_2 = p_2 - \frac{2}{1+m} k [k \cdot (mp_2 - p_1)] = p_2 - \frac{2m_1}{1+m} k (k \cdot U).$$

Отсюда имеем

$$mp'_2 - p'_1 = mp_2 - p_1 - 2k [k \cdot (mp_2 - p_1)],$$

или

$$U' = U - 2k (k \cdot U), \quad (**)$$

где обозначено

$$U = V'_2 - V'_1.$$

Возводя выражение (**) в квадрат, получим

$$U' = U.$$

4. Тензоры

4.1. Компоненты тензоров и их преобразование.

Выше были рассмотрены примеры скаляров и векторов. Скаляр имеет одну компоненту, вектор — три. Иными словами, какую бы мы ни выбрали систему координат, для полного описания скаляра достаточно одного числа, а для такой величины, как вектор, необходимо три числа. Более сложные объекты требуют для своего определения большего числа компонент. Так, для описания деформации упругого тела в точке необходимо $3^2 = 9$ чисел, а для полной характеристики упругих свойств анизотропного тела — $3^4 = 81$ число.

Числа (или функции), которые полностью определяют величину в какой-то системе координат, называются компонентами этой величины.

Мы уже говорили, что с этой точки зрения удобно рассматривать тензоры различных рангов: скаляр ($3^0 = 1$ компонента) — тензор ранга 0, вектор ($3^1 = 3$ компоненты) — тензор ранга 1, величина, имеющая $3^2 = 9$ компонент, — тензор ранга 2 и т. д. Тензоры могут быть самого различного ранга, и вообще тензор ранга n имеет 3^n компонент.

Компоненты могут быть функциями, например, времени и координат.

В этом разделе мы рассмотрим правила, по которым преобразуются компоненты тензоров различных рангов в зависимости от изменения системы координат.

Величины можно рассматривать в системах координат с различным началом и различным образом ориентированных. Компоненты одной и той же величины (тензора) могут иметь различные значения в разных системах координат. Однако в связи с тем, что каждый раз эти компоненты определяют одну и ту же величину, закон преобразования компонент при переходе из одной системы координат в другую не может быть произвольным. **Этот закон должен вытекать из природы рассматриваемой величины (для скаляра один закон, для вектора — другой и т. д.) и из свойств пространства, в котором выбираются системы координат.**

Равноправность любой ориентации (поворот) координатных систем также является опытным фактом и означает изотропность пространства.

Таким образом, **в однородном и изотропном пространстве все координатные системы равноправны в том смысле, что описания величин или явлений (законы) не зависят от частного (вообще творя, произвольного) выбора системы координат.**

Это означает следующее. Пусть в однородном и изотропном пространстве выбраны две произвольные системы координат K и K' , которые могут иметь различные начала и разную ориентацию. Тогда закон, сформулированный в системе K через компоненты величин, относящиеся к этой системе, должен иметь тот же вид, что и тот же закон, сформулированный в системе K' через компоненты, относящиеся к системе K' .

Это требование к правильно сформулированным законам носит название требования *инвариантности*.

Так, например, если длина какого-то отрезка, вычисленная и системе координат K , равна Δs , то, вычисляя длину этого же отрезка через координаты его конца и начала по отношению к любой другой системе K' , мы получим то же самое численное значение его длины. Математически это может быть выражено тем, что величина

$$\Delta s^2 = \Delta x^2_1 + \Delta x^2_2 + \Delta x^2_3 \quad (1.)$$

имеет одинаковое численное значение независимо от того, в какой из прямоугольных декартовых систем вычислены $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$ — разности координат конца и начала отрезка.

Независимость описания от выбора системы координат не является единственным требованием, предъявляемым к величинам и законам. В качестве другого такого общего требования укажем на широко известное *условие независимости формулировки законов от выбора системы единиц измерения*.

Физические величины имеют размерность. Однако выбор единиц измерения этих величин остается произвольным. Таким образом, отношение двух значений одной и той же величины не зависит от того, в каких единицах эта величина измерена (этот факт используется в теории размерностей при выводе основной формулы размерности).

Любой закон формулируется также независимо от выбора системы единиц измерения величин, между которыми он устанавливает соответствие.

Как известно, независимость формулировки закона от выбора системы единиц измерения обеспечивается *одинаковой размерностью величин*, которые входят в формулировку в виде слагаемых. В дальнейшем мы увидим, что независимость формулировки закона от выбора системы координат обеспечивается *одинаковым рангом всех тензоров*, которые входят в запись закона в виде слагаемых.

Далее мы рассмотрим последовательно тензоры различных рангов в связи с законом преобразования их компонент, обеспечивающим во всех случаях равноправность координатных систем при описании величин.

Основные определения и формулировки будут даны по отношению к прямоугольным декартовым системам координат. Тем не менее, где это потребуется по ходу изложения, будут рассмотрены также компоненты тензоров и их свойства в системах обобщенных координат.

4.2. Тензоры нулевого ранга (скаляры)

Выше уже отмечалось, что такие величины, как температура, объем, давление и др., называются скалярами. Приведем определение скаляра в связи с законом его изменения при преобразованиях координатной системы.

Скаляр — это величина, полностью определяемая в любой координатной системе одним числом (или функцией), которое не меняется при изменении пространственной системы координат.

Скаляр имеет одну компоненту.

Таким образом, если φ — значение скаляра в одной системе координат, а φ' — в другой, то

$$\varphi' = \varphi$$

Рассмотрим пример скалярной величины.

Пример. Пусть A и B — две точки в пространстве, координаты которых в системе (K) декартовых координат суть x_k^A, x_k^B ($k = 1, 2, 3$), а в другой декартовой системе (K') — $x'_k{}^A, x'_k{}^B$ ($k = 1, 2, 3$) (рис. 1).

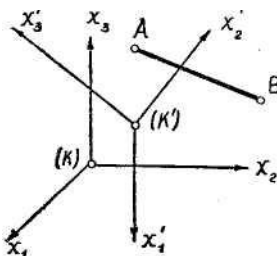


Рис. 1. Пример скалярной величины.

Длина отрезка AB — скалярная величина и имеет одно и то же значение в различных системах координат.

Так как длина Δs отрезка прямой по своему определению является скаляром, то $\Delta s' = \Delta s$.

Следовательно, для любых двух систем декартовых координат необходимо выполнение равенства (здесь и всюду в дальнейшем мы

будем считать, что единицы масштабов в системах остаются неизменными)

$$\sum_{k=1}^3 \Delta x_k^2 = \sum_{k=1}^3 \Delta x_k'^2. \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k^B - x_k^A \quad (k = 1, 2, 3); \\ \Delta x_k' &= x_k'^B - x_k'^A \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Как известно из аналитической геометрии, формулы преобразования декартовых координат имеют следующий вид (применяя сокращенные обозначения)

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{1'k} x_k + x_1'^0, & x_1 &= \alpha_{k'1} x_k' + x_1^{01}; \\ x_2' &= \alpha_{2'k} x_k + x_2'^0, & x_2 &= \alpha_{k'2} x_k' + x_2^{01}; \\ x_3' &= \alpha_{3'k} x_k + x_3'^0, & x_3 &= \alpha_{k'3} x_k' + x_3^{01}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x_i' &= \alpha_{i'k} x_k + x_i'^0; \\ x_i &= \alpha_{k'i} x_k' + x_i^{0i}; \\ &(i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3)$$

отсюда

$$\Delta x_i' = \alpha_{i'k} \Delta x_k. \quad (4)$$

Здесь $\alpha_{i'k} = \cos(x'_{i'}, x_k)$ — косинус угла между i -й новой осью и k -й старой осью.

Все коэффициенты $\alpha_{i'k}$ ортогонального линейного преобразования не зависят от координат, а между ними существует соотношение

$$\begin{aligned} \alpha_{i'l} \alpha_{l'k} &= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \\ \alpha_{i'l} \alpha_{k'l} &= \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Ортогональные линейные преобразования обеспечивают выполнения условия (2).

Действительно, вычислим

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2,$$

используя (4)

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 = \sum_{i'=1}^3 \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l = \Delta x_k \Delta x_l \alpha_{i'k} \alpha_{i'l}$$

В силу соотношений (5) имеем

$$\sum_{i=1}^3 \Delta x_i'^2 = \Delta x_k \Delta x_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^3 \Delta x_k^2$$

Таким образом, закон преобразования координат (3) обеспечивает инвариантность длины отрезка прямой по отношению к любым ортогональным изменениям координатной системы.

4.3. Тензоры 1-го ранга (векторы)

Векторные величины (перемещение, ускорение, сила и др.), как уже указывалось, требуют для своего определения трех действительных чисел или функций. Векторы — величины более высокого ранга по сравнению со скалярами; они могут быть названы *тензорами первого ранга*

Следует подчеркнуть, что *вектор — это не набор трех скалярных величин*. Двумя числами (плотность и температура) можно полностью охарактеризовать состояние идеального газа, как и двумя числами (разности абсцисс и ординат двух точек) можно описать перемещение в плоскости. Но с изменением системы пространственных координат плотность и температура не меняются, ибо они являются скалярами, и потому не могут образовывать вектор, в то время как разности координат изменяются при этом по определенному закону. **Три числа или функции, определяющие вектор, меняются при изменении пространственной системы координат, но по такому закону, что в любой из координатных систем они определяют один и тот же вектор.**

Закон преобразования компонент вектора. Закон преобразования компонент вектора устанавливается на основании преобразования трех чисел Δx_i . Если Δx_i — разности декартовых прямоугольных координат каких-либо двух точек в системе (K), то разности координат этих точек $\Delta x_i'$ в другой декартовой системе (K') определяются согласно формуле (4):

$$\Delta x_i = \alpha_{i'k} \Delta x_k$$

где $\alpha_{i'k}$ — косинус угла между i' -й осью системы (K') и k -й осью системы (K).

Если в пространстве задан вектор A , то его компоненты A_i можно найти, выбрав какую-то систему (K) декартовых координат.

В другой системе координат (K') (рис. 2) его компоненты, естественно, будут другими A'_i хотя сам вектор A остается неизменным в том смысле, что A'_i определяют тот же самый вектор (например, скорость точки M).

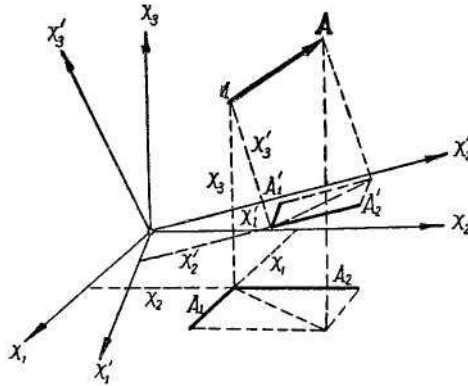


Рис. 2. Пример векторной величины.

Компоненты вектора A_i имеют разные значения в различных системах координат.

Так как каждому вектору можно сопоставить определенный отрезок в пространстве, то компонентам вектора будут соответствовать разности прямоугольных декартовых координат начала и конца этого отрезка. Поэтому, чтобы **понятие вектора как некоторой величины** не зависело от выбора системы координат, необходимо, чтобы его компоненты менялись так же, как, упомянутые разности координат.

Тогда в соответствии с законом (4) имеем для компонент вектора в прямоугольных декартовых координатах

$$A'_i = \alpha_{i'k} A_k$$

Этот закон и лежит в основе аналитического определения вектора.

Вектор — это величина, определяемая в любой системе координат тремя числами (или функциями) A_i , которые при изменении пространственной системы координат преобразуются в A'_i по закону

$$A'_i = \alpha_{i'k} A_k. \quad (6)$$

Три величины A_i являются **компонентами** вектора.

Обратно, если с изменением пространственной системы координат три числа A_i меняются по закону (6), то эти числа определяют вектор.

Если компоненты вектора заданы в одной системе декартовых координат (K), то, используя закон (6) преобразования компонент вектора, можно определить компоненты A'_i в любой другой системе, оси которой составляют с осями первой системы углы с косинусами $\alpha_{i'k}$.

Если три компоненты вектора обращаются в нуль в какой-либо системе координат (вектор равен нулю), то они равны нулю и в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (6).

Отметим, что это определение вектора эквивалентно определению, данному ранее. Однако оно позволяет естественным образом перейти к понятию величины более высокого ранга — тензоров 2-го и высших рангов и с единой точки зрения остановиться на **тензорных свойствах физических величин**.

Пример. Пусть в системе (K) координаты точки x_i меняются с течением времени t , так что

$$x_i = x_i(t)$$

Тогда за время Δt точка продвинется по осям системы (K) на расстояние

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t)$$

Эти три величины определяют вектор (вектор перемещения точки), ибо, учитывая закон преобразования (3), в другой системе (K') получим

$$x'_i(t + \Delta t) - x'_i(t) = \alpha_{i'k} [x_k(t + \Delta t) - x_k(t)].$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}. \quad (*)$$

Три таких отношения ($i=1, 2, 3$) составляют вектор. Действительно, в системе (K') имеем

$$\frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'}$$

Поскольку $t'=t$ и $t' = t$ и $x'_i = \alpha_{i'k} x_k$, то

$$\frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t},$$

что и доказывает векторный характер отношений (*). Вектор (*) называется средней скоростью точки за промежуток времени Δt в системе (K).

Совокупность трех пределов (если они существуют)

$$V_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t} \quad (**)$$

также определяет вектор.

Действительно, поскольку $\alpha_{i'k}$ не зависят от t , то, переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ получим

$$V'_i = \lim_{\Delta t' \rightarrow 0} \frac{x'_i(t' + \Delta t') - x'_i(t')}{\Delta t'} = \alpha_{i'k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_k(t + \Delta t) - x_k(t)}{\Delta t} = \alpha_{i'k} V_k.$$

Из этого закона преобразования пределов следует, что они определяют вектор. Вектор (***) называется истинной скоростью точки в момент времени t в системе (K) .

Аналогично, определяя истинное ускорение точки в момент времени t в системе (K) как совокупность трех пределов

$$W_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V_i(t + \Delta t) - V_i(t)}{\Delta t},$$

можно установить, что они также определяют вектор.

Тогда, принимая, что во всех координатных системах выполняется второй закон Ньютона

$$mW_i = F_i$$

найдем, что сила является векторной величиной.

4.4. Тензоры 2-го ранга

Как уже отмечалось, некоторые геометрические объекты, а также целый ряд физических свойств, требуют для своей характеристики больше трех чисел (или функций).

Это приводит к понятию величин, тензорные свойства которых сложнее, чем у векторов и скаляров. Такие величины, тензоры 2-го ранга, не могут быть составлены в виде простого набора векторов или скаляров. **Это качественно новые величины, отвечающие физическому или геометрическому смыслу описываемых объектов.**

Тензор напряжений. Рассмотрим пример, связанный с описанием **напряженного состояния среды** в точке, которое привело к понятию тензора напряжений.

Напряженное состояние среды в точке считается известно, если известно напряжение на любой площадке, проходящей через данную точку.

Вектор напряжения \mathbf{p} в среде является функцией точки и ориентации площадки, на которой рассматривается напряжение, т. е.

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{r}, \mathbf{n}),$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки, \mathbf{n} - орт нормали к площадке.

Зависимость вектора напряжения от ориентации площадки обычно отмечается индексом внизу, указывающим направление нормали к рассматриваемой площадке.

Вектор напряжения \mathbf{p} принципиально не годится для характеристики напряженного состояния среды в *точке*, ибо при этом надо рассматривать бесконечную совокупность \mathbf{p} на всевозможных площадках, проходящих через точку (рис. 3).

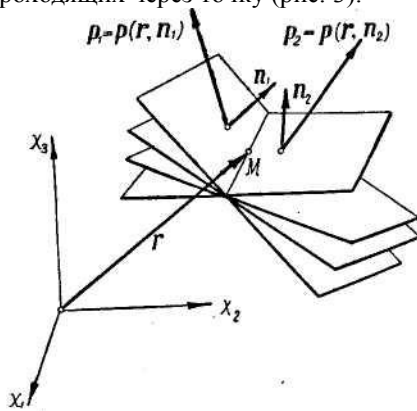


Рис. 3. К понятию тензора напряжений.

Вектор напряжения в сплошной среде зависит не только от точки, но и от ориентации площадки, на которой он рассматривается, и потому не является однозначной функцией точки.

Оказалось возможным определить такую величину, которая является однозначной функцией точки, т. е. не зависит от ориентации площадки и в то же время позволяет вычислить напряжение на любой площадке с нормалью \mathbf{n} .

Рассмотрим вырезанный в среде у точки M элементарный тетраэдр, три ребра которого направлены по осям декартовой системы координат (рис. 4).

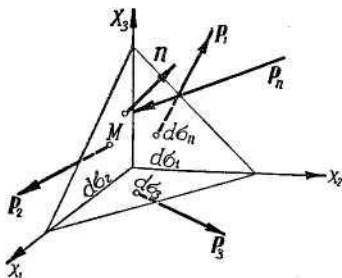


Рис. 4. Напряжения на гранях тетраэдра.

Обозначим площади граней, перпендикулярных к осям (x_1) , (x_2) , (x_3) системы (K) , через $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$, а наклонной грани с нормалью \mathbf{n} — через $d\sigma_n$. Действие среды на эти грани тетраэдра выражается соответственно в напряжениях \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 , \mathbf{p}_n , приложенных к граням. Здесь минус в индексах у напряжений означает, что рассматриваются напряжения на наружных сторонах граней тетраэдра, внешние нормали которых направлены противоположно осям (x_1) , (x_2) , (x_3) . Вследствие равенства действия и противодействия силы, действующие на внутренние стороны граней тетраэдра ($\mathbf{p}_1 d\sigma_1$, $\mathbf{p}_2 d\sigma_2$, $\mathbf{p}_3 d\sigma_3$), равны по величине и противоположны по направлению силам, действующим на наружные стороны граней. Отсюда имеем:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_3$$

Если \mathbf{W} — ускорение центра инерции тетраэдра, \mathbf{f} — вектор массовых сил, отнесенных к единице массы, то по закону движения центра инерции тетраэдра, массу которого обозначим через dm , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{W} dm &= \mathbf{f} dm + \mathbf{p}_n d\sigma_n + \mathbf{p}_{-1} d\sigma_1 + \mathbf{p}_{-2} d\sigma_2 + \mathbf{p}_{-3} d\sigma_3 = \\ &= \mathbf{f} dm + \mathbf{p}_n d\sigma_n - \mathbf{p}_1 d\sigma_1 - \mathbf{p}_2 d\sigma_2 - \mathbf{p}_3 d\sigma_3. \end{aligned}$$

В пределе, при стягивании тетраэдра к точке M (вследствие того, что члены, содержащие элемент массы, пропорциональной объему, являющиеся малыми более высокого порядка по сравнению с членами, содержащими элемент площади), получим

$$\mathbf{p}_n d\sigma_n = \mathbf{p}_1 d\sigma_1 + \mathbf{p}_2 d\sigma_2 + \mathbf{p}_3 d\sigma_3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i d\sigma_i.$$

Поскольку

$$d\sigma_i = d\sigma_n \cos(\mathbf{n}, x_i) = n_i d\sigma_n,$$

то

$$\mathbf{p}_n = \sum_{i=1}^3 p_i n_i \equiv \mathbf{p}_i n_i.$$

Проекция вектора напряжения \mathbf{p}_n на площадку с нормалью \mathbf{n} на оси системы (K)

$$p_{nk} = p_{ik} n_i.$$

Здесь p_{ik} — совокупность девяти напряжений, нормальных (при $i = k$) и касательных (при $i \neq k$) на трех взаимно-перпендикулярных площадках у точки M (рис. 5).

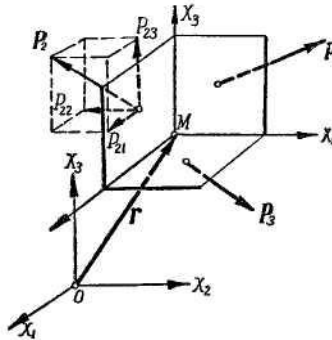


Рис. 5. Тензор напряжений как совокупность трех векторов напряжений $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ взаимно-перпендикулярных площадках. Проекция этих векторов на координатные оси представляют девять компонент тензора напряжений.

Эти девять величин, очевидно, никак не связаны с ориентацией площадки, на которой определяется напряжение \mathbf{p}_n , а лишь с данной точкой среды, в то же время знание p_{ik} позволяет вычислить напряжение \mathbf{p}_n на любой площадке, если известна ее ориентация \mathbf{n} . В каждой точке среды однозначно определена **одна физическая величина**, определяемая девятью числами p_{ik} **которая и служит исчерпывающей характеристикой напряженного состояния среды в точке.**

Совокупность этих величин p_{ik} определяет тензор 2-го ранга, который носит название *тензора напряжений*.

Рассмотрим закон преобразования девяти величин p_{ik} при изменении системы координат.

Не ограничивая общности, можно считать, что i -я ось новой системы координат (K') направлена по нормали \mathbf{n} (ибо при определении p_{ik} никаких ограничений на \mathbf{n} не накладывалось). Если $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты системы (K), а $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ — орты системы (K'), то

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}'_i.$$

Проекция \mathbf{n} на l -ю ось системы (K) $n_l = \mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_l = \mathbf{i}'_l \cdot \mathbf{i}_l = \alpha_{l'}$, где $\alpha_{l'}$ косинус угла между i -й осью системы (K') и l -ю осью системы (K).

Таким образом,

$$\mathbf{p}_n \equiv \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{p}_l n_l = \alpha_{l'i} \mathbf{p}_l = \alpha_{l'i} \mathbf{i}'_m p_{lm}$$

Спроектируем это равенство на k -ю ось системы (K')

$$\mathbf{p}'_i \cdot \mathbf{i}'_k = \alpha_{l'i} (\mathbf{i}'_m \cdot \mathbf{i}'_k) p_{lm}$$

или

$$p_{ik} = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} p_{lm}$$

Таков закон преобразования девяти величин p_{ik} при изменении декартовой системы координат.

Тензор 2-го ранга. Прежде чем дать определение тензора 2-го ранга, остановимся еще на двух примерах образования этих величин.

Пусть даны два линейно зависимых вектора \mathbf{A} и \mathbf{B} . Тогда их компоненты пропорциональны:

$$A_i = \lambda B_i$$

т.е. векторы коллинеарны.

В самом общем случае линейная зависимость между компонентами двух векторов, один из которых (например, \mathbf{B}) произволен, в некоторой системе (K) может быть выражена с помощью девяти коэффициентов (мы будем их обозначать через a_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$)) формулами:

$$A_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3;$$

$$A_2 = a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3;$$

$$A_3 = a_{31}B_1 + a_{32}B_2 + a_{33}B_3,$$

или сокращенно

$$A_i = a_{ik}B_k. \tag{*}$$

В другой системе (K') будут другие компоненты у векторов и другие числа a_{ik} , так что в системе (K') имеем

$$A'_i = a'_{ik}B'_k \tag{**}$$

Рассмотрим связь между числами a'_{ik} и a_{ik} .

Умножим каждое из уравнений (*) на $\alpha_{l'i}$ и просуммируем по i . Получим

$$\alpha_{l'i} A_i = \alpha_{ik} \alpha_{l'i} B_k$$

Тогда слева, согласно (6), получим i -ю компоненту вектора A в системе (K'). Таким образом,

$$A'_i = a_{ik} \alpha_{l'i} B_k.$$

Поскольку

$$B_k = \alpha_{m'k} B'_m,$$

то

$$A'_i = \alpha_{l'i} \alpha_{m'k} a_{ik} B'_m,$$

или, что одно и то же,

$$A'_i = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} a_{lm} B'_k.$$

Сравнивая это выражение с (**), в силу произвольности вектора B получим

$$a'_{ik} = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} a_{lm}.$$

Напомним, что справа стоит двойная сумма по l и m от 1 до 3.

Таков закон преобразования девяти чисел a_{ik} при изменении пространственной системы координат. Их совокупность, определенная в какой-либо системе координат, всегда определена и в любой другой системе.

Другой пример.

Из компонент двух независимых векторов A и B можно составить девять произведений вида

$$A_i B_k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

При переходе к другой системе координат (K') эти произведения будут иметь другие значения. Выразим их через старые значения. Это всегда можно сделать, ибо мы знаем закон преобразования компонент векторов A и B . Используя (6), получим

$$A'_i B'_k = \alpha_{l'i} A_l \alpha_{k'm} B_m = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} A_l B_m.$$

Таким образом, величины $A_i B_k$ преобразуются при изменении системы координат по тому же закону, что и числа a_{ik} из предыдущего примера.

Величины a_{ik} , $A_i B_k$ представляют примеры тензоров 2-го ранга.

Тензор 2-го ранга — это величина, определяемая в любой системе координат девятью числами (или функциями) A_{ik} , которые при изменении системы координат преобразуются в A'_{ik} по закону

$$A'_{ik} = \alpha_{l'i} \alpha_{k'm} A_{lm}. \quad (7)$$

Величины A_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга.

Если компоненты (A_{ik}) тензора заданы в одной декартовой прямоугольной системе координат, то по формуле (7) можно

определить компоненты (A'_{ik}) тензора в любой другой декартовой прямоугольной системе, оси которой составляют с осями первоначальной системы углы с косинусами $\alpha_{i'k}$.

Если все компоненты тензора обращаются в нуль в какой-либо системе координат, то они равны нулю в любой другой системе вследствие однородности закона преобразования (7).

Более удобно записывать тензор в виде матрицы:

$$\| A_{ik} \| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Рассмотрим несколько примеров, из которых видно, как некоторые геометрические и физические объекты требуют для своего описания тензоров 2-го ранга.

Пример 1. Пусть x_i — компоненты вектора, направленного из центра поверхности 2-го порядка, находящегося в начале системы декартовых координат, к точкам этой поверхности. Тогда **уравнение поверхности** имеет вид

$$A_{ik}x_ix_k = 1.$$

Числа A_{ik} полностью определяют эту поверхность, причем $A_{ik} = A_{ki}$.

Если (K') — система, повернутая относительно (K) на углы с косинусами $\alpha_{i'k}$, то

$$x'_i = \alpha_{i'k}x_k.$$

Уравнение поверхности в системе (K') имеет вид

$$A'_{ik}x'_ix'_k = 1.$$

Из закона преобразования величин x_i находим

$$A_{lm}x_lx_m = A_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm}x'_ix'_k = (A_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm})x'_ix'_k = 1.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей, получим закон преобразования девяти величин A_{ik}

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}A_{lm},$$

из которого заключаем, что величины A_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Пример 2. *Тензор моментов инерции.*

Вектор момента количества движения системы материальных точек относительно начала координат некоторой системы координаты (K)

$$L = \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{V}_n).$$

Здесь m_n — масса n -й точки, \mathbf{r}_n — радиус-вектор, \mathbf{V}_n — ее скорость.

Если расстояния $|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_p|$ между точками не меняются (**система представляет твердое тело**) и если их расстояния до начала координат также неизменны (твердое тело имеет неподвижную точку в начале координат), то по формуле Эйлера их скорости могут быть выражены через мгновенную угловую скорость системы ω :

$$\mathbf{V}_n = \omega \times \mathbf{r}_n.$$

Тогда, учитывая (19) из п. 3, получим

$$\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N m_n [\mathbf{r}_n \times (\omega \times \mathbf{r}_n)] = \sum_{n=1}^N m_n [\omega (\mathbf{r}_n \cdot \mathbf{r}_n) - \mathbf{r}_n (\omega \cdot \mathbf{r}_n)],$$

или в проекциях ($x_i^{(n)}$ — координаты n -й точки)

$$L_i = \sum_{n=1}^N m_n (\omega_i x_i^{(n)} x_i^{(n)} - x_i^{(n)} \omega_k x_k^{(n)}).$$

Представив $\omega_i \equiv \delta_{ik} \omega_k$, запишем

$$L_i = \omega_k \sum_{n=1}^N m_n (\delta_{ik} x_i^{(n)} x_i^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}) = \omega_k I_{ik},$$

где

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (\delta_{ik} x_i^{(n)} x_i^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}). \tag{9}$$

Девять величин I_{ik} выражаются через моменты инерции $I_{x_1 x_1}$, $I_{x_1 x_2}$, ... следующим образом:

$$I_{11} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_2^{(n)})^2 + (x_3^{(n)})^2] = I_{x_1 x_1};$$

$$I_{22} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^{(n)})^2 + (x_3^{(n)})^2] = I_{x_2 x_2};$$

$$I_{33} = \sum_{n=1}^N m_n [(x_1^{(n)})^2 + (x_2^{(n)})^2] = I_{x_3 x_3};$$

$$I_{12} = I_{21} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = - I_{x_1 x_2};$$

$$I_{13} = I_{31} = - \sum_{n=1}^N m_n x_3^{(n)} x_1^{(n)} = - I_{x_1 x_3};$$

$$I_{23} = I_{32} = - \sum_{n=1}^N m_n x_2^{(n)} x_3^{(n)} = - I_{x_2 x_3}.$$

Покажем, что девять величин I_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором моментов инерции* системы.

В какой-либо другой системе (K') прямоугольных декартовых координат моменты инерции имеют вид (рис. 6)

$$I'_{ik} = \sum_{n=1}^N m_n (\delta'_{ik} x_i'^{(n)} x_l'^{(n)} - x_i'^{(n)} x_k'^{(n)}).$$

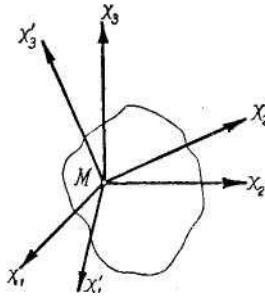


Рис. 6. К понятию тензора моментов инерции твердого тела

Каждой точке M твердого тела можно сопоставить девять чисел, образующих тензор моментов инерции.

Рассмотрим закон преобразования I_{ik} в I'_{ik} при изменении системы координат

Из закона преобразования векторов имеем

$$x_l'^{(n)} x_l'^{(n)} = x_l^{(n)} x_l^{(n)};$$

$$x_i'^{(n)} x_k'^{(n)} = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} x_s^{(n)} x_r^{(n)}.$$

Из определения величин получим δ_{ik} , что в системе (K) $\alpha_{i'k} \alpha_{i'k} = \delta_{ik}$,
а в системе (K') — $\alpha_{i's} \alpha_{k's} = \delta_{ik}$

Учитывая, что $\alpha_{k's} = \alpha_{k'r} \delta_{sr}$, получим

$$\delta_{ik}^* = \alpha_{i's} = \alpha_{k'r} \delta_{sr} \quad (10)$$

Таким образом, вследствие независимости $\alpha_{i'k}$ от координат

$$\begin{aligned} I_{ik}^* &= \sum_{n=1}^N m_n (\alpha_{i's} \alpha_{k'r} \delta_{sr} x_i^{(n)} x_r^{(n)} - \alpha_{i's} \alpha_{k'r} x_s^{(n)} x_r^{(n)}) = \\ &= \alpha_{i's} \alpha_{k'r} \sum_{n=1}^N m_n (\delta_{sr} x_i^{(n)} x_r^{(n)} - x_s^{(n)} x_r^{(n)}) = \alpha_{i's} \alpha_{k'r} I_{sr}. \end{aligned}$$

Это доказывает, что девять величин I_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Закон преобразования (10) показывает, что величины δ_{ik} также образуют тензор 2-го ранга. Вследствие его особого строения он носит название **единичного тензора**. Его матрица имеет вид ,

$$\| \delta_{ik} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Тензор деформаций. Рассмотрим в упругом теле две произвольные точки A и B, которые в результате деформации тела заняли положение A' и B'. При этом до деформации их радиус-векторы были равны (см. рис. 7) \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, а после деформации $\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$. Векторы $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r})$ называются векторами смещения точек (A и B).

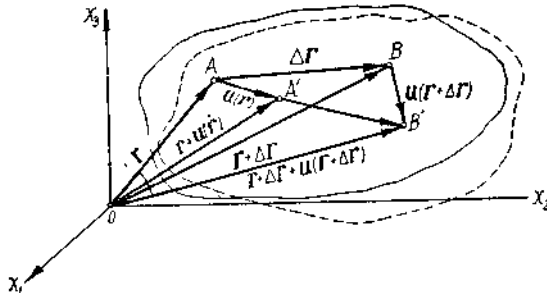


Рис. 7. Деформация упругой частицы.

Относительный радиус-вектор точек до деформации был Δr , после деформации стал равным $\Delta r'$. Вычислим изменение его величины в результате деформации, т. е. определим разность $(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$. При этом мы предположим, что вектор смещения u является непрерывной функцией точки, т. е. $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$. Из рис. 7 имеем

$$\Delta r' = \Delta r + u(r + \Delta r) - u(r),$$

или в проекциях

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

Пренебрегая малыми второго порядка, получим

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k.$$

Возводя выражение в квадрат и замечая, что $\Delta x'_i \Delta x'_i = (\Delta r')^2$ и $\Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2$, находим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l.$$

Меняя индексы суммирования i и l во второй сумме и записывая первую сумму в виде

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \Delta x_l \Delta x_k = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Delta x_k \Delta x_i, \end{aligned}$$

получим

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_k = 2u_{ik} \Delta x_i \Delta x_k,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right).$$

Итак, изменение расстояния между любыми двумя точками целиком определяется, если известны девять величин u_{ik} .

Покажем, что u_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Этот тензор называется *тензором деформаций*.

В другой координатной системе (K') имеем

$$u'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x'_i} + \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_i} \right).$$

Используя формулу (6) для преобразования компонент вектора u и формулы (3), получим

$$\begin{aligned}
 u'_{ik} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha'_{r'm} u_m) \frac{\partial x_n}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha_{k'n} u_n) \frac{\partial x_m}{\partial x_i} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial x_n} (\alpha'_{r's} u_s) \frac{\partial x_n}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_m} (\alpha'_{r's} u_s) \frac{\partial x_m}{\partial x_i} \right] = \\
 &= \alpha'_{r'm} \alpha_{k'n} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} + \frac{\partial u_s}{\partial x_n} \frac{\partial u_s}{\partial x_m} \right] = \alpha'_{r'm} \alpha_{k'n} u_{mn}.
 \end{aligned}$$

Эта формула преобразования u_{mn} в u'_{ik} при изменении системы координат и доказывает, что величины u_{ik} являются компонентами тензора 2-го ранга.

Обычно в линейной теории упругости пренебрегают членом $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l}$, и тогда

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right).$$

Пример 4. Тензор скоростей деформаций. Согласно теореме Гельмгольца, на выводе которой мы здесь останавливаться не будем, движение частицы жидкости или газа можно разложить на **квazitвердое** (движение частицы, как частицы твердого тела) и **деформационное**. Деформационное движение определяется тензором скоростей деформации

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right), \quad (11)$$

в том смысле, что скорость точки M частицы по отношению к точке O , являющаяся исключительно следствием способности частицы деформироваться (деформационная скорость), равна (см. рис. 8)

$$V^D_i(M) = V_{ik}(O) \Delta x_k, \quad (12)$$

где $\Delta r = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$ — расстояние между точками M и O ;

$V^D_i(M)$ — деформационная скорость частицы в точке M ;

$V_{ik}(O)$ — значение тензора V_{ik} в точке O .

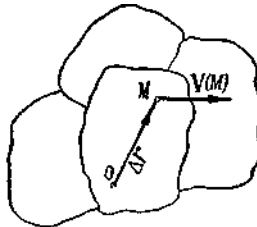


Рис. 8. Скорость деформации жидкой частицы.

Нетрудно проверить, что девять величин V_{ik} образуют тензор 2-го ранга (см. предыдущий пример).

Остановимся подробнее на физическом смысле компонент тензора скоростей деформации.

В частице жидкости (рис. 9) отметим две точки: A и B — до деформации частицы.

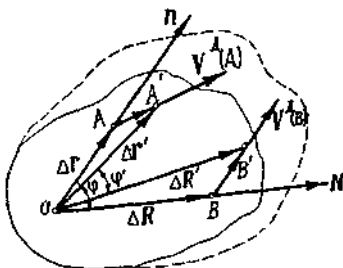


Рис. 9. Деформация жидкой частицы.

После деформации, совершившейся за время Δt , положение этих точек пусть будет A' и B' . Положение точек A и B по отношению к точке O до деформации определим соответственно радиусами-векторами Δr и ΔR , а после деформации — радиусами-векторами $\Delta r'$ и $\Delta R'$. Изменения длин векторов Δr , ΔR и угла между ними характеризуют деформацию частицы.

Смещения точек A (вектор $\overline{AA'}$) и B (вектор $\overline{BB'}$) в результате деформации частицы совершились по направлению деформационных скоростей этих точек $V^D(A)$ и $V^D(B)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\overline{AA'} &= V^D(A) \Delta t; \\ \overline{BB'} &= V^D(B) \Delta t.\end{aligned}$$

Тогда из векторных треугольников OAA' и OBB' имеем

$$\begin{aligned}\Delta r' &= \Delta r + V^D(A) \Delta t; \\ \Delta R' &= \Delta R + V^D(B) \Delta t.\end{aligned}$$

Выражая деформационные скорости через тензор скоростей деформации по (12) и переходя к компонентам, получим

$$\begin{aligned}\Delta x'_i &= \Delta x_i + V_{ik} \Delta x_k \Delta t; \\ \Delta X'_i &= \Delta X_i + V_{ik} \Delta X_k \Delta t.\end{aligned}$$

Здесь Δx_i — i -я компонента радиуса-вектора Δr , аналогично $\Delta x'_i$, ΔX_i , $\Delta X'_i$ — i -е компоненты радиусов-векторов $\Delta r'$, ΔR , $\Delta R'$. Значения производных в V_{ik} берутся для точки O .

Составим скалярное произведение $\Delta \mathbf{r}' \cdot \Delta \mathbf{R}'$. Учитывая симметричность тензора V_{ik} т. е. $V_{ik} = V_{ki}$, найдем с точностью до членов первого порядка малости относительно Δt :

$$\Delta \mathbf{r}' \cdot \Delta \mathbf{R}' = \Delta x'_i \Delta X'_i = \Delta x_i \Delta X_i + 2V_{ik} \Delta x_k \Delta X_i \Delta t. \quad (13)$$

Теперь охарактеризуем деформацию частицы.

Пусть \mathbf{n} — орт вектора $\Delta \mathbf{r}$, а \mathbf{N} — орт вектора $\Delta \mathbf{R}$, т. е.

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta r}; \quad \mathbf{N} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{|\Delta \mathbf{R}|} = \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta R}.$$

По определению, относительное удлинение частицы (за время Δt) в направлении \mathbf{n}

$$\varepsilon_{\mathbf{n}} = \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} - 1,$$

а скорость относительного удлинения в том же направлении

$$\dot{\varepsilon}_{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_{\mathbf{n}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r' - \Delta r}{\Delta r \Delta t}.$$

Пусть φ — угол между векторами $\Delta \mathbf{r}$ и $\Delta \mathbf{R}$ до деформации, а φ' — после деформации частицы

Величины $\dot{\varepsilon}_{\mathbf{n}}$ характеризуют скорости линейной деформации частицы, а величины $\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi - \varphi'}{\Delta t}$ — скорости угловой деформации частицы.

Разделив (13) на $\Delta r \Delta R$, получим

$$(1 + \varepsilon_{\mathbf{n}})(1 + \varepsilon_{\mathbf{N}}) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2V_{ik} n_k N_i \Delta t,$$

ибо

$$\frac{\Delta x'_i \Delta X'_i}{\Delta r \Delta R} = \frac{\Delta r' \Delta R' \cos \varphi'}{\Delta r \Delta R};$$

$$n_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta r}; \quad N_k = \frac{\Delta X_k}{\Delta R}.$$

Оставляя в полученном выражении члены первого порядка малости относительно ε , получим

$$(1 + \varepsilon_{\mathbf{n}} + \varepsilon_{\mathbf{N}}) \cos \varphi' = \cos \varphi + 2V_{ik} n_k N_i \Delta t. \quad (14)$$

Рассмотрим частные случаи этого соотношения.

1. Пусть точка A совпадает с точкой B и лежит на оси (x_1) до деформации. Тогда

$$\varphi = \varphi' = 0;$$

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{R} = i_1 \Delta x_1;$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{N} = i_1 \quad (N_1 = n_1 = 1; \quad N_2 = N_3 = n_2 = n_3 = 0).$$

Из (14) в этом случае получаем

$$\mathbf{I} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \mathbf{I} + 2V_{11}\Delta t.$$

Отсюда

$$\varepsilon_i = V_{ii} = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}.$$

Выбрав точки A и B до деформации совпадающими вначале на оси (x_2) , а затем на оси (x_3) , получим последовательно:

$$\varepsilon_2 = V_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2}; \quad \varepsilon_3 = V_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}.$$

Итак, диагональные компоненты тензора скоростей деформаций (V_{11}, V_{22}, V_{33}) представляют собой скорости относительного удлинения частицы вдоль трех координатных осей

2. Пусть точка A лежит до деформации на оси (x_1) , а точка B — на оси (x_2) . Тогда

$$\varphi = \frac{\pi}{2}; \quad \mathbf{n} = \mathbf{i}_1; \quad \mathbf{N} = \mathbf{i}_2; \quad \Delta \mathbf{r} \perp \Delta \mathbf{R}.$$

Из (14) в этом случае получим

$$(\mathbf{I} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cos \varphi' = 2V_{12}\Delta t. \quad (15)$$

Обозначим

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \varphi'$$

— изменение прямого угла в частице между отрезками, направленными до деформации вдоль осей (x_1) и (x_2) . Тогда, рассматривая малые величины γ_{12} , найдем

$$\gamma_{12} \approx \sin \gamma_{12} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi' \right) = \cos \varphi'.$$

Отбрасывая в (15) величины второго порядка малости, получим

$$\gamma_{12} = 2V_{12}\Delta t.$$

Отсюда

$$\dot{\gamma}_{12} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi'}{\Delta t} = 2V_{12} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1}.$$

Совершенно аналогично можно получить

$$\dot{\gamma}_{13} = \frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} = 2V_{13};$$

$$\dot{\gamma}_{23} = \frac{\partial V_2}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_2} = 2V_{23};$$

} (16)

Итак, недиагональные компоненты тензора скоростей деформаций $(V_{12} = V_{21}, V_{13} = V_{31}, V_{23} = V_{32})$ представляют собой половину скоростей изменения углов между отрезками, направленными до деформации по соответствующим осям (половину скоростей угловой деформации частицы).

4.5. Тензоры высших рангов

Выпишем законы преобразования компонент тензоров нулевого, 1-го и 2-го рангов

$$\varphi' = \varphi; A'_i = \alpha_{i'l} A_l; A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm}.$$

Формула преобразования скаляров не содержит коэффициентов $\alpha_{i'k}$, в формулу преобразования компонент вектора коэффициенты $\alpha_{i'k}$ входят линейно (однородная функция первой степени относительно $\alpha_{i'k}$), формула преобразования компонент тензора 2-го ранга является уже однородной функцией второй степени относительно $\alpha_{i'k}$.

Как обобщение, можно дать определение тензора n -го ранга.

Тензор n -го ранга — это величина, определяемая в каждой системе декартовых координат совокупностью 3^n чисел (или функций) $A_{ikl\dots}$ (n — число индексов), которые при изменении системы координат преобразуются по закону

$$A'_{ikl\dots} = \alpha_{i'p} \alpha_{k'r} \alpha_{l's} \dots A_{prs\dots} \quad (17)$$

Сумма справа является однородным многочленом (формой) степени n относительно косинусов углов $\alpha_{i'k}$, $A_{ikl\dots}$ — компонента тензора. Если они все равны нулю в какой-то системе координат, то тензор тождественно равен нулю.

Рассмотрим несколько примеров тензоров высших рангов.

Пример 1. Если A, B, C — три вектора, то $3^3 = 27$ величин

$$D_{ikl} = A_i B_k C_l$$

составляют тензор 3-го ранга.

Пример 2. Пусть A_{ik} и B_{ik} — два тензора 2-го ранга, один из которых (например, B_{ik}) произволен, и пусть между компонентами этих тензоров существует линейная зависимость. Ее можно записать в виде

$$A_{ik} = \lambda_{iklm} B_{lm},$$

где λ_{iklm} — совокупность $3^4 = 81$ коэффициента.

Можно показать на основании закона преобразования A_{ik} и B_{ik} , что λ_{iklm} образует тензор 4-го ранга, т.е.

$$\lambda'_{iklm} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} \lambda_{nprs}.$$

Компоненты тензора 2-го ранга, образованного рассмотренной ранее совокупностью девяти произведений $A_i B_k = C_{ik}$, ($i, k = 1, 2, 3$) компонент A_i и B_k векторов A и B , иногда записывают в виде $C = AB$ (без знака умножения), которое называется *диадным произведением*. Это произведение не обладает свойством коммутативности, и матрица произведения BA является транспонированной матрицей тензора AB .

По аналогии с записью вектора в виде $A=A_i e^i$ определенный таким образом тензор можно записать в виде

$$C = A_i B_k e^i e^k = C_{ik} e^i e^k \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Обобщая этот способ записи на случай тензора любого ранга, тензор n -го ранга представляем в виде

$$T = T_{i_k^{pq} \dots} e^i e^k \dots e_p e_q \dots \quad (i, k, \dots, p, q, \dots = 1, 2, 3),$$

где суммирование производится по всем индексам i, k, \dots, p, q, \dots ; напомним, что в каждом одночлене произведение $e^i e^k \dots e_p e_q \dots$ имеют определенный порядок.

4.6. Преобразование компонент векторов и тензоров при повороте координатной плоскости вокруг перпендикулярной оси

Иногда приходится рассматривать частный случай преобразования координат — поворот системы вокруг одной из координатных осей. Если векторы или тензоры заданы в плоскости, такое преобразование является единственно возможным и определяется одним параметром. Выберем в качестве параметра угол φ , который составляет новая ось (x') со старой осью (x), когда поворот координатной системы совершается вокруг оси (z) (рис. 10).

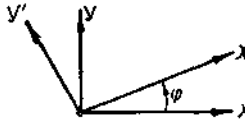


Рис. 10. Поворот координатной системы вокруг оси (z)

Тогда из общих формул (3) следует:

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi,$$

$$y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi,$$

$$z' = z.$$

Отсюда для комплексного числа $x + iy$, определяющего радиус-вектор, расположенный в плоскости (xy), получим формулу преобразования следующего вида:

$$x' + iy' = (x + iy) e^{i\varphi},$$

а для сопряженного комплексного числа $x - iy$ формулу

$$x' - iy' = (x - iy) e^{-i\varphi}.$$

Если задан вектор $A(A_x, A_y, A_z)$, то получим следующие формулы преобразования для величин $A_x + iA_y, A_x - iA_y, A_z$:

$$\left. \begin{aligned} A'_x + iA'_y &= (A_x + iA_y) e^{i\varphi} \\ A'_x - iA'_y &= (A_x - iA_y) e^{-i\varphi} \\ A'_z &= A_z \end{aligned} \right\}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} A_x + iA_y &= A_{+1}, \\ A_x - iA_y &= A_{-1}, \\ A_z &= A_0. \end{aligned}$$

(18)

Тогда формулы преобразования (18) можно записать коротко в виде

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\varphi} \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать!}),$$

где α принимает значения $-1, 0, +1$.

В случае $A_z = 0$ вектор целиком лежит в плоскости (xy) и его компоненты преобразуются также согласно (18). Эти формулы можно получить и иначе, если записать комплексные числа через модуль и аргумент:

$$A_{+1} = Ae^{i\gamma}, \quad A_{-1} = Ae^{-i\gamma}.$$

При повороте осей на угол φ у комплексных величин меняется аргумент. Новый аргумент γ' равен

$$\gamma' = \gamma + \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A'_{+1} &= Ae^{i\gamma'} = Ae^{i\gamma}e^{i\varphi} = A_{+1}e^{i\varphi}, \\ A'_{-1} &= Ae^{-i\gamma} = Ae^{-i\gamma}e^{-i\varphi} = A_{-1}e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Если заданы два вектора $A(A_x, A_y, A_z)$ и $B(B_x, B_y, B_z)$, то справедливы формулы преобразования:

$$A'_\alpha = A_\alpha e^{i\alpha\varphi}, \quad B'_\alpha = B_\alpha e^{i\alpha\varphi} \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать!}).$$

Тогда для величин $A_\alpha B_\beta$ устанавливаются следующие формулы:

$$A'_\alpha B'_\beta = A_\alpha B_\beta e^{i(\alpha+\beta)\varphi} \quad (\text{по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!}), \quad (19)$$

где индексы α, β могут принимать порознь одно из значений: $-1, 0, +1$.

При этом величины $A_\alpha B_\beta$ связаны с компонентами векторов следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_0 B_0 &= A_z B_z; \\
 A_{+1} B_{+1} &= (A_x + iA_y)(B_x + iB_y) = A_x B_x - A_y B_y + \\
 &\quad + i(A_x B_y + A_y B_x); \\
 A_{-1} B_{-1} &= (A_x - iA_y)(B_x - iB_y) = A_x B_x - A_y B_y - \\
 &\quad - i(A_x B_y + A_y B_x); \\
 A_0 B_{+1} &= A_z(B_x + iB_y) = A_z B_x + iA_z B_y; \\
 A_0 B_{-1} &= A_z(B_x - iB_y) = A_z B_x - iA_z B_y; \\
 A_{+1} B_0 &= (A_x + iA_y)B_z = A_x B_z + iA_y B_z; \\
 A_{-1} B_0 &= (A_x - iA_y)B_z = A_x B_z - iA_y B_z; \\
 A_{+1} B_{-1} &= (A_x + iA_y)(B_x - iB_y) = A_x B_x + A_y B_y - \\
 &\quad - i(A_x B_y - A_y B_x); \\
 A_{-1} B_{+1} &= (A_x - iA_y)(B_x + iB_y) = A_x B_x + A_y B_y + \\
 &\quad + i(A_x B_y - A_y B_x).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Из формулы (19) следуют формулы преобразования величин, представляющих некоторые комбинации компонент векторов A и B . Так, в частности, при $\alpha = +1$, $\beta = -1$

$$A'_{+1} B'_{-1} = A_{+1} B_{-1},$$

или

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y - i(A'_x B'_y - A'_y B'_x) = A_x B_x + A_y B_y - i(A_x B_y - A_y B_x).$$

Приравнявая действительные и мнимые части, получим.

$$A'_x B'_x + A'_y B'_y = A_x B_x + A_y B_y,$$

$$A'_x B'_y - A'_y B'_x = A_x B_y - A_y B_x.$$

Первое из этих соотношений совместно с $A'_z B'_z = A_z B_z$, получающимся из (19) при $\alpha = \beta = 0$, означает, что скалярное произведение векторов при данном преобразовании остается неизменным, как и при любом преобразовании координат.

Второе соотношение выражает неизменность проекции векторного произведения $A \times B$ на ось (z). Это можно было предвидеть, ибо при рассматриваемом преобразовании координат ось (z) остается неизменной.

Аналогичные выводы получим для случая $\alpha = -1$, $\beta = +1$.

Теперь рассмотрим симметричный тензор 2-го ранга с компонентами p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} , $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{zx} = p_{xz}$, $p_{yz} = p_{zy}$.

Если $p_{zz} = p_{zx} = p_{zy} = 0$, то о таком тензоре говорят, что он задан на плоскости (xy). Таким **тензором** полностью описывается **плоское напряженное состояние упругого тела**, когда напряжения в теле не зависят от координаты z и все векторы напряжений дают на ось (z) проекцию, равную нулю. Из компонент этого тензора построим величины $p_{\alpha\beta}$ аналогично (20);

$$\begin{aligned} p_{+1+1} &= p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}; & p_{00} &= p_{zz}; \\ p_{-1-1} &= p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}; & p_{0+1} &= p_{+10} = p_{xz} + ip_{yz}; \\ p_{+1-1} &= p_{xx} + p_{yy} = p_{-1+1}; & p_{0-1} &= p_{-10} = p_{xz} - ip_{yz}. \end{aligned}$$

Тогда, применяя формулы преобразования компонент тензора 2-го ранга в рассматриваемом случае плоского вращения системы вокруг оси (z), можно получить следующую удобную формулу преобразования величин $p_{\alpha\beta}$:

$$p'_{\alpha\beta} = e^{i(\alpha+\beta)\varphi} p_{\alpha\beta} \text{ (по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать!).}$$

Формула такой же структуры справедлива и для плоского тензора любого ранга, т. е.

$$p'_{\alpha\beta\gamma\dots} = e^{i(\alpha+\beta+\gamma+\dots)\varphi} p_{\alpha\beta\gamma\dots} \quad (21)$$

(по $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ не суммировать!).

причем величины $p_{\alpha\beta\gamma\dots}$ связаны с компонентами тензора так же, как величины $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ с компонентами векторов **A, B, C**, а $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ могут принимать значения $+1, 0, -1$.

Из этой общей формулы (21) имеем:

$$\begin{aligned} p'_{+1-1} &= p_{+1-1} & p'_{00} &= p_{00}; \\ p'_{+1+1} &= e^{2i\varphi} p_{+1+1}; & p'_{0+1} &= e^{i\varphi} p_{0+1}; \\ p'_{-1-1} &= e^{-2i\varphi} p_{-1-1}; & p'_{0-1} &= e^{-i\varphi} p_{0-1}, \end{aligned}$$

или, расписав, получим:

$$\begin{aligned} p'_{xx} + p'_{yy} &= p_{xx} + p_{yy}; \\ p'_{xx} - p'_{yy} + 2ip'_{xy} &= (p_{xx} - p_{yy} + 2ip_{xy}) e^{2i\varphi}; \\ p'_{xx} - p'_{yy} - 2ip'_{xy} &= (p_{xx} - p_{yy} - 2ip_{xy}) e^{-2i\varphi}; \\ p'_{zz} &= p_{zz}; \\ p'_{xz} + ip'_{yz} &= (p_{xz} + ip_{yz}) e^{i\varphi}; \\ p'_{xz} - ip'_{yz} &= (p_{xz} - ip_{yz}) e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

Первые три формулы широко известны и имеют большое значение в плоской задаче теории упругости. Из этих формул, записав $e^{2i\varphi} = \cos 2\varphi + i \sin 2\varphi$ и отделяя мнимые и действительные

части, получим выражения для $\rho'_{xx} - \rho'_{yy}$ и ρ'_{xy} через старые компоненты. Комбинируя эти выражения, находим:

$$\begin{aligned}\rho'_{xx} &= \frac{\rho_{xx} + \rho_{yy}}{2} + \frac{\rho_{xx} - \rho_{yy}}{2} \cos 2\varphi - \rho_{xy} \sin 2\varphi; \\ \rho'_{yy} &= \frac{\rho_{xx} + \rho_{yy}}{2} - \frac{\rho_{xx} - \rho_{yy}}{2} \cos 2\varphi + \rho_{xy} \sin 2\varphi; \\ \rho'_{xy} &= \frac{\rho_{xx} - \rho_{yy}}{2} \sin 2\varphi + \rho_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

4.7. Инвариантность тензорных уравнений

Под инвариантностью уравнения относительно изменения системы координат понимается неизменяемость его вида при переходе от одной системы координат к другой.

Как было показано, **преобразование координат сопровождается преобразованием функций, входящих в уравнение, по закону, вполне определенному для каждой функции: для скалярной функции один закон, для векторной — другой и т. д.**

Сопоставляется начальный вид уравнения до преобразования координат с конечным его видом после преобразования. Вообще говоря, новые, преобразованные функции будут удовлетворять новому уравнению, описывающему то же самое явление в новой системе координат. Если это новое уравнение имеет такой же вид в новых координатах, как и первоначальное уравнение в старых координатах, то такое уравнение называется *инвариантным*.

Инвариантность уравнений, описывающих тот или иной физический закон, является их неперменным свойством, ибо **закон должен иметь одну и ту же формулировку в любой системе координат вследствие однородности и изотропности реального пространства.**

Для инвариантности уравнений необходимо, чтобы все тензоры, которые входят в виде слагаемых в это уравнение, были тензорами одного ранга.

Вектор не может быть сложен со скаляром, тензор 2-го ранга — с вектором и т. п.

Это положение имеет такой же универсальный характер, как и положение об одинаковой размерности слагаемых в уравнениях.

Уравнение прямой в системе декартовых координат имеет вид

$$x_k - a_k - \lambda e_k = 0.$$

Умножим каждое из этих уравнений на $a_{i/k}$ и просуммируем по k :

$$\alpha_{i'k} x_k - \alpha_{i'k} a_k - \lambda \alpha_{i'k} e_k = 0.$$

Так как x_i, a_i, e_i — компоненты векторов, то, вспоминая закон (6), получим уравнение прямой в системе (K')

$$x'_i - a'_i - \lambda e'_i = 0,$$

где x'_i, a'_i, e'_i — компоненты векторов в новой системе координат (K').

Уравнение прямой инвариантно, ибо все слагаемые в нем — векторы — тензоры одного ранга.

Второй закон Ньютона справедлив и одинаково формулируется в любой из декартовых систем координат. Следовательно, уравнения, выражающие этот закон, должны иметь один и тот же вид в любой из декартовых координат, т. е. должны быть инвариантными в указанном смысле. Инвариантность обеспечивается тем, что скорость и сила — векторы, а время и масса (вообще переменная) — скаляры.

Имеем в системе (K):

$$\frac{d}{dt} (mV_i) = F_i.$$

В системе (K') получаем совершенно аналогичную запись

$$\frac{d}{dt} (mV'_i) = F'_i$$

в силу того, что

$$\begin{aligned} m &= m' & V'_i &= \alpha_{i'k} V_k; \\ t &= t' & F'_i &= \alpha_{i'k} F_k. \end{aligned}$$

Инвариантностью обладают все правильно сформулированные физические законы.

4.8. Криволинейные координаты

Координатные поверхности и линии. Положение точки M в пространстве, как было сказано, можно определить ее радиусом-вектором r относительно некоторой фиксированной точки O . Этот вектор, не зависящий от выбранной системы координат, в пространстве трех измерений определяется тремя числами q^1, q^2, q^3 (числа 1, 2, 3 — индексы, а не степени), которые уже зависят от устанавливаемого способа определения их, т. е. от принятой системы координат.

Несколько обобщая сказанное в п. 3.3 относительно координат на плоскости, можно условиться, например, эти три числа определять как расстояния с соответствующими знаками до трех взаимно-

перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O , положив $q^1 = x_1$, $q^2 = x_2$, $q^3 = x_3$, и тогда говорят о прямоугольной декартовой системе координат.

Если положение точки M определять координатой z по оси, проходящей через точку O , расстоянием R точки от оси, углом φ между фиксированной полуплоскостью, проходящей через ось z , и полуплоскостью, проведенной через z и точку M , то получится цилиндрическая система координат z, R, φ (п. 3. рис. 9, а).

Очевидно, если задавать для одной из величин q^i , например,

$$q^1 = \text{const},$$

и изменять непрерывно две другие q^2 и q^3 , то полученные точки будут принадлежать некоторому семейству поверхностей.

Таким же образом уравнения $q^2 = \text{const}$ (q^1, q^3 — переменные) и $q^3 = \text{const}$ (q^1, q^2 — переменные) определяют соответственно еще два других семейства поверхностей. Положим, что эти поверхности таковы, что через каждую точку M пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства. Тогда положение точки вполне однозначно определяется пересечением этих трех поверхностей. Они носят название координатных поверхностей, а величины q^1, q^2, q^3 — *криволинейных (обобщенных) координат точки M* . Вид координатных поверхностей зависит от способа определения величин q^i (рис. 11).

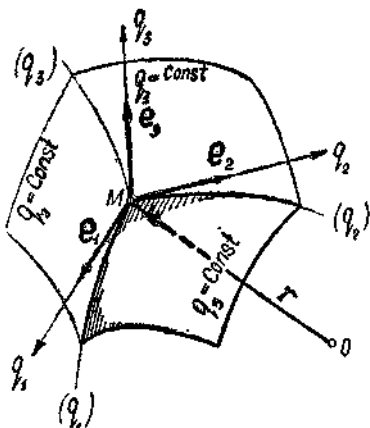


Рис. 11. Координатные поверхности, линии и оси в обобщенной координатной системе.

В прямоугольной системе координат, как легко видеть, координатными поверхностями являются три взаимно-перпендикулярные плоскости.

В цилиндрической системе координат координатные поверхности суть, $z = \text{const}$ — плоскость, перпендикулярная к оси z ; $R = \text{const}$ — круговой цилиндр радиуса R с образующими, параллельными оси z ; $\varphi = \text{const}$ — полуплоскость, проходящая через ось z под углом φ к фиксированной полуплоскости (рис. 12).

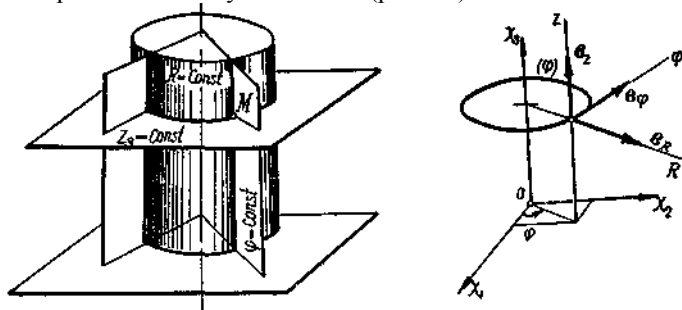


Рис. 12. Цилиндрическая система координат: координатные поверхности, координатные линии (φ , R , z) и базис их осей.

В сферической системе координат R , θ , φ (рис. 13) координатными поверхностями служат полуплоскость, проходящая через ось z под углом φ к плоскости отсчета, сфера радиуса R и конус с углом раствора 2θ .

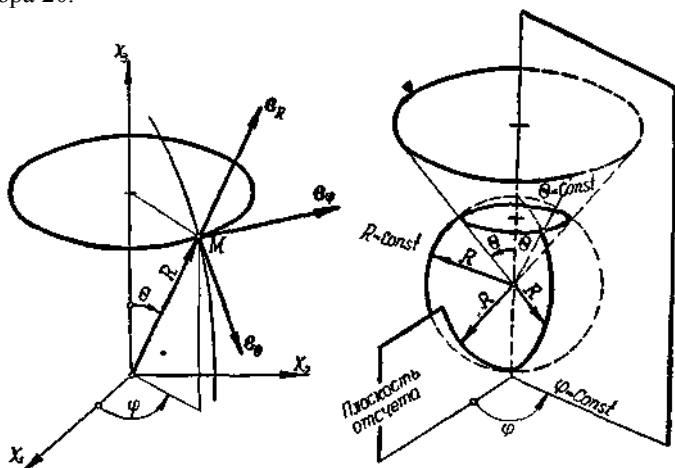


Рис. 13. Сферическая система координат: координатные поверхности, координатные линии (R , θ , φ) и векторный базис их осей.

Пересечение двух поверхностей дает линию. Очевидно, на этой линии значения двух координат постоянны, а третья меняется. Эти линии изменения одной из координат называются *координатными линиями* (рис. 11).

В прямоугольной системе координат это прямые, в цилиндрической — это прямая ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), прямая ($\varphi = \text{const}$, $z = \text{const}$) и окружность ($R = \text{const}$, $z = \text{const}$).

В сферической системе координат координатными линиями являются окружность ($R = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), окружность ($R = \text{const}$, $\theta = \text{const}$) и прямая ($\varphi = \text{const}$, $\theta = \text{const}$).

Условимся положительным направлением на координатной линии q^i называть направление, в котором перемещается точка при увеличении q^i .

Направления координатных линий определяют (рис. 11) с помощью координатного базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Векторы этого базиса касательны к соответствующим координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат. Этот базис называется *локальным* (местным). Важно отметить, что в общем случае векторы базиса не взаимно-перпендикулярны и не являются ортами ($|\mathbf{e}| \neq 1$). Касательные к координатным линиям, на которых установлено положительное направление базисными векторами, называются *координатными осями* криволинейной системы координат.

Следует отметить, что в случае декартовой системы координат (прямоугольной и косоугольной) базисные векторы совпадают для всех точек пространства. Этим свойством обладает только декартова система координат. Базисные векторы любой криволинейной системы координат различны для разных точек пространства (см. рис. 14).

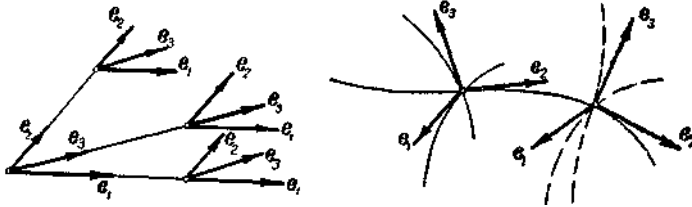


Рис. 14. Местный базис. Только в декартовых системах координат местный базис одинаков для всех точек пространства.

В этом случае координатный базис называют подвижным, ибо он меняется от точки к точке.

Если векторы базиса взаимно-перпендикулярны, то система криволинейных координат называется *ортогональной*.

В ортогональных системах касательные к координатным линиям в каждой точке пересекаются под прямыми углами. Цилиндрическая и сферическая криволинейные системы координат являются ортогональными. Как уже упоминалось, ортогональные системы наиболее распространены в теории моделирования, хотя условие ортогональности системы не обязательно для обобщенных координат (q_1, q_2, q_3) .

Основной характеристикой любой обобщенной системы координат является ее метрика, т. е. выражение квадрата элементарной дуги (см. п. 3.6):

$$ds^2 = g_{ik} dq^i dq^k.$$

Здесь $g_{ik} = e_i \cdot e_k$ — компоненты метрического тензора (см. 4.9).

С помощью компонент метрического тензора можно определить основные элементы пространства, арифметизированного системой координат (q^1, q^2, q^3) . Элемент дуги вдоль координатной линии q_i

$$ds_i = |e_i| dq^i = \sqrt{g_{ii}} dq^i \quad (\text{нет суммирования по } i!). \quad (22)$$

Элемент площади в координатной поверхности $q^l = \text{const}$

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= |e_2 \times e_3| dq^2 dq^3 = \sqrt{(e_2 \times e_3) \cdot (e_2 \times e_3)} dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{(e_2 \cdot e_2)(e_3 \cdot e_3) - (e_2 \cdot e_3)(e_3 \cdot e_2)} dq^2 dq^3 = \\ &= \sqrt{g_{22}g_{33} - g_{23}^2} dq^2 dq^3. \end{aligned}$$

Аналогично найдем

$$d\sigma_2 = \sqrt{g_{33}g_{11} - g_{13}^2} dq^3 dq^1,$$

$$d\sigma_3 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dq^1 dq^2,$$

или

$$d\sigma_i = \sqrt{g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2} dq^j dq^k \quad (\text{нет суммирования по } j \text{ и } k!), \text{ причем } i, j, k \text{ составляют четную перестановку чисел } 1, 2, 3.$$

(23)

Элемент объема получим, используя (п.3, выражение 46) из п.3.6:

$$d\tau = \sqrt{G} dq^1 dq^2 dq^3, \quad (24)$$

где

$$G = \det \|g_{ik}\|.$$

В случае ортогональной системы координат основными ее характеристиками являются коэффициенты Лямэ, определяемые равенством

$$ds^2 = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2.$$

Как было показано в 1.6,

$$H_1 = \sqrt{g_{11}}; \quad H_2 = \sqrt{g_{22}}; \quad H_3 = \sqrt{g_{33}}.$$

В этом случае

$$ds_i = H_i dq^i \quad (\text{нет суммирования!}),$$

$$d\sigma_i = H_i H_k dq^i dq^k \quad (\text{нет суммирования!}),$$

$$d\tau = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3.$$

(25)

Соответственно для декартовой системы прямоугольных координат, для цилиндрической и для сферической систем имеем

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2,$$

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (26)$$

$$ds^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Отсюда видно, что для прямоугольных декартовых координат все коэффициенты Лямэ равны единице, для цилиндрической системы координат имеем

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\varphi = R, \quad H_3 \equiv H_z = 1, \quad (27)$$

а для сферической

$$H_1 \equiv H_R = 1, \quad H_2 \equiv H_\theta = R, \quad H_3 \equiv H_\varphi = R \sin \theta. \quad (28)$$

Если непосредственно определить квадрат элемента дуги трудно, можно исходить из более общих соображений. Сопоставим каждой точке пространства три числа q^1, q^2, q^3 . Это означает, что ее радиус-вектор можно рассматривать как вектор-функцию аргументов q^1, q^2, q^3 , т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3).$$

Тогда, проектируя радиус-вектор на оси какой-то декартовой системы координат, получим три скалярные функции, устанавливающие соответствие между x_i и q^k :

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1(q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2(q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_3(q^1, q^2, q^3). \quad (29)$$

При этом, предполагая, что якобиан

$$I = \det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial q^k} \right\|$$

не равен нулю или бесконечности, мы получим взаимно однозначное соответствие между x_i и q^k , так что в дополнение к (29) существуют функции

$$q^1 = q^1(x_1, x_2, x_3), \quad q^2 = q^2(x_1, x_2, x_3), \quad q^3 = q^3(x_1, x_2, x_3). \quad (30)$$

Например, в случае цилиндрической системы координат

$$R \equiv q^1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \varphi \equiv q^2 = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \quad z \equiv q^3 = x_3; \quad (31)$$

$$x_1 = R \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \varphi, \quad x_3 = z,$$

а в случае сферической системы выражения (29) и (30) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R \equiv q^1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \theta \equiv q^2 &= \arctg \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \quad \varphi \equiv q^3 = \arctg \frac{x_2}{x_1}, \\ x_1 &= R \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = R \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Вычисляя полное бесконечно малое изменение радиуса-вектора, получим

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q^1} dq^1 + \frac{\partial r}{\partial q^2} dq^2 + \frac{\partial r}{\partial q^3} dq^3 \equiv \frac{\partial r}{\partial q^i} dq^i.$$

Отсюда метрика

$$ds^2 = (dr \ dr) = \frac{dr}{dq^i} \frac{dr}{dq^k} dq^i dq^k.$$

Таким образом, векторы локального базиса

$$e_i = \frac{\partial r}{\partial q^i}. \quad (33)$$

Следовательно, компоненты метрического тензора могут быть вычислены по формулам

$$g_{ik} = \frac{\partial r}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial q^k} = \frac{\partial x_l}{\partial q^i} \frac{\partial x_l}{\partial q^k}, \quad (34)$$

где $x_l = x_l(q^1, q^2, q^3)$ есть функции (29), причем

$$r = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$$

В случае ортогональных координат коэффициенты Лямэ могут быть вычислены по формулам

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q^i}\right)^2}. \quad (35)$$

4.9. Тензоры в системах обобщенных координат

Ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты тензоров.

В системе обобщенных координат, определяемой произвольным некоординатным базисом, вектор (тензор 1-го ранга) полностью определяется либо тремя его ковариантными компонентами A_i , либо тремя контравариантными компонентами A^i . Величины A_i отличаются

от A^i законом преобразования при изменении пространственной системы координат:

$$A'_i = \alpha_i^k A_k, \quad A'^i = \alpha_i'^k A^k.$$

Тем не менее эти величины не являются независимыми; связь между ними устанавливается формулами.

При этом коэффициенты g_{ik} (g^{ik}) определяют базис системы обобщенных координат, в которых рассматриваются компоненты вектора.

Аналогично, относя тензоры 2-го и выше рангов к общим системам координат, можно рассматривать различного рода их компоненты. Эти компоненты отличаются друг от друга законом преобразования при изменении пространственной системы координат. Существуют также формулы, связывающие различного рода компоненты между собой.

Приведем определение тензора 2-го ранга, которое не ограничено применением только декартовой системы прямоугольных координат.

Тензор 2-го ранга — это величина, полностью определяемая в любой системе координат $3^2 = 9$ числами (или функциями), называемыми компонентами. Компоненты тензора могут быть ковариантными A_{ik} , контравариантными A^{ik} , смешанными A_i^k, A^i_k . При изменении пространственной системы координат эти компоненты преобразуются в $A'_{ik}, A'^{ik}, A_i'^k, A^i'_k$ по закону:

$$\begin{aligned} A'_{ik} &= \alpha_i^r \alpha_k^m A_{rm}, & A'^{ik} &= \alpha_i'^r \alpha_k'^m A^{rm}, \\ A_i'^k &= \alpha_i^r \alpha_k^m A_r^m, & A^i'_k &= \alpha_i'^r \alpha_k^m A_r^m. \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь α_i^r, α_k^m — коэффициенты прямого и обратного преобразования.

Компоненты тензора, рассматриваемые в системе координат с метрикой $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, связаны между собой формулами

$$\begin{aligned} A^{ik} &= g^{il} g^{km} A_{lm}, \quad A_{ik} = g_{il} g_{km} A^{lm}, \quad A_{ik} = g_{kl} A_i^l = g_{il} A^l_k, \\ A_i^k &= g^{kl} A_{il}, \quad A_i^k = g_{il} A^{lk}, \end{aligned} \tag{37}$$

$A^i_k = g^{il} A_{lk}, A^i_k = g_{kl} A^{il}, A^{ik} = g^{il} A_i^k = g^{kl} A^i_l$. Точка в обозначениях смешанных компонент подчеркивает порядок следования индексов. Так, в A_i^k первый индекс «ковариантный», а второй — «контравариантный»; в A^i_k порядок следования индексов обратный.

Пример. Покажем, что величины g_{ik}, g^{ik}, g_i^k , определенные в п.3.6, являются компонентами тензора 2-го ранга. Этот тензор называется *метрическим*.

Прежде всего, используя (выражения 4—5 из п.3.3.) и определение (39 п.3.), получим законы преобразования этих величин при изменении пространственной системы координат. Имеем

$$g'_{ik} = e'_i \cdot e'_k = \alpha^i_l \alpha_k^m e_l \cdot e_m = \alpha^i_l \alpha_k^m \alpha_r^p g_{lm},$$

$$g'^{ik} = e'^i \cdot e'^k = \alpha^{i'}_i \alpha^{k'}_m e^i \cdot e^m = \alpha^{i'}_i \alpha^{k'}_m g^{lm},$$

$$g'^i_k = e'^i \cdot e'^k = \alpha^{i'}_i \alpha^{k'}_m e^i \cdot e^m = \alpha^{i'}_i \alpha^{k'}_m g^{im}.$$

Следовательно, g_{ik} — ковариантные компоненты некоторого тензора, g^{ik} — контравариантные, g^i_k — смешанные.

Покажем, что это компоненты одного и того же тензора. Для этого достаточно показать, что они связаны между собой формулами вида (37).

Но из определения g_{ik} и свойств векторов основного и взаимного базиса следует

$$e'_i = g_{ij} e^j.$$

Тогда

$$g_{ik} = e_i \cdot e_k = g_{ij} e^j \cdot g_{km} e^m = g_{ij} g_{km} e^j \cdot e^m = g_{ij} g_{km} g^{jm}.$$

$$g_{ik} = g_{ij} e^j \cdot e_k = g_{ij} g^j_k.$$

Таким образом, величины g_{ik} , g^{ik} , g^i_k действительно являются компонентами одного тензора (метрического тензора). Его смешанные компоненты совпадают по значениям с символом Кронекера δ_{ik} .

Понятие тензора 2-го ранга может быть обобщено на понятие тензора n -го ранга, отнесенного к произвольной системе координат. Тензор n -го ранга — это величина, определяемая 3^n числами, которые являются либо его ковариантными, либо контравариантными, либо различного рода смешанными компонентами.

Так, например, тензор 3-го ранга имеет всего 27 компонент, и его смешанные компоненты могут быть вида $A^{i..i}$, $A^{i..i}$ и т. д. Закон преобразования их следующий:

$$A'^{i..i} = \alpha^{i'}_i \alpha_k^n \alpha_r^p A^{m..r}$$

$$A'^i_{..i} = \alpha^{i'}_m \alpha_k^n \alpha_r^p A^{m..r}.$$

При этом говорят, что $A^{i..i}$ — смешанные компоненты, один раз контравариантные и дважды ковариантные и т. д.

Правило инвариантности тензорных уравнений, рассмотренное в 7, теперь должно быть дополнено требованием, чтобы все тензоры, которые входят в виде слагаемых в уравнение, должны иметь не только одинаковый ранг, но и одинаковую «ковариантность». Иначе говоря, ковариантные компоненты не могут складываться с контравариант-

ыми, а смешанные компоненты могут складываться только тогда, когда, они имеют одинаковое строение (A_i^{ki} и B_i^{ki} и т. д.).

«Физические» компоненты тензоров. Случай ортогональных базисов. Понятие «физических» компонент векторов естественно обобщается и на «физические» компоненты тензоров 2-го и высших рангов. В общем случае это следует из того, что компоненты любого тензора n -го ранга могут быть представлены в виде суммы произведений компонент трех (в трехмерном пространстве) векторов. Если считать факт разложения тензоров на сумму произведений компонент векторов установленным, то, в частности, «физические» компоненты A_{ik}^* и A^{*ik} тензора 2-го ранга определяются выражениями

$$A^{*ik} = |e_i| \cdot |e_k| A^{ik} = \sqrt{g_{ii}g_{kk}} A^{ik} \text{ (нет суммирования!)}, \quad (38)$$

$$A_{ik}^* = \frac{A_{ik}}{|e_i| \cdot |e_k|} = \frac{A_{ik}}{\sqrt{g_{ii}g_{kk}}} \text{ (нет суммирования!)}. \quad (39)$$

Эти формулы являются обобщением формул (37 п.3).

В случае ортогональных базисов из (37) и из (39) получим

$$A^{ik} = g^{ii}g^{kk}A_{ik} = \frac{A_{ik}}{H_i^2H_k^2} \text{ (нет суммирования!)},$$

$$A_{ik} = g_{ii}g_{kk}A^{ik} = H_i^2H_k^2A^{ik} \text{ (нет суммирования!).}$$

Тогда из (38) и (39) следует, что оба вида физических компонент тензоров совпадают $A_{ik}^* = A^{*ik}$ и равны

$$A_{ik}^* = \frac{A_{ik}}{H_iH_k} = A^{ik}H_iH_k \text{ (нет суммирования!)}. \quad (40)$$

Операция поднятия и опускания индексов. В связи с выражениями (40 п.3), (41 п.3), (37) и им подобными в алгебре тензоров говорят об операции поднятия и опускания индексов у компонент тензоров. Под этим понимают правило получения одних компонент через другие с **помощью оператора — метрического тензора**. Правило заключается в том, что «поднимаемый» («опускаемый») индекс переходит в метрический тензор, а на то место, куда он должен быть поднят (опущен), становится «немой» индекс суммирования; вторым «немым» индексом суммирования является свободный индекс метрического тензора. Например,

$$A_{ikl} = g_{im}A^m_{kl} = g_{im}g_{kn}A^{mn}_l = g_{im}g_{kn}g_{lr}A^{mnr}.$$

Иногда о тождественном преобразовании вида

$$A_{ik} = g_i^i A_{ik}$$

говорят как об операции «переименования» индекса.

Ковариантные, контравариантные и смешанные тензоры.

Иногда при первоначальном определении тензора как физической или геометрической величины удобно исходить из каких-то определенных его компонент, например ковариантных. В этом смысле можно говорить о таком тензоре, как о ковариантном. Аналогично рассматривают контравариантные и смешанные тензоры. Однако из каких бы компонент мы ни исходили, тензор n -го ранга, как единая величина, всегда определяется только 3^n независимыми числами. С другой стороны, если определены какие-либо компоненты тензора, то по формулам, аналогичным (37), всегда можно найти его компоненты любой другого строения. Это является следствием того факта, что в пространстве с заданной метрикой всякая физическая или геометрическая величина может быть представлена компонентами любого строения. Рассмотрим, например, скалярную функцию $f(x^1, x^2, x^3)$ обобщенных координат x^1, x^2, x^3 . Выясним закон преобразования ее трех частных производных $\frac{\partial f}{\partial x^k}$ при изменении системы координат.

Учитывая, что x_i и $x^{i'}$ являются контравариантными компонентами радиуса-вектора одной и той же точки, получим по (32 п.3)

$$x^{i'} = \alpha_{i'}^k x^k.$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} = \alpha_{i'}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Таким образом, можно сказать, что три величины $\frac{\partial f}{\partial x^{i'}}$ преобразующиеся по закону ковариантных компонент, образуют ковариантный вектор. В действительности, этот вектор (градиент — см. 4. 4) имеет как ко-, так и контравариантные компоненты.

Иллюстрацией появления понятий ковариантных и других тензоров может служить пример тензора напряжений в обобщенных координатах.

Пример. Тензор напряжений. Рассмотрим в системе координат, определяемой произвольным правым базисом (e_1, e_2, e_3) , элементарный тетраэдр (см. рис. 15) с ребрами $|e_1| dx^1, |e_2| dx^2, |e_3| dx^3$, сходящимися в начале координат, и с «доньшком» площадью da_n .

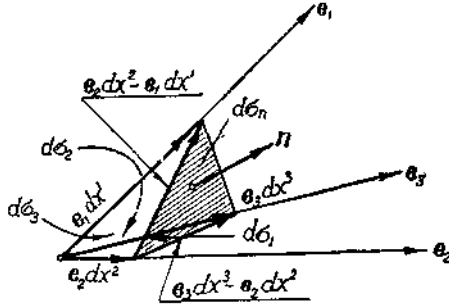


Рис 15. К понятию тензора напряжений в обобщенных координатах

Орт нормали к донышку обозначим через n , а площади граней через $d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= |e_2 \times e_3| dx^2 dx^3, \\ d\sigma_2 &= |e_3 \times e_1| dx^3 dx^1, \\ d\sigma_3 &= |e_1 \times e_2| dx^1 dx^2. \end{aligned} \quad (*)$$

Кроме того (см. рис. 15), имеем

$$\begin{aligned} nd\sigma_n &= (e_2 dx^2 - e_1 dx^1) \times (e_3 dx^3 - e_2 dx^2) = \\ &= (e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 + (e_3 \times e_1) dx^3 dx^1 + (e_1 \times e_2) dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

Вводя векторы e^i взаимного базиса и учитывая (24 п.3), (46 п.3) и формулы (*) этого примера, получим,

$$e_2 \times e_3 = e^1 \sqrt{G}$$

и, следовательно,

$$(e_2 \times e_3) dx^2 dx^3 = \frac{e^1}{|e^1|} d\sigma_1.$$

Тогда

$$nd\sigma_n = \sum_{i=1}^3 \frac{e^i}{|e^i|} d\sigma_i.$$

Отсюда, вводя ковариантные компоненты p_i вектора n , найдем

$$n_i d\sigma_n = \frac{d\sigma_i}{|e^i|}. \quad (**)$$

Как и в примере 4.4, вектор напряжения на «донышке» тетраэдра p_n имеет выражение

$$p_n = \sum_{i=1}^3 p_i d\sigma_i \frac{1}{d\sigma_n}.$$

Подставляя сюда значения $d\sigma_i$ из (**), имеем

$$p_n = \sum_{i=1}^3 p_i |e^i| n_i.$$

Поскольку в сумме справа стоят ковариантные компоненты n_i вектора \mathbf{n} , то при рассмотрении компонент векторов $p_i |e^i|$ ($i = 1, 2, 3$) мы обязательно должны брать их контравариантные составляющие. Только в этом случае (*) компоненты вектора p_n будут преобразовываться при изменении системы координат по законам (33 п.3). Именно в этом смысле мы можем говорить, что векторы $p_i |e^i|$ являются контравариантными. Обозначая ik контравариантные компоненты этих векторов через p^{ik} , так что $p_i |e^i| = p^{ik} e_k$ (суммирование только по k), получим

$$p_n = \sum_{k,i=1}^3 p^{ik} e_k n_i. \quad (41)$$

Отсюда контравариантные компоненты вектора напряжения p_n равны

$$p_n^k = p^{ik} n_i. \quad (42)$$

Девять величин p^{ik} являются контравариантными компонентами единой физической величины — тензора напряжений. Они позволяют в выбранной системе координат определить в точке O напряжения на любой площадке с нормалью n .

Ковариантные, смешанные и «физические» компоненты этого тензора могут быть определены согласно общим формулам:

$$p_{ik} = g_{il} g_{km} p^{lm}, \quad p_i^k = g_{il} p^{lk}, \dots \text{ и т. д.}$$

4.10. Примеры моделирования объектов

Пример 1. Построим модель момента инерции системы материальных точек относительно оси (u) с ортом \mathbf{u} .

Модель можно построить двумя методами.

Если не использовать понятия тензора моментов инерции, а исходить из элементарного определения момента инерции материальной точки как произведения массы на квадрат расстояния до оси, то

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^N m_n (\mathbf{r}_n \times \mathbf{u})^2,$$

где N — число точек,

m_n — масса n -й точки,

r_n — радиус-вектор n -й точки относительно некоторого начала O , взятого на оси (u) с ортом u ($|u| = 1$), при этом $|r_n \times u|$ — расстояние n -й точки от оси (u).

Преобразуем выражение для I_{uu} , используя (16 из п.3) и (19 из п.3):

$$\begin{aligned} I_{uu} &= \sum_{n=1}^N m_n (r_n \times u) \cdot (r_n \times u) = \sum_{n=1}^N m_n r_n \cdot [u \times (r_n \times u)] = \\ &= \sum_{n=1}^N m_n r_n \cdot [r_n - u (r_n \cdot u)] = \sum_{n=1}^N m_n [r_n^2 - (u \cdot r_n)^2]. \end{aligned}$$

Если ввести систему (K) с началом в O , то получим выражение I_{uu} через координаты точек $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}$ ($r_n = x_1^{(n)} i_1 + x_2^{(n)} i_2 + x_3^{(n)} i_3$):

$$I_{uu} = \sum_{n=1}^N m_n [x_1^{(n)} x_1^{(n)} - (x_1^{(n)} u_1)^2]. \quad (*)$$

Это же выражение можно получить, если в (K) известны компоненты I_{ik} тензора моментов инерции.

Действительно, если принять ось (u) за ось (x_1) некоторой системы (K), то по (7) имеем

$$I_{uu} \equiv I'_{11} = \alpha'_{1'i} \alpha_{1'k} I_{ik}.$$

Но

$$\alpha_{1'i} = i'_1 \cdot i_i = u' \cdot i_i = u_i.$$

Поэтому

$$I_{uu} = I_{ik} u_i u_k. \quad (**)$$

Подставив сюда выражение (9) для I_{ik} , получим формулу (*).

Пример 2. Покажем, что кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку и вращающегося с мгновенной угловой скоростью ω , равна

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega},$$

где $I_{\omega\omega}$ — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения (оси, совпадающей с ω).

Используя формулу Эйлера, получим

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n V_n^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\omega \times r_n)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n (\omega \times r_n) \cdot (\omega \times r_n).$$

С учетом (16 из п.3) и (19 из п.3)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \omega \cdot [r_n \times (\omega \times r_n)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n \omega \cdot [\omega (r_n)^2 - r_n (r_n \cdot \omega)] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N m_n [\omega^2 r_n^2 - (\omega \cdot r_n)^2].$$

Вводя орт мгновенной оси вращений $\omega^0 = \frac{\omega}{\omega}$ и учитывая выражение для $I_{\omega\omega}$, полученное в предыдущем примере, найдем

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{n=1}^N m_n [r_n^2 - (\omega^0 \cdot r_n)^2] = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega}.$$

Используя формулу (***) предыдущего примера, можно представить T через компоненты тензора моментов инерции относительно неподвижной точки и компоненты вектора ω :

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 I_{\omega\omega} = \frac{1}{2} \omega^2 I_{ik} \omega_i^0 \omega_k^0 = \frac{1}{2} I_{ik} \omega_i \omega_k.$$

Пример 3. Построим модель момента инерции системы и вычислим момент инерции системы относительно оси (v) с ортом \mathbf{v} , если ось (v) параллельна оси (u) , которая проходит через центр масс и относительно которой момент инерции системы равен I_{uu} .

Выберем на оси (v) некоторое начало O , относительно которого положение центра масс, находящегося на оси (u) , определяем радиусом-вектором R .

Если r_n — радиус-вектор точки с массой m_n относительно начала O , а r'_n — радиус-вектор той же точки относительно центра масс, то

$$r_n = r'_n + R.$$

Тогда имеем

$$I_{vv} = \sum_{n=1}^N m_n (r_n \times \mathbf{v})^2 = \sum_{n=1}^N m_n [(r'_n + R) \times \mathbf{v}]^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v})^2 + \sum_{n=1}^N m_n (r'_n \times \mathbf{v})^2 + 2 \sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v}) \cdot (r'_n \times \mathbf{v}).$$

Но

$$\sum_{n=1}^N m_n (r'_n \times \mathbf{v})^2 = \sum_{n=1}^N m_n (r'_n \times \mathbf{u})^2 = I_{uu};$$

$$\sum_{n=1}^N m_n (R \times \mathbf{v}) \cdot (r'_n \times \mathbf{v}) = (R \times \mathbf{v}) \cdot \left[\left(\sum_{n=1}^N m_n r'_n \right) \times \mathbf{v} \right] = 0,$$

ибо $v = u$ (оси параллельны) и

$$\sum_{n=1}^N m_n r'_n = 0$$

по определению центра масс.

Следовательно,

$$I_{ov} = I_{uu} + M |R \times \varphi|^2;$$

здесь $|R \times \varphi|$ —расстояние между осями, а M — масса всей системы.

Пример 4. Построим наиболее общий вид линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора скоростей деформаций, если среда изотропна.

Общая линейная зависимость между p_{ik} и V_{ik} может быть записана в виде

$$p_{ik} = \eta_{iklm} V_{lm},$$

где η_{iklm} —тензор 4-го ранга, описывающий свойства среды.

Поскольку свойства среды одинаковы в различных направлениях, то компоненты этого тензора должны сохранять свои значения при любом повороте координатной системы. Тензором, сохраняющим свои компоненты во всех координатных системах, является шаровой тензор, компоненты которого имеют вид $A\delta_{ik}$, где A —скаляр.

Следовательно, в случае изотропной среды тензор η_{iklm} должен быть представим через шаровые тензоры. Наиболее общее представление имеет вид (в предположении его единственности)

$$\eta_{iklm} = A\delta_{ik}\delta_{lm} + B\delta_{il}\delta_{km} + C\delta_{im}\delta_{kl}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_{ik} &= A\delta_{ik}\delta_{lm}V_{lm} + B\delta_{il}\delta_{km}V_{lm} + C\delta_{im}\delta_{kl}V_{lm} = \\ &= A\delta_{ik}V_{ll} + BV_{ik} + CV_{kl}. \end{aligned}$$

Поскольку $V_{,k} = V_{k,i}$, то, обозначая $B + C = 2\mu$ и $A = \mu'$, получим

$$p_{ik} = 2\mu V_{,k} + \mu'\delta_{ik}V_{,a}$$

Коэффициенты μ , μ' (коэффициенты вязкости) определяют свойства изотропной среды. Полученная зависимость является основной во всей гидромеханике, при этом тензор p_{ik} определяет только напряжения от сил вязкости, но не давления.

Рассмотрим другой метод, имеющей принципиальное значение в механике сплошных сред

По определению изотропной среды, как бы мы ни поворачивали новую систему (K') относительно $\{K\}$, компоненты тензора η_{iklm} , определяющего свойства среды, должны остаться неизменными, т. е.

$$\eta_{iklm} = \eta'_{iklm}$$

(Речь идет не только о группе поворотов, но и о преобразованиях отражения. Иногда, если свойства среды инвариантны только по отношению к группе поворотов, среду называют гиротропной).

Только в этом случае в жидкости, движущейся относительно новой системы (K') точно так же, как она двигалась относительно системы (K), будут возникать одинаковые напряжения.

Покажем, что в изотропной среде из $3^4 = 81$ компонент тензора η_{iklm} отличны от нуля только 21 компонента, причем независимыми среди них являются лишь две компоненты.

Прежде всего, так как тензоры p_{ik} и V_{ik} симметричны и существует функция свободной энергии, η_{iklm} может быть определен так, чтобы этот тензор обладал следующими свойствами симметрии:

$$\eta_{iklm} = \eta_{kilm} \quad (1)$$

$$\eta_{iklm} = \eta_{ikml} \quad (2)$$

$$\eta_{iklm} = \eta_{imkl} \quad (3)$$

Свойство (1) дает $C^2_3 \cdot 3^2 = 27$ уравнений, связывающих компоненты η_{iklm} ; свойство (2) дает 18 новых уравнений связи; свойство (3) доставляет еще $C^2_3 \cdot 5 = 15$ уравнений.

Таким образом, у тензора η_{iklm} остается пока $81 - 27 - 18 - 15 = 21$ независимая компонента.

Рассмотрим компоненты вида η_{iiii} .

Согласно общей формуле преобразования компонент тензора, в системе (K') получаем компоненты

$$\eta'_{iiii} = \alpha_{i'k} \alpha_{i'l} \alpha_{i'm} \alpha_{i'n} \eta_{klmn}$$

Пусть система (K') повернута относительно (K) вокруг оси (x_1) на угол $\frac{\pi}{2}$. Матрица коэффициентов такого преобразования имеет вид

$$\| \alpha_{i'k} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4)$$

Тогда в системе (K') имеем для компоненты

$$\eta'_{2222} = \alpha_{2'k} \alpha_{2'l} \alpha_{2'm} \alpha_{2'n} \eta_{klmn} = \eta_{3333}$$

Но поскольку в силу изотропности $\eta'_{2222} = \eta_{2222}$, то получаем x_1

$$\eta_{2222} = \eta_{3333}$$

Аналогично, рассматривая поворот (K') относительно (K) на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг осей (x_1) и (x_3), окончательно найдем

$$\eta_{1111} = \eta_{2222} = \eta_{3333}$$

Таким образом, из группы компонент $\eta_{i,i'}$ независимой будет лишь одна компонента, значение которой обозначим через $2\eta + \eta'$. Обратимся теперь к компонентам вида $\eta_{i,ikk}$. Рассматривая то же преобразование координат с матрицей (4), получим

$$\eta_{i122} = \alpha_{i'k} \alpha_{i'l} \alpha_{2'm} \alpha_{2'n} \eta_{klmn} = \eta_{i133}.$$

Аналогично предыдущему имеем

$$\eta_{1122} = \eta_{1133} = \eta_{2233}.$$

Таким образом, и из этой группы остается независимой одна компонента, которую обозначим через η' .

Больше независимых компонент у тензора η_{iklm} нет. Действительно, в оставшиеся $21 - 6 = 15$ независимых компонент входят девять компонент вида η_{ikll} ($i \neq k$), три компоненты вида η_{ikik} ($i \neq k$) и три компоненты вида

$$\eta_{ikil} \quad (i \neq k \neq l).$$

Рассмотрим, как ведут себя компоненты η_{ikil} ($i \neq k \neq l$) при преобразованиях (4). Имеем

$$\eta'_{1213} = \alpha_{i'k} \alpha_{2'l} \alpha_{1'm} \alpha_{3'n} \eta_{klmn} = -\eta_{1213}.$$

Но в силу изотропности $\eta'_{1213} = \eta_{1213}$, поэтому отсюда получаем $\eta_{1213} = 0$. Аналогично получаем равенство нулю и двух остальных компонент этого вида.

Компоненты η_{ikil} ($i \neq k$) тоже равны нулю. Действительно, рассматривая преобразование системы (K') в (K) с матрицей

$$\| \alpha_{i'k} \| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

(система (K') повернута относительно (K) вокруг оси (x_1) на угол π), получим

$$\eta'_{1211} = \alpha_{i'k} \alpha_{2'm} \alpha_{1'n} \alpha_{1'r} \eta_{kmnr} = -\eta_{1211}.$$

Таким образом, как и в предыдущем случае, имеем

$$\eta_{ikil} = 0 \quad (i \neq k)$$

Наконец, рассматривая последнюю группу компонент η_{ikik} ($i \neq k \neq l$), совершим преобразование координатных систем согласно матрице

$$\| \alpha_{i'k} \| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right\|$$

(система (K') повернута относительно (K) вокруг оси (x_1) на угол $\frac{\pi}{4}$). Тогда получим

$$\eta_{2323}^* = \alpha_{2'k} \alpha_{3'l} \alpha_{2'm} \alpha_{3'n} \eta_{klmn} = \frac{1}{2} \eta_{2222} - \frac{1}{2} \eta_{2233}.$$

Отсюда, согласно принятым обозначениям, имеем

$$\eta_{2323} = \eta.$$

Аналогично, рассматривая повороты на угол $\frac{\pi}{4}$ вокруг осей (x_2) и (x_3) , получим окончательно

$$\eta_{1212} = \eta_{1212} = \eta.$$

Таким образом, подводя итоги рассмотрения компонент тензора η_{iklm} , отмечаем, что среди 81 компоненты независимыми являются только две, которые мы обозначим через η и η' , причем

$$\begin{aligned} \eta_{1212} &= \eta_{1212} = \eta_{2323} = \eta; \\ \eta_{1122} &= \eta_{1133} = \eta_{2233} = \eta'; \\ \eta_{1111} &= \eta_{2222} = \eta_{3333} = 2\eta + \eta'. \end{aligned} \quad (5)$$

Всего, как нетрудно подсчитать, тензор η_{iklm} имеет 21 компоненту, которые зависимы между собой и отличны от нуля.

Теперь можно представить, какой общий вид будет иметь зависимость между компонентами тензора вязких напряжений p_{ik} и тензора скоростей деформаций V_{ik} .

В силу свойств компонент η_{iklm} имеем

$$\begin{aligned} p_{11} &= \eta_{11lm} V_{lm} = \eta_{1111} V_{11} + \eta_{1122} V_{22} + \eta_{1133} V_{33} = \\ &= (2\eta + \eta') V_{11} + \eta' V_{22} + \eta' V_{33} = 2\eta V_{11} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} p_{22} &= 2\eta V_{22} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33}); \\ p_{33} &= 2\eta V_{33} + \eta' (V_{11} + V_{22} + V_{33}); \\ p_{12} &= \eta_{12lm} V_{lm} = \eta_{1212} V_{12} + \eta_{1221} V_{21} = 2\eta_{1212} V_{12} = 2\eta V_{12}; \\ p_{13} &= 2\eta V_{13}; \\ p_{23} &= 2\eta V_{23}. \end{aligned}$$

Эти равенства можно объединить с помощью одной формулы

$$p_{ik} = 2\eta V_{ik} + \eta' \delta_{ik} V_{ll},$$

которая и будет выражать искомую зависимость.

4.11. Тензорная алгебра

В этом разделе мы остановимся на основных алгебраических действиях над тензорами (сложение и вычитание, умножение, свертывание) и на некоторых свойствах тензоров.

Так как тензор определяется своими компонентами, то определение действий над тензорами сводится к построению формул, выражающих в каждой системе координат компоненты результата действия через компоненты тензоров, над которыми производятся действия.

Сложение тензоров.

Пусть A_{ik} и B_{ik} — компоненты двух тензоров 2-го ранга.

Составим числа C_{ik} в виде сумм соответствующих компонент тензоров

$$C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}.$$

Числа C_{ik} образуют тензор 2-го ранга. Действительно, так как A_{ik} и B_{ik} — компоненты тензоров, то

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} B_{lm}$$

и

$$C'_{ik} = A'_{ik} + B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (A_{lm} + B_{lm}) = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} C_{lm},$$

т. е. C_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Тензор с компонентами C_{ik} называется *суммой* тензоров с компонентами A_{ik} и B_{ik} , а операция образования его компонент — *сложением* этих тензоров.

Правило сложения относится к любому числу тензоров любого ранга.

Суммой тензоров одного ранга называется тензор того же ранга, компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых.

Таким образом, складывать можно только тензоры одного ранга.

Аналогично сумме двух тензоров определяется разность двух тензоров одного ранга и соответственно операция вычитания.

В случае отнесения тензоров к обобщенным координатам при сложении и вычитании тензоров одного ранга необходимо оперировать компонентами одинакового строения. Таким образом, правильными будут, например, записи.

$$A^{ik} + B^{ik} = C^{ik}, \quad A_i^{\cdot k} + B_i^{\cdot k} = C_i^{\cdot k},$$

$$A_{\cdot i}^{ik} + B_{\cdot i}^{ik} = C_{\cdot i}^{ik}$$

Вследствие того, что формулы преобразования компонент тензоров при изменении координатной системы и в самом общем случае остаются однородными относительно коэффициентов преобразования и линейными относительно компонент тензоров, величины C^{ik} , $C_i^{\cdot k}$ и т. д. предыдущих выражений являются компонентами тензоров того же ранга и строения, что и слагаемые.

Умножение тензоров.

Пусть A_{ik} и B_{ik} — компоненты двух тензоров 2-го ранга. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения компонент одного тензора на компоненты другого.

Эти произведения будут зависеть от индексов, число которых равно сумме рангов тензоров A_{ik} и B_{ik} . Обозначим

$$C_{iklm} = A_{ik}B_{lm}.$$

Числа C_{iklm} образуют тензор 4-го ранга. Действительно, так как

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm};$$

$$B'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} B_{lm}$$

то

$$C'_{iklm} = A'_{ik} B'_{lm} = \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} A_{np} B_{rs} =$$

$$= \alpha_{i'n} \alpha_{k'p} \alpha_{l'r} \alpha_{m's} C_{np rs}.$$

Это доказывает, что C_{iklm} образуют тензор 4-го ранга.

Тензор с компонентами C_{iklm} называется произведением тензоров с компонентами A_{ik} и B_{ik} , а операция образования его компонент — умножением (иногда внешним умножением или тензорным умножением) этих тензоров.

Нетрудно видеть, что

$$C_{iklm} = A_{ik} B_{lm} \neq C_{lmik} = A_{lm} B_{ik}.$$

Таким образом, тензорное умножение некоммутативно.

Правило умножения относится к любому числу тензоров любого ранга.

Произведением нескольких тензоров называется тензор, компоненты которого равны произведениям компонент сомножителей. Ранг произведения тензоров равен сумме рангов сомножителей.

В самом общем случае координатных систем произведем двух тензоров, определяемых, например, компонентами A^i_{kl} и B^{jk} , называется тензор с компонентами, определяемыми по правилу

$$C^{i..mn}_{.kl} = A^i_{.kl} B^{mn}.$$

Используя общие законы преобразования компонент тензоров, нетрудно показать, что величины $C^{i..mn}_{.kl}$ образуют тензор.

Таким образом, перемножать можно тензоры любого ранга и строения.

Свертывание тензоров.

В тензорном исчислении часто применяется операция свертывания тензоров. *Свертыванием называется суммирование компонент тензора по двум каким-либо индексам.*

Свертывание можно проводить только тех тензоров, ранг которых не менее двух.

Пусть A_{ikl} образуют тензор 3-го ранга. Произведем свертывание его по двум индексам — i и k , т. е. возьмем только те его компоненты, у которых индексы i и k равны, и составим из них суммы:

$$A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^3 A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l}.$$

В результате свертывания тензора A_{ikl} по другим индексам получим суммы A_{iki} и A_{jil} . Таких сумм каждого вида будет три. Например, для A_{iil} имеем:

$$A_{iil} \left(\equiv \sum_{i=1}^3 A_{iil} \right); \quad A_{iki} \left(\equiv \sum_{i=1}^3 A_{iki} \right); \quad A_{jil} \left(\equiv \sum_{i=1}^3 A_{jil} \right).$$

Докажем, что любая такая группа из трех сумм, например A_{iil} образует тензор 1-го ранга, т. е. вектор.

Так как A_{ikl} образуют тензор 3-го ранга, то

$$A_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} A_{mnr}.$$

Отсюда, свертывая по индексу i и k и учитывая формулу, аналогичную (5), получим

$$A_{iil} = \alpha_{i'm} \alpha_{i'n} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \delta_{mn} \alpha_{l'r} A_{mnr} = \alpha_{l'r} A_{mnr}.$$

Из этой формулы преобразования следует, что величины A_{iil} определяют вектор.

Сформулируем общее правило относительно свертывания.

При свертывании по двум индексам тензора ранга n получается тензор ранга $n - 2$.

Операцию свертывания можно применять к тензору несколько раз, до тех пор, пока его ранг не станет меньше двух.

Тензор четного ранга может быть свернут до скаляра, а тензор нечетного ранга — только до вектора.

Умножение тензоров с последующим свертыванием по индексам, относящимся к различным множителям — тензорам, называется иногда скалярным или «внутренним» произведением тензоров.

Мы уже приводили примеры «внутренних» произведений :

$$\alpha_{tk} B_k = A_t,$$

$$\lambda_{iklm} B_{lm} = A_{tk}.$$

Скалярное произведение двух векторов является произведением двух тензоров 1-го ранга с последующим свертыванием.

При свертывании тензоров, компоненты которых рассматриваются в обобщенных системах координат, важно помнить, что *свертывание может производиться только по парам разноименных индексов*, т. е. один свертываемый индекс должен быть «ковариантным», а другой обязательно «контравариантным». Это следует из требования о том, что результат свертывания тензора должен оставаться тензором.

Действительно, пусть, например, мы произвели свертку тензора A^{kl} по индексам i и k ; тогда величины A^{il} будут компонентами тензора (вектора), Ибо в силу (7 из п.3) имеем

$$A_i^{il} = a_{i'}^{i'} a_m^{i'} a_r^{i'} A_n^{nr} = \alpha_r^{i'} A_n^{nr}.$$

«Внутреннее» произведение тензоров, отнесенных к произвольным системам координат, может быть образовано только из компонент с разноименными индексами. Например,

$$A_{tk} B^k = A^l{}_l;$$

$$\lambda_{ik}{}^{lm} B_{lm} = \lambda_{ik}{}^{i'}{}_{m'} B_i{}^{m'} = \lambda_{iklm} B^{lm} = A_{tk};$$

Свойство симметрии тензоров.

Понятие симметрии относится к тензорам ранга не менее двух.

Тензор $S_{ikl\dots}$ называется *симметричным* по паре индексов, например i и k , если компоненты, получающиеся при перестановке этих индексов, равны друг другу, т. е.

$$S_{ikl\dots} = S_{kil\dots}.$$

Таким образом,

$$S_{12l\dots} = S_{21l\dots}; \quad S_{23l} = S_{32l\dots} \text{ и т. д.}$$

Тензор A_{ikl} называется *антисимметричным* по паре индексов, если при их перестановке компоненты меняют знак, т. е.

$$A_{ikl} = -A_{kil}$$

Таким образом,

$$A_{12l\dots} = -A_{21l\dots}; \quad A_{23l\dots} = -A_{32l\dots} \text{ и т. д.}$$

У антисимметричного тензора компоненты с равными индексами, по которым имеет место антисимметрия, равны нулю.

Если $A_{ikl} = -A_{kil}$, то, например,

$$A_{111} \dots = -A_{111} \dots, \text{ т.е. } A_{111} \dots = 0.$$

Свойство симметрии или антисимметрии не зависит от выбора системы координат.

Таким образом, тензор, симметричный (антисимметричный) в какой-либо системе координат, остается симметричным (антисимметричным) в любой другой системе координат.

Доказательство этого утверждения следует из закона преобразования тензора.

Действительно, если тензор T_{ik} симметричен в системе (K) , т. е. $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l'} \alpha_{k'm} T_{lm} = \alpha_{i'l'} \alpha_{k'm} T_{ml} = T'_{ki}.$$

Аналогично показывается инвариантность свойства антисимметрии по отношению к выбору системы координат.

Симметричный S_{ik} и антисимметричный A_{ik} тензоры 2-го ранга имеют матрицы следующего вида

$$\| \| S_{ik} \| \| = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix}; \quad \| \| A_{ik} \| \| = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Антисимметричный тензор 2-го ранга называется бивектором.

Любой тензор T_{ik} может быть представлен в виде суммы симметричного тензора S_{ik} и антисимметричного A_{ik}

Доказательство следует из очевидного равенства

$$T_{ik} = \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}). \tag{43}$$

Тензор

$$S_{ik} \equiv \frac{1}{2} (T_{ik} + T_{ki}) \quad \text{- симметричный, ибо } S_{ik} = S_{ki}$$

Тензор

$$A_{ik} \equiv \frac{1}{2} (T_{ik} - T_{ki}) \quad \text{- антисимметричный, ибо } A_{ik} = -A_{ki}$$

Утверждение доказано.

Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование.

Компоненты тензора, например ковариантного T_{ik} можно рассматривать как элементы квадратной матрицы

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

Если в тензоре T_{ik} поменять местами индексы, то получится новый тензор T_{ki} , матрица которого

$$\begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{vmatrix}$$

будет транспонированной по отношению к матрице T_{ik} (столбцы станут строками; совокупность величины T_{ki} будет преобразовываться по формулам (7).

Таким образом, простейшая операция — перестановка индексов — приводит к построению нового тензора. Очевидно, что для симметричного тензора перестановка индексов приводит к тому же тензору.

Симметрированием называется операция перестановки пары индексов и последующее сложение полученного тензора с исходным тензором. В результате получается тензор, симметричный относительно принятой пары индексов.

Альтернированием называется операция перестановки пары индексов и последующее вычитание полученного тензора из исходного, при этом получается антисимметричный тензор относительно принятой пары индексов.

Из (43) следует, что симметричная часть S_{ik} тензора T_{ik} равна половине от результата симметрирования, а антисимметричная A_{ik} — половине от результата альтернирования.

Наличие у тензора свойства симметрии уменьшает число его независимых компонент.

Число независимых компонент симметричного тензора 2-го ранга равно шести, антисимметричного 2-го ранга — трем.

Примером симметричного тензора 2-го ранга может служить единичный тензор δ_{ik} , примером антисимметричного тензора 2-го ранга — тензор

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i,$$

где A_i и B_i — компоненты двух векторов.

Все остальные положения этого раздела имеют силу для тензоров, рассматриваемых в системе обобщенных координат.

Эквивалентность антисимметричного тензора аксиальному вектору. Наличие у антисимметричного тензора только трех

независимых компонент и. специфический закон их преобразования позволяют сопоставить такому тензору некоторый **аксиальный вектор**, определяемый этими тремя компонентами.

Покажем, что формулы преобразования компонент антисимметричного тензора сводятся к формулам преобразования некоторого аксиального вектора.

Пусть имеем антисимметричный тензор A_{ik} . Тогда в новой системе координат его компоненты A_{ik} будут:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'2} A_{12} + \alpha_{i'l} \alpha_{k'1} A_{21} + \alpha_{i'l} \alpha_{k'3} A_{13} + \alpha_{i'l} \alpha_{k'1} A_{31} + \\ + \alpha_{i'l} \alpha_{k'3} A_{23} + \alpha_{i'l} \alpha_{k'2} A_{32}.$$

Эту формулу можно записать, используя равенства $A_{lm} = -A_{ml}$ в виде

$$A'_{ik} = (\alpha_{i'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'l}) A_{lm}, \quad (44)$$

где индексы l и m в сумме справа могут принимать только циклические перестановки: 12, 23, 31.

Введем обозначения для компонент тензора:

$$A_{12} = -A_{21} \equiv A_3, \quad A_{31} = -A_{13} = A_2, \quad A_{23} = -A_{32} \equiv A_1,$$

или короче

$$A_{lm} \equiv A_n,$$

где индексы l, m, n составляют циклические перестановки.

Аналогично в новой системе компоненты тензора обозначим следующим образом:

$$A'_{ik} \equiv A'_r,$$

где индексы i, k, r составляют также циклические перестановки. Тогда формулу (44) можно записать

$$A'_r = \sum_{(l, m, n)} (\alpha_{i'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{i'm} \alpha_{k'l}) A_n. \quad (45)$$

Здесь индексы (r, i, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел (1, 2, 3), а справа стоит сумма по циклическим перестановкам индексов (l, m, n) , т. е. всего три слагаемых.

Раскладывая орты \mathbf{i}'_i новой системы (K) по ортам старой системы i_l найдем $\mathbf{i}'_i = \alpha_{i'l} \mathbf{i}_l$.

Поэтому, вычисляя векторное произведение ортов системы (45), получим

$$\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (\mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_m),$$

где справа стоит сумма по всем значениям l и m . Умножая это выражение скалярно на \mathbf{i}_n , получим

$$(\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k) \cdot \mathbf{i}_n = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} (\mathbf{i}_l \times \mathbf{i}_m) \cdot \mathbf{i}_n,$$

причем при фиксированном индексе n здесь справа стоит только пара слагаемых (если среди l, m, n нет одинаковых индексов), отличающихся знаком. Если старая система (K) была правой (или левой, в которой направление векторного произведения определено по правилу левого винта (см. п. 3. 4)), то

$$(\mathbf{i}'_l \times \mathbf{i}'_k) \cdot \mathbf{i}'_n = \alpha_{l'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'l}, \quad (46)$$

где индексы (l, m, n) составляют циклическую перестановку.

Если новая система (K') тоже правая, как и (K) (или тоже левая, как и (K)), то

$$\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k = \mathbf{i}'_r$$

при циклической перестановке индексов (r, i, k) Если же новая система (K') левая, то

$$\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k = -\mathbf{i}'_r$$

при циклической же перестановке индексов (r, i, k).

Итак: 1) если рассматривается преобразование координатной системы такое, что правая система переходит в правую же, то

$$(\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k) \cdot \mathbf{i}'_n = \mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{i}'_n = \alpha_{r'n}$$

при циклических перестановках индексов (r, i, k);

2) если преобразование системы (K) в (K') такое, что правая система переходит в левую, то

$$(\mathbf{i}'_i \times \mathbf{i}'_k) \cdot \mathbf{i}'_n = -(\mathbf{i}'_r \cdot \mathbf{i}'_n) = -\alpha_{r'n}$$

Таким образом, формулу (46) можно записать в виде

$$\alpha_{r'n} = \pm (\alpha_{l'l} \alpha_{k'm} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'l}),$$

где индексы (r, i, k) и (n, l, m) составляют циклические перестановки чисел (1, 2, 3).

Возвращаясь к формуле (45), теперь получим

$$\mathbf{A}'_r = \pm \alpha_{r'n} \mathbf{A}_n \left(\equiv \pm \sum_{n=1}^3 \alpha_{r'n} \mathbf{A}_n \right).$$

Итак, при преобразованиях правой координатной системы в правую имеем

$$\mathbf{A}'_r = + \alpha_{r'n} \mathbf{A}_n,$$

а при преобразованиях правой координатной системы в левую (или левой системы в правую)

$$\mathbf{A}'_r = - \alpha_{r'n} \mathbf{A}_n.$$

С такими векторами мы уже встречались при рассмотрении векторного произведения: это аксиальные векторы.

Таким образом, компоненты антисимметричного тензора преобразуются как компоненты аксиального вектора.

Есть скаляры и тензоры более высоких рангов, формулы преобразования компонент которых меняют знак при преобразованиях,

переводящих правую систему в левую. Все эти тензоры называются псевдотензорами; на свойствах псевдотензоров мы подробно остановимся далее.

Единичный тензор. Метрический тензор. Известный из алгебры символ Кронекера δ_{ik} является тензором 2-го ранга с матрицей

$$\|\delta_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \delta_{ik} = \alpha_{i'k} \alpha_{i'k} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k; \\ 1, & \text{если } i = k. \end{cases}$$

Тензор δ_{ik} носит название единичного тензора.

По смыслу определения единичного тензора его *компоненты равны либо нулю* ($i \neq k$), *либо единице* во всех координатных системах. Это следует из определения δ_{ik} и δ_{ik} .

Умножение δ_{ik} на тензор с последующим свертыванием часто используется в алгебраических выкладках. Например,

$$A_{ik} B_k - B_i = A_{ik} B_k - \delta_{ik} B_k = (A_{ik} - \delta_{ik}) B_k$$

(ибо $B_i \equiv \delta_{ik} B_k$).

В определенном смысле метрический тензор является обобщением понятия единичного тензора δ_{ik} . Прежде всего заметим, что квадрат линейного элемента в прямоугольных декартовых координатах может быть записан в виде

$$ds^2 = \delta_{ik} dx_i dx_k,$$

в то время как в произвольных координатах имеем

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k.$$

Кроме того, из определения

$$\delta_{ik} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_k$$

следует, что компоненты δ_{ik} представляют собой косинусы углов между осями одной какой-то координатной системы (декартовой прямоугольной). Тензор δ_{ik} может быть определен через α_{ik} — косинусы углов между осями двух произвольных декартовых прямоугольных систем, причем $\alpha_{ik} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{j}_k$

В случае введения произвольных базисов, определяющих системы обобщенных координат, компоненты метрического тензора определяются через всевозможные произведения векторов основного и взаимного базисов одной и той же системы координат:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_k| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k); \\ g^{ik} &= \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = |\mathbf{e}^i| |\mathbf{e}^k| \cos(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^k); \\ g_i{}^k &= \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}^k| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k). \end{aligned}$$

При этом, поскольку векторы e_i и e^i не являются ортами, компоненты g^{ik}, g_{ik}, g^k_i определяют косинусы углов между осями базисов только с точностью до множителей.

Что касается коэффициентов прямого α_i^k , и обратного $\alpha_i^{k'}$ преобразований, то они также с точностью до множителей определяют косинусы углов между осями разноименных базисов двух различных систем координат:

$$\begin{aligned} \alpha_i^k &= e_i' \cdot e^k = |e_i'| |e^k| \cos(e_i', e^k); \\ \alpha_i^{k'} &= e_i \cdot e'^k = |e_i| |e'^k| \cos(e_i, e'^k). \end{aligned}$$

Через эти коэффициенты могут быть выражены смешанные компоненты метрического тензора:

$$g_i^{k'} = \alpha_i^{k'} \alpha_i^k. \tag{*}$$

Это следует, например, из (5 из п. 3)

Умножив (5 из п. 3) e^i , получим

$$e_i \cdot e^i = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^{k'} e_k' \cdot e^i,$$

откуда – равенство (*).

Из определения единичного и метрического тензоров следует

- 1) единичный тензор симметричный ($\delta_{ik} = \delta_{ki}$);
- 2) метрический тензор симметричный
($g^{ik} = g^{ki}, g_{ik} = g_{ki}$).

4.12. Главные оси тензора.

Вопрос о главных осях тензора имеет важное значение в физике.

Рассмотрим произвольный тензор 2-го ранга T_{ik} . Если этот тензор умножить на вектор A и произвести свертывание по индексу вектора и одному индексу тензора, то в результате получаем некоторый вектор B с компонентами

$$B_i = T_{ik} A_k.$$

Можно говорить, что тензор T_{ik} , будучи умножен скалярно на некоторый вектор A , преобразует его в новый вектор B в том смысле, что из компонент вектора A определенным действием получаются компоненты другого вектора — вектора B . Вектор B вообще, отличен от A по величине и направлению. Таким образом, тен-

зор при умножении на вектор изменяет длину этого вектора и поворачивает его.

Поставим задачу отыскать для заданного тензора T_{ik} такие векторы A_i , которые бы не поворачивались этим тензором, а только изменяли длину. Тогда

$$T_{ik}A_k = \lambda A_i,$$

где λ — скаляр.

Физический смысл этой задачи поясним на некоторых примерах.

Напряжение на площадке с нормалью n равно

$$p_{nk} = p_{ik}n_i,$$

причем вообще вектор p_n не параллелен орту n , т. е. на каждой площадке есть как нормальные, так и касательные напряжения.

Интерес представляют такие площадки, на которых есть только нормальные напряжения, а касательные равны нулю (рис. 16).

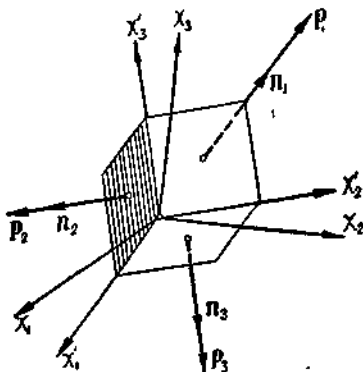


Рис. 16. Главные оси тензора напряжений p_{ik} в точке M . На площадках, перпендикулярных к осям $(x'_1), (x'_2), (x'_3)$, касательные напряжения равны нулю.

Для этих площадок

$$p_n \parallel n \text{ или } \lambda n = p_n = p_{ik}n_i.$$

Тогда ориентация этих площадок (орты n) определится из системы уравнений

$$\lambda n_k = p_{ik}n_i.$$

Если диэлектрические свойства среды определяются тензором ϵ_{ik} то возникает вопрос, как следует направить электрическое поле E , чтобы электрическая индукция D была направлена по вектору напряженности E ?

Общий вид зависимости D от E имеет линейный характер, так что

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k.$$

Поставленная задача требует отыскания векторов E , удовлетворяющих уравнениям

$$\lambda E_i = \varepsilon_{ik} E_k.$$

Если существуют для тензора T_{ik} векторы A , удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k, \quad (47)$$

то направления, определяемые этими векторами, называются *главными (собственными) направлениями тензора T_{ik}* . Оси этих направлений носят названия *главных осей тензора*.

Значения компонент тензора в координатной системе главных осей называются *главными значениями*.

Прежде чем переходить к задаче отыскания главных осей и главных значений компонент тензоров в общем случае, рассмотрим простейший пример тензора 2-го ранга на плоскости.

Пусть I_{ik} — тензор моментов инерции (относительно осей с началом в точке O) системы материальных точек с массами m_n , расположенных в плоскости (x_1, x_2) (рис. 17).

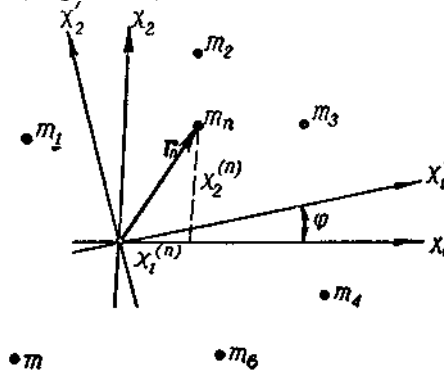


Рис. 17. Главные оси тензора моментов инерции плоской системы материальных точек.

Этот тензор является плоским, он имеет только четыре компоненты. Матрица этого тензора имеет вид

$$\| I_{ik} \| = \begin{vmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$I_{11} = \sum_{n=1}^N m_n (x_2^{(n)})^2; \quad I_{22} = \sum_{n=1}^N m_n (x_1^{(n)})^2;$$

$$I_{12} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = I_{21}.$$

Если вектор A направлен по главной оси этого тензора, то согласно (47) его компоненты A_1, A_2 должны удовлетворять системе однородных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda A_1 &= I_{11}A_1 + I_{12}A_2; \\ \lambda A_2 &= I_{12}A_1 + I_{22}A_2. \end{aligned} \quad (*)$$

Эта система имеет нетривиальное (отличное от нуля) решение только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} I_{11} - \lambda & I_{12} \\ I_{12} & I_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(I_{11} + I_{22}) + I_{11}I_{22} - I_{12}^2 = 0. \quad (**)$$

Следовательно, система (*) имеет отличное от нуля решение тогда и только тогда, если $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения (**), т. е

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}; \\ \lambda_2 &= \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2}. \end{aligned}$$

Если $I_{12} = 0$, то тогда исходные оси (x_1) и (x_2) , как это следует из (*) и (47), являются уже главными.

Поскольку имеется два различных λ , удовлетворяющих системе при $A_i \neq 0$, это значит, что существует два различных главных направления, определяемых векторами $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Направления этих векторов и определяются из системы (*):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{A_2^{(1)}}{A_1^{(1)}} = \frac{\lambda_1 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_1 - I_{22}}; \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{A_2^{(2)}}{A_1^{(2)}} = \frac{\lambda_2 - I_{11}}{I_{12}} = \frac{I_{12}}{\lambda_2 - I_{22}}. \end{aligned}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — углы, которые составляют главные оси тензора I_{ik} с осью (x_1) . Подставляя сюда значения λ_1 и λ_2 и вычисляя $\operatorname{tg} 2\varphi_1$ и $\operatorname{tg} 2\varphi_2$, получим;

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \operatorname{tg} 2\varphi_2 = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}.$$

Отсюда $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, так что главные оси взаимно-перпендикулярны.

В системе главных осей тензор I_{ik} имеет компоненты:

$$\begin{aligned} I'_{11} &= \lambda_1; \\ I'_{22} &= \lambda_2; \\ I'_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (***)$$

что можно проверить непосредственным вычислением. Это следует и из соотношений (*), записанных в системе главных осей:

$$\begin{aligned} \lambda_1 A_1^{(1)Y} &= I'_{11} A_1^{(1)Y} + I'_{12} A_2^{(1)Y}; \\ \lambda_1 A_2^{(1)Y} &= I'_{12} A_1^{(1)Y} + I'_{22} A_2^{(1)Y}; \\ \lambda_2 A_1^{(2)Y} &= I'_{11} A_1^{(2)Y} + I'_{12} A_2^{(2)Y}; \\ \lambda_2 A_2^{(2)Y} &= I'_{12} A_1^{(2)Y} + I'_{22} A_2^{(2)Y}. \end{aligned}$$

Так как $A_1^{(1)Y} = |A^{(1)}|$; $A_2^{(1)Y} = 0$; $A_1^{(2)Y} = 0$; $A_2^{(2)Y} = |A^{(2)}|$, то получим выражения (***). Используя это, можно в данном случае проще отыскать главные оси тензора I_{ik} .

Зная, что главные оси взаимно-перпендикулярны и что в системе главных осей $I'_{12} = 0$, выберем новую систему осей (x'_1, x'_2) такую, чтобы в ней компоненты тензора I'_{12} обращались в нуль.

По общей формуле (7) имеем

$$I'_{12} = \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} I_{12}.$$

Все косинусы $\alpha_{i'k}$ могут быть выражены через функции одного параметра — угла φ , который составляет новая ось (x'_1) со старой осью (x_1) . Действительно (рис. 17),

$$\begin{aligned} \alpha_{1'1} &= \cos \varphi; & \alpha_{1'2} &= \sin \varphi; \\ \alpha_{2'2} &= \cos \varphi; & \alpha_{2'1} &= -\sin \varphi. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} I'_{12} &= \alpha_{1'1} \alpha_{2'1} I_{11} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'2} I_{22} + \alpha_{1'1} \alpha_{2'2} I_{12} + \alpha_{1'2} \alpha_{2'1} I_{21} = \\ &= -\sin \varphi \cos \varphi I_{11} + \sin \varphi \cos \varphi I_{22} + (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) I_{12} = \\ &= \frac{I_{22} - I_{11}}{2} \sin 2\varphi + I_{12} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Чтобы $I'_{12} = 0$, необходимо

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}.$$

Этим полностью определяется положение главных осей тензора I_{ik} . Главные значения этого тензора I'_{11} и I'_{22} следующие:

$$I'_{11} = \alpha_{1'l} \alpha_{1'k} I_{lk} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} (= \lambda_1);$$

$$I'_{22} = \alpha_{2'l} \alpha_{2'k} I_{lk} = \frac{I_{11} + I_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{11} - I_{22}}{2}\right)^2 + I_{12}^2} (= \lambda_2).$$

Таким образом, в системе главных осей (x'_1, x'_2) тензор I'_{ik} имеет матрицу

$$\|I'_{ik}\| = \begin{vmatrix} I'_{11} & 0 \\ 0 & I'_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос об определении главных направлений и главных значений тензора T_{ik} .

Согласно (47), компоненты векторов A , определяющие главные оси тензора T_{ik} , удовлетворяют системе трех однородных уравнений:

$$T_{ik}A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0,$$

или

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) A_1 + T_{12} A_2 + T_{13} A_3 &= 0; \\ T_{21} A_1 + (T_{22} - \lambda) A_2 + T_{23} A_3 &= 0; \\ T_{31} A_1 + T_{32} A_2 + (T_{33} - \lambda) A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Эта однородная система служит для определения A_1, A_2, A_3 . При этом находят отличное от нуля, или, как говорят, нетривиальное решение этой системы.

Как известно из алгебры, однородная система имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель ее равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (49)$$

Равенство нулю определителя (49) представляет собой кубическое уравнение относительно λ . Это уравнение называется *характеристическим уравнением тензора T_{ik}* .

Таким образом, для определения из системы (48) A_1, A_2, A_3 (отличных от нуля) необходимо и достаточно, чтобы значения λ в этой системе совпадали с одним из корней кубического уравнения (49). Корни этого уравнения, может случиться, не будут все вещественными, и тогда они не позволят определить все три главных направления.

При отнесении тензора к системам обобщенных координат можно использовать его любые компоненты для определения его главных

направлений и значений. Например, если определены ковариантные компоненты T_{ik} тензора, то уравнение, определяющее собственные векторы A тензора T_{ik} имеет вид (см. 47)

$$\lambda A_i = T_{ik} A^k. \quad (50)$$

Отсюда в силу $A_i = g_{ik} A^k$ получаем систему линейных однородных уравнений относительно A^i вида (см. 48)

$$(T_{ik} - \lambda g_{ik}) A^k = 0.$$

Однако, чтобы привести эту систему к виду (48), необходимо пользоваться смешанными компонентами тензора. Умножив предыдущие уравнения ($i = 1, 2, 3$) на g^i и просуммировав по i , в силу (37) получим

$$(T^i_{\cdot k} - \lambda g^i_{\cdot k}) A^k = 0. \quad (51)$$

Тогда для определения собственных значений тензора получаем характеристическое уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} T^1_{\cdot 1} - \lambda T^1_{\cdot 2} & T^1_{\cdot 3} \\ T^2_{\cdot 1} & T^2_{\cdot 2} - \lambda & T^2_{\cdot 3} \\ T^3_{\cdot 1} & T^3_{\cdot 2} & T^3_{\cdot 3} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (52)$$

Остановимся на рассмотрении только симметричных тензоров 2-го ранга, отнесенных к прямоугольным декартовым системам координат, так что $T_{ik} = T_{ki}$.

В этом случае все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения (49) вещественны.

Действительно, пусть λ — какой-либо из корней уравнения (49) и пусть ему отвечают в силу уравнения (48) какие-то величины A_i , вообще комплексные.

Тогда, умножив каждое ($i = 1, 2, 3$) из тождеств

$$\lambda A_i \equiv T_{ik} A_k$$

на величины \bar{A}_i , комплексно сопряженные с A_i , и просуммировав по i , получим

$$\lambda A_i \bar{A}_i = T_{ik} A_k \bar{A}_i. \quad (*)$$

Так как $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$\begin{aligned} T_{ik} A_k \bar{A}_i &= \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ik} A_k \bar{A}_i) = \frac{1}{2} (T_{ik} A_k \bar{A}_i + T_{ki} \bar{A}_k A^i) = \\ &= \frac{1}{2} T_{ik} (A_k \bar{A}_i + \bar{A}_k A^i). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что сумма $T_{ik} A_k \bar{A}_i$ вещественна, ибо все T_{ik} вещественны и выражение в скобках вещественно. Поскольку и

$A_i \bar{A}_i = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2$ — тоже вещественная величина, из (*) следует, что корень λ вещественен. При этом все компоненты A_k тоже вещественны (это следует из $\lambda A_i = \bar{T}_{ik} A_k$).

Итак, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественные числа.

Заметим, что если T_{ik} — ковариантные компоненты тензора, то на основании (50), умножая его на A_i , суммируя по i и учитывая, что $T_{ik} = T_{ki}$ аналогично предыдущему получим вещественность характеристического уравнения (52).

Рассмотрим случай различных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$. Тогда каждому из скаляров λ_s отвечает своя система чисел $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, A_3^{(s)}$ — компонент вектора $A^{(s)}$, которые с точностью до постоянного множителя определяются из системы уравнений ($i = 1, 2, 3$):

$$(T_{ik} - \lambda_s \delta_{ik}) A_k^{(s)} = 0.$$

Например, для $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, A_3^{(1)}$ имеем

$$(T_{11} - \lambda_1) A_1^{(1)} + T_{12} A_2^{(1)} + T_{13} A_3^{(1)} = 0;$$

$$T_{21} A_1^{(1)} + (T_{22} - \lambda_1) A_2^{(1)} + T_{23} A_3^{(1)} = 0;$$

$$T_{31} A_1^{(1)} + T_{32} A_2^{(1)} + (T_{33} - \lambda_1) A_3^{(1)} = 0.$$

Отсюда получим

$$\frac{A_1^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{22} - \lambda_1 & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} - \lambda_1 \end{vmatrix}} = \frac{A_2^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{23} & T_{21} \\ T_{33} - \lambda_1 & T_{31} \end{vmatrix}} = \frac{A_3^{(1)}}{\begin{vmatrix} T_{21} & T_{22} - \lambda_1 \\ T_{31} & T_{32} \end{vmatrix}}. \quad (53)$$

Эти равенства однозначно определяют лишь направление вектора $A^{(1)}$, т. е. направление первой главной оси тензора. Остальные два главных направления тензора T_{ik} определяются векторами $A^{(2)}, A^{(3)}$.

Важное значение имеет этот факт, что *все три главных оси тензора взаимно-перпендикулярны*.

Для случая различных корней $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ это доказывается просто.

Действительно, если корню λ_i отвечает вектор $A^{(1)}$, а корню λ_2 — вектор $A^{(2)}$, то

$$T_{ik} A_k^{(1)} = \lambda_1 A_i^{(1)};$$

$$T_{ik} A_k^{(2)} = \lambda_2 A_i^{(2)}.$$

Умножим первую группу этих равенств на $A_i^{(2)}$, вторую — на $A_i^{(1)}$, просуммируем по i и вычтем одну сумму из другой:

$$T_{ik} A_k^{(1)} A_i^{(2)} - T_{ik} A_k^{(2)} A_i^{(1)} = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}.$$

Так как $T_{ik} = T_{ki}$, то отсюда

$$0 = (\lambda_1 - \lambda_2) A_i^{(1)} A_i^{(2)}.$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $A_i^{(1)} A_i^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} \cdot \mathbf{A}^{(2)} = 0$, т. е. $\mathbf{A}^{(1)} \perp \mathbf{A}^{(2)}$.

Если среди корней характеристического уравнения (49) имеются кратные, то существование трех взаимно-перпендикулярных главных направлений доказывается следующим путем.

Пусть λ_1 — какой-либо корень уравнения (49) и $\mathbf{A}^{(1)}$ — вектор, определяющий главное направление, соответствующее этому главному значению тензора, т. е.

$$\lambda_1 A_i^{(1)} = T_{ik} A_k^{(1)},$$

Рассмотрим плоскость M (рис. 18), перпендикулярную к вектору $\mathbf{A}^{(1)}$.

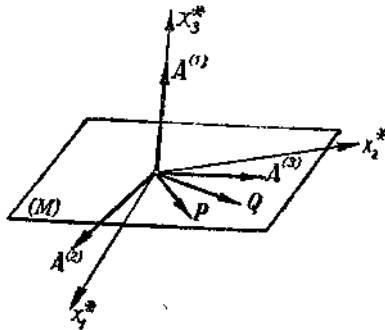


Рис. 18. Три взаимно-перпендикулярных главных оси симметричного тензора. Их существование устанавливается независимо от кратности корней характеристического уравнения.

Если брать векторы из плоскости M , то тензор T_{ik} переводит эти векторы в другие, которые лежат в той же плоскости M . Действительно, пусть \mathbf{P} — вектор в плоскости M , так что

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}^{(1)} = P_i A_i^{(1)} = 0.$$

Тогда

$$T_{ik} A_k^{(1)} P_i = \lambda_1 A_i^{(1)} P_i = 0.$$

Отсюда следует, что вектор \mathbf{Q} с компонентами $Q_k = T_{ik} P_i$ ортогонален к $\mathbf{A}^{(1)}$ (ибо $Q_k A_k^{(1)} = 0$) и, значит, лежит в той же плоскости M .

Введем декартову систему координат (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , так что ось (x_3^*) направлена по $\mathbf{A}^{(1)}$, а две другие оси лежат в плоскости M .

В этой системе координат векторы \mathbf{P} и \mathbf{Q} имеют только по две компоненты: P_1^*, P_2^* и Q_1^*, Q_2^* , а тензор T_{ik} имеет компоненты, определяемые матрицей:

$$\|T_{ik}\| = \begin{vmatrix} T_{11}^* & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* \end{vmatrix}; \quad T_{12}^* = T_{21}^*,$$

так как \mathbf{P} и \mathbf{Q} лежат в плоскости M , а вместо девяти компонент симметричного метричного тензора T_{ik} мы вправе рассматривать только четыре его компоненты (тензор на плоскости M), которые и осуществляют перевод векторов из плоскости M в векторы, лежащие в той же плоскости (плоскость M — координатная плоскость (x_1^*, x_2^*)).

Теперь будем искать в плоскости M такие векторы \mathbf{P} , которые бы не поворачивались тензором T_{ik}^* , а лишь изменяли свою длину. Тогда получим систему двух уравнений

$$\lambda A_i^* = T_{ik}^* A_k^*$$

и характеристическое уравнение второго порядка

$$\begin{vmatrix} T_{11}^* - \lambda & T_{12}^* \\ T_{21}^* & T_{22}^* - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть λ_2 — корень этого уравнения, а вектор $A^{(2)}$ соответствует λ_2 т.е.

$$\lambda_2 A_i^{(2)*} \equiv T_{ik}^* A_k^{(2)*}.$$

Тогда вектор $A^{(2)}$ определяет второе главное направление тензора, и поскольку он лежит в плоскости M , то

$$\mathbf{A}^{(2)} \perp \mathbf{A}^{(1)}.$$

Построим вектор $A^{(3)}$, перпендикулярный к $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$. Покажем, что $A^{(3)}$ определит третье главное направление тензора T_{ik} .

Действительно, вектор $T_{ik}^* A_i^{(3)*}$ перпендикулярен к $A^{(1)}$, ибо он лежит в плоскости M , и перпендикулярен к $A^{(2)}$ ибо

$$T_{ik}^* A_i^{(3)*} A_k^{(2)*} = \lambda_2 A_i^{(2)*} A_i^{(3)*} = 0$$

(векторы $A^{(2)}$ и $A^{(3)}$ взаимно-перпендикулярны). Следовательно, вектор с компонентами $T_{ik}^* A_i^{(3)*}$ коллинеарен вектору $A^{(3)}$, и тогда, учитывая $T_{ik}^* = T_{ki}^*$, имеем

$$\lambda_3 A_i^{(3)*} = T_{ik}^* A_k^{(3)*}.$$

Это и означает, что $A^{(3)}$ определяет третье главное направление тензора T_{ik} .

При таком построении главных направлений $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(3)}$ тензора T_{ik} нигде не требовалось, чтобы λ_1 , λ_2 , λ_3 были различными. Таким образом, существование трех взаимно-перпендикулярных главных

осей у симметричного тензора T_{ik} показано независимо от кратности корней характеристического уравнения (49).

Выясним связь между корнями характеристического уравнения (49) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и компонентами тензора. Для этого приведем тензор к главным осям, т. е. найдем выражение компонент тензора в системе координат, оси которой являются главными осями тензора. Пусть $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ — орты главных осей тензора:

$$\left(N^{(i)} = \frac{A^{(i)}}{|A^{(i)}|} \right).$$

Если $(X'_1), (X'_2), (X'_3)$ — главные оси (рис. 19), то

$$\begin{aligned} T_{ik} N_k^{(1)} &= \lambda_1 N_i^{(1)}; \\ T_{ik} N_k^{(2)} &= \lambda_2 N_i^{(2)}; \\ T_{ik} N_k^{(3)} &= \lambda_3 N_i^{(3)}. \end{aligned}$$

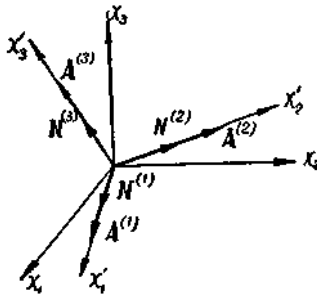


Рис. 19. Главные оси симметричного тензора.

Запишем эти равенства в системе координат (X'_1, X'_2, X'_3) , т. е. в системе главных осей тензоров:

$$\begin{aligned} T'_{ik} N_k^{(1)'} &= \lambda_1 N_i^{(1)'}; \\ T'_{ik} N_k^{(2)'} &= \lambda_2 N_i^{(2)'}; \\ T'_{ik} N_k^{(3)'} &= \lambda_3 N_i^{(3)'}. \end{aligned}$$

Отсюда, полагая $i=1, 2, 3$, получим девять равенств (учитывая, что $N_1^{(1)'} = N_2^{(2)'} = N_3^{(3)'} = 1$, $N_m^{(n)} = 0$ при $n \neq m$):

$$T'_{11} = \lambda_1; T'_{12} = T'_{21} = T'_{13} = T'_{31} = T'_{23} = T'_{32} = 0; T'_{22} = \lambda_2; T'_{33} = \lambda_3.$$

Следовательно, тензор в системе своих главных осей имеет матрицу

$$\|T'_{ik}\| = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения представляют диагональные компоненты (единственные отличные от нуля) тензора в системе главных осей; они и дают главные (собственные) значения тензора.

Для тензора напряжений его главные значения носят название *главных напряжений*.

Пусть вектор P переводится с помощью тензора T_{ik} в вектор Q , так что

$$Q_i = T_{ik} P_k.$$

В системе главных осей (X'_1, X'_2, X'_3) тензора T_{ik} это уравнение имеет вид

$$Q'_i = T'_{ik} P'_k,$$

или

$$\begin{aligned} Q'_1 &= T'_{11} P'_1 = \lambda_1 P'_1; \\ Q'_2 &= T'_{22} P'_2 = \lambda_2 P'_2; \\ Q'_3 &= T'_{33} P'_3 = \lambda_3 P'_3. \end{aligned} \quad (54)$$

Если $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то у тензора T_{ik} не существует других главных направлений, кроме тех, которые определяются корнями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. При этом из (54) следует, что если P не совпадает ни с одним из главных направлений, то тензор T_{ik} не только изменяет длину этого вектора, но и поворачивает его. Если же, например, $P \parallel A^{(1)}$, т. е. $P_2 = P_3 = 0$, то $Q = \lambda_1 P$. — вектор P не поворачивается, а только изменяет свою длину.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (один корень характеристического уравнения кратный), то из (54) следует ($\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda$):

$$Q'_1 = \lambda P'_1; \quad Q'_2 = \lambda P'_2; \quad Q'_3 = \lambda_3 P'_3.$$

Отсюда видно, что любой вектор P^{*0} из плоскости (X'_1, X'_2) (т. е. когда $P^{*0}_3 = 0$) только изменяет длину при умножении на тензор T_{ik} , но не поворачивается, ибо при этом $Q = \lambda P^0$. Значит, двойному корню характеристического уравнения отвечает целая *собственная плоскость* (X'_1, X'_2) , перпендикулярная к третьему главному направлению; в этой плоскости любое направление будет главным. Таким образом, если одно главное направление определено (корнем λ_3), а два других корня совпадают, то два оставшихся главных

направления определяются любыми двумя направлениями, перпендикулярными к первому.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$, все корни характеристического уравнения совпадают, то из (54) для любого вектора P имеем:

$$\begin{aligned} Q_1' &= \lambda P_1'; \\ Q_2' &= \lambda P_2'; \\ Q_3' &= \lambda P_3'. \end{aligned}$$

$$\text{или } Q = \lambda P;$$

Таким образом, в этом случае *любой вектор* при умножении на тензор T_{ik} только изменяет свою длину, но не поворачивается и, следовательно, любое направление у тензора T_{ik} является главным. Такой тензор называется *шаровым* (рис. 20, в).

Тензорный эллипсоид. Любому вектору A_i можно однозначно сопоставить плоскость вида $A \cdot r = A_i x^i = 1$ в том смысле, что три компоненты вектора A_i полностью определяют положение этой плоскости в любой системе координат.

Любому *симметричному* тензору $T_{ik} = T_{ki}$ можно однозначно сопоставить поверхность второго порядка вида

$$T_{ik} x^i x^k = 1.$$

(Если T_{ik} — не симметричный тензор, то однозначного соответствия между тензором и поверхностью не будет. Действительно, согласно (1), всегда можно записать

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}; \quad (S_{ik} = S_{ki}; \quad A_{ik} = -A_{ki}).$$

Но тогда

$$T_{ik} x^i x^k = S_{ik} x^i x^k + A_{ik} x^i x^k = S_{ik} x^i x^k = 1.$$

Тензорная поверхность однозначно определяется только симметричной частью тензора.)

Компоненты тензора T_{ik} однозначно определяют поверхность 2-го порядка в любой системе координат. Эта поверхность носит название *тензорной* (рис. 20).

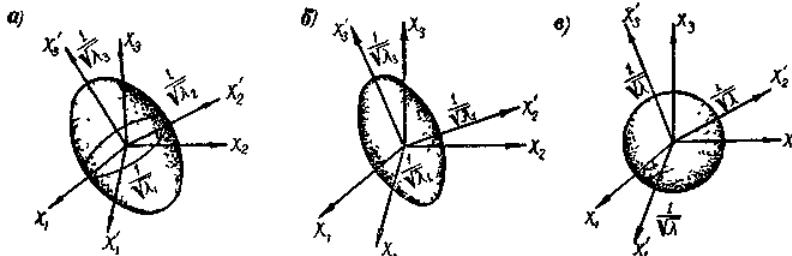


Рис. 20. Тензорный эллипсоид симметричного тензора.

Главные оси тензора — это главные оси тензорного эллипсоида. При различных корнях характеристического уравнения $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3)$ все полуоси тензорного эллипсоида различны (а). В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ тензорный эллипсоид — эллипсоид вращения (б). При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ тензорный эллипсоид вырождается в шар (в). Отсюда название «шаровой тензор», в этом случае матрица тензора в главных осях имеет вид

$$\| \| T'_{ik} \| \| = \lambda \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad \text{т. е. } T'_{ik} = \lambda \delta_{ik}.$$

Нетрудно видеть, что главные оси тензора являются главными осями тензорной поверхности, которая в системе главных осей имеет уравнение

$$T'_{11} (X'_1)^2 + T'_{22} (X'_2)^2 + T'_{33} (X'_3)^2 = \lambda_1 (X'_1)^2 + \lambda_2 (X'_2)^2 + \lambda_3 (X'_3)^2 = 1,$$

или

$$\frac{(X'_1)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)} + \frac{(X'_2)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)} + \frac{(X'_3)^2}{\left(\frac{1}{\lambda_3}\right)} = 1.$$

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ положительны (случай наиболее важный в математическом моделировании), то тензорная поверхность — эллипсоид, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}$ — отрезки, отсекаемые на главных осях тензорной поверхностью.

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то тензорный эллипсоид является эллипсоидом вращения.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ (тензор T_{ik} — шаровой), то тензорный эллипсоид — шар.

4.13. Инварианты тензора

Компоненты вектора A_i меняются при изменении системы координат. Однако с помощью этих компонент можно составить величину, которая остается неизменной при изменении прямоугольной декартовой системы координат, а именно:

$$A_i A_i = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A'_i A'_i.$$

Эта величина носит название *инварианта вектора*, т. е.

$$A_i A_i = I = \text{inv.}$$

Инварианты можно составить и из компонент тензора любого ранга.

Для получения инвариантов тензора 2-го ранга в общем виде распишем характеристическое уравнение (49), раскрыв определитель:

$$\lambda^3 - \lambda^2 (T_{11} + T_{22} + T_{33}) + \lambda \left(\begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \right) - \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку λ , λ^2 , λ^3 являются скалярами и потому не зависят от выбора системы координат, коэффициенты этого уравнения также не должны меняться при изменении системы координат.

Таким образом, величины

$$\begin{aligned} I_1 &= T_{11} + T_{22} + T_{33} (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \text{inv}; \\ I_2 &= \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \\ & (= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) = \text{inv}; \\ I_3 &= \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \text{inv} \end{aligned}$$

являются *инвариантами* тензора 2-го ранга.

(Выражения I_1 , I_2 , I_3 через λ_1 , λ_2 , λ_3 следуют из известной теоремы алгебры — теоремы Виета.)

Используя эти инварианты (I_1 —линейный инвариант, I_2 — квадратичный, I_3 — инвариант 3-го порядка), можно составить бесчисленное множество других инвариантов, представляющих всевозможные комбинации I_1 , I_2 , I_3 .

Например,

$$\begin{aligned} I_1^2 - 2I_2 &= T_{ik} T_{ik}; \\ I_1^2 &= (T_{ii})^2 \end{aligned}$$

и т. д.

Исходя из характеристического уравнения (52), можно получить инварианты тензора 2-го ранга через его компоненты в обобщенной системе координат. Они имеют вид:

$$\begin{aligned} I_1 &= T_i^i; \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(T_i^i)^2 - T_i^k T_k^i]; \\ I_3 &= \det \| T_i^k \|. \end{aligned}$$

Те тензоры, у которых линейный инвариант $I_1 = 0$, называют *девиаторами*.

Любой тензор можно разложить на девиатор и шаровой тензор:

$$T_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ik} + \frac{1}{3} T_{ii} \delta_{ik} = D_{ik} + \frac{1}{3} \delta_{ik} T_{ii}.$$

Тензор D_{ik} — девиатор, ибо

$$D_{ii} = D_{11} + D_{22} + D_{33} = T_{ii} - \frac{1}{3} T_{ii} 3 = 0.$$

Тензор-девиатор в системах обобщенных координат имеет компоненты вида

$$D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3} g_{ik} T_l^l,$$

$$D^{ik} = T^{ik} - \frac{1}{3} g^{ik} T_l^l,$$

$$D_i^k = T_i^k - \frac{1}{3} g_i^k T_l^l.$$

При этом, как легко видеть, его свертка $D_i^i = 0$.

Общий вид зависимости между компонентами тензоров 2-го ранга. Теорема Гамильтона — Кэли.

Одним из основных вопросов **механики сплошных сред** является **выяснение зависимости между деформациями и напряжениями** в деформируемом теле. Если деформации (скорости деформаций) малы, то ограничиваются наиболее общим видом линейной зависимости между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций (скоростей деформаций).

Однако при изучении конечных деформаций **изотропных сред**, не следующих линейному закону связи между напряжениями и деформациями, приходится обращаться к более общим зависимостям между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций или (и) тензора скоростей деформаций. **Наиболее общий вид этой зависимости устанавливается на основании теоремы Гамильтона—Кэли из теории матриц.**

Введем некоторые понятия, связанные с доказательством этой теоремы.

Если T_{ik} — тензор с матрицей $T \equiv \| T_{ik} \|$, то любому многочлену от λ

$$\varphi(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

можно поставить в соответствие матрицу

$$\varphi(T) = \| \varphi_{ik} \| = a_0 T^n + a_1 T^{n-1} + a_2 T^{n-2} + \dots + a_{n-1} T + a_n E.$$

Здесь E — единичная матрица, так что $E = \| \delta_{ik} \|$, а компоненты матриц T^m вычисляются согласно правилу умножения матриц:

$$\begin{aligned} T^2 &= \| T_{il} T_{lk} \|; \\ T^3 &= \| T_{il} T_{lm} T_{mk} \|; \\ &\dots \dots \dots \\ T^n &= \| T_{i_1} T_{i_2} \dots T_{i_{n-1} k} \| \end{aligned}$$

Если $\varphi(T) = 0$, то говорят, что матрица T есть корень $\varphi(\lambda) = 0$. Заметим, что характеристическое уравнение тензора 2-го ранга T_{ik} (49), имеющего матрицу $T = \| T_{ik} \|$ может быть записано в виде

$$| T_{ik} - \lambda \delta_{ik} | = 0,$$

или

$$\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0,$$

где I_1, I_2, I_3 — инварианты тензора.

Теорема Гамильтона — Кэли. *Каждая матрица является корнем своего характеристического уравнения-*

Мы приведем для наглядности доказательство этой теоремы для матрицы 2-го порядка; это ограничение несущественно. Итак, пусть T_{ik} — тензор 2-го ранга с матрицей

$$T \equiv \| T_{ik} \|$$

и характеристическим уравнением

$$| T_{ik} - \lambda \delta_{ik} | = \lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3 = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим матрицу A , присоединенную к матрице $\| T_{ik} - \lambda \delta_{ik} \|$, т. е.

$$A_{il} (T_{lk} - \lambda \delta_{lk}) = \delta_{ik} (\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3), \tag{2}$$

так что элементы матрицы A являются алгебраическими дополнениями характеристического определителя $| T_{ik} - \lambda \delta_{ik} |$.

Так как элементы A_{ik} — алгебраические дополнения определителя, являющегося многочленом третьей степени относительно λ , то они суть многочлены второй степени от λ , т. е.

$$A_{ik} = A_{ik}^{(0)} + \lambda A_{ik}^{(1)} + \lambda^2 A_{ik}^{(2)}. \tag{3}$$

Для определения коэффициентов $A_{il}^{(m)}$ подставим (3) в (2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ . Получим

$$(A_{il}^{(0)} + \lambda A_{il}^{(1)} + \lambda^2 A_{il}^{(2)}) (T_{lk} - \lambda \delta_{lk}) = \delta_{ik} (\lambda^3 - \lambda^2 I_1 + \lambda I_2 - I_3),$$

откуда

$$\begin{aligned} - A_{ik}^{(2)} &= \delta_{ik}; \\ - A_{ik}^{(1)} + A_{il}^{(2)} T_{lk} &= - \delta_{ik} I_1; \\ - A_{ik}^{(0)} + A_{il}^{(1)} T_{lk} &= \delta_{ik} I_2; \\ A_{il}^{(0)} T_{lk} &= - \delta_{ik} I_3. \end{aligned}$$

Умножим эти матричные соотношения соответственно на матрицы T^3 , T^2 , T и E и сложим. Получим

$$-A_{is}^{(2)}T_{st}T_{lm}T_{mk} - A_{is}^{(1)}T_{sm}T_{mk} + A_{il}^{(2)}T_{ls}T_{sm}T_{mk} - A_{is}^{(0)}T_{sk} + A_{il}^{(1)}T_{ls}T_{sk} + \\ + A_{il}^{(0)}T_{ls}\delta_{sk} = \delta_{is}T_{st}T_{lm}T_{mk} - \delta_{is}T_{sm}T_{mk}I_1 + \delta_{is}T_{sk}I_2 - \delta_{is}\delta_{sk}I_3.$$

Нетрудно видеть, что в левой части этого равенства все члены взаимно уничтожаются. Поэтому, производя в первой части очевидные преобразования, получаем

$$T_{il}T_{lm}T_{mk} - T_{lm}T_{mk}I_1 + T_{ik}I_2 - \delta_{ik}I_3 = 0,$$

или

$$T^3 - T^2I_1 + TI_2 - EI_3 = 0,$$

что показывает, что матрица T есть корень характеристического уравнения (1).

Теорема доказана.

Покажем теперь, как теорема Гамильтона—Кэли применяется для отыскания наиболее общего вида зависимости между компонентами двух тензоров, например, тензора напряжений P_{ik} и тензора скоростей деформаций V_{lm} в изотропной среде.

Предполагая, что компоненты тензора P_{ik} представляют собой явную функцию от V_{lm} :

$$P_{ik} = F(V_{lm}),$$

запишем ее в виде разложения в ряд P_{ik} по степеням компонент симметричного тензора V_{lm} , а именно:

$$P_{ik} = a_0\delta_{ik} + a_1V_{ik} + a_2V_{il}V_{lk} + a_3V_{il}V_{lm}V_{mk} + \dots \quad (4)$$

Здесь коэффициенты a_n должны быть скалярами вследствие изотропности среды и могут зависеть от инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора V_{ik} . В общем случае эти коэффициенты могут быть представлены в виде степенных рядов

$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} a_{prs}^{(n)} I_1^p I_2^r I_3^s. \quad (5)$$

Ряд (4) может быть записан в виде соотношения между матрицами P и V тензоров:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n V^n, \quad (6)$$

где $V^0 \equiv E$.

На основании теоремы Гамильтона—Кэли

$$V^3 - V^2I_1 + VI_2 - EI_3 = 0,$$

так что степени матрицы V выше второй могут быть выражены через V^2, V и E .

Таким образом,

$$V^n = A_n V^2 + B_n V + C_n E \quad (n > 2),$$

где скаляры A_n, B_n, C_n — это степенные ряды от инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора V_{ik} . Тогда соотношение (6) может быть записано так:

$$P = a_0 E + a_1 V + a_2 V^2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n (A_n V^2 + B_n V + C_n E),$$

или

$$P = \left(a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n C_n \right) E + \left(a_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n B_n \right) V + \left(a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n A_n \right) V^2. \quad (7)$$

Таким образом, самый общий случай зависимости между компонентами тензоров P_{ik} и V_{ik} имеет вид:

$$P_{ik} = K_0 \delta_{ik} + K_1 V_{ik} + K_2 V_{il} V_{lk};$$

$$K_0 = a_0 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n C_n; \quad K_1 = a_1 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n B_n; \quad K_2 = a_2 + \sum_{n=3}^{\infty} a_n A_n. \quad (8)$$

Коэффициенты K_0, K_1 и K_2 в общем случае являются степенными функциями главных инвариантов I_1, I_2, I_3 тензора V_{ik} .

Следовательно, общее изотропное уравнение, связывающее компоненты двух тензоров второго ранга, является уравнением второго порядка относительно компонент. Однако, поскольку коэффициенты этого уравнения — степенные ряды от инвариантов, которые в свою очередь есть функции компонент тензора, то уравнение (8) может быть, вообще говоря, уравнением любой степени. В выражении (8)

неопределенными остаются коэффициенты $\alpha_{prs}^{(n)}$, которые входят в ряды (5). Величины этих коэффициентов могут быть предельны из соответствующего эксперимента.

Например, если поставить эксперимент так, что из всех компонент V_{ik} отлична от нуля только компонента V_{11} (одномерный случай), то в этом случае

$$I_1 = V_{11}; \quad I_2 = I_3 = 0,$$

а ряды A_n, B_n и C_n приобретают выражения

$$A_n = I_1^{n-2}, \quad B_n = C_n = 0.$$

Тогда из (5) и (7) следует

$$P_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_1^n; \quad P_{22} = a_0; \quad P_{33} = 0;$$

$$a_n = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{p00}^{(n)} I_1^p.$$

Таким образом, из эксперимента можно определить коэффициенты $a_{000}^{(n)}$. При этом в первом приближении можно считать $a_n \cong a_{000}^{(n)} = \text{const}$.

В дополнение к приведенному определению тензора как величины, преобразующейся по определенному закону, можно дать другое определение тензора. Это определение обычно рассматривается как признак тензорности величин.

Сформулируем признак тензорности для девяти величин, являющийся определением тензора 2-го ранга.

Пусть A_i, B_i — компоненты двух произвольных векторов; если с помощью девяти величин T_{ik} можно образовать инвариант вида

$$T_{ik}A_iB_k = \text{inv}, \tag{55}$$

то девять величин T_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Действительно, в силу инвариантности выражения (55) и закона преобразования компонент векторов A_i, B_i при переходе к другой произвольной системе декартовых координат имеем

$$T'_{ik}A'_iB'_k = T_{lm}A_lB_m = T_{lm}\alpha_{i'l'}\alpha_{k'm}A'_iB'_k,$$

или

$$(T'_{ik} - \alpha_{i'l'}\alpha_{k'm}T_{lm})A'_iB'_k = 0.$$

Отсюда в силу произвольности векторов A и B

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l'}\alpha_{k'm}T_{lm}.$$

Эта формула преобразования величин T_{ik} доказывает их тензорность.

Аналогично формулируется и доказывается признак тензорности, являющийся определением тензора любого ранга.

Кроме того (в случае системы обобщенных координат), если, например,

$$T_{ik}A^iB^k = \text{inv}, \quad T^{ik}A_iB_k = \text{inv}, \quad T_i{}^kA^iB_k = \text{inv},$$

где A_i, B_i — ковариантные, а A, B — контравариантные компоненты двух произвольных векторов, то величины $T_{ik}, T^{ik}, T_i{}^k$ являются соответственно ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами тензора 2-го ранга.

4.14. Псевдотензоры

При рассмотрении векторного произведения мы отмечали некоторую неопределенность в направлении вектора $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$:

направление этого вектора устанавливается условно, в зависимости от выбранной системы координат (правая или левая). Было показано, что бесконечно малые повороты, а следовательно, и угловая скорость твердого тела являются векторами; однако направление этих векторов выбирается условно. В то же время направления таких векторов, как скорость, ускорение, сила, не зависят от того, определяются ли они в правой системе или в левой

В связи с этим закон преобразования компонент первой группы вектора (векторное произведение, угловая скорость) будет отличаться от закона преобразования компонент векторов второй группы (сила, скорость) при таких преобразованиях координат, когда система правая переходит в левую, или наоборот.

Все линейные ортогональные преобразования координат:

$$x'_i = \alpha_{i'k} x_k + x_i^{0'} \quad (\text{прямое преобразование});$$

$$x_i = \alpha_{k'i} x'_k + x_i^{0'} \quad (\text{обратное преобразование});$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i'l} \alpha_{l'k} &= \delta_{ik} \\ \alpha_{i'l} \alpha_{k'l} &= \delta_{ik} \end{aligned} \quad (\text{ортогональность преобразования})$$

можно классифицировать с помощью значения определителя

$$\det \|\alpha_{i'k}\| \equiv \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix}. \quad (56)$$

Этот определитель, составленный из коэффициентов общего ортогонального преобразования координат, имеет только два значения, а именно:

$$\Delta = +1, \Delta = -1.$$

Действительно, используя соотношения (5) между косинусами и теорему об умножении определителей, получим

$$\det \|\delta'_{ik}\| = \det \left\| \sum_{l=1}^3 \alpha_{i'l} \alpha_{k'l} \right\| = \det \|\alpha_{i'l}\| \cdot \det \|\alpha_{k'l}\| = (\det \|\alpha_{i'l}\|)^2 = \Delta^2.$$

(Если a_{ik} — элементы одного определителя (третьего порядка) и b_{ik} — другого, то элементы c_{ik} определителя Δ , представляющего собой произведение двух первых ($\det \|c_{ik}\| = \det \|a_{ik}\| \cdot \det \|b_{ik}\|$), образуются по одному из следующих правил:

$$c_{ik} = a_{il} b_{kl}; \quad c_{ik} = a_{il} b_{lk}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{ki}; \quad c_{ik} = a_{li} b_{kl}$$

(помнить, что $a_{il} b_{kl} \equiv \sum_{l=1}^3 a_{il} b_{kl}$).

Поскольку

$$\det \|\delta'_{ik}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

то имеем

$$\Delta^2 = 1, \quad \Delta = \pm 1.$$

В связи с этим все линейные ортогональные преобразования координат могут быть разбиты на два класса.

1. Класс преобразования движения (непрерывные преобразования).

Непрерывное преобразование (преобразование движения) координатных систем состоит в непрерывном сдвиге и вращении системы (K') из совмещенного с (K) положения в любое другое. При этом исходная система и любая преобразованная система могут быть либо обе левые, либо обе правые. Правую систему нельзя получить непрерывным преобразованием из левой, как и левую из правой. Для этого класса преобразований координат имеем

$$\Delta = +1.$$

Действительно, тождественное преобразование $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, x_3 = x'_3$ дает $\Delta = +1$. При непрерывном преобразовании системы (K) в (K') вследствие того, что определитель $\Delta \equiv \det \|\alpha'_{ik}\|$ является непрерывной функцией от косинусов α'_{ik} , углов между осями, его значение не может меняться скачком от $+1$ к -1 .

Примером преобразования движения может служить такое преобразование (см. рис. 21):

$$x'_1 = x_3, \quad x'_2 = -x_1, \quad x'_3 = x_2.$$

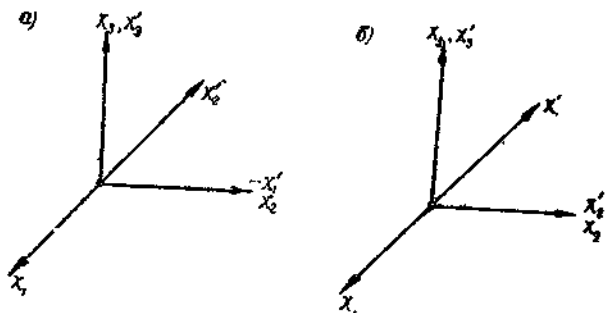


Рис. 21. Примеры преобразования координат.

Преобразование вращения (а), когда $\det \|\alpha'_{ik}\| = +1$, и преобразование отражения (б), когда $\det \|\alpha'_{ik}\| = -1$.

2. Класс преобразования отражения. Две системы (K) и (K'), осуществляющие преобразование отражения координат, не могут быть совмещены друг с другом непрерывным их движением; две их одноименные оси можно совместить так, что их положительные направления совпадут, а третьи при этом окажутся зеркальным отражением одна другой. При этом если система (K) правая, то (K') — левая, и наоборот.

Для этого класса преобразований координат имеем

$$\Delta = -1.$$

Примером преобразования отражения может служить такое преобразование (см. рис. 21):

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

В зависимости от закона преобразования компонент по отношению к этим двум классам линейных ортогональных преобразований все тензорные величины можно разделить на **истинные тензоры, или просто тензоры, и псевдотензоры**.

Псевдотензор — это величина, компоненты которой преобразуются по закону

$$T'_{ijkl \dots} = \alpha_{i'r} \alpha_{k'r} \alpha_{l's} \dots T_{mrs \dots} \Delta, \quad (57)$$

где $\Delta = \det \|\alpha_{i'r}\|$.

Закон преобразования 3^n чисел, определяющих в каждой системе координат **псевдотензор** n -го ранга, совпадает с законом преобразования компонент истинного тензора того же ранга только при преобразовании координат, относящихся к классу преобразований движения (непрерывных преобразований). В случае преобразований, переводящих правую систему координат в левую, или наоборот, закон преобразования отличается знаком.

Для **истинного тензора** закон преобразования компонент сохраняется при любых линейных ортогональных преобразованиях координат и имеет вид

$$T^*_{ijkl \dots} = \alpha_{i'r} \alpha_{k'r} \alpha_{l's} \dots T_{mrs \dots}$$

Что касается алгебры **псевдотензоров**, то из законов преобразования для тензоров и псевдотензоров можно установить следующие положения:

- 1) сумма двух псевдотензоров одного ранга — это псевдотензор того же ранга;
- 2) произведение двух псевдотензоров — тензор (истинный), ранг которого равен сумме рангов сомножителей;
- 3) произведение псевдотензора на тензор — псевдотензор;

4) свертывание псевдотензора дает псевдотензор низшего ранга. Рассмотрим несколько примеров псевдотензоров.

Пример 1. Если определением объема служит интеграл

$$\tau = \iiint dx_1 dx_2 dx_3,$$

то в другой системе координат, используя теорему о преобразовании переменных в тройном интеграле, получим

$$\tau' = \iiint dx'_1 dx'_2 dx'_3 = \iiint \frac{\partial (x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Здесь якобиан равен

$$\frac{\partial (x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{1'1} & \alpha_{1'2} & \alpha_{1'3} \\ \alpha_{2'1} & \alpha_{2'2} & \alpha_{2'3} \\ \alpha_{3'1} & \alpha_{3'2} & \alpha_{3'3} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Он вычисляется на основании (3 из п.3). Поэтому

$$\tau' = \tau \cdot \Delta.$$

Таким образом, согласно определению, величина τ является псевдотензором нулевого ранга, или псевдоскаляром. Его называют иногда относительным инвариантом.

В то же время, если за определение объема взять $|\tau| = \left| \iiint dx_1 dx_2 dx_3 \right|$, то объем будет скаляром, не изменяющим своего значения при любом ортогональном преобразовании декартовых координат. Отрезок прямой $ds^2 = \Delta x_i \Delta x_i$ также не меняет своего значения при любом преобразовании координат. Эти величины представляют собой скаляры; их называют иногда абсолютными скалярами, или абсолютными инвариантами.

Пример 2. Рассмотрим компоненты C_i векторного произведения двух векторов A и B . В некоторой системе (K) декартовых координат получим

$$C_i = A_k B_l - A_l B_k,$$

причем индексы (i, k, l) образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. В другой системе декартовых координат (K') имеем

$$A'_k = \alpha_{k'm} A_m, \quad B'_i = \alpha_{i'n} B_n.$$

Поэтому

$$C'_i = \alpha_{k'm} \alpha_{i'n} A_m B_n - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n} A_m B_n = (\alpha_{k'm} \alpha_{i'n} - \alpha_{l'm} \alpha_{k'n}) A_m B_n.$$

Справа стоит сумма по всем значениям индексов m и n , причем при $m = n$ слагаемые равны нулю. Запишем эту сумму в таком виде, чтобы

индексы m и n первого члена в скобках, т. е. $\alpha_{k'm}\alpha_{l'n}$, составляли циклическую перестановку: (12), (23) и (31). Тогда

$$C'_i = (\alpha_{k'm}\alpha_{l'n} - \alpha_{l'm}\alpha_{k'n}) (A_mB_n - A_nB_m). \quad (58)$$

Здесь индексы (m, n) , как и индексы (i, k, l) , составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3. Мы уже получали (см. 46)

$$\alpha_{k'm}\alpha_{l'n} - \alpha_{l'm}\alpha_{k'n} = (i'_k \times i'_l) \cdot i_r,$$

где индексы (m, n, r) составляют циклическую перестановку. Но при этом мы можем записать

$$A_mB_n - A_nB_m = C_r. \quad (59)$$

Если новая система (K') правая, как и (K) , то

$$i'_k \times i'_l = i'_i,$$

а если левая, т. е. преобразование координат является преобразованием отражения, то

$$i'_k \times i'_l = -i'_i$$

при циклической перестановке индексов (i, k, l) .

Таким образом, можем записать

$$i'_k \times i'_l = i'_i \Delta,$$

где Δ — определитель (56). Тогда

$$(i'_k \times i'_l) \cdot i_r = (i'_i \cdot i_r) \Delta = \alpha_{i'r} \Delta.$$

Поэтому, учитывая (59), формулу (56) можно записать в виде

$$C'_i = \alpha_{i'r} C_r \Delta.$$

Таким образом, векторное произведение двух векторов представляет собой псевдовектор.

Единичный псевдотензор. Единичный тензор δ_{ik} имеет во всех декартовых системах координат одни и те же компоненты (ноль и единица).

Существует единичный псевдотензор ε_{ikl} , антисимметричный по любой паре из его индексов, который не меняет своих компонент при преобразовании движения, а при преобразовании отражения те компоненты его, которые равны единице, меняют знак.

27 компонент тензора ε_{ikl} определяются как всевозможные смешанные произведения ортов координатных осей.

В системе (K) с ортами i_1, i_2, i_3 его компоненты равны

$$\varepsilon_{ikl} = (i_i \times i_k) \cdot i_l. \quad (60)$$

Как следует из определения,

$$\varepsilon_{ikl} = \begin{cases} +1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют циклическую перестановку;} \\ -1, & \text{если } i, k, l \text{ составляют нециклическую перестановку;} \\ 0 & \text{во всех остальных случаях, т. е. если среди } i, k, l \text{ есть} \\ & \text{одинаковые числа.} \end{cases}$$

Таким образом, отличные от нуля компоненты единичного псевдотензора

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1. \end{aligned}$$

Покажем, что величины ε_{ikl} образуют псевдотензор. В системе (K')

$$\varepsilon'_{ikl} = (\hat{i}'_i \times \hat{i}'_k) \cdot \hat{i}'_l \quad (61)$$

Раскладывая орты системы (K') по ортам старой системы (K) и подставляя это разложение в (61), получим

$$\varepsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} (\hat{i}_m \times \hat{i}_n) \cdot \hat{i}_r$$

Если система (K), как и (K'), — правая (преобразование координат относится к преобразованиям движения), то

$$(\hat{i}_m \times \hat{i}_n) \cdot \hat{i}_r = \varepsilon_{mnr}$$

Если система (K) — левая, а (K') — правая (преобразование координат относится к группе отражения), то

$$(\hat{i}_m \times \hat{i}_n) \cdot \hat{i}_r = -\varepsilon_{mnr}$$

(индексы m, n, r составляют циклическую перестановку).

Таким образом, можем записать

$$(\hat{i}_m \times \hat{i}_n) \cdot \hat{i}_r = \varepsilon_{mnr} \Delta,$$

где Δ — определитель (56). Следовательно,

$$\varepsilon'_{ikl} = \alpha_{i'm} \alpha_{k'n} \alpha_{l'r} \varepsilon_{mnr} \Delta.$$

Это доказывает, что 27 величин ε_{ikl} образуют псевдотензор третьего ранга.

Образование псевдотензоров различных рангов. С помощью единичного псевдотензора можно образовать псевдотензоры различных рангов.

Если T_{ikl} — истинный тензор 3-го ранга, то величина

$$P = \varepsilon_{ikl} T_{ikl}$$

является псевдоскаляром. В этом можно убедиться, рассматривая закон преобразования величины P .

Если T_{ik} — истинный тензор 2-го ранга, то величины

$$P_i = \varepsilon_{ikl} T_{kl}$$

образуют псевдотензор. При этом, если $T_{kl} = A_k B_l$, то величины

$$P_i = \varepsilon_{ikl} A_k B_l$$

являются компонентами векторного произведения $A \times B$. Действительно,

$$P_1 = \varepsilon_{1kl} A_k B_l = \varepsilon_{123} A_2 B_3 + \varepsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \text{ и т. д.}$$

Если φ — истинный скаляр, то величины

$$P_{ikl} = \varepsilon_{ikl} \varphi$$

образуют псевдотензор 3-го ранга.

Аналогично с помощью тензорного умножения ε_{ikl} на истинные тензоры различных рангов можно образовать псевдотензоры всевозможных рангов.

4.15. Линейное n -мерное пространство. Векторы и тензоры в n -мерном пространстве

В математике часто приходится иметь дело с *совокупностями* (множествами) некоторых объектов. Эти объекты могут иметь самую разнообразную природу; их называют *элементами* совокупности.

Точка является элементом привычного трехмерного пространства. Совокупность всевозможных точек образует трехмерное пространство.

Точка трехмерного пространства определяется тремя независимыми параметрами (координатами). В то же время во многих разделах математики (линейная алгебра, геометрия, теория функций) и теоретической физики (статистическая физика, теория относительности) приходится рассматривать множества таких объектов, каждый из которых определяется не тремя, а в общем случае n параметрами.

Совокупности таких объектов, оказывается, обладают теми же свойствами, что и привычное трехмерное пространство, а отличаются от него лишь тем, что их элементы имеют не три, а n координат.

Так, для элементов таких совокупностей имеются правила сложения и правило умножения на число. Эти правила удовлетворяют тем же условиям (аксиомам), что и правила сложения векторов и умножения вектора на скаляр: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и др. В такой совокупности можно ввести понятия нулевого элемента, противоположного элемента и т. д.

Такая совокупность объектов называется *линейным* (аффинным) *пространством*.

Приведем несколько примеров линейных пространств.

1. Совокупность решений однородной системы линейных алгебраических уравнений образует линейное пространство (сумма двух произвольных решений системы есть снова решение той же системы, произведение решения на произвольное число дает снова решение).

2. Совокупность всех многочленов степени, не превышающей некоторого натурального числа n , с обычными правилами

сложения и умножения их на число образует линейное пространство.

3. Совокупность свободных векторов на плоскости.

4. Совокупность свободных векторов в пространстве.

5. Совокупность всех систем $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ вещественных чисел образует линейное пространство, если положить, что для таких систем имеют место аксиомы

$$1) \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad 2) x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad \text{где } y = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Элементы линейного пространства называют векторами, хотя по своей природе они могут быть совершенно непохожими на привычные нам направленные отрезки.

Геометрические представления, связанные со словом «вектор», помогают построению общей (абстрактной) теории линейных пространств. В качестве примера можно привести понятие о линейной независимости элементов пространства и о базисе пространства, которые аналогичны введенным выше для обычного трехмерного пространства.

Максимальное число линейно независимых векторов в линейном пространстве определяет его *размерность*: в n -мерном линейном пространстве всегда имеется точно n линейно-независимых векторов и любые $n + 1$ вектор связаны линейным соотношением.

В соответствии с известными результатами разложения векторов в обычном трехмерном пространстве такое определение размерности пространства представляется естественным обобщением.

После этого можно говорить и о *базисе* в n -мерном линейном пространстве, как о совокупности n линейно-независимых векторов из этого пространства, и об единственности *разложения* любого вектора по векторам базиса, и о *координатах* вектора, как коэффициентах разложения этого вектора по векторам базиса. Кстати заметим, что эти числа (координаты) полностью и единственным образом определяют этот вектор в n -мерном пространстве в каждом базисе.

Если в линейном n -мерном пространстве в дополнение к правилам сложения и умножения определить **скалярное произведение двух векторов**, такое пространство называется **n -мерным евклидовым пространством**. В евклидовом пространстве можно рассмотреть такие понятия, как длина n -мерного вектора, угол между векторами, ортогональный базис, взаимные базисы и т. д.

Кроме n -мерных векторов, определяемых полностью n действительными числами, имеет смысл рассматривать более сложные объекты, которые в каждом базисе требуют для своего определения n^2 чисел, n^3 чисел, n^4 чисел и т. д.

Эти понятия (тензоры 2-го ранга, 3-го ранга и т. д.) не отвлеченное теоретическое обобщение, они необходимы для описания многих реально существующих величин и явлений в физике.

Числа (компоненты), которые определяют данный объект в каждом базисе, меняются при переходе от одного базиса к другому. Однако, поскольку совокупность этих чисел каждый раз определяет один и тот же объект, закон их преобразования имеет такие же особенности, как и в случае трехмерного пространства.

Так, при изменении базиса компоненты вектора x_i ($i=1, 2, \dots, n$) переходят x'_i ($i=1, 2, \dots, n$) и закон преобразования имеет вид

$$x'_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{i'k} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\|\alpha_{i'k}\|$ — матрица, определяющая преобразование первоначального базиса.

Компоненты тензора 2-го ранга в n -мерном пространстве преобразуются при изменении базиса по закону

$$A'_{ik} = \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A_{lm} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Таких компонент тензор 2-го ранга в n -мерном пространстве имеет всего n^2 .

Наконец, вообще тензор m -го ранга в n -мерном пространстве имеет n^m компонент, которые при изменении базиса преобразуются по закону

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_m} = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_m=1}^n \alpha_{i'_1 k_1} \alpha_{i'_2 k_2} \dots \alpha_{i'_m k_m} T_{k_1 k_2 \dots k_m}.$$

Таким образом, на n -мерное евклидово пространство переносится почти без изменений большая часть построений трехмерного пространства.

Следует отметить, что такие векторы, как векторное произведение, ротор, как понятия, связанные своим определением с трехмерностью пространства, не переносятся, на n -мерное пространство и заменяются тензорами.

4.16. Примеры моделирования

Пример 1. Выразим диссипативную функцию в гидромеханике как скалярное произведение тензоров

$$D = \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k},$$

где

$$\hat{p}_{ik} = 2\mu V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll};$$

$$V_{ik}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll}; \quad V_{ll} = \frac{\partial V_l}{\partial x_l},$$

через компоненты тензора V_{ik}^0 и через V_{ll} .

Заметим прежде всего, что тензор V_{ik}^0 — девиатор, ибо

$$V_{ij}^0 = 0.$$

Имеем

$$D = \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \hat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_{ik} \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \hat{p}_{ki} \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right).$$

Так как $\hat{p}_{ik} = \hat{p}_{ki}$, то

$$D = \hat{p}_{ik} V_{ik},$$

где

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) = V_{ik}^0 + \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll}.$$

Тогда имеем далее:

$$D = \hat{p}_{ik} V_{ik} = \hat{p}_{ik} V_{ik}^0 + \hat{p}_{ik} \frac{1}{3} \delta_{ik} V_{ll} = 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} V_{ll} V_{ik}^0 + \frac{1}{3} \hat{p}_{ll} V_{ll};$$

$$\delta_{ik} V_{ik}^0 = V_{ll}^0 = 0;$$

$$\hat{p}_{ll} = 2\mu V_{ll}^0 + \zeta \delta_{ll} V_{ll} = 3\zeta V_{ll}.$$

Поэтому окончательно

$$D = 2\mu V_{ik}^0 V_{ik}^0 + \zeta V_{ll} V_{ll} = 2\mu (V_{ik}^0)^2 + \zeta (V_{ll})^2.$$

В случае несжимаемой жидкости ($V_{ll} = 0$) получим

$$D = 2\mu V_{ik} V_{ik} = 2\mu (V_{ik})^2.$$

Пример 2. Выразим свободную энергию упругого тела

$$F = \frac{1}{2} p_{ik} u_{ik}$$

через компоненты тензора u_{ik}^0 и через $u_{ll} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$, если

$$p_{ik} = 2\lambda u_{ik}^0 + K u_{ll} \delta_{ik},$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right);$$

$$u_{ik}^0 = u_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} u_{ii}.$$

В результате получим

$$F = \lambda u_{ik}^0 u_{ik}^0 + \frac{K}{2} u_{ii} u_{ii}.$$

Пример 3. Покажем, что ось симметрии системы материальных точек является главной осью тензора моментов инерции для каждой точки этой оси.

Пусть ось (x_1) является осью симметрии системы. Возьмем на этой оси любую точку O и проведем две оси (x_2) и (x_3) так, чтобы, (x_1) , (x_2) , (x_3) составляли систему (K) прямоугольных декартовых координат. Покажем, что ось (x_1) системы (K) является главной осью для тензора I_{ik} .

Если (x_1) является осью симметрии системы, то это значит, что для каждой точки с массой m_j и координатами $x_1^{(j)}$, $x_2^{(j)}$, $x_3^{(j)}$ в системе найдется точка с той же массой $m_j = m_i$, координаты которой $x_1^{(j)} = x_1^{(i)}$; $x_2^{(j)} = -x_2^{(i)}$; $x_3^{(j)} = -x_3^{(i)}$. Тогда

$$I_{12} = - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N m_j x_1^{(j)} x_2^{(j)}.$$

Здесь мы всю сумму разбили на две по точкам, симметричным относительно оси (x_1) . В силу сказанного эти суммы равны по величине и обратны по знаку. Поэтому $I_{12} = 0$. Аналогично получим $I_{13} = 0$.

Таким образом, в нашей системе (K) тензор I_{ik} имеет матрицу

$$\| I_{ik} \| = \begin{vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix},$$

что указывает на то, что ось (x_1) системы (K) является главной осью тензора I_{ik} .

Пример 4. Покажем, что любая ось, перпендикулярная к плоскости симметрии системы материальных точек, является главной осью тензора для точки пересечения этой оси с плоскостью симметрии.

Пусть ось (x_1) пересекает в точке O плоскость симметрии тела. Выберем начало системы прямоугольных декартовых координат (K) в этой точке. Поскольку плоскость (x_2, x_3) является плоскостью симметрии системы, то для каждой точки с массой m_i и

координатами $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}$ найдется точка с массой $m_i = m_i$ и координатами

$$x_1^{(i)} = -x_1^{(i)}, x_2^{(i)} = x_2^{(i)}, x_3^{(i)} = x_3^{(i)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{12} &= - \sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} x_2^{(n)} = - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^N m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} = \\ &= - \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} + \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} m_i x_1^{(i)} x_2^{(i)} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично покажем, что $I_{13} = 0$. Таким образом, в этой системе имеем

$$\| I_{ik} \| = \begin{vmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{vmatrix}.$$

Если теперь систему (K) повернуть вокруг оси (x_1) на угол

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2I_{23}}{I_{22} - I_{33}},$$

то в новой системе (K') , ось (x'_1) которой совпадает с (x_1) , получим

$$\| I'_{ik} \| = \begin{vmatrix} I'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{33} \end{vmatrix},$$

т. е. система (K') является главной.

Пример 5. Пусть система (K) есть система главных осей тензора моментов инерции, причем начало этой системы совпадает с центром масс.

Покажем, что для любой точки этих осей главные оси совпадают с (K) .

Так как начало системы (K) совпадает с центром масс, то

$$\sum_{n=1}^N m_n x_1^{(n)} = \sum_{n=1}^N m_n x_2^{(n)} = \sum_{n=1}^N m_n x_3^{(n)} = 0. \quad (*)$$

Поскольку оси системы (K) главные, то

$$I_{12} = I_{13} = I_{23} = 0. \quad (**)$$

Рассмотрим систему (K') с началом в точке $(x_1 = a, x_2 = x_3 = 0)$, оси которой параллельны осям (K) . Тогда в системе (K')

$$I_{ik} = - \sum_{n=1}^N m_n x_i^{(n)'} x_k^{(n)'} \quad (i \neq k).$$

Но

$$\begin{aligned}x_1^{(n)'} &= x_1^{(n)} - a; \\x_2^{(n)'} &= x_2^{(n)}; \\x_3^{(n)'} &= x_3^{(n)}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в I_{ik}^* и учитывая (*) и (**), получим $I_{ik}' = 0$ ($i \neq k$), т. е. оси системы (K') являются главными.

Сдвиг начала системы по направлению других осей системы (K) приводит к тому же результату.

Пример 6. Исходя из геометрического образа, связанного с понятием симметричного тензора 2-го ранга T_{ik} — поверхности

$$T_{ik}x_i x_k = 1,$$

дадим геометрическое истолкование инвариантов тензора I_1, I_2, I_3 .

Пусть a, b, c — главные полуоси эллипсоида

$$T_{ik}x_i x_k = 1,$$

повернутого произвольным образом относительно осей системы (x_1, x_2, x_3) .

1. Находим величину полуосей эллипсоида $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в направлении осей $(x_1), (x_2)$ и (x_3) .

При $x_2=x_3=0$ имеем $x_1 = \bar{a}$ и $T_{11}\bar{a}^2 = 1$.

Отсюда $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{T_{11}}}$ Аналогично

$$\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{T_{22}}}; \quad \bar{c} = \frac{1}{\sqrt{T_{33}}}.$$

Следовательно,

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\bar{a}^2} + \frac{1}{\bar{b}^2} + \frac{1}{\bar{c}^2} = \text{inv.}$$

Итак, сумма обратных квадратов трех взаимно-перпендикулярных полуосей эллипсоида не зависит от положения образуемого ими триэдра и равна первому инварианту тензора, определяющего поверхность эллипсоида.

2. Уравнение эллиптического сечения $x_3=0$ эллипсоида имеет вид

$$T_{11}x_1^2 + 2T_{12}x_1x_2 + T_{22}x_2^2 = 1.$$

Главные полуоси этого эллипса равны

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \text{ и } \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}},$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} \\ T_{12} & T_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

так что

$$\lambda_1 \lambda_2 = T_{11} T_{22} - T_{12}^2.$$

Площадь этого сечения равна

$$F_3 = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Обозначим величины площадей остальных сечений ($\mathbf{x}_1 = 0$ и $\mathbf{x}_3 = 0$) через F_1 и F_2 . Вычисляя их, получим выражение инварианта I_2 через F_1, F_2, F_3 :

$$I_2 = \lambda_3 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 = \pi^2 \left(\frac{1}{F_1^2} + \frac{1}{F_2^2} + \frac{1}{F_3^2} \right) = \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 c^2} + \frac{1}{b^2 c^2}.$$

Итак, сумма обратных квадратов площадей эллипсов, образованных тремя взаимно-перпендикулярными плоскостями, пересекающимися в центре, не зависит от их положения и определяется величиной второго инварианта тензора

3. Объем тензорного эллипсоида равен

$$V = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Определитель I_3 в главных осях имеет вид

$$I_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}.$$

Отсюда

$$I_3 = \frac{16\pi^2}{9V^2}.$$

Итак, третий инвариант тензора определяется величиной объема тензорного эллипсоида, которая одинакова в различных системах координат.

Пример 7. Найдем разложение симметричного тензора 2-го ранга по ортам собственных (главных) его направлений.

Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — орты главных направлений тензора, ковариантные компоненты которого равны T_{ik} .

Тогда по определению главных направлений из (52) имеем девять тождеств ($\alpha, i = 1, 2, 3$):

$$(T_{ik} - \lambda_{(\alpha)} g_{ik}) a_{(\alpha)}^k = 0,$$

Где $\lambda_{(\alpha)}$ — собственное число, соответствующее вектору $\mathbf{a}_{(\alpha)}$.

Умножая каждую группу уравнений на $a_{(\alpha)l}$ и суммируя по α , получим

$$T_{ik} \sum_{\alpha=1}^3 a_{(\alpha)}^k a_{(\alpha)l} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{(\alpha)} g_{ik} a_{(\alpha)}^k a_{(\alpha)l}$$

Учитывая (2.45), получим окончательно

$$T_{ik} = \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{(\alpha)} a_{(\alpha)k} a_{(\alpha)l}$$

что и представляет собой искомое разложение.

5. Математические поля как средства моделирования

Физические свойства, имеющие тензорный характер, могут меняться с течением времени и от точки к точке в некоторой части пространства. Это приводит к рассмотрению тензор-функций скалярного аргумента и радиуса-вектора точки:

$$T_{ik} = T_{ik}(\mathbf{r}, t).$$

В этом разделе будут рассмотрены дифференциальные и интегральные операции над тензор-функциями.

5.1. Тензорное поле. Циркуляция

Тензор-функции скалярного аргумента. Если каждому допустимому численному значению скалярной величины t соответствует одно вполне определенное значение тензорной величины T_{ik} , то говорят, что задана тензор-функция от скалярного аргумента t :

$$T_{ik} = T_{ik}(t).$$

Частным видом тензор-функции является вектор-функция скалярного аргумента, рассмотренная ранее.

В некоторых случаях приходится рассматривать тензоры 2-го и более высоких рангов как функции скалярного аргумента.

Если напряженное состояние среды меняется с течением времени, то в каждой точке надо рассматривать девять функций времени $p_{ik} = p_{ik}(t)$, которые для каждого значения t образуют тензор. По определению, производной по t от тензора с компонентами p_{ik} называется тензор, компоненты которого (в неизменяемой с течением t системе координат) вычисляются как пределы:

$$\frac{dp_{ik}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ik}(t + \Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t}. \quad (1)$$

Правила дифференцирования тензоров более высокого ранга, чем векторы, по существу ничем не отличаются от правил, приведенных для векторов. Они всегда могут быть установлены из определения тензора, его алгебраических свойств и производной по скалярному аргументу.

Дифференцирование тензора по скалярному аргументу не меняет его ранга.

Тензорное поле. Если каждой точке пространства или его части (области) однозначно сопоставлен некоторый тензор, то говорят, что задано поле этого тензора (или *тензорное поле*).

Частные виды тензорных полей — скалярное или векторное, когда характеристикой поля является скалярная или соответствующая единичная однозначная функция точки: $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ или

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}).$$

В атмосфере мы имеем дело со скалярными полями давления $p = p(\mathbf{r})$, температуры $T = T(\mathbf{r})$, плотности $\rho = \rho(\mathbf{r})$.

Движение газа или жидкости приходится характеризовать векторными полями скорости $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$, ускорения $\mathbf{W} = \mathbf{W}(\mathbf{r})$.

При изучении напряженного состояния среды необходимо рассматривать тензорное поле напряжений $p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r})$.

Любое тензорное поле характеризуется однозначной функцией точки, функцией радиуса-вектора точки \mathbf{r} .

Тензорные поля, которые меняются с течением времени, называются *нестационарными* (неустановившимися). Их характеристиками служат тензоры, являющиеся функциями точки и времени:

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t); \quad p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r}, t) \text{ и т. п.}$$

Если тензор, характеризующий поле, имеет одинаковое значение для всех точек, то говорят об *однородном* поле:

$$\varphi = \varphi(t); \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}(t); \quad p_{ik} = p_{ik}(t) \text{ и т. п.}$$

В дальнейшем всюду мы будем рассматривать лишь *непрерывные тензорные поля* $T_{ikl\dots} = T_{ikl\dots}(\mathbf{r})$. Это значит, что разности

$$T_{ikl\dots}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - T_{ikl\dots}(\mathbf{r})$$

по абсолютной величине могут быть сделаны как угодно малыми при достаточно малом $|\Delta\mathbf{r}|$.

Тензорный анализ является наиболее важной частью тензорного исчисления, ибо **именно тензорные поля, а не отдельные тензоры важны в теории моделирования**. Тем не менее, конечно, все операции тензорной алгебры справедливы и для тензоров, образующих

поля, если считать, что алгебраические операции производятся над тензорами поля в *каждой точке пространства*.

Например, сложение тензоров двух полей одинакового ранга и размерности в каждой точке пространства приводит к построению нового тензорного поля того же ранга, являющегося суммой двух полей слагаемых тензоров. Аналогично производятся над тензорами полей в каждой точке пространства и другие алгебраические операции (например, умножение, свертывание и т. д.), которые приводят к новым полям.

Циркуляция векторного поля. В векторном поле A возьмем некоторую кривую M_1M_2 (рис. 1) и разобьем ее с помощью точек r_1, r_2, \dots, r_n на малые участки:

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}.$$

элементов,

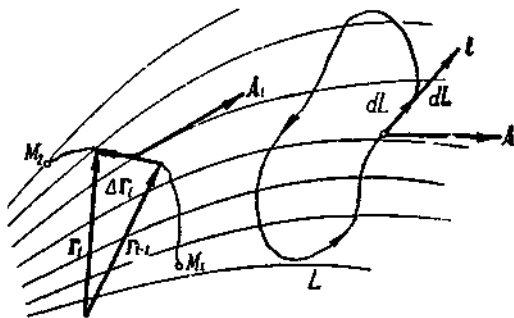


Рис. 1. Криволинейный интеграл и циркуляция векторного поля.

Составим сумму

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \Delta r_i,$$

где A_i — значение вектора поля в какой-то точке участка Δr_i .

Предел этой суммы, если он существует при неограниченном возрастании числа элементов Δr_i и убывании до нуля длины всех элементов называется криволинейным интегралом вдоль M_1M_2 и обозначается

$$\lim_{\substack{|\Delta r_i| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n A_i \cdot \Delta r_i = \int_{M_1M_2} A \cdot dr = \int_{M_1M_2} A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3.$$

Здесь вектор $d\mathbf{r}$ направлен в каждой точке кривой M_1M_2 по касательной, а его модуль равен дифференциалу дуги кривой:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = dL.$$

Особый интерес представляют криволинейные интегралы, которые берутся по замкнутому контуру (например, L на рис. 1):

$$\Gamma = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (2)$$

Здесь $d\mathbf{L}$ — направленный элемент контура, т. е. $d\mathbf{L} = t dL$ (t — орт касательной, dL — дифференциал дуги контура).

Интеграл (2) называется *циркулирующей* вектора \mathbf{A} по контуру (L).

Если вектор \mathbf{A} представляет силу, то циркуляция этого вектора по любому замкнутому пути дает работу силы при перемещении материальной частицы по этому замкнутому пути.

Понятие циркуляции вектора тесно связано с понятием так называемого вихря вектора (или ротора вектора) — это будет показано ниже.

5.2. Теорема Остроградского и теорема Стокса

Рассмотрим две основные теоремы математического анализа, устанавливающие связь между интегралом по некоторой области и интегралом по границе этой области.

Теорема Остроградского дает выражение интеграла по объему через интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем. Теорема Стокса связывает интеграл по поверхности с криволинейным интегралом по контуру, который служит границей этой поверхности.

Векторная формулировка этих теорем, на которой мы остановимся позже (см. 5.4), делает их особенно наглядными, и в таком виде они широко используются при изучении скалярных и векторных полей. Мы рассмотрим также ряд формул (см. 5.9), примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса и представляющих интерес при изучении полей скаляров, векторов и тензоров 2-го ранга.

Теорема Остроградского. Если функции $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ и $\frac{\partial P}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_2}$, $\frac{\partial R}{\partial x_3}$ непрерывны внутри объема τ и на замкнутой поверхности S , ограничивающей τ , то

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) d\tau = \\ & = \iint_S [P \cos(\mathbf{n}, x_1) + Q \cos(\mathbf{n}, x_2) + R \cos(\mathbf{n}, x_3)] dS, \end{aligned} \quad (3)$$

где \mathbf{n} — орт нормали, внешней к τ (рис. 2).

Для установления справедливости формулы (3) достаточно доказать, например, что

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_S P \cos(\mathbf{n}, x_1) dS.$$

Доказательство. Пусть любая прямая, параллельная оси x_1 встречается поверхность S не более, чем в двух точках* M' и M'' (рис. 2), в которых определены орты внешней нормали $\mathbf{n}(M')$ и $\mathbf{n}(M'')$. Тогда, если S_{23} — проекция поверхности S на плоскость (x_2, x_3) , для точек M' и M'' , лежащих на такой прямой, получим

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_{S_{23}} \left(\int_{x_1} \frac{\partial P}{\partial x_1} dx_1 \right) dS_{23} = \iint_{S_{23}} [P(M') - P(M'')] dS_{23}.$$

Но элемент dS_{23} проекции можно выразить через элементы поверхности S у точек M' и M'' :

$$dS_{23} = dS(M') \cdot \cos[\mathbf{n}(M'), x_1] = -dS(M'') \cdot \cos[\mathbf{n}(M''), x_1].$$

Поэтому

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial P}{\partial x_1} d\tau = \iint_S P(M) dS(M) \cdot \cos[\mathbf{n}(M), x_1],$$

где M — текущая точка на поверхности S .

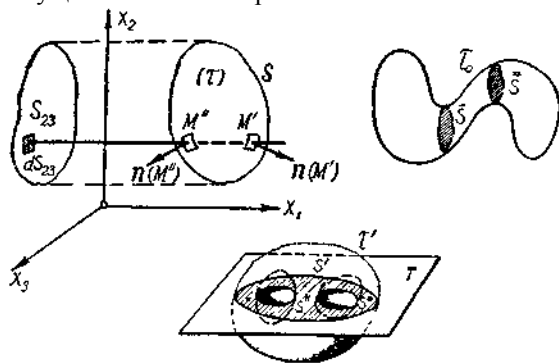


Рис. 2. К теореме Остроградского.

Теорема Остроградского справедлива для областей, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями любой формы. Область может содержать «поры» (см. τ').

Аналогично устанавливаются формулы:

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial Q}{\partial x_2} d\tau = \iint_S Q dS \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2);$$

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial R}{\partial x_3} d\tau = \iint_S R dS \cdot \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3).$$

Теорема Остроградского доказана.

Замечания к теореме Остроградского.

1. Поверхность S , ограничивающая объем τ , предполагается гладкой, т. е. обладающей нормалью, которая непрерывно меняет свое направление от точки к точке.

Теорема применима и в случае, если S — кусочно-гладкая, т. е. склеена из конечного числа гладких кусков (например, поверхность призмы, пирамиды, цилиндра с доньшками и т. п.). В этом случае теореме можно применить к каждой части объема τ , ограниченной гладкой поверхностью, и полученные результаты сложить. Аналитически каждый гладкий кусок кусочно-непрерывной поверхности при подходящем выборе системы координат можно задать уравнением $x_3 = f(x_1, x_2)$, где f — функция с непрерывными частными производными 1-го порядка.

2. Поверхность S предполагается двусторонней, т. е. можно определить положительное направление ее нормали так, что орт τ , идущий в этом направлении, указывает все время одну и ту же сторону поверхности.

3. Ограничение, состоящее в том, что прямые, параллельные координатным осям, пересекают S не более чем в двух точках, несущественно.

Действительно, если весь объем τ не удовлетворяет этому условию (например, τ_0 на рис. 2), то его всегда можно разбить на конечное число объемов, удовлетворяющих ему. Тогда, применяя формулу Остроградского к каждому из таких объемов и складывая результаты, получим слева интеграл по всему объему τ_0 , а справа — интеграл только по поверхности S_0 , ограничивающей этот объем, ибо интегралы по смежным для составляющих объемов поверхностям ($\bar{S}, \bar{\bar{S}}$ на рис. 2) взаимно уничтожаются, так как они вычисляются дважды, но с прямо противоположным направлением нормали.

4. Теорема справедлива также и для объемов с «порами», т. е. в случае объема (например, τ' на рис. 2), ограниченного несколькими замкнутыми поверхностями (S' , S'' , S'''). Справедливость теоремы нетрудно установить, проведя внутри τ' поверхность, рассекающую объем τ' по «порам» (например, плоскость на рис. 2), и применяя формулу Остроградского к соседним объемам, которые уже не содержат «пор».

Пусть векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в системе координат (x_1, x_2, x_3) имеет компоненты:

$$\begin{aligned} A_1 &= P(x_1, x_2, x_3); \\ A_2 &= Q(x_1, x_2, x_3); \\ A_3 &= R(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Тогда формула Остроградского примет вид

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) d\tau &= \iint_S \{ A_1 \cos(\mathbf{n}, x_1) + A_2 \cos(\mathbf{n}, x_2) + \\ &+ A_3 \cos(\mathbf{n}, x_3) \} dS. \end{aligned}$$

Если учесть, что компоненты орта внешней нормали \mathbf{n} суть $n_1 = \cos(\mathbf{n}, x_1)$; $n_2 = \cos(\mathbf{n}, x_2)$; $n_3 = \cos(\mathbf{n}, x_3)$, то формулу можно записать в виде

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3a)$$

Выражение, стоящее в объемном интеграле, также имеет векторную интерпретацию, на которой мы остановимся ниже (см. 5.4).

Теорема Стокса. Если функции $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x_1, x_2, x_3)$, $R(x_1, x_2, x_3)$ и $\frac{\partial P}{\partial x_2}$, $\frac{\partial P}{\partial x_3}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\frac{\partial Q}{\partial x_3}$, $\frac{\partial R}{\partial x_1}$, $\frac{\partial R}{\partial x_2}$ непрерывны на поверхности S и на замкнутом контуре L , который является границей S , то

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \right) \cos(\mathbf{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) \cos(\mathbf{n}, x_2) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \cos(\mathbf{n}, x_3) \right\} dS = \oint_L P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3, \quad (4) \end{aligned}$$

где \mathbf{n} — орт нормали к поверхности S (рис. 3).

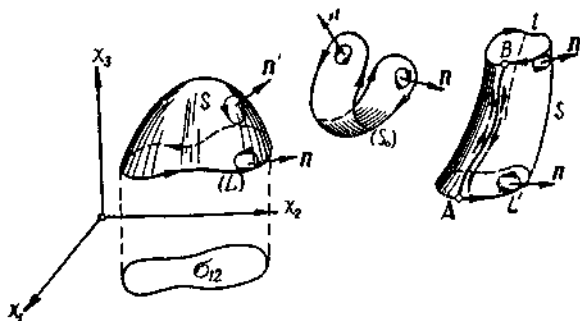


Рис. 3. К теореме Стокса.

Теорема Стокса справедлива для кусочно-гладких поверхностей, ограниченных одним контуром (поверхность S) либо несколькими контурами (поверхность S'). Положительное направление нормали выбирается в любой точке поверхности так, чтобы с направлением положительного обхода элементарного контура у этой точки составлять правый винт.

При этом важно условиться относительно направления обхода контура L и положительного направления нормали n .

Поверхность S предполагается двусторонней, а положительное направление нормали и на ней связано с положительным направлением обхода ее границы — контура L . Положительный обход контура L выбирается таким образом, чтобы поверхность оставалась всегда *слева* для наблюдателя, обходящего контур так, что положительный орт n в точках у контура L направлен от ног к голове наблюдателя. В любой точке поверхности, таким образом, положительное направление нормали и с положительным обходом элементарного контура у этой точки составляет правый винт (рис. 3).

Прежде чем переходить к доказательству теоремы Стокса, рассмотрим случай, когда поверхностью S является плоская область (σ). Покажем, что в этом случае имеет место формула

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) d\sigma = \oint P dx_1 + Q dx_2. \quad (4a)$$

Эта формула имеет самостоятельное значение и выражает *теорему Грина*.

Здесь $P(x_1, x_2)$, $Q(x_1, x_2)$, $\frac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\frac{\partial P}{\partial x_2}$ — непрерывные функции, а l — замкнутый контур, являющийся границей плоской области σ (рис. 4).

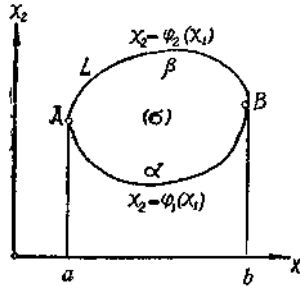


Рис. 4. К теореме Грина.

Предположим сначала, что контур l пересекается прямыми, параллельными (x_2) только в двух точках. Тогда в предположениях теоремы, как известно из анализа, двойной интеграл может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma &= \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_a^b dx_1 \int_{x_2=\varphi_1(x_1)}^{x_2=\varphi_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 = \\ &= \int_a^b [P(x_1, \varphi_2(x_1)) - \\ &\quad - P(x_1, \varphi_1(x_1))] dx_1. \end{aligned}$$

Но каждый интеграл в правой части — это криволинейный интеграл функции $P(x_1, x_2)$ по кривым $A\alpha B$ и $A\beta B$.

Поэтому можно записать

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma = \int_{A\beta B} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2) dx_1.$$

Меняя в первом интеграле направление интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma &= - \int_{B\beta A} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2) dx_1 = \\ &= - \oint_l P(x_1, x_2) dx_1, \end{aligned} \quad (*)$$

где справа стоит криволинейный интеграл по замкнутому контуру l , который обходится против часовой стрелки.

Аналогично предполагая, что прямые, параллельные оси (x_1) , пересекают контур l только в двух точках, установим формулу

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial x_1} d\sigma = \oint Q dx_2. \quad (**)$$

Вычитая из (**), уравнение (*), получим формулу Грина (4а).

Переходим к доказательству теоремы Стокса.

Предположим, что прямые, параллельные оси x_3 , пересекают поверхность S только в одной точке (рис. 3). Проекция поверхности S на плоскость (x_1, x_2) даст плоскую область σ_{12} , а проекция контура L даст границу области σ_{12} — замкнутый контур l . За положительный обход контура l принимают направление обхода против часовой стрелки, так что с положительным направлением оси x_3 этот обход составляет систему правого винта. Соответственно устанавливается обход контура L , а положительное направление внешней нормали на поверхности S таково, что ее орт n составляет с осью (x_3) острый угол. Тогда

$$d\sigma_{12} = dS \cdot \cos(n, x_3); \\ \cos(n, x_3) > 0.$$

Преобразуем интеграл

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1,$$

учитывая, что контур L принадлежит поверхности S , уравнение которой может быть записано в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$. Поэтому, если заменить под знаком интеграла x_3 на $f(x_1, x_2)$, то подынтегральная функция $P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]$ будет содержать только переменные x_1 и x_2 , которые для переменной точки на контуре L имеют то же значение, что и в соответствующей точке на контуре l . Поэтому интегрирование по L можно заменить на интегрирование по l , т. е.

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1 \equiv \oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1.$$

Применяя к этому интегралу формулу Грина (4а) и учитывая, что x_2 входит в выражение для P как непосредственно, так и через посредство $x_3 = f(x_1, x_2)$, найдем

$$\oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)] dx_1 = \\ = - \iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] d\sigma_{12}.$$

Выражая элемент $d\sigma_{12}$ через dS и переходя к интегралам по контуру L и поверхности S , получим

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3) dx_1 = - \iint_S \left[\frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial P(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right] \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) dS. \quad (***)$$

Как известно, косинусы углов, которые составляет внешняя нормаль к поверхности $\mathbf{x}_3 = f(x_1, x_2)$, с координатными осями имеют выражения:

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) = \frac{p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) = \frac{q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) = \frac{1}{\mp \sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}; \quad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Отсюда, выбирая в формулах нижний знак (ибо $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) > 0$), имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) = - \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2).$$

Тогда формула (***) примет вид

$$\oint_L P dx_1 = \iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial x_3} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) - \frac{\partial P}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) \right] dS.$$

Рассматривая другие функции $-Q(x_1, x_2, x_3)$ и $R(x_1, x_2, x_3)$ — и совершая циклическую перестановку координат x_1, x_2, x_3 , получим две аналогичные формулы:

$$\oint_L Q dx_2 = \iint_S \left[\frac{\partial Q}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_3) - \frac{\partial Q}{\partial x_3} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) \right] dS;$$

$$\oint_L R dx_3 = \iint_S \left[\frac{\partial R}{\partial x_2} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_1) - \frac{\partial R}{\partial x_1} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_2) \right] dS.$$

Складывая найденные формулы, получим (4).

Теорема Стокса доказана.

В 5.9 мы дадим более наглядное, хотя и не такое строгое доказательство теоремы Стокса, исходя из ее векторной формулировки. Здесь же мы приведем еще несколько замечаний, относящихся в равной степени и к формуле Грина, и к формуле Стокса. Эти замечания, в частности, снимают ограничения относительно условий

пересечения поверхности S и области o прямыми, параллельными координатным осям.

Замечания к теореме Стокса.

1. Поверхность S предполагается гладкой или кусочно-гладкой.
2. Поверхность S может быть как угодно расположена относительно осей системы координат $(x_1x_2x_3)$ (см. S_0 на рис. 3), а также может иметь границу в виде нескольких замкнутых контуров (например, поверхность S' на рис. 3).

Поверхность S_0 всегда может быть разрезана на конечное число подходящих кусков, к которым применяется теорема Стокса, затем результаты складываются (ср. замечание 3 к теореме Остроградского). Поверхность S' можно разрезать, например, по AB и считать за ее границы контуры L, I' и два берега AB . Тогда к такой поверхности можно применить формулу Стокса. При «склеивании» по AB криволинейные интегралы по двум берегам AB взаимно уничтожаются, ибо они вычисляются в противоположных направлениях, и остаются только интегралы по L и I' .

Пусть векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ имеет в системе (x_1, x_2, x_3) компоненты:

$$\begin{aligned} A_1 &= P(x_1, x_2, x_3); \\ A_2 &= Q(x_1, x_2, x_3); \\ A_3 &= R(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Тогда формула (4) примет вид

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \cos(\mathbf{n}, x_1) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \cos(\mathbf{n}, x_2) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \cos(\mathbf{n}, x_3) \right\} dS = \oint_L A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3. \quad (5)$$

Если обозначить дифференциал радиуса-вектора вдоль контура L через $d\mathbf{L} = i_1 dx_1 + i_2 dx_2 + i_3 dx_3$, то правая часть этой формулы может быть записана в виде

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}.$$

Векторную интерпретацию левой части формулы мы приведем позже.

Связность области. Преобразуя интеграл по контуру в интеграл по поверхности по формуле Стокса, надо не забывать, что и контур L , и поверхность S , для которой контур L служит границей, должны целиком лежать в рассматриваемой области, где выполнены условия теоремы Стокса. Однако могут быть такие области, где не для каждого контура L , хотя и расположенного полностью в области, можно выбрать соответствующую поверхность S .

Например, если область представляет собой внутренность тора, то для контура L_1 (рис. 5) нельзя подобрать такую поверхность, которая была бы ограничена этим контуром и лежала целиком внутри тора.



Рис. 5. Преобразование двухсвязных областей в односвязные.

Двухсвязная область вне тора может быть сделана односвязной, если к ее границам добавить перепонку (Σ), закрывающую отверстие кольца. Двухсвязная область внутри тора станет односвязной, если к ее границам присоединить перегородку (σ).

Если рассматривается область вне тора, то для контура L_2 нельзя выбрать поверхность, для которой границей служил бы только этот контур и которая не пересекала бы тора, т. е. находилась целиком в области вне тора.

Односвязной называется область, в которой любой замкнутый контур может быть стянут в точку непрерывным образом, не пересекая границ этой области. Односвязными являются все пространство, вся плоскость, часть плоскости, ограниченная одной замкнутой кривой, область внутри (или вне) шара, куба и т. п. Если вырезать из всего пространства некоторую кривую, замкнутую или простирающуюся на бесконечность, то в таком пространстве можно найти контур, который нельзя стянуть в точку, оставляя его все время в рассматриваемой области. Такое пространство дает пример *двухсвязной области* (рис. 6). Пространство внутри (или вне) тора — двухсвязное (рис. 5).

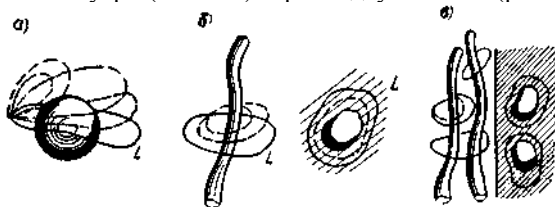


Рис. 6. Одно- и многосвязные области:

- а) область вне шара является односвязной; любой контур L можно стянуть в точку, не выходя за пределы области;
- б) двухсвязные области: область вне трубки, плоскость вне выреза — контур L невозможно стянуть в точку, не пересекая трубки (выреза);
- в) трехсвязные области: область вне двух трубок, плоскость вне двух вырезов.

Могут быть трехсвязные области (рис. 6) и вообще области n -й связности. Область n -й связности может быть превращена в односвязную присоединением дополнительных границ, «запрещающих» те контуры, которые не могут быть стянуты в точку. Например, область внутри тора может быть сделана односвязной, если присоединить к ней границу в виде перегородки σ (рис. 5); область вне тора будет односвязной, если к ее границам добавить поверхность Σ , закрывающую отверстие кольца.

5.3. Скалярное поле.

Производная по направлению. Оператор ∇

Поверхности уровня. Геометрической характеристикой скалярного поля являются поверхности уровня.

Рассмотрим скалярное поле величины φ в системе декартовых координат (x_1, x_2, x_3) , так что

$$\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x_1, x_2, x_3).$$

Те точки, для которых скаляр φ принимает некоторое одинаковое значение C , образуют поверхность

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = C.$$

Такая поверхность носит название *поверхности уровня*, или *изоповерхности*.

Придавая различные значения C , мы получим набор, семейство поверхностей уровня, на каждой из которых скаляр принимает постоянное значение (рис. 7).

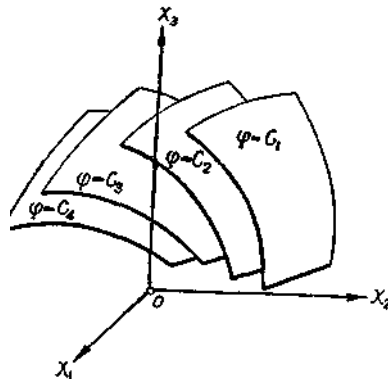


Рис. 7. Поверхности уровня

Семейство поверхностей уровня в некоторой степени наглядно характеризует скалярное поле. Места сближения изоповерхностей указывают на быстрое изменение здесь функции φ в поперечном направлении.

Изоповерхности для однозначного поля φ не пересекаются, ибо в этом случае в точках пересечения функция φ имела бы несколько значений, что невозможно.

Наиболее существенной характеристикой скалярного поля является дифференциальная его характеристика — *градиент скалярного поля*.

Градиент скалярного поля и производная по направлению. Дифференциальная характеристика скалярного поля является обобщением производной по скалярному аргументу.

При анализе поведения функции $f(t)$ скалярного аргумента в некоторой точке $M (t = t_0)$ главную роль играют значения производных $\frac{df}{dt}$, $\frac{d^2f}{dt^2}$ и т. д. в этой точке. При этом производная

$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t=t_0}$, если она существует, позволяет судить о том, как быстро

изменяется функция $f(t)$ при смещении из точки M по оси аргумента t в положительном направлении этой оси. Как известно, эта производная является числовой характеристикой быстроты изменения функции в точке M вдоль положительного направления оси аргумента t .

В случае скалярного поля, определяемого функцией φ трех переменных x_1, x_2, x_3 , составляющих вектор $\mathbf{r} = i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3$,

можно ожидать, что совокупность значений трех производных в некоторой точке поля M : $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_M, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)_M, \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)_M$ — позволит определить, как быстро меняется поле $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv \varphi(\mathbf{r})$ при смещении из точки M в *любом направлении* поля.

Если в каждой точке поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ существуют производные

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

то их совокупность составляет вектор и позволяет найти быстроту изменения поля в *любом направлении*.

Ранее было показано, что три величины $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ образуют вектор.

Этот вектор называется *градиентом* поля φ и обозначается $\text{grad } \varphi$. Если i_1, i_2, i_3 — орты декартовой системы (K) , то

$$\text{grad } \varphi = i_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = i_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь, как с помощью $\text{grad } \varphi$ можно определить быстроту изменения поля в любом направлении. Средняя быстрота изменения поля φ при смещении из точки M в M' в некотором направлении, определяемом ортом l , характеризуется отношением

$$\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M},$$

где $M'M$ — величина смещения по направлению l (рис. 8).

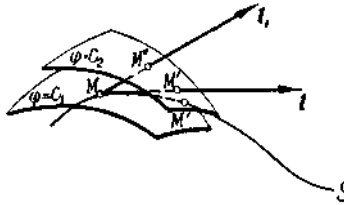


Рис. 8. Производная скалярного поля $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ по направлению и кривой.

В направлении l_1 поле меняется быстрее, чем в направлении l . Производная по кривой (S) в точке M численно совпадает с производной по направлению l , если l — орт касательной к этой кривой в точке M .

Ясно, что это отношение будет другим для направления l (см. рис. 8), ибо хотя $\varphi(M') = \varphi(M'')$ (точки M' и M'' находятся на одной поверхности уровня), но $M'M \neq M''M$.

Таким образом, в одних направлениях поле меняется быстрее, в других — медленнее.

Предел этого отношения, если он существует, когда точка M' приближается по прямой l к M , называется *производной от φ в точке M по направлению l* и обозначается $\frac{d\varphi}{dl}$:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{M'M}.$$

Эта производная и есть численное значение быстроты изменения поля φ в точке M по направлению l .

Если $\varphi(M) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, то

$$\varphi(M') = \varphi[x_1 + M'M \cdot \cos(l, x_1), x_2 + M'M \cdot \cos(l, x_2), x_3 + M'M \cdot \cos(l, x_3)].$$

Разлагая $\varphi(M')$ в ряд Тейлора, получим

$$\varphi(M') = \varphi(M) + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos(l, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cos(l, x_2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cos(l, x_3) \right] M'M + O(M'M^2),$$

где $O(M'M^2)$ — величина второго порядка малости относительно смещения $M'M$.

Тогда, вычисляя $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$, получим

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \cos(l, x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \cos(l, x_2) + \\ + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \cos(l, x_3) = l_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (7)$$

Это выражение может быть записано в виде

$$\frac{d\varphi}{dl} = l \cdot \text{grad } \varphi. \quad (8)$$

Следовательно, *производная от φ по направлению l равна проекции градиента $\text{grad } \varphi$ на это направление.*

Таким образом, если в точке поля определен $\text{grad } \varphi$, то всегда можно найти быстроту изменения поля вдоль любого заданного направления. Поэтому говорят, что $\text{grad } \varphi$ является мерой неоднородности скалярного поля φ .

Как видно, вектор $\text{grad } \varphi$ в любой точке поля определяет бесконечную совокупность производных по направлению функции φ . В выражении для $\frac{d\varphi}{dl}$ характеристика поля (однозначная вектор-функция точки $\text{grad } \varphi$) и характеристика направления (орт l , не зависящий от поля φ) разделены.

Производная по кривой. Понятие производной по направлению тесно связано с понятием производной по линии или производной по кривой.

Рассмотрим кривую s , проходящую через точку M , в которой направление к этой кривой совпадает с направлением l (рис. 8).

Если вычислить предел

$$\frac{d\varphi}{ds} = \lim_{M' \rightarrow M} \frac{\varphi(\overline{M}') - \varphi(M)}{\Delta s},$$

где \overline{M}' — точка на кривой (s), а Δs — длина дуги $\overline{M}'M$ по кривой (s), то получим

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dl}. \quad (9)$$

Действительно, если уравнение кривой (s) записать в виде (s — параметр, представляющий длину дуги кривой)

$$x_1 = x_1(s);$$

$$x_2 = x_2(s);$$

$$x_3 = x_3(s),$$

то $\varphi = \varphi[x_1(s), x_2(s), x_3(s)]$. Поэтому, используя правило дифференцирования сложных функций, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \frac{dx_3}{ds} = \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \cos(l, x_1) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \cos(l, x_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \cos(l, x_3) = \frac{d\varphi}{dl}. \end{aligned}$$

Производная $\frac{d\varphi}{ds}$ называется производной поля φ по линии s. Она, следовательно, численно равна производной по направлению, касательному в рассматриваемой точке к данной кривой.

Свойства градиента скалярного поля. Для выяснения свойств градиента поля запишем (8) в виде

$$\frac{d\varphi}{dl} = |\text{grad } \varphi| \cos(l, \text{grad } \varphi).$$

Отсюда следует:

Быстрота изменения поля имеет наибольшее значение в направлении grad φ [когда $\cos(l, \text{grad } \varphi) = 1$] и равна

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} &= |\text{grad } \varphi| = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2}. \end{aligned}$$

2. Вектор grad φ направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции φ .

Действительно, если орт l лежит в плоскости, касательной к поверхности уровня, то по определению этой поверхности [$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \text{const}$], для любой кривой, лежащей на поверхности уровня и касающейся l , имеем $\frac{d\varphi}{ds} = 0$, а вследствие (9) $\frac{d\varphi}{dl} = 0$. Значит, вектор grad φ ($|\text{grad } \varphi| \neq 0$) направлен по нормали к поверхности уровня, а так как $\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{\max} = |\text{grad } \varphi| > 0$ — в сторону возрастания значений φ (рис. 9).

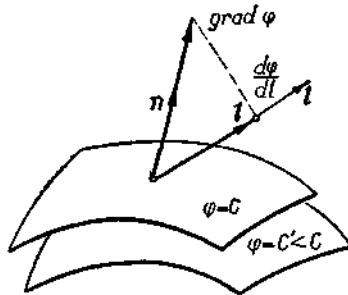


Рис. 9. Градиент скалярного поля.

Вектор $\text{grad } \varphi$ направлен по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания функции φ .

Отсюда следует, что если \mathbf{n} — орт нормали к поверхности уровня, направленный в сторону роста φ , то

$$\frac{d\varphi}{dn} = |\text{grad } \varphi| \text{ и } \text{grad } \varphi = \mathbf{n} \frac{d\varphi}{dn}. \quad (10)$$

Оператор ∇ и другое определение $\text{grad } \varphi$. Векторное поле градиента скаляра φ имеет ряд особенностей, на которых мы специально остановимся в 5.10. Сейчас нам важно отметить, что для его построения надо проделать над функцией φ ряд операций: взять частные производные от φ , умножить на соответствующие орты и сложить — тогда получим вектор $\text{grad } \varphi$. Обычно совокупность этих операций обозначают одним символом — *оператором ∇ (набла)*, который, таким образом, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\nabla \equiv \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (11)$$

Будучи применен к скаляру φ , этот оператор дает векторное поле градиента φ , так что в прямоугольных декартовых координатах

$$\nabla \varphi \equiv \text{grad } \varphi = \mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \quad (12)$$

Вектор $\text{grad } \varphi$ может быть определен независимо от системы координат. Применим формулу Остроградского (3а) для специального вида векторного поля

$$\mathbf{A} = \mathbf{c}\varphi(x_1, x_2, x_3),$$

где \mathbf{c} — вектор произвольный, но постоянный.

Подставляя это выражение для \mathbf{A} в (3а), вследствие постоянства \mathbf{c} получим

$$c \cdot \left(\iiint_{\tau} \text{grad } \varphi d\tau - \iint_S \varphi n dS \right) = 0.$$

Поскольку вектор c произволен, то равенство нулю скалярного произведения на другой вектор означает равенство нулю этого вектора, т. е.

$$\iiint_{\tau} \text{grad } \varphi d\tau = \iint_S \varphi n dS. \quad (13)$$

Пусть теперь τ малый объем, окружающий некоторую точку M скалярного поля φ . Возьмем какую-либо из компонент $\text{grad } \varphi$, например $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$. Тогда по теореме о среднем имеем

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} d\tau = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M'} \tau,$$

где точка M' — какая-то средняя точка объема τ .

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_{M'} = \frac{1}{\tau} \iint_S \varphi \cos(n, x_1) dS.$$

Будем теперь стягивать объем τ к точке M так, чтобы его поверхность S также стремилась к нулю. Тогда средняя точка M' сольется с M в силу непрерывности $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ и

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right)_M = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{\tau} \iint_S \varphi \cos(n, x_1) dS.$$

Так как аналогичные соотношения справедливы для других компонент, то

$$(\nabla \varphi)_M = (\text{grad } \varphi)_M = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{1}{\tau} \iint_S \varphi n dS. \quad (14)$$

Если предел справа существует, это равенство может служить определением градиента скалярного поля. Преимущество этого определения состоит в том, что оно не содержит никакого указания на координатную систему и потому может быть использовано для определения проекции градиента на оси любой системы координат (косоугольной декартовой, криволинейной и т. п.).

5.4. Векторное поле.

Векторные линии. Геометрической характеристикой векторного поля могут служить *векторные линии*.

Векторными линиями поля $A(\mathbf{r})$ называются кривые, в каждой точке которых касательная имеет направление вектора в этой точке (рис. 10).

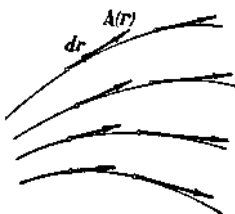


Рис. 10. Векторные линии поля.

Векторные линии поля $\text{grad } \varphi$ представляют собой кривые, ортогональные в каждой точке к поверхностям уровня $\varphi = \text{const}$; это линии быстрого изменения функции $\varphi(\mathbf{r})$.

Векторные линии поля скоростей вращающегося твердого тела представляют концентрические окружности с центрами на оси вращения, а векторные линии поля скоростей твердого тела, движущегося прямолинейно, — прямые линии.

Векторные линии поля скоростей движущейся жидкости — *линии тока* — в общем случае имеют различный вид в разные моменты времени [$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$]; в случае стационарного поля скоростей [$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$], т. е. когда движение жидкости установившееся, векторные линии имеют неизменный вид и представляют траектории частиц жидкости. В тех местах, где линии тока сгущаются, движение жидкости более интенсивно, скорость движения здесь возрастает, а в сверхзвуковом потоке — наоборот, скорость в местах сгущения векторных линий убывает.

Если задано векторное поле $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$, то, по определению векторной линии, ее элемент $d\mathbf{r}$, направленный по касательной, коллинеарен с вектором \mathbf{A} в данной точке, т. е.

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{A} = 0.$$

Это векторная форма дифференциального уравнения векторных линий. Отсюда, учитывая пропорциональность компонент коллинеарных векторов, в декартовой системе координат получим

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1, x_2, x_3)}. \quad (15)$$

Проинтегрировав эту систему двух дифференциальных уравнений, найдем семейство векторных линий, поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

В случае нестационарного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ дифференциальное уравнение векторных линий имеет аналогичный вид: при этом время t надо рассматривать как фиксированный параметр, определяющий в каждый момент времени вид семейства линий тока.

Если $\mathbf{A} \neq 0$ в некоторой точке, то через нее проходит одна и только одна векторная линия, касательная к которой в данной точке имеет определенное направление, т. е. совпадает по направлению с вектором поля; уравнение какой-либо линии тока выделяется из семейства определением постоянных интегрирования из условия прохождения через данную точку. (Теорема существования решения системы (15) требует, кроме $\mathbf{A} \neq 0$, еще и непрерывности A_1, A_2, A_3 вместе с их первыми производными по координатам.)

Если в какой-то точке $\mathbf{A}=0$ (все знаменатели (15) обращаются в нуль), то направление векторной линии в этой точке становится неопределенным; через эту точку может проходить бесконечное множество линий, может и не проходить ни одной. Такие точки являются особыми точками системы уравнений (15).

Векторные линии могут дать некоторые сведения о структуре векторного поля. Более существенны дифференциальные характеристики векторного поля.

Поток векторного поля. Пусть двусторонняя и кусочно-гладкая поверхность S , замкнутая или незамкнутая, помещена в векторное поле $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Рассмотрим ее элемент dS и определим в некоторой точке этого элемента положительный орт нормали \mathbf{n} и вектор поля \mathbf{A} (рис. 11).

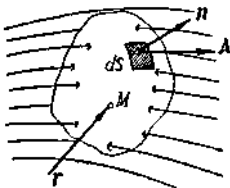


Рис. 11. Поток векторного поля через поверхность.

Потоком векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через элемент dS называется величина

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = A_n dS.$$

Потоком векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ через всю поверхность S называется поверхностный интеграл

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S A_n dS. \quad (16)$$

Этот интеграл определяется для замкнутой и для незамкнутой поверхности S . Поверхностный интеграл понимается как сумма соответствующих интегралов по гладким кускам, составляющим поверхность. Скалярное произведение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ выражает проекцию вектора поля на положительное направление нормали \mathbf{n} . Понятие потока векторного поля определено независимо от системы координат; в системе декартовых координат поток может быть записан в форме

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint \{ A_1 \cos(x_1, \mathbf{n}) + \\ + A_2 \cos(x_2, \mathbf{n}) + A_3 \cos(x_3, \mathbf{n}) \} dS.$$

Смысл понятия потока векторного поля через поверхность поясним на характерном примере.

Пусть в пространстве заданно стационарное движение несжимаемой жидкости, заполняющей неразрывно данное пространство, так что вектор скорости течения жидкости $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$ есть непрерывная функция точки.

Определим количество жидкости, протекающей в единицу времени через некоторый кусок гладкой поверхности S (рис. 12).

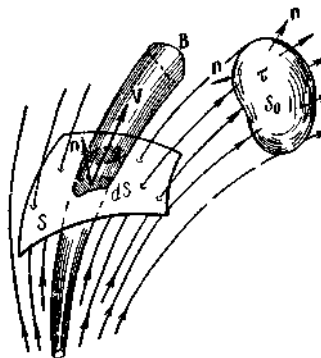


Рис. 4.12. Поток векторного поля скорости течения жидкости через поверхность.

Поток скорости жидкости через поверхность численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через нее.

Рассмотрим на поверхности некоторый элемент dS с внешней нормалью \mathbf{n} . Контур этого элемента определяет элементарную *трубку тока* AB — поверхность, образованную векторными линиями, проведенными через точки небольшого замкнутого контура. Через любое поперечное сечение трубки проходит в единицу времени

одинаковое количество жидкости. Чтобы подсчитать это количество, заметим, что за единицу времени dt через dS пройдет объем жидкости, равный объему цилиндра с основанием dS и образующей $|V| dt$, а высота h этого цилиндра, очевидно, равна проекции вектора Vdt на нормаль к основанию, т. е.

$$h = |V| dt \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) = |\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}| dt.$$

Следовательно, в единицу времени через элемент dS пройдет в направлении \mathbf{n} объем жидкости, равный

$$dQ = |\mathbf{V}| \cos(\mathbf{n}, \mathbf{V}) dS = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Полный объем Q жидкости, протекающей в единицу времени через всю поверхность S , получается интегрированием dQ по всей поверхности:

$$Q = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Таким образом, *поток векторного поля скорости \mathbf{V} несжимаемой жидкости через элемент поверхности dS численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через соответствующую трубку тока, а поток \mathbf{V} через поверхность S (замкнутую или незамкнутую) численно равен объему жидкости, протекающей в единицу времени через эту поверхность.*

Если жидкость несжимаема, то для подсчета массы жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени, достаточно объем умножить на постоянную всюду плотность жидкости:

$$m = \rho Q = \rho \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

В случае несжимаемой жидкости необходимо для подсчета задать скалярное поле плотности, т. е. $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Тогда масса жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S , равна потоку вектора

$$\rho(\mathbf{r}) \mathbf{V}(\mathbf{r})$$

через эту поверхность:

$$m = \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (17)$$

Величина $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ положительна, если \mathbf{A} и \mathbf{n} образуют острый угол, и отрицательна, если эти два вектора образуют тупой угол. Следовательно, в нашем примере $Q = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$ представляет собой *избыток* жидкости, протекающей в сторону положительной нормали \mathbf{n} , а не абсолютное количество жидкости, прошедшей через S независимо от направления течения.

В связи с этим особо отметим случай замкнутой поверхности (S_0 на рис. 12), ограничивающей некоторый объем τ . Условимся всегда направлять \mathbf{n} во внешнюю часть пространства так, что движение жидкости в сторону положительной нормали \mathbf{n} означает «вытекание» из объема τ , а в сторону ($-\mathbf{n}$) — «втекание». Тогда величина потока Q , вычисленная для замкнутой поверхности, даст разность между жидкостью, вытекающей из объема, ограниченной этой поверхностью, и жидкостью, поступающей в этот объем. Равенство нулю потока скорости жидкости через замкнутую поверхность означает, следовательно, что в объем τ жидкости втекает столько, сколько и вытекает. Если поток Q положителен, то в объеме τ есть источники, т. е. такие места, где жидкость как-то создается (например, трубочки, из которых выбрасывается дополнительно жидкость, куски тающего льда и т. п.). Если поток Q отрицателен, то в объеме τ есть стоки, где жидкость как-то «уничтожается» (замерзает, испаряется и т. п.).

Если жидкость сжимаема, т. е. плотность $\rho = \rho(\mathbf{r})$, то роль источников для потока скорости могут выполнять места разрежения, уменьшения плотности, а роль стоков — места уплотнения, увеличения плотности. Действительно, поскольку масса жидкости остается неизменной и уменьшение плотности означает увеличение объема, занимаемого жидкостью, то из мест разрежения появится дополнительный поток жидкости, увеличивающий ее скорость.

Таким образом, величина потока вектора через замкнутую поверхность позволяет некоторым образом оценить поведение поля в области, ограниченной этой поверхностью. Однако такая оценка для конечной области может оказаться весьма приближенной. Например, равенство нулю потока поля скорости жидкости через замкнутую поверхность может означать или отсутствие внутри объема, ограниченного ею, источников и стоков, или наличие источников и стоков равной мощности (год мощностью источника (стока) понимается количество жидкости, которое выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком)), или, по крайней мере, наличие такого распределения источников и стоков, что их общая мощность равна нулю.

В связи с этим оказывается удобным ввести в рассмотрение *локальную*, точечную характеристику распределения источников и стоков в данном поле жидкости, так называемую *дивергенцию* (*divergentia* (лат.) — расходимость) скорости.

Рассмотрим подробнее понятие дивергенции векторного поля.

Дивергенция векторного поля. Векторная формулировка теоремы Остроградского. Дивергенция векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ является

скалярной функцией точки и, таким образом, образует скалярное поле, построенное по данному векторному полю.

Фиксированную точку M векторного поля окружим произвольной замкнутой поверхностью S , вычислим поток вектора A через S и разделим на величину объема τ , ограниченного S :

$$\frac{1}{\tau} \iiint_{\xi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS.$$

При гидродинамической интерпретации потока вектора эта величина может быть названа средней мощностью источников и стоков в объеме τ , приходящейся на единицу объема.

Может оказаться, что существует предел этого отношения, когда объем τ стягивается по произвольному закону к точке M так, что площадь поверхности S , ограничивающей этот объем, и величина объема τ стремятся к нулю. Тогда этот предел называется *дивергенцией* поля A в точке M и обозначается $(\operatorname{div} \mathbf{A})_M$. Таким образом, по определению,

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iiint_{\xi} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (18)$$

Значение этого предела не должно по определению зависеть от вида поверхности S .

Не для всякого векторного поля A можно построить поле дивергенции $\operatorname{div} A$.

Дивергенция векторного поля A существует в каждой точке, если компоненты поля A_1, A_2, A_3 непрерывны вместе с частными производными по координатам.

Доказательство этого утверждения следует из теоремы Остроградского. В предположении существования и непрерывности $A_1,$

$A_2, A_3, \frac{\partial A_1}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_2}, \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$ из формулы (3 а) имеем

$$\frac{1}{\tau} \iiint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\tau} \iiint_{\tau} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) \partial \tau.$$

Если область τ стягивается к некоторой своей внутренней точке M , то интеграл справа имеет предел, равный

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right)_M.$$

Тогда, следовательно, должен существовать и предел левой части, который по определению (18) равен дивергенции поля A в точке M .

Таким образом, $\operatorname{div} A$ в декартовых координатах вычисляется по формуле

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x_k}. \quad (19)$$

Это же выражение можно получить непосредственно, если подсчитать поток вектора A через поверхность бесконечно малого параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям. Выбор такой поверхности не ограничивает общности определения $\operatorname{div} A$, ибо предел (18) не зависит, по определению, от формы поверхности.

Пусть $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ — площади граней бесконечно малого параллелепипеда (рис. 13), перпендикулярных соответственно к осям x_1, x_2, x_3 .

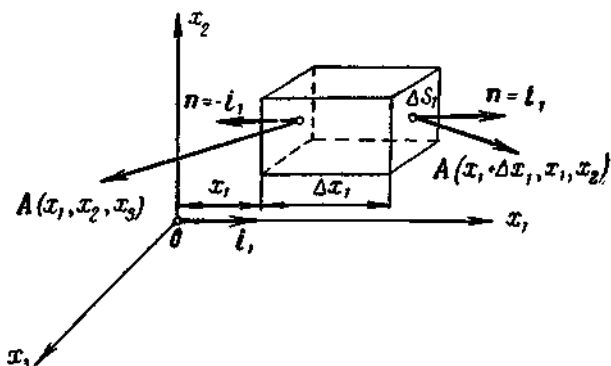


Рис. 13. Вычисление $\operatorname{div} A$ в прямоугольных декартовых координатах.

На противоположных гранях орты нормалей равны i_k и $-i_k$, где i_k — орт оси (x_k) . Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S A \cdot n dS = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ [i_1 \cdot A(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - i_1 \cdot A(x_1, x_2, x_3)] \Delta S_1 + \dots \} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{ [A_1(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - A_1(x_1, x_2, x_3)] \Delta S_1 + \dots \} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta S_k. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\Delta x_1 \Delta S_1 = \Delta x_2 \Delta S_2 = \Delta x_3 \Delta S_3 = \tau,$$

то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Следует, однако, подчеркнуть, что скалярное поле $\operatorname{div} \mathbf{A}$ введено независимо от координатной системы и в выражении (18) правая часть, очевидно, не зависит от выбора системы координат.

Для того чтобы получить выражение $\operatorname{div} \mathbf{A}$ в любой другой системе координат, можно воспользоваться определением (18), где в качестве бесконечно малой поверхности S следует выбирать поверхность, состоящую из кусков координатных поверхностей.

Используя понятие дивергенции, введенное независимо от координатной системы, можно записать формулу Остроградского (3а) в виде

$$\iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} \, d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (20)$$

В таком виде формула Остроградского имеет широкое применение во многих разделах теоретической физики.

Таким образом, теорема Остроградского может быть сформулирована так:

Интеграл по объему от дивергенции векторного поля равен потоку поля через поверхность, ограничивающую этот объем, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны в объеме и на поверхности.

Используя выражение (11) для оператора ∇ можно записать $\operatorname{div} \mathbf{A}$ в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}. \quad (21)$$

Таким образом, в этом случае применение оператора ∇ к вектору \mathbf{A} означает скалярное умножение символического вектора ∇ на данный вектор \mathbf{A} .

Рассматривая выражения (14) и (18), мы можем придать оператору ∇ вид не зависящий от системы координат:

$$\nabla (\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} (\dots) \, dS. \quad (22)$$

Эта символическая запись устанавливает, что применение оператора ∇ к некоторому выражению (...), скаляру ϕ или вектору \mathbf{A} означает вычисление определенного предела, стоящего справа в (22), а именно:

$$\nabla\varphi = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S n\varphi dS;$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS.$$

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих физический смысл дивергенции векторного поля.

Дивергенция поля скорости жидкости. Рассмотрим стационарное поле скорости $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ жидкости. Выберем в нем некоторую точку M и окружим ее поверхностью S , ограничивающей объем τ .

Если поток скорости через эту поверхность положителен и, следовательно,

$$\frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS > 0,$$

то это значит, что из области τ через S вытекло жидкости пообъему больше, чем вошло. Если в области τ нет ни источников, ни стоков, то тогда мы должны заключить, что в области происходит расширение жидкости, т. е. уменьшение ее плотности. Величина

$$\frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS$$

характеризует в среднем это объемное расширение жидкости в области τ в единицу времени, т. е. она представляет собой среднюю скорость объемного расширения (или сжатия, если она отрицательна) жидкости в области τ . Следовательно, предел

$$(\operatorname{div} \mathbf{V})_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS,$$

если он существует, характеризует скорость изменения объема жидкости в точке (M). Это означает, что если частица жидкости в точке M имела объем $\Delta\tau$, то через единицу времени ее объем будет $\Delta\tau'$, причем

$$\Delta\tau' = \Delta\tau (1 + \operatorname{div} \mathbf{V}).$$

Естественно, что в поле течения несжимаемой жидкости, лишенной источников и стоков, в каждой точке $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

Уравнение неразрывности. В случае стационарного движения жидкости в любую замкнутую область в единицу времени войдет по массе столько жидкости, сколько и выйдет, если внутри этой области нет источников и стоков. Таким образом, учитывая (17), для любой замкнутой поверхности получаем

$$\iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Если плотность и скорость жидкости в каждой точке может меняться с течением времени, т. е. $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$, то в области τ , ограниченной поверхностью S , в единицу времени происходит изменение массы жидкости, равное

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau.$$

Поскольку область τ занимает некоторый фиксированный объем, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Это изменение массы жидкости внутри неподвижной поверхности должно быть равно той массе, которая прошла в область τ через поверхность S , т. е.

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

(Знак (—) здесь поставлен в связи с тем, что $+ \iint_S \mathbf{n} \cdot \rho \mathbf{V} dS$

определяет массу, вытекающую из τ , так как \mathbf{n} — орт внешней к τ нормали).

Воспользовавшись формулой Остроградского для преобразования правой части этого выражения, получим

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} \right) d\tau = 0.$$

Так как это уравнение имеет место для любого объема τ , то при непрерывности подынтегрального выражения имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0. \quad (23)$$

Это известное уравнение неразрывности аэромеханики.

Поле источников и стоков. Рассмотрим векторное поле вида

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = q \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

где $q = \text{const}$, $\mathbf{r} = i_1 x_1 + i_2 x_2 + i_3 x_3$ — радиус-вектор. Вычислим дивергенцию этого поля. Получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} &= \frac{q(r^2 - 3x_1^2)}{r^5}; \\ \frac{\partial A_2}{\partial x_2} &= \frac{q(r^2 - 3x_2^2)}{r^5}; \\ \frac{\partial A_3}{\partial x_3} &= \frac{q(r^2 - 3x_3^2)}{r^5}.\end{aligned}$$

Отсюда во всех точках, кроме начала координат ($r = 0$), имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 3 \frac{q}{r^3} - \frac{3qr^3}{r^5} = 0.$$

В начале координат $\operatorname{div} \mathbf{A}$ (впрочем, как и сам вектор \mathbf{A}) не определена; эта точка не принадлежит полю.

Нетрудно видеть, что для любой области, не включающей начало координат, поток через ее поверхность S равен нулю, ибо во всех точках области $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, и, следовательно, по теореме Остроградского (3а) и поток через S равен нулю.

Вычислим поток вектора \mathbf{A} через замкнутую поверхность, окружающую начало координат.

Если поверхность S окружает начало координат, т. е. область τ включает точку, где ни \mathbf{A} , ни $\frac{\partial A_k}{\partial x_k}$ не определены, то непосредственное

применение теоремы Остроградского невозможно. Для вычисления потока вектора \mathbf{A} через S опишем из начала координат сферу радиуса ρ с поверхностью ε (рис. 14), применим теорему Остроградского к области τ , заключенной между S и ε .

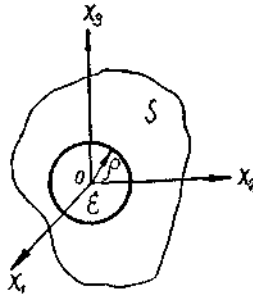


Рис. 14. Выделение особой точки в начале координат.

В этой области всюду $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, поэтому

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_\varepsilon \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\varepsilon = 0.$$

Но на сфере (ε) имеем

$$\mathbf{A}/\varepsilon = \mathbf{A}/r = \rho = q\rho/\rho^3;$$

$$\mathbf{n}/\varepsilon = -\rho/\rho.$$

Следовательно,

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\varepsilon = \iint_S q\rho/\rho^3 \cdot \rho/\rho d\varepsilon = \frac{q}{\rho^2} \iint_S d\varepsilon = 4\pi q.$$

Таким образом, поток векторного поля \mathbf{A} через поверхность, охватывающую начало координат, отличен от нуля и равен $4\pi q$.

Это векторное поле называется полем точечного источника ($q > 0$) или стока ($q < 0$). Общий характер векторных линий полей точечного источника и стока показан на рис. 15.

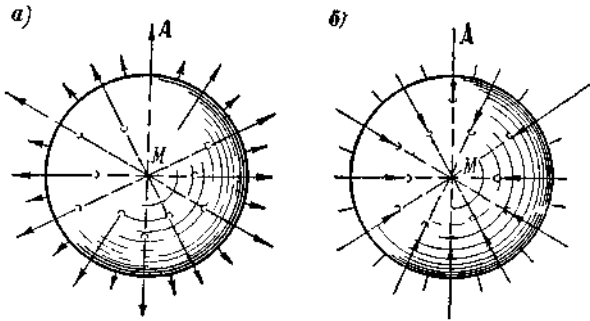


Рис. 15. Источник (а) и сток (б).

Обычно поле источника записывают в виде

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (24)$$

где Q — мощность (обильность) источника или стока, равная потоку вектора \mathbf{A} через поверхность, охватывающую место источника. Таким образом, мощность источника (стока) определяется объемом жидкости, которая выбрасывается (забирается) в единицу времени источником (стоком).

Нетрудно показать, что поле источников, расположенных в точках, определяемых радиусами-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ с мощностями Q_1, Q_2, \dots, Q_n , имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \left(Q_1 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} + Q_2 \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} + \dots + Q_n \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_n|^3} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|^3}. \end{aligned}$$

Вихрь (ротор) векторного поля. Векторная формулировка теоремы Стокса. Наряду с дивергенцией вектора важное значение имеет другая дифференциальная характеристика векторного поля — ротора (rotare (лат.) — вращать) вектора A , или вихря вектора A . Этот вектор будем обозначать $\text{rot } A$.

Вектор $\text{rot } A$ в точке M определяется как предел отношения интеграла по поверхности от аксиального вектора к объему

$$\frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS$$

при стягивании объема τ к точке M .

Таким образом, вектор $\text{rot } A$ является аксиальным вектором (псевдовектором), равным по определению

$$(\text{rot } A)_M = \lim_{\substack{\tau \rightarrow 0 \\ (\tau) \rightarrow M}} \frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS. \quad (25)$$

Следовательно, формальное определение вихря поля аналогично определению градиента скалярного поля (14), дивергенции векторного поля (18) в том смысле, что отыскивается предел отношения величины некоторого поверхностного интеграла (в каждом случае своего) к величине объема, ограниченного поверхностью интегрирования, при стягивании области τ к некоторой внутренней точке. Предел этот по определению *не зависит от формы бесконечно малой поверхности*.

Мы воспользуемся этим обстоятельством для выяснения геометрического смысла $\text{rot } A$ и возьмем в качестве поверхности S поверхность бесконечно малого прямого цилиндра (рис. 16).

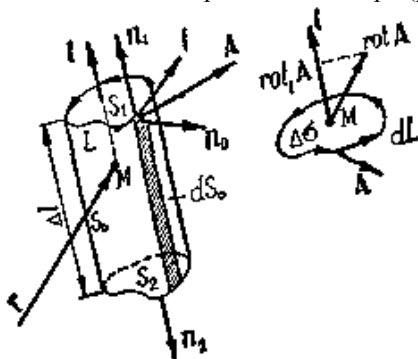


Рис. 16. Определение $\text{rot } A$ в точке.

Проекция гот \vec{A} на любое направление связана с циркуляцией вектора A по границе плоской площадки, находящейся в плоскости, перпендикулярной к l .

Образующая этого цилиндра имеет длину Δl и ориентирована по орту l некоторого направления (рис. 16), боковая поверхность S_0 , а доньшки S_1 и S_2 имеют равную площадь ($S_1 = S_2 = \Delta\sigma$). Пусть, наконец, на боковой поверхности орт внешней нормали n_0 , а на доньшках — n_1 и n_2 , причем $l = n_1 = -n_2$.

Рассмотрим проекцию гот A на направление образующей цилиндра l . Отбрасывая индекс M в выражении (25), получим

$$l \cdot \text{rot } A = \text{rot}_l A = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta l \Delta \sigma} \left\{ \iint_{S_1} l \cdot (n_1 \times A) + \right. \\ \left. + dS_1 + \iint_{S_2} l \cdot (n_2 \times A) dS_2 + \right. \\ \left. + \iint_{S_0} l \cdot (n_0 \times A) dS_0 \right\}.$$

Так как $l = n_1 = -n_2$, то интегралы по поверхностям S_1 и S_2 дают нуль. В интеграле по боковой поверхности S_0 воспользуемся свойством циклической перестановки смешанного произведения

$$l \cdot (n_0 \times A) = A \cdot (l \times n_0) = \\ = A \cdot (n_1 \times n_0).$$

Тогда, замечая, что

$$dS_0 = \Delta l dL, \\ (n_1 \times n_0) dL = dL,$$

где dL — направленный элемент контура основания цилиндра, получим

$$\frac{1}{\Delta l \Delta \sigma} \iint_{S_0} l \cdot (n_0 \times A) dS_0 = \frac{\Delta l}{\Delta l \Delta \sigma} \oint_L A \cdot dL.$$

Отметим, что в этом выражении в качестве L можно брать контур поперечного сечения цилиндра, содержащего рассматриваемую точку M .

Следовательно,

$$l \cdot \text{rot } A = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \sigma} \oint_L A \cdot dL. \quad (26)$$

Это выражение может служить определением проекции вектора гот A на любое направление l . Здесь следует отметить соответствие положительного направления l направлению обхода контура L (рис. 16), а именно: направление обхода контура L и положительное

направление l подчиняются правилу правого винта (для наблюдателя из вершины l обход контура L совершается против часовой стрелки).

Итак, проекция $\text{rot } A$ на какое-либо направление l в каждой точке поля равна пределу отношения циркуляции по границе плоской площадки, проходящей через эту точку перпендикулярно к l , к площади этой площадки, когда граница площадки стягивается к рассматриваемой точке.

Так как проекция $l \cdot \text{rot } A$ будет наибольшей тогда, когда l совпадает по направлению с $\text{rot } A$, то и предел отношения циркуляции по границе площадки к площади этой площадки будет наибольшим, если площадка перпендикулярна к $\text{rot } A$. Это наибольшее значение предела равно модулю $\text{rot } A$.

Проекции вектора $\text{rot } A$ на оси декартовой системы через проекции вектора A можно получить двумя способами.

Первый способ состоит в выборе поверхности S в виде параллелепипеда с гранями, параллельными координатным плоскостям, и подсчете правой части выражения (4.25). В качестве упражнения читателю предлагается получить этим путем проекции $\text{rot}_x A$, $\text{rot}_y A$, $\text{rot}_z A$.

Второй способ состоит в использовании выражения (22) для оператора ∇ . Определение (25) вектора $\text{rot } A$ показывает, что $\text{rot } A$ получается таким применением оператора ∇ к вектору A , которое соответствует векторному умножению символического вектора $\nabla = i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ на вектор A , а именно:

$$\text{rot } A = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iiint_S (ndS \times A) = \nabla \times A.$$

Отсюда

$$\text{rot } A = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$\text{rot}_1 A = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \quad (27)$$

$$\text{rot}_2 A = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1};$$

$$\text{rot}_3 A = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}.$$

Сокращенно i -ю компоненту псевдовектора $\text{rot } A$ можно записать в виде

$$\text{rot}_i A = \frac{\partial A_l}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_l},$$

причем индексы (i, k, l) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Те точки поля, в которых вихрь не равен нулю, называются *вихревыми*. Они могут образовывать целые области — вихревые линии, трубки и т. п.

Вихрь поля скоростей вращающегося твердого тела равен удвоенной угловой скорости вращения.

Действительно, как известно, поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, имеет вид

$$V = \omega \times r,$$

где ω — мгновенная угловая скорость. Вычислим

$$\text{rot } V = \text{rot } (\omega \times r).$$

Для проекции на ось (x_1) , учитывая, что ω не зависит от координат, имеем

$$\text{rot}_1 V = \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{\partial V_2}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} (\omega_1 x_2 - \omega_2 x_1) - \frac{\partial}{\partial x_3} (\omega_3 x_1 - \omega_1 x_3) = 2\omega_1.$$

Аналогично получим

$$\text{rot}_2 V = 2\omega_2; \quad \text{rot}_3 V = 2\omega_3.$$

Следовательно,

$$\text{rot } V = 2\omega.$$

В связи с введением понятия вихря поля и определением его независимо от системы координат можно дать наглядное толкование векторной формулировки теоремы Стокса (5).

Учитывая выражения (27) для проекций $\text{rot } A$, формулу (5) можно записать так:

$$\iint_S n \cdot \text{rot } A dS = \oint_L A \cdot dL. \quad (28)$$

В таком виде формула, выражающая теорему Стокса, нашла широкое применение. Сама же теорема Стокса исходя из записи (28) может быть сформулирована так:

Поток вихря $\text{rot } A$ векторного поля A через поверхность S , ограниченную замкнутым контуром L , равен циркуляции вектора A по этому контуру, если компоненты поля вместе с их частными производными непрерывны на поверхности S и на контуре L .

Дифференцирование векторного поля по направлению. Рассмотрим дифференциальную характеристику векторного поля, подобную градиенту в скалярном поле.

Вектор градиента скалярного поля, заданный в какой-либо точке, определяет бесконечную совокупность производных скаляра по всевозможным направлениям.

В векторном поле под производной вектора A по направлению l (рис. 17) будем понимать вектор $\frac{dA}{dl}$, определяемый пределом

$$\frac{dA}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{A(l + \Delta l) - A(l)}{\Delta l},$$

где l — координата, отсчитываемая по прямой, определяемой ортом l .

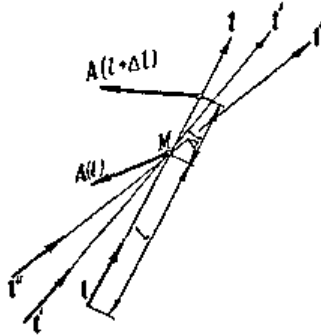


Рис. 17. Производная векторного поля по направлению.

В каждой точке M векторного поля A можно рассматривать бесконечную совокупность производных вектора по всевозможным направлениям (l , l' , l'' и т. д.). Все эти производные могут быть найдены, если в точке M известен тензор второго ранга ∇A .

Следует ожидать, что величина, позволяющая определять в точке бесконечную совокупность векторов $\frac{dA}{dl}$, будет более высокого ранга, чем вектор (градиент), определяющий совокупность скаляров $\frac{d\varphi}{dl}$.

Рассмотрим в векторном поле поверхность S , окружающую некоторую точку M . В каждой точке этой поверхности отыщем орт n внешней нормали и вектор поля A (рис. 18).

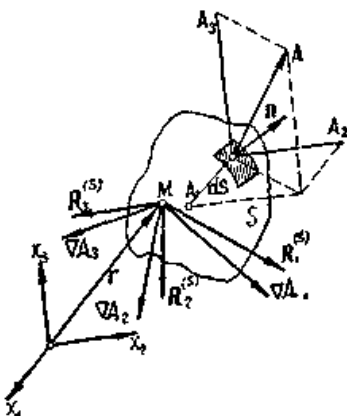


Рис. 18. Построение тензора ∇A .

В каждой точке M векторного поля A можно определить три вектора $R_i^{(S)}$. Предельные значения их дают векторы ∇A_i , проекции которых образуют тензор 2-го ранга ∇A с компонентами

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$$

Для каждой из трех компонент вектора A составим вектор

$$R_i^{(S)} = \frac{1}{\tau} \iint_S A_i n dS,$$

где τ — объем, ограниченный поверхностью S .

Легко проверить, что девять величин (проекции этих трех векторов) составляют тензор 2-го ранга:

$$R_{ik}^{(S)} = \frac{1}{\tau} \iint_S A_i n_k dS.$$

Векторы $R_i^{(S)}$ зависят от поверхности S , но их предельные значения, если они существуют, по определению предела не зависят от вида бесконечно малой поверхности S , стягивающейся к точке M .

Имея в виду выражение (22) для оператора ∇ , эти предельные значения мы будем обозначать через ∇A_i ($i = 1, 2, 3$). Таким образом,

$$\nabla A_i = \lim_{\tau \rightarrow 0} R_i^{(S)} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S A_i n dS.$$

Следует, однако, помнить, что ∇A_i — три вектора, а не один, как это было в случае применения оператора ∇ к скалярной функции. В прямоугольных декартовых координатах применение оператора ∇ к трем компонентам A_i определяется следующим образом:

$$\nabla A_i = \left(i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) A_i = i_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3} = i_k \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Отсюда определяются компоненты векторов ∇A_i , например,

первая компонента i -го вектора ∇A_i равна $\frac{\partial A_i}{\partial x_1}$ и т. п. Нетрудно

показать, что девять величин $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$, определенных в прямоугольной декартовой системе координат, — компоненты трех векторов ∇A_i — составляют тензор 2-го ранга. Действительно,

$$\frac{\partial A_i'}{\partial x_k'} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x_k} = \alpha_{i'l} \frac{\partial A_l}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial x_k'} = \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} \frac{\partial A_l}{\partial x_m}.$$

Для выяснения связи между $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ и производной вектора по направлению $\frac{dA}{dl}$ воспользуемся тем же приемом, что и при определении проекции $\text{rot } A$ на направление l . Выбирая в качестве поверхности S бесконечно малый цилиндр с образующей по орту l , проектируя ∇A_i на l и производя те же вычисления, что и при определении $l \cdot \text{rot } A$, получим

$$l \cdot \nabla A_i = \frac{dA_i}{dl}.$$

Эти три величины составляют вектор — производную вектора A по направлению l . Ее можно записать в виде

$$l \cdot \nabla A = (l \cdot \nabla) A = \frac{dA}{dl}. \quad (29)$$

Используя определение ∇A_i , найдем проекции $\frac{dA}{dl}$:

$$\frac{dA_i}{dl} = l \cdot \nabla A_i = i_1 \frac{\partial A_i}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial A_i}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial A_i}{\partial x_3}.$$

Вспомним, что производная скаляра по направлению имеет выражение

$$\frac{d\varphi}{dl} = l \cdot \text{grad } \varphi = i_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}.$$

В скалярном поле бесконечную совокупность производных скаляра по направлению определяет вектор $\mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ — градиент поля. Он, как было сказано, является мерой неоднородности скалярного поля φ .

В векторном поле бесконечную совокупность производных вектора по направлению определяет тензор 2-го ранга $\nabla \mathbf{A}$ с компонентами $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}$. Его можно рассматривать как меру неоднородности векторного поля \mathbf{A} .

Как пример использования производной вектора по направлению рассмотрим поле ускорений движущейся жидкости. Поле скоростей $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, t)$ в общем случае неоднородное и нестационарное.

Пусть частица жидкости за dt переместилась из M в M' (рис. 19), получив приращение скорости dV .



Рис. 19. Полное изменение скорости жидкой частицы.

Приращение скорости частицы состоит (рис. 20) из следующих частей:
1) dV_n , определяемой нестационарностью поля скоростей; скорость частицы по истечении времени dt изменится на

$$dV_n = \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

— локальное, местное изменение скорости (рис. 20);

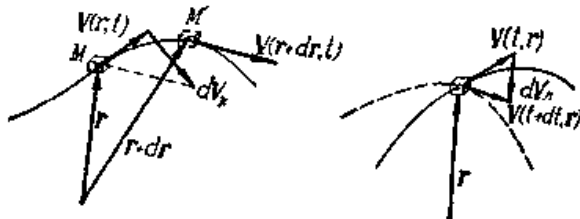


Рис. 20. Локальное и конвективное изменение скорости жидкой частицы.

Скорость частицы при перемещении ее из M в M' меняется вследствие как нестационарности поля \mathbf{V} (локальное изменение), так и неоднородности его (конвективное изменение).

2) $d\mathbf{V}_k$, определяемой неоднородностью поля скоростей, скорость частицы при переходе из M в M' изменится на величину $d\mathbf{V}_k$, которая определяется производной по направлению перемещения частицы, т. е. по направлению вектора \mathbf{V} (вдоль траектории); это конвективное (переносное) изменение скорости равно

$$d\mathbf{V}_k = \frac{d\mathbf{V}}{dl} dt,$$

причем орт направления, по которому берется производная от \mathbf{V} , равен $\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|}$.

По формуле (29) имеем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \left(\frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} \cdot \nabla \right) \mathbf{V} = \frac{1}{|\mathbf{V}|} (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}.$$

Так как $dt = |\mathbf{V}| dt$, то

$$d\mathbf{V}_k = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} dt.$$

Таким образом,

$$d\mathbf{V} = d\mathbf{V}_a + d\mathbf{V}_k = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dt + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} dt.$$

Следовательно, поле ускорений в жидкости имеет вид

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V},$$

или в компонентах

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}. \quad (30)$$

5.5. Поле тензора 2-го ранга

Рассмотрим поле тензора 2-го ранга $\mathbf{T}(\mathbf{r})$, имеющего компоненты $T_{ik} = T_{ik}(\mathbf{r})$.

Примерами полей тензора 2-го ранга могут служить поле тензора напряжений в упругой среде и поле моментов инерции в твердом теле.

Поток тензорного поля. Рассмотрим двустороннюю кусочно-гладкую поверхность S , помещенную в тензорное поле $\mathbf{T}(\mathbf{r})$. Для каждого элемента dS этой поверхности определим положительный орт нормали.

Потоком тензорного поля через поверхность называется поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения тензора на вектор нормали:

$$\mathbf{W} = \iint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Поток тензорного поля является *вектором*, в отличие от потока векторного поля (16), являющегося скаляром. Компоненты потока тензорного поля равны

$$W_i = \iint_S T_{ik} n_k dS = \iint_S (T_{i1}n_1 + T_{i2}n_2 + T_{i3}n_3) dS. \quad (31)$$

Если свертывание происходит по первым индексам, то

$$W_i = \iint_S T_{ki} n_k dS.$$

Укажем несколько приложений потока поля тензора 2-го ранга.

1) Пусть $T_{ik} \equiv p_{ik}$ — тензор напряжений в упругом теле. Выделим в этом теле некоторую поверхность и определим равнодействующую P всех сил напряжения, приложенных к этой поверхности (замкнутой или незамкнутой). Если p_n — напряжение у элемента dS с нормалью n , то равнодействующая

$$P = \iint_S p_n dS,$$

а ее компоненты

$$P_k = \iint_S p_{nk} dS.$$

Согласно (7 п.3), имеем

$$p_{nk} = p_{ik} n_i.$$

Следовательно,

$$P_k = \iint_S p_{ik} n_i dS.$$

Итак, поток тензора напряжений через поверхность, взятую в упругой среде, равен равнодействующей всех сил напряжений, приложенных к этой поверхности.

2) Вычислим поток единичного тензора δ_{ik} через замкнутую поверхность. Получим

$$W_i = \iint_S \delta_{ik} n_k dS = \iint_S n_i dS,$$

или

$$W = \iint_S n dS.$$

Поскольку $\iint_S n dS = 0$ (см. 8), поток единичного тензора через замкнутую поверхность равен нулю.

Дивергенция тензорного поля. Дивергенция поля тензора 2-го ранга, как и поток этого поля, является *вектором* и определяется следующим пределом:

$$\operatorname{div} T = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T \cdot n dS. \quad (32)$$

Здесь поверхность S , ограничивающая объем τ , стягивается к рассматриваемой точке так, что ее площадь вместе с величиной объема τ стремится к нулю. Предел не зависит от вида бесконечно малой поверхности S .

Компоненты вектора $\operatorname{div} T$ получаются путем дифференцирования компонент тензора T_{ik} по координатам и свертывания по тем индексам, по которым производится свертывание справа в (32). Таким образом,

$$(\operatorname{div} T)_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T_{ik} n_k dS,$$

или

$$(\operatorname{div} T)_i = \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S T_{ki} n_k dS. \quad (33)$$

Используя выражение для оператора ∇ , дивергенцию тензора второго ранга можно записать в виде

$$\operatorname{div} T = \nabla \cdot T.$$

Дифференцирование тензорного поля по направлению. Отыскивая производную тензора 2-го ранга по некоторому направлению, определяемому ортом l , и используя результаты предыдущего параграфа, полученные при определении производной вектора по направлению, получим (ср. 29)

$$\frac{dT}{dl} = l \cdot \nabla T.$$

Компоненты этого тензора в прямоугольной декартовой системе координат получим, если учесть символическую запись

$$\nabla T = \left(i_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) T,$$

в виде

$$\frac{dT_{ik}}{dl} = (l \cdot i_m) \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m} = l_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}.$$

Бесконечная совокупность производных $\frac{dT_{ik}}{dl}$ тензора 2-го ранга по направлению определяется компонентами тензора 3-го ранга $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$.

Операция, соответствующая образованию вихря векторного поля, к тензорным полям 2-го ранга не применима вообще.

5.6. Ковариантное дифференцирование тензоров.

Рассмотрим выражение дифференциала вектора через дифференциалы его компонент.

В декартовой системе координат имеем

$$dA = d(A_i t_i) = t_i dA_i.$$

В соответствии с определением из (35) получим

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \cdot e_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + A_j \frac{\partial e^j}{\partial x^k} \cdot e_i,$$

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} \cdot e^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^j \frac{\partial e^j}{\partial x^k} \cdot e^i. \quad (38)$$

Учитывая, что компоненты $g_i^j = e_i \cdot e^j$ равны либо нулю, либо единице, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (e_i \cdot e^j) = 0.$$

Отсюда, дифференцируя, имеем

$$e_i \cdot \frac{\partial e^j}{\partial x^k} = -e^j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k}. \quad (39)$$

Введем обозначение:

$$\Gamma^i_{jk} \equiv e^i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \quad (40)$$

Эти величины (их всего 27 в трехмерном пространстве) носят название *символов Кристоффеля второго рода*. Тогда в силу (39) и (40) формулы (38) примут вид

$$A_{i;k} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_j \Gamma^j_{ik},$$

$$A^i_{;k} = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^j \Gamma^i_{jk}. \quad (41)$$

Из этих формул следует, что абсолютная (ковариантная) производная векторного поля учитывает не только быстроту изменения самого поля как такового при перемещении вдоль координатных линий (члены $\frac{\partial A_i}{\partial x^k}, \frac{\partial A^i}{\partial x^k}$), но также и быстроту изменения локального базиса (вторые члены в (41)). Если координатный базис не меняется от точки к точке (декартовы системы координат), то из (40) следует, что все символы Кристоффеля второго рода равны нулю. В этом случае ковариантные производные обращаются в наборы частных производных компонент по координатам.

Таким образом, слагаемые — $A_j \Gamma_{jk}^i$ и $+ A^i \Gamma_{jk}^i$ обязаны своим происхождением исключительно введению местного, подвижного координатного базиса. Поэтому символы Кристоффеля должны выражаться через производные от компонент метрического тензора. Найдем их явное выражение.

Прежде всего заметим, что из (40) следует

$$e_i \Gamma_{jk}^i = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \quad (42)$$

Таким образом, Γ_{jk}^i являются коэффициентами разложения векторов $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$ по векторам основного базиса.

Введем символы Кристоффеля первого рода $\Gamma_{i, jk}$, являющиеся коэффициентами разложения векторов $\frac{\partial e_j}{\partial x^k}$ по векторам взаимного базиса, т. е.

$$e^i \Gamma_{i, jk} = \frac{\partial e_j}{\partial x^k}. \quad (43)$$

Тогда из (43) и (42) имеем

$$\Gamma_{i, jk} = e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k}, \quad (44)$$

$$\Gamma_{i, jk} = g_{il} \Gamma_{jk}^l; \quad \Gamma_{jk}^i = g^{il} \Gamma_{l, jk}. \quad (45)$$

Заметим теперь, что в силу (см. 33 п.3)

$$\frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \quad (46)$$

из определений (40) и (44) следует, что символы Кристоффеля симметричны по двум нижним индексам (у $\Gamma_{i, jk}$ эти индексы отделены запятой):

$$\Gamma_{i, jk} = \Gamma_{i, kj}; \quad \Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i.$$

Тогда, учитывая симметрию $\Gamma_{i, jk}$ по j и k и свойства (46), получим

$$\begin{aligned} \Gamma_{i, jk} &= e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k} = \frac{1}{2} \left(e_i \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^k} + e_i \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^j} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (e_i \cdot e_j) + \frac{\partial}{\partial x^j} (e_i \cdot e_k) - e_j \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^k} - e_k \cdot \frac{\partial e_i}{\partial x^j} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - e_j \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x^i} - e_k \cdot \frac{\partial e_j}{\partial x^i} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} (e_k \cdot e_j) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Gamma_{i, jk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) = \Gamma_{i, kj} \\ \Gamma_{jk}^i &= g^{il} \Gamma_{l, jk} = \Gamma_{kj}^i \end{aligned} \quad (47-48)$$

Символы Кристоффеля не являются тензорами. Это следует из закона преобразования символов Кристоффеля при изменении пространственной системы координат:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i, jk}^i &= e_i \cdot \frac{\partial e_j^i}{\partial x^k} = \alpha_i^l e_l \cdot \frac{\partial (e_n \alpha_j^n)}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial x^k} = \\ &= \alpha_i^l \alpha_k^m \alpha_j^n e_l \cdot \frac{\partial e_n}{\partial x^m} + \alpha_i^l \alpha_k^m (e_l \cdot e_n) \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} = \\ &= \alpha_i^l \alpha_k^m \alpha_j^n \Gamma_{l, nm} + \alpha_i^l \alpha_k^m \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} g_{ln}. \end{aligned} \quad (49)$$

Аналогично имеем

$$\Gamma_{jk}^i = \alpha_i^l \alpha_k^m \alpha_j^n \Gamma_{lm}^i + \alpha_i^l \alpha_k^m \frac{\partial \alpha_j^n}{\partial x^m} g_{ln}. \quad (50)$$

Ковариантные производные вектора являются компонентами тензора второго ранга.

Действительно, учитывая (50), получим

$$\begin{aligned}
 A'_{i;k} &= \frac{\partial A'_i}{\partial x'^k} - A'_j \Gamma'_{ik}{}^j = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha'_i, A_i) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} - \alpha'_r A_r \left(\alpha'^m_n \alpha^m_k \alpha'_l \Gamma^n_{im} + \alpha'^r_n \alpha^m_k \frac{\partial \alpha'^n_l}{\partial x^m} \right) = \\
 &= \alpha'^l_i \alpha^m_k \left\{ \frac{\partial A_l}{\partial x^m} - A_n \Gamma^n_{lm} \right\} = \alpha'^l_i \alpha^m_k A_l; m, \\
 A'^i{}_{;k} &= \frac{\partial A'^i}{\partial x'^k} + A'^j \Gamma'_{jk}{}^i = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha'^i_l A^l) \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} + \alpha'^r A^r \left(\alpha'^m_j \alpha^m_k \alpha'^n_l \Gamma^n_{jm} + \alpha'^r_n \alpha^m_k \frac{\partial \alpha'^n_l}{\partial x^m} \right) = \\
 &= \alpha'^i_l \alpha^m_k \left\{ \frac{\partial A^l}{\partial x^m} + A^n \Gamma^n_{lm} \right\} = \alpha'^i_l \alpha^m_k A^l; m.
 \end{aligned}$$

Здесь использовано соотношение $\alpha'^j_r \frac{\partial \alpha'^n_l}{\partial x^m} = -\alpha'^n_l \frac{\partial \alpha'^j_r}{\partial x^m}$, которое получается при дифференцировании выражения $\alpha'^j_r \alpha'^n_l = g'^{rn}$.

Таким образом, величины $A_{i;k}$ преобразуются как ковариантные компоненты тензора 2-го ранга, а величины $A^i{}_{;k}$ — как смешанные компоненты.

Из определений (36) и (37), учитывая, что $e^i = g^{ij} e_j$, следуют соотношения

$$A_{i;k} = g_{il} A^l{}_{;k}; \quad A^i{}_{;k} = g^{il} A_{l;k}. \quad (51)$$

Таким образом, $A_{i;k}$ и $A^i{}_{;k}$ являются компонентами (ковариантными и смешанными) *одного и того же тензора*, который и называется *абсолютной (ковариантной) производной вектора*.

Ковариантная производная тензоров. Естественным обобщением формул для ковариантной производной вектора является определение ковариантного дифференцирования тензора 2-го ранга:

$$\begin{aligned}
 T_{ik;i} &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x^i} - T_{mk} \Gamma^m_{il} - T_{im} \Gamma^m_{ki}, \\
 T^i{}_{;l}{}^{ik} &= \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l} + T^{mk} \Gamma^i_{ml} + T^{im} \Gamma^k_{ml}, \\
 T^i{}_{;k}{}^i{}_{;l} &= \frac{\partial T^i{}_{;k}}{\partial x^l} + T^m{}_{;k} \Gamma^i_{ml} - T^l{}_{;m} \Gamma^m_{kl}.
 \end{aligned} \quad (52)$$

Можно показать, что эти величины преобразуются при изменении системы координат как соответствующие компоненты тензора 3-го

ранга ($T_{ik;l}$ — как ковариантные компоненты, $T_{;l}^{ik}$ — как смешанные — дважды контравариантные, один раз ковариантные и т. д.).

Ковариантные производные тензора любого ранга определяются аналогично: первое слагаемое — это частные производные компонент тензора по координатам; остальные слагаемые (их число равно рангу тензора) являются суммами из компонент тензора и символов Кристоффеля первого рода, причем индексом суммирования служат поочередно индексы компонент тензора и противоположный (верхний или нижний — в зависимости от «немой» индекса тензора) индекс символов Кристоффеля. Эти последние слагаемые входят с минусом, если «немой» индекс компонент тензора — «ковариантный» (нижний) и с плюсом, если «немой» индекс у тензора — «контравариантный» (верхний). Например,

$$\lambda_{ik;m}^{;l} = \frac{\partial \lambda_{ik}^{;l}}{\partial x^m} - \lambda_{nk}^{;l} \Gamma_{im}^n - \lambda_{in}^{;l} \Gamma_{km}^n + \lambda_{ik}^{;n} \Gamma_{nm}^l.$$

Ковариантная производная от тензора n-го ранга является тензором ранга n + 1.

В частном случае тензора нулевого ранга (скаляра) его ковариантная производная совпадает с частными производными по координатам

$$f_{;i} = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Ковариантная производная от скаляра является ковариантным вектором (ковариантные компоненты градиента скаляра).

При таком определении операции ковариантного дифференцирования нетрудно вывести правила ковариантного дифференцирования суммы и произведения тензоров, которые совпадают с правилами обычного дифференцирования. Например, для тензора 2-го ранга имеем

$$(A_{ik} + B_{ik})_{;l} = A_{ik;l} + B_{ik;l},$$

$$(A_{ik} B_{mn})_{;l} = A_{ik;l} B_{mn} + A_{ik} B_{mn;l}.$$

Справедливость этих формул можно показать простым вычислением правых и левых частей и сравнением результатов вычислений между собой.

Теорема Риччи: *ковариантная производная метрического тензора равна нулю.* Теорема доказывается простым вычислением. Согласно (47) и (48),

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{im}\Gamma_{kl}^m - g_{mk}\Gamma_{il}^m = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{l,ki} - \Gamma_{k,il} =$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right) = 0.$$

Отсюда как следствие имеем часто используемое соотношение

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \Gamma_{l,ki} + \Gamma_{k,il}. \quad (53)$$

Аналогично можно показать, что

$$g_{;i}^{ik} = 0.$$

Равенство нулю ковариантной производной от метрического тензора позволяет обращаться с его компонентами как с постоянными при ковариантном дифференцировании. Так, например, справедливы соотношения

$$g_{il}A^{i;k} = (g_{il}A^i)_{;k} = A_{i;k},$$

$$g_{il}T^{i;m}_{;k} = (g_{il}T^{im})_{;k} = T_{i;k}^m,$$

$$T_{ik;l}g^{im}g^{kn} = (T_{ik}g^{im}g^{kn})_{;l} = T_{;l}^{mn}$$

и т. п.

Однородное векторное поле. Параллельный перенос вектора.

Векторное поле A называется *однородным*, если оно не меняется от точки к точке. Ковариантная производная однородного поля равна нулю.

Действительно, пусть в бесконечно близких точках x^i и $x^i + dx^i$ вектор A имеет одну и ту же величину и направление, т. е. $A(x^1, x^2, x^3) = A(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$. Однако компоненты вектора в этих точках будут, вообще говоря, различны, как различны в них и местные координатные базисы. Поэтому можно записать

$$A = A^i e_i = (A^i + dA^i)(e_i + de_i).$$

Отсюда получим

$$e_i dA^i + A^i de_i + dA^i de_i = 0,$$

или с точностью до бесконечно малых первого порядка

$$e_i dA^i + A^i de_i = dA = 0,$$

где dA — абсолютный дифференциал вектора A .

Тогда

$$\frac{\partial A}{\partial x^k} dx^k = 0,$$

или

$$A^i_{,k} dx^k = 0.$$

Так как приращения dx^k произвольны, то для однородного векторного поля A имеем

$$A^i_{,k} = 0. \quad (54)$$

Однородное векторное поле можно рассматривать как результат переноса вектора A параллельно самому себе во все точки поля. Тогда об условии (54) говорят как об условии *параллельного переноса вектора*.

5.7. Применение дифференциальных операций к различного вида векторным и скалярным функциям

Дифференциальные операторы в криволинейных координатах.

В предыдущих параграфах были введены дифференциальные операции первого порядка над скалярами и векторами:

$$\begin{aligned} \nabla\varphi &= \text{grad } \varphi; \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \text{div } \mathbf{A}; \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \text{rot } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Применяя эти операции вторично к полученным в результате первого дифференцирования функциям, получим следующие дифференциальные операции второго порядка:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \text{grad div } \mathbf{A};$$

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \text{div grad } \varphi \equiv \nabla^2\varphi \equiv \Delta\varphi;$$

$$\nabla \times \nabla\varphi = \text{rot grad } \varphi = 0; \quad (55)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{div rot } \mathbf{A} = 0; \quad (56)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{rot rot } \mathbf{A}.$$

В этих формулах символический оператор «набла» независимо от системы координат (см. 22) имеет выражение

$$\nabla(\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n}(\dots) dS,$$

а в декартовой прямоугольной —

$$\nabla = i_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Справедливость тождеств (55) и (56) в декартовых координатах может быть проверена непосредственным вычислением.

Оператор $\nabla \cdot \nabla \equiv \Delta$ — оператор Лапласа (читается «лапласиан»). В декартовых прямоугольных координатах он имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla &\equiv \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial x_l} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (57)$$

Таким образом,

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}.$$

Вследствие своей линейности все рассмотренные операции для суммы (разности) функций применяются к каждому слагаемому отдельно. Таким образом,

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi + \psi) &= \nabla\varphi + \nabla\psi; \\ \operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{div} \mathbf{B}; \\ \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\ \operatorname{grad} \operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B}; \\ \Delta(\varphi + \psi) &= \Delta\varphi + \Delta\psi; \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Что касается применения дифференциальных операций к произведению функций

$$\varphi\psi; \varphi\mathbf{A}; \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}; \mathbf{A} \times \mathbf{B}, \quad (*)$$

то их нужно применять к каждому сомножителю отдельно, считая другой при этом постоянным. Очень удобно здесь пользоваться оператором ∇ , ставя его всегда после множителя, который в данном слагаемом принимается постоянным, и перед множителем, который считается переменным.

Полученные таким символическим методом, путем оперирования с «вектором» ∇ , выражения, не должны противоречить правилам тензорной алгебры. Однако здесь всегда следует помнить о дифференциальном характере оператора ∇ и о том, что его применение сводится по сути дела к вычислению частных производных по координатам и сложению этих производных (после умножения на соответствующие орты). Таким образом, такие выражения, как $\varphi\nabla$, $\mathbf{A} \cdot \nabla$, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \nabla)$ и т. п., если после них нет величины, на которую действует оператор ∇ , имеют смысл только как операторы.

Поясним это применением операций ко всевозможным произведениям (*), отмечая множитель, рассматриваемый постоянным, индексом С:

$$\left. \begin{aligned}
 1) \operatorname{grad} \varphi \psi &= \nabla \varphi \psi = \nabla \varphi_c \psi + \nabla \varphi \psi_c = \varphi_c \nabla \psi + \psi_c \nabla \varphi = \\
 &= \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi; \\
 2) \operatorname{div} \varphi \mathbf{A} &= \nabla \cdot \varphi \mathbf{A} = \nabla \cdot \varphi_c \mathbf{A} + \nabla \cdot \varphi \mathbf{A}_c = \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{A} + \\
 &+ \mathbf{A}_c \cdot \nabla \varphi = \varphi \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla \varphi = \varphi \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \varphi; \\
 3) \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \\
 &+ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) = -\mathbf{A}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \\
 &= -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}; \\
 4) \operatorname{rot} \varphi \mathbf{A} &= (\nabla \times \varphi \mathbf{A}) = (\nabla \times \varphi_c \mathbf{A}) + (\nabla \times \varphi \mathbf{A}_c) = \\
 &= \varphi_c (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi \times \mathbf{A}_c) = \varphi (\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla \varphi \times \mathbf{A}) = \\
 &= \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A} + (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{A}).
 \end{aligned} \right\} (58)$$

Вывод следующих формул предоставляется сделать читателю:

$$\begin{aligned}
 5) \operatorname{grad} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \\
 &+ (\mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}); \\
 6) \operatorname{rot} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \\
 &+ \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}; \\
 7) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.
 \end{aligned} \quad (59)$$

Весьма распространенным в приложениях является случай, когда функции φ и \mathbf{A} являются сложными функциями от r , т. е.

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \varphi (f(\mathbf{r})); \\
 \mathbf{A} &= \mathbf{A} (f(\mathbf{r})),
 \end{aligned}$$

где $f(\mathbf{r})$ — некоторая скалярная функция. Тогда применение операций к такого рода функциям дает формулы

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} \varphi (f(\mathbf{r})) &= \frac{d\varphi}{df} \operatorname{grad} f, \\
 \operatorname{div} \mathbf{A} (f(\mathbf{r})) &= \operatorname{grad} f \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df}, \\
 \operatorname{rot} \mathbf{A} (f(\mathbf{r})) &= \operatorname{grad} f \times \frac{d\mathbf{A}}{df}.
 \end{aligned} \quad (60)$$

Рассмотрим доказательство, например, второй формулы. По определению имеем

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (*)$$

Разложим под интегралом вектор \mathbf{A} в окрестности точки M

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A})_M + \left(\frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M (f - f_M) + \dots$$

и подставим его выражение в (*). Тогда, учитывая $\iint_S \mathbf{n} dS = 0$,

получим

$$(\operatorname{div} \mathbf{A})_M = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(\frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M \iint_S f \mathbf{n} dS = \left(\frac{d\mathbf{A}}{df} \right)_M \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S f \mathbf{n} dS.$$

Отсюда в соответствии с определением градиента имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \operatorname{grad} f.$$

Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах. Как уже отмечалось, в теории моделирования приходится пользоваться скалярными выражениями, являющимися разложениями соответствующих тензорных уравнений. Приведенные выше дифференциальные операции могут быть записаны в проекциях на оси координат, если известны проекции основных дифференциальных операторов (градиента и ротора).

Рассмотрим вначале выражения градиента скаляра, дивергенции вектора, ротора вектора и лапласиана в ортогональных криволинейных координатах. При этом нами будут использованы основные сведения п. 3.8, касающиеся ортогональных систем.

Градиент скалярной функции Φ как вектор характеризует величину и направление наибольшего изменения этой функции. Определяя проекции этого вектора на координатные оси (производные скаляра Φ по направлению координатных осей), получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad (\text{без суммирования по } i).$$

Следовательно,

$$\nabla \Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \mathbf{e}_3^0. \quad (61)$$

В цилиндрической системе координат

$$\nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \mathbf{e}_R^0 + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi^0 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_z^0.$$

Через \mathbf{e}^0 с соответствующим индексом обозначен орт координатной оси.

Для определения выражения $\operatorname{div} \mathbf{A}$ в криволинейных координатах воспользуемся определением

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS.$$

Элементарный объем $d\tau$ (в предыдущем выражении он обозначен через τ) имеет выражение

$$d\tau = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3.$$

Для определения интеграла $\int_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS$ найдем сначала поток вектора \mathbf{A} через пару противоположных граней, например через грани, перпендикулярные к (q_1) (рис. 21).

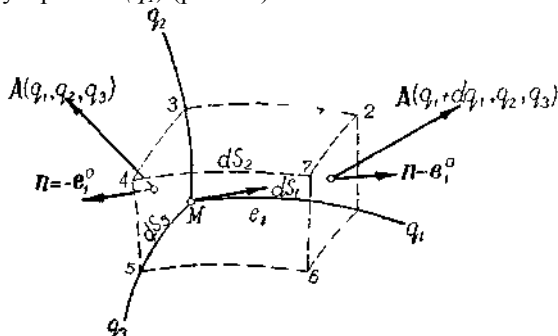


Рис. 21. Вычисление потока вектора через поверхность элементарного объема в криволинейных координатах

На грани $M345$ нормаль $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_1^0$, и поэтому поток вектора через нее будет равен

$$-\mathbf{e}_1^0 \cdot \mathbf{A} ds_2 ds_3 = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3. \quad (62)$$

Здесь через A_1 обозначена проекция вектора на ось (q_1) , т. е.

$$A_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1^0.$$

На грани 1276 выражение (62) получит приращение, связанное с приращением координаты q_1 на величину dq_1 , и так как направление нормали будет \mathbf{e}_1^0 , то поток вектора \mathbf{A} через эту грань равен

$$\left(A_1 H_2 H_3 + \frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Определяя таким же образом поток через пары других граней и складывая все полученные выражения, найдем, разделив их на элементарный объем:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 H_1 H_2) \right]. \quad (63)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (A_R R) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial A_z}{\partial z} \right].$$

Таким же самым образом, пользуясь определением вектора вихря

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) dS,$$

найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & e_1^0 \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) \right] + \\ & + e_2^0 \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 H_3) \right] + \\ & + e_3^0 \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 H_1) \right]. \end{aligned} \quad (64)$$

Для цилиндрической системы координат

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \left(\frac{1}{R} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) e_R^0 + \left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R} \right) e_\varphi^0 + \\ & + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial R} (A_\varphi R) - \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} \right) e_z^0. \end{aligned}$$

Для определения лапласиана скалярной функции заметим, что

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi.$$

Применяя поэтому найденные выше выражения для $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и $\operatorname{grad} \Phi$, найдем

$$\begin{aligned} \Delta \Phi = & \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \Phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \Phi}{\partial q_3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

В цилиндрической системе координат

$$\Delta \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

При определении проекции вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси криволинейной системы координат необходимо использовать выражение, которое годится для любой системы координат:

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (65a)$$

Оператор Δ , примененный к скалярной функции, в цилиндрической системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} R \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (66)$$

Проекция вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси цилиндрической системы координат равны:

$$\begin{aligned}(\Delta \mathbf{A})_R &= \Delta A_R - \frac{A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\(\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi}; \\(\Delta \mathbf{A})_z &= \Delta A_z.\end{aligned}$$

Здесь оператор Δ определяется выражением (66), а проекция вектора $\Delta \mathbf{A}$ вычислена на основании формулы (65 а).

Приведем выражение основных дифференциальных операций в сферической системе координат R, θ, φ (рис. 13 п.3). Координатными поверхностями служит полуплоскость, проходящая через ось (x_3) под углом φ к плоскости отсчета, сфера радиуса R и конус с углом раствора 2θ .

В этой системе имеем:

$$\begin{aligned}ds^2 &= dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2; \\ \nabla \Phi &= e_R^0 \frac{\partial \Phi}{\partial R} + e_\theta^0 \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + e_\varphi^0 \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}; \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 A_R) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\ \operatorname{rot}_R \mathbf{A} &= \frac{1}{R \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]; \\ \operatorname{rot}_\theta \mathbf{A} &= \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R A_\varphi); \\ \operatorname{rot}_\varphi \mathbf{A} &= \frac{1}{R} \left[\frac{\partial}{\partial R} (A_\theta R) - \frac{\partial A_R}{\partial \theta} \right]; \\ \Delta \Phi &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \right].\end{aligned}$$

Таким образом, в сферических координатах оператор Δ , применяемый к скаляру, имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (67)$$

Проекция вектора $\Delta \mathbf{A}$ на оси сферической системы координат:

$$\begin{aligned}
 (\Delta \mathbf{A})_R &= \Delta A_R - \frac{2A_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} - \frac{2A_\theta}{R^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\
 (\Delta \mathbf{A})_\theta &= \Delta A_\theta + \frac{2}{R^2} \frac{\partial A_R}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}; \\
 (\Delta \mathbf{A})_\varphi &= \Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial A_R}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}.
 \end{aligned}$$

Эти проекции вычислены на основании формулы

$$\Delta \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Дифференциальные операторы в общих криволинейных координатах.

Понятия ко-, контравариантных и «физических» компонент тензоров, а также правила ковариантного дифференцирования позволяют получить выражения дифференциальных операторов в произвольных криволинейных координатах.

Градиент скаляра $\Phi(x^1, x^2, x^3)$ определяется как вектор, ковариантные компоненты которого равны $\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$ (x^i — обобщенные криволинейные координаты). Тогда в произвольных системах координат можно определить оператор «набла» ∇

$$\nabla \equiv e^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (68)$$

так что

$$\nabla \Phi = e^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (69)$$

Ковариантные компоненты вектора $\nabla \Phi$ равны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i},$$

а «физические» компоненты

$$(\nabla \Phi)_i^* = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (\text{нет суммирования по } i). \quad (70)$$

В случае ортогональных координат отсюда получаем

$$(\nabla \Phi)_i^* = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}.$$

Все свойства градиента, установленные в 5.4, остаются в силе и нет нужды их переформулировать в системе обобщенных координат. Заметим только, что если $\Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3)$, то в случае самых общих координат

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i = \nabla \Phi \cdot d\mathbf{r}, \quad \text{где } d\mathbf{r} = e_i dx^i.$$

Дивергенция вектора определяется как свертка тензора 2-го ранга — ковариантной производной контравариантного вектора (линейный инвариант тензора ковариантной производной):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = A^i_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \Gamma^i_{ij}$$

Найдем выражение суммы Γ^i_{ij} через компоненты метрического тензора.

Учитывая (45) и симметрию g^{ik} , запишем

$$\Gamma^i_{ij} = g^{ik} \Gamma_{k, ij} = \frac{1}{2} g^{ik} (\Gamma_{k, ij} + \Gamma_{i, kj}), \quad (71)$$

причем по теореме Риччи (см. 53)

$$\Gamma_{k, ij} + \Gamma_{i, kj} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}. \quad (72)$$

Разлагая по известной теореме из алгебры определитель

$$G = \det \| g_{ik} \|$$

по элементам i -й строки, получим

$$G = g_{ik} G^{ik} \text{ (по } i \text{ не суммировать!),}$$

где G^{ik} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу g_{ik} . Отсюда, поскольку G^{ik} не зависит от g_{ik}

$$\frac{\partial G}{\partial g_{ik}} = G^{ik}.$$

Но

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} = \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}}. \quad (73)$$

Поэтому, учитывая (71), (72) и (73),

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (A^i \sqrt{G}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{ik} A_k \sqrt{G}) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{A^*_i}{\sqrt{g_{ii}}} \sqrt{G} \right), \end{aligned} \quad (74)$$

где A^*_i — физические компоненты вектора \mathbf{A} . В случае ортогональных координат

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{A^*_i H_1 H_2 H_3}{H_i} \right).$$

Лапласиан скалярной функции можно получить из выражения $\Delta \Phi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi$. Учитывая (69) и (74), имеем

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ik} \sqrt{G} \frac{\partial\Phi}{\partial x^k} \right). \quad (75)$$

В случае ортогональных координат

$$\Delta\Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \right). \quad (76)$$

Ротор вектора может быть определен как векторное произведение вектора $\nabla = e^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на вектор A . Учитывая это замечание и результаты, полученные ранее, получим

$$\begin{aligned} \text{rot } A &= \nabla \times A = e^i \frac{\partial}{\partial x^i} \times A_k e^k = (e^i \times e^k) \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{e_i}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right), \end{aligned}$$

где индексы (j, i, k) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. Отсюда получаем контравариантные и «физические» компоненты вектора $\text{rot } A$:

$$\begin{aligned} (\text{rot } A)^j &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \right), \\ (\text{rot } A)_i^* &= \frac{\sqrt{g_{il}}}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) = \frac{\sqrt{g_{il}}}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial (A_k^* \sqrt{g_{kk}})}{\partial x^i} - \frac{\partial (A_i^* \sqrt{g_{il}})}{\partial x^k} \right]. \end{aligned}$$

(нет суммирования по i и $k!$). с

В случае ортогональных координат

$$(\text{rot } A)_j = \frac{H_j}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (A_k H_k)}{\partial x_j} - \frac{\partial (A_j H_j)}{\partial x_k} \right]. \quad (77)$$

(нет суммирования по i и $k!$).

В обобщенных координатах вместо единичного псевдотензора ε_{ikl} , рассмотренного ранее, вводят тензор 3-го ранга с ковариантными компонентами e_{ikl} , определяемыми следующим образом:

$$\begin{aligned} e_{123} &= e_{231} = e_{312} = \sqrt{G}, \\ e_{132} &= e_{213} = e_{321} = -\sqrt{G}, \\ e_{ikl} &= 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{aligned}$$

Контравариантные компоненты этого тензора определяются такими равенствами:

$$e^{123} = e^{231} = e^{312} = \frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$e^{132} = e^{213} = e^{321} = -\frac{1}{\sqrt{G}},$$

$$e^{ikl} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Тогда векторное произведение двух векторов $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ имеет ко- и контравариантные компоненты:

$$C_j = e_{ikj} A^i B^k,$$

$$C^l = e^{ikj} A_i B_k,$$

где (j, i, k) — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3. Теперь компоненты $\text{rot } A$ можно записать в виде

$$(\text{rot } A)^j = e^{ikj} A_{k; i}$$

$$(\text{rot } A)_j = g_{jl} (\text{rot } A)^l = g_{jl} e^{ikl} A_{k; i}$$

5.8. Интегральные теоремы векторного и тензорного анализа

Интегральные теоремы устанавливают важные соотношения между значениями тензоров внутри поля и их значениями на границах поля. Они являются обобщением известной формулы Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b \frac{dA(x)}{dx} dx = A(b) - A(a),$$

выражающей интеграл от производной функции через значения этой функции на границах области (в предположении существования и непрерывности производной).

Мы уже останавливались на двух важнейших интегральных теоремах векторного анализа — теореме Остроградского и теореме Стокса. Их векторные формулировки имеют вид

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{A} d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS; \quad (78)$$

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} d\tau = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \quad (79)$$

Эти теоремы широко применяются во многих разделах теоретической физики, особенно в гидромеханике, теории упругости и электродинамике. Ниже мы приведем несколько примеров их использования. Формулы, выражающие теоремы Остроградского и Стокса, позволяют непосредственно сформулировать при специальном

задании поля A ряд дополнительных теорем, примыкающих к теоремам Остроградского и Стокса.

Теоремы, примыкающие к теореме Остроградского. Из формулы Остроградского можно получить ряд интегральных формул, связывающих характеристики поля на некоторой замкнутой поверхности с характеристиками поля в объеме, ограниченном этой поверхностью. Все ограничения, накладываемые на поле, подчиняющееся теореме Остроградского, переносятся с соответствующими изменениями в получаемые формулы.

Положим последовательно в (78):

- 1) $A = \varphi C$;
- 2) $A = B \times C$;
- 3) $A = C \cdot T \quad (A_i = C_k T_{ik})$,

где C —постоянный произвольный вектор.

Тогда получим:

$$\begin{aligned} 1) \quad A \cdot n &= C \cdot \varphi n, & \operatorname{div} A &= C \cdot \nabla \varphi; \\ 2) \quad A \cdot n &= C \cdot (n \times B), & \operatorname{div} A &= C \cdot \operatorname{rot} B; \\ 3) \quad A \cdot n &= C \cdot (T \cdot n), & \operatorname{div} A &= C \cdot \operatorname{div} T. \end{aligned} \quad (80)$$

Поскольку вектор C предполагается постоянным и произвольным, то, подставляя последовательно выражения (80) в (78), получим (мы получим выражение вида

$$C \cdot \left\{ \iint_S \dots dS - \iiint_V \dots d\tau \right\} = 0,$$

Поскольку C —произвольный вектор, то из равенства нулю написанного скалярного произведения следует:

$$\iint_S \dots dS - \iiint_V \dots d\tau = 0.:$$

$$\iint_S \varphi n dS = \iiint_V \nabla \varphi d\tau; \quad (81)$$

$$\iint_S (n \times A) dS = \iiint_V \operatorname{rot} A d\tau; \quad (82)$$

$$\iint_S T \cdot n dS = \iiint_V \operatorname{div} T d\tau, \quad (83)$$

или

$$\iint_S T_{ik} n_k dS = \iiint_V \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\tau.$$

Все эти формулы можно записать сокращенно в виде равнозначности действия двух операторов на одну и ту же величину (...):

$$\iint_S n (...) dS = \iiint_V \nabla (...) d\tau.$$

Эти операторы применяются к скаляру, вектору (скалярным и векторным умножением) и тензору 2-го ранга.

Рассмотрим несколько частных видов формул (81), (82), (83).

1. Если поле A таково, что $\operatorname{div} A = 0$ всюду в области τ , то из (78) следует равенство нулю потока поля через любую замкнутую поверхность:

$$\iint_S A \cdot n dS = 0.$$

2. Если внутри области τ дивергенция поля равна нулю всюду, кроме некоторой точки (где дивергенция либо не существует, либо отлична от нуля), то поток поля не зависит от вида поверхности S и будет одинаковым для всех поверхностей, охватывающих эту точку, и равным нулю для всех поверхностей, не содержащих внутри себя этой точки.

3. Взяв $\varphi = \operatorname{const}$, получим из (81)

$$\iint_S n dS = 0$$

для любой замкнутой поверхности S .

4. Если поле A таково, что $\operatorname{rot} A = 0$ всюду внутри области τ , то из (4.82) следует:

$$\iint_S (n \times A) dS = 0.$$

Теоремы, примыкающие к теореме Стокса. Из теоремы Стокса можно получить ряд формул, связывающих характеристики поля на некоторой незамкнутой поверхности с данными того же поля на контуре, который служит границей этой поверхности.

Ввиду важности теоремы Стокса мы приведем еще одно ее доказательство, менее строгое, но более наглядное.

Рассмотрим замкнутый контур L , стягивающий произвольную поверхность S (рис. 22).

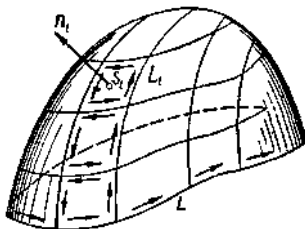


Рис. 22. К доказательству теоремы Стокса.

Участки S_i поверхности S , опирающейся на контур L , имеют общие части контуров L_i , которые при вычислении суммы циркуляций по ним обходятся дважды в противоположных направлениях.

Предположим, что во всех точках этой поверхности заданы и непрерывны компоненты вектора \mathbf{A} вместе с их частными производными $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$.

Разобьем поверхность S на N достаточно малых частей S_i , ограниченных замкнутыми контурами L_i .

На каждом из элементов S_i возьмем внешнюю нормаль \mathbf{n}_i и установим направление обхода контура L соответственно направлению \mathbf{n}_i .

Тогда для какой-то точки M_i из S_i согласно (26) мы можем определить проекцию вектора вихря:

$$(\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \frac{1}{S_i} \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i$$

Отсюда

$$(\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} S_i = \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i + \varepsilon S_i,$$

Где ε может быть сделана сколь угодно малой по абсолютной величине путем уменьшения диаметра ячейки S_i . Принимая, что здесь имеет место равномерная сходимости, найдем для любого $\varepsilon > 0$ такое разбиение S на N частей, при котором $\max \{\varepsilon_i\} < \varepsilon$.

Тогда получим, суммируя по всем ячейкам S_i .

$$\left| \sum_{i=1}^N (\mathbf{n}_i \cdot \text{rot } \mathbf{A})_{M_i} S_i - \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i \right| < \varepsilon S, \quad (84)$$

где $\varepsilon \rightarrow 0$, когда $N \rightarrow \infty$.

Но

$$\sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \mathbf{A}_i \cdot d\mathbf{L}_i = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L},$$

ибо в этой сумме интегралы, не относящиеся к границе поверхности S — контуру L , попарно взаимно уничтожаются. Это вызвано тем, что контуры, разграничивающие ячейки S_i , обходятся дважды в противоположных направлениях.

Тогда, увеличивая число N до бесконечности и уменьшая S_i до нуля, после замены суммы в левой части выражения (84) поверхностным интегралом получим

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dS = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}.$$

Теорема Стокса доказана.

Теперь рассмотрим ряд интегральных формул, получаемых из основной (79) определенным выбором вектора A . Положим последовательно:

- 1) $A = \varphi C$,
- 2) $A = B \times C$,

где C — постоянный произвольный вектор.

Тогда получим:

- 1) $n \cdot \text{rot } A = n \cdot \text{rot } (\varphi C) = C \cdot (n \times \nabla \varphi); \quad A \cdot dL = C \cdot \varphi dL;$
- 2) $n \cdot \text{rot } A = n \cdot \text{rot } (B \times C) = ((n \times \nabla) \times B) \cdot C;$
 $A \cdot dL = (B \times C) \cdot dL = (dL \times B) \cdot C.$

Подставляя эти значения $n \cdot \text{rot } A$ и $A \cdot dL$ в (79) и сокращая полученные выражения на произвольный постоянный вектор C , получим следующие формулы:

$$\iint_S (n \times \nabla \varphi) dS = \oint_L \varphi dL; \quad (85)$$

$$\iint_S ((n \times \nabla) \times A) dS = \oint_L (dL \times A). \quad (86)$$

Заметим, что формулу Стокса (79) можно переписать, введя оператор ∇ в виде

$$\iint_S dS (n \times \nabla) \cdot A = \oint_L dL \cdot A. \quad (86')$$

Формулы (85), (86), (86') можно объединить в одну символическую формулу, определяющую действия разных операторов на одно и то же выражение (...):

$$\iint_S (n \times \nabla) (...) dS = \oint_L (...) dL.$$

Выражение (...) может быть скаляром (см. 85) или вектором, на который оператор действует скалярно (см. 79) или векторно (см. 86).

Отметим некоторые следствия из теоремы Стокса.

- 1) Поток вихря непрерывного поля через замкнутую поверхность равен нулю. Доказательство этого следует из факта произвольности поверхности S , имеющей границу в виде контура L .
- 2) В односвязном поле, если $\text{rot } A = 0$ всюду, циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю.

Формулы Грина. Известные в анализе формулы Грина могут быть получены как следствие из теоремы Остроградского. Ввиду их важности мы рассмотрим эти формулы особо. Возьмем в (78) вектор A в виде

$$A = \varphi \nabla \phi,$$

где φ, ψ — скалярные функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го и 2-го порядков. Тогда имеем:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\varphi \nabla \psi) = \varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi;$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \varphi \mathbf{n} \cdot \nabla \psi = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Подставляя эти выражения в формулу Остроградского, получим

$$\iiint_{\tau} (\varphi \Delta \psi + \nabla \varphi \cdot \nabla \psi) d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (87)$$

Это *первая формула Грина*.

Положим в формуле Остроградского

$$\mathbf{A} = \varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi.$$

Тогда получим *вторую формулу Грина*:

$$\iiint_{\tau} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = \iint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (88)$$

Из этих основных формул следуют при частных значениях φ и ψ некоторые важные соотношения.

В случае $\psi = \varphi$ формула (87) дает

$$\iiint_{\tau} [\varphi \Delta \varphi + (\nabla \varphi)^2] d\tau = \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (89)$$

а при $\varphi = \text{const}$ из нее же имеем

$$\iiint_{\tau} \Delta \psi d\tau = \iint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (90)$$

Из формулы (90) следует, что оператор $\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla$ может быть представлен в виде следующего предела:

$$\Delta (\dots) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \iint_S \frac{\partial}{\partial n} (\dots) dS. \quad (91)$$

Следствие. Вторая формула Грина имеет одно важное следствие, к выводу которого мы переходим.

Пусть в объеме τ , ограниченном поверхностью S , задана непрерывная вместе со вторыми частными производными функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Тогда можно определить значение φ в любой внутренней точке $M_0(x_{10}, x_{20}, x_{30})$ объема τ , если известны значения φ и ее нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на границе этого объема и значение $\Delta \varphi$ в каждой его внутренней точке.

Пусть \mathbf{r} — радиус-вектор, проверенный из M_0 в переменную точку M .

Тогда

$$r = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + (x_2 - x_{20})^2 + (x_3 - x_{30})^2}.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет условию $\Delta \frac{1}{r} = 0$ во всех точках x , кроме точки M_0 , где $r = 0$.

Окружим точку M_0 сферой с поверхностью ε радиуса ρ (см. рис. 23).

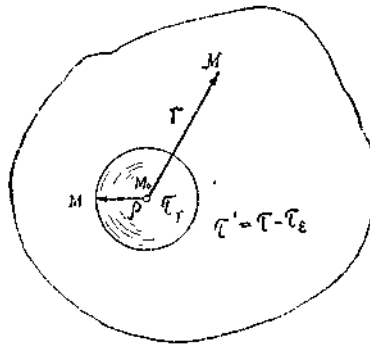


Рис. 23. Выделение особой точки.

Тогда для области (τ') вне сферы, согласно второй формуле Грина (88), имеем, положив $\psi = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned} \iiint_{\tau'} \left(-\frac{1}{r} \Delta \varphi \right) d\tau &= \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS + \\ &+ \iint_{\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (92)$$

Здесь τ' — область τ за вычетом области сферы, исключаяющей точку M_0 , т. е. $\tau' = \tau - \tau_\varepsilon$.

Поскольку внешняя для сферы ε (внутренняя для поверхности области τ') нормаль совпадает с направлением радиуса r , получим

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{\varepsilon} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\
 & = \iiint_{\varepsilon} \left(-\varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\
 & = \iiint_{\varepsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon. \tag{93}
 \end{aligned}$$

Вычислим предел этого выражения, когда $\rho \rightarrow 0$, т. е. когда сфера ε стягивается к точке M_0 :

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\rho \rightarrow 0} \iiint_{\varepsilon} \left(\frac{\varphi}{r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\varepsilon = \\
 & = \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ M' \rightarrow M_0}} \left[\frac{\varphi(M')}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{M'} \right] 4\pi\rho^2 = 4\pi\varphi(M_0).
 \end{aligned}$$

Тогда из выражения (92) имеем

$$4\pi\varphi(M_0) = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta\varphi d\tau - \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \tag{94}$$

Эта формула доказывает сформулированное выше следствие из теоремы Грина.

Аналогичное следствие, касающееся выражения значения некоторого вектора A во внутренней точке объема τ через ΔA для внутренних точек и производную A по направлению n для точек поверхности S , можно получить, если воспользоваться формулой (83):

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} d\tau = \iint_S T_{ik} n_k dS.$$

Положим в этом выражении

$$T_{ik} = A_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, приведшие к формуле (94) для скаляра φ , получим для непрерывного в объеме вместе с двумя первыми частными производными вектора A :

$$\begin{aligned}
 4\pi A_i(M_0) & = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta A_i d\tau - \\
 & - \iint_S \left(A_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) n_k dS,
 \end{aligned}$$

или

$$4\pi\mathbf{A}(M_0) = - \iiint_{\tau} \frac{1}{r} \Delta\mathbf{A} d\tau - \iint_S \left\{ \mathbf{A} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A} \right\} dS. \quad (94a)$$

Здесь вектор $\Delta\mathbf{A}$ может быть выражен по формуле (65a).

Примеры. Теоремы векторного и тензорного анализа находят широкое применение в моделировании механики сплошных сред. Рассмотрим некоторые характерные примеры использования интегральных теорем тензорного анализа.

Пример 1 *Дифференциальные уравнения движения сплошной среды. Уравнения движения жидкости*

В движущейся сплошной среде выделим ее часть, имеющую объем, ограниченный поверхностью S . При движении среды объем τ и поверхность S вообще меняются, но масса остается постоянной, так что $\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = 0$. К выделенной части среды применим второй закон Ньютона, вычисляя количество движения ее и все приложенные силы.

Количество движения (импульс) выделенной части равно

$$\iiint_{\tau} \rho \mathbf{V} d\tau.$$

Если на каждую единицу массы действует сила \mathbf{f} , то главный вектор всех массовых сил, приложенных к выделенной части среды, равен

$$\iiint_{\tau} \mathbf{f} \rho d\tau.$$

Здесь \mathbf{f} — интенсивность массовых сил (в поле тяжести $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, где \mathbf{g} — ускорение силы тяжести).

К поверхности рассматриваемой части среды приложены еще поверхностные силы, напряжение которых на элементе поверхности dS с внешней нормалью \mathbf{n} равно \mathbf{p}_n . Тогда главный вектор поверхностных сил, приложенных к этой части среды, равен

$$\iint_S \mathbf{p}_n dS,$$

и уравнение движения ее имеет вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho \mathbf{V} d\tau = \iiint_{\tau} \rho \mathbf{f} d\tau + \iint_S \mathbf{p}_n dS.$$

Поскольку масса любого объема $\Delta\tau$ в силу уравнения неразрывности остается постоянной, то $\frac{d}{dt} (\rho \Delta\tau) = 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho V d\tau = \iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau.$$

Таким образом,

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} f \rho d\tau + \iint_{S} p_n dS.$$

Учитывая полученное ранее выражение для p_n , получим

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{dV}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho f d\tau + \iint_{S} p_k n_k dS, \quad (95)$$

или в компонентах ($i = 1, 2, 3$)

$$\iiint_{\tau} \rho \frac{dV_i}{dt} d\tau = \iiint_{\tau} \rho f_i d\tau + \iint_{S} p_{ik} n_k dS,$$

где p_{ik} — тензор напряжений.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения сплошной среды, преобразуем поверхностный интеграл в объемный; согласно теореме Остроградского (см. 83), получим

$$\iint_{S} p_{ik} n_k dS = \iiint_{\tau} \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} d\tau.$$

Тогда

$$\iiint_{\tau} \left\{ \rho \frac{dV_i}{dt} - \rho f_i - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right\} d\tau = 0.$$

Поскольку объем τ произвольный, то в предположении непрерывности подынтегрального выражения найдем

$$\rho \frac{dV_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}.$$

Здесь $\frac{dV_i}{dt}$ — полная производная, которая, как было показано в (30), выражается в виде

$$\frac{dV_i}{dt} = \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k}.$$

Таким образом, окончательно дифференциальные уравнения (их всего три для $i = 1, 2, 3$) движения сплошной среды имеют вид

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}. \quad (96)$$

Предметом гидроаэромеханики является изучение движения жидкостей и газов. Для этого класса сплошных сред обычно принимается линейная зависимость между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций с выделением шарового тензора,

отвечающего гидростатическому давлению. Таким образом, в гидромеханике считают, что выполняется следующее основное соотношение:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + aV_{ik} + b\delta_{ik}V_{ll}$$

Здесь p —гидростатическое давление (скаляр), a и b — коэффициенты пропорциональности; $V_{ll} = \frac{\partial V_l}{\partial x_l} \equiv \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$ — свертка тензора скоростей деформаций, которая, очевидно, равна дивергенции скорости ($V_{ll} = \text{div } V$).

Обычно в гидромеханике это соотношение (иногда его называют обобщенной гипотезой Ньютона) записывают в виде

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu V_{ik} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}V_{ll}$$

так что

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = -3p,$$

где μ — коэффициент вязкости жидкости (коэффициент так называемой второй вязкости принят равным нулю).

В случае несжимаемой жидкости имеем ($\text{div } V=0$):

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu V_{ik}$$

а для жидкости, находящейся в покое, и идеальной жидкости (лишенной трения)

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}.$$

Подставляя различные выражения для p_{ik} в уравнения (96), получим уравнения движения:

а) идеальной жидкости —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} - \nabla p; \quad (97)$$

б) вязкой несжимаемой жидкости (уравнение Навье — Стокса) (при $\mu = \text{const}$) —

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} \quad (98)$$

(здесь учтено, что $\text{div } V = \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0$);

в) вязкой сжимаемой жидкости (при $\mu = \text{const}$)—

$$\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} + \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial V_k}{\partial x_k},$$

или в векторной записи

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{3} \mu \nabla \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

В случае обобщенных координат уравнение движения должно быть сформулировано относительно компонент векторов.

Пусть поле скоростей есть функция времени t и обобщенных координат x^1, x^2, x^3 , т. е. $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x^1, x^2, x^3, t)$. Тогда приращение скорости частицы

жидкости при перемещении из точки с координатами x^i в точку $x^i + dx^i$ равно

$$d\mathbf{V} = d\mathbf{V}_{\text{лок}} + d\mathbf{V}_{\text{конв}},$$

где $d\mathbf{V}_{\text{лок}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} dt$ — локальная часть изменения скорости, а

$$d\mathbf{V}_{\text{конв}} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^k} dx^k.$$

— конвективная часть изменения скорости, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x^k} V^k.$$

Здесь $V^k = \frac{dx^k}{dt}$ — контравариантные компоненты скорости.

Отсюда, учитывая определение ковариантной производной (37), получим контравариантные компоненты ускорения

$$\frac{dV^i}{dt} \cdot e^i = \left(\frac{dV^i}{dt} \right)^i = \frac{\partial V^i}{\partial t} \cdot e^i + \frac{\partial V^i}{\partial x^k} \cdot e^i V^k = \frac{\partial V^i}{\partial t} + V^k V^i{}_{;k}. \quad (99)$$

Таким образом, в случае обобщенных координат вместо (96) получим

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V^i{}_{;k} = \rho f^i + p^i{}_{;k}, \quad (100)$$

где $p^i{}_{;k}$ — свертка ковариантной производной тензора напряжений.

В случае вязкой жидкости имеем

$$p^i{}_{;k} = -\rho g^{ik} + 2\mu V^{ik} - \frac{2}{3} \mu g^{ik} V^l{}_{;l}, \quad (101)$$

где компоненты тензора скоростей деформации имеют выражение

$$V^{ik} = g^{il} g^{km} V_{;l m} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2} (V_{;l m} + V_{;m l}). \quad (102)$$

При этом $V^i{}_{;i}$ — дивергенция вектора скорости.

Вычислим $p^i{}_{;k}$ — дивергенцию тензора напряжений.

Учитывая, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю, получим

$$\rho_{;k}^{ik} = -\rho_{;k} g^{ik} + 2\mu V_{;k}^{ik} - \frac{2}{3} \mu g^{ik} (V^l_{;l})_{;k}.$$

Но

$$V^i_{;k} = g^{il} g^{km} \frac{1}{2} [(V_{;m})_{;k} + (V_{m;l})_{;k}] = \frac{1}{2} g^{km} (V^l_{;m})_{;k} + \frac{1}{2} g^{il} (V^k_{;l})_{;k}.$$

Предполагая $\frac{\partial^2 V^l}{\partial x^k \partial x^l} = \frac{\partial^2 V^l}{\partial x^l \partial x^k}$, получим $(V^k_{;l})_{;k} = (V^k_{;k})_{;l}$. Теперь,

под-

ставляя $\rho_{;k}^{ik}$ в (100), можно записать уравнение Навье—Стокса в обобщенных координатах в виде

$$\rho \frac{\partial V^i}{\partial t} + \rho V^k V^l_{;k} = \rho f^i - g^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^k} + \frac{1}{3} \mu g^{lk} \frac{\partial}{\partial x^k} (V^l_{;l}) + \mu g^{km} (V^l_{;m})_{;k}. \quad (103)$$

или, переходя к ковариантным компонентам:

$$\rho \frac{\partial V_l}{\partial t} + \rho V^k V_{l;k} = \rho f_l - \frac{\partial p}{\partial x^l} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x^l} (V^l_{;l}) + \mu g^{km} (V_{l;m})_{;k}. \quad (104)$$

Здесь выражение

$$g^{km} (V_{l;m})_{;k}$$

представляет собой ковариантные компоненты вектора ΔV .

Пользуясь формулой (103) и (104) и вводя «физические» компоненты векторов, всегда можно получить уравнение Навье—Стокса в любой конкретной системе криволинейных координат.

Пример 2. Закон Архимеда. Сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело с поверхностью S , равна

$$R = \iint_S p_n dS = \iint_S p_k n_k dS.$$

Отсюда

$$R_i = \iint_S p_{ik} n_k dS.$$

Если жидкость покоится ($V=0$), то

$$p_{ik} = -\rho \delta_{ik}.$$

$$\nabla p = \rho f = \rho g \quad (\text{массовые силы равны силам тяжести}). \quad (*)$$

Тогда

$$R_i = - \iint_S p n_i dS,$$

или

$$R = - \iint_S p n dS.$$

Используя теорему Остроградского (81), имеем

$$R = - \iint_S p n dS = - \iiint_V \nabla p d\tau.$$

Подставляя Δp из уравнения равновесия (*), получим

$$R = - \iiint_V \rho g d\tau = - g \iiint_V \rho d\tau = - g m = - G.$$

Таким образом, сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в нее тело, по величине равна G — весу жидкости в объеме тела — и направлена в обратную сторону.

Пример 3. Теорема импульсов в гидроаэромеханике. Эта теорема занимает важное место в гидроаэромеханике, особенно в экспериментальной. Она позволяет определить силу, действующую на выделенный объем жидкости, зная только ее скорость (и плотность в случае сжимаемой жидкости) на поверхности этого объема, а также силу, действующую на помещенное в движущуюся жидкость твердое тело, по напряжениям и скорости (и плотности) жидкости на определенной (так называемой *контрольной*) поверхности.

Количество движения жидкости, находящейся в момент времени в некоторой *фиксированной* пространственной области τ , равно

$$\iiint_V \rho V d\tau.$$

С течением времени это количество движения меняется, ибо через τ проходят различные массы жидкости. Скорость изменения его равна

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho V d\tau.$$

Поскольку область τ является фиксированной, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho V d\tau = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho V) d\tau.$$

Переходя к компонентам, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho V_i d\tau = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho V_i) d\tau = \iiint_V \left(V_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial V_i}{\partial t} \right) d\tau.$$

Будем считать, что массовые силы отсутствуют ($f=0$). Тогда, определяя $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ из уравнения неразрывности (23) и $\rho \frac{\partial V_i}{\partial t}$ — из

уравнения движения (96), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho V_i d\tau &= \iiint_V \left[-V_i \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_k) - \rho V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right] d\tau = \\ &= - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho V_i V_k - p_{ik}) d\tau. \end{aligned}$$

Преобразуя интеграл, стоящий в правой части, по формуле Остроградского (см. 83) найдем

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \rho V_i d\tau = - \iint_S (\rho V_i V_k - p_{ik}) n_k dS = - \iint_S \Pi_{ik} n_k dS, \quad (105)$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho V_i V_k - p_{ik}$$

Слева в (105) стоит скорость изменения i -й компоненты количества движения жидкости в рассматриваемой неподвижной области. Эта скорость определяется той же i -й компонентой потока тензора Π_{ik} через замкнутую поверхность S , ограничивающую область (τ) . Таким образом, величина $\iint_S \Pi_{ik} n_k dS$ равна i -й компоненте того количества движения, которое в единицу времени уносится через элемент поверхности dS протекающей через τ жидкостью. Тогда очевидно, что величина Π_{ik} есть i -я компонента количества движения, уносимого в единицу времени через единичную площадку поверхности S , перпендикулярную к k -й оси. Тензор Π_{ik} называется *тензором плотности потока импульса*. Весь поток количества движения через поверхность равен потоку тензора Π_{ik} через нее, т. е.

$$\iint_S \Pi_{ik} n_k dS.$$

Следует отличать *поток импульса* от *потока вектора* $\rho \mathbf{V}$, который равен

$$\iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Поток вектора $\rho \mathbf{V}$, как уже отмечалось, определяет массу жидкости, уносимую через поверхность S в единицу времени протекающей через τ жидкостью. Вектор $\rho \mathbf{V}$ (количество движения единицы объема жидкости) по величине равен массе жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку поверхности S , расположенную перпендикулярно к скорости. Поэтому вектор $\rho \mathbf{V}$ называют *плотностью потока жидкости*.

Если движение жидкости стационарно $\left[\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$, то из (105) получим

$$\iint_S \Pi_{ik} n_k dS = \iint_S (\rho V_i V_k - p_{ik}) n_k dS = 0. \quad (106)$$

Это уравнение выражает теорему импульсов, которую можно сформулировать так:

При стационарном движении жидкости и равенстве нулю массовых сил поток тензора $\Pi_{ik} = \rho V_i V_k - p_{ik}$ через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю.

Теорема импульсов позволяет непосредственно выразить силу, действующую на выделенный объем жидкости, через скорость и плотность жидкости на поверхности этого объема. Действительно, поскольку массовые силы отсутствуют, то

$$\iint_S \rho_{ik} n_k dS$$

дает i -ю компоненту главного вектора всех сил, действующих на выделенный объем жидкости. Обозначим ее через F_i . Таким образом, из (106) имеем

$$F_i = \iint_S \rho V_i V_k n_k dS,$$

или в векторной записи

$$F = \iint_S \rho V (V \cdot n) dS. \quad (107)$$

Пусть в стационарный поток жидкости

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} = 0 \right]$$

при отсутствии массовых сил ($f=0$) помещено твердое тело с поверхностью S (рис. 24).

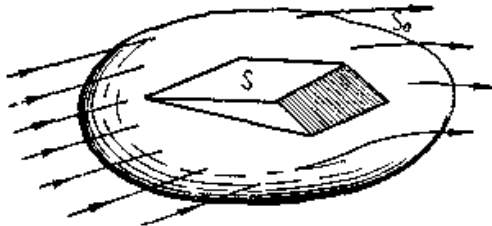


Рис. 24. К теореме импульсов в гидромеханике.

Сила, действующая на тело S в стационарном потоке жидкости, выражается через поле скоростей и давлений на контрольной поверхности S_0 .

Выберем в жидкости «контрольную» поверхность S_0 , произвольную, фиксированную, но так, чтобы она полностью охватывала твердое тело. Применим к объему жидкости между поверхностью твердого тела S и «контрольной» поверхностью S_0 теорему импульсов (106). Получим

$$\iint_S p_{ik} n_k dS + \iint_{S_0} p_{ik} n_k dS_0 - \iint_S \rho V_i V_k n_k dS - \iint_{S_0} \rho V_i V_k n_k dS_0 = 0.$$

Первый интеграл дает выражение для компоненты силы, действующей со стороны тела на рассматриваемый объем жидкости; взятый со знаком минус, он даст компоненту R_i силы, действующей со стороны жидкости на тело, т. е.

$$R_i = - \iint_S p_{ik} n_k dS.$$

Третий интеграл равен нулю в силу отсутствия протекания жидкости через поверхность твердого тела ($\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = V_k n_k = 0$ на поверхности тела S).

Следовательно,

$$R_i = \iint_{S_0} (p_{ik} - \rho V_i V_k) n_k dS_0. \quad (108)$$

Итак, чтобы определить силу, действующую на твердое тело в стационарном потоке жидкости, достаточно на некоторой поверхности S_0 , которая может быть удобной для эксперимента, измерить напряжения поверхностных сил, скорость и плотность жидкости.

Особенно простую формулировку приобретает теорема импульсов, если можно пренебречь силами вязкости. В этом случае, как уже отмечалось,

$$p_{ik} = -\rho \delta_{ik},$$

и выражение (108) приобретает вид

$$R_i = - \iint_{S_0} (\rho n_i + \rho V_i V_k n_k) dS_0,$$

или в векторной записи

$$\mathbf{R} = - \iint_{S_0} [\rho \mathbf{n} + \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n})] dS_0. \quad (109)$$

Таким образом, в этом случае достаточно на контрольной поверхности произвести замеры давления и вектора скорости жидкости, чтобы получить силу, действующую на твердое тело. Этот прием часто используется в аэродинамических экспериментах.

В следующем примере мы покажем, как с помощью теоремы импульсов (109) можно получить фундаментальную теорему гидроаэромеханики — теорему о подъемной силе плоского контура, полученную Н. Е. Жуковским.

Пример 4. Теорема Н. Е. Жуковского. Предварительно рассмотрим один из случаев интегрирования уравнений движения жидкости (97).

Пусть всюду в жидкости, движущееся баротропно (плотность является функцией только давления $\rho = \rho(p)$), выполнено условие

$\text{rot } V=0$, а массовые силы f имеют потенциал ($f = -\nabla\Pi$). При этих условиях уравнения (97) интегрируются.

Действительно, из формулы (5) (59) при $A = B$ имеем

$$\text{grad } V^2 = 2(V \cdot \nabla) V + 2V \times \text{rot } V.$$

Следовательно, уравнение движения (97) может быть записано в форме (форма Громеки):

$$\frac{\partial V}{\partial t} - (V \times \text{rot } V) + \text{grad} \left[\frac{V^2}{2} \right] = f - \frac{\nabla p}{\rho}.$$

Поскольку $\text{rot } V=0$, то $V = \nabla\varphi$, а вследствие баротропности

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \int \frac{dp}{\rho(p)}.$$

Следовательно, уравнение движения может быть записано в виде

$$\nabla \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int \frac{dp}{\rho(p)} \right] = 0.$$

Отсюда видно, что оно имеет интеграл

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \Pi + \int \frac{dp}{\rho(p)} = \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — некоторая функция времени, определяемая из начальных условий. Этот интеграл называется в гидромеханике интегралом Лагранжа. Отсюда в случае стационарного движения несжимаемой жидкости

$$(\rho = \text{const})$$

при отсутствии массовых сил получим

$$\frac{\rho V^2}{2} + p = C, \tag{110}$$

где C — постоянная.

Перейдем теперь к рассмотрению теоремы Н. Е. Жуковского.

Рассмотрим плоское (зависящее только от координат x_1 и x_2) стационарное течение несжимаемой жидкости, обтекающей плоский контур L (рис. 25).

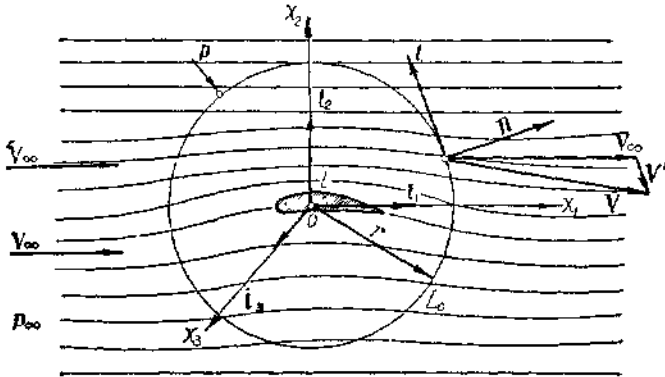


Рис. 25. К теореме Н. Е. Жуковского о силе, действующей на твердый контур в стационарном потоке идеальной жидкости.

Пусть скорость жидкости вдали от контура постоянна и равна \vec{V}_∞ , а всюду в жидкости $\text{rot } \vec{V} = 0$, т. е. течение жидкости безвихревое. Пусть, наконец, массовые силы отсутствуют ($f = 0$).

Применим теорему импульсов в форме (109) к объему жидкости, заключенному в цилиндре с высотой, равной единице, и с доньшками в виде части плоскостей между контурами L и L_0 , где L_0 — окружность некоторого радиуса r . (Выбор L_0 в виде окружности удобен только с точки зрения сокращения некоторых дальнейших рассуждений.)

Тогда получим силу, действующую на единицу длины бесконечного цилиндра с направляющей L в виде

$$\vec{R} = - \oint_{L_0} p n dL_0 - \oint_{L_0} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dL_0.$$

(Интегралы по доньшкам цилиндра пропадают, ибо на них $\vec{V} \cdot \vec{n} = 0$ ($\vec{V} \perp \vec{n}$), а $\iint p n dS$ на доньшках имеет разный знак и одинаковую величину.)

В это выражение подставим p из (110). Так как C и ρ постоянные, то получим

$$\vec{R} = \frac{\rho}{2} \oint_{L_0} V^2 n dL_0 - \rho \oint_{L_0} \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dL_0. \quad (*)$$

Представим вектор \vec{V} на контуре L_0 в виде (см. рис. 25)

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{V}'.$$

Здесь \vec{V}' — скорость возмущения, которая создается в плоскопараллельном потоке жидкости твердым контуром L_0 . Будем

предполагать, что эта скорость убывает с расстоянием r от начала координат, где помещен контур, как $\frac{1}{r}$.

Подставим разложение V на V_∞ и V' в (*). Получим

$$R = \frac{\rho V_\infty^2}{2} \oint_{L_0} n dL_0 + \rho \oint_{L_0} (V_\infty \cdot V') n dL_0 + \frac{\rho}{2} \oint_{L_0} V'^2 n dL_0 - \rho V_\infty \oint_{L_0} (V' \cdot n) dL_0 - \\ - \rho \oint_{L_0} V' (V_\infty \cdot n) dL_0 - \rho \oint_{L_0} V' (V' \cdot n) dL_0.$$

Первый интеграл, как известно из курса анализа, равен нулю. Четвертый интеграл равен нулю в силу условия несжимаемости жидкости, ибо он представляет поток жидкости через замкнутый контур. Третий и шестой интегралы имеют порядок $\frac{1}{r}$; их сумму мы обозначим через $O\left(\frac{1}{r}\right)$.

Тогда

$$R = \rho \oint_{L_0} [(V_\infty \cdot V') n - V' (V_\infty \cdot n)] dL_0 + O\left[\frac{1}{r}\right].$$

В силу формулы для двойного векторного произведения получим

$$R = \rho \oint_{L_0} V_\infty \times (n \times V') dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Поскольку

$$\oint_{L_0} V_\infty \times (n \times V_\infty) dL_0 = V_\infty \times \left(\oint_{L_0} n dL_0 \times V_\infty \right) = 0,$$

то

$$R = \rho \oint_{L_0} V_\infty \times (n \times V) dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right) = \rho V_\infty \times \oint_{L_0} (n \times V) dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Введем орт i_3 по оси x_3 и орт t по касательной к контуру L_0 (рис. 25).

Тогда $n = t \times i_3$,

$$n \times V = (t \times i_3) \times V = i_3 (t \cdot V) - t (i_3 \cdot V) = i_3 (V \cdot t).$$

Обозначая $dL_0 = t dL_0$, получим

$$R = \rho V_\infty \times i_3 \oint_{L_0} V \cdot dL_0 + O\left(\frac{1}{r}\right).$$

Введем вектор

$$\Gamma = i_3 \oint_{L_0} V \cdot dL_0;$$

его величина равна циркуляции скорости по контуру L_0 , а направлен он перпендикулярно к плоскости контура. Тогда

$$\mathbf{R} = \rho \mathbf{V}_\infty \times \mathbf{\Gamma} + O\left(\frac{1}{r}\right). \quad (**)$$

Поскольку движение безвихревое, то циркуляция по контуру L_0 равна циркуляции по любому другому контуру, охватывающему контур L .

Следовательно, первое слагаемое в (***) не зависит от величины радиуса R окружности L_0 .

Теперь будем удалять контур L_0 от начала координат на бесконечность. Теорема импульсов остается справедливой, ибо часть интегралов (R и $\rho \mathbf{V}_\infty \times \mathbf{\Gamma}$) остается конечной, а часть $O\left(\frac{1}{r}\right)$ идет к нулю. Таким образом, при $r \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \rho \mathbf{V}_\infty \times \mathbf{\Gamma}; \\ \mathbf{\Gamma} &= i_3 \oint_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L}. \end{aligned}$$

Эта формула и выражает знаменитую теорему Н. Е. Жуковского о подъемной силе плоского контура. По величине эта сила равна $\rho \mathbf{V}_\infty \mathbf{\Gamma}$ и направлена всегда перпендикулярно к вектору \mathbf{V}_∞ .

5.9. Потенциальное векторное поле

Векторное поле называется *потенциальным*, если его вектор \mathbf{A} является градиентом некоторой скалярной функции φ , т. е.

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi. \quad (111)$$

Величина φ называется *потенциалом* поля \mathbf{A} . Потенциал векторного поля определяется с точностью до аддитивной постоянной, что следует из (111).

Потенциальный вектор \mathbf{A} в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:

$$A_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}; \quad A_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}; \quad A_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Потенциальное поле является одним из наиболее простых векторных, полей, ибо оно полностью определяется одним скаляром — потенциалом.

Отметим основное свойство потенциального поля. *Если потенциал φ поля \mathbf{A} есть однозначная функция, то значение криволинейного интеграла*

$$\int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}$$

не зависит от пути интегрирования, а лишь от конечных точек пути M_0 и M , (рис. 26).

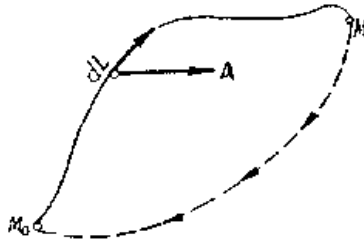


Рис. 26. Основное свойство потенциального векторного поля.

Криволинейный интеграл от потенциального вектора в односвязной области не зависит от пути интегрирования и для замкнутого пути интегрирования равен нулю.

Действительно, если $\mathbf{A} = \nabla\varphi$, то

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} &= \int_{M_0}^M \nabla\varphi \cdot d\mathbf{L} = \int_{M_0}^M \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} dx_3 \right) = \\ &= \int_{M_0}^M d\varphi = \varphi(M) - \varphi(M_0). \end{aligned}$$

Осюда следует, что в случае однозначного потенциала интеграл от потенциального вектора по замкнутому пути равен нулю, т. е.

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = \oint \nabla\varphi \cdot d\mathbf{L} = \varphi(M_0) - \varphi(M_0) = 0.$$

Этот факт имеет большое значение в теории потенциальных полей и зачастую принимается за определение потенциального поля.

Выделение класса потенциальных полей очень важно. Если силовое поле имеет однозначный потенциал, то вычисление работы сил поля

сводится просто к определению разности потенциалов в начальной и конечной точках пути. Потенциальность скоростного поля жидкости значительно упрощает задачи гидроаэромеханики, позволяет при изучении плоских потоков использовать такой хорошо разработанный математический аппарат, как теория функций комплексного переменного, преобразование годографа, метод характеристик и др. В связи с этим важно определить критерий потенциальности поля.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы в односвязной области векторное поле A было потенциальным, является выполнение равенства

$$\operatorname{rot} A = 0.$$

Необходимость этого условия устанавливается просто. Пусть $A = \nabla\varphi$. Тогда стоит только предположить, что потенциал поля $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ имеет непрерывные первые и вторые частные производные, т. е. что вихрь $\operatorname{rot} A$ существует и равенство $\operatorname{rot} A = \operatorname{rot} \nabla\varphi = 0$ проверяется непосредственным вычислением.

Итак, всякое потенциальное поле является полем безвихревым, независимо от связности области.

Достаточность условия может быть установлена только для односвязной области. Действительно, если область поля односвязна, то любой замкнутый контур в этом поле ограничивает некоторую поверхность, лежащую целиком в этом поле. Иначе говоря, какой бы замкнутый контур мы ни взяли в таком векторном поле, всегда на этот контур можно «натянуть» поверхность, которая будет целиком оставаться в нашей области поля. Но тогда для произвольного замкнутого контура L и ограниченной им поверхности S применима формула Стокса

$$\oint_L A \cdot dL = \iint_S n \cdot \operatorname{rot} A dS.$$

В силу условия $\operatorname{rot} A = 0$ для любого замкнутого контура L поля имеем равенство нулю циркуляции:

$$\oint_L A \cdot dL = 0.$$

Отсюда следует, что криволинейный интеграл

$$\int_{M_0}^M A \cdot dL$$

не зависит от пути интегрирования и при фиксированной точке M_0 определяется только положением точки M , т. е. является функцией ее координат. Это может быть тогда и только тогда, если выражение $A \cdot dL$ является полным дифференциалом некоторой функции, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{L} = d\varphi,$$

или

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3.$$

Отсюда

$$A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

т. е.

$$\mathbf{A} = \nabla \varphi.$$

При этом

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, x_3) &= \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} d\varphi = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} A_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 + \\ &+ A_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_2 + A_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_3 = \int_{M_0}^{M(x_1, x_2, x_3)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{L}. \end{aligned}$$

Эта формула дает способ построения однозначного потенциала в односвязной области безвихревого вектора \mathbf{A} .

Итак, *всякое безвихревое поле является потенциальным только в односвязной области.*

Теперь рассмотрим случай, когда область, где выполнены условия теоремы Стокса, не односвязна. В соответствии с самим определением не односвязной области, в ней существуют замкнутые контуры, которые не ограничивают никакой поверхности, т. е. на такие контуры нельзя «натянуть» поверхность, целиком лежащую в области. Следовательно, здесь уже нельзя построить однозначную функцию потенциала в каждой точке. Поэтому в этом случае иногда говорят о *многозначном* потенциале поля.

Рассмотрим пример многозначного потенциала. Напряженность магнитного поля бесконечного прямолинейного проводника, расположенного по оси (x_3), имеет выражение

$$\mathbf{H} = \frac{2I}{r^2} (\mathbf{t}_3 \times \mathbf{r}),$$

где I — сила тока; $\mathbf{r} = t_1 x_1 + t_2 x_2$; $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Имеем:

$$H_1 = -2I \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$H_2 = 2I \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2};$$

$$H_3 = 0.$$

Вектор \mathbf{H} (рис. 27) определен всюду, кроме оси (x_3), где $r = 0$.

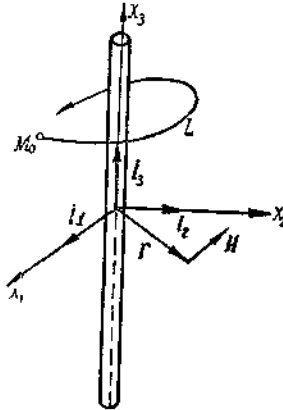


Рис. 27. Пример неоднозначного потенциала. Потенциал вектора магнитного поля бесконечного проводника является неоднозначной функцией.

Поэтому векторное поле занимает двухсвязную область (все пространство с вырезанной осью x_3).

Можно проверить, что всюду в поле $\text{rot } \mathbf{H} = 0$; на оси (x_3) $\text{rot } \mathbf{H}$, как и \mathbf{H} , не определен.

Потенциал этого поля

$$\varphi = 2I \arctg \frac{x_2}{x_1}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = H_1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = H_2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = H_3 \right)$$

является многозначной функцией.

Если вычислить криволинейный интеграл

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L}$$

по контуру L , охватывающему ось (x_3), то изменение потенциала будет определяться изменением угла (полярного) $\arctg \frac{x_2}{x_1}$. Поэтому, выйдя из некоторой точки M_0 , мы после интегрирования, обойдя вокруг оси (x_3), придем в эту точку не с начальным значением потенциала, а со значением на $2I \cdot 2\pi$ большим. Таким образом, несмотря на то, что всюду в поле $\text{rot } \mathbf{H} = 0$, существуют такие контуры, по которым циркуляция

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} \neq 0.$$

Многозначность потенциала отражается на векторных линиях поля (рис. 28).

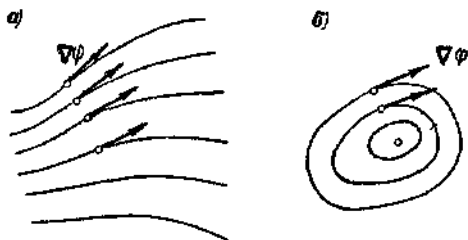


Рис. 28. Векторные линии поля с однозначным (а) и неоднозначным (б) потенциалом могут быть замкнутыми.

Если потенциал однозначен, то векторные линии его градиента не могут быть замкнутыми, ибо тогда по таким линиям $\int \nabla\varphi \times d\mathbf{L} \neq 0$. У многозначного потенциала возможны замкнутые векторные линии его градиента.

Можно избавиться от многозначности потенциала путем введения дополнительных границ области, преобразуя этим ее в односвязную область. Дополнительные границы должны исключать те контуры, которые нельзя стянуть в точку (рис. 5). Тогда многосвязная область будет односвязной, в которой равенство $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ влечет за собой потенциальность вектора \mathbf{A} , т. е. $\mathbf{A} = \nabla\varphi$, с однозначным потенциалом φ .

5.10. Соленоидальное векторное поле. Векторный потенциал

Векторное поле называется соленоидальным, если его вектор \mathbf{A} является вихрем некоторого другого вектора, т. е.

$$\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{W}.$$

Вектор W называется *векторным потенциалом* поля A . Соленоидальный вектор в системе прямоугольных декартовых координат имеет проекции:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}; \\ A_2 &= \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}; \\ A_3 &= \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Векторный потенциал поля определяется с точностью до градиента произвольной функции, т. е. если W — векторный потенциал поля A , то $W' = W + \text{grad } f$ — тоже векторный потенциал того же поля, ибо $\text{rot } W' = \text{rot } W \times \text{rot grad } f = \text{rot } W$.

Необходимым и достаточным условием соленоидальности поля является равенство нулю его дивергенции, т. е. $\text{div } A = 0$.

Необходимость этого условия проверяется непосредственным вычислением. Действительно, если $A = \text{rot } W$, то

$$\begin{aligned} \text{div } A = \text{div rot } W &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Что касается *достаточности* этого условия, то для случая поля, занимающего неограниченное пространство, она будет установлена позже (см. 5.12). При этом надо потребовать существования $\text{rot } A$ и убывания $|\text{rot } A|$ на бесконечности как

$$\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}, \text{ где } \varepsilon > 0 \text{ и } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Тогда можно построить однозначно векторный потенциал W поля A так, что $\text{rot } W = A$. Если поле A занимает ограниченное пространство, для отыскания векторного потенциала этого поля при условии $\text{div } A = 0$ всюду надо потребовать дополнительных условий относительно производных $\frac{\partial A_i}{\partial x_k}$ на границе поля.

Можно показать непосредственным интегрированием системы

$$A_1 = \frac{\partial W_3}{\partial x_2} - \frac{\partial W_2}{\partial x_3}; \tag{*}$$

$$A_2 = \frac{\partial W_1}{\partial x_3} - \frac{\partial W_3}{\partial x_1}; \tag{**}$$

$$A_3 = \frac{\partial W_2}{\partial x_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_2}. \tag{***}$$

при условии

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0 \quad (****)$$

возможность построения векторного потенциала W поля A .

Будем искать W_1 в виде функции от x_1 , т. е.

$$W_1 = f(x_1).$$

Тогда из (**) имеем

$$W_2 = - \int A_2 dx_1 + \varphi(x_2, x_3),$$

а из (***)

$$W_3 = \int A_3 dx_1 + \psi(x_2, x_3).$$

Здесь φ и ψ — произвольные функции от x_2 и x_3 , которые должны быть подчинены условию, вытекающему из уравнения (*). Подставляя в это уравнение найденные выражения для W_3 и W_2 , получим

$$A_1 = - \int \frac{\partial A_2}{\partial x_2} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \int \frac{\partial A_3}{\partial x_3} dx_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Учитывая (****), имеем

$$A_1 = \int \frac{\partial A_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0.$$

Таким образом, $f(x_1)$, $\varphi(x_1, x_2)$, $\psi(x_2, x_3)$ произвольные, непрерывно дифференцируемые функции (поле A непрерывно). Условие, накладываемое на φ и ψ , является следствием того, что решение системы (*), (**), (***) определяется с точностью до градиента произвольной функции.

Пример соленоидального поля. В плоской задаче гидромеханики несжимаемой жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$) векторным потенциалом поля скоростей служит вектор, равный по величине функции тока.

Функция тока $\psi(x_1, x_2)$ определяется как функция, которая вдоль векторных линий поля \mathbf{V} — вдоль линий тока — сохраняет постоянное значение. Уравнение семейства линий тока, следовательно, может быть записано так: $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$. Дифференциальное уравнение линий тока в плоском случае (см. 15) имеет вид

$$V_1 dx_2 - V_2 dx_1 = 0.$$

Для того чтобы левая часть этого уравнения была полным дифференциалом некоторой функции (функции тока), как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial V_2}{\partial x_2}.$$

Это обеспечивается уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} = 0.$$

Таким образом, можно ввести функцию тока $\psi(x_1, x_2)$ так, что

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}; \quad \mathbf{V}_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

В то же время можно записать

$$\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{W}, \text{ где } \mathbf{W} = i_3 \psi, \text{ так что}$$

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}.$$

Отметим, что в этом случае поле \mathbf{V} может быть записано в виде

$$\mathbf{V} = \nabla \psi \times i_3,$$

а поле вихря скорости

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = -i_3 \Delta \psi.$$

Рассмотрим некоторые характерные свойства соленоидального поля.

1. *Интенсивность векторной трубки соленоидального поля есть величина постоянная вдоль всей трубки.*

Возьмем в поле A некоторый замкнутый контур L (рис. 29) и проведем через его точки векторные линии поля.

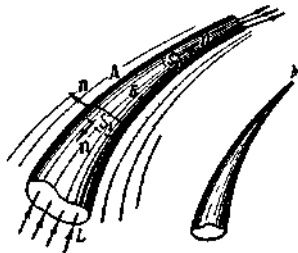


Рис. 29. Свойства векторных трубок соленоидального поля.

Интенсивность векторной трубки соленоидального поля постоянна вдоль всей трубки, в силу чего эта трубка не может оканчиваться или начинаться в поле.

Образовавшаяся поверхность носит название векторной трубки. Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через ее

поперечное сечение (контур этого сечения пересекает все векторные линии трубки).

Выберем произвольно два поперечных сечения трубки— S_1 и S_2 — и применим теорему Остроградского к объему, ограниченному S_1 и S_2 и поверхностью σ трубки между S_1 и S_2 . Имеем

$$\iiint_{\sigma} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau = \iint_{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} d\sigma + \iint_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS_1 + \iint_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS_2.$$

Интеграл слева равен нулю, ибо $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$; первый интеграл справа тоже равен нулю, ибо на поверхности трубки $\mathbf{A} \perp \mathbf{n}$, так что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} |_{\sigma} = 0$. Переносим интеграл по S_1 влево и меняя в этом интеграле направление \mathbf{n} на противоположное (тогда поток через S_1 и S_2 будет вычислен в одном направлении), получим

$$\iint_{S_1} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS_1 = \iint_{S_2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS_2,$$

что и требовалось доказать.

2. В соленоидальном поле векторные трубки не могут ни кончатся, ни начинаться внутри поля; следовательно, они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

Этот факт следует из первого свойства трубок соленоидального поля. Действительно, если какая-либо трубка заканчивается в точке M (рис. 29), то в этой точке вектор должен принимать бесконечно большое значение, ибо интенсивность трубки погонянная, а ее поперечное сечение в точке M равно нулю. А этого быть не может, ибо \mathbf{A} непрерывен (по предположению) во всех точках поля.

Если предположить, что трубка заканчивается в поле конечным сечением S_0 , то в точках этого сечения поле \mathbf{A} будет разрывным, что исключено.

5.11. Лапласово векторное поле. Гармонические функции

Векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ называется лапласовым, если в любой его точке выполняются равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, лапласово поле является одновременно и потенциальным, и соленоидальным.

Лапласово поле в односвязной области полностью определяется скалярным потенциалом φ , который является решением уравнения Лапласа, т. е.

$$\Delta\varphi = 0.$$

Это следует из того, что если $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, то в односвязной области $\mathbf{A} = \nabla\varphi$ и тогда $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \nabla\varphi = \Delta\varphi$.

Изучение потенциала лапласова векторного поля основывается на свойствах *гармонических функций*.

Гармонические функции. Функция φ , непрерывная вместе с производными первого и второго порядка, удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

называется *гармонической*.

Примерами гармонических функций могут служить

$$\varphi = c; \quad \varphi = ax_1 + bx_2 + cx_3; \quad \varphi = x_1^2 - x_3^2, \quad \varphi = x_1x_2;$$

$$\varphi = x_1x_2x_3; \quad \varphi = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{k}{2}} \left\{ a \sin \left(k \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \right) + \right. \\ \left. + b \cos \left(k \operatorname{arctg} \frac{x_2}{x_1} \right) \right\}.$$

Особый интерес представляет гармоническая функция $\frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \equiv \sqrt{x_i x_i}.$$

Действительно, для производных по x_i имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{x_i}{r^3}; \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{3x_i^2 - r^2}{r^5}.$$

Поэтому

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \\ = \frac{3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 3r^2}{r^5} = 0.$$

Функция $\frac{1}{r}$ — гармоническая всюду, кроме начала координат ($r = 0$).

Функция $\ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ также является гармонической всюду, кроме начала координат.

Остановимся на некоторых свойствах гармонических функций.

1. *Интеграл по замкнутой поверхности S от нормальной производной гармонической функции равен нулю, если в области, ограниченной S , функция всюду гармоническая.*

Это свойство следует из выражения (90). Если ψ — гармоническая функция ($\Delta\psi = 0$), то из (90) имеем

$$\iint_S \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = 0. \quad (112)$$

2. Если φ, ψ гармонические функции всюду в области τ , то значения этих функций и их нормальных производных на границе S этой области связаны соотношением

$$\iint_S \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n} dS = \iint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS.$$

Это свойство следует из выражения (88).

3. Функция, гармоническая внутри области τ , может быть найдена в любой точке этой области по значениям этой функции и ее нормальной производной на границе области по формуле

$$4\pi\varphi(M_0) = - \iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (113)$$

Эта формула следует из выражения (94), примененного к гармонической функции φ .

4. В применении к поверхности S_R сферы радиуса R с центром в точке M_0 формула (113) дает

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} \varphi dS, \quad (114)$$

ибо по первому свойству

$$\iint_{S_R} \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = \frac{1}{R} \iint_{S_R} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_R} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = - \frac{1}{R^2}.$$

Формула (114) выражает теорему, утверждающую, что значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере S_R с центром в M_0 , целиком расположенной в области гармоничности функции.

5. Гармоническая функция не может иметь ни максимума, ни минимума внутри области гармоничности.

Действительно, если в какой-либо внутренней точке M_0 функция φ достигает максимума и если φ не является постоянной, то найдется такой луч, проведенный из M_0 , в некоторой точке M_1 которого будем иметь $\varphi(M_1) < \varphi(M_0)$. Пару точек M_0 и M_1 можно заменить

аналогичной парой точек, лежащих на том же луче, и таких, что сфера с центром в M_0 , проходящая через M_1 , целиком лежит в рассматриваемой области. Но тогда на некоторой части (σ) этой сферы по непрерывности будем иметь

$$\varphi(M) |_{\sigma} < \varphi(M_0).$$

Применяя формулу (114) к этой сфере, получим

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi (M_0 M_1)^2} \iint_{S_{M_1 M_0}} \varphi(M) dS.$$

Отсюда следует

$$\varphi(M_0) < \max \varphi(M) = \varphi(M_0),$$

что абсурдно.

Аналогично можно показать, что φ не может достигать минимума на внутренних точках области гармоничности.

6. *Гармоническая функция, принимающая постоянные значения на границе некоторой конечной области, постоянна внутри всей области.*

Действительно, если на границе области $\varphi = c$, то, согласно предыдущему свойству, по всей области максимальное и минимальное значение φ равно c , ибо во внутренних точках функция φ не может принимать значений, ни больших, ни меньших c . Значит, φ постоянна во всей области и вследствие непрерывности $\varphi = c$ всюду в этой области.

7. *Уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ имеет единственное решение в области, на границе которой φ принимает заданные значения.*

Допустим, что φ_1 и φ_2 — две различные гармонические функции, принимающие одинаковые значения на границе области. Тогда функция $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ в силу линейности уравнения Лапласа тоже будет гармонической, принимающей на границе постоянное, равное нулю значение.

Тогда по свойству (6) функция φ постоянна, а в силу непрерывности равна нулю всюду внутри области. Значит, $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е. гармоническая функция полностью определяется ее значениями на границе области.

Задачи Дирихле и Неймана. Последнее свойство гармонических функций позволяет говорить о единственном решении задачи об определении гармонической в области функции по заданным ее значениям на границе области. Эта задача носит название задачи Дирихле. Она заключается в отыскании в области x решения уравнения

$$\Delta\varphi = 0$$

при граничном условии

$$\varphi|_S = f(x_1, x_2, x_3),$$

где S — граница области.

Если в формуле Грина (87) при $\varphi = \psi$ считать, что $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ на границе S области τ , то получим, что гармоническая функция φ будет произвольной постоянной внутри области.

Отсюда следует, что две гармонические функции, имеющие на границе односвязной области одинаковые нормальные производные $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0\right)$, отличаются на постоянную величину.

Таким образом, нормальная производная гармонической функции на границе односвязной области определяет (с точностью до произвольного постоянного слагаемого) значения этой функции во всех внутренних точках области.

Следовательно, можно говорить о единственности решения задачи определения гармонической в односвязной области функции по заданным значениям ее нормальной производной на границе области. Эта задача называется задачей Неймана. Она заключается в отыскании решения уравнения

$$\Delta \varphi = 0$$

при граничном условии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = F(x_1, x_2, x_3).$$

Если же область гармонической функции многосвязна, то надо знать не только $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на границе области, но и значение циркуляции градиента поля

$$\int \nabla \varphi \cdot dL$$

по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку. Если все эти контуры имеют циркуляцию, равную нулю, то в решении задачи Неймана никаких новых затруднений не возникает. Если заданы отличные от нуля значения циркуляции по этим контурам, то потенциал этого поля будет многозначным, увеличивающим свое значение на постоянную (циклическую) при каждом обходе по контуру. Но тем не менее задача будет иметь единственное решение.

Действительно, пусть φ_1, φ_2 — два потенциала, удовлетворяющие уравнению Лапласа с заданными на границе нормальными производными. Но тогда $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — однозначная функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа и имеющая на границе области нормальную производную, равную нулю. Поскольку эта функция

однозначна, то из формулы Грина (89) следует, что φ постоянна всюду и, следовательно, φ_1 и φ_2 отличаются на постоянную.

Имея в виду, что гармоническая функция является потенциалом лапласового векторного поля, мы теперь можем утверждать следующее.

Лапласово векторное поле полностью определяется в каждой точке односвязной области значением его скалярного потенциала либо значением нормальной производной потенциала, заданных на границе этой области; в случае многосвязной области дополнительно к нормальной производной на границе области необходимо задать значение циркуляции градиента поля по тем контурам, которые не могут быть стянуты в точку, не выходя за поле.

Рассмотрим несколько гидродинамических примеров, связанных с теорией гармонических функций.

Пример 1. Задачи Неймана и Дирихле — это основные задачи безвихревых стационарных потоков несжимаемой идеальной жидкости. Если $\rho = \text{const}$, $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$, то, как известно из гидромеханики, уравнения движения допускают интеграл Лагранжа для стационарного случая

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

(здесь p , ρ , \mathbf{V} — соответственно давление, плотность и скорость жидкости).

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\text{div } \mathbf{V} = 0.$$

В силу $\text{rot } \mathbf{V} = \mathbf{0}$ имеем $\mathbf{V} = \nabla\varphi$.

Потенциал скорости φ является гармонической функцией в соответствии с уравнением неразрывности

$$\text{div } \mathbf{V} = \text{div } \nabla\varphi = \Delta\varphi = 0.$$

На твердых контурах нормальная составляющая скорость обращается в нуль. Отсюда граничное условие для φ :

$$V_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ — на твердых контурах}$$

Так как $\text{div } \mathbf{V} = 0$, то \mathbf{V} в плоском случае имеет векторный потенциал вида

$$\mathbf{W} = \mathbf{t}_3\psi,$$

где ψ — функция тока, так что

$$V_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}; \quad V_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Из условия $\text{rot } \mathbf{V} = 0$ получим

$$\Delta\psi = 0.$$

Так как твердые контуры являются линиями тока, ψ принимает на них постоянное значение, т. е. $\psi = c$ на твердых контурах (рис. 30).

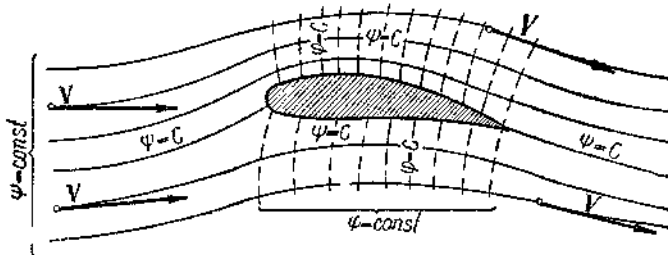


Рис. 30. Линии тока и линии равного потенциала у твердого контура.

На неподвижном контуре, обтекаемом жидкостью, нормальная компонента скорости $V_n = 0$, и поэтому сам контур является линией тока

Итак, для нас решаем задачу Неймана, а для ψ — задачу Дирихле.

В гидромеханике для решения задач Неймана и Дирихле широко используется метод конформных отображений.

В плоских задачах гидромеханики задаются твердые контуры (один или несколько) в безграничной области потока. На бесконечности поток является однородным, так что

$$\nabla\psi|_{\infty} = V_{\infty}.$$

На твердых контурах $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$.

Каждый твердый замкнутый контур в плоском потоке увеличивает связность области течения жидкости на единицу. Поэтому для определенности задачи Неймана необходимо задавать значение циркуляции скорости $\mathbf{V} = \nabla\psi$ вокруг каждого из твердых контуров; значение этой циркуляции выбирается согласно известному постулату Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина так, чтобы острые кромки профилей были линиями раздела струй

Пример 2. Пусть ψ — потенциал безвихревого течения несжимаемой жидкости, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \nabla\psi, \\ \text{div } \mathbf{V} &= 0, \quad \Delta\psi = 0, \\ \text{rot } \mathbf{V} &= 0. \end{aligned}$$

Тогда из свойств гармонических функций следует:

1. Интенсивность трубок тока (векторных трубок) постоянна по их длине; сами трубки не могут ни начинаться, ни кончаться в потоке (см. 5.10).

2. В односвязной области, полностью ограниченной твердыми стенками (на них $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$), не может возникнуть непрерывное безвихревое течение.

3. Кинетическая энергия некоторого объема жидкости τ , ограниченного поверхностью S , может быть вычислена

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

Это следует из (89) и определения

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} v^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau.$$

5.12. Основная теорема векторного анализа

В векторном анализе большое значение имеет теорема Стокса, особенно часто применяемая в аэромеханике и электродинамике, о расщеплении векторного поля A на два: потенциальное A_1 и соленоидальное A_2 . Речь идет о полях, определенным образом исчезающих на бесконечности, — именно $|A|$ обращается на бесконечности в нуль как $\frac{1}{r^{1+\epsilon}}$, а $|\operatorname{div} A|$ и $|\operatorname{rot} A|$ — как $\frac{1}{r^{2+\epsilon}}$, где $\epsilon > 0$.

Как будет видно из доказательства, это предположение необходимо для сходимости интегралов, дающих выражение A_1 и A_2 через A .

Теорема. Любое непрерывное векторное поле $A(r)$, заданное во всем пространстве и исчезающее на бесконечности вместе с дивергенцией и вихрем, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального $A_1(r)$ и соленоидального $A_2(r)$ полей, т. е.

$$A = A_1(r) + A_2(r),$$

где

$$\operatorname{rot} A_1 = 0;$$

$$\operatorname{div} A_2 = 0.$$

(115)

Сделаем предварительные два замечания, а затем перейдем к доказательству теоремы.

1. Поскольку

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_1 \text{ и } \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_2, \quad (116)$$

то при разложении поля (115) получается, что все источники и стоки включаются в первую часть разложения \mathbf{A}_1 , а все вихри — во вторую часть \mathbf{A}_2 . Таким образом, конструктивный результат теоремы (выражение \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 через $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и $\operatorname{rot} \mathbf{A}$) позволяет решить задачу определения поля \mathbf{A} по заданному распределению его дивергенции $\operatorname{div} \mathbf{A} = \Theta(\mathbf{r})$ и вихря $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \Omega(\mathbf{r})$.

2. Мы называем поле \mathbf{A}_1 потенциальным, а поле \mathbf{A}_2 — соленоидальным, хотя нам известно только, что $\operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ и $\operatorname{div} \mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$. В процессе доказательства будет ясно, что вектор \mathbf{A}_1 всегда можно считать потенциальным, ибо если область определения этого вектора окажется многосвязной, то всегда можно провести дополнительные ее границы, уничтожающие многосвязность; для вектора \mathbf{A}_2 будет построен векторный потенциал, так что \mathbf{A}_2 — действительно соленоидальное поле.

Доказательство. Для доказательства мы построим поле \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 по заданному полю \mathbf{A} , а затем покажем, что такое определение однозначно (с точностью до постоянного вектора).

Построение \mathbf{A}_1 . Для нахождения \mathbf{A}_1 из (115) и (116) имеем уравнения:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{0}; \\ \operatorname{div} \mathbf{A}_1 &= \operatorname{div} \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (117)$$

Из первого уравнения следует, что

$$\mathbf{A}_1 = \nabla\varphi + \mathbf{C}_1,$$

где \mathbf{C}_1 — постоянный вектор, а φ — однозначный потенциал (если область определения \mathbf{A}_1 многосвязна, считаем, что проведены дополнительные границы, превращающие эту область в односвязную). Тогда второе уравнение (117) дает

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi \times \mathbf{C}_1) = \operatorname{div} \mathbf{A},$$

или

$$\Delta\varphi = \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Постоянная \mathbf{C} для определения потенциала φ роли не играет. Из этого уравнения (уравнение Пуассона) с известной правой частью можно выразить φ , используя следствие (94) из теоремы Грина. Применяя формулу (94) к неограниченному объему τ , где отыскивается функция φ , мы получим, что поверхностный интеграл

$$\iint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS$$

обращается в нуль, если считать, что φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ стремятся к нулю на бесконечности, причем $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ стремится к нулю быстрее, чем $\frac{1}{r}$. Тогда, поскольку значение $\Delta \varphi$ во всех точках пространства нам задано, значение φ может быть представлено формулой

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau, \quad (118)$$

где r — расстояние от точки (x_1, x_2, x_3) , в которой вычисляется значение φ , до произвольной точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) области интегрирования, в которой вычисляется $\operatorname{div} \mathbf{A}$ и располагается элементарный объем $d\tau$. Интегрирование распространяется на всю область определения $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \varphi + \mathbf{C}_1 = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau + \mathbf{C}_1. \quad (119)$$

Проекция этого вектора вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} A_{1x_i}(x_1, x_2, x_3) = \\ = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} + C_{1x_i} \\ (i = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Построение \mathbf{A}_2 . Вектор \mathbf{A}_2 , как следует из (115) и (116), определяется системой уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad (120)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_2 = 0.$$

Будем искать решение этой системы в виде

$$\mathbf{A}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{W} + \mathbf{C}_2, \quad (121)$$

причем векторный потенциал \mathbf{W} подчиним дополнительному условию

$$\operatorname{div} \mathbf{W} = 0. \quad (122)$$

Такое ограничение, наложенное на векторный потенциал, несущественно, ибо он определен с точностью до градиента произвольной функции. Поэтому если считать, что $\operatorname{div} \mathbf{W} = \delta \neq 0$, то можно рассматривать вместо \mathbf{W} вектор $\mathbf{W}' = \mathbf{W} + \nabla f$, который также будет векторным потенциалом поля \mathbf{A}_2 (ибо $\operatorname{rot} \mathbf{W}' = \operatorname{rot} \mathbf{W}$) при произвольной функции f . Но теперь всегда можно подобрать функцию f так, чтобы $\operatorname{div} \mathbf{W}' = 0$. Для этого достаточно f определить из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{W}' = \operatorname{div} \mathbf{W} + \operatorname{div} \nabla f = 0,$$

или

$$-\delta = \Delta f.$$

Итак, мы можем всегда считать, что векторный потенциал соленоидального поля также есть соленоидальный вектор. Но тогда этот вектор определяется из уравнения, полученного подстановкой (121) в первое из уравнений (120):

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{W} + \mathbf{C}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Используя выражение для $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{W}$ (см. 59) и учитывая (122), получим

$$-\Delta \mathbf{W} = \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Выражение \mathbf{W} через $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ может быть получено с помощью формулы (94 а) точно так же, как частное решение уравнения Пуассона (118) — с помощью формулы (94).

Постоянная \mathbf{C}_2 не играет никакой роли при определении \mathbf{W} .
Итак, имеем

$$\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau. \quad (123)$$

Тогда

$$\mathbf{A}_2 = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau + \mathbf{C}_2. \quad (124)$$

Отсюда, например, проекция этого вектора на ось (x_1) равна

$$\begin{aligned} A_{2x_1}(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x_2} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_1} A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_3} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{x_1} A(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right] + C_{2x_1}. \end{aligned}$$

Интегрирование распространяется здесь на всю область определения $\operatorname{rot} \mathbf{A}$.

Таким образом, окончательное выражение для разложения векторного поля \mathbf{A} имеет вид

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \iiint \frac{\operatorname{div} \mathbf{A}}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint \frac{\operatorname{rot} \mathbf{A}}{r} d\tau. \quad (125)$$

Постоянные \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 здесь отброшены, ибо поле \mathbf{A} по условию должно исчезать на бесконечности. Формула (125) дает выражение для

восстановления поля по его вихрям и дивергенции, т. е. когда известны только функции

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \Theta(\mathbf{r}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \Omega(\mathbf{r})$$

и требуется определить поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Однозначность разложения поля. Пусть наряду с разложением

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2; \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = 0; \operatorname{div} \mathbf{A}_2 = 0$$

существует другое разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}'_2; \operatorname{rot} \mathbf{A}'_1 = 0; \operatorname{div} \mathbf{A}'_2 = 0.$$

Тогда, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_1 = \operatorname{div} \mathbf{A}'_1$, то $\operatorname{div} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1) = 0$.

Следовательно, вектор $\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1$ образует лапласово поле, ибо

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1) = 0.$$

Аналогично вектор $\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}'_2$ также образует лапласово поле, так как

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}'_2) = 0,$$

$$\operatorname{div} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}'_2) = 0.$$

Согласно (119) и (124), эти векторы могут быть только постоянными, т. е.

$$\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}'_1 = \operatorname{const},$$

$$\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}'_2 = \operatorname{const}.$$

Итак, наше разложение действительно однозначно с точностью до произвольной постоянной.

Замечание по поводу однозначности в случае конечной области.

Можно показать, что непрерывное векторное поле в конечном объеме однозначно определяется дивергенцией и вихрем во внутренних точках и нормальной компонентой на границе области.

Действительно, пусть существует решение системы

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \Theta(\mathbf{r}),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \Omega(\mathbf{r})$$

при граничном условии

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}/s = f(\mathbf{r}),$$

где функции Θ, Ω определены для всех точек области, а f —для точек границы.

Функции Θ и f , естественно, должны быть подчинены условию, следующему из теоремы Гаусса — Остроградского:

$$\iiint_S \Theta \, d\tau = \iint_S f \, dS.$$

Такое решение единственно.

Действительно, пусть A' — второе решение той же системы. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') &= 0; \\ \operatorname{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') &= 0; \\ (\mathbf{A} - \mathbf{A}') \cdot \mathbf{n}/s &= 0. \end{aligned}$$

Вектор $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ образует лапласово поле, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{A}' &= \nabla\varphi, \\ \Delta\varphi &= 0, \end{aligned}$$

причем $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$ на границе поля. В силу свойств гармонических функций $\varphi = \text{const}$ всюду. Следовательно, $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$.

Для того чтобы разложение для бесконечной области, приведенной выше, было справедливо для конечной области, необходимо задать соответствующим образом граничные условия на поверхности S .

Пример. Электромагнитное поле. Уравнения Максвелла. Уравнения Максвелла, описывающие электромагнитные явления, играют в электродинамике такую же большую роль, как, например, уравнение Ньютона в механике. Величины, которые характеризуют электромагнитное поле, — это векторы напряженности электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , каждый из них является функцией точки и времени, т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Электромагнитное поле создается зарядами и точками, распределение которых характеризуется скалярной функцией плотности распределения зарядов $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ и векторной функцией плотности тока $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Рассмотрим электромагнитное поле в вакууме. Независимо от распределения плотности зарядов ρ и тока \mathbf{j} векторы напряженности электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} связаны соотношениями, интегральная форма которых имеет вид:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}, \quad (I)$$

$$\iint_{S_\tau} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0. \quad (II)$$

Множитель $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/сек равен величине скорости света в вакууме. Уравнение (I) утверждает, что изменение во времени потока магнитного поля $\iint_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS$ через поверхность S_L , опирающуюся на

контур L , равно циркуляции электрического поля

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L}$$

вдоль контура L . Этот интеграл в физике часто называют «электродвижущей силой». Первое уравнение выражает известный закон электромагнитной индукции Фарадея.

Уравнение (II) показывает, что поток магнитного поля через замкнутую поверхность S_L произвольной формы всегда равен нулю. Оба уравнения справедливы независимо от конкретного вида L и S_L .

Применяя формулу Стокса (28) к интегралу правой части уравнения (I), можно написать

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = - \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = - \iint_{S_L} \mathbf{n} \cdot \text{rot} \, \mathbf{E} \, dS,$$

или

$$\iint_{S_L} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \text{rot} \, \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n} \, dS = 0.$$

В силу произвольности S_L

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \text{rot} \, \mathbf{E}. \tag{I'}$$

Преобразуя интеграл по поверхности уравнения (II) в интеграл по объему по формуле Остроградского (20), найдем

$$\iint_{S_L} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\tau} \text{div} \, \mathbf{H} \, d\tau = 0,$$

откуда в силу произвольности объема τ

$$\text{div} \, \mathbf{H} = 0. \tag{II'}$$

Уравнения (I—II) и (I'—II') называются *однородной* парой уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Связь векторов напряжения \mathbf{E} и \mathbf{H} с плотностью распределения зарядов ρ и тока \mathbf{j} определяется *неоднородной* парой уравнений Максвелла, которые также следует рассматривать как опытный факт:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = c \oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} - 4\pi \iint_{S_L} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS, \tag{III}$$

$$\iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 4\pi \iiint_{\tau} \rho \, d\tau. \tag{IV}$$

Уравнение (III) утверждает, что изменение во времени потока электрического поля через поверхность S_L , опирающуюся на L , равно циркуляции магнитного поля вдоль контура L (умноженной на c)

минус поток плотности тока j (умноженный на 4π) через эту же поверхность S_L .

Уравнение IV показывает, что поток электрического поля через замкнутую поверхность S_τ , ограничивающую объем τ , равен заряду (умноженному на 4π), находящемуся внутри объема τ . Оба эти уравнения (III) и (IV) справедливы при произвольных L , S и τ .

Так же, как и при рассмотрении однородной пары уравнений, применяя формулу Стокса, для уравнения (III) можно написать

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = c \iint_{S_L} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{H} dS - 4\pi \iint_{S_L} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

и в силу произвольности S_L

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}. \quad (\text{III}')$$

Для уравнения (IV), применяя формулу Остроградского, получаем

$$\iint_{S_\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\tau} \text{div } \mathbf{E} d\tau = 4\pi \iiint_{\tau} \rho d\tau$$

и, так как объем τ произволен,

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho. \quad (\text{IV}')$$

Уравнения (III') и (IV') называют неоднородной парой уравнений Максвелла в дифференциальной форме; системы (I—IV) и (III'—IV') представляют собой систему уравнений Максвелла соответственно в интегральной и дифференциальной формах.

Эта система уравнений описывает электромагнитное поле в вакууме. Если учитывать влияние среды, то войдут дополнительно еще два вектора: вектор, определяющий поляризуемость единицы объема среды (вектор поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$), и вектор, характеризующий магнитные свойства среды, — вектор намагничивания $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Для различных классов сред зависимость этих векторов от \mathbf{E} и \mathbf{H} подробно изучается в курсах электродинамики и теоретической физики.

В литературе, наряду с векторами \mathbf{P} и \mathbf{M} , часто вводятся вектор смещения (электрической индукции) $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и вектор магнитной индукции $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. При этом уравнения Максвелла для среды приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E}, \quad (\text{I}'')$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (\text{II}'')$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = c \text{rot } \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}, \quad (\text{III}'')$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi \rho. \quad (\text{IV}'')$$

Приведенная система уравнений электромагнитного поля для среды не является замкнутой, так как в нее входят дополнительно два векторных поля $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ или $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$. Добавление конкретных уравнений, определяющих для данного класса сред зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ или $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ соответственно и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ от полей \mathbf{E}, \mathbf{H} , дополняет рассматриваемую систему и образует исходную систему уравнений для исследования данного класса сред. Так, например, выражение для плотности тока $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}_0$ (σ — электропроводность) дает дополнительное уравнение — это так называемый закон Ома. Аналогично для среды с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной μ устанавливаются зависимости $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ и $\mathbf{H} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}$, которые дополняют систему (I"–IV").

Скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля. Весьма важную роль в электродинамике играют вспомогательные функции — так называемые потенциалы: скалярный $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ и векторный $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Рассмотрим случай вакуума и введем потенциалы так, чтобы значения их удовлетворяли прежде всего однородной паре уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + c \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (\text{I}')$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (\text{II}')$$

Так как дивергенция от ротора произвольного вектора равна нулю, то второму уравнению можно удовлетворить, если принять

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (126)$$

Теперь, подставляя (126) в первое уравнение, получим

$$\text{rot} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{E} \right) = 0. \quad (127)$$

Так как ротор от градиента любой функции равен нулю, то уравнению (127) можно удовлетворить, положив

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi,$$

где φ — произвольная функция от r, t и, следовательно,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \quad (128)$$

Заметим, что замена \mathbf{A} на $\mathbf{A} + \nabla f$ и одновременно φ на $\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$ не изменяют векторов напряжения электромагнитного поля \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Действительно, $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot}(\mathbf{A} + \nabla f) = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot grad } f = \text{rot } \mathbf{A}$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\mathbf{A} + \nabla f)}{\partial t} - \nabla \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} - \nabla \varphi + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi. \end{aligned}$$

Подставляя (126) и (128) в неоднородную пару уравнений Максвелла (III) и (IV), получим уравнения, которым должны удовлетворять скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} - 4\pi \mathbf{j}, \quad (129)$$

$$\operatorname{div} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right) = -4\pi \rho. \quad (130)$$

Не ограничивая общности, можно воспользоваться отмеченной выше формулой преобразования для потенциала введением произвольной функции f и наложить на φ и \mathbf{A} дополнительное условие (условие Лоренца):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (131)$$

Действительно, поскольку вектор \mathbf{A} определен с точностью до градиента произвольной функции, то подчиняя его условию (131), можно написать

$$\operatorname{div} (\mathbf{A} + \nabla f) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (132)$$

и функция ∇f , бывшая до сих пор произвольной, определится из уравнения (132):

$$\Delta f = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (133)$$

Используя выражение (59)

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

и соотношение (131) и (133), получим из (129) и (130) уравнения для определения \mathbf{A} и φ , а следовательно, \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (134)$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho. \quad (135)$$

Если ввести оператор (деламбертиан)

$$\square \equiv \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (136)$$

то уравнения (134) и (135) примут вид:

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}; \quad (137)$$

$$\square \varphi = -4\pi \rho. \quad (138)$$

Это волновые уравнения для потенциалов; они подробно изучаются в курсах математической физики.

Энергия и вектор потока энергии электромагнитного поля. Рассмотрим сначала уравнения (I—IV) для вакуума. Умножим скалярно (I') на \mathbf{H} и (III') на \mathbf{E} и сложим полученные произведения:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = c\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot 4\pi \mathbf{j} - c\mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Замечая, что $\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$, перепишем это равенство в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\operatorname{div} \left[\frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

или, интегрируя:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d\tau = - \iiint_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{R} d\tau - \iiint_{\tau} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad (139)$$

где положено

$$\mathbf{R} \equiv \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \quad (140)$$

Используя теорему Остроградского, равенство (139) можно записать в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} d\tau = - \iint_{S_{\tau}} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\tau} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau. \quad (141)$$

Если $\mathbf{j}=0$ и $\mathbf{R}=0$, то величина, стоящая в левой части равенства (141), сохраняется: она играет роль энергии электромагнитного поля, плотность которой равна $\frac{E^2 + H^2}{8\pi}$. Вектор \mathbf{R} , определенный равенством (141), называется вектором потока электромагнитной энергии (или вектором Умова — Пойнтинга).

В общем случае равенство (141) устанавливает, что изменение электромагнитной энергии в некотором объеме равно потоку вектора Пойнтинга \mathbf{R} через поверхность S_{τ} , ограничивающую этот объем τ , и работе электромагнитного поля над током в этом объеме.

При $\mathbf{j} = \rho \mathbf{V}$ в выражении, стоящем под знаком последнего интеграла (141), величина $\rho \mathbf{E} d\tau$ представляет собой силу электромагнитного поля, действующую на заряд $\rho d\tau$; умножая ее скалярно на скорость \mathbf{V} , получим работу в единицу времени; она соответствует потерям на джоулево тепло.

Рассматривая уравнения (I"—IV") Максвелла в среде и соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{и} \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{H}, \quad (142)$$

можно получить аналогичным путем уравнение энергии электромагнитного поля для этих классов сред в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau} \frac{\epsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} d\tau = - \iint_{S_{\tau}} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} dS - \iiint_{\tau} \sigma E^2. \quad (143)$$

Выражение для плотности энергии имеет вид $\frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}$; для вакуума $\varepsilon=1, \mu=1$ и (143) совпадает с (141) Роль потока вектора энергии играет по-прежнему $\mathbf{R} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$; последний интеграл соответствует потерям на джоулево тепло: $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$ — количество тепла, выделяемое в единице объема среды в единицу времени.

5.13. Примеры моделирования объектов и процессов

Пример 1. Формулы Френе. Если на пространственной кривой выбрать начало отсчета и установить положительное направление отсчета дуг, то радиус-вектор любой точки на кривой будет вектор-функцией дуги s

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Пусть для каждой точки кривой можно определить однозначно три взаимноперпендикулярные оси естественного трехгранника: ось касательной (орт τ), ось главной нормали (орт \mathbf{n}) и ось бинормали (орт \mathbf{b}) (рис. 31).

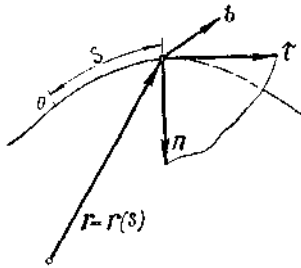


Рис. 31. Орты осей естественного трехгранника кривой.

Орт τ равен $\tau = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}$.

Это следует из того, что $\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right| = 1$, а по направлению τ

и $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ также совпадают, ибо $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ направлен по касательной к годографу $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$.

Орт \mathbf{n} перпендикулярен к τ , направлен в сторону вогнутости кривой и лежит в соприкасающейся плоскости

Соприкасающаяся плоскость — это предельное положение плоскости, проведенной через касательную в данной точке M параллельно касательной в соседней точке M' , когда M' приближается к M (рис. 32).

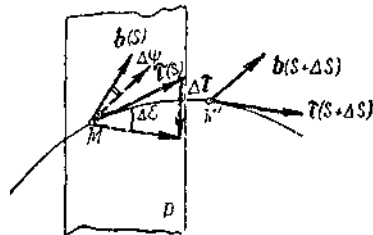


Рис. 32. Углы смежности касательных $\Delta\epsilon$ и биномалей $\Delta\psi$. Предельным положением плоскости P , когда $M \rightarrow M'$, является положение соприкасающейся плоскости.

Плоская кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

Угол между двумя смежными касательными $\Delta\epsilon$ называется углом смежности касательных.

Орт \mathbf{b} определяется векторным произведением

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}.$$

Поскольку в каждой точке кривой имеются свои значения ортов $\boldsymbol{\tau}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$, эти орты можно рассматривать как вектор-функции скалярного аргумента — дуги s .

Определим

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}, \frac{d\mathbf{n}}{ds}, \frac{d\mathbf{b}}{ds}.$$

$$1. \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \mathbf{n} \frac{1}{\rho}.$$

Докажем это. Имеем (рис. 32)

$$\left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\boldsymbol{\tau}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2|\boldsymbol{\tau}| \sin \frac{\Delta\epsilon}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\epsilon}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}.$$

Эта величина $\left| \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$ носит название кривизны кривой (ρ — радиус кривизны).

Вектор $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ лежит в плоскости P , предельное положение которой является соприкасающейся плоскостью. Поскольку $|\boldsymbol{\tau}| = \text{const}$, то

$\frac{d\tau}{ds} \perp \tau$ и направлено, как видно из рис. 32, в сторону вогнутости кривой. Значит,

$$\frac{d\tau}{ds}$$

направлено по орту n .

Первая формула Френе установлена.

Кривизна кривой $\frac{1}{\rho}$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}.$$

2. $\frac{db}{ds} = -\frac{1}{T} n.$

Имеем (рис. 32)

$$\left| \frac{db}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta b|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{2|b| \sin \frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{1}{T}.$$

Здесь $\Delta\psi$ — угол смежности бинормалей, а величина $\frac{1}{T}$ называется кручением кривой (T — радиус кручения). Кроме того,

$$\frac{db}{ds} = \frac{d}{ds} (\tau \times n) = \left(\frac{d\tau}{ds} \times n \right) + \left(\tau \times \frac{dn}{ds} \right) = \tau \times \frac{dn}{ds}.$$

Следовательно, вектор $\frac{db}{ds}$ должен быть перпендикулярен к τ и b (ибо $|b| = 1$) одновременно, т. е. направлен по оси вектора n .

Из параллельности векторов n и $\frac{db}{ds}$ следует, что соприкасающаяся плоскость кривой поворачивается около касательной к кривой при движении точки по кривой. Мы будем приписывать кручению знак плюс, если при возрастании s соприкасающаяся плоскость поворачивается в направлении от n к b , и минус, если вращение происходит от b к n . Тогда

$$\frac{db}{ds} = -\frac{1}{T} n.$$

Вторая формула Френе установлена.

3. $\frac{dn}{ds} = -\frac{\tau}{\rho} + \frac{b}{T}.$

Эта формула устанавливается простым вычислением:

$$\frac{dn}{ds} = \frac{d}{ds} (b \times \tau) = \frac{db}{ds} \times \tau + b \times \frac{d\tau}{ds} = -\frac{1}{T} (n \times \tau) + \frac{1}{\rho} (b \times n) = \frac{b}{T} - \frac{\tau}{\rho}.$$

Пример 2. Зная уравнение кривой $r = r(s)$, где s — дуга, найдем кручение кривой $\frac{1}{T}$.

Из второй формулы Френе (см. пример 1) имеем $\frac{1}{T} = -n \cdot \frac{db}{ds}$. Но $b = \tau \times n$. Поскольку $\tau = \frac{dr}{ds}$ и $n = \rho \frac{d^2r}{ds^2}$, то

$$b = \frac{\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2}}{\left| \frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} \right|} = \rho \left(\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} \right).$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} &= -\rho^2 \frac{d^2r}{ds^2} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{dr}{ds} \times \frac{d^2r}{ds^2} \right) = \\ &= \rho^2 \frac{dr}{ds} \cdot \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right). \end{aligned}$$

Пример 3. Найдем проекции ускорения точки на оси естественного трехгранника ее траектории.

Пусть уравнение движения точки имеет вид

$$r = r(t).$$

Оно является параметрическим уравнением траектории (параметр t — время).

Тогда скорость V и ускорение W точки равны:

$$V = \frac{dr}{dt}; \quad W = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dV}{dt}.$$

Если задано $r = r(t)$, то всегда можно определить закон движения точки по ее траектории, т. е. $s = s(t)$, где s — дуга траектории. Тогда можно рассматривать

$$r(t) = r[s(t)].$$

Отсюда получим

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds} \frac{ds}{dt} = \tau V_s,$$

где $V_s = \frac{ds}{dt}$ — скалярная скорость.

Используя первую формулу Френе, получим

$$W = \frac{V_s^2}{\rho} n + \frac{dV_s}{dt} \tau.$$

Итак, ускорение точки целиком лежит в соприкасающейся плоскости и имеет на оси естественного трехгранника проекции

$$W_\tau = \frac{dV_s}{dt}; \quad W_n = \frac{V_s^2}{\rho}; \quad W_b = 0.$$

Пример 4. *Круговые вектор-функции.* В плоскости (x_1, x_2) заданы две единичные вектор-функции $\mathbf{g}_1(\varphi)$ и $\mathbf{g}_2(\varphi)$ в виде ортов ($|\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_2| = 1$), составляющих углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ с осью x_1 (рис. 33)

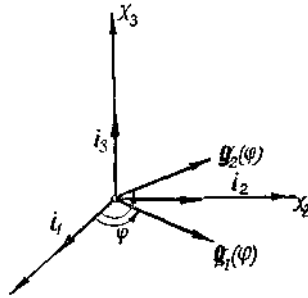


Рис. 33. Круговые вектор-функции.

Найдем их разложения по осям x_1 и x_2 и выразим $\frac{d\mathbf{g}_1}{d\varphi}$ и $\frac{d\mathbf{g}_2}{d\varphi}$ через g_1 и g_2 .

Из определения g_1 и g_2 имеем

$$\mathbf{g}_1(\varphi) = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi; \quad \mathbf{g}_2(\varphi) = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi.$$

Отсюда, дифференцируя по φ и учитывая, что \mathbf{i}_1 и \mathbf{i}_2 — постоянные, получим

$$\frac{d\mathbf{g}_1}{d\varphi} = \mathbf{g}_2; \quad \frac{d\mathbf{g}_2}{d\varphi} = -\mathbf{g}_1. \quad (*)$$

Пример 5. *Найдем проекции скорости и ускорения точки, движущейся в плоскости, на направление радиуса-вектора (радиальные составляющие) и на перпендикуляр к нему (трансверсальные составляющие), если уравнения движения точки имеют вид*

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t),$$

где $r = |\mathbf{r}|$, а φ — угол, который составляет радиус-вектор с осью x_1 .

Введем круговые вектор-функции $\mathbf{g}_1(\varphi)$ и $\mathbf{g}_2(\varphi)$ так, что $\mathbf{r} = r\mathbf{g}_1(\varphi)$. Тогда

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{g}_1(\varphi) + r \frac{d\mathbf{g}_1}{d\varphi} \dot{\varphi} = \dot{r}\mathbf{g}_1(\varphi) + r\dot{\varphi}\mathbf{g}_2(\varphi),$$

где

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}; \quad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= \ddot{r}\mathbf{g}_1 + \dot{r} \frac{d\mathbf{g}_1}{d\varphi} \dot{\varphi} + (r\ddot{\varphi} + \dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{g}_2 + r\dot{\varphi}^2 \frac{d\mathbf{g}_2}{d\varphi} = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{g}_1 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\mathbf{g}_2. \end{aligned}$$

Отсюда имеем искомые проекции:

$$V_r = \dot{r}; \quad W_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2;$$

$$V_\varphi = r\dot{\varphi}; \quad W_\varphi = 2r\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2\dot{\varphi}).$$

Пример 6. Найдем уравнение винтовой линии, которая представляет собой траекторию точки, одновременно участвующей в двух равномерных движениях: вдоль оси x_3 и во вращении вокруг этой оси. Найдем длину дуги винтовой линии.

Покажем, что орт касательной к винтовой линии образует постоянный угол с плоскостью (x_1, x_2) .

Введем круговую вектор-функцию $\mathbf{g}_1(\varphi)$, идущую по проекции на плоскость (x_1, x_2) радиуса-вектора \mathbf{r} переменной точки винтовой линии (рис. 34).

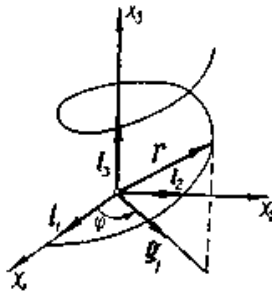


Рис. 34. Винтовая линия.

Тогда

$$\mathbf{r} = R\mathbf{g}_1(\varphi) + a(\varphi)\mathbf{l}_3,$$

где R — радиус окружности, в которую проектируется винтовая линия на плоскость (x_1, x_2) , а $a(\varphi)$ — проекция \mathbf{r} на ось x_3 .

По определению винтовой линии

$$\dot{\varphi} = \omega t; \quad a = Vt,$$

где V — скорость движения точки, описывающей винтовую линию, вдоль оси x_3 , а ω — угловая скорость вращения этой точки вокруг той же оси.

Тогда имеем

$$\mathbf{r}(\varphi) = R\mathbf{g}_1(\varphi) + \frac{V}{\omega} \varphi \mathbf{l}_3.$$

Это и есть уравнение винтовой линии. При $V = 0$ получим

$$\mathbf{r}(\varphi) = R\mathbf{g}_1(\varphi)$$

— уравнение окружности в плоскости (x_1, x_2) с центром в начале координат. Найдем длину дуги s винтовой линии, т. е. путь,

который пройдет по винтовой линии точка, повернувшись вокруг оси x_3 на угол φ . Получим

$$s = \int_0^{\varphi} \left| \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \right| d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{R^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2} d\varphi = \varphi \sqrt{R^2 + \left(\frac{V}{\omega}\right)^2}.$$

Орт касательной $\boldsymbol{\tau}$ к винтовой линии равен

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{R\mathbf{g}_2 + (V:\omega)\mathbf{i}_3}{\sqrt{R^2 + (V:\omega)^2}}.$$

Имеем

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i}_3 = \frac{V:\omega}{\sqrt{R^2 + (V:\omega)^2}},$$

т. е. орт $\boldsymbol{\tau}$ составляет с осью x_3 (и с плоскостью (x_1x_2)) постоянный угол.

Пример 7. Показать, что кривизна и кручение винтовой линии суть постоянные величины.

Ответ.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2 + (V:\omega)^2}; \quad \frac{1}{T} = \frac{V:\omega}{R^2 + (V:\omega)^2}.$$

Пример 8. Найдём градиент поля $\varphi = \varphi(r)$, где

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Используя (60), получим

$$\text{grad } \varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \text{grad } r = \varphi' \text{grad } r.$$

Но

$$\text{grad } r = \mathbf{i}_k \frac{\partial r}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{x_k}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Таким образом,

$$\text{grad } \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Если не обращаться к готовой формуле (60), то, непосредственно рассматривая $\varphi(r) = \varphi[r(x_k)]$ и используя выражение для $\text{grad } \varphi$ в декартовой системе координат, получим

$$\text{grad } \varphi(r) = \mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi[r(x_k)]}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \frac{\partial \varphi}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_k} = \mathbf{i}_k \varphi'(r) \frac{x_k}{r} = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Пример 9. Найдём дивергенцию поля $\mathbf{A} = r\varphi(r)$.

Заметив, что

$$\text{div } \mathbf{A} = \text{div } r\varphi = \varphi \text{div } r + r \cdot \text{grad } \varphi(r),$$

и использовав (60), получим

$$\text{div } \mathbf{A} = 3\varphi + r\varphi'.$$

Эту задачу можно решить, используя представление в декартовой системе координат:

$$\operatorname{div} [r\varphi(r)] = \frac{\partial}{\partial x_k} [x_k \varphi(r)] = 3\varphi + x_k \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_k} = 3\varphi + \frac{x_k x_k}{r} \varphi' = 3\varphi + \varphi' r.$$

Пример 10. Найдём вихрь поля $\mathbf{A} = r\varphi(r)$.

Так как

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} r\varphi(r) = \varphi(r) \operatorname{rot} r - r \times \operatorname{grad} \varphi(r) \quad \text{и} \quad \operatorname{rot} r = 0,$$

то по (60) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = -r \times \frac{r}{r} \varphi'(r) = 0.$$

Пример 11. Найдём $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$.

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{B}) + \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_c).$$

По формуле двойного векторного произведения имеем

$$\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

или

$$\mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{b}).$$

Положим

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_c; \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{c} = \nabla.$$

Тогда

$$\nabla(\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A}_c \cdot \Delta) \mathbf{B} + \mathbf{A}_c \times (\nabla \times \mathbf{B}).$$

Следовательно, и

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}_c) = \nabla(\mathbf{B}_c \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{B}_c \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B}_c \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Окончательно получим

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Пример 12. Найдём $\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$.

Имеем

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c).$$

Раскрывая двойные векторные произведения в таком виде, чтобы оператор ∇ действовал только на вектор, принимаемый переменным, получим

$$\nabla \times (\mathbf{A}_c \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}_c (\nabla \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A}_c \cdot \nabla) \mathbf{B};$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}_c) = (\mathbf{B}_c \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B}_c (\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Окончательно получим

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

Пример 13. Покажем, что если $r\psi$ гармоническая функция ($\Delta\psi = 0$), то вектор $r\psi$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta r\psi = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \Delta r\psi = \frac{\partial^4 (r\psi)}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i \partial x_i} = 0$$

(бигармонический вектор).

Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} (r\psi) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (i_k x_i \psi) = i_k \psi + r \frac{\partial \psi}{\partial x_k}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} (r\psi) &= i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k} = 2i_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + r \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_k \partial x_k}, \end{aligned}$$

или $\Delta (r\psi) = 2\nabla\psi + r\Delta\psi$.

Так как по условию $\Delta\psi = 0$, то

$$\Delta (r\psi) = 2\nabla\psi.$$

Вычисляя от этого выражения еще раз операцию $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}$ и

учитывая, что операции Δ и $\nabla \equiv i_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ переставимы, получим

$$\text{ибо } \Delta\psi = 0, \quad \Delta \Delta (r\psi) = 2\Delta\nabla\psi = 2\nabla\Delta\psi = 0,$$

Пример 14. Покажем, что лучи, проведенные из фокусов F_1 и F_2 эллипса в любую его точку M , образуют с касательной в этой точке одинаковые углы.

Прежде всего заметим, что градиент модуля вектора r_{AM} , проведенного из фиксированной точки $A(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ в любую переменную точку $M(x_1, x_2, x_3)$, равен единичному вектору, проведенному от A к M .

Это проверяется непосредственным вычислением:

$$\begin{aligned} \nabla r_{AM} &= \nabla \left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2} \right) = \\ &= \frac{(x_1 - x_1^0) i_1 + (x_2 - x_2^0) i_2 + (x_3 - x_3^0) i_3}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + (x_3 - x_3^0)^2}} = \frac{r_{AM}}{|r_{AM}|}. \end{aligned}$$

Теперь, заметив, что эллипс — геометрическое место точек, сумма расстояний которых до фокусов есть величина постоянная, имеем

$$r_{F_1M} + r_{F_2M} = \text{const.}$$

Так как $\text{grad}(r_{F_1M} + r_{F_2M})$ направлен по нормали к эллипсу, в точке M , то, взяв орт касательной в той же точке, получим

$$\nabla (r_{F_1M}) \cdot \tau_M = -\nabla (r_{F_2M}) \cdot \tau_M,$$

или

$$\frac{r_{F_1M} \cdot \tau_M}{|r_{F_1M}|} = -\frac{r_{F_2M} \cdot \tau_M}{|r_{F_2M}|}.$$

Отсюда и следует, что углы между r_{F_1M} и τ_M и r_{F_2M} и $-\tau_M$ одинаковы.

Если эллипс представляет отражающую поверхность, то луч света, выйдя из одного фокуса, отразившись, придет в другой его фокус.

Пример 15. Пусть S — любая замкнутая поверхность, а \mathbf{r} — радиус-вектор ее точки относительно некоторого начала O , не лежащего на S .

Вычислим поток вектора $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ через поверхность S

Здесь надо различать два случая.

1) Точка O находится вне S , так что всюду на S имеем $\mathbf{r} \neq 0$.

Применяя к области τ , ограниченной поверхностью S , теорему Остроградского, имеем

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_{\tau} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = 0,$$

$$\text{ибо } \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

2) Точка O находится внутри S .

Окружая точку O сферой ϵ достаточно малого радиуса r_ϵ и применяя теорему Остроградского к области τ' между S и поверхностью сферы S_ϵ , имеем

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS + \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = \iiint_{\tau'} \operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = 0,$$

$$\text{ибо в } \tau' \text{ также } r \neq 0.$$

Таким образом,

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = - \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS.$$

Но на поверхности сферы S_ϵ

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = -\mathbf{n}; \quad r = r_\epsilon = \text{const.}$$

Следовательно, получаем

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS = \iint_{S_\epsilon} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \frac{1}{r_\epsilon^2} dS = \frac{1}{r_\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} dS = \frac{1}{r_\epsilon^2} 4\pi r_\epsilon^2 = 4\pi.$$

Интеграл

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS$$

имеет простой геометрический смысл: он представляет собой телесный угол, под которым из точки O видна поверхность S .

Пример 16. Покажем, что поле ускорений жидкости $\frac{dV}{ds}$ имеет потенциал Φ , если поле скоростей потенциально.

($V = \nabla\phi$).

Найдем потенциал ускорений.

Поле ускорений

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V$$

можно записать в виде (форма И. С. Громеки)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \frac{V^2}{2} - V \times \text{rot } V,$$

если учесть формулу, полученную в задаче 11, которая при $A=B$ имеет вид

$$\nabla (v^2) = 2(v \cdot \nabla)v + 2v \times \text{rot } v.$$

Тогда, поскольку $v = \nabla \varphi$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi + \nabla \frac{v^2}{2} = \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} \right).$$

Отсюда следует, что поле $\frac{dv}{dt}$ имеет потенциал Φ , равный

$$\Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2}.$$

Пример 17. Выразим кинетическую энергию безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязном объеме

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \frac{V^2}{2} d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau$$

через интеграл по границе этого объема — поверхности S . Покажем, что если на границе S объема τ жидкость покоится, то единственно возможным безвихревым движением является покой.

Используя условия несжимаемости

$$\text{div } V = \text{div } \nabla \varphi = \Delta \varphi = 0$$

и формулу

$$\text{div } \varphi A = \nabla \varphi \cdot A + \varphi \text{div } A,$$

получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \text{div } (\varphi \nabla \varphi) d\tau - \\ &- \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \varphi \text{div } \nabla \varphi d\tau = \frac{\rho}{2} \iiint_{\tau} \text{div } (\varphi \nabla \varphi) d\tau. \end{aligned}$$

Преобразуя объемный интеграл в поверхностный по формуле Остроградского, найдем

$$T = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi (n \cdot \nabla \varphi) dS = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (*)$$

Если на поверхности S жидкость покоится, т. е. $V|_S = 0$, то

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = V \cdot n |_{S=0}.$$

Тогда из (*) получим $T=0$, т. е. жидкость в объеме τ находится в покое.

Пример 18. Уравнение равновесия жидкости имеет вид

$$\rho f = \nabla p, \quad (**)$$

где f — интенсивность массовых сил (в поле тяжести $f=g$).

Покажем, что равновесие жидкости может иметь место только в таком силовом поле, где силовые линии (векторные линии поля f) ортогональны к векторным линиям $\text{rot } f$.

Возьмем операцию rot от обеих частей (**):

$$\text{rot } \rho f = \nabla p \times f + \rho \text{rot } f = 0.$$

Умножая скалярно на f и сокращая на ρ , получим

$$f \cdot \text{rot } f = 0.$$

Таким образом, в каждой точке вектор f должен быть перпендикулярен к $\text{rot } f$. Так будет в плоском силовом поле (когда f располагаются в параллельных плоскостях). Очевидно, равновесие возможно и в потенциальном поле ($\text{rot } f=0$); при этом эквипотенциальные поверхности такого поля являются поверхностями одинаковой плотности (ибо $\nabla p \times f = 0$) к поверхностям одинакового давления (ибо $\nabla p \times f = 0$).

Пример 19. Поле скоростей движения вязкой жидкости между двумя параллельными бесконечными пластинками имеет вид

$$V = i_1 V_1 = i_1 \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (x_2^2 - hx_2) + \frac{u_1 - u_2}{h} x_2 + u_2 \right],$$

где ось x_1 направлена вдоль нижней пластинки; h — расстояние между пластинками, из которых верхняя имеет скорость u_1 , а

нижняя u_2 ; $\mu, \frac{dp}{dx_1}$ — постоянные вязкость и градиент давления.

Определим циркуляцию скорости по окружности радиуса R , центр которой находится посередине между пластинками.

Эту задачу можно решить двумя путями. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} \Gamma = \oint_{L_R} V_1 dx_1 &= \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} \oint_{L_R} (x_2^2 - hx_2) dx_1 + \\ &+ \frac{u_1 - u_2}{h} \oint_{L_R} x_2 dx_1 + u_2 \oint_{L_R} dx_1. \end{aligned}$$

Выражая x_1 и x_2 через полярный угол φ , получим

$$x_1 = R \cos \varphi; \quad x_2 = \frac{h}{2} + R \sin \varphi.$$

Тогда

$$\oint_{L_R} dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0;$$

$$\oint_{L_R} x_2 dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} + R \sin \varphi \right) \sin \varphi d\varphi = -\pi R^2;$$

$$\oint_{L_R} x_2^2 dx_1 = -R \int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{2} + R \sin \varphi \right)^2 \sin \varphi d\varphi = -R^2 h \pi.$$

Таким образом,

$$\Gamma = -\frac{u_1 - u_2}{h} \pi R^2.$$

Этот же результат можно получить проще, если воспользоваться теоремой Стокса и в качестве поверхности S взять круг, ограниченный заданной окружностью. Тогда

$$\begin{aligned} \Gamma &= \iint_S \operatorname{rot}_3 V dS = - \iint_S \frac{\partial V_1}{\partial x_2} dS = \\ &= - \iint_S \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (2x_2 - h) + \frac{u_1 - u_2}{h} \right] dS = \\ &= - \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx_1} (h + 2r \sin \varphi - h) + \frac{u_1 - u_2}{h} \right] r dr d\varphi = -\frac{u_1 - u_2}{h} \pi R^2. \end{aligned}$$

Пример 20. Вихревой линией называется векторная линия поля $\operatorname{rot} V$. Вихревой трубкой называется поверхность, образуемая вихревыми линиями, проходящими через некоторый замкнутый контур.

Показать, что поток вихря $\operatorname{rot} V$ через сечение вихревой трубки одинаков для всех сечений трубки (теорема Гельмгольца).

Указание. Используя условие соленоидальности поля $\operatorname{rot} V$, рассмотреть поток $\operatorname{rot} V$ через замкнутую поверхность, образованную двумя произвольными сечениями вихревой трубки и ее боковой поверхностью.

Пример 21. Интенсивностью вихревой трубки называется поток вихря через ее поперечное сечение.

Показать, что интенсивность вихревой трубки равна циркуляции вектора по замкнутому контуру, пересекающему все вихревые линии трубки, т. е. охватывающему трубку.

Указание. Применить теорему Стокса к контуру, охватывающему трубку, и к поверхности, ограниченной им (к сечению трубки).

Пример 22. Рассмотрим в движущейся жидкости, имеющей поле скоростей $V = V(r, t)$, векторные линии другого векторного поля $A = A(r, t)$. Это могут быть векторные линии поля ускорений, поля вихрей и др.

Найдем необходимое условие сохраняемости этих векторных линий, т. е. условие, при котором они будут все время состоять из одних и тех же частиц жидкости, не разрушаясь (теорема Фридмана).

Пусть MN — векторная линия — в момент времени t (рис. 35) остается векторной линией и в момент $t' = t + \Delta t$, деформируясь в $M'N'$.

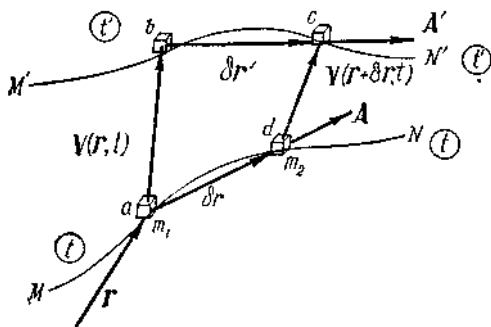


Рис. 35. Сохраняемость векторных линий поля

Говорят, что векторные линии поля A сохраняются, если частицы жидкости, составляющие векторную линию MN в момент времени t , расположатся в любой другой момент времени t' так, что будут образовывать вновь векторную линию $M'N'$ того же поля

Таким образом, для двух произвольных частиц m_1 и m_2 имеем: $\delta r \times A = 0$ в момент времени t ,

$\delta r' \times A' = 0$ в момент времени $t' = t + \Delta t$. Кроме того,

$$A' = A + \frac{dA}{dt} \Delta t.$$

Из векторного четырехугольника $abcd$ (рис. 35), отбрасывая бесконечно малые второго порядка и выше, получаем

$$\delta r' = \delta r + V(r + \delta r, t) \Delta t - V(r, t) \Delta t = \delta r + \frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k \Delta t = \delta r + (\delta r \cdot \nabla) V \Delta t.$$

Таким образом, если $M'N'$ — векторная линия, то

$$\left(\mathbf{A} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Delta t \right) \times [\delta \mathbf{r} + (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V} \Delta t] = 0.$$

Раскрывая векторное произведение, отбрасывая малые второго порядка и учитывая $\mathbf{A} \times \delta \mathbf{r} = 0$, получим

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \delta \mathbf{r} \right) + [\mathbf{A} \times (\delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{V}] = 0.$$

Учитывая, что $\delta \mathbf{r} \parallel \mathbf{A}$, найдем необходимое условие сохраняемости векторных линий для поля $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

$$\left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{V} \right] \times \mathbf{A} = 0.$$

Во второй теореме Фридмана устанавливается необходимое и достаточное условие сохраняемости векторных линий $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ и интенсивности векторных трубок. Оно имеет вид

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (*)$$

Пример 23. Теорема об изменении циркуляции по жидкому контуру.

Рассмотрим в движущейся жидкости частицы, которые в момент t образуют замкнутый контур L_t . Через время Δt этот контур займет положение $L_{t+\Delta t}$ (рис. 36).

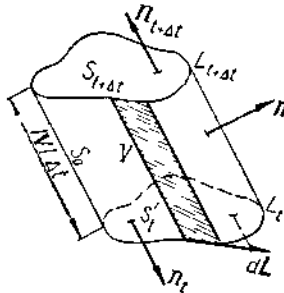


Рис. 36. К теореме об изменении циркуляции по жидкому контуру.

Пусть в движущейся жидкости определено векторное нестационарное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Таким полем может быть поле скоростей, ускорений и т. п. Тогда в каждый момент времени можно рассматривать циркуляцию этого поля по жидкому контуру, т. е. величину

$$\Gamma(t) = \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L}.$$

Рассмотрим полную производную по времени от этой величины, учитывая зависимость от времени как контура интегрирования, так и подынтегральной функции. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t + \Delta t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L_{t+\Delta t}} [\mathbf{A}(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] \cdot d\mathbf{L} + \oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \right. \\ &\quad \left. - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} \right\} = \oint_{L_t} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \right. \\ &\quad \left. - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} \right\}. \quad (*) \end{aligned}$$

Для вычисления предела в написанном выше выражении рассмотрим поток вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ через замкнутую поверхность, образованную «доньшками» $S_t, S_{t+\Delta t}$, натянутыми на контуры $L_t, L_{t+\Delta t}$, и боковой поверхностью S_0 , образуемой за время Δt отрезками траекторий частиц жидкости, образующих жидкий контур. Так как $\text{rot } \mathbf{A}$ — вектор соленоидальный, то из теоремы Остроградского имеем

$$\begin{aligned} \iint_{S_{t+\Delta t}} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS + \iint_{S_t} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS + \\ + \iint_{S_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS = 0. \end{aligned}$$

Применяя к первым двум интегралам формулу Стокса (см. 79) и учитывая, что на доньшке S_t внутренняя к поверхности нормаль составляет с направлением обхода контура правый винт, получим

$$\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} = - \iint_{S_0} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \, dS.$$

Замечая, что на боковой поверхности S_0 существует соотношение

$$\mathbf{n} \, dS = d\mathbf{L} \times \mathbf{V} \, \Delta t,$$

и учитывая известное свойство, окончательно найдем

$$\oint_{L_{t+\Delta t}} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} - \oint_{L_t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{L} = \Delta t \oint_{L_t} (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{L}.$$

Подставляя это выражение в (*), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{L_t} \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \right\} \cdot d\mathbf{L}. \quad (**)$$

Применим вновь формулу Стокса (см. 79):

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{S_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot} (\text{rot } \mathbf{A} \times \mathbf{V}) \right\} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$

Обозначая $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, расписывая ротор векторного произведения и учитывая выражение (59), получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \iint_{S_t} \left\{ \frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{V} \right\} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Отсюда, учитывая, что контур L_t (и поверхность S_t) произвольны, имеем: $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$, $\Gamma = \text{const}$ тогда и только тогда, если $\frac{d\mathbf{B}}{dt} - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

Вспомянув вторую теорему Фридмана (см. предыдущую задачу), получим формулировку теоремы:

Необходимым и достаточным условием сохранения циркуляции поля по любому жидкому контуру является условие сохранения вихревых линий и интенсивности вихревых трубок этого поля.

Как частный случай этой теоремы получаем теорему Томсона — Кельвина:

Производная по времени от циркуляции скорости по контуру равна циркуляции ускорения по тому же контуру.

Действительно, полагая в (***) $\mathbf{A} = \mathbf{V}$ и выражая $\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}$ из формулы (см. 59, 5)

$$\nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) = (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}),$$

получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{L_t} \left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} - \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \right\} \cdot d\mathbf{L} = \oint_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{L},$$

ибо $\oint_{L_t} \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right) \cdot d\mathbf{L} = 0$ как интеграл от однозначной функции по замкнутому контуру.

Пример 24. Пусть поле \mathbf{V} скорости несжимаемой жидкости занимает неограниченное пространство. Вследствие несжимаемости всюду $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Пусть в некоторой области этого поля — на линии L имеем $\operatorname{rot} \mathbf{V} \neq 0$, так что циркуляция по любому контуру, охватывающему L , равна Γ . Тогда линию L можно рассматривать как элементарную вихревую трубку, имеющую сечение dS .

Отыщем поле вне вихревой трубки (рис. 37).

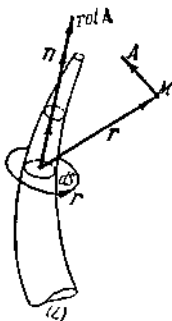


Рис. 37. Поле вихревой трубки.

Согласно основной теореме векторного анализа,

$$V = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_{\tau} \frac{\operatorname{rot} V}{r} d\tau$$

(ибо $\operatorname{div} V = 0$ всюду).

Если dr — элемент вихревой трубки, ориентированный по $\operatorname{rot} V$, то

$$\operatorname{rot} V d\tau = \operatorname{rot} V dS |dr| = dr (n \cdot \operatorname{rot} V) dS = dr \Gamma,$$

ибо интенсивность вихревой трубки $n \cdot \operatorname{rot} V dS$ равна заданной циркуляции Γ и постоянна вдоль трубки.

Тогда

$$V(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{rot} \int_L \frac{dr}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \operatorname{rot} \frac{dr}{r}.$$

Поскольку

$$\operatorname{rot} \frac{dr}{r} = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times dr + \frac{1}{r} \operatorname{rot} dr = \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \times dr = \frac{dr \times r}{r^3},$$

то искомое поле определяется формулой

$$V(M) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{dr \times r}{r^3},$$

где криволинейный интеграл берется вдоль заданной линии L .

Пример 25. Используя результат предыдущей задачи, найти поле прямолинейной вихревой нити и поле кольцевой (круговой) вихревой нити.

Пример 26. Определим потенциальное поле V ($\operatorname{rot} V = 0$), если $\operatorname{div} V = 0$ всюду, кроме начала координат. При этом считается заданным поток вектора V , равный Q через некоторую замкнутую поверхность,

охватывающую начало координат. Такое поле называется полем точечного источника (см. 5.4).

Так как $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$, то $\mathbf{A} = \nabla\varphi$.

В силу симметрии поля $\varphi = \varphi(r)$. Тогда

$$\mathbf{A} = \nabla\varphi(r) = \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Так как $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ всюду, кроме начала координат, то из теоремы Остроградского следует, что поток через любую замкнутую поверхность, охватывающую начало координат, равен заданной величине Q . Тогда, вычисляя поток \mathbf{V} через сферу радиуса r , получим

$$\begin{aligned} \iint_{S_L} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \iint \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint \frac{d\varphi}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \, dS = \frac{d\varphi}{dr} \times \\ &\times 4\pi r^2 = Q. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad \varphi = -\frac{Q}{4\pi r}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \frac{Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Пример 27. *Определим проекции скорости и ускорения точки на оси ортогональной системы криволинейных координат.*

Если заметить, что полное приращение радиуса-вектора точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ может быть записано в виде

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = H_1 \mathbf{e}_1 dq_1 + H_2 \mathbf{e}_2 dq_2 + H_3 \mathbf{e}_3 dq_3,$$

то выражение для скорости можно представить через производные криволинейных координат по времени:

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = H_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \mathbf{e}_3. \quad (*)$$

Отсюда, например, проекции скорости на оси цилиндрической системы координат равны:

$$V_r = H_1 \dot{R} = \dot{R}; \quad V_\varphi = H_2 \dot{\varphi} = R\dot{\varphi}; \quad V_{x_3} = H_3 \dot{x}_3 = \dot{x}_3$$

Для определения проекций W_k ускорения \mathbf{W} напишем

$$W_k = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{H_k} \frac{d\mathbf{r}}{dq_k}.$$

Отсюда (по k не суммируется!)

$$H_k W_k = \frac{dV}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{V} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - V \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right). \quad (**)$$

Дифференцируя (*) по q_k получим

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = H_k e_k = \frac{\partial r}{\partial q_k}.$$

Кроме того,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial r}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial r}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dq_k}.$$

Поэтому, заменяя в (***) $\frac{\partial r}{\partial q_k}$ на $\frac{\partial V}{\partial q_k}$ и $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_k} \right)$ на $\frac{\partial V}{\partial q_k}$, найдем

$$H_k W_k = \frac{d}{dt} \left(V \cdot \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) - V \cdot \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{V^2}{2} \right),$$

или

$$W_k = \frac{1}{H_k} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right),$$

$T = \frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} (H_1^2 \dot{q}_1^2 + H_2^2 \dot{q}_2^2 + H_3^2 \dot{q}_3^2)$ — кинетическая энергия единичной массы.

Пример 28. Покажем, что если r — расстояние от точки (x^1, x^2, x^3) до (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , то функция

$$f(x^1, x^2, x^3) = \frac{\rho \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t - \frac{r}{c} \right)}{r}$$

удовлетворяет уравнению $\square f = 0$, где в операторе \square берется дифференцирование по x^1, x^2, x^3 .

Вычислим Δf . Имеем

$$\nabla f = \frac{1}{r} \nabla \rho + \rho \nabla \frac{1}{r}.$$

Используя (60) и обозначая через ρ' производную по аргументу $t - \frac{r}{c}$, получим

$$\nabla f = \frac{1}{r} \left(-\frac{\rho'}{c} \nabla r \right) - \frac{\rho}{r^2} \nabla r = -\left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \nabla r = -\left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \frac{r}{r}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} \nabla f = -\operatorname{div} r \left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) = -\left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) \operatorname{div} r - r \nabla \left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) = \\ &= -3 \left(\frac{\rho'}{cr} + \frac{\rho}{r^2} \right) - r \frac{r}{r} \left(-\frac{\rho'}{c^2 r^2} - \frac{2\rho'}{cr^3} - \frac{\rho'}{cr^3} - \frac{3\rho}{r^4} \right) = \frac{\rho}{c^2 r}. \end{aligned}$$

Но

$$\rho'' = \frac{\partial^2 \rho}{\partial \left(t - \frac{r}{c} \right)^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Отсюда $\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, или $\square f = 0$

Можно показать, рассуждая аналогично тому, как и при решении уравнения Пуассона $\Delta f = \rho$, что решение уравнения $\square f = -4\pi\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ в неограниченном пространстве при конечном распределении может быть представлено в виде $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

где $r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}$ и интеграл распространен на всю область определения ρ .

Таким образом, решения уравнений (137) и (138) могут быть записаны в виде

$$A(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{c} \iiint \frac{J(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3; \quad (144)$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \iiint \frac{\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t - \frac{r}{c})}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (145)$$

Эти решения показывают, что заряд и ток в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) влияют на потенциалы в точке (x_1, x_2, x_3) с запаздыванием на время $\frac{r}{c}$. Действие потенциала запаздывает на время, за которое

сигнал, распространяющийся со скоростью c , пройдет расстояние r между точками. Эти решения называются решениями в виде *запаздывающих потенциалов*.

Пример 29. Покажем, что при отсутствии свободных зарядов ($\rho = 0$) в диэлектрике ($j = 0$) скорость распространения электромагнитных волн равна $\frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ (μ, ϵ — постоянные).

Используя уравнения Максвелла (I" — IV") при $j = 0$ и $\rho = 0$, получим, взяв, например, rot от третьего из них:

$$\text{rot rot } H = \frac{\epsilon}{c} \text{rot } \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } E.$$

Учитывая первое и второе уравнения, получим

$$\Delta H = \frac{\mu\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (146)$$

Аналогично можно найти

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (147)$$

Из этих волновых уравнений следует, что если в какой-то момент времени t_0 будут заданы функции $\mathbf{E}|_{t=t_0} = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}|_{t=t_0} = \mathbf{H}_0(\mathbf{r})$, то во все последующие моменты времени будет наблюдаться волновой процесс, причем скорость распространения волн равна

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Пример 30. Покажем, что функция

$$H = H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (H_0 = \text{const}) \quad (148)$$

удовлетворяет уравнению (146) при $|\mathbf{k}| = \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{c}$.

Вычисления дают

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = (\omega)^2 H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\omega^2 H,$$

$$\Delta H = H_0 \Delta e^{i(\omega t - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k})} = H_0 e^{i\omega t} \Delta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Учитывая выражения для скалярного произведения $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_m x^m$ и градиента $\nabla = e_n \frac{\partial}{\partial x^n}$, находим

$$\nabla e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \Delta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e_n \frac{\partial}{\partial x^n} e^{-i k_m x^m} = -i e_n k_n e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = -i \mathbf{k} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}.$$

Теперь

$$\Delta e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \nabla \cdot \nabla e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = (i\mathbf{k} \cdot i\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})},$$

$$\Delta H = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) H_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) H.$$

Следовательно, подставляя $\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$ и ΔH в уравнение (146), получим

$$\Delta H - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \left(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2 \right) H = 0.$$

Отсюда имеем

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu \varepsilon}.$$

Вектор \mathbf{k} называется волновым вектором. Величину его можно выразить через длину волны λ — расстояние по направлению \mathbf{k} , определяющее точки, где H в любой фиксированный момент времени принимает одинаковые значения. Действительно, длина волны λ определяется из равенства

$$e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = e^{i \left[\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{r} + \lambda \frac{\mathbf{k}}{k} \right) \right]} = e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i \lambda k}.$$

Отсюда $\lambda k = 2\pi$ и $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.

Рассмотренное решение носит название *плоских монохроматических волн*. В них все величины являются простыми гармоническими функциями времени, и поэтому любую волну можно представить в виде совокупности монохроматических волн с различными частотами ω и векторами \mathbf{k} . Это представление является не чем иным, как представлением в виде ряда или интеграла Фурье.

Волна называется плоской, ибо ее фронт (поверхность постоянной фазы) является плоскостью из семейства $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$. Эти плоскости перпендикулярны к волновому вектору \mathbf{k} , так что плоская волна всегда распространяется в направлении, определяемом волновым вектором \mathbf{k} .

Пример 31. *Найдем закон распространения плоских монохроматических волн в проводнике с конечной проводимостью.*

Внутри проводников нет свободных зарядов ($\rho = 0$), а плотность тока на основании закона Ома пропорциональна напряженности поля \mathbf{E} , т. е. $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, где σ — удельная проводимость проводника.

Учитывая эти замечания, из системы (I"–IV") получим (ε, μ — постоянные):

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}, & (1) & \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, & (3) \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & (2) & \quad \text{div } \mathbf{H} = 0, & (4) \end{aligned} \right\} (149)$$

Взяв rot от первого уравнения, найдем

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma}{c} \text{rot } \mathbf{E}.$$

Учитывая второе и третье уравнения (149), получим

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{H} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Аналогично

$$\frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Ищем решение, например, уравнения для \mathbf{E} в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (150)$$

Подставляя это выражение в уравнение, получим для волнового вектора уравнение

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2} i\omega + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 = 0. \quad (151)$$

Отсюда ясно, что величина $|k|$ должна быть комплексной, поэтому вектор k будем искать в виде

$$k = k_1 + i k_2.$$

Подставляя это выражение в (151), получим

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2, \quad k_1 k_2 = -\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2 \cos \theta},$$

где $\cos \theta = \cos(k_1, k_2)$, так что $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ (ибо $k_1 k_2 > 0$).

Определяя отсюда величины k_1 и k_2 , найдем

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon \omega \cos \theta} \right)^2} + 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon \omega \cos \theta} \right)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}},$$

Используя выражение для k , решение для E и H можно записать в виде

$$E = E_0 e^{(k_2 \cdot r)} e^{i(\omega t - k_1 \cdot r)},$$

$$H = H_0 e^{(k_2 \cdot r)} e^{i(\omega t - k_1 \cdot r)}.$$

Так как вектор k_1 направлен в сторону распространения волн и $\cos(k_1, k_2) < 0$, то поскольку $k_1 \cdot r > 0$, имеем $k_2 \cdot r < 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае конечной проводимости проводника плоские монохроматические волны представляют собой *волны затухающие*.

6. Комплексные числа

6.1. Система комплексных чисел

Комплексные числа вводятся в связи со следующей задачей.

Известно, что действительных чисел недостаточно для того, чтобы решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами. Простейшее из квадратных уравнений, не имеющих корней среди действительных чисел, есть

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

только это уравнение будет нас сейчас интересовать. Задача, стоящая перед нами, такова: *нужно расширить систему действительных чисел до такой системы чисел, в которой уравнение (1) уже обладало бы корнем.*

В качестве материала, из которого будет строиться эта новая система чисел, мы возьмем точки плоскости. Напомним, что изображение действительных чисел точками прямой линии (основанное на том, что мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек прямой и множеством всех действительных чисел, если при заданном начале координат и единице масштаба всякой точке прямой поставим в соответствие ее абсциссу) систематически используется во всех отделах математики и является столь привычным, что обычно мы не делаем различия между действительным числом и точкой, его изображающей.

Таким образом, *мы хотим определить систему чисел, изображающихся всеми точками плоскости*. До сих пор нам не приходилось складывать или перемножать точки плоскости, поэтому определение операций над точками мы имеем право выбирать, заботясь лишь о том, чтобы новая система чисел обладала всеми теми свойствами, ради которых она создается.

Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат. Условимся обозначать точки плоскости буквами $\alpha, \beta, \lambda, \dots$ и записывать точку α с абсциссой a и ординатой b через (a, b) , т. е., несколько отступая от того, что принято в аналитической геометрии, писать $\alpha=(a, b)$. Если даны точки $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$, то суммой этих точек мы будем называть точку с абсциссой $a + c$ и ординатой $b + d$, т. е.

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (2)$$

произведением точек $\alpha=(a, b)$ и $\beta=(c, d)$ мы будем называть точку с абсциссой $ac - bd$ и ординатой $ad + bc$, т. е.

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (3)$$

Этим путем мы определили в множестве всех точек плоскости две алгебраические операции. Покажем, что *эти операции обладают всеми основными свойствами, какими обладают операции в системе действительных чисел или в системе рациональных чисел: они обе коммутативны и ассоциативны, связаны законом дистрибутивности и для них существуют обратные операции — вычитание и деление (кроме деления на нуль)*.

Коммутативность и ассоциативность сложения очевидны (точнее, вытекают из соответствующих свойств сложения действительных чисел), так как при сложении точек плоскости мы отдельно складываем их абсциссы и отдельно ординаты. Коммутативность умножения основана на том, что в определение произведения точки α и β входят симметричным образом. Ассоциативность умножения доказывают следующие равенства:

$$\begin{aligned} [(a, b) (c, d)] (e, f) &= (ac - bd, ad + bc) (e, f) = \\ &= (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce), \\ (a, b) [(c, d) (e, f)] &= (a, b) (ce - df, cf + de) = \\ &= (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf). \end{aligned}$$

Закон дистрибутивности вытекает из равенств

$$\begin{aligned} [(a, b) + (c, d)] (e, f) &= (a + c, b + d) (e, f) = \\ &= (ae + ce - bf - df, af + cf + be + de), \\ (a, b) (e, f) + (c, d) (e, f) &= (ae - bf, af + be) + (ce - df, cf + de) = \\ &= (ae - bf + ce - df, af + be + cf + de). \end{aligned}$$

Рассмотрим вопрос об обратных операциях. Если даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, то их разностью будет такая точка (x, y) , что

$$(c, d) + (x, y) = (a, b).$$

Отсюда следует, ввиду (2)

$$c + x = a, \quad d + y = b.$$

Таким образом, *разностью* точек $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$ служит точка

$$\alpha - \beta = (a - c, b - d) \tag{4}$$

и эта разность однозначно определена. В частности, *нулем* будет служить начало координат $(0, 0)$, а точкой, *противоположной* для точки $\alpha = (a, b)$, будет точка

$$-\alpha = (-a, -b). \tag{5}$$

Пусть, далее, даны точки $\alpha = (a, b)$ и $\beta = (c, d)$, причем точка β отлична от нуля, т. е. хотя бы одна из координат c, d не есть нуль и поэтому $c^2 + d^2 \neq 0$. Частным от деления α и β должна быть такая точка (x, y) , что $(c, d) (x, y) = (a, b)$. Отсюда, ввиду (3),

$$\begin{aligned} cx - dy &= a, \\ dx + cy &= b. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, мы получим:

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Таким, при $\beta \neq 0$ *частное* α/β существует и однозначно определено:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right). \tag{6}$$

Полагая здесь $\beta = \alpha$, мы получим, что *единицей* при нашем умножении точек служит точка $(1, 0)$, лежащая на оси абсцисс на расстоянии 1

вправо от начала координат. Полагая, далее, в (6), что $\alpha=1=(1, 0)$, мы получим, что при $\rho \neq 0$ точкой, *обратной* для β , будет:

$$\beta^{-1} = \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right). \quad (7)$$

Таким образом, мы построили систему чисел, изображаемых точками плоскости, причем операции над этими числами определяются по формулам (2) и (3). Эта система чисел называется *системой комплексных чисел*.

Покажем, что *система комплексных чисел является расширением системы действительных чисел*. Для этой цели рассмотрим точки, лежащие на оси абсцисс, т. е. точки вида $(a, 0)$; ставя в соответствие точке $(a, 0)$ действительное число a , мы получаем, очевидно, взаимно однозначное соответствие между рассматриваемым множеством точек и множеством всех действительных чисел. Применение к этим точкам формул (2) и (3) дает равенства

$$\begin{aligned} (a, 0) + (b, 0) &= (a + b, 0), \\ (a, 0) \cdot (b, 0) &= (ab, 0), \end{aligned}$$

т.е. точки $(a,0)$ складываются и перемножаются друг с другом так же, как соответствующие действительные числа. Таким образом, *множество точек, лежащих на оси абсцисс, рассматриваемое как часть системы комплексных чисел, по своим алгебраическим свойствам ничем не отличается от системы действительных чисел, обычным способом изображенной точками прямой линии*. Это позволяет нам не различать в будущем точку $(a, 0)$ и действительное число a , т. е. всегда полагать $(a, 0) = a$. В частности, нуль $(0, 0)$ и единица $(1, 0)$ системы комплексных чисел оказываются обычными действительными числами 0 и 1.

Нам нужно теперь показать, что *среди комплексных чисел содержится корень уравнения (1)*, т. е. такое число, квадрат которого равен действительному числу (-1) . Это будет, например, точка $(0, 1)$, т. е. точка, лежащая на оси ординат на расстоянии 1 вверх от начала координат. Действительно, применяя (3), получаем:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Условимся обозначать эту точку буквой i , так что $i^2 = -1$.

Покажем, что *для построенных комплексных чисел может быть получена их обычная запись*. Для этого найдем сначала произведение действительного числа b на точку i :

$$bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b);$$

это будет, следовательно, точка, лежащая на оси ординат и имеющая ординату b , причем все точки оси ординат представлены в виде таких

произведений. Если теперь (a, b) — произвольная точка, то ввиду равенства

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

получаем:

$$(a, b) = a + bi$$

т. е. мы действительно приходим к обычной записи комплексных чисел; произведение и сумму в выражении $a + bi$ следует понимать, конечно, в смысле операций, определенных в построенной нами системе комплексных чисел.

Теперь, когда комплексные числа уже построены, можно без труда проверить, что все содержание и теории определителей, и теории систем линейных уравнений, и теории линейной зависимости векторов, и теории операций над матрицами — *без всяких ограничений переносится на тот случай, когда к рассмотрению допускаются любые комплексные числа, а не только числа действительные.*

В соответствии со сложившимися традициями мы будем называть комплексное число i *мнимой единицей*, а числа вида bi — *чисто мнимыми числами*, хотя существование этих чисел не вызывает у нас сомнений и мы можем указать те точки плоскости — точки оси ординат, — которыми эти числа изображаются. В записи комплексного числа α в виде $\alpha = a + bi$ число a называется *действительной частью* числа α , а bi — его *мнимой частью*. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами по способу, изложенному выше, будет называться *комплексной плоскостью*. Ось абсцисс этой плоскости называется *действительной осью*, так как ее точки изображают действительные числа; соответственно ось ординат комплексной плоскости называется *мнимой осью*.

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде $a + bi$, производятся следующим образом, как вытекает из формул (2), (3), (4) и (6):

$$\begin{aligned} (a + bi) + (c + di) &= (a + c) + (b + d)i; \\ (a + bi) - (c + di) &= (a - c) + (b - d)i; \\ (a + bi)(c + di) &= (ac - bd) + (ad + bc)i; \\ \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i. \end{aligned}$$

Мы можем сказать, что *при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части*; аналогичное правило имеет место и для вычитания. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно вывести, умножая числитель и

знаменатель заданной дроби на число, отличающееся от знаменателя лишь знаком при мнимой части. Действительно,

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

Примеры.

- 1) $(2+5i) + (1-7i) = (2+1) + (5-7)i = 3-2i;$
- 2) $(3-9i) - (7+i) = (3-7) + (-9-1)i = -4-10i;$
- 3) $(1+2i)(3-i) = [1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)] + [1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3]i = 5+5i;$
- 4) $\frac{23+i}{3+i} = \frac{(23+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{70-20i}{10} = 7-2i.$

Изображение комплексных чисел точками плоскости приводит к естественному желанию иметь геометрическое истолкование операций, определенных для комплексных чисел. Для сложения такое истолкование может быть получено без затруднений. Пусть даны числа $\alpha = a+bi$ и $\beta = c+di$.

Соединяем соответствующие им точки (a, b) и (c, d) отрезками с началом координат и строим на этих отрезках, как на сторонах, параллелограмм (рис. 1).

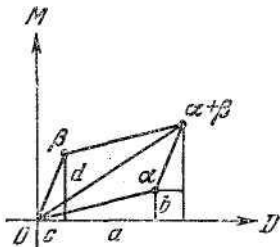


Рис. 1

Четвертой вершиной этого параллелограмма будет, очевидно, точка $a+c, b+d$. Таким образом, сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу параллелограмма, т. е. по правилу сложения векторов, выходящих из начала координат.

Далее, число, противоположное числу $\alpha = a+bi$, будет точкой комплексной плоскости, симметричной с точкой α относительно начала координат (рис. 2).

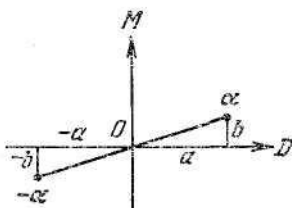


Рис. 2

Отсюда без труда может быть получено геометрическое истолкование вычитания.

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным лишь после того, как мы введем для комплексных чисел новую запись, отличную от употреблявшейся нами до сих пор. Запись числа α в виде $\alpha = a + bi$ использует декартовы координаты точки, соответствующей этому числу. Положение точки на плоскости вполне определяется, однако, также заданием ее полярных координат: расстояния r от начала координат до точки и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку (рис. 3).

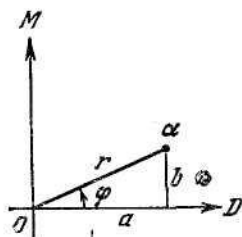


Рис. 3.

Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для α , лежащего на действительной оси, т. е. являющегося действительным числом, число r абсолютной величиной α , поэтому и для любого комплексного числа α его иногда называют *абсолютной величиной* числа α ; чаще, впрочем, число r называют *модулем* числа α . Обозначается оно через $|\alpha|$.

Угол φ будет называться *аргументом* числа α и обозначаться $\arg \alpha$. Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные, причем положительные углы должны отсчитываться против часовой стрелки, однако, если углы

отличаются друг от друга на 2π или число, кратное 2π , то соответствующие им точки плоскости совпадают.

Таким образом аргумент комплексного числа α имеет бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на целые кратные числа 2π ; из равенства двух комплексных чисел, заданных их модулями и аргументами, можно лишь заключить, следовательно, что аргументы отличаются на целое кратное числа 2π , в то время как модули равны. Аргумент не определен лишь для числа 0; это число вполне определяется, однако, равенством $|0|=0$.

Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. В самом деле, аргумент положительного действительного числа равен 0, аргумент отрицательного действительного числа равен π ; на действительной оси из начала координат выходит лишь два направления и их можно различать двумя символами + и —, тогда как на комплексной плоскости направлений, выходящих из точки 0, бесконечно много и различаются они уже углом, составляемым ими с положительным направлением действительной оси.

Между декартовыми и полярными координатами точки существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi. \quad (8)$$

Отсюда

$$r = +\sqrt{a^2 + b^2}. \quad (9)$$

Применим формулы (8) к произвольному комплексному числу $\alpha = a + bi$:

$$\alpha = a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi) i,$$

или

$$\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (10)$$

Обратно, пусть число

$$\alpha = a + bi;$$

допускает запись вида

$$\alpha = r_0 (\cos \varphi_0 + i \sin \varphi_0),$$

где r_0 и φ_0 — некоторые действительные числа, причем $r_0 \geq 0$. Тогда $r_0 \cos \varphi_0 = a$, $r_0 \sin \varphi_0 = b$, откуда $r_0 = +\sqrt{a^2 + b^2}$, т.е., в виду (9), $r_0 = |\alpha|$. Отсюда, используя (8), получаем $\cos \varphi_0 = \cos \varphi$, $\sin \varphi_0 = \sin \varphi$, т.е. $\varphi_0 = \arg \alpha$.

Таким образом, всякое комплексное число α однозначным образом записывается в виде (10), где $r = |\alpha|$, $\varphi = \arg \alpha$ (причем аргумент φ

определен, конечно, лишь с точностью до слагаемых, кратных 2π). Эта запись числа α называется его *тригонометрической формой* и будет дальше весьма часто использоваться.

Числа

$$\alpha = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad \beta = \cos \frac{19}{3} \pi + i \sin \frac{19}{3} \pi$$

и

$$\gamma = \sqrt[3]{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{7} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{7} \right) \right]$$

заданы в тригонометрической форме, здесь $|\alpha| = 3$, $|\beta| = 1$, $|\gamma| = \sqrt[3]{3}$; $\arg \alpha = \pi/4$, $\arg \beta = (19/3)\pi$, $\arg \gamma = -\pi/7$, (или $\arg \beta = \pi/3$, $\arg \gamma = (13/7)\pi$)

С другой стороны, комплексные числа

$$\alpha' = (-2) \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right), \quad \beta' = 3 \left(\cos \frac{2}{3} \pi - i \sin \frac{2}{3} \pi \right),$$

$$\gamma' = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{3}{4} \pi \right), \quad \delta' = \sin \frac{3}{4} \pi + i \cos \frac{3}{4} \pi.$$

даны не в тригонометрической форме, хотя их записи напоминают запись (10). В тригонометрической форме эти числа записываются так:

$$\alpha' = 2 \left(\cos \frac{6}{5} \pi + i \sin \frac{6}{5} \pi \right), \quad \beta' = 3 \left(\cos \frac{4}{3} \pi + i \sin \frac{4}{3} \pi \right),$$

$$\delta' = \cos \frac{7}{4} \pi + i \sin \frac{7}{4} \pi.$$

Разыскание тригонометрической формы числа γ' наталкивается на трудность, почти всегда встречающуюся при переходе от обычной записи комплексного числа к тригонометрической и обратно: невозможно, кроме немногих случаев, по заданным числовым значениям синуса и косинуса найти точно угол, а для заданного угла написать точные значения его синуса и косинуса.

Пусть комплексные числа α и β заданы в тригонометрической форме

$$\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \beta = r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi').$$

Перемножим эти числа:

$$\alpha\beta = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)] \cdot [r' (\cos \varphi' + i \sin \varphi')] =$$

$$= rr' (\cos \varphi \cos \varphi' + i \cos \varphi \sin \varphi' + i \sin \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi'),$$

или

$$\alpha\beta = rr' [\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')]. \tag{11}$$

Мы получили запись произведения $\alpha\beta$ в тригонометрической форме, и поэтому $|\alpha\beta| = rr'$, или

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta| \quad (12)$$

т. е. модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей.

Далее, $\arg(\alpha\beta)=\varphi+\varphi'$ или

$$\arg(\alpha\beta)=\arg\alpha+\arg\beta \quad (13)$$

т. е. аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей. Эти правила распространяются, очевидно, на любое конечное число множителей. В применении к случаю действительных чисел формула (12) дает известное свойство абсолютных величин этих чисел, а (13) превращается, как легко проверить, в правило знаков при умножении действительных чисел.

Аналогичные правила имеют место и для частного. Действительно, пусть

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi').$$

причем $\beta \neq 0$, т.е. $r' \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' - i\sin\varphi')}{r'(\cos^2\varphi' + \sin^2\varphi')} = \\ &= \frac{r}{r'}(\cos\varphi\cos\varphi' + i\sin\varphi\cos\varphi' - i\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'), \end{aligned}$$

или

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r}{r'}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')]. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{r}{r'}$

или

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad (15)$$

т. е. модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленному на модуль делителя; далее, $\arg(\alpha/\beta) = \varphi - \varphi'$, или

$$\arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \arg\alpha - \arg\beta, \quad (16)$$

т. е. аргумент частного двух комплексных чисел получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.

Геометрический смысл умножения и деления выясняется теперь без затруднений. Действительно, ввиду формул (12) и (13), мы получим точку, изображающую произведение числа α на число $\beta = r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi')$, если вектор, идущий от 0 к α (рис. 4), повернем против часовой стрелки на угол $\varphi' = \arg\beta$, а затем

растянем этот вектор в $r' = |\beta|$ раз (при $0 \leq r' < 1$ это будет сжатием, а не растяжением).

Далее, из (14) следует, что при

$$\alpha = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \neq 0$$

будет

$$\alpha^{-1} = r^{-1} [\cos (-\varphi) + i \sin (-\varphi)], \quad (17)$$

т.е.

$$|\alpha^{-1}| = |\alpha|^{-1}, \quad \arg(\alpha^{-1}) = -\arg \alpha.$$

Таким образом, мы получим точку α^{-1} , если от точки α перейдем к точке α' , лежащей на расстоянии r^{-1} от нуля на той же полупрямой, выходящей из нуля (рис. 4) что и точка α (рис. 5), а затем перейдем к точке, симметричной с α' относительно действительной оси.

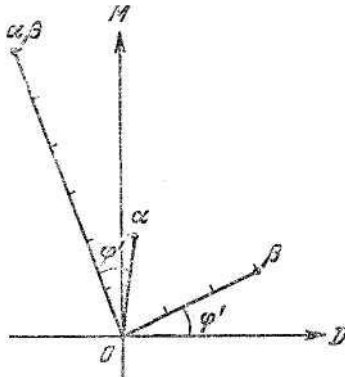


Рис. 4.

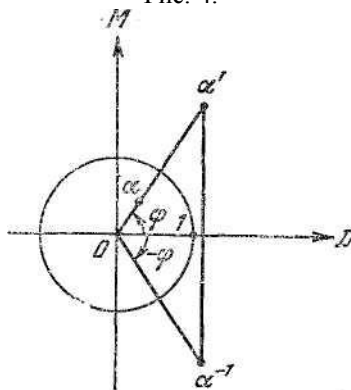


Рис. 5.

(Тогда и только тогда $|\alpha'|=|\alpha|$, если $|\alpha| = 1$, т. е. если точка α лежит на окружности *единичного круга*. Если α лежит внутри единичного круга, то α' будет вне его, и наоборот, причем этим путем мы получаем взаимно однозначное соответствие между всеми точками комплексной плоскости, лежащими вне единичного круга, и всеми точками, лежащими внутри этого круга и ОТЛИЧНЫМИ ОТ нуля.)

Сумму и разность комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, нельзя выразить формулами, подобными формулам (11) и (14). Для модуля суммы имеют место, однако, следующие важные неравенства:

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (18)$$

т. е. *модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых, но больше или равен разности этих модулей*. Неравенства (18) вытекают из известной теоремы элементарной геометрии о сторонах треугольника ввиду того, что $|\alpha + \beta|$ равен, как мы знаем, диагонали параллелограмма со сторонами $|\alpha|$ и $|\beta|$. Специального рассмотрения, требует случай, когда точки α , β и 0 лежат на одной прямой; лишь в этом случае в формулах (18) могут достигаться равенства.

Из (18), ввиду

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad \text{и} \\ |-\beta| = |\beta| \quad (19)$$

(это равенство следует из геометрического толкования числа $-\beta$), вытекают также неравенства

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (20)$$

т. е. для модуля разности имеют место такие же неравенства, как и для модуля суммы.

Неравенства (18) можно было бы получить также следующим путем. Пусть $\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $\beta = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$ и пусть тригонометрическая форма числа $\alpha + \beta$ есть $\alpha + \beta = R(\cos \psi + i \sin \psi)$. Складывая отдельно действительные и отдельно мнимые части, получаем:

$$r \cos \varphi + r' \cos \varphi' = R \cos \psi, \\ r \sin \varphi + r' \sin \varphi' = R \sin \psi;$$

умножая обе части первого равенства на $\cos \psi$, обе части второго — на $\sin \psi$ и складывая, получаем:

$r(\cos \varphi \cos \psi + i \sin \varphi \sin \psi) + r'(\cos \varphi' \cos \psi + i \sin \varphi' \sin \psi) = R(\cos^2 \psi + i \sin^2 \psi)$.
т.е.

$$r \cos(\varphi - \psi) + r' \cos(\varphi' - \psi) = R.$$

Отсюда, так как косинус никогда не бывает больше единицы, следует неравенство $r+r \geq R$, т. е. $|\alpha| + |\beta| \geq |\alpha + \beta|$. С другой стороны, $\alpha = (\alpha + \beta) - \beta = (\alpha + \beta) + (-\beta)$. Отсюда, по доказанному и в силу (19),

$$|\alpha| \leq |\alpha + \beta| + |-\beta| = |\alpha + \beta| + |\beta|,$$

откуда

$$|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha + \beta|.$$

Следует заметить, что для комплексных чисел понятия «больше» и «меньше» не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому сами комплексные числа (а не их модули) никогда нельзя соединять знаком неравенства.

Сопряженные числа. Пусть дано комплексное число $\alpha = a + di$. Число $a - bi$, отличающееся от α лишь знаком при мнимой части, называется числом, *сопряженным с α* , и обозначается $\bar{\alpha}$

Напомним, что при рассмотрении деления комплексных чисел мы прибегали к сопряженным числам, хотя и не вводили этого названия.

Числом, сопряженным с $\bar{\alpha}$, будет α , т. е. можно говорить о паре сопряженных чисел. Действительные числа, и только они, сопряжены сами себе.

Геометрически сопряженные числа являются точками, симметричными относительно действительной оси (рис. 6). Отсюда следуют равенства

$$|\bar{\alpha}| = |\alpha|, \quad \arg \bar{\alpha} = -\arg \alpha. \quad (21)$$

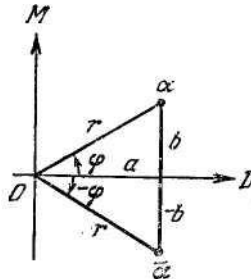


Рис. 6.

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами. В самом деле,

$$\left. \begin{aligned} \alpha + \bar{\alpha} &= 2a, \\ \alpha \bar{\alpha} &= a^2 + b^2 = |\alpha|^2. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Последнее равенство показывает, что число $\alpha \bar{\alpha}$ даже положительно при $\alpha \neq 0$.

Равенство

$$(a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i$$

показывает, что число, сопряженное с суммой двух чисел, равно сумме чисел, сопряженных со слагаемыми:

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}. \quad (23)$$

Аналогично, из равенства

$$(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

вытекает, что число, сопряженное с произведением, равно произведению чисел, сопряженных с сомножителями:

$$\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}. \quad (24)$$

Непосредственная проверка показывает также справедливость формул

$$\alpha \cdot \bar{\beta} = \alpha - \beta, \quad (25)$$

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}. \quad (26)$$

Докажем следующее утверждение: *если число α некоторым образом выражено через комплексные числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ при помощи сложения, умножения, вычитания и деления, то, заменяя в этом выражении все числа β_k их сопряженными, мы получим число, сопряженное с α* ; в частности, если число α действительное, то оно не меняется при замене всех комплексных чисел β_k их сопряженными.

Будем доказывать это утверждение индукцией по n , так как при $n = 2$ оно вытекает из формул (23) — (26).

Пусть число α выражено через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, не обязательно различные. В этом выражении указан определенный порядок, в котором применяются операции сложения, умножения, вычитания и деления. Последним шагом будет применение одной из этих операций к числу γ_1 , выраженному через числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$, где $1 \leq k \leq n - 1$, и к числу γ_2 , выраженному через числа $\beta_{k+1}, \dots, \beta_n$. По индуктивному предположению замена чисел $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ на сопряженные влечет за собой замену числа γ_1 на $\bar{\gamma}_1$ а замена чисел $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \dots, \beta_n$ на сопряженные заменяет γ_2 на $\bar{\gamma}_2$. Однако по одной из формул (23) — (26) переход от γ_1 и γ_2 к $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$, превращает число α в $\bar{\alpha}$.

6.2. Извлечение корня из комплексных чисел

Переходим к вопросу о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Для возведения числа $\alpha = a + bi$ в целую положительную степень n достаточно применить к выражению $(a + bi)^n$ формулу бинома Ньютона (эта формула справедлива и для комплексных чисел, так как ее доказательство основано лишь на законе дистрибутивности), а затем воспользоваться равенствами

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1,$$

откуда вообще

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Если число α задано в тригонометрической форме, то при целом положительном n из формулы (11) вытекает следующая формула, называемая *формулой Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad (27)$$

т. е. при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. Формула (27) верна и для целых отрицательных показателей. Действительно, ввиду $\alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n$, достаточно применить формулу Муавра к числу α^{-1} , тригонометрическую форму которого дает формула (17)

Примеры.

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

$$1) \quad i^{37} = i, \quad i^{123} = -1;$$

$$2) \quad (2 + 5i)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 5i + 3 \cdot 2 \cdot 5^2 i^2 + 5^3 i^3 = \\ = 8 + 60i - 150 - 125i = -142 - 65i;$$

$$3) \quad \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^4 = (\sqrt{2})^4 (\cos \pi + i \sin \pi) = -4;$$

$$4) \quad \left[3 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \right]^{-3} = \\ = 3^{-3} \left[\cos \left(-\frac{3}{5} \pi \right) + i \sin \left(-\frac{3}{5} \pi \right) \right] = \frac{1}{27} \left(\cos \frac{7}{5} \pi + i \sin \frac{7}{5} \pi \right).$$

Частный случай формулы Муавра, а именно равенство

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

позволяет легко получить формулы для синуса и косинуса кратного угла. Действительно, раскрывая левую часть этого равенства по

формуле бинорма и приравнивая отдельно действительные и мнимые части обеих частей равенства, мы получим:

$$\begin{aligned} \cos n\varphi &= \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \cdot \sin^4 \varphi - \dots, \\ \sin n\varphi &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \cdot \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ &\quad + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \cdot \sin^5 \varphi - \dots; \end{aligned}$$

здесь $\binom{n}{k}$ есть обычное обозначение биномиального коэффициента:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

При $n=2$ мы приходим к известным формулам

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi,$$

а при $n=3$ — к формулам

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Извлечение корня из комплексных чисел представляет уже много больше трудностей. Начнем с извлечения квадратного корня из числа $a=ai+bi$. Мы не знаем пока, существует ли такое комплексное число, квадрат которого равен a . Предположим, что такое число $u+vi$ существует, т. е., употребляя обычную символику, можно написать

$$\sqrt{a+bi} = u+vi.$$

Из равенства

$$(u+vi)^2 = a+bi$$

следует

$$\left. \begin{aligned} u^2 - v^2 &= a, \\ 2uv &= b. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Возводя в квадрат обе части каждого из равенств (28), а затем складывая их, получаем:

$$(u^2 - v^2)^2 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = a^2 + b^2,$$

откуда

$$u^2 + v^2 = \pm \sqrt{a^2 + b^2};$$

положительный знак взят потому, что числа u и v действительные, и поэтому левая часть равенства положительная. Из этого равенства и из первого из равенств (28) получаем:

$$u^2 = \frac{1}{2} (a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

$$v^2 = \frac{1}{2} (-a + \sqrt{a^2 + b^2}).$$

Мы приходим, извлекая квадратные корни, к двум значениям для u , отличающимся друг от друга знаком, а также к двум значениям для v . Все эти значения будут действительными, так как квадратные корни будут извлекаться при любых a и b из положительных, чисел. Полученные значения для u и v нельзя комбинировать между собой произвольным образом, так как, ввиду второго из равенств (28), знак произведения uv должен совпадать со знаком b . Это дает две возможные комбинации значений u и v , т. е. два числа вида $u+vi$, которые могут служить значениями квадратного корня из числа a ; эти числа отличаются друг от друга знаком. Элементарная проверка (возведением полученных чисел в квадрат, отдельно для случая $b>0$ и для случая $b<0$) показывает, что найденные нами числа действительно являются значениями квадратного корня из числа a . Таким образом, *извлечение квадратного корня из комплексного числа всегда возможно и дает два значения, отличающиеся, друг от друга знаком.*

В частности, теперь делается возможным извлечение квадратного корня и из отрицательного действительного числа, причем значения этого корня будут чисто мнимыми. В самом деле, если $a < 0$ и $b=0$, то

$$\sqrt{a^2 + b^2} = -a,$$

так как этот корень должен быть положительным, а тогда

$$u^2 = \frac{1}{2} (a - a) = 0,$$

т.е. $u=0$, откуда

$$\sqrt{a} = \pm vi.$$

Пример.

Пусть

$$a = 21 - 20i.$$

Тогда

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{441 + 400} = 29.$$

Поэтому

$$u^2 = \frac{1}{2} (21 + 29) = 25, \quad v^2 = \frac{1}{2} (-21 + 29) = 4,$$

откуда $u = \pm 5$, $v = \pm 2$.

Знаки u и v должны быть различными ввиду отрицательности v ,

$$\sqrt{21 - 20i} = \pm (5 - 2i).$$

Попытки извлечения из комплексных чисел, заданных в виде $a+bi$, корней более высокой степени, чем вторая, встречаются с непреодолимыми затруднениями. Так, если бы мы захотели таким же методом, как выше, извлечь из числа $a+bi$ кубический корень, то должны были бы решить некоторое вспомогательное кубическое уравнение. С другой стороны, тригонометрическая форма весьма хорошо приспособлена для извлечения корней любой степени и, пользуясь ею, мы сейчас решим этот вопрос.

Пусть нужно извлечь корень n -й степени из числа $\alpha=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Предположим, что это сделать можно и что в результате получается число

$$\rho(\cos\theta+i\sin\theta),$$

т.е.

$$[\rho(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \quad (29)$$

Тогда по формуле Муавра,

$$\rho^n=r, \text{ т. е. } \rho=\sqrt[n]{r},$$

где в правой части стоит однозначно определенное положительное значение корня n -й степени из положительного действительного числа r . С другой стороны, аргумент левой части равенства (29) есть $n\theta$. Нельзя утверждать, однако, что $n\theta$ равно φ , так как эти углы могут в действительности отличаться на слагаемое, являющееся некоторым целым кратным числа 2. Поэтому $n\theta=\varphi+2k\pi$, где k — целое число, откуда

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Обратно, если мы берем число

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

то при любом целом k , положительном или отрицательном, n -я степень этого числа равна α . Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \quad (30)$$

Давая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Действительно, при

$$k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (31)$$

мы получим n значений корня, которые все будут различными, так как увеличение k на единицу влечет за собой увеличение аргумента на $2\pi/n$. Пусть теперь k произвольно. Если $k=nq+r$, $0\leq r\leq n-1$, то

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при нашем k отличается от значения аргумента при $k = r$ на число, кратное 2π ; мы получаем, следовательно, такое же значение корня, как при значении k , равном r , т. е. входящем в систему (31).

Таким образом, извлечение корня n -й степени из комплексного числа α всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n -й степени расположены на окружности радиуса

$$\sqrt[n]{|\alpha|}$$

с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.

В частности, корень n -й степени из действительного числа a также имеет n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного в зависимости от знака a и четности n .

Примеры.

$$1) \beta = \sqrt[3]{2 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{3}{4} \pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{4} \pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$k=0: \beta_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$k=1: \beta_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11}{12} \pi + i \sin \frac{11}{12} \pi \right);$$

$$k=2: \beta_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19}{12} \pi + i \sin \frac{19}{12} \pi \right).$$

$$2) \beta = \sqrt{i} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2};$$

$$\beta_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \beta_1 = \cos \frac{5}{4} \pi + i \sin \frac{5}{4} \pi = -\beta_0.$$

$$3) \beta = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8 (\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right);$$

$$\beta_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i \sqrt{3};$$

$$\beta_1 = 2 (\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$\beta_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i \sqrt{3}.$$

Корни из единицы. Особенно важен случай извлечения корня n -й степени из числа 1. Этот корень имеет n значений, причем, ввиду равенства $1 = \cos 0 + i \sin 0$ и формулы (30), все эти значения или, как мы будем говорить, все корни n -й степени из единицы, даются формулой

$${}^n\sqrt{1} = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n; k=0, 1, \dots, n-1. \quad (32)$$

Действительные значения корня n -й степени из единицы получаются из формулы (32) при значениях $k=0$ и $\pi/2$, если n четно, и при $k=0$, если n нечетно. На комплексной плоскости корни n -й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг; одной из точек деления служит число 1. Отсюда следует, что те из корней n -й степени из единицы, которые не являются действительными, расположены симметрично относительно действительной оси, т. е. попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и -1 , корень четвертой степени из единицы — четыре значения: 1, -1 , i и $-i$. Для дальнейшего полезно запомнить, значения *кубического корня из единицы*. Это будут, ввиду (32), числа $\cos 2\pi/3 + i \sin 2\pi/3$, где $k=0, 1, 2$, т.е., кроме самой единицы, также сопряженные между собой числа

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Все значения корня n -й степени из комплексного числа α можно получить умножением одного из этих значений на все корни n -й степени из единицы. Действительно, пусть β будет одно из значений корня n -й степени из числа α , т. е. $\beta^n = \alpha$, а ε - произвольное значение корня n -й степени из единицы, т. е. $\varepsilon^n = 1$. Тогда $(\beta\varepsilon)^n = \beta^n \varepsilon^n = \alpha$, т. е. $\beta\varepsilon$ также будет одним из значений для ${}^n\sqrt{\alpha}$. Умножая β на каждый из корней n -й степени из единицы, мы получаем n различных значений корня n -й степени из числа α , т. е. все значения этого корня.

Примеры.

- 1) Одно из значений кубического корня из -8 есть -2 . Два других будут, ввиду (33), числа $-2\varepsilon_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $-2\varepsilon_2 = 1 + i\sqrt{3}$ (см. выше пример 3)).
- 2) ${}^4\sqrt{81}$ имеет четыре значения: 3, -3 , $3i$, $-3i$.

Произведение двух корней n -й степени из единицы само есть корень n -й степени из единицы. Действительно, если $\varepsilon^n = 1$ и $\eta^n = 1$, то $(\varepsilon\eta)^n = \varepsilon^n \eta^n = 1$. Далее, число, обратное корню n -й степени из единицы, само есть такой же корень. В самом деле, пусть $\varepsilon^n = 1$. Тогда из $\varepsilon \varepsilon^{-1} = 1$ следует $\varepsilon^n \cdot (\varepsilon^{-1})^n = 1$, т.е. $(\varepsilon^{-1})^n = 1$. Вообще, *всякая степень корня n -й степени из единицы есть также корень n -й степени из единицы.*

Всякий корень k -й степени из единицы будет также корнем l -й степени из единицы для всякого l , кратного k . Отсюда следует, что если мы будем рассматривать всю совокупность корней n -й степени из единицы, то некоторые из этих корней уже будут корнями n' -й степени

из единицы для некоторых n' , являющихся делителями числа n . Для всякого n существуют такие корни n -й степени из единицы, которые не являются корнями из единицы никакой меньшей степени. Такие корни называются *первообразными корнями n -й степени из единицы*. Их существование вытекает из формулы (32): если значение корня, соответствующее данному значению k , мы обозначим через ε_k (так что $\varepsilon_0=1$) то на основании формулы Муавра (27)

$$\varepsilon_1^k = \varepsilon_k.$$

Никакая степень числа ε_1 , меньше, чем n -я, не будет, следовательно, равна 1, т.е. $\varepsilon_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем.

Корень n -й степени из единицы ε тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ε^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, различны, т. е. если ими исчерпываются все корни n -й степени из единицы.

Действительно, если все указанные степени числа ε различны, то ε будет, очевидно, первообразным корнем n -й степени. Если же, например, $\varepsilon^k = \varepsilon^l$ при $0 \leq k < l \leq n-1$, то $\varepsilon^{l-k} = 1$, т. е., ввиду неравенств $1 \leq l-k \leq n-1$, корень ε не будет первообразным.

Число ε_1 , найденное выше, в общем случае — не единственный первообразный корень n -й степени. Для разыскания всех этих корней служит следующая теорема.

Если ε есть первообразный корень n -й степени из единицы, то число ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n -й степени, если k взаимно просто с n .

В самом деле, пусть d будет наибольшим общим делителем чисел k и n . Если $d > 1$ и $k = dk'$, $n = dn'$, то

$$(\varepsilon^k)^{n'} = \varepsilon^{kn'} = \varepsilon^{k'n} = (\varepsilon^n)^{k'} = 1,$$

т. е. корень ε^k оказался корнем n' -й степени из единицы.

Пусть, с другой стороны, $d=1$ и пусть, вместе с тем, число ε^k оказывается корнем m -й степени из единицы, $1 \leq m < n$. Таким образом

$$(\varepsilon^k)^m = \varepsilon^{km} = 1$$

Таким образом, число первообразных корней n -й степени из единицы равно числу целых положительных чисел k , меньших n и взаимно простых с ним. Выражение для этого числа, обычно обозначаемого через $\varphi(n)$, можно найти в любом курсе теории чисел.

Если p — простое число, то первообразными корнями p -й степени из единицы будут все эти корни, кроме самой единицы. С другой стороны, среди корней четвертой степени из единицы первообразными будут i и $-i$, но не 1 и -1 .

6.3. Комплексные функции от вещественного аргумента

Определение и свойства. Часто при математическом моделировании приходится рассматривать такие функции, для которых хотя *независимая переменная вещественна, но сама функция принимает комплексные значения*. Примерами могут служить

$$1) z = (t + i)^3; \quad 2) z = Me^{pt} \quad (p = a + i\omega) \text{ и т. д.};$$

здесь независимая переменная обозначена буквой t , а функция — буквой z . Если разложить значение функции на вещественную и мнимую части, $z = x + iy$, то каждая из этих частей будет функцией t (здесь x и y — вещественные числа, а i — мнимая единица); так, в приведенных примерах получим

$$1) x = t^3 - 3t, \quad y = 3t^2 - 1; \quad 2) x = Me^{at} \cos \omega t, \quad y = Me^{at} \sin \omega t.$$

В общем случае, если

$$z = f(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \tag{34}$$

то мы получаем

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t); \tag{35}$$

обратно, от (35) можно перейти к (34). Таким образом, задание комплексной функции от вещественного аргумента равносильно заданию двух обычных, вещественных функций от того же аргумента. Эта картина совершенно аналогична заданию векторной функции от скалярного аргумента; аналогия станет еще большей, если истолковывать комплексные числа как векторы.

В результате теория комплексных функций от вещественного аргумента не имеет существенно новых черт по сравнению с теорией вещественных функций. В частности, определения непрерывности, производной и т. п. переносятся без изменений. При этом все формулы дифференцировании сохраняются, например.

$$[(t + i)^3]' = 3(t + i)^2, \quad (Me^{pt})' = pMe^{pt} \text{ и т. п.}$$

Изображается функция (34) линией в комплексной плоскости с параметрическими уравнениями (35).

При применении функций вида (34) надо иметь в виду следующие очевидные свойства:

если комплексные функции складываются, то и их вещественные части складываются, а также их мнимые части складываются;

если комплексная функция умножается на вещественную постоянную или вещественную функцию, то вещественная и мнимая части получают тот же множитель;

если комплексную функцию продифференцировать, то над ее вещественной и мнимой частями произведется то же действие.

Формулами эти свойства можно записать так:

$$\operatorname{Re}[f_1(t)+f_2(t)] = \operatorname{Re} f_1(t) + \operatorname{Re} f_2(t) \quad \text{и т.д.}$$

Эти свойства дают возможность, вместо того чтобы производить указанные действия над вещественной или мнимой частью, осуществить эти действия над всей комплексной функцией, а от результата взять вещественную или соответственно мнимую часть. Замечательно, что такой переход к комплексным величинам с обратным переходом к искомым вещественным величинам может оказаться проще и нагляднее, чем непосредственные действия над вещественными величинами.

Применяется также функция

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}[t - (a + ib)] &= \ln |t - a - ib| + i \operatorname{Arg}[t - a - ib] = \\ &= \frac{1}{2} \ln [(t-a)^2 + b^2] + i \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t-a}{b} - \frac{\pi}{2} + k\pi \right], \end{aligned}$$

где значение целого числа k еще надо выбрать.

Применение к моделированию колебаний.

Функцию

$$U(t) = Me^{i(\omega t + \alpha)} = M \cos(\omega t + \alpha) + iM \sin(\omega t + \alpha) \quad (M > 0, \omega > 0) \quad (36)$$

удобно применить для исследования гармонических колебаний. Для этого надо заметить, что величина (36) имеет модуль M и аргумент $\omega t + \alpha$, т.е. она представима *вектором постоянной длины, который равномерно вращается с угловой скоростью ω*

Рассмотрим, например, наложение колебаний, происходящих с одинаковой частотой. Пусть надо сложить две величины: $u_1(t) = M_1 \sin(\omega t + \alpha_1)$ и $u_2(t) = M_2 \sin(\omega t + \alpha_2)$. Для этого введем соответствующие комплексные величины

$$U_1(t) = M_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} \quad \text{и} \quad U_2(t) = M_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)}$$

у которых u_1 и u_2 будут сложить мнимыми частями.

Векторы $U_1(t)$ и $U_2(t)$ равномерно вращаются с угловой скоростью ω , значит, и вектор $U_1(t) + U_2(t)$ равномерно вращается с той же скоростью и потому его можно представить в виде (36). Чтобы найти M и α , достаточно рассмотреть картину в момент $t = 0$ (рис. 7); из нее, проектируя на оси координат, получим

$$\begin{aligned} M \cos \alpha &= M_1 \cos \alpha_1 + M_2 \cos \alpha_2, \\ M \sin \alpha &= M_1 \sin \alpha_1 + M_2 \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (37)$$

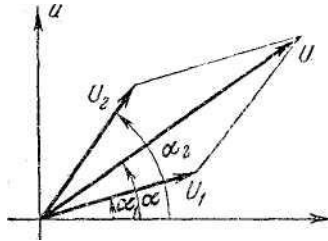


Рис. 7.

Взяв мнимую часть от $U(t)$, мы приходим окончательно к выводу, что: $u_1(t) + u_2(t) = M \sin(\omega t + \alpha)$, где M и α находятся из равенств (37).

Аналогичный результат получается при наложении любого числа гармонических колебаний, происходящих с одинаковой частотой.

Преимущество экспоненты (36) перед тригонометрическими функциями особенно проявляются при дифференцировании:

$$\frac{dU}{dt} = M e^{i(\omega t + \alpha)} i\omega = i\omega U.$$

Исходя из действий над комплексными числами получаем вектор, также равномерно вращающийся с угловой скоростью ω , но опережающий U на 90° и имеющий модуль, в ω раз больший. При дальнейших дифференцированиях эти поворот и растяжение повторяются.

Покажем применение функции вида (36) к расчету установившегося тока в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью (рис. 8), если к цепи подключен источник напряжения, меняющегося по гармоническому закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \beta)$. При этом в цепи возникает ток, также меняющийся по гармоническому закону $j = j_0 \sin(\omega t + \alpha)$, однако j_0 и α нам заранее не известны.

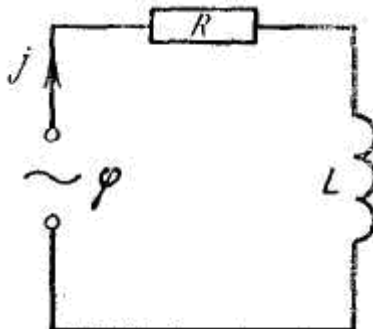


Рис. 8.

Приравнивая Φ сумме падений напряжений на R и L на основе известных в физике законов, получим основное уравнение задачи

$$RJ + L \frac{dj}{dt} = \Phi.$$

Введем понятие *комплексного напряжения и комплексной силы тока* по формулам

$$\Phi = \varphi_0 e^{i(\omega t + \beta)}, \quad J = j_0 e^{i(\omega t + \alpha)},$$

«настоящие» напряжение и сила тока служат мнимыми частями этих выражений. В силу свойств, описанных в предыдущем разделе, для получения j надо решить уравнение

$$RJ + L \frac{dJ}{dt} = \Phi,$$

а от ответа взять мнимую часть. Согласно формуле (38) получаем

$$RJ + Li\omega J = \Phi, \quad \text{т. е.} \quad J = \frac{\Phi}{R + i\omega L}. \quad (39)$$

Мы видим, что индуктивность L можно истолковать как некое сопротивление, численно равное $i\omega L$; это значение называется *кажущимся сопротивлением или импедансом* элемента L . Записав $(R + i\omega L)^{-1}$ в показательной форме $re^{-i\theta}$, из (39) получим

$$j_0 = r\varphi_0 = \varphi_0 (R^2 + \omega^2 L^2)^{-1/2}, \quad \alpha = \beta - \text{arctg} \frac{\omega L}{R}.$$

Формула Эйлера. Перейдем к трансцендентным действиям над комплексными числами. Ранее мы видели, что для вещественных x

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \quad (40)$$

Если вместо x поставить z , получим *определение экспоненты с комплексным показателем*: по определению

$$e^z = 1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \dots \quad (41)$$

Далее мы увидим, что это определение имеет смысл для всех z , а также что при этом сохраняется основное свойство экспоненты:

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}. \quad (42)$$

Формулы (40) и (41) показывают, что в частном случае, когда z вещественно, это новое определение e^z совпадает со старым; вообще *всякое новое определение не должно противоречить уже установленным фактам*. В то же время формула (42) подтверждает целесообразность именно данного определения e^z .

Подобным образом можно стандартным способом определить для комплексных значений аргумента функции, первоначально заданные лишь для вещественных значений аргумента. Для этого надо заданную функцию $f(x)$ разложить в ряд Тейлора по степеням x или степеням $x - a$, где a — какое-либо вещественное число, после чего заменить x на z и обозначить сумму полученного ряда через $f(z)$. Так, подобно (41), получаем для комплексных z

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad (43)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (44)$$

и т.д. При этом, как мы увидим далее, все основные формулы, имеющие характер тождественных равенств и справедливые для вещественных значений аргумента (такие, например, как $\sin(-x) \equiv -\sin x$, $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ и т. п.), остаются в силе и для комплексных его значений.

На основе приведенных формул вскрывается глубокая *связь показательной функции с тригонометрическими*. Именно, если в (41) подставить iz вместо z , мы получим

$$e^{iz} = \left(1 + \frac{1}{1!} iz - \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3!} iz^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \frac{1}{5!} iz^5 - \frac{1}{6!} z^6 - \frac{1}{7!} iz^7 + \dots \right) = \left(1 - \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{4!} z^4 - \frac{1}{6!} z^6 + \dots \right) + i \left(\frac{1}{1!} z - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z^5 - \frac{1}{7!} z^7 + \dots \right).$$

Отсюда с помощью (43) и (44) выводим очень важную *формулу Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (45)$$

Применяются также формула

$$e^{-iz} = e^{i(-z)} = \cos(-z) + i \sin(-z) = \cos z - i \sin z$$

и вытекающие из нее и (45) формулы

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (46)$$

Из формулы Эйлера (45) на основе свойства (42) получаем выражение для экспоненты с любым комплексным показателем

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (47)$$

Сравнение с тригонометрической формой показывает, что

$$|e^z| = e^x, \quad \text{Arg } e^z = y + 2k\pi. \quad (48)$$

В частности видно, что всегда

$$|e^z| > 0, \text{ т. е. } e^z \neq 0.$$

Если в формуле (47) вместо e^z писать z , то на основании (48) получим

$$z = |z| (\cos \arg z + i \sin \arg z) = |z| e^{i \arg z} = \rho e^{i\varphi}.$$

Такая «показательная форма» комплексного числа бывает удобна для выполнения над ним алгебраических действий.

Из формул (46) вытекают соотношения между тригонометрическими и гиперболическими функциями: $\cos z = \operatorname{ch} iz$, $\sin z = \operatorname{sh} iz/i$, т. е. $\operatorname{sh} iz = i \sin z$. Отсюда, подставив iz вместо z , получим также $\cos iz = \operatorname{ch} z$, $\sin i = i \operatorname{sh} z$.

В этом состоит причина глубокой связи между указанными функциями, и на основе этой связи можно переходить от соотношений между тригонометрическими функциями к соотношениям для гиперболических функций и обратно.

С помощью формул (46) легко получить также выражения степеней синуса и косинуса через тригонометрические функции кратных аргументов; например,

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i \cdot 3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i \cdot 3x}}{8} = \\ &= \frac{e^{i \cdot 3x} + e^{-i \cdot 3x}}{8} + \frac{3}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{\cos 3x}{4} + \frac{3 \cos x}{4} \end{aligned}$$

и т. п. Такое преобразование применяется при интегрировании.

Логарифмы комплексных чисел. Определение «*комплексных логарифмов*» дается такое же, как вещественных: логарифм числа z — это число w , для которого $z = e^w$. Чтобы найти, чему равен такой логарифм, обозначим

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = u + iv.$$

Тогда из формулы (47) получаем

$$\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) = z = e^w = e^u (\cos v + i \sin v).$$

Отсюда, так как u и v вещественные

$$e^u = \rho, \quad \text{т. е. } u = \ln \rho, \quad v = \varphi + 2k\pi \quad (k \text{ — целое}),$$

где под $\ln \rho$ понимается «обыкновенный», вещественный логарифм положительного числа. Итак,

$$\operatorname{Ln} z = w = u + iv = \ln \rho + i\varphi + i2k\pi = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где под Ln понимается совокупность *всех* значений логарифма.

Итак, логарифм комплексного числа имеет бесконечное количество различных значений. Единственным исключением является число «нуль», которое не имеет логарифма; можно условно написать, что $\operatorname{Ln} 0 = -\infty + iv$, где v — произвольное.

Так как вещественные положительные числа — это частный случай комплексных, то и их логарифм имеет бесконечное число значений, из них одно — «обыкновенное», вещественное, а остальные — мнимые. Например

$$\text{Ln } 1 = \ln 1 + i0 + i2k\pi = i2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

при $k=0$ получаем старое значение $\ln 1=0$, но также за логарифм 1 можно принять $i2\pi, -i2\pi, i4\pi$ и т.п. Проверим это еще раз:

$$e^{i2k\pi} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1 + i0 = 1 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (50)$$

Отрицательные числа также имеют логарифмы, однако все их значения мнимые. Например,

$$\text{Ln}(-1) = i\pi(2k+1).$$

С помощью логарифмов определяется *возведение комплексного числа в любую комплексную степень*:

$$z_1^{z_2} = (e^{\text{Ln } z_1})^{z_2} = e^{z_2 \text{Ln } z_1},$$

причем правая часть вычисляется по формуле (47). Так как логарифм имеет бесконечное число значений, то и вся степень имеет, вообще говоря, бесконечное число значений.

7. Ряды

7. 1. Числовые ряды

1. Ряды с положительными членами. Рассмотрим ряд
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, все $a_n \geq 0$;

(1)

обозначим частные суммы этого ряда через $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$

В данном случае $S_1 \leq S_2 \leq \dots \leq S_n \leq \dots$, и, вспомнив два способа изменения возрастающей величины, мы приходим к выводу, что для ряда (1) может быть один из двух случаев: он или сходится, или расходится к бесконечности. Это можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

Подчеркнем, что первое неравенство как обозначение сходимости пишут только для рядов с положительными членами. Если, кроме ряда (1), рассматривается ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots, \quad (2)$$

причем

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad (3)$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Действительно, это сразу следует из аналогичного неравенства для частных сумм. Отсюда вытекает *признак сравнения*: при выполнении условия (3), если ряд (2) сходится, то и ряд (1) сходится, а если ряд (1) расходится, то и ряд (2) расходится.

Например, ряд

$$\frac{1}{3^2 \ln 2} + \frac{1}{3^3 \ln 3} + \frac{1}{3^4 \ln 4} + \dots$$

сходится, что следует из сравнения его с рядом :

$$\frac{1}{3^n \ln n} < \frac{1}{3^n} \quad (n = 3, 4, \dots);$$

правда, первые члены рядов не подчиняются этой оценке, но, как нам известно, это на факт сходимости не влияет.

С первым признаком сравнения связан другой признак: если

$$a_k > 0, \quad b_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\frac{a_k}{b_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{const} \neq 0, \quad \neq \infty,$$

то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Действительно, из указанного условия вытекает, что отношение a_k/b_k для всех k заключено между некоторыми *положительными* постоянными m и M :

$$m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M, \quad \text{т. е.} \quad mb_k \leq a_k \leq Mb_k.$$

Отсюда, суммируя по k от 1 до n , а затем переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем

$$m \sum_{k=1}^{\infty} b_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq M \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

откуда и вытекает наше утверждение .

Широко применяется следующий *достаточный признак Даламбера*: если для ряда (1) существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1})/a_n = l$$

то в случае $l < 1$ ряд (1) сходится, а в случае $l > 1$ — расходится. Второе получается совсем просто, так как при $l > 1$ отношение $(a_{n+1})/a_n$, приближающееся с возрастанием n к l , становится, начиная с некоторого номера, большим единицы, т. е. члены ряда для больших n возрастают, а значит, не выполнен необходимый признак сходимости. Пусть теперь $l < 1$; выберем какое-нибудь постоянное число l' между l и 1. Так как отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

безгранично приближается к l , то оно обязательно, начиная с некоторого номера N , станет меньше l' . Но тогда

$$\frac{a_{N+1}}{a_N} < l', \quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} < l', \quad \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} < l', \quad \dots,$$

откуда

$$a_{N+1} < a_N l', \quad a_{N+2} < a_{N+1} l' < a_N l'^2, \quad a_{N+3} < a_{N+2} l' < a_N l'^3 \text{ и т. д.,}$$

т. е. члены ряда (1), начиная с номера N , меньше членов ряда

$$a_N + a_N l' + a_N l'^2 + a_N l'^3 + \dots$$

Так как $0 < l' < 1$, то члены последнего ряда образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию и потому он сходится, а отсюда по признаку сравнения сходится и ряд (1).

Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p} \quad (a > 0, p \geq 0). \tag{4}$$

Для применения признака Даламбера надо найти предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{n+1}}{(n+1)^p} : \frac{a^n}{n^p} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p} = a.$$

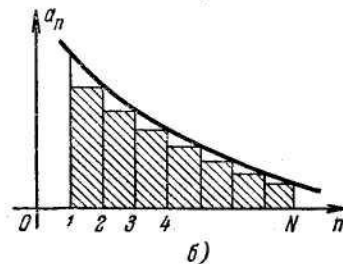
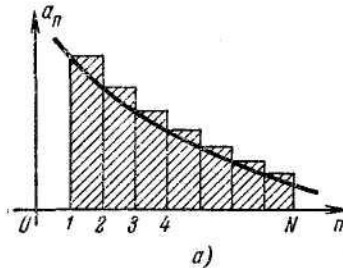


Рис. 1.

Значит, ряд (4) сходится при $a < 1$ и расходится при $a > 1$; при $a = 1$ признак Даламбера ответа не дает.

Когда признак Даламбера отказывает, часто бывает возможно применить более сильный *достаточный интегральный признак Коши*: если выражение для a_n имеет смысл не только для целых $n = 1, 2, 3, \dots$, но и для всех действительных $n \geq 1$ и убывает с ростом n , то

$$\int_1^{\infty} a_n dn \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} a_n dn + a_1; \quad (5)$$

значит, ряд (1) сходится или расходится одновременно с выписанным интегралом. Для доказательства заметим, что на основании рис. 1,а будет

$$\int_1^N a_n dn \leq a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_N \cdot 1, \quad (6)$$

а на основании рис. 1,б

$$\int_1^N a_n dn \geq a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \dots + a_N \cdot 1$$

откуда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N \leq \int_1^N a_n dn + a_1. \quad (7)$$

Если в неравенствах (6) и (7) перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$, то получим (5).

Рассмотрим, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (8)$$

который получается из ряда (4) при $a = 1$, когда признак Даламбера не действует. Так как $a_n = n^{-p}$ при $p > 0$ удовлетворяет условиям признака Коши, то ряд (8) сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{n^p} dn.$$

Но непосредственное вычисление последнего интеграла показывает, что он сходится только при $p > 1$. Значит, и ряд (8) сходится только при $p > 1$. В частности, при $p = 1$ получаем так называемый *гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty.$$

Формулы (6) и (7) можно применить для двусторонней оценки частной суммы расходящегося ряда, откуда можно получить

асимптотическую формулу для такой суммы в зависимости от номера. Аналогично проводится оценка любой суммы большого числа слагаемых, монотонно зависящих от номера. Для уточнения результата можно несколько наибольших слагаемых просуммировать непосредственно, а оценивать лишь оставшиеся, так как тогда разность между оценками сверху и снизу сближится.

Более точные приближения, хотя и без двусторонних оценок, получаются с помощью формул численного интегрирования. Покажем, например, применение формулы Симпсона к приближенному вычислению суммы

$$S_{m, N} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{N} \quad (m=1, 2, \dots; N \geq m+2).$$

Для этого пишем при $h=1$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx + \int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{x} dx = \int_k^{k+2} \frac{1}{x} dx \approx \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} + \frac{4}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

Суммируя эти формулы при $k=m, m+1, \dots, N-1$, после несложных преобразований и интегрирования получаем

$$\ln N - \ln m + \ln(N+1) - \ln(m+1) \approx \frac{1}{3} \left(3S_{m, N} - \frac{5}{m} - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{N} + \frac{1}{N+1} \right),$$

откуда

$$S_{m, N} \approx \ln N + \frac{6m+5}{6m(m+1)} - \frac{1}{2} \ln(m^2+m) + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{N} \right) + \frac{1}{6N(N+1)}. \quad (9)$$

Рассматривая рис. 1, а для функции $a_n=1/n$, легко проверить, что существует конечный положительный предел

$$\mathcal{E} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{N} - \int_1^N \frac{1}{n} dn \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} (S_{1, N} - \ln N);$$

он называется *постоянной Эйлера*. Из равенства (9) и формулы $S_{m, N} = S_{1, N} - 1/1 - 1/2 - \dots - 1/(m-1)$ вытекает приближенное значение постоянной Эйлера

$$\mathcal{E} \approx \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{6m+5}{6m(m+1)} - \frac{1}{2} \ln(m^2+m),$$

тем более точное, чем больше m . Так, при $m=1$ и $m=2$ получаем соответственно значения 0,570 и 0,576, тогда как $\mathcal{E} = 0,577$, с точностью до 0,001.

2. Ряды с членами любого знака. Перейдем теперь к рядам

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad a_n \geq 0 \quad (10)$$

с членами произвольного знака. Здесь, прежде всего, имеет место утверждение: *если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty, \tag{11}$$

то и ряд (10) сходится; в этом случае он называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд (11) расходится, то ряд (10) может все же сходиться; это — *неабсолютная сходимость*.

Чаще всего, применяя признаки п. 1, проверяют именно абсолютную сходимость ряда (10). Например, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

то по признаку Даламбера ряд (11) сходится, а потому ряд (10) абсолютно сходится (если этот предел больше единицы, то не выполнен необходимый признак сходимости и ряд расходится) и т. п. Следующий *достаточный признак Лейбница* гарантирует сходимость, но не обязательно абсолютную: если для ряда

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \tag{12}$$

будет

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots \rightarrow 0,$$

то он сходится. Для доказательства заметим, что если изображать частные суммы ряда (12) на некоторой оси S (рис. 2), то каждый из следующих переходов от 0 к S_1 , от S_1 к S_2 , от S_2 к S_3 и т. д. будет совершаться в направлении, противоположном предыдущему, причем на меньшее расстояние; другими словами, в данном случае $0 < S < S_2 < S_1, S_2 < S_4 < S_3, S_2 < S_6 < S_5, \dots$ (рис. 2).

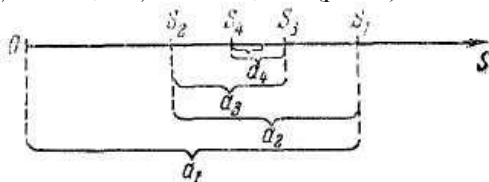


Рис. 2.

Значит, четные частные суммы (т. е. частные суммы с четными номерами) образуют возрастающую ограниченную последовательность и потому имеют предел S' ; а нечетные частные суммы образуют убывающую ограниченную последовательность и потому имеют предел S'' . Переходя в равенстве $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим, что $S'' = S'$, т. е. все частные суммы имеют единый предел и тем самым ряд (12.12) сходится. Заодно мы видим, что сумма ряда (12.12) заключена между любой четной и любой

нечетной частными суммами, что дает возможность произвести оценку суммы ряда.

Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$$

при $p > 0$ удовлетворяет условиям признака Лейбница и потому сходится. В то же время эта сходимость будет абсолютной только при $p > 1$ (см. п. 1).

Отметим в заключение, что из неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$$

после перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ для сходящегося ряда (10) получается неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

3. Действия с рядами. 1. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать*, т. е. если

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S, \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = T,$$

то

$$(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) + \dots = S \pm T.$$

Для доказательства надо заметить, что частная сумма последнего ряда

$$P_n = S_n \pm T_n,$$

а затем перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

На основе этого свойства иногда производится следующее преобразование: ряд с членами любого знака, например

$$a - b - c + d + e + f - g + \dots = S \tag{13}$$

(где все a, b, c, \dots считаются > 0), представляется в виде разности рядов с неотрицательными членами

$$\left. \begin{aligned} a + 0 + 0 + d + e + f + 0 + \dots &= S_1 \\ 0 + b + c + 0 + 0 + 0 + g + \dots &= S_2 \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

т. е. суммируются все положительные и все отрицательные члены, а результаты вычитаются один из другого. Так можно поступать только с абсолютно сходящимся рядом (13), так как для неабсолютно сходящегося ряда (13) оба ряда (14) имеют бесконечную сумму. В последнем случае сходимость ряда (13) получается за счёт «баланса» между этими бесконечностями, в результате которого частные суммы обоих рядов (14) нарастают с одинаковой скоростью.

Аналогично первому свойству проверяется свойство

2. *Сходящийся ряд можно почленно множить на общий множитель*: если

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S,$$

то

$$ka_1 + ka_2 + \dots + ka_n + \dots = kS.$$

3. *В сходящемся ряде можно произвольно группировать члены*: например, если

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots = S, \quad (15)$$

то

$$(a_1 + a_2) + a_3 + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8) + \dots = S. \quad (16)$$

Действительно, если частные суммы первого ряда $S_1, S_2, S_3, \dots \rightarrow S$, то частные суммы второго ряда, равные $S_2, S_3, S_6, S_8, \dots$, также стремятся к S .

Если ряд (15) расходится к бесконечности, то аналогично получаем, что и ряд (16) расходится к бесконечности. Если же ряд (15) расходится колебательным образом, то ряд (16) может расходиться, а может и сходиться, причем сумма тогда будет зависеть от способа группировки, т. е. расстановки скобок. Например, для ряда имеем

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0,$$
$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1.$$

Пока не была осознана разница между сходящимися и расходящимися рядами, этот факт воспринимался как необъяснимый парадокс. Современное определение понятия суммы сходящегося ряда стало возможным только на базе развитой теории пределов и было дано Коши в 1821 г., хотя ряды широко применялись и в XVII—XVIII вв.

4. *В ряде с неотрицательными членами можно произвольно переставлять порядок членов (слагаемых), отчего сумма не изменится*.

Дело в том, что если составлять последовательные частные суммы для ряда с переставленными (без пропусков) членами, то любой член исходного ряда будет входить в эти суммы, начиная с некоторой. Поэтому и любая частная сумма исходного ряда составит часть частной суммы с достаточно большим номером переставленного ряда и потому не превосходит всей суммы переставленного ряда. Но тогда и предел частных сумм исходного ряда, т. е. сумма исходного ряда, не превосходит суммы переставленного ряда. А так как первый ряд получается из второго также перестановкой членов, т. е. и сумма второго ряда не может превосходить суммы первого, то обе суммы равны.

В абсолютно сходящемся ряде также можно произвольно переставлять порядок членов.

Действительно, как было указано в свойстве 1, такой ряд можно представить как разность двух сходящихся рядов с неотрицательными членами, так что перестановка членов у исходного ряда сводится к перестановке членов у этих двух рядов, что, как мы только что видели, не меняет их сумм.

Перестановка членов в неабсолютно сходящемся ряде может изменить сумму или даже сделать ряд расходящимся. Дело в том, что в результате такой перестановки можно изменить относительную скорость нарастания рядов (14), что и приводит к этому на первый взгляд парадоксальному результату, который можно продемонстрировать на следующем примере.

Сумма S ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \dots = S \quad (17)$$

согласно п. 2 заключена между $S_1=1$ и $S_2 = 0,5$. Отсюда в силу свойства 2

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \dots = \frac{S}{2},$$

а потому и

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + \dots = \frac{S}{2}.$$

Произведя почленное сложение этого ряда с рядом (17), получим

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} S,$$

т.е.

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} S.$$

Однако последний ряд получается из ряда (17) перестановкой членов, а сумма, как видим, изменилась.

Таким образом, в процессах, так или иначе связанных с перестановкой членов ряда, только с абсолютно сходящимися рядами можно смело обращаться так же, как с конечными суммами; при действиях же с неабсолютно сходящимися рядами надо соблюдать определенную осторожность.

4. Скорость сходимости ряда. Для практического подсчета суммы ряда обычно вычисляют частную сумму нескольких его первых членов, а остальные просто отбрасывают, если имеются основания полагать, что они не повлияют существенно на значение суммы. При этом *нужно, чтобы ряд не просто сходил, а быстро сходил*, т. е. чтобы, взяв небольшое число членов, мы почти исчерпали бы полную

сумму, получив ее с хорошей точностью. Если же ряд сходится медленно, плохо, то для непосредственных практических вычислений он бывает часто непригоден, хотя из него бывает возможно получить другие, быстро сходящиеся ряды; впрочем, иногда остаток такого ряда удается приближенно выразить с помощью интегралов, наподобие п. 1. Очень медленно сходятся неабсолютно сходящиеся ряды (п. 2); но и абсолютно сходящиеся ряды часто сходятся медленно.

Скорость сходимости ряда определяется в основном скоростью стремления его общего члена к нулю с возрастанием номера. Часто сравнительно плохо сходятся ряды, для которых общий член a_n имеет порядок n^p (т. е. $a_n \sim n^p$) при $p > 1$, причем сходимостью тем лучше, чем больше p . Лучше сходятся ряды, для которых a_n имеет порядок q^n при $0 < q < 1$, это скорость геометрической прогрессии, причем сходимостью тем лучше, чем меньше q . Еще лучше сходятся ряды, для которых a_n имеет порядок $1/n!$ и т. д.

Впрочем, это лишь самые общие установки, так как при любом порядке общего члена для $n \rightarrow \infty$ в данном вопросе может оказаться существенным поведение первых членов ряда.

Если ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (18)$$

сходится медленно, то часто стремятся перейти к более быстро сходящемуся ряду. Один из способов этого такой. Подбирают ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sigma$$

с известной суммой так, чтобы $a \sim b$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$a_n = b_n + \gamma_n, \text{ где } |\gamma_n| \ll |a_n|$$

и потому ряд (18) можно представить в виде

$$(b_1 + \gamma_1) + (b_2 + \gamma_2) + \dots =$$

$$= (b_1 + b_2 + \dots) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots) = \sigma + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n + \dots,$$

а у этого ряда общий член стремится к нулю быстрее.

Для применения этого *способа выделения особенности* надо иметь набор рядов с известными суммами. Обычно пользуются геометрической прогрессией, другими рядами и их комбинациями, а также рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \zeta(p) \quad (p > 1). \quad (19)$$

Последняя сумма, зависящая от p , называется *дзета-функцией Римана*.

Рассмотрим, например, ряд

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n^3+1]}. \quad (20)$$

Его члены эквивалентны при $n \rightarrow \infty$ членам ряда (19) при $p = 3/2$, т. е. ряд (20), хотя и сходится, но очень медленно. С помощью оценки (5) легко проверить, что остаток ряда (19) эквивалентен

$$\frac{1}{(p-1)n^{p-1}},$$

т. е. остаток ряда (20) имеет порядок $2n^{-1/2}$, и чтобы получить S с точностью до 0,01, надо взять около 40 000 членов! Но если воспользоваться методом выделения особенности, получим

$$\frac{1}{\sqrt[n^3+1]} = \frac{1}{\sqrt[n^3]} + \gamma_n,$$

$$\gamma_n = \frac{\sqrt[n^3] - \sqrt[n^3+1]}{\sqrt[n^3+1]\sqrt[n^3]} = -\frac{1}{\sqrt[n^3]\sqrt[n^3+1](\sqrt[n^3] + \sqrt[n^3+1])},$$

а потому ряд (20) можно представить в виде

$$S = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n^3]\sqrt[n^3+1](\sqrt[n^3] + \sqrt[n^3+1])}. \quad (21)$$

По таблице первое слагаемое равно 2,612, а общий член последнего ряда эквивалентен $(2n^{9/2})^{-1}$, а потому его остаток эквивалентен $(7n^{7/2})^{-1}$, т. е. для точности до 0,01 надо взять три члена! Если S требуется с большей точностью, то из ряда (21) надо вновь выделить особенность, что даст

$$S = \zeta\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\zeta\left(\frac{9}{2}\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24n^9 + 7n^6 - 2n^3 - 1}{2\sqrt[n^9]A(\sqrt[n^3+1]A)(3n^3+1+\sqrt[n^3]A)(2\sqrt[n^3]A^3+2n^6-3n^3-1)},$$

где для краткости положили

$$\sqrt[n^3+1] = A.$$

Выделенная часть по таблице равна 2,085, а остаток последнего ряда асимптотически равен (т. е. эквивалентен) $(3/52)n^{-13/2}$. Значит, для вычисления S с точностью до 0,001 достаточно взять всего два три члена.

Это последовательное выделение особенностей можно усовершенствовать, если воспользоваться рядом Тейлора для бинорма:

$$\frac{1}{\sqrt[n^3+1]} = (n^3+1)^{-1/2} = n^{-3/2} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{-1/2} =$$

$$= n^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{8n^6} - \frac{5}{16n^9} + \dots\right). \quad (22)$$

Обрывая этот ряд на любом члене, например на третьем, получим

$$\frac{1}{\sqrt{n^3+1}} = n^{-3/2} \left(1 - \frac{1}{2n^3} + \frac{3}{8n^6} \right) - \gamma_n, \quad (23)$$

откуда

$$S = \zeta \left(\frac{3}{2} \right) - \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{9}{2} \right) + \frac{3}{8} \zeta \left(\frac{15}{2} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 2,462 - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n,$$

причем γ_n которые можно выразить точно с помощью (23), асимптотически равны $(5/16)n^{-21/2}$, на основе (22).

Аналогично преобразуются и другие ряды, причем наряду с (19) применяются ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n)^p} = \zeta(p) \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots \right] = \frac{1}{4} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Формула (24) справедлива и при $0 < p < 1$, причем $\zeta(p)$ для таких p определена не по формуле (19), так как ряд расходится, а иным способом, о котором мы здесь не будем говорить. При $p=1$ левая часть ряда (24) равна $\ln 2$.

Для знакопередающихся рядов (п. 2) имеется большая опасность *потери точности*. Рассмотрим для примера степенной ряд для косинуса при $x=100$:

$$\cos 100 = 1 - \frac{100^2}{2!} + \frac{100^4}{4!} - \frac{100^6}{6!} + \frac{100^8}{8!} - \dots \quad (25)$$

Ряд, стоящий в правой части, сходится и даже абсолютно, но практическое его использование невозможно. Действительно, хотя члены, начиная с 51-го, убывают, причем, в конце концов, достаточно быстро, что существенно для теоретической сходимости, но до этого они успевают кошмарно возрасти. А так как вся сумма должна получиться по абсолютной величине меньше единицы, то все эти члены «почти» взаимно уничтожаются. Как известно, такая ситуация очень опасна, так как все вычисления пришлось бы проводить с огромным числом значащих цифр и объем вычислительной работы был бы неоправданно велик. Поэтому рядов типа (25) надо избегать, а

если они появляются, надо преобразовывать их в другие ряды, поддающиеся практическому вычислению; так, в данном примере можно воспользоваться периодичностью косинуса и перейти к значительно меньшему аргументу.

5. Ряды с комплексными, векторными и матричными членами.

Определение сходимости и суммы ряда с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad z_n = x_n + iy_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (26)$$

дается в точности так, как для ряда с вещественными членами. При этом иногда разбивают ряд (26) на два:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots, \quad y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots \quad (27)$$

Если оба ряда (27) сходятся и имеют сумму соответственно x и y , то и ряд (26) сходится и имеет сумму $z = x + iy$. Если хоть один из рядов (27) расходится, то и ряд (26) расходится. Так как ряды (27) вещественные, то к ним применимы методы п. 2.

Применяется также следующий простой признак: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty, \quad (28)$$

то оба ряда (27) абсолютно сходятся, а потому ряд (26) также сходится; в этом случае ряд (26) называется *абсолютно сходящимся*. К ряду (28) можно применять методы п. 1.

Аналогично рассматриваются ряды с векторными членами

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (12.29)$$

Если все u_n —векторы в трехмерном пространстве x, y, z , то для перехода к скалярным рядам надо произвести проектирование ряда (12.29) на все три оси x, y, z .

Рассматриваются также ряды вида

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots, \quad (12.30)$$

членами которого служат матрицы одного и того же размера. Для сходимости ряда (12.30) необходимо и достаточно, чтобы сходился каждый из рядов, состоящих из соответственных, т. е. одинаково расположенных элементов этих матриц.

Свойства рядов (12.26), (12.29) и (12.30) те же, что и вещественных рядов (п. 3).

6. Кратные ряды. Конечные суммы могут иметь не только один, но и два и более индексов суммирования.

Например,

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 a_{ij} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{21} + a_{22} + a_{23},$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{1}{ij} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$$

и т. п.

Бесконечные ряды также могут иметь более одного индекса суммирования; такие ряды называются *двойными*, *тройными* и т. д., вообще *кратными*. Мы рассмотрим только двойной ряд простейшего вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}; \tag{31}$$

рассмотрение рядов высшей кратности, а также рядов, у которых пределы суммирования во внутренней сумме переменные, как в приведенном выше примере, проводится аналогично.

Пусть сначала все $a_{ij} \geq 0$. Расположим все члены ряда (31) в простой, однократный ряд в каком-либо порядке, например

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{13} + a_{22} + a_{31} + a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41} + \dots \tag{32}$$

Сумма этого ряда, не зависящая от порядка слагаемых (свойство 4 п. 3), и называется суммой ряда (31). При этом могут быть два случая, сходимости и расходимости, т. е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} < \infty \text{ или } \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \infty.$$

Таким образом, при $a_{ij} \geq 0$ сумма ряда (31) не зависит от способа суммирования, лишь бы при этом ни один член не был забыт. В частности, можно суммировать так:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \right). \tag{33}$$

Если члены a_{ij} любого знака или даже комплексные, то наиболее просто рассматривается случай *абсолютной сходимости*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty. \tag{34}$$

Тогда и ряд (31) сходится, и для подсчета его суммы можно воспользоваться любой из формул вида (32) или (33), формулой

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

и т. п. Если условие (34) нарушено, то при суммировании ряда (31) может играть роль порядок суммирования (п. 3) и положение значительно осложняется.

Двойной ряд получается, в частности, при *перемножении двух абсолютно сходящихся рядов*

$$S_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \quad \text{и} \quad S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_j;$$

перед умножением мы изменили обозначение индекса суммирования в одном из рядов. Умножение производится так:

$$S_1 S_2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{j=1}^{\infty} b_j = \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \sum_{j=1}^{\infty} b_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j;$$

при этом абсолютная сходимость использована в последнем равенстве, так как применена формула (33). Итак, умножение таких рядов производится по тому же правилу, что и умножение конечных сумм (каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда), после чего получается абсолютно сходящийся двойной ряд. Аналогичный результат получится, если множителей больше.

7. 2. Общие функциональные ряды

7. Уклонение функций. Если членами ряда являются не числа, как в 7.1, а функции, то возникает вопрос, в каком смысле частные суммы, которые являются функциями, сходятся (приближаются) к полной сумме, которая также является функцией, т. е. как оценить отличие двух функций друг от друга? Оказывается, это можно делать различными, неравносильными способами, тогда как отличие двух чисел a и b друг от друга всегда оценивается величиной $|a - b|$.

Пусть две функции, $f(x)$ и $\varphi(x)$, заданы на одном и том же конечном интервале $a \leq x \leq b$. *Равномерным или чебышевским уклонением* их друг от друга называется величина

$$\rho. \text{ у. } \{f, \varphi\} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - \varphi(x)|, \tag{35}$$

геометрический смысл которой показан на рис. 3.

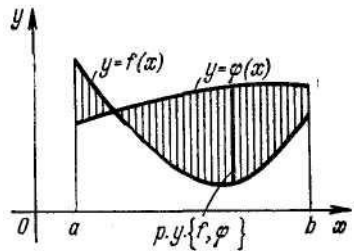


Рис. 3.

Это уклонение применяется только для ограниченных функций, причем, как правило, для непрерывных. Если равномерное уклонение двух функций друг от друга мало, то в каждой точке интервала $a \leq x \leq b$ значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ мало отличаются друг от друга, и наоборот.

Средним интегральным уклонением функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ друг от друга называется величина

$$\text{с. и. у. } \{f, \varphi\} = \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx; \quad (36)$$

ее геометрическим смыслом — это площадь, заштрихованная на рис. 3, без учета знаков. Для вычислений более удобно *среднее квадратичное уклонение*

$$\text{с. к. у. } \{f, \varphi\} = \sqrt{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx}, \quad (37)$$

которое во многом аналогично с. и. у. Эти уклонения применяются не только для непрерывных, но и для разрывных функций, и даже для неограниченных функций, если интеграл, который тогда будет несобственным, сходится. Имеются и другие виды уклонений.

Если в формулах (36) и (37) заменить подинтегральную функцию ее максимальным значением (35), то от этого интеграл может только увеличиться, и мы получим

$$\text{с. и. у. } \{f, \varphi\} \leq (b-a) \cdot \text{р. у. } \{f, \varphi\}; \quad \text{с. к. у. } \{f, \varphi\} \leq \sqrt{b-a} \cdot \text{р. у. } \{f, \varphi\}. \quad (38)$$

Значит, если равномерное уклонение двух функций друг от друга мало, то и среднее интегральное и среднее квадратичное уклонение тоже малы. Однако может так получиться, что равномерное уклонение двух функций велико, тогда как среднее — мало (рис. 4).

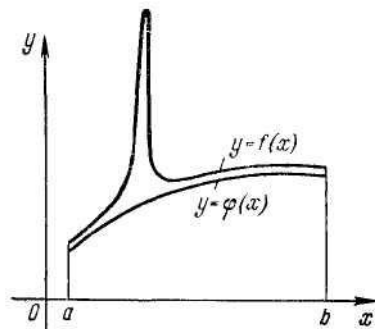


Рис. 4.

8. Сходимость функционального ряда. Рассмотрим ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots, \tag{39}$$

членами которого являются функции, заданные на одном и том же конечном интервале $a \leq x \leq b$. Говорят, что этот ряд сходится на данном интервале к функции $S(x)$ — сумме ряда, если уклонение частной суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) \text{ от } S(x)$$

стремится к нулю при возрастании n . В зависимости от вида уклонения (п. 7) получается вид сходимости ряда (39). Так, ряд (39) сходится к сумме $S(x)$ равномерно, если

$$\max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Подобным образом этот ряд сходится к $S(x)$ в среднем или в среднем квадратичном в зависимости от того, будет ли

$$\int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

или

$$\sqrt{\int_a^b [S(x) - S_n(x)]^2 dx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Из оценок (38) видно, что если ряд (30) сходится равномерно, то он сходится и в среднем и в среднем квадратичном и притом к той же сумме. Обратное не обязательно.

Если ряд (39) на интервале $a \leq x \leq b$ равномерно сходится к сумме $S(x)$, то для любого числа ϵ из этого интервала будет

$$f_1(c) + f_2(c) + \dots + f_n(c) + \dots = S(c);$$

в самом деле, отличие n -й частной суммы этого ряда от $S(c)$ не превосходит равномерного уклонения $S_n(x)$ и $S(x)$ и тем самым стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Это свойство дает возможность получить из функционального ряда с известной суммой числовые ряды с известными суммами.

Для проверки равномерной сходимости чаще всего применяется следующий *достаточный признак* предложенный Вейерштрассом: *если*

$$\text{все } |f_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots; a \leq x \leq b), \text{ причём } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \quad (40)$$

то ряд (39) равномерно сходится. Для доказательства заметим, что в данных условиях по признаку сравнения (п. 1) ряд (39) при каждом зафиксированном x абсолютно сходится к сумме $S(x)$. При этом

$$\begin{aligned} \max_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| &= \max_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \\ &\leq \max_{a \leq x \leq b} \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \end{aligned}$$

а последняя сумма, как остаток сходящегося ряда, стремится к нулю с возрастанием номера.

Условие (40) иначе можно записать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max_{a \leq x \leq b} |f_n(x)| < \infty,$$

так как члены этого ряда можно обозначить через a_n . Аналогичный вид имеют достаточные признаки для сходимости ряда (39) в среднем и в среднем квадратичном:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b |f_n(x)| dx < \infty$$

и соответственно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\int_a^b [f_n(x)]^2 dx} < \infty.$$

Иногда бывает, что ряд (39) на интервале $a \leq x \leq b$ является расходящимся, но этот ряд сходится на некотором внутреннем интервале $a_1 \leq x \leq b_1$, где $a \leq a_1 < b_1 \leq b$. Тогда $a_1 \leq x \leq b_1$ называется *интервалом сходимости* ряда (39).

Заметим в заключение, что, как и для числовых рядов, произвольное изменение конечного числа членов ряда (39) не может изменить характера его сходимости.

9. Свойства функциональных рядов. 1. Сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций также не может иметь разрывов. Действительно, если

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = S(x) \quad (a \leq x \leq b), \quad (41)$$

то

$$S(x) = [f_1(x) + \dots + f_n(x)] + [f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots] = S_n(x) + R_n(x). \quad (42)$$

Если члены ряда — непрерывные функции, то $S_n(x)$, как сумма *конечного* числа непрерывных функций, также непрерывна. С другой стороны, если ряд (41) сходится равномерно, то для достаточно большого n остаток $R_n(x)$ будет как угодно мал на *всем* интервале $a \leq x \leq b$. Поэтому при малом изменении x как $S_n(x)$, так и $R_n(x)$, а потому и вся сумма (42) изменяются мало, т. е. эта сумма не может иметь разрывов.

Иногда рассматриваются ряды вида (41) на конечном или бесконечном интервале $a < x < b$, которые равномерно сходятся не на всем этом интервале, а на *каждом «строго внутреннем» интервале* $a_1 \leq x \leq b_1$, где $a < a_1 < b_1 < b$. Тогда доказанное свойство можно применить к интервалу $a_1 \leq x \leq b_1$, а затем, приближая a_1 к a , а b_1 к b , заключить, что сумма ряда не имеет разрывов и на всем интервале $a < x < b$. Аналогичное замечание справедливо и для дальнейших свойств.

Если члены ряда (41) имеют разрывы, то, рассуждая подобным образом, получим, что *если ряд (41) сходится равномерно, то его сумма может иметь разрывы только в тех точках, в которых имели разрывы слагаемые*. В отличие от этого, если ряд сходится в среднем, его сумма может иметь новые разрывы; она может иметь разрывы, даже если все члены ряда были непрерывными. Это связано с тем, что непрерывные функции $S_n(x)$ могут сходиться в смысле среднего интегрального к разрывной функции.

2. Ряд, сходящийся равномерно, можно почленно интегрировать, т. е. из (41) вытекает, что

$$\int_{x_0}^x f_1(t) dt + \int_{x_0}^x f_2(t) dt + \dots + \int_{x_0}^x f_n(t) dt + \dots = \int_{x_0}^x S(t) dt,$$

причем полученный ряд сходится равномерно на интервале $a \leq x \leq b$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x S(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x f_k(t) dt \right| &= \left| \int_{x_0}^x \left[S(t) - \sum_{k=1}^n f_k(t) \right] dt \right| = \\ &= \left| \int_{x_0}^x [S(t) - S_n(t)] dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |S(t) - S_n(t)| dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |S(t) - S_n(t)| dt \leq (b-a) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |S(t) - S_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

То же доказательство, с отброшенным последним членом в цепи неравенств, показывает, что и ряд, сходящийся в среднем, можно почленно интегрировать, причем полученный после интегрирования ряд сходится равномерно на интервале $a \leq x \leq b$.

3. Ряд из непрерывных функций, сходящийся равномерно, можно почленно дифференцировать, если после этого получится ряд, сходящийся равномерно, т. е. из (41) следует, что

$$f'_1(x) + f'_2(x) + \dots + f'_n(x) + \dots = S'(x).$$

Для доказательства надо обозначить сумму последнего ряда через $Q(x)$ и произвести его почленное интегрирование на основе свойства 2; получится равенство

$$S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^x Q(t) dt,$$

дифференцируя которое, найдем, что

$$Q(x) = S'(x).$$

Если уточнить понятие сходимости функционального ряда, воспользовавшись обобщенными функциями, то все оговорки о характере сходимости отпадают, т. е. любые сходящиеся ряды будет возможно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз.

7.3. Степенные ряды

10. Интервал сходимости. Степенной ряд имеет вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (43)$$

Излагая общую теорию этих рядов, мы для простоты предположим, что существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R, \quad (44)$$

хотя окончательные результаты справедливы в самом общем случае. Легко выяснить, для каких численных значений x ряд (43) сходится. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|a_n/a_{n+1}|} = \frac{|x|}{|R|}, \quad (45)$$

то по признаку Даламбера (п. 2) при $|x| < R$, т. е. при

$$-R < x < R, \quad (46)$$

ряд (43) абсолютно сходится; интервал (46) служит интервалом сходимости степенного ряда (43), а R называется радиусом сходимости. При $|x| > R$, т. е. при $-\infty < x < -R$ или $R < x < \infty$, вне интервала сходимости, предел (45) больше единицы, т. е. ряд (43) расходится. При $x = \pm R$, т. е. на концах интервала сходимости, предел (45) равен 1 и признак Даламбера неприменим. В разных примерах здесь может получиться сходимость или расходимость.

Если предела (44) не существует, то и тогда интервал сходимости иногда можно выяснить по признаку Даламбера.

Например, для сходимости ряда

$$1 - \frac{x^3}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 2^4} - \frac{x^9}{4 \cdot 2^6} + \frac{x^{12}}{5 \cdot 2^8} - \dots,$$

где предела (44) не существует, должно быть

$$\lim \left\{ \frac{|x^{3(n+1)}|}{(n+2)2^{2(n+1)}} : \frac{|x^{3n}|}{(n+1)2^{2n}} \right\} = \frac{|x|^3}{2^2} < 1.$$

Значит, ряд сходится при $|x^3| < 2^2=4$, т. е. интервал сходимости его таков:

$$-\sqrt[3]{4} < x < \sqrt[3]{4}.$$

На концах этого интервала при

$$x = \pm \sqrt[3]{4}$$

ряд расходится, а при

$$x = \pm \sqrt[3]{4}$$

неабсолютно сходится.

Если признак Даламбера применить нельзя, то и тогда можно доказать, что ряд (43) сходится на некотором интервале вида (46), хотя R найти сложнее.

Если $R \rightarrow \infty$, то ряд (43) сходится при всех x , т. е. на всей оси, хотя при больших $|x|$ сходимость будет очень плохой (см. конец п. 4). Теоретически возможен также случай $R = 0$, но тогда ряд (43) сходится только для $x=0$, и потому мы такие ряды здесь не будем рассматривать.

Рассматриваются также степенные ряды вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (47)$$

Если обозначить $x - a = x_1$, то видно, что ряд сходится при

$$-R < x - a < R, \text{ т. е. } a - R < x < a + R.$$

11. Свойства степенных рядов. 1. Ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \tag{48}$$

сходится равномерно (п. 8) *на любом интервале* $-R_1 \leq x \leq R_1$, *где* $0 < R_1 < R$; R —радиус сходимости ряда (48). Действительно, на таком интервале можно написать

$$|a_0| = |a_0|, \quad |a_1x| \leq |a_1R_1|, \quad |a_2x^2| \leq |a_2R_1^2|, \quad |a_3x^3| \leq |a_3R_1^3|, \dots,$$

т. е. члены ряда (48) по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов числового ряда

$$|a_0| + |a_1R_1| + |a_2R_1^2| + |a_3R_1^3| + \dots$$

Последний ряд сходится, так как R_1 лежит внутри интервала сходимости. Значит, по признаку Вейерштрасса (п. 8) ряд (48) равномерно сходится на указанном интервале.

Равномерной сходимости сразу на всем интервале $-R < x < R$ в общем случае не будет. Однако Абель доказал, что *если ряд (48) сходится на каком-либо из концов интервала сходимости, то интервал, на котором гарантируется равномерная сходимость, можно считать продолженным до этого конца.*

2. *Сумма ряда (48) непрерывна внутри его интервала сходимости.* Действительно, это следует из свойства 1 п. 9. Кроме того, из указанной только что теоремы Абеля вытекает, что если ряд (48) сходится на каком-либо из концов интервала сходимости, то сумма будет непрерывной и в этом конце.

3. *При почленном интегрировании или дифференцировании ряда (48) его радиус сходимости не меняется.* Например, при почленном интегрировании получится ряд

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$$

Вычислим его радиус сходимости по формуле (44):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|/n}{|a_n|/(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)|a_{n-1}|}{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} = 1 \cdot R,$$

т. е. получается то же значение (44).

4. *Формулу*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = S(x) \quad (-R < x < R)$$

можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз на интервале сходимости. Это вытекает из только что доказанных свойств 1 и 3 и из свойств 2 и 3 п. 9, так как если при однократном

дифференцировании или интегрировании радиус сходимости не меняется, то он не меняется и при повторении этих действий.

Из свойств 4 и 2 вытекает, в частности, что *сумма степенного ряда имеет внутри своего интервала сходимости непрерывные производные всех порядков.*

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots \quad (-1 < x < 1);$$

его можно получить из ряда

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

для суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Почленно интегрируя, получим

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (-1 < x < 1). \quad (49)$$

Так как ряд в правой части сходится и при $x=1$, то в силу теоремы Абеля формула (49) справедлива и при $x=1$, т. е. мы находим сумму числового ряда

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4}.$$

При помощи почленных интегрирований и дифференцирований иногда удается свести заданный ряд к известным рядам и тем самым найти его сумму. Например, найдем сумму ряда

$$2 + \frac{3}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{5}{3!}x^3 + \dots = S(x).$$

На основании признака Даламбера легко проверить, что ряд сходится на всей оси, т. е. $R = \infty$. Умножим обе части на x и проинтегрируем результат от нуля до некоторого x :

$$\int_0^x xS(x) dx = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \dots \right) = x^2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = x^2 e^x.$$

Отсюда, дифференцируя, получим

$$xS(x) = (x^2 e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x,$$

т. е. окончательно

$$S(x) = (2+x)e^x.$$

Приведем пример иного характера. Найдем сумму ряда

$$\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots = \sigma(x). \quad (50)$$

Для этого продифференцируем его почленно:

$$\sigma'(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots = -\ln(1-x)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= - \int \ln(1-x) dx = \\ &= -x \ln(1-x) - \int \frac{x}{1-x} dx = x + (1-x) \ln(1-x) + C. \end{aligned} \quad (51)$$

Чтобы выяснить, чему равно в данном случае C , положим в формулах (50) и (51) $x=0$; получим, что $0 = \sigma(0) = C$. Окончательно,

$$\sigma(x) = x + (1-x) \ln(1-x).$$

В других примерах часто получаются интегралы, не выражающиеся через элементарные функции.

Иногда в результате аналогичных действий мы получаем дифференциальное уравнение для суммы ряда, решив которое, мы и находим сумму. Найдем, например, сумму ряда

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{13}}{13!} + \dots = p(x). \quad (52)$$

Для этого трижды продифференцируем формулу (52):

$$\begin{aligned} 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots &= p'(x), \\ \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{11}}{11!} + \dots &= p''(x), \\ \frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots &= p'''(x). \end{aligned} \quad (54)$$

Мы видим, что получился исходный ряд, т. е.

$$p'''(x) - p(x) = 0.$$

Решая это уравнение, найдем

$$p(x) = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right). \quad (55)$$

Для вычисления C_1 , C_2 и C_3 подставляем $x=0$ в формулы (52), (12.53) и (54), получим, что $p(0)=0$, $p'(0)=1$, $p''(0)=0$; это — начальное условие для $p(x)$. В силу (55) выводим, что

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 - \frac{1}{2} C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 1, \quad C_1 - \frac{1}{2} C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} C_3 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{1}{3}, \quad C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

и окончательно находим сумму ряда (52):

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \dots = \frac{1}{3} e^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(-\frac{1}{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

В некоторых случаях аналогичными способами удается «свернуть» сумму заданного числового ряда и интеграл или даже в простую

комбинацию математических констант (целых чисел, π , e и т. п.) и функций от них. Проведем это, например, с суммой

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = S. \quad (56)$$

Для этого рассмотрим вспомогательный ряд

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots = q(x) \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

При помощи дифференцирования найдем

$$q'(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-x)}{x} dx.$$

Отсюда, подставляя $x=1$, получим сумму ряда (56)

$$S = - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx. \quad (57)$$

Соответствующий неопределенный интеграл не является элементарной функцией, однако все же иногда предпочтительнее иметь ответ в «свернутом» виде, а не в виде ряда. Кстати, в п. 25 мы совершенно другим методом найдем, что сумма ряда (56) равна $\pi^2/6$; отсюда, в частности, получается значение интеграла (57).

12. Конечные действия над степенными рядами. Так как степенные ряды внутри своих интервалов сходимости абсолютно сходятся, то их можно, в частности, *почленно складывать, множить на общий множитель (п. 3) и множить друг на друга* по правилу умножения многочленов (п. 6).

Рассмотрим, например, как происходит умножение рядов:

$$\begin{aligned} e^x \ln(1+x) &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\right) = \\ &= x + \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{3}\right)x^3 + \\ &+ \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 1!} - \frac{1}{4}\right)x^4 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2 \cdot 3!} + \frac{1}{3 \cdot 2!} - \frac{1}{4 \cdot 1!} + \frac{1}{5}\right)x^5 + \dots \\ &\dots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \dots, \end{aligned}$$

причем здесь можно подсчитать столько коэффициентов, сколько понадобится. У первого ряда радиус сходимости равен ∞ , у второго равен 1, т. е. полученный результат справедлив при $-1 < x < 1$, где абсолютно сходятся оба ряда.

Аналогично осуществляется *деление ряда на ряд*, которое мы покажем на примере

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots} = \frac{\frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \right) \cdot \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots}{x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots} \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + \dots}{-\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72} + \dots\right)} \\ &= \frac{\frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \dots}{-\left(\frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{15} + \dots\right)} \\ &= \frac{\frac{17}{315}x^7 + \dots}{-\left(\frac{17}{315}x^7 + \dots\right)} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Итак, разложение тангенса в степенной ряд начинается с членов

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad (58)$$

Для вычисления дальнейших членов надо было продолжить разложения $\sin x$ и $\cos x$. Можно доказать, что формула (58) справедлива при $|x| < \pi/2$.

Разложение (58) можно получить также с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого заметим, что $\operatorname{tg} x$ как нечетная функция должна разлагаться в ряд по нечетным степеням

$$\operatorname{tg} x = a_1 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots$$

Но так как $\cos x \operatorname{tg} x = \sin x$, то

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) (a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \dots) &= \\ &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$a_1 = \frac{1}{1!}; \quad a_3 - \frac{a_1}{2!} = -\frac{1}{3!}; \quad a_5 - \frac{a_3}{2!} + \frac{a_1}{4!} = \frac{1}{5!}; \quad a_7 - \frac{a_5}{2!} + \frac{a_3}{4!} - \frac{a_1}{6!} = -\frac{1}{7!}, \dots$$

откуда последовательно найдем коэффициенты a_1, a_3, a_5, \dots

Наконец, применяется *подстановка ряда*

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

в ряд

$$\varphi(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \dots \quad (59)$$

или, в более общем случае, в ряд

$$\Psi(y) = c_0 + c_1 (y-a) + c_2 (y-a)^2 + \dots$$

Например, для ряда (59) это даст

$$\varphi(f(x)) = b_0 + b_1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) + b_2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^2 + \dots,$$

причем в правой части надо раскрыть скобки и привести подобные члены. Чтобы результат имел смысл при $x = 0$, нужно, чтобы ряд (59) сходиллся при $y = a_0$, т. е. чтобы a_0 попало на интервал сходимости ряда (59); впрочем, если это условие не выполнено, то вычисления сами покажут ошибку.

Приведем пример:

$$\begin{aligned} \ln(1 + \sin x) &= \frac{\sin x}{1} - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{3} - \dots = \\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1} - \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^2}{2} + \\ &+ \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots\right)^3}{3} - \dots = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots}{1} - \\ &\frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 + \dots}{2} + \frac{x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 + \dots}{3} - \\ &\frac{x^4 - \frac{2}{3}x^6 + \dots}{4} + \frac{x^5 - \frac{5}{6}x^7 + \dots}{5} - \frac{x^6 + \dots}{6} + \frac{x^7 + \dots}{7} + \dots \end{aligned}$$

здесь при вычислении последовательных степеней ряда мы множили очередную степень на основной ряд для $\sin x$ по правилу умножения многочленов, причем слишком высокие степени x —в данном примере начиная с x^8 —просто отбрасывали. Приводя подобные члены, получим окончательно

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^6}{45} + \frac{61x^7}{5040} + \dots$$

При помощи методов пп. 11-12 оказывается возможным, исходя из простейших рядов, получить разложения многих других функций. Часто оказывается затруднительным написать выражение для общего члена, однако всегда можно вычислить любое число первых членов, чего обычно бывает достаточно.

13. Степенной ряд как ряд Тейлора. Рассмотрим сумму ряда $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ ($-R < x < R$). (60)

Коэффициенты этого ряда легко выразить через его сумму. Для этого будем последовательно дифференцировать формулу (60) и подставлять $x = 0$; получится

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots, & f(0) &= a_0; \\
 f''(x) &= 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + \dots, & f'(0) &= 1a_1; \\
 f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \dots, & f''(0) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3,
 \end{aligned}$$

и т. д.

Находя отсюда a_0, a_1, a_2, \dots и подставляя их в (60), получим

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\
 &\dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (-R < x < R), \quad (61)
 \end{aligned}$$

т. е. уже знакомый нам ряд Тейлора. Итак, *степенной ряд есть ряд Тейлора для своей суммы.*

Так как коэффициенты ряда (61) однозначно выражаются через его сумму, то получаем, в частности, что *если суммы двух степенных рядов тождественно совпадают, то их коэффициенты при одинаковых степенях x также равны; если сумма степенного ряда тождественно равна нулю, то и все его коэффициенты равны нулю.*

Выше мы считали, что степенной ряд задан. На практике часто ставится противоположная задача о разложении заданной функции $f(x)$ в степенной ряд. При этом возникает вопрос, на каком интервале будет справедлива формула (61). Это равносильно вопросу о том, при каких x остаточный член конечной формулы Тейлора стремится к нулю при возрастании номера.

Непосредственно исследовать этот остаточный член удастся лишь в редких случаях. К счастью, такое исследование является излишним: можно доказать, что, например, для элементарной функции $f(x)$ формула (61) имеет место на всяком интервале, на котором ряд сходится, если все значения $f(0), f'(0), f''(0), \dots$ получаются непосредственной подстановкой значения $x=0$ в выражения для $f(x), f'(x), f''(x), \dots$

В то же время далеко не каждую функцию можно разложить в степенной ряд (ряд Тейлора). Например, степенной ряд не может представлять функцию на интервале, на котором она или производная от нее какого-либо порядка имеют разрывы, а также если она на различных частях этого интервала задается различными формулами (п. 1.13).

Все сказанное непосредственно переносится на ряды по степеням $x-a$ вида (47) и на соответствующие ряды Тейлора.

14. Степенные ряды с комплексными членами. Эти ряды имеют вид

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots, \quad z = x + iy, \quad (62)$$

где коэффициенты a_n и независимая переменная z принимают любые комплексные значения. Теория таких рядов совершенно аналогична теории вещественных степенных рядов, однако неравенство $|z| < R$, выделяющее те z , для которых ряд (62) сходится, определяет на плоскости z *круг сходимости* ряда (62) (рис. 5).

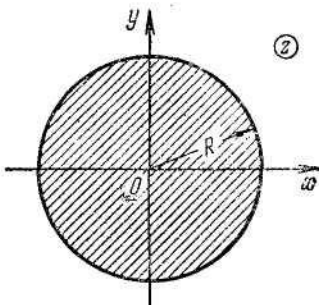


Рис. 5.

Подобным образом, для ряда по степеням $z - a$, где a — какое-нибудь комплексное число, неравенство $|z - a| < R$ определяет круг радиуса R с центром в точке a . Если $R = \infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости. Свойства, указанные в п. 11 п. 12, без существенных изменений переносятся на ряды вида (62); при этом сумма $S(z)$ будет *комплексной функцией от комплексного переменного*; интеграл понимается как неопределенный (первообразная).

Ранее мы говорили, что при этом тождества, справедливые для вещественных значений аргумента, сохраняют силу и для комплексных его значений. Покажем это на примере равенства

$$e^{\ln(1+x)} = 1 + x. \tag{63}$$

Для вещественных x оно справедливо в силу определения логарифма. Значит, если в ряд для e^y подставить ряд для $y = \ln(1+x)$ (п. 12), то после тождественных преобразований получится $1+x$. Если провести эти же преобразования, но считать x комплексным, т. е. писать z вместо x , то получится

$$e^{\ln(1+z)} = 1 + z, \tag{64}$$

что и требовалось доказать.

15. Понятие о числах Бернулли. В теории рядов, в частности степенных, а также в других отделах математики применяются так называемые *числа Бернулли*, открытые Я. Бернулли. Эти числа $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \dots$ определяются с помощью символического рекуррентного соотношения

$$(\beta + 1)^{n+1} - \beta^{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

где в левой части после раскрытия скобок надо в каждом члене заменить β^k на β_k .

Покажем, как это делается, на первых номерах:

$$n=1; \quad \beta_2 + 2\beta_1 + 1 - \beta_2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \beta_1 = -\frac{1}{2};$$

$$n=2; \quad \beta_3 + 3\beta_2 + 3\beta_1 + 1 - \beta_3 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \beta_2 = -\frac{3\beta_1 + 1}{3} = \frac{1}{6};$$

$$n=3; \quad \beta_4 + 4\beta_3 + 6\beta_2 + 4\beta_1 + 1 - \beta_4 = 0, \quad \text{т. е.} \quad \beta_3 = -\frac{6\beta_2 + 4\beta_1 + 1}{4} = 0.$$

Дальнейшие вычисления дают

$$\beta_4 = -\frac{1}{30}, \quad \beta_5 = 0, \quad \beta_6 = \frac{1}{42}, \quad \beta_7 = 0, \quad \beta_8 = -\frac{1}{30}, \quad \beta_9 = 0,$$

$$\beta_{10} = \frac{5}{66}, \quad \beta_{11} = 0, \quad \beta_{12} = -\frac{691}{2730}, \quad \beta_{13} = 0, \quad \beta_{14} = \frac{7}{6}, \dots$$

Можно доказать, что β_n с нечетными $n \geq 3$ равны нулю. Обозначив

$$B_n = (-1)^{n-1} \beta_{2n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

получим

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{5}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \dots$$

Эти числа также называются числами Бернулли.

Приведем некоторые формулы, содержащие числа Бернулли:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \zeta(2k) \quad (\text{см. п. 4}) = \frac{B_k (2\pi)^{2k}}{2 (2k)!} \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (65)$$

в частности,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{B_1 (2\pi)^2}{2 \cdot 2!} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{B_2 (2\pi)^4}{2 \cdot 4!} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{и т. д.}$$

Из формулы (65) вытекает, что все числа B_n положительные. Далее,

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1)}{(2n)!} B_n x^{2n-1}$$

(ср. с формулой (58)) и т. д.

16. Применение рядов к решению разностных уравнений.

Разностное уравнение связывает неизвестную величину и ее разности. Рассмотрим сначала случай, когда искомой является последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Тогда разностное уравнение, скажем, *второго порядка* в общем случае имеет вид

$$f(n, a_n, \Delta a_n, \Delta^2 a_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (66)$$

где

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n.$$

Если подставить

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \quad \Delta^2 a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n,$$

то взамен (66) получится уравнение вида

$$\varphi(n, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (67)$$

Конечно, в частных случаях в левые части уравнений (66) и (12.67) могут входить не все выписанные там аргументы.

Чтобы решить уравнение (67), можно, например, произвольно задать a_0 и a_1 ; затем, положив $n=0$ в (67), найти a_2 ; далее, положив $n=1$ в (67) и подставив найденное значение a_2 , найти a_3 и т. д. Таким методом шагов можно найти сколько угодно членов последовательности a_n .

Если уравнение (67) является линейным однородным с постоянными коэффициентами, т. е. имеет вид

$$\alpha a_n + \beta a_{n+1} + \gamma a_{n+2} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots; \alpha, \beta, \gamma = \text{const}), \quad (68)$$

то решение можно найти в общем виде, как мы сейчас покажем; аналогичный метод применим для уравнений любого порядка.

Рассмотрим *производящий* степенной ряд для искомой последовательности, т. е. ряд

$$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

коэффициенты которого равны ее членам. Мы будем интересоваться только коэффициентами этого ряда и не будем придавать x никаких числовых значений; тогда степенной ряд называется *формальным*. Легко найти произведение

$$\begin{aligned} (\gamma + \beta x + \alpha x^2) Q &= \\ &= \gamma a_0 + (\beta a_0 + \gamma a_1) x + (\alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2) x^2 + (\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3) x^3 + \dots \end{aligned}$$

В правой части все коэффициенты, начиная с коэффициента при x^2 , равны нулю в силу уравнения (68). Производя деление, получим

$$Q = \frac{\gamma a_0 + (\beta a_0 + \gamma a_1) x}{\gamma + \beta x + \alpha x^2}. \quad (69)$$

Так как a_0 и a_1 заданы, то в правой части получается отношение двух многочленов с заданными коэффициентами. Его можно разложить на сумму элементарных дробей первого типа. Каждая из них имеет вид

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha} = \frac{A}{(-a)^\alpha} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-\alpha} = \frac{B}{(1-\gamma \lambda)^\alpha} \quad \left(B = \frac{A}{(-a)^\alpha}; \quad \gamma = \frac{1}{a}\right);$$

для дроби (69) $\alpha=1$ или 2, но для разностных уравнений высшего порядка α может получиться большим. Эти дроби разлагаем в степенные ряды по формулам, получающимся из суммы геометрической прогрессии при помощи дифференцирования:

$$\frac{B}{1-\gamma x} = B + B\gamma x + B\gamma^2 x^2 + \dots + B\gamma^n x^n + \dots,$$

$$\frac{B}{(1-\gamma x)^2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{B}{1-\gamma x} \right)' = B + 2B\gamma x + 3B\gamma^2 x^2 + \dots + (n+1) B\gamma^n x^n + \dots$$

и т. д. Суммируя коэффициенты при x^n у всех полученных рядов, мы тем самым находим коэффициент a_n ряда Q , т. е. решение уравнения (68) в общем виде.

В качестве примера мы предлагаем читателю вывести общую формулу для чисел Фибоначчи $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \dots$, каждое из которых, начиная с третьего, равно сумме двух предшествующих:

$$a_n = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n}.$$

Рассматриваются также разностные уравнения, в которых искомой является функция $y(x)$, т. е. когда взамен (66) и (67) уравнение имеет одну из форм

$$\begin{aligned} f(x, y, \Delta_h y, \Delta_h^2 y) &= 0, \\ \varphi(x, y(x), y(x+h), y(x+2h)) &= 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Этот случай сводится к предшествующему в котором искомой является последовательность. Пусть, например, $0 \leq x < \infty$. Тогда надо обозначить $a_n = y(\xi + nh)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где ξ — какое-либо постоянное число, $0 \leq \xi < h$. Если в уравнении (70) положить $x = \xi + nh$, то оно переписется в виде

$$\varphi(\xi + nh, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0,$$

т. е. при постоянном ξ будет иметь форму (67). Найдя a_n и пользуясь произволом в выборе ξ , мы и получаем искомое решение $y(x)$. В частности, отсюда следует, что для уравнения (70) значения $y(x)$ при $0 \leq x < 2h$ можно задавать произвольно.

17. Кратные степенные ряды. Кратные степенные ряды играют для функций нескольких переменных такую же роль, как простые степенные ряды для функций одной переменной. Рассмотрим для простоты двойные степенные ряды; рассмотрение степенных рядов высшей кратности проходит аналогично

При записи двойного степенного ряда, как и при записи двойного числового ряда (п. 6), удобно пользоваться двойными индексами:

$$S(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} x^m y^n = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \quad (71)$$

От такого ряда требуется абсолютная сходимость, так что порядок его суммирования несуществен.

Область сходимости ряда (71) — это некоторая область на плоскости x, y (ею может оказаться, в частности, вся эта плоскость); эта область может иметь вид, изображенный на рис. 6.

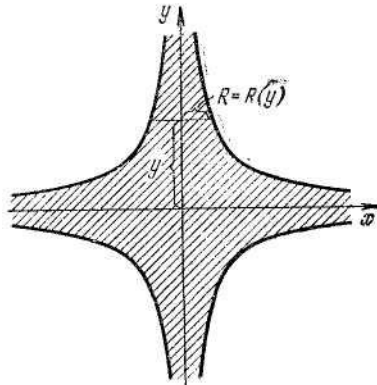


Рис. 6.

При каждом зафиксированном y получается ряд по степеням x , радиус сходимости которого R может зависеть от y , т. е. $R = R(y) < \infty$. Значит, область сходимости симметрична относительно оси y ; аналогично проверяем симметрию относительно оси x . Так как рассматривается абсолютная сходимость ряда (71), то $R(y)$ при $y \geq 0$ является невозрастающей функцией y .

Аналогично рассматриваются ряды вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} (x-a)^m (y-b)^n. \quad (72)$$

Здесь получается область сходимости с центром симметрии в точке $(a; b)$,

Свойства кратных степенных рядов подобны свойствам простых степенных рядов (п.11—12). Кратные ряды получаются, в частности, при разложении функции нескольких переменных в ряд Тейлора :

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) + \frac{f'_x(0, 0)}{1!} x + \\ & + \frac{f'_y(0, 0)}{1!} y + \frac{f''_{xx}(0, 0)}{2!} x^2 + \\ & + \frac{f''_{xy}(0, 0)}{1!1!} xy + \frac{f''_{yy}(0, 0)}{2!} y^2 + \dots; \end{aligned}$$

аналогично получаются ряды (72). Они рассматриваются также при применении метода малого параметра, если уравнение содержит несколько параметров, и в других вопросах.

18. Функции от матриц. Пусть \mathbf{A} — квадратная матрица, для определенности, третьего порядка; результаты, которые мы получим, справедливы для матриц любого порядка. Ранее мы изучали, что такое \mathbf{A}^2 и \mathbf{A}^{-1} . Но что надо понимать, например, под $e^{\mathbf{A}}$? Значение экспоненциальной функции в математике подсказывает, что этот вопрос далеко не праздный.

Оказывается, что разумный ответ на поставленный вопрос можно дать с помощью степенных рядов, наподобие того как ранее были определены функции от комплексного переменного. Пусть некоторая функция $f(x)$ допускает разложение в ряд

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (73)$$

Тогда по определению

$$f(\mathbf{A}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{A}^2 + \dots + a_n\mathbf{A}^n + \dots, \quad (74)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица того же порядка, что и \mathbf{A} . Например,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{1!} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots \quad (75)$$

Приведенное определение имеет смысл, если ряд (74) сходится. Можно указать простое условие для этой сходимости. Для этого допустим, что ряд (73) имеет радиус сходимости R , и предположим для простоты, что все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, матрицы \mathbf{A} различны. Тогда матрицу \mathbf{A} можно привести к диагональному виду, т. е. существует невырожденная матрица \mathbf{H} , для которой

$$\mathbf{H}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{H} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{H}\Lambda\mathbf{H}^{-1}, \quad \mathbf{A}^2 = (\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H}^{-1}) \cdot (\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H}^{-1}) = \mathbf{H}\Lambda^2\mathbf{H}^{-1}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2\mathbf{A} = (\mathbf{H}\Lambda^2\mathbf{H}^{-1})(\mathbf{H}\Lambda\mathbf{H}^{-1}) = \mathbf{H}\Lambda^3\mathbf{H}^{-1} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и ряд (74) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}a_0\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}a_1\Lambda\mathbf{H}^{-1} + \mathbf{H}a_2\Lambda^2\mathbf{H}^{-1} + \dots = \\ = \mathbf{H}(a_0\mathbf{I} + a_1\Lambda + a_2\Lambda^2 + \dots)\mathbf{H}^{-1}. \end{aligned} \quad (76)$$

Однако диагональную матрицу очень просто возводить в степень:

$$\Lambda^2 = \text{diag}(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2), \quad \Lambda^3 = \text{diag}(\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3) \text{ и т. д.} \quad (77)$$

(вообще при перемножении диагональных матриц получается диагональная матрица, элементы которой равны произведению соответствующих элементов матриц-множителей). Поэтому

$$\begin{aligned}
 & a_0 \mathbf{I} + a_1 \Lambda + a_2 \Lambda^2 + \dots = \\
 & = \text{diag} (a_0 + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1^2 + \dots, a_0 + a_1 \lambda_2 + a_2 \lambda_2^2 + \dots, a_0 + a_1 \lambda_3 + a_2 \lambda_3^2 + \dots).
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

Если ряды, стоящие на диагонали, сходятся, то сходится и ряд (76), а с ним и ряд (74). Отсюда мы приходим к выводу: *если все собственные значения матрицы \mathbf{A} по модулю меньше R (радиуса сходимости ряда (73)), то ряд (74) сходится и притом абсолютно; если хотя бы одно из этих собственных значений по модулю больше R , то ряд (74) расходится.* Можно доказать, что этот результат верен и в том случае, когда матрица \mathbf{A} имеет кратные собственные значения.

Из (76) и (78) вытекает также формула, справедливая для матрицы \mathbf{A} , приводимой к диагональному виду с помощью матрицы \mathbf{H} :

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{H} \text{diag} (f(\lambda_1), f(\lambda_2), f(\lambda_3)) \mathbf{H}^{-1}.$$

Из доказанного вытекает, например, что ряд (75) сходится для любой матрицы \mathbf{A} , так как соответствующий ряд имеет бесконечный радиус сходимости. Другой важный ряд

$$\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^n + \dots \tag{79}$$

сходится, если все собственные значения матрицы \mathbf{A} по модулю меньше единицы.

На функции от матриц распространяются многие свойства обычных функций; эти свойства можно доказывать с помощью действий над рядами, наподобие того как мы вывели формулу (64) из формулы (63). Например, из тождества

$$(1 + x + x^2 + \dots)(1 - x) = \frac{1}{1 - x}(1 - x) = 1$$

вытекает, что

$$(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

т. е. сумма ряда (79) в случае его сходимости равна $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. В то же время надо иметь в виду, что при доказательстве ряда свойств с помощью рядов применяется перестановка сомножителей, скажем, равенства вида $ab + ba = 2ab$, которая для матриц не всегда возможна. Например, это делается при доказательстве формулы

$$e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A} + \mathbf{B}},$$

которая, таким образом, *справедлива для перестановочных матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} .*

В качестве примера применения введенных понятий найдем условие сходимости метода последовательных приближений при решении системы линейных алгебраических уравнений. Систему можно в векторно-матричной форме переписать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{\delta}, \tag{80}$$

где δ — заданный вектор, A — матрица коэффициентов, а x — искомый вектор. Метод итераций даст, начиная с некоторого $x = x_0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \delta - A x_0; \\ x_2 &= \delta - A x_1 = \delta - A(\delta - A x_0) = \delta + A\delta - A^2 x_0; \\ x_3 &= \delta + A x_2 = \delta + A\delta + A^2\delta - A^3 x_0 \end{aligned}$$

и т. д., вообще

$$x_n = (I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) \delta + A^n x_0. \quad (81)$$

Для сходимости процесса требуется, чтобы влияние нулевого приближения в пределе сошло на нет, т. е. чтобы

$$A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

А для этого в силу формул (77) требуется, чтобы *все собственные значения матрицы A были по модулю меньше единицы*. Это и есть условие сходимости метода итераций. Если оно выполнено, то, переходя в формуле (81) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (I + A + A^2 + \dots + A^n + \dots) \delta = (I - A)^{-1} \delta.$$

Легко проверить с помощью непосредственной подстановки, что полученный вектор \bar{x} удовлетворяет уравнению (80).

Подобно векторным функциям от скалярного аргумента можно рассматривать *матричные функции от скалярного аргумента $V = V(x)$* , на которые легко распространяются многие обычные свойства. Например, часто применяется функция

$$V = e^{Ax} \quad (-\infty < x < \infty; Ax = xA),$$

где A — некоторая постоянная матрица. С помощью рядов легко доказать свойство

$$(e^{Ax})' = A e^{Ax},$$

из которого, в частности, следует, что для любого постоянного вектора c будет

$$(e^{Ax} c)' = A e^{Ax} c.$$

Но это значит, что векторная функция от x ,

$$y = e^{Ax} c, \quad (82)$$

является решением матричного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y' = Ay. \quad (83)$$

Если дано начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0,$$

то из (82) получаем

$$y_0 = e^{Ax_0} c, \quad \text{т. е. } c = e^{-Ax_0} y_0,$$

и мы получаем *явную формулу для решения*

$$y = e^{\Lambda x} e^{-\Lambda x_0} y_0 - e^{(\tau - \tau_0) \Lambda} y_0.$$

Так как мы смогли удовлетворить любому начальному условию, то формула (82) дает *общее решение уравнения* (83).

19. Асимптотические разложения. Асимптотические разложения, изученные крупным французским математиком А. Пуанкаре (1854—1912), широко применяются в теории моделирования. Мы будем рассматривать более распространенные ряды по степеням $1/x$, а не x , что не принципиально, так как замена $1/x=x_1$ переводит *разложение на бесконечности* в *разложение в нуле*. Например, из ряда для e^x сразу получаем

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1!x} + \frac{1}{2!x^2} + \dots + \frac{1}{n!x^n} + \dots \quad (84)$$

Начнем с примера. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{x-s}}{s} ds \quad (0 < x < \infty)$$

при $x \rightarrow \infty$. С помощью правила Лопиталья легко проверить что $f(x) \sim x^{-1}$, т. е.

$$f(x) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \rightarrow \infty). \quad (85)$$

Чтобы уточнить это разложение, произведем интегрирование по частям:

$$\int_x^{\infty} \frac{e^{x-s}}{s} ds = \left(-e^{x-s} \frac{1}{s}\right) \Big|_x^{\infty} - \int_x^{\infty} \frac{e^{x-s}}{s^2} ds = \frac{1}{x} - \int_x^{\infty} \frac{e^{x-s}}{s^2} ds.$$

Аналогично проверяем, что последний интеграл эквивалентен x^{-2} , т. е. получаем

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right). \quad (86)$$

Это более точное асимптотическое выражение, чем (85), так как при $x \rightarrow \infty$ неопределенное слагаемое в (86), т. е. $o(1/x^2)$, быстрее стремится к нулю, чем неопределенное слагаемое в (85). Дальнейшие интегрирования по частям дают все более точные асимптотические выражения:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right);$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ и т. д.} \quad (87)$$

$$(88)$$

Казалось бы, мы должны получить в пределе разложение функции $f(x)$ в ряд

$$\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \frac{4!}{x^5} - \dots \quad (89)$$

Однако с помощью признака Даламбера легко проверить, что этот ряд имеет нулевой радиус сходимости, т. е. *расходится при всех x* . Поэтому рядом (89) «целиком» пользоваться нельзя; но формулы (85) — (88) показывают, что можно пользоваться его частными суммами. Такие ряды называются асимптотически сходящимися.

Общее определение таково. Говорят, что функция $f(x)$ допускает при $x \rightarrow \infty$ асимптотическое разложение

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \dots, \quad (90)$$

если для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ имеет место представление

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (\text{при } x \rightarrow \infty).$$

Для обычных разложений в степенные ряды вида (84) это свойство удовлетворяется автоматически. Однако оно может выполняться и в том случае, если ряд (90) всюду расходится (тогда он называется *асимптотически сходящимся* или просто *асимптотическим рядом*) или же сходится, но не к $f(x)$.

При практическом применении ряда (90) его обрывают на некотором члене, а затем, оценивая величину последних членов, заключают, начиная с какого x можно пользоваться выбранной частной суммой.

7.4. Тригонометрические ряды

20. Свойство ортогональности. Две вещественные функции $g(x)$ и $h(x)$, заданные на конечном или бесконечном интервале $a < x < b$, называются *ортогональными* друг другу на этом интервале, если

$$\int_a^b g(x) h(x) dx = 0. \quad (91)$$

При этом функции предполагаются конечными либо бесконечными, но обязательно с абсолютно сходящимся интегралом (91). Название «ортогональные» объясняется тем, что, формула (91) во многом аналогична условию перпендикулярности двух векторов, заданных своими декартовыми проекциями.

Система функций называется *ортогональной* на некотором интервале, если каждые две функции из этой системы ортогональны друг другу на этом интервале. Исторически первым и наиболее важным

примером ортогональной системы функций явилась система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (92)$$

на интервале

$$-\pi \leq x \leq \pi.$$

Легко убедиться в том, что она действительно ортогональная:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (93)$$

(при $m \neq n$) и аналогично

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx &= 0 \quad (\text{при } m \neq n), \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx &= 0 \quad (\text{при любых } m, n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Система (92) ортогональна также на интервале $0 \leq x \leq 2\pi$ и вообще на любом интервале длины 2π . Это вытекает из известного свойства, если взять в качестве $f(x)$ произведение двух функций (92), а $A=2\pi$.

Если воспользоваться свойством интеграла от четной функции, то из (93) получим

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx &= 2 \int_0^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \\ (m, n &= 0, 1, 2, \dots; m \neq n), \end{aligned}$$

т. е. система функций

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots \quad (94)$$

ортогональна на интервале $0 \leq x \leq \pi$. Аналогично проверяется, что на том же интервале система функций

$$\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots \quad (95)$$

также ортогональна. (В тоже время система функций (92) на интервале $0 \leq x \leq \pi$ не ортогональна.)

Если «растянуть» вдоль оси x каждую из функций (92) в l раз, мы получим систему функций

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots, \quad (96)$$

ортогональную на интервале $-l \leq x \leq l$. Подобным образом можно равномерно «растянуть» системы функций (94) и (95) и вообще любую

ортогональную систему функций. Применяется также сдвиг ортогональной системы функций вдоль оси абсцисс, отчего она не перестает быть ортогональной (на сдвинутом интервале).

Свойством ортогональности могут обладать не только тригонометрические функции. Например, сейчас мы построим систему ортогональных полиномов на интервале $-1 \leq x \leq 1$.

Будем исходить из системы функции

$$1, x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots \quad (-1 \leq x \leq 1). \quad (97)$$

Первые две функции ортогональны друг другу:

$$\int_{-1}^1 1 \cdot x \, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0,$$

поэтому положим $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) \equiv x$. В то же время третья функция не ортогональна первой. Поэтому в качестве $P_2(x)$ возьмем линейную комбинацию первых трех функций (97), т. е. $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, причем коэффициенты a, b, c подберем так, чтобы $P_2(x)$ был ортогональным к уже построенным полиномам $P_0(x)$ и $P_1(x)$, т. е.

$$\int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) \cdot 1 \cdot dx = 0, \quad \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c) \cdot x \cdot dx = 0.$$

Отсюда найдем

$$b = 0, \quad a = -3c, \quad \text{т. е.} \quad P_2(x) = c(-3x^2 + 1).$$

Здесь c —произвольная постоянная. Обычно она выбирается так, чтобы $P_2(1) = 1$. (Такой выбор из равноправных объектов какого-либо одного называется *нормировкой*.) Получим $c = -1/2$, т. е. окончательно

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Для построения $P_3(x)$ берем комбинацию первых четырех функций (88), т. е. $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, причем коэффициенты a, b, c, d подбираем так, чтобы $P_3(x)$ был ортогональным к уже построенным полиномам $P_0(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Отсюда при дополнительном условии $P_3(1) = 1$ найдем подобно предыдущему

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x.$$

Аналогично строим

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \text{ и т. д.}$$

Эти многочлены ортогональны друг другу на интервале $-1 \leq x \leq 1$. Они были исследованы Лежандром в 1783—1785 гг. и их называют теперь *многочленами Лежандра*. Они играют важную роль в различных областях математики и физики.

Подобный процесс ортогонализации, который мы проделали над системой функций (97) на интервале $-1 \leq x \leq 1$, можно проделать над любой линейно независимой системой функций на *любом* интервале, если интегралы от квадратов этих функций по рассматриваемому интервалу сходятся.

21. Ряды по ортогональным функциям. Пусть задана система функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (98)$$

ортогональная на некотором интервале $a < x < b$. Может возникнуть задача о разложении произвольной функции $f(x)$ на этом интервале в ряд по функциям (98), т. е. в ряд вида

$$f(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_n g_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g_n(x), \quad (99)$$

где a_n — числовые коэффициенты. При этом возникают вопросы: возможно ли разложение для любой функции $f(x)$? Как найти коэффициенты a_n ? Как сходится ряд (99)?

Будем считать для простоты все рассматриваемые функции, а также интервал $a < x < b$ конечными. Ответ на первый вопрос зависит от выбора системы (98). Если разложение (99) возможно для любой функции $f(x)$, то система функций (98) называется *полной*. Можно доказать, что *все приведенные в п. 20 ортогональные системы функций являются полными* на указанных там интервалах.

Перейдем теперь к нахождению коэффициентов a_n разложения (99), причем будем считать, что ни одна из функций (98) не равна тождественно нулю. Для этого умножим обе части (99) на $g_n(x)$ и проинтегрируем результат по интервалу $a \leq x \leq b$:

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x) g_n(x) dx = \\ & = a_1 \int_a^b g_1(x) g_n(x) dx + a_2 \int_a^b g_2(x) g_n(x) dx + \dots + a_n \int_a^b g_n^2(x) dx + \dots \end{aligned}$$

В силу ортогональности системы (98), в правой части последнего равенства все интегралы равны нулю, за исключением интеграла от $g_n^2(x)$, и мы получаем формулу для коэффициентов

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n(x) dx}{\int_a^b g_n^2(x) dx} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (100)$$

Так как коэффициенты находятся однозначно, то мы заключаем, в частности, что *если суммы двух рядов (99) тождественно равны, то и коэффициенты при одинаковых функциях $g_n(x)$ в этих рядах также одинаковы; если сумма ряда (99) тождественно равна нулю, то и все коэффициенты равны нулю.*

22. Ряды Фурье. Эти общие результаты можно применить к конкретным ортогональным системам функций. Так, для системы (92) получаем, что любую конечную функцию, заданную при $-\pi \leq x \leq \pi$, можно разложить в ряд вида

$$f(x) = a_1 + a_2 \cos x + a_3 \sin x + a_4 \cos 2x + a_5 \sin 2x + \dots$$

Здесь удобнее обозначить коэффициенты по-другому и написать

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots = \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \end{aligned} \quad (101)$$

Коэффициенты этого ряда находятся по формулам (100):

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot 1 dx}{\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \geq 1). \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Аналогично получают ряды по системам функций (94) или (95)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad (103)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \geq 1);$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (0 \leq x \leq \pi), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx. \quad (104)$$

Часто применяются ряды по функциям (96) и по подобным же образом растянутым системам функций (94) или (95):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right) \quad (-l \leq x \leq l), \quad (105)$$

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} \, dx \quad (n \geq 1);$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi nx}{l} \quad (0 \leq x \leq l), \quad (106)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi nx}{l} \, dx \quad (n \geq 1);$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi nx}{l} \, dx \quad (n \geq 1). \quad (107)$$

Ряды (101), (103) и (104) являются частными случаями рядов (105), (106) и (107), именно, первые получаются из вторых при $l = \pi$. Все они называются *рядами Фурье* по имени выдающегося французского математика Ж. Фурье (1768—1830).

Приведем примеры разложения в ряд Фурье. Пусть функцию $y = x$ требуется разложить при $0 \leq x \leq 1$ в ряд (106); для этого подсчитываем коэффициенты:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l x \, dx = \frac{l}{2};$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} x \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l - \frac{2}{l} \int_0^l \frac{l}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} \frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} \Big|_0^l = \frac{2l}{\pi^2 n^2} (\cos \pi n - 1) = -\frac{2l}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n] \quad (n \geq 1).
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$a_1 = -\frac{4l}{\pi^2 1^2}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{4l}{\pi^2 3^2}, \quad a_4 = 0, \quad \dots$$

и окончательно

$$x = l \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right) \right] \quad (0 \leq x \leq l). \quad (108)$$

В качестве второго примера возьмем функцию, заданную несколькими формулами (график ее составляет среднюю часть рис. 7, б):

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 1 \quad (-l < x < -l + \alpha), \quad = 0 \quad (-l + \alpha < x < 0), \\
 &= 1 \quad (0 < x < \alpha), \quad = 0 \quad (\alpha < x < l),
 \end{aligned}$$

где α — некоторое число,

$$0 < \alpha < l,$$

и разложим ее в ряд (105):

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} + \int_{-l+\alpha}^0 + \int_0^\alpha + \int_\alpha^l \right) f(x) dx = \\
 &= \frac{1}{2l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} 1 dx + \int_{-l+\alpha}^0 0 dx + \int_0^\alpha 1 dx + \int_\alpha^l 0 dx \right) = \frac{1}{2l} (\alpha + 0 + \alpha + 0) = \frac{\alpha}{l}.
 \end{aligned}$$

(Аналогичным образом находят интеграл от любой функции, заданной несколькими формулами.)

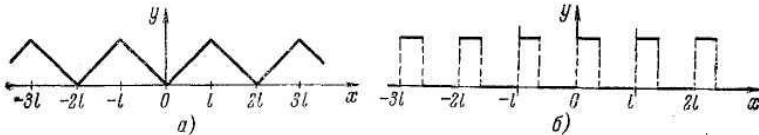


Рис. 7.

Далее,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^{\alpha} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right) = \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[\sin \frac{n\pi(-l+\alpha)}{l} + \sin \frac{n\pi\alpha}{l} \right] = \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left(-\sin \frac{n\pi l}{l} \cos \frac{n\pi\alpha}{l} + \cos \frac{n\pi l}{l} \sin \frac{n\pi\alpha}{l} + \sin \frac{n\pi\alpha}{l} \right) = \\
 &= \frac{1}{n\pi} [(-1)^n + 1] \sin \frac{n\pi\alpha}{l},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{l} \left(\int_{-l}^{-l+\alpha} \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \int_0^{\alpha} \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right) = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi(-l+\alpha)}{l} - \cos(-n\pi) + \cos \frac{n\pi\alpha}{l} - 1 \right] = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi l}{l} \cos \frac{n\pi\alpha}{l} + \sin \frac{n\pi l}{l} \sin \frac{n\pi\alpha}{l} - (-1)^n + \cos \frac{n\pi\alpha}{l} - 1 \right] = \\
 &= -\frac{1}{n\pi} \left\{ [(-1)^n + 1] \cos \frac{n\pi\alpha}{l} - (-1)^n - 1 \right\} = \frac{1}{n\pi} [(-1)^n + 1] \left(1 - \cos \frac{n\pi\alpha}{l} \right).
 \end{aligned}$$

Таким образом, при n нечетном все $a_n = b_n = 0$, тогда как

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi} \sin \frac{2k\pi\alpha}{l}, \quad b_{2k} = \frac{1}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi\alpha}{l} \right) \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Особенно простой результат получается, если $\alpha = l/2$; тогда

$$a_{2k} = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi = 0, \quad b_{2k} = \frac{1}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \frac{1}{k\pi} [1 - (-1)^k]$$

и ряд принимает вид

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi x}{l} + \dots \right). \quad (109)$$

Таким образом, функцию, заданную несколькими формулами, оказывается возможным представить в виде единого ряда. Открытие Фурье этого факта сыграло в истории математики большую роль, так как привело к значительному расширению содержания понятия функции.

При практическом разложении функции (особенно, заданной таблично или графически) в ряд Фурье обычно для подсчета коэффициентов пользуются формулами численного интегрирования. Пусть, например, рассматривается разложение в ряд (107) и мы хотим воспользоваться формулой трапеций, разбив отрезок интегрирования на 24 части. Тогда, обозначив

$$x_k = \frac{k l}{24}, \quad f_k = f(x_k) \quad (k=0, 1, \dots, 24),$$

получим

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \approx \\
 &\approx \frac{2}{l} \frac{l}{24} \left(\frac{f_0}{2} \sin \frac{n\pi x_0}{l} + f_1 \sin \frac{n\pi x_1}{l} + \dots + \frac{f_{24}}{2} \sin \frac{n\pi x_{24}}{l} \right) = \\
 &= \frac{1}{12} \left(\frac{f_0}{2} \sin 0^\circ n + f_1 \sin 7,5^\circ n + f_2 \sin 15^\circ n + \dots + \frac{f_{24}}{2} \sin 180^\circ n \right). \quad (110)
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что здесь при любом n требуются только следующие значения синуса:

$\sin 0^\circ = 0,0000,$	$\sin 52,5^\circ = 0,7934,$
$\sin 7,5^\circ = 0,1305,$	$\sin 60^\circ = 0,8660,$
$\sin 15^\circ = 0,2588,$	$\sin 67,5^\circ = 0,9239,$
$\sin 22,5^\circ = 0,3827,$	$\sin 75^\circ = 0,9659,$
$\sin 30^\circ = 0,5000,$	$\sin 82,5^\circ = 0,9914,$
$\sin 37,5^\circ = 0,6088,$	$\sin 90^\circ = 1,0000.$
$\sin 45^\circ = 0,7071,$	

При применении формулы (110) для данного n нужно подставить значения синуса из этой таблицы, пользуясь тригонометрическими формулами приведения; затем сгруппировать члены с одинаковыми вторыми множителями, сложить в этих членах значения f_k и, после умножения, подсчитать полную сумму.

23. Разложение периодической функции. Ряды Фурье применяются не только для разложения функции, заданной на конечном интервале, но и для разложения периодической функции, заданной на всей оси. Предположим сначала, что функция $f(x)$ задана при $-\pi \leq x \leq \pi$, и разложим ее в ряд (101). Его члены имеют смысл и вне данного интервала, причем их период равен 2π , так как

$$\begin{aligned}
 \cos n(x + 2\pi) &\equiv \cos (nx + 2n\pi) \equiv \cos nx; \\
 \sin n(x + 2\pi) &\equiv \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned}$$

Значит, и вся сумма периодична с периодом 2π . Но так как на интервале $-\pi \leq x \leq \pi$ она равна $f(x)$, то сумма ряда (101) дает периодическое продолжение функции $f(x)$ с интервала $-\pi \leq x \leq \pi$ на всю ось x с периодом 2π .

Аналогично, так как все члены ряда (103) — четные функции, то его сумма дает четное периодическое продолжение функции $f(x)$ с интервала $0 \leq x \leq \pi$ на всю ось с периодом 2π ; сумма же ряда (104) даст нечетное продолжение с тем же периодом. Аналогичный результат получается для рядов (105)—(107), где, однако, период равен $2l$.

Так, на рис. 7 изображены рассмотренные на всей оси x суммы рядов, разобранных в примерах п. 22; отметим, что во втором примере, хотя $2l$ и являются периодом, наименьший период равен l .

Пусть теперь функция $f(x)$ с самого начала задана на всей оси x как периодическая функция с периодом 2π . Если тогда составить ряд (101), где коэффициенты вычислены по формулам (102), то он, как мы

показали, дает периодическое продолжение $f(x)$ с отрезка $-\pi \leq x \leq \pi$ на всю ось с периодом 2π , т. е. совпадает с $f(x)$ на всей оси x .

При этом коэффициенты можно вычислять также и по формулам

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(x) dx \quad (\alpha \text{ любое}); \quad \text{в частности, } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

и аналогично для коэффициентов a_n, b_n ; это вытекает из периодичности подынтегральной функции.

Подобным образом четная (нечетная) периодическая функция с периодом $2l$ разлагается в ряд (103) (соответственно (104)); для периода $2l$ получаются ряды (105)—(107).

Разложение (105) часто преобразуют с помощью формулы (14). Получится

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin \left(\frac{n\pi x}{l} + \alpha_n \right). \tag{111}$$

Постоянная a_0 равна среднему значению функции $f(x)$ на всей оси, так как средние значения прочих слагаемых равны нулю. Первое непостоянное слагаемое называется *основной гармоникой*; оно имеет период как раз $2l$. Дальнейшие слагаемые называются *верхними гармониками*; их наименьшие периоды равны последовательно $2l/2, 2l/3, 2l/4$ и т.д. Поэтому само разложение периодической функции в ряд Фурье, т. е. в сумму гармоник, называется также *гармоническим анализом*.

Если независимая переменная истолковывается как время, то лучше период обозначить через T , а формулу (111) переписать в виде

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \sin (n\omega t + \alpha_n) \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right).$$

Таким образом, ряд Фурье осуществляет представление произвольного периодического колебания в виде суммы гармонических колебаний с кратными частотами. Это разложение, в частности, хорошо известно в акустике, где основное слагаемое $M_L \sin ((\omega t + \alpha_1))$ определяет высоту звука, *основной тон*, а дальнейшим слагаемым соответствуют *обертоны*, от которых зависит *тембр* звука.

В разложении (112) все периоды слагаемых *соизмеримы* между собой, т. е. их отношения равны рациональным числам. Это связано с тем общим фактом, что, как можно доказать, *сумма периодических функций с различными периодами будет периодической в том и только в том случае, если периоды у слагаемых соизмеримые*. Суммы периодических функций с несоизмеримыми периодами принадлежат к

более широкому классу *почти периодических функций*, которые широко применяются, в частности, при рассмотрении результата наложения несинхронизированных колебаний.

24. Пример. Функции Бесселя как коэффициенты Фурье. В теоретической радиотехнике рассматривается функция

$$e^{ix \cos t} = \cos(x \cos t) + i \sin(x \cos t). \quad (112)$$

При фиксированном x она периодична по t с периодом 2π и четна, а потому разлагается в ряд Фурье вида (103). Чтобы получить это разложение, можно перемножить ряды

$$e^{\frac{ix}{2} e^{it}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) e^{it} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 e^{i2t} + \frac{1}{3!} \left(\frac{ix}{2}\right)^3 e^{i3t} + \dots,$$

$$e^{\frac{ix}{2} e^{-it}} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) e^{-it} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 e^{-i2t} + \frac{1}{3!} \left(\frac{ix}{2}\right)^3 e^{-i3t} + \dots.$$

После умножения слева получится функция (112), а справа объединим члены с одинаковыми экспонентами. Именно, при e^{ikt} и при e^{-ikt} получится коэффициент

$$1 \cdot \frac{1}{k!} \left(\frac{ix}{2}\right)^k + \frac{1}{1!} \left(\frac{ix}{2}\right) \frac{1}{(k+1)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{k+1} + \frac{1}{2!} \left(\frac{ix}{2}\right)^2 \frac{1}{(k+2)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{k+2} + \dots =$$

$$= i^k \left(\frac{1}{0! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^k - \frac{1}{1! (k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2} + \frac{1}{2! (k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{k+4} - \dots \right) = i^k J_k(x)$$

Итак,

$$e^{ix \cos t} = J_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(x) (e^{ikt} + e^{-ikt}) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} i^k J_k(x) \cos kt. \quad (113)$$

Это и есть требуемое разложение в ряд Фурье. Отделяя в нем вещественную часть от мнимой, получим также разложения

$$\cos(x \cos t) = J_0(x) - 2J_2(x) \cos 2t + 2J_4(x) \cos 4t - \dots,$$

$$\sin(x \cos t) = 2J_1(x) \cos t - 2J_3(x) \cos 3t + 2J_5(x) \cos 5t - \dots$$

Из формулы (113) вытекает, в частности, *интегральное представление функций Бесселя целого порядка*

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi i^n} \int_0^{\pi} e^{ix \cos t} \cos nt \, dt.$$

25. Характер сходимости ряда Фурье. Пусть ограниченная периодическая функция $f(x)$ периода $2l$ разложена в ряд Фурье (105). Легко проверить, что *все коэффициенты Фурье ограничены*; например, оценим коэффициенты a_n :

$$|a_n| = \frac{1}{l} \left| \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right| \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| \left| \cos \frac{n\pi x}{l} \right| dx \leq \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)| dx.$$

Тот же результат получится, если функция $f(x)$ не ограничена, но абсолютно интегрируема на своем периоде, т. е. если

$$\int_{-l}^l |f(x)| dx < \infty.$$

Пусть функция $f(x)$ ограничена и разрывна. Тогда ее коэффициенты Фурье *убывают со скоростью* $1/n$, как во втором примере п. 22.

В самом деле, допустим для определенности, что $f(x)$ имеет на своем периоде два разрыва, при $x = x_1$ и $x = x_2$, причем $-l < x_1 < x_2 < l$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = = \frac{1}{l} \int_{-l}^{x_1} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_{x_2}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Каждый из этих интегралов проинтегрируем по частям:

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \left[f(x_1-0) \sin \frac{n\pi x_1}{l} - f(-l) \sin \frac{n\pi(-l)}{l} - \int_{-l}^{x_1} f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \right] + \dots = = -\frac{1}{n\pi} [f(x_1+0) - f(x_1-0)] \sin \frac{n\pi x_1}{l} - \frac{1}{n\pi} [f(x_2+0) - -f(x_2-0)] \sin \frac{n\pi x_2}{l} - \frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (114)$$

Последний интеграл отличается от коэффициента Фурье для $f'(x)$ лишь постоянным множителем l . Однако

$$\int_{-l}^l |f'(x)| dx < \infty,$$

так как на каждом интервале (α, β) монотонности и непрерывности функции $f(x)$ производная $f'(x)$ сохраняет знак и потому

$$\int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = \left| \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) dx \right| = |f(\beta-0) - f(\alpha+0)| < \infty.$$

(При этом мы исключаем функции, имеющие бесконечное число интервалов монотонности на конечном интервале изменения x , как

чрезвычайно редкие.) Согласно предыдущему последний интеграл в формуле (114) ограничен, откуда и следует наше утверждение о скорости убывания коэффициентов Фурье,

Пусть теперь сама функция $f(x)$ непрерывна, но ее производная имеет разрывы и ограничена, как в первом примере п. 22. Тогда коэффициенты Фурье *убывают со скоростью* $1/n^2$.

В самом деле, интегрируя по частям выражение для коэффициента Фурье, получим

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Применяя к интегралу, стоящему в правой части, рассуждения последних абзацев, получим, что при $n \rightarrow \infty$ он убывает со скоростью $1/n$, а значит, a_n и аналогично b_n убывают со скоростью $1/n^2$. При помощи двукратного интегрирования по частям доказывается, что если $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны, а $f''(x)$ имеет разрывы, то коэффициенты убывают как $1/n^2$ и т. д. Итак, *чем функция «гладже», т. е. чем больше она имеет непрерывных производных, тем быстрее убывают коэффициенты, т. е. тем быстрее сходится ее ряд Фурье.*

Ряд Фурье для разрывной функции $f(x)$ сходится очень медленно и вычисления с его помощью практически затруднительны. Поэтому иногда поступают так: подбирают какую-либо по возможности более простую функцию $\varphi(x)$, имеющую разрывы в тех же точках, что и $f(x)$, причем с такими же скачками (рис. 8).

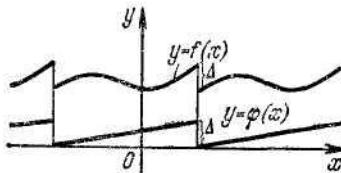


Рис. 8.

Тогда разность $f(x) - \varphi(x)$ уже не имеет разрывов и потому разлагается в ряд Фурье, сходящийся лучше, чем ряд для $f(x)$. Поэтому $f(x)$ равно сумме простой функции $\varphi(x)$ и сравнительно неплохо сходящегося тригонометрического ряда. Аналогично можно устранить разрывы у первой производной и т. д. (Ср. метод выделения особенностей в п. 4.)

Итак, если функция $f(x)$ непрерывна, а ее производная ограничена, то коэффициенты Фурье убывают со скоростью не менее $1/n^2$. Но так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

(п. 1), то в силу признака Вейерштрасса (п. 8) ряд Фурье сходится равномерно на всей оси x . Более детальное исследование показывает, что при этом условие, наложенное нами на $f'(x)$, является излишним, так как для применимости признака Вейерштрасса коэффициенты могут стремиться к нулю с еще меньшей скоростью. В данном случае при подстановке в ряд численных значений x мы получим $f(x)$ тождественно.

Если функция $f(x)$ разрывна, то ее ряд Фурье заведомо не может сходиться равномерно, так как его члены — непрерывные функции (п. 9, свойство 1). Можно показать, что в этом случае при подстановке в ряд численных значений x получается $f(x)$ во всех точках непрерывности функции f и

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

в ее точках разрыва. Так, ряд (109) при $x=0$ имеет сумму $1/2$, так как в данном случае $f(-0) = 0, f(+0) = 1$.

Если функцию разлагать в ряд Фурье на конечном интервале (п. 22), то скорость сходимости ряда определяется разрывами этой функции и ее производных *после ее продолжения на всю ось x* , описанного в п. 23. Так, в первом примере п. 22 коэффициенты имели порядок $1/n^2$, так как после продолжения (рис. 7, а) получилась функция с разрывами у первой производной. Если ту же функцию $y=x$ раскладывать в ряд по синусам (ряд (107)), то коэффициенты имели бы порядок $1/n$, так как тогда после продолжения имела бы разрывы сама функция.

С помощью рядов Фурье можно найти суммы многих интересных числовых рядов. Так, если в ряд (109) подставить $x = l/4$, то получится

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \right),$$

откуда

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Если в ряд (108) подставить $x = 0$, то получится

$$0 = l \left[\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) \right],$$

т.е.

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Отсюда в свою очередь можно найти значение $\zeta(2)$ (формула (109)):

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\zeta(2)}{4}, \end{aligned}$$

откуда

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,645.$$

26. Комплексная форма ряда Фурье. В ряде Фурье можно с помощью формулы Эйлера перейти от тригонометрических функций к показательным, что иногда бывает предпочтительнее. Например, если проделать такое преобразование над рядом (105), то надо воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi n x}{l} &= \frac{e^{\frac{i\pi n x}{l}} + e^{-\frac{i\pi n x}{l}}}{2}, \\ \sin \frac{\pi n x}{2} &= \frac{e^{\frac{i\pi n x}{2}} - e^{-\frac{i\pi n x}{2}}}{2i}. \end{aligned}$$

После подстановки и приведения подобных членов в правой части получится сумма ряда по всем этим экспонентам, другими словами, по экспонентам

$$e^{\frac{i\pi n x}{l}},$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Итак,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}}. \quad (115)$$

Чтобы найти коэффициенты c_n , умножим обе части на

$$e^{-\frac{i\pi n x}{l}}$$

при каком-либо фиксированном n и проинтегрируем результат от $-l$ до l . Для членов, номер которых не равен выбранному n , интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l c_m e^{\frac{i\pi m x}{l}} e^{-\frac{i\pi n x}{l}} dx &= c_m \frac{e^{\frac{i\pi(m-n)x}{l}}}{i\pi(m-n)} \Big|_{-l}^l = \\ &= \frac{c_m l}{i\pi(m-n)} [e^{i\pi(m-n)} - e^{-i\pi(m-n)}] = \frac{2c_m l}{\pi(m-n)} \sin \pi(m-n) = 0, \end{aligned}$$

тогда как для члена с номером n интеграл равен $2lc_n$. Итак, коэффициенты ряда (115) вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{l}} dx. \quad (116)$$

В общем случае разложение по комплексным ортогональным функциям происходит так. Две *комплексные функции* $g(x)$ и $h(x)$ называются *ортогональными* друг другу на отрезке $a \leq x \leq b$, если

$$\int_a^b g(x) h^*(x) dx = 0, \quad (117)$$

где звездочкой обозначена сопряженная функция. В частном случае, когда g и h вещественные, это определение переходит в определение (91). Отметим, что если взять от обеих частей (117) сопряженные величины, то мы получим

$$\left(\int_a^b g(x) h^*(x) dx \right)^* = \int_a^b (g(x) h^*(x))^* dx = \int_a^b h(x) g^*(x) dx = 0,$$

т. е. условие ортогональности является взаимным: если g ортогональна h , то h ортогональна g .

Если имеется система комплексных функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots, \quad (118)$$

ортогональных на отрезке $a \leq x \leq b$, и если какую-либо комплексную функцию $f(x)$ можно разложить в ряд по этим функциям (так будет всегда, если система (108) полная), то

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} c_n g_n(x). \quad (119)$$

Чтобы найти коэффициенты разложения, надо обе части умножить на $g_n^*(x)$ при каком-либо фиксированном n и проинтегрировать результат от a до b . В силу условия ортогональности в правой части останется только один член и мы получим формулу

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) g_n^*(x) dx}{\int_a^b g_n(x) g_n^*(x) dx} = \frac{\int_a^b f(x) g_n^*(x) dx}{\int_a^b |g_n(x)|^2 dx}.$$

В частности, разложение (115) — это разложение по ортогональной системе функций

$$\dots, e^{-\frac{i\pi x}{l}}, e^{-\frac{i\pi x}{l}}, 1, e^{\frac{i\pi x}{l}}, e^{\frac{i\pi x}{l}}, \dots,$$

полной на отрезке $-l \leq x \leq l$. Оно пригодно для любой ограниченной или даже неограниченной, но абсолютно интегрируемой комплексной функции $f(x)$.

27. Равенство Парсеваля. Будем опять считать функции вещественными. Пусть система функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots \quad (120)$$

ортогональна и *полна* на интервале $a \leq x \leq b$. Рассмотрим разложение (99) произвольной функции $f(x)$ в ряд по этим функциям. Возводя обе части этого разложения в квадрат и интегрируя результат от a до b , получим в левой части

$$\int_a^b f^2(x) dx;$$

будем предполагать, что этот интеграл имеет конечное значение. В правой части после возведения в квадрат получится сумма квадратов отдельных членов и их попарных произведений. Интегралы от этих произведений равны нулю в силу ортогональности функций (120), а интервалы от квадратов останутся, т. е.

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx. \quad (121)$$

Эта формула называется *равенством Парсеваля*. В частности, для ряда Фурье (101) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 2\pi a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),$$

а для ряда (105)

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx = 2l a_0^2 + l \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Из них следует, что при $n \rightarrow \infty$ будет $a_n \rightarrow 0$ и $b_n \rightarrow 0$.

Если система (120) не *полна*, то, как можно доказать, ее можно расширить до *полной*. Так как после такого расширения справедливо равенство вида (121), а все члены в правой части ≥ 0 , то до расширения имело место неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \int_a^b g_n^2(x) dx \leq \int_a^b f^2(x) dx;$$

при этом знак равенства здесь имеет место только для тех функций $f(x)$, которые можно разложить по системе функций (120).

Равенство Парсеваля (121) дает возможность по-новому подойти к построению ряда по ортогональным функциям. Пусть дано конечное число функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \quad (122)$$

ортогональных на отрезке $a \leq x \leq b$. Поставим задачу: для данной функции $f(x)$ составить линейную комбинацию функций (122) так, чтобы ее среднее квадратичное отклонение (п. 7) от $f(x)$ было минимальным.

Для решения этой задачи будем рассматривать функции (122) как часть полной ортогональной системы (120). Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x) = \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k - C_k) g_k(x) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k g_k(x), \end{aligned}$$

где a_k — коэффициенты разложения $f(x)$ по функциям (110), а C_k — произвольные постоянные. В силу равенства (121)

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{k=1}^n C_k g_k(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^n (a_k - C_k)^2 \int_a^b g_k^2(x) dx + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 \int_a^b g_k^2(x) dx.$$

Если произвольно менять коэффициенты C_1, C_2, \dots, C_n , то из последней формулы видно, что минимальное значение правой части получается, когда

$$C_1 = a_1, \quad C_2 = a_2, \quad \dots, \quad C_n = a_n.$$

Итак, минимальное среднее квадратичное отклонение линейной комбинации функций (122) от $f(x)$ осуществляет отрезок разложения функции $f(x)$ в ряд по системе ортогональных функций, т. е. линейная комбинация, коэффициенты которой определены по формулам (100).

Аналогичное исследование полной системы комплексных ортогональных функций (118) и ряда (119) по ним приводит с учетом равенства $aa^* = |a|^2$ к формуле

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \int_a^b |g_n(x)|^2 dx. \tag{123}$$

28. Пространство Гильберта. Вернемся к вещественным функциям, заданным на интервале $a \leq x \leq b$. Оказывается, что аналогия таких функций с векторами, упомянутая в п. 20, является весьма далекой. Так как над указанными функциями можно осуществлять линейные действия по обычным правилам, то эти функции образуют линейное пространство. Более того, если ввести понятие скалярного произведения двух функций по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx, \tag{124}$$

то нетрудно проверить, что все аксиомы евклидова пространства выполнены, так что здесь получается не только линейное, но даже евклидово пространство. К нему причисляются не только ограниченные, но также и неограниченные *квадратично суммируемые* функции, т. е. такие функции $f(x)$, что

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx < \infty. \tag{125}$$

Для таких функций из простого неравенства

$$| \int_a^b f(x) g(x) dx | \leq \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx$$

вытекает, что интеграл (124), если несобственный, то сходящийся.

Совокупность функций, удовлетворяющих условию (125), со скалярным произведением (124) называется *пространством Гильберта* L^2 по имени немецкого математика Д. Гильберта. Условие (91) в силу (124) и есть условие ортогональности векторов в этом пространстве. Полная ортогональная система функций — это ортогональный базис в пространстве L^2 ; отметим, что при определении полноты (п. 21) сходимость ряда (99) надо было понимать в смысле L_2 , т. е. в смысле среднего квадратичного (п. 8). Равенство Парсевала (121) — это аналог теоремы Пифагора в пространстве Гильберта, квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов всех его измерений.

Характерной чертой пространства Гильберта является его *бесконечномерность*. Это, в частности, значительно затрудняет проверку полноты ортогональной системы функций. Система из k попарно ортогональных ненулевых векторов в n -мерном евклидовом пространстве является полной, если $k = n$, и неполной, если $k < n$. В отличие от этого в бесконечномерном пространстве ортогональная система, состоящая из бесконечного числа функции, не обязана быть полной, так что здесь только по количеству функций в системе вопрос о ее полноте решить нельзя; этот вопрос сложный, и мы не будем его рассматривать.

Можно доказать, что всякая ортогональная неполная система представляет собой часть некоторой ортогональной полной системы. Поэтому в ряд по первой системе можно разложить те и только те функции, для которых при разложении по второй системе коэффициенты при дописанных функциях равны нулю.

В евклидовых пространствах имеет место важное неравенство, которое принимает вид, после возведения в квадрат,

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

Если в него вместо f и g подставить $|f|$ и 1, мы получим

$$\left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

Отсюда видно, что все функции из L^2 являются суммируемыми, а также что из сходимости в среднем квадратичном вытекает сходимость в среднем (п. 8); обратное не обязательно. Впрочем, можно доказать, что ряд Фурье любой суммируемой функции сходится к ней в среднем.

29. Ортогональность с весом. При обычном интегрировании функции $f(x)$ по интервалу $a \leq x \leq b$ все значения x из этого интервала выступают как равноправные. Если хотят подчеркнуть большую роль «вклада» одних значений по сравнению с другими, то рассматривают *интегрирование с весом*

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx,$$

где

$$\rho(x) \geq 0.$$

— заданная *весовая функция*, принимающая большие значения для тех x , которые должны сыграть большую роль.

Функции $g(x)$ и $h(x)$ называются *ортогональными с весом* ρ на интервале (a, b) , если

$$\int_a^b f(x) g(x) \rho(x) dx = 0.$$

Вся общая теория рядов по ортогональным функциям (п. 20, 21, 26, 27) непосредственно переносится на функции, ортогональные с весом; при этом во всех участвующих интегралах надо под знаком интеграла дописать весовой множитель $\rho(x)$.

Интеграл с весом ρ легко преобразовать в интеграл без веса (т. е. с весом 1) при помощи замены независимой переменной

$$\rho(x) dx = d\bar{x}, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^x \rho(x) dx = \bar{x}(x), \quad \bar{x}(a) = \bar{a}, \quad \bar{x}(b) = \bar{b}, \tag{126}$$

так как если обозначить

$$\bar{f}(x) = \bar{f}(x(\bar{x})) = \bar{f}(\bar{x}),$$

то получим

$$\int_a^b f(x) \rho(x) dx = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \bar{f}(\bar{x}) d\bar{x}.$$

При таком преобразовании любая система функций, ортогональных с весом ρ , переходит в систему функций, ортогональных в обычном

смысле (п. 20). Тем не менее иногда удобнее такой замены не делать, а рассматривать все интегрирования с весом.

Обратно, с помощью замены (126) можно из любой ортогональной системы функций получить систему, ортогональную с весом ρ . Так как при таком преобразовании разложения в ряды также соответственно преобразуются, то полная система после этой замены остается полной. Например, исходя из полной ортогональной системы функций

$$1, \cos \bar{x}, \cos 2\bar{x}, \dots, \cos n\bar{x}, \dots \quad (0 \leq \bar{x} \leq \pi)$$

(см. систему (94)) и совершая преобразование

$$\bar{x} = \pi - \arccos x \quad (-1 \leq x \leq 1), \quad d\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

получим после несущественной перемены знаков

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = \cos \arccos x = x, \quad T_2(x) = \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x, \quad \dots, \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \dots$$

Эти многочлены были введены Чебышевым в 1857 г., они и называются *многочленами Чебышева*. Мы видим, что они образуют полную систему функций, ортогональных с весом

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на отрезке $-1 \leq x \leq 1$. Их можно получить также из системы функций (97) с помощью процесса ортогонализации с данным весом.

Избавиться от весовой функции можно также с помощью следующего простого замечания: если система функций

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots \quad (127)$$

ортогональна на интервале $a < x < b$ с весом $\rho(x)$, то система функций

$$g_1(x) \sqrt{\rho(x)}, \quad g_2(x) \sqrt{\rho(x)}, \quad \dots, \quad g_n(x) \sqrt{\rho(x)}, \dots \quad (128)$$

ортогональна на том же интервале без веса; чтобы разложить функцию $f(x)$ в ряд по системе (127), достаточно разложить функцию $f(x) \sqrt{\rho(x)}$ в ряд по системе (128), а затем сократить результат на $\sqrt{\rho(x)}$.

30. Кратные ряды Фурье. При разложении в ряды функций от нескольких аргументов обычно применяются системы функций, зависящих от нескольких индексов, число которых равно числу аргументов. Тогда ряды получаются кратными, как в п. 17.

Теория кратных рядов по ортогональным функциям развивается совершенно аналогично теории простых рядов. Рассмотрим для простоты случай двух аргументов. Тогда ортогональные в некоторой области D функции, образующие полную систему, должны зависеть от двух индексов, т. е. иметь вид $\varphi_{mn}(x, y)$, где m и n принимают некоторые дискретные значения. Ряд по такой системе функций имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{m, n} a_{m, n} \varphi_{m, n}(x, y);$$

здесь подразумевается двойная сумма. Коэффициенты вычисляются, как в п. 21:

$$a_{m, n} = \frac{\int_D \int f(x, y) \varphi_{m, n}(x, y) dx dy}{\int_D \int \varphi_{m, n}^2(x, y) dx dy} \quad (129)$$

Обычно примеры систем ортогональных функций от нескольких аргументов строятся по следующему принципу. Пусть даны две полные ортогональные системы функций одного переменного

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots \quad (a \leq x \leq b) \quad \text{и} \quad h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x), \dots \quad (c \leq x \leq d).$$

Тогда система функций

$$\varphi_{m, n}(x, y) = g_m(x) h_n(y) \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (130)$$

будет ортогональной и полной в прямоугольнике П:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Ортогональность этой системы вытекает из того, что

$$\begin{aligned} \int_P \int \varphi_{m, n}(x, y) \varphi_{\bar{m}, \bar{n}}(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_c^d g_m(x) h_n(y) g_{\bar{m}}(x) h_{\bar{n}}(y) dy = \\ &= \int_a^b g_m(x) g_{\bar{m}}(x) dx \int_c^d h_n(y) h_{\bar{n}}(y) dy, \end{aligned}$$

т. е. получается нуль, за исключением случая, когда $m = \bar{m}$ и одновременно $n = \bar{n}$. Полнота следует из того, что произвольную функцию $f(x, y)$, заданную в П, можно при любом фиксированном x разложить по функциям $h_n(y)$:

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) h_n(y),$$

где коэффициенты разложения зависят от x . Если эти коэффициенты $A_n(x)$ разложить по функциям $g_m(x)$, то и получится разложение функции $f(x, y)$ в двойной ряд по функциям (130):

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m, n} g_m(x) h_n(y),$$

которое, таким образом, возможно.

Так, исходя из растянутой системы функций (95), можно построить такую полную ортогональную систему функций на прямоугольнике $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$:

$$\varphi_{m, n}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Разложение по этой системе имеет вид

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} \quad (0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2).$$

Коэффициенты этого ряда в силу формулы (129) равны

$$a_{mn} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} dx \int_0^{l_2} dy f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{l_1} \sin \frac{n\pi y}{l_2} dy.$$

31. Приложение к уравнению колебаний конечной струны.

Ряды Фурье имеют многочисленные приложения к решению уравнений математической физики. Мы здесь покажем только один пример такого приложения к решению уравнения малых свободных поперечных колебаний натянутой струны.

Будем пренебрегать весом струны и направим ось x вдоль положения равновесия струны так, чтобы концы струны имели абсциссы $x = 0$ и $x = l$; будем считать колебания происходящими в плоскости и обозначим через $u = u(x, t)$ поперечное отклонение точки с абсциссой x в момент t . Тогда в курсах уравнений математической физики доказывается, что функция $u(x, t)$ должна удовлетворять уравнению с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (131)$$

здесь a — постоянная,

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

где T — сила натяжения струны, ρ — ее линейная плотность. Условие закрепления концов струны можно записать в виде

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (\text{при всех } t); \quad (132)$$

кроме того, будем считать, что известны отклонения и скорости точек струны в начальный момент времени:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x). \quad (133)$$

Таким образом, получается следующая математическая задача: нужно решить уравнение (131) при *граничных условиях* (132) и *начальных условиях* (133).

Для решения этой задачи разложим искомое решение при каждом фиксированном $t \geq 0$ в ряд вида (107); тогда коэффициенты будут зависеть от t , т. е. мы получаем

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (134)$$

Чтобы найти коэффициенты $b_n(t)$, подставим это выражение в уравнение (131). Мы получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{\pi n x}{l} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

т.е.

$$b_n(t) = -\frac{a^2 \pi^2 n^2}{l^2} b_n(t).$$

Решив это обыкновенное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, получим

$$b_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t,$$

т. е. в силу (134)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (135)$$

Чтобы найти коэффициенты A_n, B_n воспользуемся начальными условиями (133); получим

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (0 \leq x \leq l).$$

Получилось опять разложение в ряд Фурье вида (107), из которого находим

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \psi(t) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.$$

Подстановка этих величин в (135) и даст искомое решение. При этом граничные условия (132) удовлетворяются автоматически.

7.5. Преобразование Фурье

32. Формулы преобразования Фурье. Будем исходить из формулы (115), которая дает представление любой конечной функции $f(x)$ на интервале $-l < x < l$. В этом представлении участвуют *гармоники*, т. е. функции вида e^{ikx} с *волновыми числами* k , равными

$$k = k_n = \frac{\pi n}{l} \quad (n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (136)$$

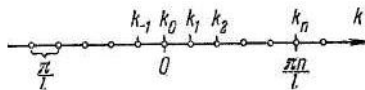


Рис. 9.

Набор этих значений, изображенный на рис. 9, называется *спектром* волновых чисел; он *дискретен*, т. е. состоит из отдельных точек, каждой из которых в разложении (115) отвечает гармоника $e^{ik_n x}$

с *комплексной амплитудой* c_n , определяемой по формуле (116):

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik_n x} dx. \quad (137)$$

Допустим сначала для простоты, что функция $f(x)$ вне некоторого *конечного* интервала $a \leq x \leq b$ тождественно равна нулю, и обозначим

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx; \quad (138)$$

фактически этот интеграл берется лишь по интервалу $a \leq x \leq b$. Тогда при достаточно больших l формулу (137) для коэффициентов Фурье можно переписать в виде

$$c_n = \frac{\pi}{l} \frac{1}{2\pi} \int_a^b f(x) e^{-ik_n x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik_n x} dx \frac{\pi}{l} = \hat{f}(k_n) \Delta k, \quad (139)$$

где

$$\Delta k = \frac{\pi}{l}$$

— расстояние между соседними волновыми числами в спектре (см. формулу (136) или рис. 9). Поэтому формулу (115) для представления $f(x)$ можно переписать в виде

$$f(x) = \sum_n c_n e^{ik_n x} = \sum_n \hat{f}(k_n) e^{ik_n x} \Delta k \quad (-l < x < l). \quad (140)$$

Допустим теперь, что l весьма велико. Тогда спектр (рис. 9) становится очень густым, т. е. Δk — очень малым. В пределе при $l \rightarrow \infty$ сумма (140), которая является интегральной суммой, переходит в интеграл, т. е. мы получаем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (-\infty < x < \infty). \quad (141)$$

В этом представлении волновое число k принимает *все* значения от $-\infty$ до ∞ , т. е. *в пределе при $l \rightarrow \infty$ дискретный спектр волновых чисел переходит в непрерывный спектр.*

Из первого равенства (139) видно, что при $l \rightarrow \infty$ амплитуды $c_n \rightarrow 0$, т. е. в пределе каждая отдельно взятая гармоника присутствует с нулевой

амплитудой. Формула (141) означает, что в пределе амплитуда оказывается «размазанной» по всему непрерывному спектру волновых чисел, так что на каждый бесконечно малый интервал от k до $k+dk$ приходится бесконечно малая амплитуда

$$dc = \hat{f}(k) dk. \quad (142)$$

Ситуация здесь несколько напоминает ту, которая получается при переходе от дискретной модели материального тела к его непрерывной модели, когда принимается, что масса каждой отдельно взятой точки равна нулю, а масса оказывается «размазанной» по всем точкам с определенной плотностью. Подобно этому формула (142) означает, что $\hat{f}(k)$ — это плотность амплитуды гармоник на бесконечно малом интервале волновых чисел, причем плотность берется в расчете на единицу длины этого интервала; поэтому функция $\hat{f}(k)$ называется также *спектральной плотностью* функции $f(x)$.

Формулы (138) и (141) называются формулами *преобразования Фурье*, причем (138) — *прямой* формулой, а (141) — *обратной*. При их выводе мы предполагали, что функция f вне некоторого конечного интервала тождественно равна нулю; такие функции называются *финитными*. Более детальное исследование показывает, что формулы справедливы и в том случае, если интеграл (138) понимается как несобственным, но для его сходимости надо потребовать, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (143)$$

Таким образом, *каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (143), отвечает ее «фурье-образ» $\hat{f}(k)$* (т. е. результат преобразования Фурье), *который определяется формулой (138); обратно, функция $f(x)$ выражается через свой фурье-образ по формуле (141).*

Если функция $f(x)$ четная, то при вычислении интеграла (138) можно воспользоваться известным свойством, и мы получаем

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos kx dx = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx.$$

Отсюда функция $\hat{f}(k)$ также четная, и из (12.141) мы получаем

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos kx dk;$$

это — формулы *косинус-преобразования Фурье*. Если функция $f(x)$ *нечетная*, то мы подобным образом получаем формулы *синус-преобразования Фурье*:

$$i\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx \, dx, \quad f(x) = 2 \int_0^{\infty} i\hat{f}(k) \sin kx \, dk;$$

в этом случае *фурье-образом* от $f(x)$ обычно называется не $\hat{f}(k)$, а $i\hat{f}(k)$.

Если функция $f(x)$ рассматривается на интервале $0 < x < \infty$, то ее можно продолжить на интервал $-\infty < x < 0$ как четным, так и нечетным образом. Поэтому если считать как x , так и k положительным, то можно пользоваться как косинус-, так и синус-преобразованиями Фурье; однако образы, полученные при этих преобразованиях, будут, вообще говоря, различными.

Рассмотрим пример. Пусть $f(x)$ — четная функция, равная 1 на интервале $-1 < x < 1$ и нулю вне его. По формуле косинус-преобразования Фурье

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 1 \cdot \cos kx \, dx + \int_1^{\infty} 0 \cdot \cos kx \, dx \right) = \frac{\sin k}{\pi k}.$$

Применяя обратную формулу, получаем

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{\pi k} \cos kx \, dk. \tag{144}$$

Подобно ряду Фурье (п. 25), если подставлять в формулу для обратного преобразования числовые значения x , мы получим значение $f(x)$ во всех точках непрерывности этой функции и значение $[f(x-0) + f(x+0)]/2$ во всех точках, где она имеет конечный скачок. В частности, подставляя в (144) значение $x = 0$, при котором функция f непрерывна, мы получим

$$1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{\pi k} \, dk, \quad \text{откуда} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin k}{k} \, dk = \frac{\pi}{2}.$$

33. Свойства преобразования Фурье. Преобразование Фурье обладает рядом полезных свойств; некоторые из них мы здесь перечислим. Прежде всего, ясно, что преобразование Фурье является *оператором*, для которого функция $f(x)$ является прообразом, а функция $\hat{f}(k)$ — образом.

1. *Оператор Фурье является линейным*, т. е.

$$(\widehat{f_1 + f_2}) = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}, \quad \widehat{\alpha f} = \alpha \widehat{f} \quad (\alpha = \text{const}). \quad (145)$$

Это сразу следует из формулы (138) и из того, что интегрирование является линейной операцией.

Из формулы (145) вытекает, в частности, что если функция f зависит не только от x , но и от некоторого параметра t и потому \mathcal{F} такие зависит от этого параметра, то

$$\frac{\widehat{f_{t+\Delta t}} - \widehat{f_t}}{\Delta t} = \frac{\widehat{f}_{t+\Delta t} - \widehat{f}_t}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу при

$$\Delta t \rightarrow 0,$$

получаем, что

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial t} = \widehat{\frac{\partial f}{\partial t}},$$

т. е. производная по параметру от прообраза преобразуется в производную по параметру от образа. Доказательство показывает, что это свойство справедливо для любого линейного оператора.

2. Если функцию f продифференцировать по x , то ее образ \mathcal{F} умножится на ik . В самом деле, образом функции $f'(x)$ служит

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} df(x) = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-ikx} f(x) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (-ik) e^{-ikx} dx \end{aligned}$$

(мы произвели интегрирование по частям). Однако из условия (143) следует, что $f(\pm\infty) = 0$, и потому первое слагаемое в правой части пропадает. Но второе равно

$$\frac{ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = ik \widehat{f}(k),$$

что и требовалось доказать.

Преобразуя подобным образом обратную формулу (141), можно доказать, что если функцию \mathcal{F} продифференцировать, то ее прообраз f умножится на $-ik$.

3. Если функция $f(x)$ преобразуется в $\mathcal{F}(k)$, то функция $\mathcal{F}(\alpha x)$ ($\alpha = \text{const} > 0$) преобразуется в

$$\frac{1}{\alpha} \widehat{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x) e^{-ikx} dx = |\alpha x = s| = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i \frac{k}{\alpha} s} ds = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{k}{\alpha}\right).$$

Таким образом, при растяжении прообраза в несколько раз вдоль оси независимой переменной образ сжимается во столько же раз. Это значит, что невозможно одновременно *локализовать*, т. е. сосредоточить на оси независимой переменной, как функцию-прообраз, так и ее спектральную плотность. Этот *принцип неопределенности* имеет многочисленные применения в физике.

4. Если функцию $f(x)$ сдвинуть на $\beta = \text{const}$, то ее образ умножится на $e^{-i\beta k}$. В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \beta) e^{-ikx} dx = |x - \beta = s| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iks} e^{-ik\beta} ds = e^{-ik\beta} \hat{f}(k).$$

Обратно, если образ сдвинуть на β , то прообраз умножится на $e^{i\beta k}$.

5. *Равенство Парсеваля*. Если формулу (123) применить к ряду (115), мы получим

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Пользуясь формулой (139), получаем отсюда

$$\int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = 2l \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k_n)|^2 (\Delta k)^2 = 2\pi \sum_n |\hat{f}(k_n)|^2 \Delta k.$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, мы подобно п. 32 получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk.$$

Это и есть *равенство Парсеваля для преобразования Фурье*.

34. Приложение к уравнению колебаний бесконечной струны.

Интегральное преобразование Фурье применяется к решению задач математической физики для бесконечных сред. Покажем это на примере уравнения (131), но теперь будем струну считать бесконечной, т. е. $-\infty < x < \infty$, так что граничные условия опадают; в начальных условиях (133) мы для простоты будем считать $\psi(x) = 0$. Обозначим через $\hat{u}(k, t)$ фурье-образ решения при любом фиксированном $t \geq 0$. Совершая преобразование по Фурье обеих частей уравнения (131), на основе свойств 1 и 2 п. 33 получим

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = a^2 (ik)^2 \hat{u} = -a^2 k^2 \hat{u}.$$

При любом фиксированном k — это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, откуда стандартным методом получаем

$$\hat{u} = C_1(k) e^{-iak t} + C_2(k) e^{iak t}. \quad (146)$$

Теперь преобразуем по Фурье начальные условия (133):

$$\hat{u} \Big|_{t=0} = \hat{\varphi}(k), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

Поэтому формулы (146) дают

$$\hat{u} = \frac{1}{2} \hat{\varphi}(k) e^{-iak t} + \frac{1}{2} \hat{\varphi}(k) e^{iak t}.$$

На основе свойств 1 и 4 п. 33 возвращаемся к прообразу —

$$u = \frac{1}{2} \varphi(x - at) + \frac{1}{2} \varphi(x + at).$$

Это и есть искомое решение. Оно имеет весьма простой смысл: начальное отклонение делится пополам и одна половина в момент t сдвигается на расстояние at в положительном направлении оси x , а другая — на то же расстояние в отрицательном направлении. Другими словами, по струне бегут две волны со скоростью a , в положительном и в отрицательном направлениях, без изменения своей формы, причем наблюдается все время результат сложения этих волн. Тем самым выяснен физический смысл постоянной a в уравнении (131): она равна скорости распространения возмущений по струне.

8. Случайные величины и их обработка

8.1. Дискретные и непрерывные случайные величины

1. Дискретные случайные величины. Величина x , которая при данном комплексе условий принимает одно из своих возможных значений x_i с вероятностью $P(x_i) = P(x = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, называется *дискретной случайной величиной*. Принятие величиной x значения x_i можно рассматривать как случайное событие, причем все такие события образуют полную систему событий.

Функция $p(x)$, сопоставляющая каждому значению x_i случайной величины вероятность этого значения $P(x_i)$, полностью определяет случайную величину и называется *дискретным распределением* или

функцией вероятностей. Эта функция может быть задана таблицей, графиком или множеством упорядоченных пар $(x_i, P(x_i))$.

Функция $F(x_i) = P(x \leq x_i)$, определяющая вероятность того, что случайная величина *не превышает* значения x_i , называется *интегральной функцией распределения*, причем

$$F(x_i) = \sum_{x \leq x_i} p(x).$$

Ясно, что при $x_i \leq x_j$; $F(x_i) \leq F(x_j)$, т. е. интегральная функция распределения монотонно возрастающая, причем $0 \leq F(x_i) \leq 1$. Дополнение $F(x_i)$ до единицы дает вероятность того, что случайная величина *превышает* значение x_i , т. е.

$$P(x > x_i) = 1 - F(x_i).$$

Так как $P(x \leq x_i) + P(x_i < x \leq x_j) = P(x \leq x_j)$, то вероятность попадания значений случайной величины в интервал $x_i < x \leq x_j$ можно вычислить для данной функции распределения по формуле:

$$P(x_i < x \leq x_j) = F(x_j) - F(x_i).$$

Любую характеристику случайной величины, из которой по известным правилам можно получить ее распределение, называют *законом распределения* этой величины.

Поясним это определение на примере бросания двух игральных костей. Множество элементарных событий U состоит из 36 элементов (a, b) , где a и b — число очков, выпавшее при бросании первой и второй кости. Рассмотрим случайную величину x , значения которой x_i равны сумме очков $a + b$. При каждом испытании эта величина принимает одно из одиннадцати возможных значений (от 2 до 12). Считая элементарные события равновероятными и подсчитывая число таких событий m_i , для которых $x = x_i$, находим вероятности $P(x_i) = P(x = x_i)$, а также значения интегральной функции распределения $F(x_i) = P(x \leq x_i)$:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_i	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{26}{36}$	$\frac{30}{36}$	$\frac{33}{36}$	$\frac{35}{36}$	$\frac{36}{36}$

Графики распределения $P(x_i)$ и интегральной функции распределения $F(x_i)$ изображены на рис. 1.

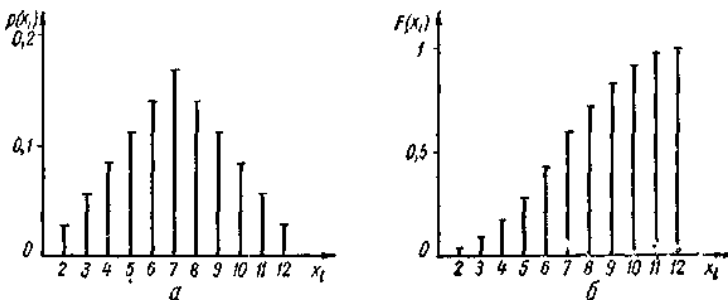


Рис. 1. Графики распределения суммы очков при бросании двух игральных костей: *a* - функция вероятностей; *б* - интегральная функция распределения

2. Дискретные распределения. В теории моделирования широко используются типичные распределения случайных величин, которые обслуживают определенные классы задач. Одна из таких задач состоит в рассмотрении независимых многократно повторяющихся испытаний, называемых *испытаниями Бернулли*. Каждое из них приводит к одному из двух возможных исходов: событие наступает (*успех*) или не наступает (*неудача*). Вероятность наступления события p не меняется от испытания к испытанию. Требуется определить вероятность, с которой при n испытаниях событие наступает точно x раз. В этих условиях случайной величиной является число успешных исходов, которое может принимать значения от 0 до n .

Событие может появиться в n испытаниях точно x раз ($0 \leq x \leq n$) C_n^x различными одинаково возможными способами. Так

как испытания независимы, то каждому такому способу соответствует вероятность

$$p^x (1 - p)^{n-x}.$$

На основании теоремы о сумме вероятностей получаем распределение рассматриваемой случайной величины:

$$f(x, n, p) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

Это выражение представляет собой общий член разложения бинома $(p + q)^n$, где $q = 1 - p$, откуда и его название — *биномиальное распределение*. Легко проверяется общее свойство:

$$\sum_{x=0}^n f(x; n, p) = \sum_{x=0}^n C_n^x p^x q^{n-x} = (p + q)^n = 1.$$

Величины n и p являются *параметрами*, полностью характеризующими биномиальное распределение как дискретную функцию от x . Графики биномиального распределения при различных значениях параметров показаны на рис. 2.

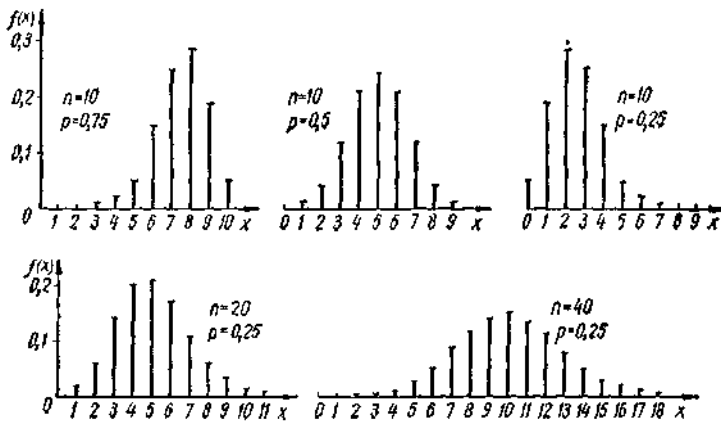


Рис. 2. Графики биномиального распределения при различных значениях параметров n и p .

Определим, например, вероятность того, что из запланированных запусков десяти ракет успешными будут не менее девяти, если вероятность успеха для каждой ракеты равна 0,95. Искомый результат выражается суммой $f(9; 10; 0,95) + f(10; 10; 0,95) = C_{10}^9 \cdot 0,95^9 \cdot 0,05 + C_{10}^{10} \cdot 0,95^{10} = 10 \cdot 0,630 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,599 = 0,315 + 0,599 = 0,914$.

Таблица 1

Дискретные распределения

Название	Распределение	Параметры	Математическое ожидание
Биномиальное	$f(x; n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x},$ $x = 0, 1, 2, \dots, n$	$0 \leq p \leq 1;$ $n \in N$ (N —множество положительных целых чисел)	np
Мультиномиальное	$f(x_1, \dots, x_k; n, p_1, \dots, p_k) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k},$ $x_i = 0, 1, 2, \dots (i = 1, \dots, k);$ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$	$n \in N;$ $p_1 > 0, \dots, p_k > 0;$ $\sum_{i=1}^k p_i = 1$	np_i
Гипергеометрическое	$f(x; m, n, k) = \frac{C_k^x C_{n-x}^{m-x}}{C_n^m},$ $x \leq k; n-x \leq m-k$	$m, n, k \in N$	$\frac{nk}{m}$
Геометрическое	$f(x; p) = p(1-p)^x,$ $x = 1, 2, \dots$	$0 \leq p \leq 1$	$\frac{1-p}{p}$
Распределение Паскаля (или отрицательное биномиальное)	$f(x; s, p) = C_{x+s-1}^{s-1} p^s (1-p)^x,$ $x = 0, 1, 2, \dots$	Паскаля, если $s \geq 0$, отрицательное биномиальное, если $s \in N$	$\frac{s(1-p)}{p}$
Распределение Пуассона	$f(x; \lambda) = \frac{(\lambda)^x}{x!} e^{-\lambda},$ $x = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda (\lambda > 0)$	λ

Дисперсия	Асимметрия	Экцесс	Применение
$np(1-p)$	$\frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}}$	$\frac{1-6p(1-p)}{np(1-p)}$	Вероятность появления события (исхода) x раз в n независимых испытаниях, когда вероятность p события в каждом испытании постоянна (извлечения с возвращением)
$np_i(1-p_i),$ $i = 1, 2, \dots, k$	$\frac{1-2p_i}{\sqrt{np_i(1-p_i)}}$ $i = 1, 2, \dots, k$	$\frac{1-6p_i(1-p_i)}{np_i(1-p_i)}$ $i = 1, 2, \dots, k$	Вероятность появления i -го события (исхода) x_i раз в n испытаниях, когда вероятности событий p_i постоянны и события x_i образуют полную группу
$\frac{nk(m-k)(m-n)}{m^2(m-1)}$	—	—	Вероятность появления x исправных изделий в выборке объема m , взятой из совокупности объема n , которая содержит k неисправных изделий (извлечения без возвращения)
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{1-p}}$	$\frac{p^2-6p+6}{1-p}$	Вероятность того, что потребуется x испытаний Бернулли, прежде чем будет получен успешный исход
$\frac{s(1-p)}{p^2}$	$\frac{2-p}{\sqrt{s(1-p)}}$	$\frac{p^2-6p+6}{s(1-p)}$	Вероятность того, что потребуется провести x испытаний Бернулли для появления s успешных исходов
λt	$\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$	$\frac{1}{\lambda t}$	Вероятность появления x независимых событий в данном интервале времени t , когда события происходят с постоянной интенсивностью λ

В табл. 1 приведены другие дискретные распределения, наиболее часто встречающиеся в инженерной практике (теория надежности, контроль качества, системы массового обслуживания и т. д.).

3. Непрерывные случайные величины. Случайная величина называется *непрерывной*, если она может принимать любое значение в

интервале ее определения. Интегральная функция распределения случайной величины $F(x_i) = P(x \leq x_i)$, как и для дискретной величины, определяет вероятность того, что x не превосходит значения x_i . Имеют место также аналогичные соотношения: $P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$; $P(x > x_i) = 1 - F(x_i)$ и $F(x_i) \leq F(x_j)$ при $x_i < x_j$. Кроме того, $F(-\infty) = 0$ и $F(\infty) = 1$.

Поскольку множество значений непрерывной случайной величины бесконечно и несчетно, то вероятность, соответствующая любому ее конкретному значению, — бесконечно малая величина. Поэтому значение вероятности нахождения случайной величины x в интервале от x_1 до x_2 не зависит от включения в этот интервал его крайних точек x_1 и x_2 , т. е. $P(x_1 < x \leq x_2) = P(x_1 \leq x \leq x_2) = P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Для непрерывной случайной величины закон распределения $p(x_i) = P(x = x_i)$ не имеет смысла и вместо него определяется *плотность распределения (функция плотности, плотность вероятности, дифференциальная функция распределения)*

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}.$$

С учетом приведенных выше выражений имеем

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz; \quad P(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Из этих соотношений видно, что площадь под кривой плотности распределения (рис. 3) равна единице. Заштрихованные части площади равны вероятности того, что значение случайной величины меньше x_1 больше x_2 (рис. 3, а) или лежит между x_1 и x_2 (рис. 3, б).

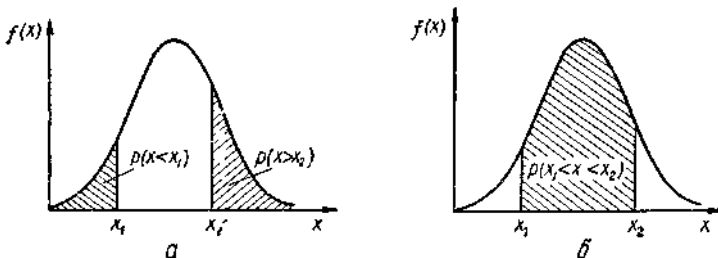


Рис. 3. Графики плотности распределения $f(x)$, где площадь заштрихованных участков равна вероятности того, что:
 а — $x < x_1$ или $x > x_2$; б — x находится между x_1 и x_2 .

4. Нормальное распределение. Из непрерывных распределений наиболее часто используется *нормальное (гауссово)* распределение, плотность которого

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ и σ — параметры распределения. Интегральная функция этого распределения выражается соотношением

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Графики $f(x)$, называемые *нормальными кривыми*, при различных значениях μ и σ показаны на рис. 4.

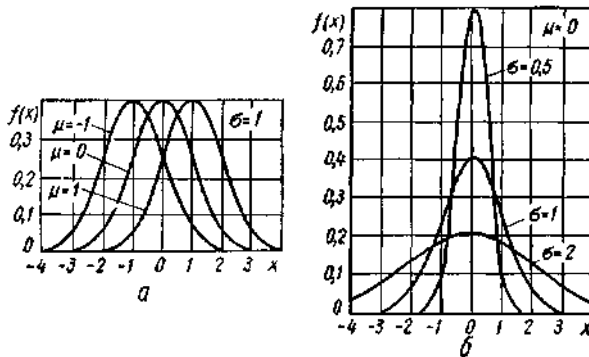


Рис. 4. Нормальное распределение:

а — с различными значениями μ при $\sigma = 1$; б — с различными значениями σ при $\mu = 0$.

Эта функция имеет максимум при $x = \mu$ и симметрична относительно перпендикуляра к оси абсцисс в точке $x = \mu$. Изменение параметра μ не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси x (вправо, если μ возрастает, и влево, если μ убывает). С возрастанием σ максимум нормальной кривой $1/\sigma \sqrt{2\pi}$ убывает, а сама кривая становится более пологой.

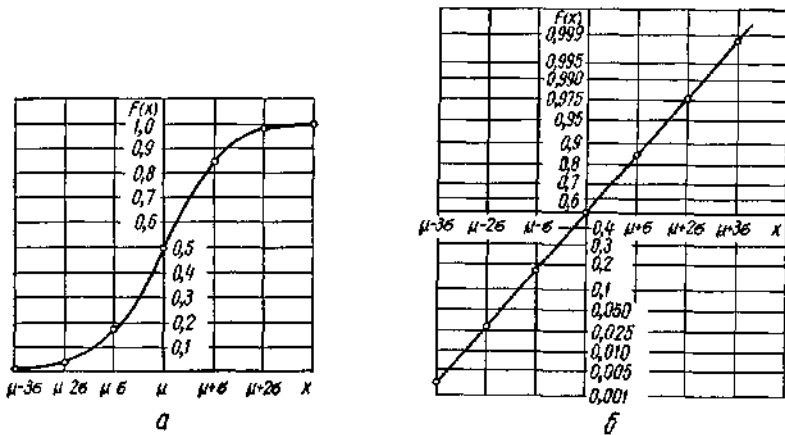


Рис. 5. Преобразование графика интегральной функции нормального распределения:
 а — исходный график, б — линейризованный график

График интегральной функции нормального распределения $F(x; \mu, \sigma)$ показан на рис. 5, а. Изменением шкалы по оси ординат его можно представить прямой линией (рис. 5, б). Систему координат с такой шкалой называют *вероятностной бумагой*, которая удобна для обнаружения нормального закона распределения по совокупности экспериментальных значений $F(x; \mu, \sigma)$.

Если x — нормально распределенная величина с произвольными μ и σ , то *нормированная* величина

$$y = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

также распределена по нормальному закону, но с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$, т. е.

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}; \quad F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для определения значений $f(x; \mu, \sigma)$ и $F(x; \mu, \sigma)$ достаточно располагать таблицами для $f(y)$ и $F(y)$ нормированной случайной величины. Обычно в таких таблицах приводятся значения только для $y \geq 0$, так как из симметрии нормальной кривой следует, что

$$f(-y) = f(y); \quad F(-y) = 1 - F(y).$$

Функцию $F(y)$ можно записать в виде

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где первый интеграл равен 0,5, а второй является стандартной функцией, называемой *интегралом Лапласа*

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Таким образом, имеем соотношение

$$F(y) = \Phi(y) + 0,5.$$

В табл. 2 приведены значения интеграла Лапласа $\Phi(y)$ для значений y от 0 до 4,99 с дискретностью 0,01. Значения для отрицательных y определяется соотношением $\Phi(-y) = -\Phi(y)$. С помощью табл. 2 легко определяются значения интегральной функции нормального распределения при любых μ и σ :

$$F(x, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) + 0,5.$$

5. Вероятность попадания в заданный интервал. Эта вероятность для нормально распределенной случайной величины с параметрами μ и σ определяется соотношением:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

где $y_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$, $y_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$, и выражается через интегралы Лапласа следующим образом:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{2\pi} \int_0^{y_1} e^{-\frac{y^2}{2}} dt = \Phi(y_2) - \Phi(y_1),$$

или

$$P(x_1 < x < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right).$$

При $x_1 = \mu - \alpha$ и $x_2 = \mu + \alpha$ с учетом симметрии нормальной кривой относительно прямой $x = \mu$ имеем

$$P(\mu - \alpha < x < \mu + \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha/\sigma}^{\alpha/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha/\sigma} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Обозначив $z = \frac{\alpha}{\sigma}$, получим выражение для вероятности того,

что отклонение нормально распределенной случайной величины x от значения μ не превышает α :

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 2\Phi(z) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Таблица 2

Значения интеграла Лапласа $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

y	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4014
1,3	0,4030	0,4049	0,4065	0,4082	0,4098	0,4114	0,4130	0,4146	0,4161	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4250	0,4264	0,4278	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4331	0,4344	0,4357	0,4369	0,4382	0,4394	0,4406	0,4417	0,4429	0,4440
1,6	0,4450	0,4460	0,4470	0,4480	0,4490	0,4500	0,4510	0,4520	0,4530	0,4540
1,7	0,4553	0,4563	0,4572	0,4581	0,4590	0,4599	0,4608	0,4616	0,4624	0,4632
1,8	0,4640	0,4648	0,4656	0,4663	0,4671	0,4678	0,4685	0,4692	0,4699	0,4706
1,9	0,4712	0,4719	0,4725	0,4730	0,4736	0,4741	0,4745	0,4750	0,4755	0,4760
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4807	0,4812	0,4816
2,1	0,4821	0,4825	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4853	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4867	0,4871	0,4874	0,4878	0,4880	0,4884	0,4887	0,4889
2,3	0,4892	0,4895	0,4898	0,4900	0,4902	0,4904	0,4906	0,4908	0,4910	0,4912
2,4	0,4914	0,4916	0,4918	0,4920	0,4922	0,4924	0,4926	0,4928	0,4930	0,4932

Примечание. Верхний индекс у цифры 9 показывает, сколько раз она появляется в данном значении.

Функцию $\psi(z)$ часто называют *интегралом вероятности*. В частности, если $\alpha = K\sigma$, то $z = K$ и $\psi(K) = 2\Phi(K)$, причем, $\psi(1) = 0,68269$; $\psi(2) = 0,95450$; $\psi(3) = 0,99730$; $\psi(4) = 0,9999367$ и $\psi(5) = 0,99999427$. Как видно, уже при $\alpha = 3\sigma$ интеграл вероятности только на 0,0027 отличается от единицы. Иначе говоря, лишь в 0,27% случаев отклонение случайной величины от μ может превысить 3σ , что практически считается невозможным событием (*правило трех сигм*). Если распределение случайной величины неизвестно, но условие по правилу трех сигм выполняется, то имеются основания предполагать, что изучаемая величина распределена по нормальному закону.

Пусть, например, техническими условиями задано, что длина некоторой детали должна лежать между 24 и 25 см, причем, длина

детали — нормально распределенная величина с $\mu = 24,6$ см и $\sigma = 0,4$ см. Определим, какая доля изготовленных деталей не удовлетворяет техническим условиям.

Вероятность попадания длины деталей в заданный интервал определяется соотношением:

$$P(24 < x < 25) = \Phi\left(\frac{25 - 24,6}{0,4}\right) - \Phi\left(\frac{24 - 24,6}{0,4}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1,5) = \\ = \Phi(1) + \Phi(1,5).$$

По табл. 2 находим: $\Phi(1) = 0,3413$ и $\Phi(1,5) = 0,4332$, следовательно,

$$P(24 < x < 25) = 0,3413 + 0,4332 = 0,7745.$$

Это значит, что техническим условиям удовлетворяют 77,4% деталей, а 22,6% деталей будут иметь размеры, выходящие за допустимые пределы.

Нормальное распределение занимает особое место в теории вероятностей, а нормально распределенные величины широко применяются в теории моделирования. Это связано со следующим положением, вытекающим из *центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова*.

Если случайная величина x представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то x распределена по закону, близкому к нормальному.

Такое положение имеется, например, при измерении физических величин. Любое измерение дает лишь приближенное значение измеряемой величины. Так как на результат измерения влияет большое число различных независимых случайных факторов, то можно полагать, что ошибка измерения имеет нормальное распределение. Этот вывод часто подтверждается на практике.

Кроме нормального распределения широко используются другие типы распределений случайных величин, наиболее важные из которых приведены в табл. 3. Там же даны характеристики распределений, о которых пойдет речь ниже (выражения для характеристик, обозначенные звездочкой, не приводятся из-за их громоздкости).

Непрерывные величины

Название	Плотность распределения	Параметры	Математическое ожидание
Нормальное	$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < \infty$	$-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	μ
Гамма-распределение	$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} x^{\eta-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$	$\lambda > 0$ $\eta > 0$	$\frac{\eta}{\lambda}$
Экспоненциальное	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$	$\lambda > 0$	$\frac{1}{\lambda}$
Бета-распределение	$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\eta+\gamma)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\gamma)} x^{\eta-1}(1-x)^{\gamma-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\eta > 0$ $\gamma > 0$	$\frac{\gamma}{\eta + \gamma}$
Равномерное	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1 - \mu_0}, & \mu_0 \leq x \leq \mu_1 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	μ_0, μ_1 $\mu_0 < \mu_1$	$\frac{\mu_0 + \mu_1}{2}$
Логарифмически нормальное	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (\log x - \mu)^2} & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$	$-\infty \leq \mu \leq \infty$ $\sigma > 0$	$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Дисперсия	Асимметрия	Экцесс	Применение
σ^2	0	0	Основное распределение математической статистики. Является приемлемой моделью для многих физических явлений вследствие того, что при довольно общих условиях распределение среднего \bar{x} наблюдений стремится к нормальному, независимо от формы исходного распределения при $n \rightarrow \infty$
$\frac{\eta}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\eta}}$	$\frac{6}{\eta}$	Основное распределение математической статистики для случайных величин, ограниченных с одной стороны ($0 \leq x < \infty$). Описывает время, необходимое для появления η событий при условии, что они независимы и происходят с постоянной интенсивностью λ
$\frac{1}{\lambda^2}$	2	6	Распределение времени между независимыми событиями, появляющимися с постоянной интенсивностью. Частный случай распределения Вейбулла и гамма-распределения
$\frac{\eta\gamma}{(\eta-\gamma)^2(\eta+\gamma+1)}$	*	*	Основное распределение математической статистики для случайных величин, ограниченных с обеих сторон ($0 \leq x \leq 1$). Например, распределение доли совокупности, заключенной между наименьшим и наибольшим значением выборки
$\frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{12}$	0	-1,2	Дает вероятность того, что наблюдение будет лежать в определенном интервале, когда вероятность того, что наблюдение принадлежит данному интервалу, прямо пропорциональна его длине. Частный случай бета-распределения
$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$	$\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} (e^{\sigma^2} + 2)$	*	Описывает случайные величины, логарифм которых распределен по нормальному закону. Применительно, когда наблюдаемое значение случайной величины составляет случайную долю ранее наблюдавшегося явления

Название	Плотность распределения	Параметры	Математическое ожидание
Распределение Вейбулла	$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\eta}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{при } x < 0 \end{cases}$	$\eta > 0$ $\sigma > 0$	$\sigma \Gamma\left(\frac{1}{\eta} + 1\right)$

Дисперсия	Асимметрия	Экцесс	Применение
$\sigma^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{\eta} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{\eta} + 1\right) \right]^2 \right\}$	*	*	Общее распределение времени безотказной работы при самых разнообразных интенсивностях отказов. Распределение экстремальных значений для минимальных элементов, взятых из N значений, которые имеют ограниченное слева распределение

6. Центр распределения. Одним из наиболее нужных характеристик распределения является *центр распределения* — точка, к которой тяготеют значения случайной величины.

В качестве такой характеристики чаще всего употребляется *математическое ожидание (среднее значение)*, которое для дискретной и непрерывной случайных величин определяется соответственно как

$$M(x) = \sum_i x_i p(x_i); \quad M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Например, математическое ожидание суммы очков при бросании двух игральных костей находим в соответствии со значениями $p(x_i)$, приведенными в (1):

$$M(x) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7.$$

Для экспоненциального распределения интегрированием по частям находим:

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Из определения ясно, что математическое ожидание постоянной величины равно этой же величине, а математическое ожидание суммы (произведения) независимых случайных величин равно сумме (произведению) математических ожиданий слагаемых (сомножителей). Другой характеристикой центра распределения является *медиана*, равная такому значению a непрерывной случайной величины x , перпендикуляр из которой делит пополам площадь под кривой плотности распределения $f(x)$. Эта точка определяется из соотношения

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = 0,5.$$

Так, для экспоненциального распределения медиану a находим, решая уравнение

$$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,5,$$

которое после интегрирования приводится к $e^{-\lambda a} = 0,5$, откуда

$$a = \frac{1}{\lambda} \ln 2.$$

В качестве характеристики центра распределения используется также *мода*. Для дискретной случайной величины она равна наиболее вероятному значению случайной величины (так, мода равна 7 в примере бросания двух игральных костей). Мода непрерывной случайной величины равна максимальному значению плотности распределения (например, для экспоненциального распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$ и $\lambda > 0$ мода определяется значением $x = 0$).

На рис. 6 указаны характеристики центра некоторого распределения.

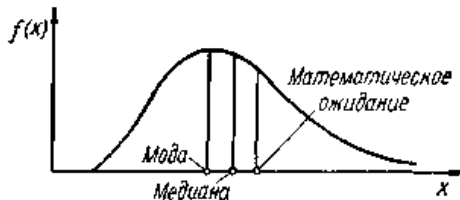


Рис. 6. Расположение математического ожидания, медианы и моды некоторого распределения.

Следует заметить, что крайние значения плотности распределения существенно влияют на математическое ожидание, значительно слабее от них зависит медиана, а мода вовсе не чувствительна к ним.

7. Моменты распределения. Сравнительно большие, но маловероятные значения случайной величины оказывают слабое влияние на математическое ожидание. Для более полного учета влияния таких значений используются характеристики, называемые *моментами распределения*.

Начальным моментом порядка k (k -м моментом) случайной величины x называют математическое ожидание величины x^k , т. е.

$$\nu_k = M(x^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральный моментом порядка k случайной величины x называют математическое ожидание k -й степени ее отклонения $x - M(x)$ от среднего значения:

$$\mu_k = M\{(x - M(x))^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k f(x) dx.$$

Для дискретных случайных величин вместо интегралов записываются суммы:

$$\nu_k = \sum_i x_i^k p(x_i); \quad \mu_k = \sum_i (x_i - M(x))^k p(x_i).$$

Первый начальный момент совпадает с математическим ожиданием, т. е. $\nu_1 = M(x)$. Первый центральный момент всегда равен нулю, так как $\mu_1 = M(x - M(x)) = M(x) - M(x) = 0$. Зависимости между моментами легко получить, сопоставляя их выражения на основе свойств математического ожидания. Так, $\mu_2 = M((x - \nu_1)^2) = M(x^2 - 2x\nu_1 + \nu_1^2) = M(x^2) - 2\nu_1 M(x) + M(\nu_1^2) = \nu_2 - 2\nu_1\nu_1 + \nu_1^2$, откуда

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2.$$

Аналогично находим другие соотношения:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4.$$

Распределения, как правило, могут быть описаны с помощью первых четырех моментов, а моменты более высоких порядков используются редко.

Второй центральный момент μ_2 является показателем рассеивания и называется *дисперсией*. Она обычно обозначается через $D(x)$ и определяется для дискретной и непрерывной случайных величин соответственно

$$D(x) = \sum_i (x_i - M(x))^2 p(x_i); \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x) dx.$$

Дисперсия постоянной величины равна нулю. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат. Дисперсия как суммы, так и разности двух независимых случайных величин равна сумме их дисперсий, т. е.

$$D(x \pm y) = D(x) + D(y).$$

Квадратный корень из дисперсии называют *средним квадратическим отклонением*, т. е.

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)},$$

причем, саму дисперсию $D(x)$ часто обозначают через $\sigma^2(x)$.

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону, математическое ожидание и среднее квадратическое значение совпадают соответственно с параметрами μ и σ . На основании результатов, полученных в (5), можно утверждать, что 68,3% значений нормально распределенной величины попадают в интервал $\mu \pm \sigma$, 95,5% значений — в интервал $\mu \pm 2\sigma$, 99,7% значений — в интервал $\mu \pm 3\sigma$. При рассмотрении любых других распределений с конечными математическими ожиданиями μ и дисперсией σ^2 вероятность попадания значений случайной величины в интервал можно оценить с помощью *неравенства Чебышева*. Согласно этому неравенству, по крайней мере, $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot 100\%$ значений случайной величины находится в интервале $\mu \pm k\sigma$.

Третий центральный момент μ_3 характеризует отклонение кривой распределения от симметричной. Кривая распределения с одной вершиной при $\mu_3 < 0$ имеет левостороннюю (отрицательную) асимметрию, а при $\mu_3 > 0$ — правостороннюю (положительную) асимметрию (рис. 7).

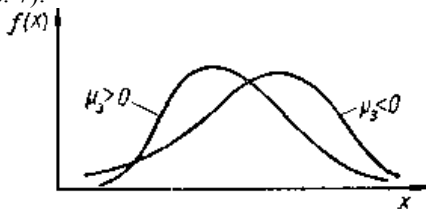


Рис. 7. Асимметрия распределения: левосторонняя ($\mu_3 < 0$) и правосторонняя ($\mu_3 > 0$)

Для симметричного (например, нормального) распределения $\mu_3 = 0$. *Асимметрией* называют величину

$$A(x) = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Наконец, четвертый центральный момент μ_4 характеризует островершинность кривой распределения. Так как для нормального распределения отношение $\mu_4/\mu_2^2 = 3$, то в качестве характеристики островершинности принимается величина

$$E(x) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3,$$

называемая *эксцессом*. Ясно, что отклонение эксцесса от нуля характеризует более островершинную (при $E(x) > 0$) или менее островершинную (при $E(x) < 0$) кривую по сравнению с нормальной. Определим, например, моменты и другие характеристики для экспоненциального распределения. Ранее в (6) было найдено $\nu_1 = M(x) = \frac{1}{\lambda}$. Остальные начальные моменты:

$$\nu_2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}; \quad \nu_3 = \int_0^{\infty} x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{6}{\lambda^3}; \quad \nu_4 = \int_0^{\infty} x^4 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{24}{\lambda^4}.$$

На основании приведенных выше соотношений получаем:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}; \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(\frac{2}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 = \frac{2}{\lambda^3}; \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\left(\frac{6}{\lambda^3}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 6\left(\frac{2}{\lambda^2}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 = \frac{9}{\lambda^4}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} D(x) &= \mu_2 = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{1}{\lambda}; \\ A(x) &= \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 2, \quad E(x) = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 6. \end{aligned}$$

Так как $A(x) > 0$ и $E(x) > 0$, то экспоненциальное распределение имеет правостороннюю асимметрию, и кривая этого распределения более островершинна по сравнению с нормальной.

8. Статистические распределения. При изучении множества однородных объектов относительно некоторого характерного признака (количественного или качественного) обычно подвергают испытаниям некоторое его подмножество случайно отобранных объектов, называемое *выборкой*. Множество объектов, из которых производится выборка, составляет *генеральную совокупность*. Число объектов

выборки (или генеральной совокупности) определяет ее объем. Различают *повторные выборки*, когда отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность, и *бесповторные выборки*, когда отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. Обычно в практике используются бесповторные выборки. Генеральная совокупность, содержащая очень большое число объектов, может рассматриваться как бесконечное множество, благодаря чему часто достигаются упрощения вычислений без существенного влияния на точность результата.

Наблюдаемое значение, характеризующее признак объекта выборки, называют *вариантой*, а последовательность вариантов в возрастающем порядке — *вариационным рядом*. Если в выборке объема n варианта x_i наблюдается с частотой n_i (значение x_i наблюдается n_i раз), то *относительная частота варианты* выражается как

$$\omega_i = \frac{n_i}{n}.$$

Перечень вариантов и соответствующих им частот (или относительных частот) образует *статистическое распределение выборки*. Оно обычно задается таблицей, например:

Варианта x_i	2	5	7	10	15
Частота n_i	1	2	3	8	7

Отметив в прямоугольной системе координат точки (x_i, n_i) или (x_i, ω_i) и соединив их отрезками прямых, получим ломаную линию, которая называется *полигоном частот* (или относительных частот). Для приведенного выше примера полигон частот показан на рис. 8.

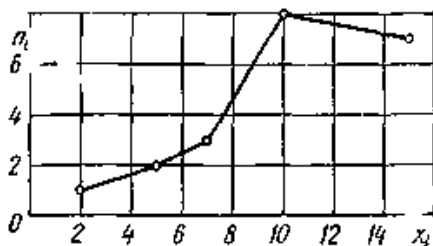


Рис. 8. Полигон частот.

Статистическое распределение выборки можно представить также в виде последовательности интервалов и соответствующих им

частот, что особенно удобно, если признаком является непрерывная величина. Интервал, в котором заключены все варианты, разбивают на несколько частичных интервалов длиной h_i и находят для каждого из них сумму частот n_i вариантов, попавших в i -й интервал. Если все частичные интервалы одинаковы ($h_i = h$), то соответствующие варианты называют *равноотстоящими*, причем их численные значения определяются точками, лежащими посредине частичных интервалов. При этом частота первоначальной варианты, которая оказалась на границе двух частичных интервалов, поровну распределяется между этими интервалами.

Пусть, например, получены следующие результаты для выборки объема $n = 100$:

x_i	n_i	x_i	n_i	x_i	n_i
1,00	1	1,19	2	1,37	6
1,03	3	1,20	4	1,38	2
1,05	6	1,23	4	1,39	1
1,06	4	1,25	8	1,40	2
1,08	2	1,26	4	1,44	3
1,10	4	1,29	4	1,45	3
1,12	3	1,30	6	1,46	2
1,15	6	1,32	4	1,49	4
1,16	5	1,33	5	1,50	2

Разбивая интервал 1—1,5 на пять частичных интервалов ($h=0,1$), приходим к следующему распределению относительно равноотстоящих вариантов:

Частичный интервал	1,0—1,1	1,1—1,2	1,2—1,3	1,3—1,4	1,4—1,5
Равноотстоящая варианта x_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45
Сумма частот n_i	18	20	25	22	15
Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	180	200	250	220	150

Отложив по оси абсцисс частичные интервалы и построив на них как на основаниях прямоугольники высотой $\frac{n_i}{h_i}$ (или $\frac{w_i}{h_i}$), получим

гистограмму частот (или относительных частот). Величина $\frac{n_i}{h_i}$ называется *плотностью частоты*, а $\frac{w_i}{h_i}$ — *плотностью относительной частоты*. Очевидно, общая площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки n , а площадь гистограммы относительных частот равна единице. Гистограмма частот для рассмотренного распределения показана на рис. 9.

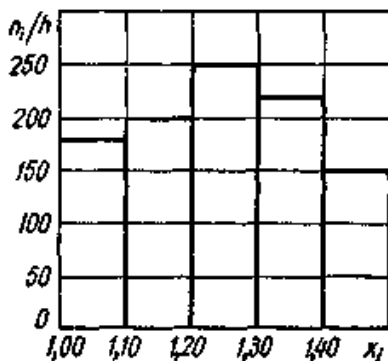


Рис. 9. Гистограмма частот (для равноотстоящих вариант).

Если через n_x обозначить число наблюдений, при которых значение признака меньше x , то

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

представляет собой *эмпирическую функцию распределения*. В соответствии с теоремой Бернулли при увеличении числа испытаний относительная частота события по вероятности стремится к вероятности этого события. Поэтому $F^*(x)$ приближается к интегральной (теоретической) функции распределения $F(x)$.

9. Эмпирические моменты. По данным наблюдений можно вычислить начальные и центральные эмпирические моменты, которые определяются соответственно формулами:

$$M_k = \frac{1}{n} \sum_i n_i x_i^k; \quad m_k = \frac{1}{n} \sum_i n_i (x_i - M_1)^k.$$

Так, для распределения относительно равноотстоящих вариант из (8) имеем:

$$M_1 = \frac{1}{100} (18 \cdot 1,05 + 20 \cdot 1,15 + 25 \cdot 1,25 + 22 \cdot 1,35 + 15 \cdot 1,45) = 1,246;$$

$$M_2 = \frac{1}{100} (18 \cdot 1,05^2 + 20 \cdot 1,15^2 + 25 \cdot 1,25^2 + 22 \cdot 1,35^2 + 15 \cdot 1,45^2) = 1,570.$$

Аналогично вычисляются и остальные начальные моменты. Центральные моменты можно найти либо непосредственно по приведенным выше формулам, либо через начальные моменты в соответствии с зависимостями из (7). Так, для центрального момента второго порядка имеем:

$$m_2 = M_2 - M_1^2 = 1,570 - 1,246^2 = 0,017.$$

При вычислении эмпирических моментов удобно пользоваться *условными вариантами*

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},$$

где c — постоянная величина (*условный нуль*). Если вариационный ряд состоит из равноотстоящих вариантов x_i с шагом h и в качестве c выбрано значение одной из этих вариантов, то условные варианты выражаются целыми числами.

Сначала вычисляются начальные моменты для условных вариантов, называемые *условными эмпирическими моментами*, т. е.

$$\tilde{M}_k = \frac{1}{n} \sum_i n_i u_i^k = \frac{1}{n} \sum_i n_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right)^k.$$

Искомые эмпирические моменты просто выражаются через условные. Так, при $k = 1$ имеем

$$\tilde{M}_1 = \frac{1}{n} \sum_i n_i \left(\frac{x_i - c}{h} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{n} \sum_i n_i x_i - \frac{c}{n} \sum_i n_i \right) = \frac{1}{h} (M_1 - c),$$

где использовано соотношение $\sum_i n_i = n$. Отсюда

$$M_1 = \tilde{M}_1 h + c.$$

Для центрального момента второго порядка запишем выражение:

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{1}{n} \sum_i n_i (x_i - M_1)^2 = \frac{1}{n} \sum_i n_i (x_i - c - \tilde{M}_1 h)^2 = \\ &= h^2 \left[\frac{1}{n} \sum_i n_i \left(\frac{x_i - c}{h} - \tilde{M}_1 \right)^2 \right], \end{aligned}$$

откуда после очевидных преобразований получаем

$$m_2 = (\tilde{M}_2 - \tilde{M}_1^2) h^2.$$

Аналогично находим соотношения для эмпирических центральных моментов высших порядков:

$$m_3 = (\tilde{M}_3 - 3\tilde{M}_2\tilde{M}_1 + 2\tilde{M}_1^3) h^3;$$

$$m_4 = (\tilde{M}_4 - 4\tilde{M}_3\tilde{M}_1 + 6\tilde{M}_2\tilde{M}_1^2 - 3\tilde{M}_1^4) h^4.$$

Процесс вычислений целесообразно представить таблицей, которая для рассматриваемого примера при $c = x_3 = 1,25$ имеет вид:

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i u_i^3$	$n_i u_i^4$
1,05	18	-2	-36	72	-144	288
1,15	20	-1	-20	20	-20	20
1,25	25	0	0	0	0	0
1,35	22	1	22	22	22	22
1,45	15	2	30	60	120	240
Σ	100	-	-4	174	-22	576

$$\tilde{M}_1 = -0,04; \tilde{M}_2 = 1,74; \tilde{M}_3 = -0,22; \tilde{M}_4 = 5,7.$$

На основании полученных значений условных эмпирических моментов при $h = 0,1$ находим:

$$M_1 = -0,04 \cdot 0,1 + 1,25 = 1,246;$$

$$m_2 = [1,74 - (-0,04)^2] 0,1^2 = 1,74 \cdot 10^{-2};$$

$$m_3 = [-0,22 - 3 \cdot 1,74 (-0,04) + 2(-0,04)^3] 0,1^3 = -1,13 \cdot 10^{-5};$$

$$m_4 = [5,76 - 4 \cdot (-0,22)(-0,04) + 6 \cdot 1,74(-0,04)^2 - 3(-0,04)^4] 0,1^4 = 5,74 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, параметры распределения выражаются следующим образом:

$$M(x) = M_1 = 1,246;$$

$$D(x) = m_2 = 1,74 \cdot 10^{-2}; \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 0,132;$$

$$A(x) = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} = -\frac{1,13 \cdot 10^{-5}}{2,30 \cdot 10^{-3}} = -0,49 \cdot 10^{-2};$$

$$E(x) = \frac{m_4}{m_2^2} = \frac{5,74 \cdot 10^{-4}}{3,03 \cdot 10^{-4}} = 1,89.$$

Как видно, имеет место небольшая левосторонняя асимметрия, а островершинность несколько больше, чем у нормального распределения.

10. Многомерные распределения. В теории моделирования часто приходится исследовать некоторые системы и явления, описываемые не одной, а несколькими случайными величинами (*случайными*

векторами). При этом используются понятия многомерной функции распределения, совместной плотности вероятностей, условной функции и плотности распределения, коэффициентов корреляции и пр.

Под *n*-мерной функцией распределения вектора \vec{X} с координатами x_1, x_2, \dots, x_n понимается вероятность совместного выполнения неравенств $x_1 \leq u_1, x_2 \leq u_2, \dots, x_n \leq u_n$, рассматриваемая как функция *n* переменных u_1, u_2, \dots, u_n :

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = P\{x_1 \leq u_1, x_2 \leq u_2, \dots, x_n \leq u_n\}.$$

Аналогично тому, как это делалось для одной случайной величины, *совместная плотность вероятности* совокупности случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n или *плотность вероятности вектора* \vec{X} определяется как предел отношения вероятности попадания в бесконечно малую область к величине этой области при стягивании ее в точку:

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \lim_{\substack{\Delta u_i \rightarrow 0 \\ i=1, 2, \dots, n}} \frac{P\{u_1 \leq x_1 \leq u_1 + \Delta u_1; \dots; u_n \leq x_n \leq u_n + \Delta u_n\}}{\Delta u_1 \Delta u_2 \dots \Delta u_n}.$$

Функция распределения и плотность вероятности вектора \vec{X} связаны соотношениями:

$$F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_{-\infty}^{u_1} \dots \int_{-\infty}^{u_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n;$$

$$f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}$$

и обладают свойствами, в основном аналогичными свойствам функции распределения и плотности вероятности скалярной случайной величины.

1. Функция распределения случайного вектора неотрицательна и не может быть больше единицы.
2. Если хотя бы одна из переменных u_i принимает значение $-\infty$, то функция распределения вектора \vec{X} равна нулю.
3. Если $u_1 = u_2 = \dots = u_n = \infty$, то рассматриваемая функция распределения равна единице.
4. Функция распределения вектора \vec{X} является неубывающей и непрерывной справа функцией каждого из аргументов u_1, u_2, \dots, u_n .
5. Плотность вероятности случайного вектора неотрицательна и интеграл от нее по всей области возможных значений случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n равен единице.
6. Если проинтегрировать плотность вероятности *n*-мерного случайного вектора по каким-нибудь *m* из переменных u_1, u_2, \dots, u_n

по всей области их изменения, то в результате получится плотность вероятности $n - m$ -мерного вектора с координатами, соответствующими оставшимся переменным.

С помощью функции распределения легко вычислить вероятность попадания конца вектора \vec{X} в параллелепипед $a_i < x_i \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где a_i и b_i — произвольные постоянные. При этом получаем выражение:

$$\begin{aligned}
 P \{a_1 < x_1 \leq b_1; a_2 < x_2 \leq b_2; \dots; a_n < x_n \leq b_n\} = \\
 = F(b_1, b_2, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n P_{ij} - \\
 - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n P_{ijk} + \dots + (-1)^n F(a_1, a_2, \dots, a_n),
 \end{aligned}$$

где $P_{ij\dots m}$ — значение функции $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ при $u_i = a_i$, $u_j = a_j, \dots, u_m = a_m$ и при остальных u_s , равных b_s .

Говорят, например, что вектор \vec{X} подчиняется n -мерному нормальному закону распределения, если его плотность распределения имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{D}}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$

где

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j} b_{ij} (x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})$$

— положительно определенная квадратичная форма; D — определитель

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если через D_{ij} обозначить минор D , соответствующий элементу b_{ij} , то

$$D_{ii} = \sigma_i^2 D; \quad D_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j) D, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где m_{x_i} , σ_i^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия координаты x_i ; $\text{cov}(x_i, x_j)$ — математическое ожидание произведения центрированных координат x_i, x_j , называемое *ковариацией*, т. е.

$$\text{cov}(x_i, x_j) = M[(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})].$$

11. Моменты системы случайных величин. Аналогично тому, как это делалось для одной случайной величины, вводятся понятия *моментов совокупности случайных величин* x_1, x_2, \dots, x_n . При этом

начальным моментом k -го порядка называют математическое ожидание:

$$\nu_k = M [x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}],$$

где k_1, k_2, \dots, k_n — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

Очевидно, что начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию той случайной величины x_j ($j = 1, 2, \dots, n$), степень которой равна единице.

Центральным моментом порядка k называют величину

$$\mu_k = M [(x_1 - m_{x_1})^{k_1} (x_2 - m_{x_2})^{k_2} \dots (x_n - m_{x_n})^{k_n}],$$

где $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$.

Особый интерес представляют центральные моменты второго порядка, т. е.

$$M [(x_i - m_{x_i})^2] = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$M [(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})] = \text{cov}(x_i, x_j) \quad \text{для } i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

В теории моделирования часто используют нормированную величину

$$r_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_i \sigma_j},$$

называемую *коэффициентом корреляции*. Этот коэффициент удовлетворяет условию $|r_{ij}| \leq 1$ и отражает степень линейной зависимости величин x_i, x_j . Очевидно, что ковариация и коэффициент корреляции независимых случайных величин равны нулю, однако обратное утверждение неверно. Пусть, например, величина x_1 имеет симметричное распределение относительно начала координат и $x_2 = x_1$. Тогда $\text{cov}(x_1, x_2) = 0$ и $r_{1,2} = 0$, несмотря на то, что x_2 является функцией x_1 .

Отметим, что центральный момент любого нечетного порядка многомерного нормального распределения равен нулю, а центральный момент четного порядка можно выразить через соответствующие моменты второго порядка. Так, например, для четвертого момента получаем:

$$M [(x_i - m_{x_i})(x_j - m_{x_j})(x_k - m_{x_k})(x_l - m_{x_l})] = \sigma_{ij}\sigma_{kl} + \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk},$$

где $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$; $\sigma_{ij} = \text{cov}(x_i, x_j)$.

12. Условные распределения. В теории моделирования часто приходится находить закон распределения одной совокупности случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n при условии, что каждая из случайных

величин y_1, y_2, \dots, y_m другой совокупности принимает значение, заключенное в интервале $a_j < y_j \leq b_j$; ($j = 1, 2, \dots, m$).

В связи с этим определяется *условная функция распределения совокупности случайных величин* x_1, x_2, \dots, x_k как условная вероятность выполнения неравенств $x_1 \leq u_1, x_2 \leq u_2, \dots, x_k \leq u_k$ от-носительно события, заключающегося в выполнении неравенств $a_j < y_j \leq b_j$ ($j = 1, 2, \dots, m$):

$$F_{\overline{X}}(u_1, u_2, \dots, u_k / a_j < y_j \leq b_j; j = 1, 2, \dots, m) = \\ = P\{x_1 \leq u_1; x_2 \leq u_2; \dots; x_k \leq u_k / a_1 < y_1 \leq b_1; a_2 < y_2 \leq b_2; \dots; \\ a_m < y_m \leq b_m\}.$$

Как и всякая условная вероятность, эта вероятность может быть определена выражением:

$$F_{\overline{X}}(u_1, u_2, \dots, u_k / a_j < y_j \leq b_j; j = 1, 2, \dots, m) = \\ = \frac{\int_{-\infty}^{u_1} \int_{-\infty}^{u_2} \dots \int_{-\infty}^{u_k} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(x_1, x_2, \dots, x_k; y_1, y_2, \dots, y_m) dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_m}{\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m}.$$

Продифференцировав эту формулу по u_1, u_2, \dots, u_k можно найти условную плотность вероятности совокупности случайных величин x_1, x_2, \dots, x_k при условии, что случайные величины y_j ($j = 1, 2, \dots, m$) принимают значения, заключенные в пределах

$$a_j < y_j \leq b_j; \\ f(u_1, u_2, \dots, u_k / a_j < y_j \leq b_j; j = 1, 2, \dots, m) = \\ = \frac{\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(u_1, u_2, \dots, u_k; y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m}{\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_m}^{b_m} f(y_1, y_2, \dots, y_m) dy_1 dy_2 \dots dy_m}.$$

В частности, многомерное нормальное распределение обладает тем свойством, что все его условные распределения также являются нормальными.

8.2. Преобразования случайных величин

1. Основные формулы. В теории моделирования часто приходится находить закон распределения и моменты случайного параметра y ,

являющегося некоторой функцией случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , заданных своим совместным законом распределения. Если эти величины являются непрерывными, для определения функции распределения $F_y(u)$ используется выражение:

$$F_y(u) = \int_D \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

где $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — совместная плотность распределения величин x_1, x_2, \dots, x_n ; D — область интегрирования, определяемая неравенством

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq u.$$

В случае дискретных случайных величин аналогичное решение дается с помощью n -мерной суммы, распространенной на область D .

Моменты функции случайных аргументов можно оценить путем разложения ее в ряд Тейлора в точке математических ожиданий. При этом начальный момент любого порядка $M[y^k]$ вычисляются с помощью формулы:

$$M[y^k] = \psi_m \cdot \left[\sum_{k=1}^q \frac{1}{k!} \sum_{r_1=1}^n \sum_{r_2=1}^n \dots \sum_{r_k=1}^n \left(\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{r_1} \partial x_{r_2} \dots \partial x_{r_k}} \right)_m \times \right. \\ \left. \times M[(x_{r_1} - m_{r_1})(x_{r_2} - m_{r_2}) \dots (x_{r_k} - m_{r_k})]^k \right].$$

Здесь ψ_m — значение функции $\psi = [\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]^k$ в точке математических ожиданий; q — степень используемого отрезка ряда Тейлора; $M[(x_{r_1} - m_{r_1})(x_{r_2} - m_{r_2}) \dots (x_{r_k} - m_{r_k})]^k$ — моменты связи k -го порядка между величинами $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}$, которые считаются заданными или могут быть определены при заданном законе распределения системы случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n . Центральные же моменты произвольного порядка могут быть определены, как отмечалось выше, через соответствующие начальные моменты.

2. Функция одной случайной величины. Рассмотрим прежде всего линейное преобразование одной случайной величины. При этом параметр y , закон распределения которого ищется, задается в виде $y = ax + b$, где a, b — заданные константы, а искомая функция распределения, как видно из рис. 10, определяется выражением:

$$F_y(u) = \begin{cases} F_x\left(\frac{u-b}{a}\right), & \text{если } a > 0; \\ 1 - F_x\left(\frac{u-b}{a}\right), & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

(Коэффициент a в рассматриваемом случае не может равняться нулю, так как при $a = 0$ параметр y не является случайной величиной).

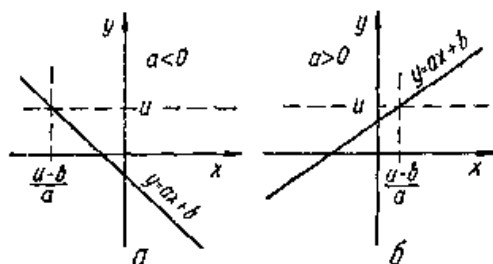


Рис. 10. Иллюстрация связи распределения параметра $y = ax + b$ функции с функцией распределения аргумента x .

Математическое ожидание и дисперсия параметра y определяются в рассматриваемом случае формулами:

$$M[y] = am_x + b; \quad D[y] = a^2\sigma_x^2,$$

где m_x и σ_x^2 — соответственно математическое ожидание и дисперсия случайной величины x . Моменты других порядков выражаются также через соответствующие моменты величины x .

Заметим, что линейное преобразование не меняет вид закона распределения, а меняет только его параметры. При этом коэффициент a называют *масштабным множителем*, а b — *центрирующей постоянной*.

Если параметр y является нелинейной монотонной и непрерывной функцией $\varphi(x)$ случайного аргумента x , функция распределения $F_y(u)$ аналогично предыдущему случаю определяется выражением:

$$F_y(u) = \begin{cases} F_x(\psi(u)), & \text{если } \varphi(x) \text{ монотонно возрастает;} \\ 1 - F(\psi(u)), & \text{если } \varphi(x) \text{ монотонно убывает.} \end{cases}$$

Здесь $\psi\varphi$ — функция, обратная функции φ . Эту формулу можно распространить на случай оценки функции распределения непрерывной однозначной функции $\varphi(x)$. Выделим в области изменения аргумента x k интервалов, в которых функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает, и r интервалов, в которых $\varphi(x)$ монотонно убывает. Тогда для $F_y(u)$ можно записать:

$$F_y(u) = \sum_{i=1}^k [F_x(\psi^i(u)) - F_x(x_{\text{в}}^i)] + \sum_{i=1}^r [F_x(x_{\text{в}}^i) - F_x(\psi^i(u))],$$

где $\psi^i(u)$ — значение функции ψ при $y = u$ в i -м интервале; $x_{\text{в}}^i, x_{\text{б}}^i$ — концы i -го интервала.

Пусть необходимо определить функцию распределения параметра y , заданного уравнением $y=x^2$. Как видно из рис. 11, область изменения

аргумента x в рассматриваемом случае можно разбить на два интервала: $(-\infty, 0)$, где y убывает, и $(0, \infty)$, когда y возрастает.

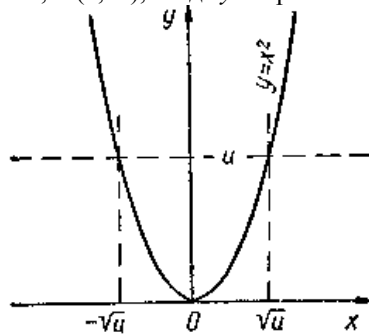


Рис. 11. Иллюстрация связи функций распределения параметра $y = x^2$ с функцией распределения аргумента x .

При этом $\psi^1(u) = -\sqrt{u}$; $\psi^2(u) = \sqrt{u}$, и для $F_y(u)$ получаем выражение:

$$F_y(u) = F_x(\sqrt{u}) - F_x(0) + F_x(0) - F_x(-\sqrt{u}) = \\ = F_x(\sqrt{u}) - F_x(-\sqrt{u}).$$

Математическое ожидание и дисперсия параметра y в рассматриваемом случае определяются формулами:

$$M|y| = m_x^2 + \mu_2; \quad D|y| = m_x^4 + 6m_x^2\mu_2 + 4m_x\mu_3 + \mu_4.$$

Здесь μ_k — центральный момент k -го порядка случайной величины x .

3. Линейная функция совокупности случайных величин. Совершенно аналогично определяется закон распределения функции многих случайных аргументов. Пусть y является линейной функцией n

случайных аргументов: $y = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$. Тогда

$$F_y(u) = F_z(u - b); \quad z = \sum_{i=1}^n z_i; \quad z_i = a_i x_i; \\ F_{z_i}(u) = F_{x_i}\left(\frac{u}{a_i}\right),$$

т. е. задача оценки функции распределения $F_y(u)$ сводится к задаче оценки функции распределения параметра z , являющегося суммой n -случайных величин z_1, z_2, \dots, z_n , при известном их законе распределения. Рассмотрим случай, когда $n = 2$. На рис. 12 изображена

область интегрирования, вероятность попадания в которую случайного вектора с координатами z_1, z_2 определяет значение функции распределения $F_z(u)$ в точке u .

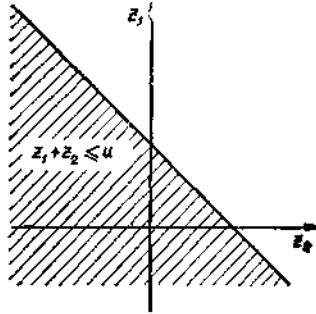


Рис. 12. Область интегрирования, определяющая функцию распределения параметра $z = z_1 + z_2$.

Согласно приведенным выше формулам можно записать

$$\begin{aligned}
 F_z(u) &= \int \int_{z_1+z_2 < u} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{u-z_2} f(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} f(x - z_2, z_2) dz_2 dx.
 \end{aligned}$$

Особое практическое значение имеет случай, когда складываемые величины z_1, z_2 являются независимыми. Тогда говорят о композиции законов распределения и, так как при этом $f(z_1, z_2) = f_1(z_1) f_2(z_2)$, то для $F_z(u)$ получаем выражение:

$$\begin{aligned}
 F_z(u) &= \int \int_{z_1+z_2 < u} f_1(z_1) f_2(z_2) dz_1 dz_2 = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{z_1}(u - z_2) f_2(z_2) dz_2 = \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - z_2) f_2(z_2) dz_2 dx.
 \end{aligned}$$

Пусть, например, необходимо найти композицию равномерных в интервале $(0, 1)$ законов распределения. Так как при этом плотности распределения задаются в интервалах:

$$\begin{aligned}
 &f_1(z_1) = f_2(z_2) = f(v) = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{если } v \leq 0 \text{ или } v > 1; \\ 1, & 0 < v \leq 1, \end{cases}
 \end{aligned}$$

задачу удобно решать путем геометрического представления соот-

ветствующих областей интегрирования. Интегрируя по этим областям (рис. 13), можно получить:

$$F_z(u) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } u \leq 0; \\ \frac{1}{2} u^2 & , \text{ если } 0 < u \leq 1; \\ 1 - \frac{(2-u)^2}{2} & , \text{ если } 1 < u \leq 2; \\ 1 & , \text{ если } u > 2. \end{cases}$$

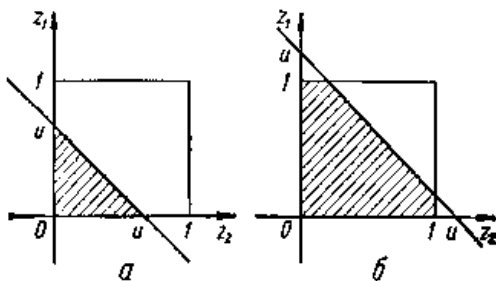


Рис. 13. Области интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $z = z_1 + z_2$ при равномерных в интервале $(0,1)$ законах распределения аргументов.

Полученный закон носит название *закона Симпсона*. Композиция совокупности законов распределения изучалась многими авторами. В связи с этим сформулирован ряд предельных теорем и выделены классы устойчивых и безгранично делимых законов, которые будут рассмотрены ниже. Здесь отметим, что в общем случае при невыполнении условий известных предельных теорем, для оценки функции распределения $F_y(u)$ в практических исследованиях необходимо применять специальные методы, например, *метод Монте-Карло*, который рассматривается в (6).

Для оценки же математического ожидания и дисперсии параметра y в общем случае можно получить соответственно выражения

$$M[y] = \sum_{i=1}^n a_i m_{x_i} + b;$$

$$D[y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum_{i < j} a_i a_j r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j},$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между аргументами x_i и x_j .

Если этот коэффициент равен нулю, т. е. аргументы x_1, x_2, \dots, x_n некоррелированы, то

$$D[y] = \sum_{i < 1}^n a_i^2 \sigma_{xi}^2.$$

4. Устойчивые и безгранично делимые распределения. Найдем закон распределения композиции двух нормальных законов т е определим $F_z(u)$, если $z = z_1 + z_2$:

$$f_1(z_1) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z_1 - m_1)^2}{\sigma_1^2}}; \quad f_2(z_2) = \frac{1}{\sigma_2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(z_2 - m_2)^2}{\sigma_2^2}}.$$

Согласно предыдущему пункту

$$\begin{aligned} F_z(u) &= \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - z_2) f_2(z_2) dz_2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z_2-m_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(z_2-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} dz_2 dx. \end{aligned}$$

Если раскрыть скобки в показателе степени подынтегрального выражения и привести подобные члены, то получим:

$$F_z(u) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 + 2Bz_2 - C} dz_2 dx,$$

где

$$A = \frac{1}{2} \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}; \quad B = \frac{m_2}{2\sigma_2^2} + \frac{x - m_1}{2\sigma_1^2}; \quad C = \frac{m_2^2}{2\sigma_2^2} + \frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_1^2}.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 + 2Bx - C} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{-\frac{AC - B^2}{A}},$$

то после преобразований для $F_z(u)$ получаем нормальный закон распределения

$$F_z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{[x - (m_1 + m_2)]^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} dx$$

с математическим ожиданием $m = m_1 + m_2$ и дисперсией $D = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Таким образом, композиция двух нормальных законов распределения также является нормальным законом. Очевидно, что этот вывод нетрудно распространить на композицию произвольного числа n нормальных законов распределения. При этом

математическое ожидание и дисперсия результирующего закона соответственно равны сумме математических ожиданий и дисперсий слагаемых.

Замеченное свойство нормальных распределений сохранять свой вид при их наложении (композиции) называется *свойством устойчивости*. Этим свойством обладают, кроме нормального, и другие распределения. Распределение F называется *устойчивым*, если оно не сосредоточено в нуле, и композиция любого числа таких распределений подчиняется распределению, отличающемуся от F только параметрами расположения (2). Устойчивые распределения играют все возрастающую роль в качестве обобщения нормального распределения.

С понятием устойчивости тесно связано понятие *безграничной делимости*. Распределение F *безгранично делимо*, если при каждом n его можно представлять как распределение суммы n независимых случайных величин с одним и тем же распределением F_n . Следует отметить, что безграничная делимость является свойством типа, т. е. вместе с F все распределения, отличающиеся от F лишь параметрами расположения, безгранично делимы. Устойчивые распределения безгранично делимы и выделяются среди безгранично делимых тем, что для них F_n отличается от F лишь параметрами расположения.

Вторым примером устойчивого (и значит безгранично делимого) закона распределения может служить закон Пуассона

5. Нелинейное преобразование совокупности случайных величин. Законы распределения нелинейных функций совокупности случайных величин изучены в меньшей мере, чем линейных. Поэтому в рассматриваемых случаях используются в основном некоторые приближенные методы. Только в некоторых частных случаях для функции распределения $F_y(u)$ нелинейного параметра y можно получить аналитические выражения.

Предположим, что параметр y , закон распределения которого ищется, является произведением двух случайных величин $y = x_1 x_2$. На рис. 14 изображены области интегрирования, определяющие $F_y(u)$ в рассматриваемом случае, при $u > 0$ и соответственно $u < 0$.

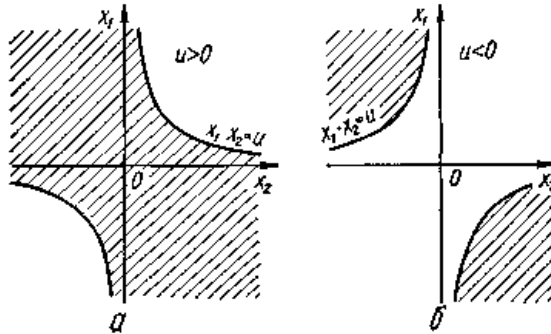


Рис. 14. Области интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $y = x_1x_2$

Как видно из этих рисунков, для $F_y(u)$ можно записать следующее выражение:

$$F_y(u) = \int_{x_1} \int_{x_2 < u} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^0 \int_{u/x_2}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{u/x_1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Если аргументы x_1, x_2 независимы, то

$$F_y(u) = \int_{-\infty}^0 \left[1 - F_{x_1}\left(\frac{u}{x_2}\right) \right] f_2(x_2) dx_2 + \int_0^{\infty} F_{x_1}\left(\frac{u}{x_2}\right) f_2(x_2) dx_2.$$

Пусть, например, аргументы x_1, x_2 независимы, и законы распределения равномерны в интервале $(0, 1)$. Интегрируя по области, изображенной на рис. 15, для $F_y(u)$ можно получить выражения:

$$F_y(u) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } u \leq 0; \\ u(1 - \ln u) & , \text{ если } 0 < u \leq 1; \\ 1 & , \text{ если } u > 1. \end{cases}$$

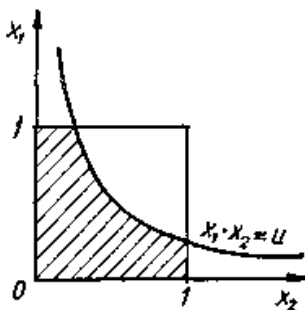


Рис. 15. Область интегрирования, определяющая функцию распределения параметра $y = x_1 x_2$ при равномерных в интервале $(0, 1)$ законах распределения аргументов.

Для определения математического ожидания и дисперсии параметра $y = x_1 x_2$ при произвольных законах распределения аргументов получаем выражения:

$$M[y] = m_{x_1} m_{x_2} + r \sigma_{x_1} \sigma_{x_2};$$

$$D[y] = m_{x_1}^2 m_{x_2}^2 + m_{x_1}^2 \sigma_{x_2}^2 + m_{x_2}^2 \sigma_{x_1}^2 + 4m_{x_1} m_{x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2} r +$$

$$+ 2m_{x_1} \rho_{x_1 x_2}^2 + 2m_{x_2} \rho_{x_1 x_2}^2 + \rho_{x_1 x_2}^2,$$

где r — коэффициент корреляции между x_1 и x_2 ; $\rho_{x_1^{k_1} x_2^{k_2}} = M[(x_1 - m_{x_1})^{k_1} (x_2 - m_{x_2})^{k_2}]$ — центральный момент порядка $k_1 + k_2$ (2.11). Пусть теперь y определяется функцией $y = x_1/x_2$. На рис. 16 аналогично предыдущему случаю изображены области интегрирования, определяющие $F_u(u)$ при положительном и отрицательном u .

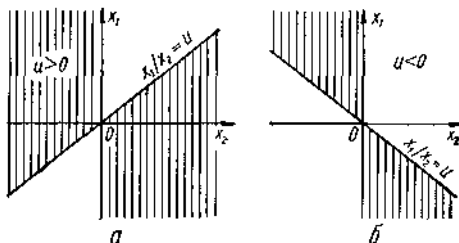


Рис. 16. Область интегрирования, определяющие функцию распределения параметра $y = x_1/x_2$.

Интегрируя по этим областям, получаем выражение

$$\begin{aligned}
 F_y(u) &= \\
 &= \int \int_{x_1/x_2 \leq u} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\
 &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{ux_2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \\
 &+ \int_{-\infty}^0 \int_{ux_2}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2,
 \end{aligned}$$

которое при независимых x_1, x_2 принимает вид:

$$F_y(u) = \int_0^{\infty} F_{x_1}(ux_2) f_2(x_2) dx_2 + \int_{-\infty}^0 [1 - F_{x_1}(ux_2)] f_2(x_2) dx_2.$$

В частности, можно показать, что при нормальном законе распределения аргументов, т. е. когда

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right\},$$

функция распределения $F_y(u)$ определяется выражением

$$F_y(u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg u.$$

Такое распределение называется *распределением Коши*. Оно является примером распределения, не имеющего математического ожидания и дисперсии, так как интегралы, определяющие эти характеристики, не существуют.

Если параметр y является функцией, близкой к линейной, для оценки $F_y(u)$ применяют метод линеаризации. Этот метод заключается в представлении исходной функции $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ линейной частью разложения ее в ряд Тейлора в точке математических ожиданий, т. е.

$$y \approx \varphi(m_{x_1}, m_{x_2}, \dots, m_{x_n}) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_m (x_i - m_{x_i}),$$

где $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_m$ — производная от функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументу x_i в точке математических ожиданий.

Далее, предполагая выполнимость условий центральной предельной теоремы или законы распределения аргументов нормальными, считают закон распределения $F_y(u)$ также нормальным с параметрами, определяемыми выражениями:

$$\begin{aligned}
 M[y] &= \varphi(m_1, m_2, \dots, m_n); \\
 D[y] &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m^2 \sigma_{x_i}^2 + \\
 &+ 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)_m \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_m r_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}.
 \end{aligned}$$

В большинстве же практических случаев, при решении технических проблем, необходимо определить законы распределения некоторых параметров, являющихся существенно нелинейными функциями случайных аргументов. Например, при оценке работоспособности электронной цепи необходимо исследовать закон распределения ее передаточной характеристики, которая является существенно нелинейной функцией относительно параметров компонентов даже для линейных цепей. Для решения подобных задач применяются специальные методы, наиболее распространенным из которых является метод Монте-Карло.

6. Метод Монте-Карло. Этот метод заключается в моделировании случайных аргументов x_1, x_2, \dots, x_n , в результате которого получают M реализаций случайного вектора с координатами x_1, x_2, \dots, x_n и, следовательно, M значений параметра $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Отношение числа реализаций m , удовлетворяющих условию $y \geq u$, к общему числу реализаций M отождествляется с вероятностью $p = p(y \geq u) = F_y(u)$. Точность получаемого при этом результата может быть оценена, например, при помощи неравенства Чебышева, согласно которому

$$P \left\{ \left| \frac{m}{M} - p \right| \leq \sqrt{\frac{p(1-p)}{M\varepsilon}} \right\} \geq 1 - \varepsilon,$$

где ε — произвольное число из интервала $(0, 1)$ (обычно ε полагают равным 0,01; 0,05 или 0,001).

Моделирование случайных аргументов осуществляется с помощью заранее рассчитанных таблиц случайных чисел, некоторых датчиков (генераторов) случайных чисел или псевдослучайных чисел, вычисленных по заданным правилам. Применение того или иного метода моделирования зависит от конкретных условий задачи.

Наиболее часто используется метод моделирования с помощью псевдослучайных чисел, получаемых путем перехода от равномерно распределенных чисел к числам, подчиняющимся заданным законам распределения.

Если аргументы x_1, x_2, \dots, x_n независимы, моделирование вектора \vec{x} заключается в отдельном моделировании каждого аргумента x_i ($i = 1, 2,$

..., n). Можно доказать, что случайная величина $\gamma = F_{x_i}(u)$ подчиняется равномерному закону распределения при любой функции распределения $F_{x_i}(u)$. Благодаря этому реализации случайных величин x_i получают путем моделирования равномерно распределенных чисел z_j и перехода к требуемым числам с помощью обратной функции $F_{x_i}^{-1}(u)$, т. е. решая уравнение

$$\int_{-\infty}^{u_j} f_i(x_i) dx_i = z_j$$

относительно u_j . Например, числа u_j , подчиняющиеся экспоненциальному закону распределения, можно найти по формуле $u_j = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - z_j)$, получаемой из уравнения

$$1 - e^{-\lambda u_j} = z_j,$$

где z_j — равномерно распределенные числа в интервале (0, 1).

В общем случае, когда аргументы x_1, x_2, \dots, x_n зависимы, моделирование вектора \vec{x} осуществляют путем моделирования равномерно распределенных чисел z_1, z_2, \dots, z_n и решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} F_{x_1}(u_1) &= z_1; \\ F_{x_2}(u_2/u_1) &= z_2; \\ F_{x_n}(u_n/u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) &= z_n \end{aligned}$$

относительно величин u_1, u_2, \dots, u_n , которые подчиняются заданному закону распределения (здесь — условная функция распределения). $F_{x_i}(u_i/u_1, u_2, \dots, u_{i-1})$

8.3. Обработка наблюдений

1. Наблюдения. Количественные результаты при наблюдениях получают обычно путем *измерения* или *счета*. Счет можно рассматривать как разновидность измерений, а измерения часто сводятся к счету (например, интервал времени можно определить, подсчитав количество заполняющих его равномерно следующих импульсов). Если истинное значение наблюдаемой величины есть x_0 , а в результате наблюдения (измерения) получено значение x , то ошибка наблюдения выражается как $\delta = x - x_0$.

Условимся для краткости под термином *величина* понимать как тип наблюдаемой величины (масса, давление, напряжение и т. п.), так и ее

истинное значение. Термин *наблюдение* будет означать процесс регистрации результата и сам результат. При этом *ошибка* определяется разностью между наблюдением и величиной.

Различают три вида ошибок: промахи, систематические ошибки и случайные ошибки.

Промахи возникают из-за грубого нарушения нормальных условий наблюдения (неправильные действия наблюдателя, неисправность измерительной аппаратуры, резкое изменение внешних условий) и обычно характеризуются сравнительно большими ошибками.

Систематические ошибки являются результатом влияния неучтенных факторов, связанных с условиями наблюдения (повышенная температура, электромагнитные помехи и т. п.) или недостатками измерительных устройств (неправильная градуировка шкалы, несовершенство метода измерения).

Промахи и систематические ошибки в значительной мере могут быть обнаружены и устранены как при обработке наблюдений, так и при организации измерительного процесса (выбор метода измерения, проверка приборов, использование автоматической регистрирующей аппаратуры, сбор и анализ предварительных данных об объекте наблюдения и условиях окружающей среды, подготовка и инструктаж экспериментаторов). Однако как бы хорошо ни были организованы наблюдения, всегда остается множество неучтенных факторов, влияние которых приводит к *случайным ошибкам*.

2. Основная гипотеза. Случайные ошибки естественно рассматривать как результат влияния большого числа различных причин, каждая из которых вносит очень малую ошибку, и ни одна из них не является доминирующей (если выявлены доминирующие ошибки, то их следует отнести к систематическим ошибкам и учитывать соответствующей поправкой). В соответствии с теоремой Ляпунова имеются веские основания считать, что случайная ошибка распределена по нормальному закону (*основная гипотеза*). Если также предположить, что отклонения наблюдений равновероятны в обе стороны от величины, то математическое ожидание случайной ошибки δ равно нулю и ее плотность вероятности $f(\delta)$ и функция распределения $F(d)$ имеют вид:

$$f(\delta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}; \quad F(d) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\delta} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Параметр распределения σ (среднее квадратическое отклонение случайной величины δ) принимается в качестве *средней ошибки*. Как видно из рис. 14, б, чем больше значение σ , тем более пологим

является график функции $f(\delta)$, и, следовательно, вероятность больших отклонений наблюдений от истинной величины с ростом σ увеличивается. Вероятность ошибки δ , лежащей в интервале от $-\alpha$ до α , выражается через интеграл вероятности (2.5) следующим образом:

$$P(-\alpha < \delta < \alpha) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} d\delta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \psi(k),$$

где

$$k = \frac{\alpha}{\sigma}.$$

Вычислив значение k для заданного α при известном σ , можно найти эту вероятность по табл. 2 для функции Лапласа $\Phi(k)$, причем $\psi(k) = 2\Phi(k)$. Если исходной является вероятность ошибки, т. е. $\psi(k)$, то по тем же таблицам обратным интерполированием для $\Phi(k) = \frac{1}{2}\psi(k)$ определяется значение k , а значит, и интервал ошибки δ . Принимаемое при этом значение вероятности называют *доверительной вероятностью* (или *достоверностью*), а соответствующий ей интервал — *доверительным интервалом*. Часто используют стандартные доверительные интервалы, при которых $\alpha = \sigma, 2\sigma, 3\sigma$. Им соответствуют надежности:

$$\begin{aligned} P(-\sigma < \delta < +\sigma) &= \psi(1) = 2\Phi(1) = 0,683; & P(-2\sigma < \delta < +2\sigma) &= \\ &= \psi(2) = 2\Phi(2) = 0,955 & \text{и} & P(-3\sigma < \delta < +3\sigma) = \psi(3) = \\ &= 2\Phi(3) = 0,997. \end{aligned}$$

На основании соотношения $\delta = x_i - x_0$ выражения для доверительных вероятностей можно представить также в виде:

$$P(x_i - \alpha < x_0 < x_i + \alpha) = \psi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right),$$

или

$$P(-k\sigma < x_i - x_0 < k\sigma) = \psi(k).$$

Для характеристики наблюдений употребляют также *вероятную ошибку* ρ , определяемую как $P(-\rho \leq \delta \leq \rho) = 0,5$, т. е. ρ — это такое отклонение, которое с одинаковой вероятностью 0,5 может быть превзойдено или не превзойдено по абсолютной величине. Так как $\psi(k) = 2\Phi(k) = 0,5$, то $\Phi(k) = 0,25$ и $k = 0,6745$ (этот результат находим по табл. 2 с помощью обратного интерполирования). Но $k = \frac{\rho}{\sigma}$, следовательно, вероятная ошибка выражается через среднюю ошибку соотношением $\rho = 0,6745\sigma$.

3. Точечные оценки. При нормальном распределении ошибки $\delta = x - x_0$ наблюдение x также распределено по нормальному закону (2.1)

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

с математическим ожиданием, равным истинному значению x_0 наблюдаемой величины, и дисперсией σ^2 . Это означает, что отдельное наблюдение представляет собой элемент из бесконечного множества наблюдений, которые могут быть выполнены в одинаковых условиях (такие наблюдения называют *равноточными*) со средней ошибкой σ . Это бесконечное множество возможных наблюдений образует нормальную генеральную совокупность (2.8), среднее арифметическое которой равно математическому ожиданию, т. е. величине x_0 .

На практике количество наблюдений ограничено, и вариационный ряд из n наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n можно рассматривать как случайную выборку из генеральной совокупности. Возникает вопрос, как распорядиться этой выборкой, чтобы наилучшим образом оценить величину x_0 и степень достоверности полученного результата.

Поскольку наблюдения взаимно независимы, то плотность вероятности для выборки x_1, x_2, \dots, x_n определяется как произведение плотностей вероятностей каждого из наблюдений, т. е.

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= p(x_1) p(x_2) \dots p(x_n) = \\ &= (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

Эта вероятность имеет экстремумы относительно x_0 и σ , значения которых определяются из уравнений:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_0} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) = 0; \quad \frac{1}{p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = 0.$$

Наибольшего значения вероятность выборки достигает при

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = x_{\text{ср}}$$

и любом σ , а также при

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \sigma_n$$

и любом x_0 . Это означает, что при нормальном распределении наиболее вероятной оценкой наблюдаемой величины является среднее выборки x_{cp} , а наилучшей оценкой средней ошибки для данного x_0 является среднее квадратическое отклонение σ_n выборки от истинного значения наблюдаемой величины. Полученные результаты называют *точечными оценками* параметров, а способ их определения — *методом максимального правдоподобия*.

Точечная оценка σ_n используется в тех случаях, когда истинное значение наблюдаемой величины x_0 известно (например, при исследовании точности измерительного устройства). На основании наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n определяются отклонения $\delta_i = x_i - x_0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и вычисляется

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2},$$

которая является средней квадратической ошибкой измерения величины x . Оценка σ_n характеризует точность показаний измерительного устройства на участке шкалы в окрестностях значения x_0 и означает с вероятностью $\psi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)$, что ошибка σ не превосходит α .

Пусть, например, показания тахометра отклоняются относительно величины $x_0 = 1000$ об/мин по нормальному закону и выборка из $n = 20$ наблюдений дает $\sigma_n = 17,7$ об/мин. Тогда $P(-\sigma_n \leq \leq \sigma \leq \sigma_n) = \psi(1) = 0,683$, т. е. можно ожидать, что 68,3% всех отсчетов будут находиться в интервале от 982,3 до 1017,7 об/мин.

Для отклонения $\alpha = 10$ об/мин имеем $\frac{\alpha}{\sigma_n} = \frac{10}{17,7} = 0,56$ и по табл.2

находим $\psi(0,56) = 2\Phi(0,56) \approx 0,425$. Значит отсчет с относительной погрешностью 1% при использовании тахометра в окрестностях отметки 1000 об/мин может быть получен примерно в 4 случаях из 10. Повышение степени достоверности результата неизбежно связано со снижением требований к точности измерения. Если, например, принять надежность 0,95, то придется мириться с отклонением $\alpha' = 2\sigma_n = 35,4$ об/мин, т. е. с относительной погрешностью 3,5%.

Другая точечная оценка

$$x_{cp} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

повсеместно используется на практике для определения наиболее вероятного значения наблюдаемой величины. Следует, однако, помнить, что она гарантирует наилучший результат для данной выборки только в случаях нормального распределения. Если оценивать среднюю ошибку значением a_n , которое эта величина принимает при $x_0 = x_{\text{ср}}$, т. е.

$$\sigma_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{\text{ср}})^2},$$

то нет никакой гарантии, что эта оценка будет наилучшей. Можно лишь утверждать, что она тем ближе к истинной средней ошибке σ , чем ближе средние выборки $x_{\text{ср}}$ к величине x_0 .

4. Оценки в классической теории ошибок. Для оценки точности наблюдений необходимо рассмотреть $x_{\text{ср}}$ и $\sigma_{\text{ср}}$ как случайные величины. Можно показать, что их плотности вероятностей выражаются функциями:

$$f_1(x_{\text{ср}}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(x_{\text{ср}} - x_0)^2};$$

$$f_2(\sigma_{\text{ср}}) = \frac{n^{\frac{1}{2}} (n-1)! \sigma_{\text{ср}}^{n-2}}{2^{\frac{1}{2}} (n-3)! \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \sigma^{n-1}} e^{-\frac{n\sigma_{\text{ср}}^2}{2\sigma^2}},$$

где $\Gamma(\alpha)$ — *гамма-функция* (интеграл Эйлера второго рода), значения которой можно взять из таблиц или вычислить по формулам (вторая формула используется для целого положительного числа n):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt; \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Как видно, $x_{\text{ср}}$ распределено по нормальному закону с математическим ожиданием x_0 и средним квадратическим отклонением $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, которое характеризует точность оценки величины x_0 через среднее выборки $x_{\text{ср}}$. Эта точность повышается пропорционально квадратному корню из объема выборки, но с увеличением n возрастает сравнительно медленно. Кроме того, повышение точности за счет значительного увеличения объема выборки может быть сведено на нет неполностью устраненной систематической ошибкой. Поэтому на практике даже при сравнительно высоких требованиях к достоверности результата ограничиваются 30—50 отсчетами. Конкретные рекомендации относительно объема выборки обычно основываются на анализе

требуемой достоверности результата, точности измерительных устройств и условий наблюдения.

Среднее квадратическое отклонение сценки x_{cp} при объеме выборки n и известном стандарте σ нормально распределенной величины x_0 определяется по приведенной выше формуле как $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Однако на практике точное значение σ обычно не известно. В классической теории ошибок приближенное значение для σ определяют следующим образом. Из закона распределения $f_2(\sigma_{cp})$ находят математическое ожидание $M(\sigma_{cp}^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$ и полагают его равным σ_{cp}^2 . Разумеется, замена $M(\sigma_{cp}^2)$ на σ_{cp}^2 таит в себе известный произвол, поэтому в правой части формулы для $M(\sigma_{cp}^2)$ величину σ следует заменить на ее приближенное значение, которое обозначим через s . Тогда $\sigma_{cp}^2 = \frac{n-1}{n} s^2$, откуда следует $s^2 = \frac{n}{n-1} \sigma_{cp}^2$, и на основании выражения для σ_{cp}^2 из (3) получаем

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2}.$$

Это соотношение, называемое *формулой Бесселя*, используется для определения средней ошибки одного наблюдения по данным выборки x_1, x_2, \dots, x_n . Величина s называется *выборочным стандартом*. Приближенную оценку для среднего квадратического отклонения величины x_{cp} получим, разделив выборочный стандарт s на квадратный корень из объема выборки n , т. е.

$$s_{cp} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{cp})^2}.$$

Достоверность определения величины x_0 по n наблюдениям выражается как $P(-ks_{cp} < x_{cp} - x_0 < ks_{cp}) = \psi(k)$ или $P(x_{cp} - ks_{cp} < x_0 < x_{cp} + ks_{cp}) = \psi(k)$, что сокращенно представляется записью $x_0 = x_{cp} \pm ks_{cp}$. Относительная ошибка равна, $\frac{ks_{cp}}{x_{cp}}$, где k определяется на основании функции $\psi(k)$, равной заданной достоверности. Для достоверности 0,683 относительная ошибка равна $\frac{s_{cp}}{x_{cp}}$, а для достоверности 0,955 увеличивается вдвое.

Неточность, связанная с заменой $M(\sigma_{cp}^2)$ на σ_{cp}^2 при выводе формулы Бесселя, сказывается тем меньше, чем больше объем выборки

n. Но, как показывает анализ, даже при очень больших *n* (порядка тысячи) относительная ошибка определения $\sigma_{\text{ср}}$ все же составляет несколько процентов. Поэтому нет смысла записывать значения σ и $\sigma_{\text{ср}}$ большее, чем с двумя значащими цифрами. Вторая значащая цифра $\sigma_{\text{ср}}$ определяет и число значащих цифр, которые достаточно удерживать в записи $x_{\text{ср}}$.

5. Порядок обработки равноточных наблюдений. При вычислении $x_{\text{ср}}$ и s удобно пользоваться формулами:

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a) + a;$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - a)^2 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a) \right]^2 \right)},$$

где a — произвольная величина, для которой обычно выбирают округленное число, близкое к $x_{\text{ср}}$. Пусть, например, требуется обработать ряд из 12 равноточных наблюдений некоторой величины. Соответствующие вычисления приведены ниже ($a = 18320$):

<i>i</i>	x_i	$x_i - a$	$(x_i - a)^2$
1	18338	18	324
2	18316	-4	16
3	18325	5	25
4	18341	21	441
5	18332	12	144
6	18319	-1	1
7	18313	-7	49
8	18329	9	81
9	18310	-10	100
10	18322	2	4
11	18330	10	100
12	18314	-6	36
	Σ	49	1321

$$x_{\text{ср}} = \frac{49}{12} + 18320 = 18324,1; \quad s = \sqrt{\frac{1}{11} \left(1321 - \frac{49^2}{12} \right)} = 10,1;$$

$$s_{\text{ср}} = 10 \frac{10}{\sqrt{12}} = 2,92.$$

Полученный результат записывается сокращенно

$$x_0 = 18324,1 + 2,9,$$

что означает $P(18321,2 < x_0 < 18327,0) = 0,683$ или $P(18318,3 < x_0 < 18329,9) = 0,955$, и вообще,

$$P(18324,1 - 2,9k < x_0 < 18324,1 + 2,9k) = \psi(k) = 2\Phi(k),$$

где k — любое число.

Вероятная ошибка среднего арифметического $\rho_{\text{ср}} = 0,6745s = 2,0$, т. е.

$$P(18322,1 < x_0 < 18326,1) = 0,5.$$

6. Достоверность малых выборок. В теории моделирования часто ограничиваются небольшим числом наблюдений, в результате чего оценка результата с помощью величины $s_{\text{ср}}$ может оказаться недостаточно точной. Это связано с тем, что в соотношении

$P(-ks_{\text{ср}} < x_{\text{ср}} - x_0 < ks_{\text{ср}}) = \psi(k)$, или равносильном ему

$$P\left(-k < \frac{x_{\text{ср}} - x_0}{s_{\text{ср}}} < k\right) = \psi(k)$$

$s_{\text{ср}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ принимается вместо точной величины $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Необходимое уточнение достигается с помощью *распределения Стьюдента*

$$S(u; n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

которому подчиняется величина

$$\begin{aligned} u &= \frac{x_{\text{ср}} - x_0}{s} \sqrt{n} = \\ &= \frac{x_{\text{ср}} - x_0}{\sigma_{\text{ср}}} \sqrt{n-1} = \frac{x_{\text{ср}} - x_0}{s_{\text{ср}}}. \end{aligned}$$

График распределения Стьюдента (рис. 17) напоминает по форме нормальное распределение и с увеличением n приближается к нему, сливаясь с ним при $n \rightarrow \infty$, а при малых n сильно отличается от нормального.

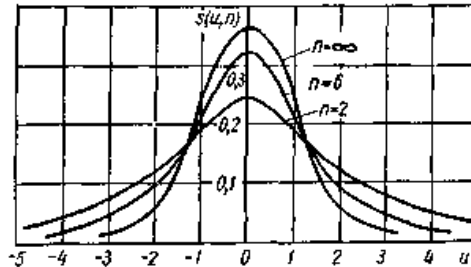


Рис. 17. Распределение Стьюдента.

Оно играет большую роль в статистике малых выборок (*микростатистике*).

Вероятность того, что u не превзойдет по абсолютному значению числа k , выражается как

$$P(-k < u < k) = P(x_{cp} - ks_{cp} < x_0 < x_{cp} + ks_{cp}) = S(k, n),$$

где

$$S(k, n) = \int_{-k}^{+k} s(u; n) du.$$

Как видно, при малых выборках для оценки достоверности вместо интеграла вероятности $\psi(k)$ используется функция $S(k, n)$, которая зависит не только от k , но и от объема выборки n . Значения $S(k, n)$ задаются соответствующими таблицами. Ниже для сравнения приводятся некоторые значения $\psi(k)$ и $S(k, n)$:

k	$S(k, n)$ при значениях n						$\psi(k)$
	2	3	4	5	8	12	
0,1	0,063	0,071	0,073	0,075	0,077	0,078	0,07966
0,2	0,126	0,140	0,146	0,149	0,153	0,155	0,15852
0,5	0,295	0,333	0,349	0,356	0,368	0,373	0,38292
1,0	0,500	0,577	0,609	0,626	0,649	0,661	0,68269
2,0	0,705	0,817	0,861	0,884	0,914	0,926	0,95450
3,0	0,795	0,905	0,942	0,960	0,980	0,988	0,99730
5,0	0,874	0,962	0,985	0,992	0,998	0,999	0,99999

Для определения доверительного интервала более удобны таблицы, в которых приводятся значения k в зависимости от n и доверительной вероятности. Например, для

$$P(x_{cp} - ks_{cp} < x_0 < x_{cp} + ks_{cp}) = 0,95 \text{ получаем:}$$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	12,7	4,3	3,2	2,8	2,6	2,4	2,4	2,3	2,3	2,2	2,2	2,2	2,2	2,1

Для приведенного в (5) примера при $n = 12$ и $s_{cp} = 2,9$ имеем $P(18321,2 < x_0 < 18327,0) = 0,661$ и $P(18318,3 < x_0 < 18329,9) \approx 0,929$. Как видно, вероятность выйти за интервал $2s_{cp}$ при 12 выборках равна 0,071, в то время как в соответствии с классической теорией эта вероятность была занижена и составляла только 0,045. Для достоверности 0,95 при $n = 12$ находим $k = 2,2$, что соответствует

доверительному интервалу ошибки $ks_{cp} = 2,2 \cdot 2,9 = 6,4$ вместо $2s_{cp} = 2 \cdot 2,9 = 5,8$, даваемого классической теорией.

7. Неравноточные наблюдения. Если наблюдения одной и той же величины (или однородных величин) выполняются в неодинаковых условиях или с помощью различных средств и методов, то они характеризуются различными средними ошибками и называются *неравноточными*. Естественно, что при обработке неравноточных наблюдений необходимо хотя бы приблизительно оценить степень их надежности.

Эта задача решается достаточно просто. Каждому наблюдению приписывается свой вес m_i , который обычно выражается целым числом. Наименее достоверные наблюдения получают и наименьший вес (например, $m = 1$), а остальным приписывается тем больший вес, чем выше их достоверность (или меньше средняя ошибка). Конечно, до обработки наблюдений численные значения средних ошибок неизвестны, поэтому приписывание весов основывается на степени доверия к аппаратуре и наблюдателям, на учете условий наблюдения, на опыте и интуиции исследователя.

Удобнее всего рассматривать вес m_i как «размножение» наблюдения, т. е. считать, что наблюдение с весом m_i равноценно m_i наблюдениям с единичным весом, что соответствует снижению средней ошибки в $\sqrt{m_i}$ раз (4). Этот подход и является основным критерием при «взвешивании» наблюдений. Обработка неравноточных наблюдений осуществляется аналогично равноточным с тем лишь различием, что формулы для x_{cp} и s имеют вид:

$$x_{cp} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i (x_i - a) + a;$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n m_i (x_i - a)^2 - \frac{1}{m} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - a) \right]^2 \right\}},$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$; a — произвольное число, близкое к x_{cp} , а средняя

ошибка результата наблюдения определяется как $s_{cp} = \frac{s}{\sqrt{m}}$. Величина

$\frac{1}{n-1}$ в формуле для s соответствует тому обстоятельству, что только n наблюдений являются независимыми. Изложенное иллюстрируется нижеследующим примером ($a = 240$):

i	x_i	m_i	$x_i - a$	$m_i (x_i - a)$	$m_i (x_i - a)^2$
1	236,4	1	-3,6	-3,6	12,96
2	241,6	3	1,6	4,8	7,68
3	242,0	1	2,0	2,0	4,00
4	240,7	5	0,7	3,5	2,45
5	237,4	3	-2,6	-7,8	20,28
6	239,5	5	-0,5	-2,5	1,25
7	243,8	3	3,8	11,4	43,32
8	242,5	5	2,5	12,5	31,25
	Σ	26		20,3	123,19

$$x_{\text{ср}} = \frac{20,3}{26} + 240 = 240,78; \quad s = \sqrt{\frac{1}{7} \left(123,19 - \frac{20,3^2}{26} \right)} = 3,92;$$

$$s_{\text{ср}} = \frac{3,92}{\sqrt{26}} = 0,77.$$

Согласно классической теории результат записывается в виде: $x_0 = 240,78 \pm 0,77$. Пользуясь методом малых выборок для $k = 1$ и $n = 8$ по таблице из (6) находим $5(1,8) = 0,649$, что соответствует $P(240,01 < x_0 < 241,55) = 0,649$. Для достоверности 0,955 при $n = 8$ по приведенной в (6) таблице имеем $k=2,4$, следовательно, $ks_{\text{ср}} = 2,4 \cdot 0,77 = 1,85$, что соответствует доверительному интервалу от 238,93 до 242,63.

8. Косвенные наблюдения. Часто интерес представляет величина, которая является функцией $w = f(x, y, \dots, v)$ и определяется по результатам измерений ее аргументов $x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, \dots, v_{\text{ср}}$, т.е.

$w_{\text{ср}} = f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}}, \dots, v_{\text{ср}})$. Если величины x, y, \dots, v независимы, то средняя квадратическая ошибка выражается формулой

$$\sigma_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 \sigma_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0^2 \sigma_v^2}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_v$ — средние ошибки измеряемых величин, а частные производные определяются в области средних или номинальных значений аргументов. Эта формула получается разложением в ряд Тейлора функции $w = f(x, y, \dots, v)$ с использованием свойства дисперсии суммы независимых случайных величин, которая равна сумме их дисперсий.

Известны более точные формулы, учитывающие объемы выборок, зависимость аргументов и ряд других факторов, но в силу своей сложности они применяются лишь в случаях повышенной ответственности.

Приведенная формула, хотя и является приближенной, позволяет получить вполне удовлетворительные оценки.

Пусть, например, сопротивление R проводника определяется по данным измерения его длины l и диаметра d и вычисляется по формуле $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2} = r \frac{l}{d^2}$, где $r = \rho \frac{4}{\pi}$. Тогда

$$\sigma_R = \sqrt{\left(\frac{r}{d^2}\right)^2 \sigma_l^2 + \left(-\frac{2rl}{d^3}\right)^2 \sigma_d^2}; \quad \frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{2\sigma_d}{d}\right)^2},$$

где σ_l и σ_d — средние ошибки измерения величин l и d . Если диаметр измерен с относительной ошибкой 0,5% и требуется получить результат для R , относительная ошибка которого не превышает 1,5%, то при измерении длины достаточно не превысить ошибку $\frac{\sigma_l}{l} = \sqrt{1,5^2 - (2 \cdot 0,5)^2} = 1,1\%$.

9. Метод наименьших квадратов. Этот метод решает задачу определения величин x_1, x_2, \dots, x_m , не поддающихся непосредственному наблюдению, по результатам измерения других величин y_1, y_2, \dots, y_n , которые являются их функциями

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим случай, когда функции линейны (к нему сводится задача и для функций общего вида), т. е. когда исходной является система так называемых *условных уравнений*:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эту систему непосредственно решить нельзя, так как правые части уравнений вместо точных значений y_{i0} содержат результаты их измерений $y_i = y_{i0} + \delta_i$ со случайными ошибками δ_i . Однако если $n > m$, то на основании принципа максимального правдоподобия (3) можно найти такую совокупность значений (x_1, x_2, \dots, x_m) , которая с наибольшей вероятностью удовлетворяла бы исходным зависимостям. В предположении о нормальном распределении случайных величин y_i

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_i - y_{i0})^2}{2\sigma^2}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

для плотности вероятности случайной выборки (y_1, y_2, \dots, y_n) имеем

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j\right)^2\right].$$

Эта вероятность достигает максимума при минимуме функции, стоящей в показателе экспоненты, т. е. при таких значениях x_1, x_2, \dots, x_m , которые обращают в нуль все частные производные.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)^2 \right] = -2 \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right) a_{ik} = 0$$

($k = 1, 2, \dots, m$).

Отсюда для определения значений x_1, x_2, \dots, x_m получаем нормальную систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^m c_{kj} x_j = \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i,$$

где $c_{kj} = c_{jk} = \sum_{i=1}^n a_{ik} a_{ij}$ ($k = 1, 2, \dots, m$).

Условие максимального правдоподобия совпадает с требованием минимума суммы квадратов ошибок

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_{i0})^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \sum_{j=1}^m x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i.$$

Отсюда и название *метод наименьших квадратов (принцип Лежандра)*. Хотя при его обосновании вводилось предположение о нормальном распределении, однако, строго доказано, что оценки, основанные на методе наименьших квадратов, обладают минимальными погрешностями, независимо от типа распределения (*теорема Гаусса—Маркова*).

Проиллюстрируем изложенное на примере системы условных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 4,91x_1 - 59,0x_2 &= -339,8 \\ 2,72x_1 - 2,7x_2 &= -47,5 \\ 0,05x_1 + 32,4x_2 &= 262,5 \\ -2,91x_1 + 27,7x_2 &= 152,9 \\ -4,77x_1 + 1,4x_3 &= -27,9 \end{aligned} \right\}.$$

Чтобы перейти к нормальной системе уравнений, необходимо определить четыре коэффициента

$$c_{11}, c_{12}, c_{21} \text{ и } c_{22},$$

два из которых равны между собой ($c_{12} = c_{21}$):

$$c_{11} = \sum_{i=1}^5 a_{i1}^2 = 4,91^2 + 2,72^2 + 0,05^2 + 2,91^2 + 4,77^2 = 62,73;$$

$$c_{12} = c_{21} = \sum_{i=1}^5 a_{i1}a_{i2} = 4,91(-59,0) + 2,72(-2,7) + 0,05 \cdot 32,4 + \\ + (-2,91)27,7 + (-4,77)1,4 = -382,7;$$

$$c_{22} = \sum_{i=1}^5 a_{i2}^2 = 59,0^2 + 2,7^2 + 32,4^2 + 27,7^2 + 1,4^2 = 5307,3.$$

Правые части уравнений определяются следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n a_{i2}y_i = (-59,0)(-339,8) + (-2,7)(-47,5) + 32,4 \cdot 262,5 + \\ + 27,7 \cdot 152,9 + 1,4(-27,9) = -32877,7.$$

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}y_i = 4,91(-339,8) + 2,72(-47,5) + 0,05 \cdot 262,5 + \\ + (-2,91)152,9 + (-4,77)(-27,9) = 2096,3;$$

Таким образом, получаем нормальную систему уравнений

$$62,73x_1 - 382,7x_2 = 2096,3; \\ -382,7x_1 + 5307,3x_2 = -32877,7.$$

решение которой дает значения искоемых величин $x_1 = 7,81$ $x_2 = 6,76$.

9. Нечеткие величины и операции над ними

9.1. Нечеткие величины

Прежде чем приступить к рассмотрению основных понятий нечетких величин, напомним основные понятия теории нечетких множеств, которые будут тесно связаны с понятиями нечетких величин.

Математически нечеткие множества могут быть представлены двумя разными способами в зависимости от класса рассматриваемых объектов. Пусть X — совокупность дискретных объектов, члены которой обозначаются x . Нечеткое множество A в X представляется в виде набора упорядоченных соответствий:

$$\tilde{A} = ((x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X),$$

где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ — степень принадлежности или значение функции принадлежности (ФП) x в \tilde{A} . При представлении нечеткого множества в такой форме, у него есть конечный опорный набор.

Например, для случая «нахождения в салоне автобуса двенадцати человек», нечеткое множество \tilde{A} «много мужчин» можно представить так:

$\tilde{A} = \{(4, 0.1), (5, 0.15), (6, 0.2), (7, 0.4), (8, 1.0), (9, 0.5), (10, 0.05)\}$.
Иллюстрация этого нечеткого множества представлена на рис. 1.

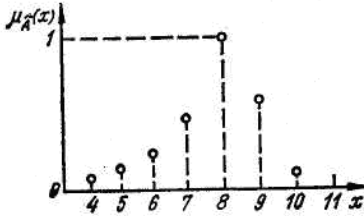


Рис. 1.

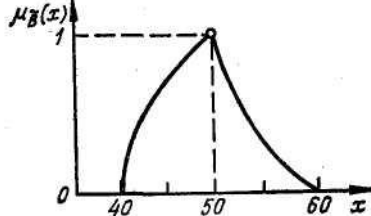


Рис. 2.

Нечеткое множество \tilde{B} в X представляется в виде функции на полуоси Ox :

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} f_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2; \\ f_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В качестве примера рассмотрим нечеткое множество \tilde{B} «возраст пассажиров средних лет», которое можно представить так:

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} -(x-50)^2 + 1, & 40 \leq x \leq 50; \\ x-60, & 50 < x \leq 60; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (*)$$

где x измеряется в годах (рис. 2).

Рассмотрим теперь некоторые дополнительные понятия теории нечетких множеств.

Выпуклость. Нечеткое множество \tilde{A} является выпуклым, если

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min[\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)] \quad (**)$$

для всех $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Графическая интерпретация понятия «выпуклость» представлена на рис. 3, а, б.

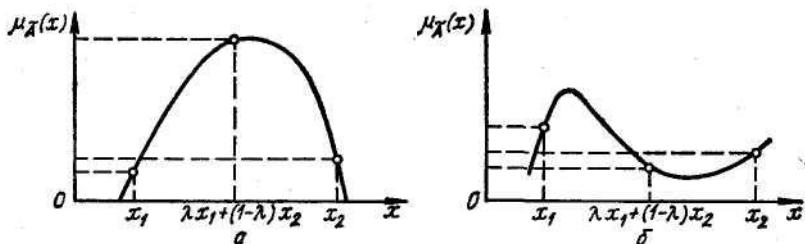


Рис. 3, а, б.

В то же время нечеткое множество, которое описывается соотношениями

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} -(x-3)^2 + 5, & 0 \leq x \leq 4; \\ x-5^2 + 3, & 4 \leq x \leq 6; \\ -((x-9)^2)/3 + 7, & 6 < x \leq 13.58; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (***)$$

не является выпуклым, поскольку для него не удовлетворяется условие (*) (рис. 4). Следует заметить, что при $\lambda=0,5$, $x_1=4$ и $x_2=7$ имеем

$$\mu_{\tilde{A}}((0,5 \cdot 4) + (0,5 \cdot 7)) < \min(\mu_{\tilde{A}}(4), \mu_{\tilde{A}}(7)),$$

или

$$\mu_{\tilde{A}}(5,5) < \min(4,5 \cdot 5),$$

или

$$3,25 < 4.$$

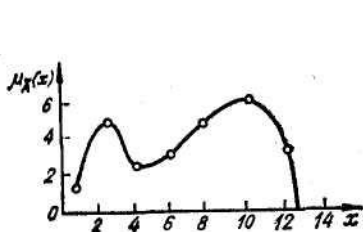


Рис. 4.

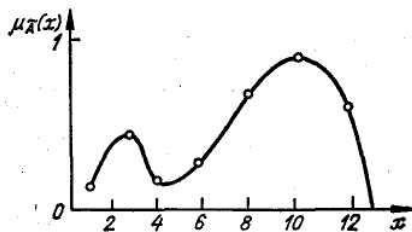


Рис. 5.

Нормализованность. Как уже говорилось, функция принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ может принимать любые значения. Однако, если максимальное значение $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на X $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$ равно 1, то нечеткое множество считается нормализованным. Ненормализованные случайные

множества могут быть легко нормализованы делением всех значений $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$. Например, для того, чтобы нормализовать нечеткое множество, определенное уравнением (***) , необходимо разделить все значения ФП на 7, поскольку 7 есть $\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$ (рис. 5).

Нечеткие величины. Существуют два определения нечетких величин (переменных). Оба утверждают, что выпуклое и нормальное нечеткое подмножество \tilde{N} вещественной оси является также нечеткой величиной \tilde{N} . Больше того, ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ должна быть кусочно-непрерывной и существует по крайней мере один элемент $x \in R$ ФП, для которого $\mu_{\tilde{N}}(x) = 1$.

Проиллюстрируем сказанное на примере нечеткого множества, которое также является и нечеткой величиной.

Пусть $\tilde{A} = (\text{числа, близкие к пяти})$. При этом ФП имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} -(x-5)^2/4 + 1, & 3 \leq x \leq 5; \\ x/3 - x/8, & 5 < x \leq 8; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 6 представлена иллюстрация этой величины.

Нечеткие величины «треугольного типа». При решении ряда исследовательских задач или задач, которые требуют выполнения больших объемов арифметических операций с нечеткими величинами (сложение, вычитание, умножение, деление) возникают определенные сложности в случае представления нечетких величин в общем виде, задаваемой уравнением (*).

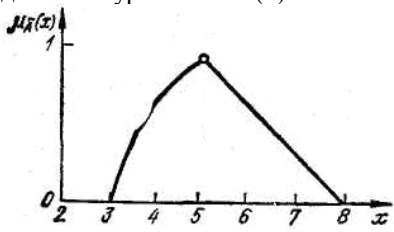


Рис. 6.

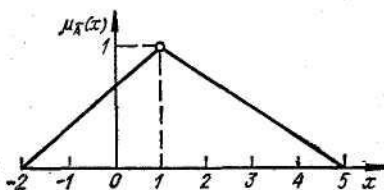


Рис. 7.

Для упрощения указанных манипуляций целесообразно использовать специальный способ представления нечетких величин в форме

треугольных функций. Соответствующие нечеткие величины будем называть «треугольными».

Это название возникло благодаря треугольной форме графического представления нечетких величин. Такое представление основывается на использовании двух линейных функций, соединенных в средней точке X_m . В общем виде ФП треугольной нечеткой величины имеет вид:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (x - a_1) / (a_2 - a_1), & a_1 \leq x \leq a_2; \\ (a_3 - x) / (a_3 - a_2), & a_2 < x \leq a_3; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Например, пусть \tilde{A} является нечетким множеством величин, близких к 1:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \leq x \leq 1; \\ -x/4 + 5/4, & 1 < x \leq 5; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функция принадлежности на отрезке $-2 \leq x \leq 1$ называется *левосторонней* (ЛСТ), а на отрезке $1 < x \leq 5$ — *правосторонней* (ПСТ). На рис. 7 показана треугольная форма такой нечеткой величины.

В данном случае манипуляции с нечеткими величинами упрощаются в связи с тем, что используются лишь верхнее и нижнее значения ЛСТ и ПСТ, а не сами функции принадлежности этих величин.

9.2. Операции с нечеткими величинами

Прежде чем приступить к более подробному рассмотрению основных операций с нечеткими величинами, таких как операции сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения квадратного корня и др., напомним определение множества α -уровня или α -сечения. Заметим, что рассмотрение всех операций (за исключением операции свертки) проводится для треугольных нечетких величин.

Набор элементов, которые принадлежат нечеткому множеству, по крайней мере со степенью α , обозначим так:

$$A_{\alpha} = \{x \in X / \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

где A_α называется α -сечением нечеткого множества \tilde{A} . Заметим, что над A в A_α отсутствует волнистая линия, поскольку A_α является четким множеством (с четко определенными границами).

Для иллюстрации этого понятия рассмотрим треугольное нечеткое множество \tilde{A} «чисел, близких к 1», или треугольную нечеткую величину «единица», которая описывается следующей ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \leq x \leq 1; \\ x/4 + 5/4, & 1 < x \leq 5; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для определения верхней и нижней границ α -сечения при $\alpha=0,6$, a_1^α и a_2^α соответственно, необходимо приравнять функции ЛСТ и ПСТ к значению 0,6 и найти x . В результате имеем:

$$x/3 + 2/3 = 0,6, \quad x = -0,2.$$

Тогда

$$a_1^{0,6} = -0,2.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} -x/4 + 5/4 &= 0,6; \quad x = 2,6; \\ a_2^{0,6} &= 2,6. \end{aligned}$$

Таким образом, α -сечение при $\alpha=0,6$ или четкое множество элементов, принадлежащих \tilde{A} , по крайней мере со степенью 0,6, выглядит так (рис. 8):

$$A_\alpha = \{x \in X \mid -0,2 \leq x \leq 2,6\}.$$

Сложение нечетких величин. Сложение двух нечетких величин \tilde{A} и \tilde{B} на определенном α -уровне осуществляется сложением нижней (a_1^α и b_1^α) и верхней (a_2^α и b_2^α) границ соответствующего им α -сечения:

$$A_\alpha (+) B_\alpha = (a_1^\alpha, a_2^\alpha) + (b_1^\alpha, b_2^\alpha) = (a_1^\alpha + b_1^\alpha, a_2^\alpha + b_2^\alpha).$$

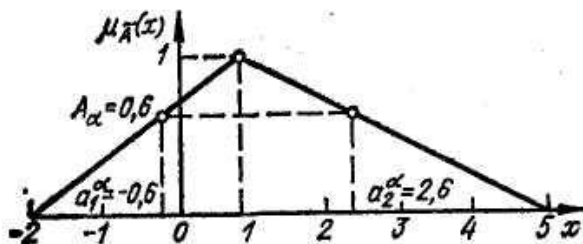


Рис. 8.

Полное сложение двух нечетких величин \tilde{A} и \tilde{B} производится повторением описанной выше процедуры для всех α -уровней на

интервале $[0, 1]$. На рис. 9 приведена иллюстрация операции сложения нечетких величин.

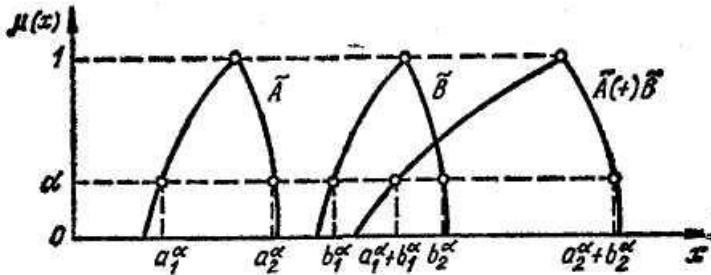


Рис. 9.

В качестве примера выполним операцию сложения двух треугольных нечетких величин, описываемых следующими ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \leq x \leq 1; \\ -x/5 + 6/4, & 1 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \leq x \leq 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \leq 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В первую очередь определим α -сечения в терминах ЛСТ и ПСТ функций:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1^\alpha/3 + 2/3; \\ \alpha &= -a_2^\alpha/5 + 6/5; \\ \alpha &= b_1^\alpha/2 - 1/2; \\ \alpha &= -b_2^\alpha + 4. \end{aligned}$$

Теперь, решая эту систему уравнений для верхней и нижней границы обеих нечетких величин, получаем:

$$\begin{aligned} a_1^\alpha &= 3\alpha - 2; \\ a_2^\alpha &= -5\alpha + 6; \\ b_1^\alpha &= 2\alpha + 1; \\ b_2^\alpha &= -\alpha + 4. \end{aligned}$$

Следовательно, α -сечение для нечетких величин \tilde{A} и \tilde{B} может быть представлено как:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= (3\alpha - 2, -5\alpha + 6); \\ B_\alpha &= (2\alpha + 1, -\alpha + 4). \end{aligned}$$

Тогда сумма \tilde{A}_α и \tilde{B}_α имеет вид:

$$A_{\alpha}(+)B_{\alpha}=[(3\alpha-2)+(2\alpha+1), (-5\alpha+6)+(-\alpha+4)]=(5\alpha-1, 6\alpha+10).$$

Для того, чтобы найти x , необходимо использовать определения верхней и нижней границ α -сечения:

$$\begin{aligned}x &= a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha} = 5\alpha - 1; \\x &= a_2^{\alpha} + b_2^{\alpha} = -6\alpha + 10.\end{aligned}$$

Определяя α , соответственно получаем ЛСТ и ПСТ функции для суммы нечетких величин:

$$\begin{aligned}\alpha &= x/5 + 1/5; \\ \alpha &= -x/6 + 10/6.\end{aligned}$$

В данном случае формирование ФП суммы двух нечетких величины почти завершено. Осталось лишь найти области изменения значений ЛСТ и ПСТ. Для определения нижнего значения области для ЛСТ необходимо приравнять ЛСТ функцию к нулю и найти x . Аналогично, для определения верхнего значения необходимо приравнять эту функцию к единице и найти x :

$$\begin{aligned}0 &= x/5 + 1/5, & x &= -1; \\ 1 &= -x/6 + 10/6, & x &= 4.\end{aligned}$$

Таким образом, полученные границы ЛСТ следующие:

$$-1 \leq x \leq 4.$$

Для нахождения нижнего значения области для ПСТ функции необходимо приравнять ее к единице и найти x . Нахождение верхнего значения для этой функции сводится к приравниванию ее к нулю и нахождению x :

$$\begin{aligned}1 &= -x/6 + 10/6, & x &= 4. \\ 0 &= -x/6 + 10/6, & x &= 10.\end{aligned}$$

Таким образом, области изменения значений ЛСТ и ПСТ функций определены, что является завершением формирования ФП суммы двух нечетких величин.

Заметим, что рассмотренная операция сложения обладает свойствами коммутативности и ассоциативности при сложении нечетких величин, нечеткой и скалярной, скалярной и нечеткой величин.

Вычитание нечетких величин. В отличие от операции сложения, вычитание нечетких величин не имеет свойства коммутативности и ассоциативности. Прежде чем рассмотреть операцию вычитания, введем определение очень важного свойства нечетких величин, которую называют свойством *изображения*.

Если α -сечение A_{α} нечеткой величины \tilde{A} определено как $[a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$, тогда α -сечение изображения $A_{\bar{\alpha}}$ определяется как $[-a_2^{\alpha}, -a_1^{\alpha}]$.

Следовательно, изображение величины A или \tilde{A} представляет собой сумму всех α -сечений на интервале $0 \leq x \leq 1$ (рис. 10).

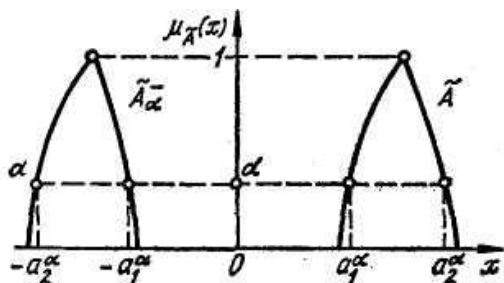


Рис. 10.

Сумма α -сечения и соответствующего изображения в общем случае тождественно не равна нулю:

$$A_{\alpha}(+)A_{\bar{\alpha}} = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}](+)[-a_2^{\alpha}, -a_1^{\alpha}] = [a_1^{\alpha} - a_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} - a_1^{\alpha}] \neq [0, 0].$$

Теперь рассмотрим операцию вычитания одной нечеткой величины из другой.

Вычитание нечеткой величины \tilde{B} из нечеткой величины \tilde{A} производится прибавлением изображения вычитаемого \tilde{B} к уменьшаемому \tilde{A} . Если оба нечетких подмножества принадлежат R , то разность также принадлежит R .

Рассмотрим пример вычитания нечетких величин, которые описываются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/5 - 5/5, & 5 \leq x \leq 10; \\ -x/2 + 12/2, & 10 < x \leq 12; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/3 - 2/3, & 2 \leq x \leq 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем

$$a_1^{\alpha} = 5\alpha + 5; \quad a_2^{\alpha} = -2\alpha + 2; \quad b_1^{\alpha} = 3\alpha + 2; \quad b_2^{\alpha} = -5\alpha + 10.$$

Для того, чтобы вычесть \tilde{B} из \tilde{A} сначала находим изображение для α -сечения:

$$\widetilde{B}_{\alpha} = [-b_2^{\alpha}, -b_1^{\alpha}] = [5\alpha - 10, -3\alpha - 2].$$

Затем прибавляем \widetilde{B} к \widetilde{A} для α -сечения:

$$[a_1^{\alpha} - b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} - b_1^{\alpha}] = [5\alpha + 5 + 5\alpha - 10, -2\alpha + 12 - 3\alpha - 2] = [10\alpha - 5, -5\alpha + 10].$$

Теперь находим ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = 10\alpha - 5, \text{ откуда } \alpha = x/10 + 5/10;$$

$$x = -5\alpha + 10, \text{ откуда } \alpha = -x/5 + 10/5.$$

Приравнивание ЛСТ и ПСТ функций соответственно к нулю и к единице дает значения (-5,0) и (1,5) для ЛСТ и (5,1) и (10,0) для ПСТ функций.

Полная ФП разности тогда имеет вид:

$$\mu_{\widetilde{A}(-)\widetilde{B}}(x) = \begin{cases} x/10 + 5/10, & -5 \leq x \leq 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

На рис. 11 представлена иллюстрация операции вычитания нечетких величин.

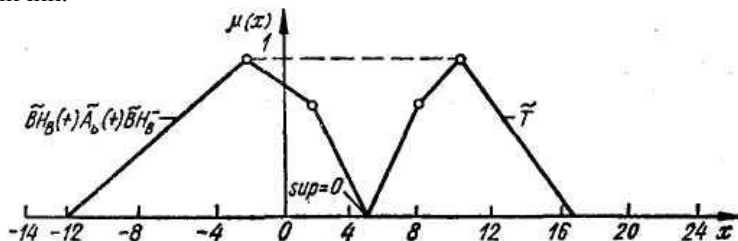


Рис. 11.

Умножение нечетких величин. Если две нечеткие величины \widetilde{A} и \widetilde{B} находятся в пространстве R^+ , то для любого α -сечения справедливо соотношение

$$A_{\alpha}(\bullet)B_{\alpha} = [a_1^{\alpha}a_2^{\alpha}] [b_1^{\alpha}b_2^{\alpha}] = [a_1^{\alpha}b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}b_2^{\alpha}].$$

Произведение $\widetilde{A} (*) \widetilde{B}$ также находится в пространстве R^+ и является выпуклым и нормализованным. Операция умножения нечетких величин обладает свойством коммутативности и ассоциативности, т.е.

$$\begin{aligned} \widetilde{A} (*) \widetilde{B} &= \widetilde{B} (*) \widetilde{A} \\ [\widetilde{A} (*) \widetilde{B}] (*) \widetilde{C} &= \widetilde{A} (*) [\widetilde{B} (*) \widetilde{C}]. \end{aligned}$$

Умножение также дистрибутивно в R^+ относительно операции сложения:

$$\tilde{A} (*) [\tilde{B} (+)] = [\tilde{A} (*) \tilde{B}] (+) [\tilde{A} (*) \tilde{C}] .$$

Рассмотрим пример умножения нечетких величин. Пусть \tilde{A} и \tilde{B} — две положительные нечеткие величины с ФП

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 \leq x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x - 2, & 2 \leq x \leq 3; \\ -x/3 + 6/3, & 3 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^\alpha = 3\alpha + 1; \quad a_2^\alpha = -2\alpha + 6; \quad b_1^\alpha = \alpha + 2; \quad b_2^\alpha = -3\alpha + 6.$$

Используя определение операции умножения нечетких величин

$$A_\alpha(\bullet) B_\alpha = [a_1^\alpha a_2^\alpha] [b_1^\alpha b_2^\alpha] = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha].$$

запишем:

$$A_\alpha(\bullet) B_\alpha = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha] = [(3\alpha + 1)(\alpha + 2), (-2\alpha + 6)(-3\alpha + 6)] = [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 6\alpha^{2-30} + 36].$$

В отличие от операций сложения и вычитания определение ЛСТ и ПСТ функций требует решения квадратных уравнений:

$$x = 3\alpha^2 + 7\alpha + 2; \quad x = 6\alpha^{2-30} + 36. \quad (*)$$

Для нахождения α преобразуем уравнение (*) так:

$$3\alpha^2 + 7\alpha + (2 - x) = 0, \quad 6\alpha^{2-30} + (36 - x) = 0. \quad (**)$$

Оставляя лишь корни, которые находятся в интервале $[0, 1]$, из уравнения (**) можно получить:

$$\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6, \quad \alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12.$$

Границы области ЛСТ и ПСТ функций также определяются приравнением этих функций к нулю и к единице и определением x . Для ЛСТ функции имеем:

а) $\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6 = 0$, откуда $x = 2$;

б) $\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6 = 1$, откуда $x = 12$.

Аналогично для ПСТ функции:

а) $\alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12 = 1$, откуда $x = 12$

б) $\alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12 = 0$, откуда $x = 36$.

Нечеткая величина, являющаяся произведением \tilde{A} и \tilde{B} в пространстве R^+ , имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}}(x) = \begin{cases} (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6, & 2 \leq x \leq 12; \\ (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12, & 12 < x \leq 36; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что как и при сложении треугольных нечетких величин, для решения рассмотренной задачи было необходимо перемножить соответствующие верхние и нижние границы ЛСТ и ПСТ функций и затем найти эти функции.

Этот пример проиллюстрирован на рис. 12. Следует заметить, что произведение двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной.

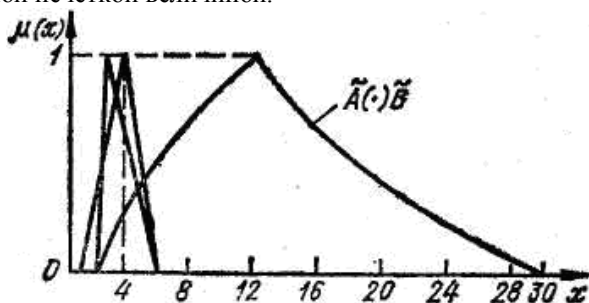


Рис. 12.

Умножение нечеткой величины на скаляр. Умножение нечеткой величины на скаляр производится с использованием так называемого метода «двух нечетких величин», в соответствии с которым скалярная величина представляется в виде условной нечеткой величины, α -сечение которой определяется как $[k, k]$.

Таким образом, используя уравнение

$$A_{\alpha}(\cdot)B_{\alpha} = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}] [b_1^{\alpha}, b_2^{\alpha}] = [a_1^{\alpha} b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} b_2^{\alpha}],$$

запишем

$$kA_{\alpha} = [k, k](\cdot) [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}] = [ka_1^{\alpha}, ka_2^{\alpha}].$$

В общем случае ФП имеет вид

$$\mu_{k(\cdot)\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Рассмотрим пример. Пусть \tilde{A} — нечеткая величина, описываемая ФП в соответствии с уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 \leq x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$k = 2$. Тогда

$$kA_{\alpha} = [2, 2](\bullet)[3\alpha + 1, -2\alpha + 6] = [6\alpha + 2, -4\alpha + 12].$$

Определим ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = 6\alpha + 2, \alpha = x/6 - 2/6; \quad (*)$$

$$x = -4\alpha + 12, \alpha = -x/4 + 12/4. \quad (**)$$

Решение уравнения (*) при $\alpha = 0; 1$ дает границы области ЛСТ:

$$2 \leq x \leq 8.$$

Решение уравнения (**) при $\alpha = 1; 0$ дает границы области ПСТ:

$$8 \leq x \leq 12.$$

Тогда полная ФП имеет вид

$$\mu_{k \bullet \tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/6 - 2/6, & 2 \leq x \leq 8; \\ -x/4 + 12/4, & 8 < x \leq 12; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (***)$$

Заметим, что уравнение (***) в точности соответствует ФП $\mu_{\tilde{A}}(x/2)$.

Эффект от умножения нечеткой величины на скаляр проявляется в растяжении обеих сторон нечеткой величины в такое количество раз, которое равно этой скалярной величине.

В отличие от произведения двух треугольных нечетких величин, произведение нечеткой величины на скаляр представляет собой треугольную нечеткую величину. Приведенный пример иллюстрируется рис. 13.

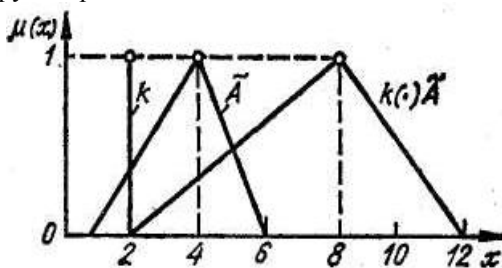


Рис. 13.

Деление нечетких величин. В отличие от «нечеткого умножения», операция деления нечетких величин не обладает свойством коммутативности и ассоциативности в пространстве R^+ .

Прежде чем перейти к рассмотрению операции деления, необходимо определить еще одно свойство нечетких величин, которую называют инверсией или свойством возвратности. А именно, если α -сечение нечеткая величина \tilde{A} определено как $A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$, тогда α -сечение обратной нечеткой величины \tilde{A}^{-1} определяется как $\tilde{A}^{-1} = [1/a_1^\alpha, 1/a_2^\alpha]$. Тогда обратная нечеткая величина \tilde{A}^{-1} является суммой всех α -сечений на интервале $0 < \alpha < 1$. Нечеткая величина \tilde{A}^{-1} и обратная ей показаны на рис. 14.

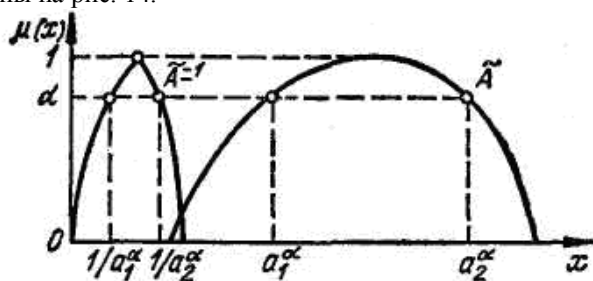


Рис. 14.

Важно заметить, что инверсия нечетких величин не обладает свойством мультипликативной тождественности:

$$\tilde{A}(\cdot) \tilde{A}^{-1} = [a_1^\alpha, a_2^\alpha](\cdot) [1/a_1^\alpha, 1/a_2^\alpha] = [a_1^\alpha/a_2^\alpha, a_2^\alpha/a_1^\alpha] \neq [1, 1].$$

Теперь рассмотрим операцию деления нечеткой величины на нечеткую величину.

Деление нечеткой величины \tilde{A} на нечеткую величину \tilde{B} производится умножением делимого \tilde{A} на инверсию делителя \tilde{B} .

Если обе нечеткие величины принадлежат пространству R^+ , то частное также является нечеткой величиной R^+ , но оно может не обладать той же формой.

Рассмотрим пример деления нечетких величин. Пусть \tilde{A} и \tilde{B} следующие:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 3/3, & 3 \leq x \leq 6; \\ -x/4 + 10/1, & 6 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 3 \leq x \leq 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \leq 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^\alpha = 3\alpha + 3; \quad a_2^\alpha = -4\alpha + 0; \quad b_1^\alpha = -2\alpha + 1; \quad b_2^\alpha = -\alpha + 4.$$

Инверсия \tilde{B} для α -сечения имеет вид

$$\tilde{B}_\alpha^{-1} = [1/b_2^\alpha, 1/b_1^\alpha] = \left[\frac{1}{-\alpha + 4}, \frac{1}{2\alpha + 1} \right].$$

Умножение \tilde{A} на \tilde{B}^{-1} на любом α -уровне дает

$$\tilde{A}(\cdot) \tilde{B}^{-1} = [a_1^\alpha, b_2^\alpha, a_2^\alpha, b_1^\alpha] = \left[\frac{3\alpha + 3}{-\alpha + 4}, \frac{-4\alpha + 10}{2\alpha + 1} \right].$$

Затем определяются ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = (3\alpha + 3)/(-\alpha + 4), \quad \text{откуда } \alpha = (4x - 3)/(x + 3);$$

$$x = (-4\alpha + 10)/(2\alpha + 1), \quad \text{откуда } \alpha = (10 - x)/(2x + 4).$$

Приравнивая ЛСТ и ПСТ функций последовательно к нулю и к единице, получаем:

а) для ЛСТ функции

$$\text{при } \alpha = 0 \quad x = 3/4, \quad \text{при } \alpha = 1 \quad x = 6/3;$$

б) для ПСТ функции

$$\text{при } \alpha = 1 \quad x = 6/3, \quad \text{при } \alpha = 0 \quad x = 10/1.$$

Тогда полная ФП для $\tilde{A}(\cdot) \tilde{B}$ следующая:

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \begin{cases} (4x - 3)/(x + 3), & 3/4 \leq x \leq 6/3; \\ (10 - x)/(2x + 4), & 6/3 < x \leq 10/1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что представленное на рис. 15 частное от деления двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной.

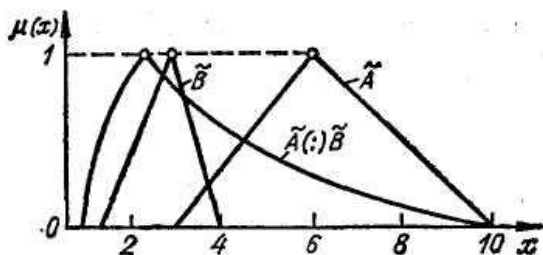


Рис. 15.

Квадратный корень из треугольной нечеткой величины.

Извлечение квадратного корня из треугольной нечеткой величины сводится к извлечению квадратного корня из верхней и нижней границ ЛСТ и ПСТ функций и преобразование этих функций для ФП результата на основе использования новых границ. Заметим, что ЛСТ и ПСТ функции для квадратного корня верхней границы не являются треугольными нечеткими величинами. Вспомним, что произведение двух треугольных нечетких величин не является треугольной нечеткой величиной. Поэтому, для того, чтобы произведение было треугольной нечеткой величиной, как это требуется по определению квадратного корня, множители, которые дают произведение, или квадратные корни не могут сами быть треугольными нечеткими величинами. Рассмотрим следующий пример. Пусть \tilde{A} — нечеткая величина в пространстве R^+ , функция принадлежности которой описывается уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^\alpha = 3\alpha + 1; \quad a_2^\alpha = -2\alpha + 6.$$

Чтобы удовлетворить условию извлечения квадратного корня запишем

$$A_\alpha^{1/2}(\cdot) A_\alpha^{1/2} = A_\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$$

Используя методику умножения двух нечетких величин, получаем

$$A_\alpha^{1/2}(\cdot) A_\alpha^{1/2} = [a_1^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha}, a_1^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha}, a_2^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha}, a_2^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha}],$$

откуда

$$a_1^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha} = a_1^\alpha, \quad a_2^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha} = a_2^\alpha.$$

Следовательно,

$$a_1^{1/2\alpha} = \pm a_2^\alpha \quad \text{или} \quad \pm [a_2^\alpha]^{1/2}, \\ a_2^{1/2\alpha} = \pm a_1^\alpha \quad \text{или} \quad \pm [a_1^\alpha]^{1/2}.$$

Продолжая аналогично, запишем

$$a^{1/2\alpha}_1 = \pm [a^{\alpha}_1]^{1/2} \pm (3\alpha+1)^{1/2},$$

$$a^{1/2\alpha}_2 = \pm [a^{\alpha}_1]^{1/2} \pm (-2\alpha+6)^{1/2}.$$

Решение четырех последующих уравнений относительно α дает ЛСТ и ПСТ функции для двух «нечетких квадратных корней»:

$$\text{а) } \begin{matrix} x = (3\alpha+1)^{1/2} & () \\ x = (-2\alpha+6)^{1/2} & () \end{matrix}$$

для положительного нечеткого квадратного корня

$$\text{б) } \begin{matrix} x = (3\alpha+1)^{1/2} & (&) \\ x = (-2\alpha+6)^{1/2} & (&&.) \end{matrix}$$

для отрицательного нечеткого квадратного корня.

Таким образом, ЛСТ и ПСТ функции для положительного и отрицательного квадратных корней имеют вид:

$$\alpha = (x^2 - 1)/3; \quad (*)$$

$$\alpha = (-x^2 + 6)/2 \quad (**)$$

Для получения ФП квадратного корня последовательно приравняем уравнения (*) и (**) к нулю и к единице и найдем верхнюю и нижнюю границы областей для ЛСТ и ПСТ функций:

$$0 = (x^2 - 1)/3, \text{ откуда } x = \pm 1;$$

$$1 = (x^2 - 1)/3, \text{ откуда } x = \pm 2;$$

$$1 = (-x^2 + 6)/2, \text{ откуда } x = \pm 2;$$

$$0 = (-x^2 + 6)/2, \text{ откуда } x = \pm \sqrt{6}.$$

Следовательно, ФП положительных и отрицательных квадратных корней на \tilde{A} соответственно равны:

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/3, & 1 \leq x \leq 2; \\ (-x^2 + 6)/2, & 2 < x \leq \sqrt{6}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (+)$$

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (-x^2 + 6)/2, & -\sqrt{6} \leq x \leq -2; \\ (x^2 - 1)/3, & -2 < x \leq -1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (++)$$

Для подтверждения того, что функции принадлежности (+), (++) действительно соответствуют квадратному корню из \tilde{A} , вычислим квадраты этих величин для α -сечения.

Для положительного квадратного корня

$$\tilde{A}^{\alpha 1/2}(\bullet) \tilde{A}^{\alpha 1/2} = [a_{11/2}^{\alpha} a_{11/2}^{\alpha}, a_{21/2}^{\alpha} a_{21/2}^{\alpha}]. \quad (***)$$

Подставляя (*) и (**) в (***), получаем

$$[(3\alpha+1)^{1/2}(3\alpha+1)^{1/2}, (-2\alpha+6)^{1/2}(-2\alpha+6)^{1/2}] = [(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = A_\alpha.$$

Для отрицательного квадратного корня

$$-\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet) - \tilde{A}_\alpha^{1/2} = [-a_{11/2}^\alpha - a_{11/2}^\alpha, -a_{21/2}^\alpha - a_{21/2}^\alpha]. \quad (****)$$

Подставляя () и () в (****), имеем

$$\begin{aligned} [(-3\alpha+1)^{1/2}(-3\alpha+1)^{1/2}, (-2\alpha+6)^{1/2}(-2\alpha+6)^{1/2}] = \\ = [(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = A_\alpha. \end{aligned}$$

Изображение нечеткой величины \tilde{A} и ее положительного и отрицательного квадратного корней представлено на рис. 16.

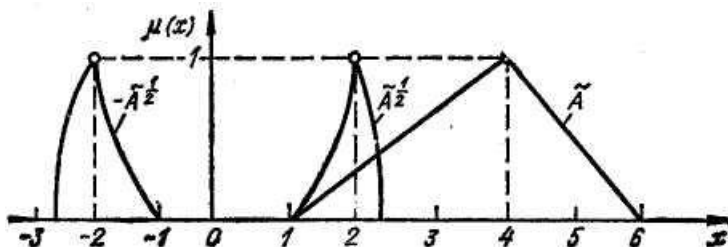


Рис. 16.

Заметим, что отрицательный квадратный корень является зеркальным отображением положительного относительно оси симметрии $x=0$.

9.3. Понятия нечеткого максимума и нечеткого минимума

При решении задач моделирования с использованием аппарата нечетких множеств широко используются операции сравнения нечетких множеств и величин. В свою очередь, эти операции основываются на таких важнейших понятиях, как нечеткий максимум ($\tilde{\max}$) и нечеткий минимум ($\tilde{\min}$).

Определим нечеткий максимум двух нечетких величин как

$$\mu_{\tilde{\max}(\tilde{A}, \tilde{B})}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } x^\alpha_A \geq x^\alpha_B; \\ \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } x^\alpha_B \geq x^\alpha_A; \\ \text{для всех } \alpha \in [0, 1]. \end{cases}$$

Иллюстрация понятия нечеткого максимума представлена на рис. 17.

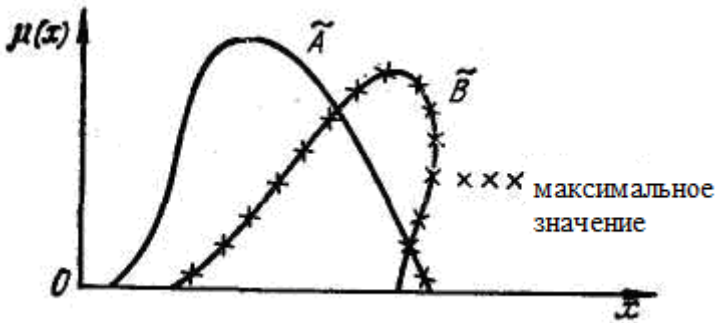


Рис. 17.

Аналогично определим нечеткий минимум двух нечетких множеств как

$$\mu_{\tilde{\min}(\tilde{A}, \tilde{B})}(x) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{если } x^{\alpha}_A \geq x^{\alpha}_B; \\ \mu_{\tilde{B}}(x), & \text{если } x^{\alpha}_B \geq x^{\alpha}_A; \\ \text{для всех } \alpha \in [0, 1] \end{cases} .$$

Иллюстрация понятий нечеткого максимума и нечеткого минимума представлена соответственно на рис. 17, 18. Следует заметить, что

$$[\tilde{\max}(\tilde{A}, \tilde{B})] \cap [\tilde{\min}(\tilde{A}, \tilde{B})] = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) .$$

В соответствии с рисунками 17 и 18 $\tilde{\max}$ представляет собой набор величин x_i , которые для заданного α -сечения имеют более высокие значения. Точно так же, $\tilde{\min}$ — это такой набор x_i , которые для данного α -сечения имеют наименьшие значения.



Рис. 18.

Концептуально предполагается, что традиционные процедуры определения $\tilde{m}\tilde{a}x$ и $\tilde{m}\tilde{i}n$ представляют собой нечеткую версию $\tilde{m}\tilde{a}x$ и $\tilde{m}\tilde{i}n$ соответственно. К сожалению, при объединении обеих частей нечетких величин и осуществлении процедуры $\tilde{m}\tilde{a}x$ или $\tilde{m}\tilde{i}n$, эти операции не приводят к успеху в выборе явной максимальной или минимальной нечеткой величины из этой пары. Поэтому необходима разработка других методов сравнения.

Операции $\tilde{m}\tilde{a}x$ и $\tilde{m}\tilde{i}n$ можно при необходимости выполнять для двух и более нечетких величин. Для этого необходимо найти самое правое (левое) или наибольшее (наименьшее) значение x для каждого α - сечение.

Метод пропорции оптимума. Согласно этому методу выполняется сравнение нечетких величин на основе использования фиктивной максимальной или минимальной нечеткой величины. Нормализованные нечеткие величины сравниваются на основе их пропорционального вклада как в нечеткий максимум, так и в нечеткий минимум. Затем производится ранжирование пропорционально площади, которую нечеткая величина вносит в $\tilde{m}\tilde{a}x$ и $\tilde{m}\tilde{i}n$. Чем выше вклад в $\tilde{m}\tilde{a}x$, тем выше стоит данная нечеткая величина при ранжировке, а чем выше вклад в $\tilde{m}\tilde{i}n$, тем ниже она стоит при ранжировке.

Определим пропорцию $\tilde{m}\tilde{a}x$ для каждой нечеткой величины:

$$MP(\tilde{A}_i) = \frac{\int [\mu_{\tilde{m}\tilde{a}x}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)(x) \wedge \mu_{\tilde{A}_i}(x)] dx}{\int_{S(\tilde{A}_i)} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}.$$

Аналогично, пропорция $\tilde{m}\tilde{i}n$ для каждой нечеткой величины определяется:

$$mp(\tilde{A}_i) = \frac{\int [\mu_{\tilde{m}\tilde{i}n}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)(x) \wedge \mu_{\tilde{A}_i}(x)] dx}{\int_{S(\tilde{A}_i)} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}.$$

После вычисления $MP(\tilde{A}_i)$ и $mp(\tilde{A}_i)$ для каждого альтернативного \tilde{A}_i , они ранжируются согласно алгоритму (табл. 1).

Таблица 1

Логический алгоритм ранжирования для метода пропорции оптимума

№№ п/п	Логические условия		
	Если	И	ТО
1.	$MP(\tilde{A}_i) > MP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) \leq mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) > (\tilde{A}_j)$
		$mp(\tilde{A}_i) > mp(\tilde{A}_j)$	Вычислить и сравнить сложные пропорции (табл. 2)
2.	$MP(\tilde{A}_i) < MP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) \geq mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) > (\tilde{A}_j)$
		$mp(\tilde{A}_i) < mp(\tilde{A}_j)$	Вычислить и сравнить сложные пропорции (табл. 2)
3.	$MP(\tilde{A}_i) = MP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) < mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) > (\tilde{A}_j)$
		$mp(\tilde{A}_i) = mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) = (\tilde{A}_j)$
		$mp(\tilde{A}_i) > mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) = (\tilde{A}_j)$

Если после сравнения $MP(\tilde{A}_i)$ и $mp(\tilde{A}_i)$ возникает неопределенность, образуются сложные пропорции $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$ для каждой нечеткой величины, которые определяют вклад, вносимый $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$ в сумму пропорции, т.е.

$$CMP(\tilde{A}_i) = \frac{MP(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)};$$

$$cmp(\tilde{A}_i) = \frac{mp(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)} = 1 - CMP(\tilde{A}_i).$$

Таблица 2

Алгоритм, основанный на вычислении и сравнении сложных пропорций

№№ п/п	Логические условия		
	Если	И	ТО
1.	$CMP(\tilde{A}_i) > CMP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) < mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) > (\tilde{A}_j)$
2.	$CMP(\tilde{A}_i) < CMP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) > mp(\tilde{A}_j)$	$(\tilde{A}_i) < (\tilde{A}_j)$
3.	$CMP(\tilde{A}_i) = CMP(\tilde{A}_j)$	$mp(\tilde{A}_i) = mp(\tilde{A}_j)$	Если $d[CMP(\tilde{A}_i)] > d[CMP(\tilde{A}_j)],$ то $(\tilde{A}_i) > (\tilde{A}_j);$ $d[CMP(\tilde{A}_i)] < d[CMP(\tilde{A}_j)],$ то $(\tilde{A}_i) < (\tilde{A}_j);$ $d[CMP(\tilde{A}_i)] = d[CMP(\tilde{A}_j)],$ то $(\tilde{A}_i) = (\tilde{A}_j);$ где $d[CMP(\tilde{A}_i)]$ -знаменатель сложной пропорции $CMP(\tilde{A}_i),$ т.е. $MP(\tilde{A}_i) + mp(\tilde{A}_i)$

Если после сравнения $MP(\tilde{A}_i)$ и $mp(\tilde{A}_i)$ возникает неопределенность, образуются сложные пропорции $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$ для каждой нечеткой величины, которые определяют вклад, вносимый $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$ в сумму пропорции, т.е.

$$CMP(\tilde{A}_i) = \frac{MP(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)};$$

$$mp(\tilde{A}_i) = \frac{mp(\tilde{A}_i)}{MP(\tilde{A}) + mp(\tilde{A}_i)} = 1 - CMP(\tilde{A}_i).$$

Затем эти сложные пропорции $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$ сравниваются согласно алгоритму, представленному в табл. 2 (заметим, что из-за структуры $CMP(\tilde{A}_i) + mp(\tilde{A}_i) = 1$ только три случая, которые

приведены в табл. 2 возможны с точки зрения математики). В общем случае этот метод учитывает (в виде штрафа) большой разброс случайного набора величин.

При необходимости сравнения более двух нечетких величин $СМР(\tilde{A}_i)$ и $сmp(\tilde{A}_i)$ основываются на $m\tilde{a}x$ и $m\tilde{i}n$, образованными большим количеством нечетких величин. Затем выполняется ранжирование по двум группам: по группе, образованной на основе $СМР(\tilde{A}_i)$ и по группе $сmp(\tilde{A}_i)$. Вспомним, что при первом ранжировании нечеткая величина с наибольшим СМР считается наибольшей и так далее сверху вниз. При втором ранжировании нечеткая величина с наибольшим $сmp$ считается наименьшей и так далее снизу вверх. В большинстве случаев эти два ранжирования будут конфликтовать. Соотношение нечетких величин, которые конфликтуют при первоначальном групповом ранжировании должны дополнительно попарно исследоваться с использованием алгоритмов (табл. 1 и 2) для устранения конфликта.

9.4. Примеры решения типовых задач с нечеткими величинами

9.4.1. Операции над нечеткими величинами

Сложение нечетких величин.

1. Выполним операцию сложения двух треугольных нечетких величин, которые описаны следующими ФП:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 + 2/3, & -2 \leq x \leq 1; \\ -x/5 + 6/4, & 1 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \leq x \leq 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \leq 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В первую очередь определим α -сечения в терминх ЛСТ и ПСТ функций:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1^\alpha / 3 + 2/3; \\ \alpha &= -a_2^\alpha / 5 + 6/5; \\ \alpha &= b_1^\alpha / 2 - 1/2; \\ \alpha &= -b_2^\alpha + 4. \end{aligned}$$

Теперь, решая эту систему уравнений для верхней и нижней границы обеих нечетких величин, получаем:

$$\begin{aligned}a_1^\alpha &= 3\alpha - 2; \\ a_2^\alpha &= -5\alpha + 6; \\ b_1^\alpha &= 2\alpha + 1; \\ b_2^\alpha &= -\alpha + 4.\end{aligned}$$

Следовательно, α -сечение для нечетких величин \tilde{A} и \tilde{B} может быть представлено как:

$$\begin{aligned}A_\alpha &= (3\alpha - 2, -5\alpha + 6); \\ B_\alpha &= (2\alpha + 1, -\alpha + 4).\end{aligned}$$

Тогда сумма \tilde{A}_α и \tilde{B}_α имеет вид:

$$A_\alpha(+)\tilde{B}_\alpha = [(3\alpha - 2) + (2\alpha + 1), (-5\alpha + 6) + (-\alpha + 4)] = (5\alpha - 1, 6\alpha + 10).$$

Для того, чтобы найти x , необходимо использовать определения верхней и нижней границ α -сечения:

$$\begin{aligned}x &= a_1^\alpha + b_1^\alpha = 5\alpha - 1; \\ x &= a_2^\alpha + b_2^\alpha = -6\alpha + 10.\end{aligned}$$

Определяя α , соответственно получаем ЛСТ и ПСТ функции для суммы нечетких величин:

$$\begin{aligned}\alpha &= x/5 + 1/5; \\ \alpha &= -x/6 + 10/6.\end{aligned}$$

В данном случае формирования ФП суммы двух нечетких величины почти завершено. Осталось лишь найти области изменения значений ЛСТ и ПСТ. Для определения нижнего значения области для ЛСТ необходимо приравнять ЛСТ функцию к нулю и найти x . Аналогично, для определения верхнего значения необходимо приравнять эту функцию к единице и найти x :

$$\begin{aligned}0 &= x/5 + 1/5, \quad x = -1; \\ 1 &= -x/6 + 10/6, \quad x = 4.\end{aligned}$$

Таким образом, полученные границы ЛСТ следующие: $-1 \leq x \leq 4$.

Для нахождения нижнего значения области для ПСТ функции необходимо приравнять ее к единице и найти x . Определение верхнего значения для этой функции сводится к приравниванию ее к нулю и нахождению x :

$$\begin{aligned}1 &= -x/6 + 10/6, \quad x = 4. \\ 0 &= -x/6 + 10/6, \quad x = 10.\end{aligned}$$

Вычитание нечетких величин.

2. Рассмотрим пример вычитания нечетких величин, которые описываются следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/5 - 5/5, & 5 \leq x \leq 10; \\ -x/2 + 12/2, & 10 < x \leq 12; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/3 - 2/3, & 2 \leq x \leq 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем

$$a_1^\alpha = 5\alpha + 5; \quad a_2^\alpha = -2\alpha + 2; \quad b_1^\alpha = 3\alpha + 2; \quad b_2^\alpha = -5\alpha + 10.$$

Для того, чтобы вычесть \tilde{B} из \tilde{A} сначала находим изображение для α -сечения:

$$\tilde{B}_{\alpha} = [-b_2^\alpha, -b_1^\alpha] = [5\alpha - 10, -3\alpha - 2].$$

Затем прибавляем \tilde{B} к \tilde{A} для α -сечения:

$$[a_1^\alpha - b_2^\alpha, a_2^\alpha - b_1^\alpha] = [5\alpha + 5 + 5\alpha - 10, -2\alpha + 12 - 3\alpha - 2] = [10\alpha - 5, -5\alpha + 10].$$

Теперь находим ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = 10\alpha - 5, \text{ откуда } \alpha = x/10 + 5/10;$$

$$x = -5\alpha + 10, \text{ откуда } \alpha = -x/5 + 10/5.$$

Приравнивание ЛСТ и ПСТ функций соответственно к нулю и к единице дает значения (-5,0) и (1,5) для ЛСТ и (5,1) и (10,0) для ПСТ функций.

Полная ФП разности тогда имеет вид:

$$\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/10 + 5/10, & -5 \leq x \leq 5; \\ -x/5 + 10/5, & 5 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Умножение нечетких величин.

3. Пусть \tilde{A} и \tilde{B} — две положительные нечеткие величины с ФП

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 \leq x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x-2, & 2 \leq x \leq 3; \\ -x/3 + 6/3, & 3 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^\alpha = 3\alpha + 1; \quad a_2^\alpha = -2\alpha + 6; \quad b_1^\alpha = \alpha + 2; \quad b_2^\alpha = -3\alpha + 6.$$

Используя определение операции умножения нечетких величин

$$A_\alpha(\bullet)B_\alpha = [a_1^\alpha a_2^\alpha] [b_1^\alpha b_2^\alpha] = [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha].$$

запишем:

$$\begin{aligned} A_\alpha(\bullet)B_\alpha &= [a_1^\alpha b_1^\alpha, a_2^\alpha b_2^\alpha] = \\ &= [(3\alpha + 1)(\alpha + 2), (-2\alpha + 6)(-3\alpha + 6)] = [3\alpha^2 + 7\alpha + 2, 6\alpha^{2-3\alpha} + 36]. \end{aligned}$$

В отличие от операций сложения и вычитания определение ЛСТ и ПСТ функций требует решения квадратных уравнений:

$$x = 3\alpha^2 + 7\alpha + 2; \quad x = 6\alpha^{2-3\alpha} + 36. \quad (*)$$

Для нахождения α преобразуем уравнение (*) так:

$$3\alpha^2 + 7\alpha + (2 - x) = 0, \quad 6\alpha^{2-3\alpha} + (36 - x) = 0. \quad (**)$$

Оставляя лишь корни, которые находятся в интервале $[0, 1]$, из уравнения (**) можно получить:

$$\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6, \quad \alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12.$$

Границы области ЛСТ и ПСТ функций также определяются приравнованием этих функций к нулю и к единице и определением x . Для ЛСТ функции имеем:

а) $\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6 = 0$, откуда $x = 2$;

б) $\alpha = (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6 = 1$, откуда $x = 12$.

Аналогично для ПСТ функции:

а) $\alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12 = 1$, откуда $x = 12$

б) $\alpha = (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12 = 0$, откуда $x = 36$.

Нечеткая величина, являющаяся произведением \tilde{A} и \tilde{B} в пространстве R^+ , имеет вид

$$\mu_{\tilde{A}(\bullet)\tilde{B}}(x) = \begin{cases} (-7 + \sqrt{25 + 12x}) / 6, & 2 \leq x \leq 12; \\ (30 - \sqrt{36 + 24x}) / 12, & 12 < x \leq 36; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Умножение нечеткой величины на скаляр.

4. Пусть \tilde{A} — нечеткая величина, описываемая ФП в соответствии с уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 \leq x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$k = 2$. Тогда

$$kA_{\alpha} = [2,2](\bullet)[3\alpha+1, -2\alpha+6] = [6\alpha+2, -4\alpha+12].$$

Определим ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = 6\alpha + 2, \alpha = x/6 - 2/6; \quad (*)$$

$$x = -4\alpha + 12, \alpha = -x/4 + 12/4. \quad (**)$$

Решение уравнения (*) при $\alpha = 0$; 1 дает границы области ЛСТ:
 $2 \leq x \leq 8$.

Решение уравнения (**) при $\alpha = 1$; 0 дает границы области ПСТ:
 $8 \leq x \leq 12$.

Тогда полная ФП имеет вид

$$\mu_{k \bullet \tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/6 - 2/6, & 2 \leq x \leq 8; \\ -x/4 + 12/4, & 8 < x \leq 12; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Деление нечетких величин.

5. Пусть \tilde{A} и \tilde{B} следующие:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 3/3, & 3 \leq x \leq 6; \\ -x/4 + 10/1, & 6 < x \leq 10; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 3 \leq x \leq 3; \\ -x/1 + 4/1, & 3 < x \leq 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^{\alpha} = 3\alpha + 3; \quad a_2^{\alpha} = -4\alpha + 0; \quad b_1^{\alpha} = -2\alpha + 1; \quad b_2^{\alpha} = -\alpha + 4.$$

Инверсия \tilde{B} для α -сечения имеет вид

$$\tilde{B}_{\alpha}^{-1} = [1/b_2^{\alpha}, 1/b_1^{\alpha}] = \left[\frac{1}{-\alpha + 4}, \frac{1}{2\alpha + 1} \right].$$

Умножение \tilde{A} на \tilde{B}^{-1} на любом α - уровне дает

$$\tilde{A}(\cdot) \tilde{B}^{-1} = [a_{1/}^{\alpha}, b_{2/}^{\alpha}, a_{2/}^{\alpha}, b_{1/}^{\alpha}] = \left[\frac{3\alpha + 3}{-\alpha + 4}, \frac{-4\alpha + 10}{2\alpha + 1} \right].$$

Затем определяются ЛСТ и ПСТ функции:

$$x = (3\alpha + 3)/(-\alpha + 4), \text{ откуда } \alpha = (4x - 3)/(x + 3);$$

$$x = (-4\alpha + 10)/(2\alpha + 1), \text{ откуда } \alpha = (10 - x)/(2x + 4).$$

Приравнивая ЛСТ и ПСТ функций последовательно к нулю и к единице, получаем:

а) для ЛСТ функции

$$\text{при } \alpha = 0 \quad x = 3/4, \quad \text{при } \alpha = 1 \quad x = 6/3;$$

б) для ПСТ функции

$$\text{при } \alpha = 1 \quad x = 6/3, \quad \text{при } \alpha = 0 \quad x = 10/1.$$

Тогда полная ФП для $\tilde{A}(\cdot) \tilde{B}$ следующая:

$$\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{B}}(x) = \begin{cases} (4x - 3)/(x + 3), & 3/4 \leq x \leq 6/3; \\ (10 - x)/(2x + 4), & 6/3 < x \leq 10/1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Квадратный корень из треугольной нечеткой величины.

6. Пусть \tilde{A} — нечеткая величина в пространстве R^+ , функция принадлежности которой описывается уравнением

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4; \\ -x/2 + 6/2, & 4 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для произвольного α -сечения имеем:

$$a_1^{\alpha} = 3\alpha + 1; \quad a_2^{\alpha} = -2\alpha + 6.$$

Чтобы удовлетворить условию извлечения квадратного корня запишем

$$A_{\alpha}^{1/2}(\cdot) A_{\alpha}^{1/2} = A_{\alpha} = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$$

Используя методику умножения двух нечетких величин, получаем

$$A_{\alpha}^{1/2}(\cdot) A_{\alpha}^{1/2} = [a_1^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha}, a_1^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha}, a_2^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha}, a_2^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha}],$$

откуда

$$a_1^{1/2\alpha} a_1^{1/2\alpha} = a_1^{\alpha}, \quad a_2^{1/2\alpha} a_2^{1/2\alpha} = a_2^{\alpha}.$$

Следовательно,

$$a_1^{1/2\alpha} = \pm a_2^{\alpha} \text{ или } \pm [a_2^{\alpha}]^{1/2}, \\ a_2^{1/2\alpha} = \pm a_2^{\alpha} \text{ или } \pm [a_2^{\alpha}]^{1/2}.$$

Продолжая аналогично, запишем

$$a_1^{1/2\alpha} = \pm [a_1^{\alpha}]^{1/2} \pm (3\alpha + 1)^{1/2}, \\ a_2^{1/2\alpha} = \pm [a_1^{\alpha}]^{1/2} \pm (-2\alpha + 6)^{1/2}.$$

Решение четырех последующих уравнений относительно α дает ЛСТ и ПСТ функции для двух «нечетких квадратных корней»:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & x = (3\alpha+1)^{1/2} \quad () \\ & x = (-2\alpha+6)^{1/2} \quad () \end{aligned}$$

для положительного нечеткого квадратного корня

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & x = -(3\alpha+1)^{1/2} \quad (&) \\ & x = -(-2\alpha+6)^{1/2} \quad (&&) \end{aligned}$$

для отрицательного нечеткого квадратного корня.

Таким образом, ЛСТ и ПСТ функции для положительного и отрицательного квадратных корней имеют вид:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x^2 - 1)/3; & (*) \\ \alpha &= (-x^2 + 6)/2 & (**) \end{aligned}$$

Для получения ФП квадратного корня последовательно приравняем уравнения (*) и (**) к нулю и к единице и найдем верхнюю и нижнюю границы областей для ЛСТ и ПСТ функций:

$$\begin{aligned} 0 &= (x^2 - 1)/3, \text{ откуда } x = \pm 1; \\ 1 &= (x^2 - 1)/3, \text{ откуда } x = \pm 2; \\ 1 &= (-x^2 + 6)/2, \text{ откуда } x = \pm 2; \\ 0 &= (-x^2 + 6)/2, \text{ откуда } x = \pm \sqrt{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, ФП положительных и отрицательных квадратных корней на \tilde{A} соответственно равны:

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)/3, & 1 \leq x \leq 2; \\ (-x^2 + 6)/2, & 2 < x \leq \sqrt{6}; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (+)$$

$$\mu_{\tilde{A}^{1/2}}(x) = \begin{cases} (-x^2 + 6)/2, & -\sqrt{6} \leq x \leq -2; \\ (x^2 - 1)/3, & -2 < x \leq -1; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (++)$$

Для подтверждения того, что функции принадлежности (+), (++) действительно соответствуют квадратному корню из \tilde{A} , вычислим квадраты этих величин для α -сечения.

Для положительного квадратного корня

$$\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet) \tilde{A}_\alpha^{1/2} = [a_{11/2}^\alpha a_{11/2}^\alpha, a_{21/2}^\alpha a_{21/2}^\alpha]. \quad (***)$$

Подставляя (*) и (**) в (***) , получаем

$$[(3\alpha+1)^{1/2}(3\alpha+1)^{1/2}, (-2\alpha+6)^{1/2}(-2\alpha+6)^{1/2}] = [(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = A_\alpha.$$

Для отрицательного квадратного корня

$$-\tilde{A}_\alpha^{1/2}(\bullet) - \tilde{A}_\alpha^{1/2} = [-a_{11/2}^\alpha - a_{11/2}^\alpha, -a_{21/2}^\alpha - a_{21/2}^\alpha]. \quad (****)$$

Подставляя () и () в (****), имеем

$$\begin{aligned} [(-3\alpha+1)^{1/2}(-3\alpha+1)^{1/2}, (-(-2\alpha+6)^{1/2})(-(-2\alpha+6)^{1/2})] = \\ = [(3\alpha+1), (-2\alpha+6)] = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] = A_\alpha. \end{aligned}$$

Нечеткие максимум и минимум

Пример 7. Пусть \tilde{A}_1 есть $\tilde{\min}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, а \tilde{A}_2 $\tilde{\max}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$. Тогда пропорции вычисляются несколько легче (рис. 19):

$$MP(\tilde{A}_1) = \frac{S_1}{3} = \frac{\int_5^7 \left[\frac{x}{3} \right] dx + \int_7^9 \left[\frac{-x}{3} + \frac{9}{3} \right] dx}{3} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} = 0,44,$$

$$MP(\tilde{A}_2) = \frac{3}{3} = 1;$$

$$mp(\tilde{A}_1) = \frac{3}{3} = 1; \quad mp(\tilde{A}_2) = \frac{S_1}{3} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} = 0,44.$$

Используя алгоритм, представленный в табл. 1, и учитывая то, что

$$MP(\tilde{A}_1) < MP(\tilde{A}_2) \text{ и } mp(\tilde{A}_1) > mp(\tilde{A}_2),$$

имеем $(\tilde{A}_1) < (\tilde{A}_2)$.

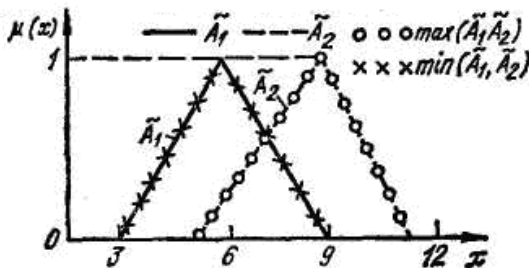


Рис. 19.

Пример 8. На рис. 20 приведены функции $\tilde{\max}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, и $\tilde{\min}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$. Расчет пропорций для обеих нечетких величин следующий:

$$MP(\tilde{A}_1) = \frac{S_2 + S_3}{3} = \frac{1+1}{3} = 0,67; \quad MP(\tilde{A}_2) = \frac{S_2}{1} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$mp(\tilde{A}_1) = \frac{S_1 + S_2}{3} = \frac{1+1}{3} = 0,67; \quad mp(\tilde{A}_2) = \frac{S_2}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

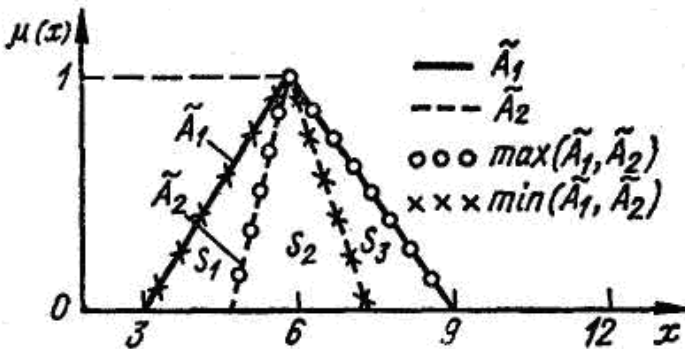


Рис. 20.

Используя алгоритм, табл. 1 и, учитывая то, что

$$MP(\tilde{A}_1) < MP(\tilde{A}_2) \text{ и } mp(\tilde{A}_1) < mp(\tilde{A}_2),$$

проведем вычисление сложных пропорций для каждой нечеткой величины, с целью окончательного ранжирования:

$$CMP(\tilde{A}_1) = \frac{0,67}{0,67 + 0,67} = 0,5; \quad CMP(\tilde{A}_2) = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$cmp(\tilde{A}_1) = 0,5; \quad cmp(\tilde{A}_2) = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Поскольку разбросы симметричны, сложные пропорции не дают никакой дополнительной информации о нечетких величинах. Как показано в табл. 1, в этом частном случае может быть вычислен коэффициент сравнения. Он представляет собой знаменатель коэффициента $CMP(\tilde{A}_1)$ или $cmp(\tilde{A}_1)$, т.е.

$$d[CMP(\tilde{A}_1)] = MP(\tilde{A}_1) + mp(\tilde{A}_1),$$

причем, чем большее значение $d[CMP(\tilde{A}_1)]$, тем считается большей нечеткая величина. Такое решение принимается для нечетких величин с меньшим разбросом. Для нечетких величин с большим разбросом суждение противоположно, т.е., чем меньше значение

$d[CMP(\tilde{A}_1)]$, тем большей считается нечеткая величина. Для рассматриваемого примера имеем

$$d[CMP(\tilde{A}_1)] = 0,67 + 0,67 = 1,34; \quad d[CMP(\tilde{A}_2)] = 1 + 1 = 2.$$

Здесь

$$d[CMP(\tilde{A}_2)] > d[CMP(\tilde{A}_1)]$$

и можно произвести ранжирование $\tilde{A}_2 > \tilde{A}_1$.

Пример 9. Рассмотрим $\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, и $\min(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2)$, которые приведены на рис. 21.

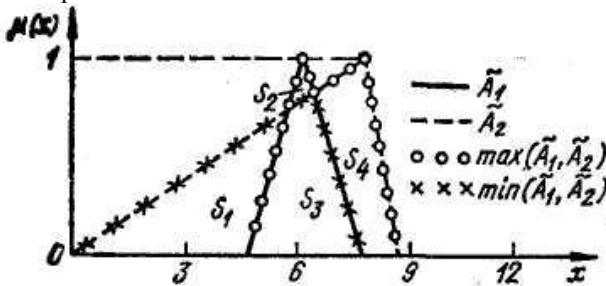


Рис. 21.

Пропорции максимума и минимума для каждого нечеткого множества следующие:

$$MP(\tilde{A}_1) = \frac{S_3}{1} = \int_5^{35/6} (x-5) dx + \int_{35/6}^{49/8} \frac{x}{7} dx + \int_{49/8}^7 (-x+7) dx = 0,98;$$

$$MP(\tilde{A}_2) = \frac{S_3 + S_4}{4} = \frac{0,98 + \int_{49/8}^7 \left[\frac{x}{7} - (-x+7) \right] dx + \int (-x+8) dx}{4} =$$

$$= \frac{0,98 + 0,44 + 0,5}{4} = 0,48;$$

$$mp(\tilde{A}_1) = \frac{S_2 + S_3}{1} = 1;$$

$$mp(\tilde{A}_2) = \frac{S_1 + S_3}{4} = \frac{2,08 + 0,98}{4} = 0,77.$$

Поскольку $MP(\tilde{A}_1) > MP(\tilde{A}_2)$ и $mp(\tilde{A}_1) > mp(\tilde{A}_2)$, то необходимо вычислять сложные пропорции:

$$CMP(\tilde{A}_1) = \frac{0,98}{1+0,98} = 0,49; \quad CMP(\tilde{A}_2) = \frac{0,48}{0,48+0,77} = 0,38;$$

$$cnp(\tilde{A}_1) = 1 - 0,49 = 0,51; \quad cnp(\tilde{A}_2) = 1 - 0,38 = 0,62 = 0,5.$$

Здесь $MP(\tilde{A}_1) > MP(\tilde{A}_2)$ и $cnp(\tilde{A}_1) < cnp(\tilde{A}_2)$, так что $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$, исходя из алгоритма табл. 1.

Пример 10. На рис. 22 представлены функции

$$\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_2 \text{ и } \min(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) = \tilde{A}_1.$$

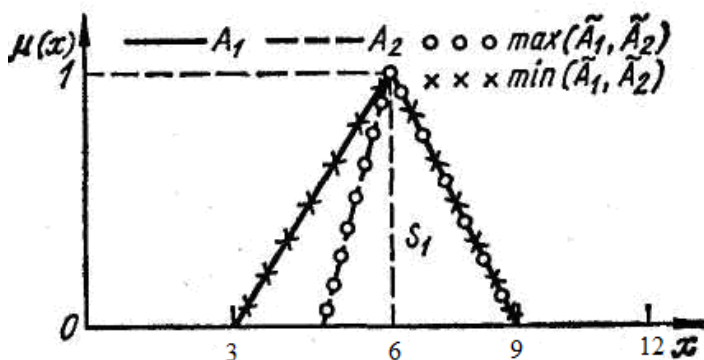


Рис. 22.

Пропорции для \tilde{A}_1 и \tilde{A}_2 следующие:

$$MP(\tilde{A}_1) S_1 / 3 = 2/3 = 0,67, \quad cnp(\tilde{A}_1) = 3/3 = 1;$$

$$MP(\tilde{A}_2) = 2/2 = 1, \quad cnp(\tilde{A}_2) = 2/2 = 1.$$

Здесь $MP(\tilde{A}_1) < MP(\tilde{A}_2)$ и $cnp(\tilde{A}_1) = cnp(\tilde{A}_2)$, так что $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$.

9.5. Применение теории нечетких множеств для моделирования задач управления и принятия решений

Практика решения задач комплексной автоматизации сложных технологических систем показывает, что в этих случаях не всегда оправдывает себя строгий математический аппарат теории управления. Сложность точного описания технологических процессов и алгоритмов

управления часто сводит к минимуму эффективность применения традиционных подходов. В такой ситуации представляется целесообразным использование метода нечетких множеств, позволяющего более адекватно имитировать логику человеческого мышления при принятии решений для управления технологическими системами.

Рассмотрим эвристический подход к моделированию такого типа задач, основанный на выработке протокола принятия решений с использованием так называемых лингвистических переменных. В этом случае вместо детерминированной математической модели для представления логики принятия решений используются нечеткие условные утверждения типа:

ЕСЛИ ... ТОГДА ... ИНАЧЕ ...

Большинство исследователей, исследующих технические системы при выработке решений мыслят не в терминах абсолютных значений параметров и величин, а в силу своего опыта «превращают» эти абсолютные значения в относительные уровни, например, «низкий», «средний», «высокий», «очень высокий» и т. п. Базируясь на этих относительных уровнях и используя теорию нечетких множеств можно построить алгоритмы обработки лингвистических переменных, имитирующих процесс выработки и принятия решений исследователем. Конечно, такие решения далеко не всегда будут оптимальными, но с практической точки зрения они будут целесообразными.

Однако возможности человека, принимающего решения можно значительно усилить, если дополнить логику его рассуждений мощными оптимизационными методами, специально модифицированными для обработки нечетких величин и множеств. Рассмотрим основные из этих методов, которые могут применяться в моделировании управления технологическими системами и принятии решений при планировании их работы.

МЕТОД ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ТЕРМИНАХ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

При решении задач моделирования, планирования и управления технологическими системами стала уже классической следующая задача линейного программирования:

максимизировать целевую функцию вида

$$z = C^T x; \tag{1}$$

при ограничениях

$$Ax \leq b, x \geq 0,$$

где C, b — векторы параметров размерности $(n \times 1)$; x — вектор искомых переменных размерности $(n \times 1)$; A — матрица параметров размерности $(n \times n)$.

В случае, если в задаче линейного программирования целевые функции и ограничения являются нечеткими величинами, она может быть сформулирована в следующей постановке:

максимизировать нечеткую целевую функцию

$$\tilde{z} \cong \tilde{C}^T x \tag{2}$$

с учетом нечетких ограничений вида

$$\tilde{A}x \leq \tilde{b}; \quad x \geq 0.$$

Объединив целевую функцию с ограничениями и переформулировав эту задачу в терминах функций принадлежности, запишем

$$\begin{aligned} \text{Max}_x \mu_D(x) = \mu_{C_1}(x) \wedge \mu_{C_2}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{C_n}(x) \wedge \mu_{G_1}(x) \wedge \mu_{G_2}(x) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mu_{G_m}(x), \end{aligned} \tag{3}$$

где D — искомое решение; C_j — ограничения ($j = \overline{1, n}$); G_i — цели ($i = \overline{1, l}$); μ — символ функции принадлежности; \wedge — оператор пересечения.

Если рассматривается только одна цель G , то задача (3) может быть сведена к виду

$$\text{Max}_x \mu_D(x) = \sup_{\alpha_i} \alpha_i \wedge \text{Max}_{x \in C_{\alpha_1}^1 \dots C_{\alpha_n}^n} \mu_G(x), \tag{4}$$

где α_i — минимальный приемлемый уровень значений $\mu_{C_i}(x)$.

Для этой задачи можно также использовать подход параметрического программирования и получить возможность применять симплексный метод для нахождения решения даже несмотря на то, что задача уже стала нечеткой. При этом функция принадлежности следующая:

$$\mu_i \tilde{A}x, \tilde{C}x = \mu_i(\tilde{B}x) = \begin{cases} 0, & (\tilde{B}x) > \tilde{b}'_i + \tilde{d}_i; \\ 1 - \left[\frac{(\tilde{B}x)_i - \tilde{b}'_i}{\tilde{d}_i} \right], & \tilde{b}'_i < (\tilde{B}x)_i \leq \tilde{b}'_i + \tilde{d}_i; \\ 1, & (\tilde{B}x) \leq \tilde{b}'_i, \end{cases} \tag{5}$$

где i — i -я строка матрицы \tilde{B} или вектора \tilde{b} ; \tilde{B} — расширенная матрица, включающая \tilde{b} и целевые функции; b' — вектор правых частей ограничений с прибавленными к ним необходимыми границами

целей; \vec{d}_i — вектор допустимых нарушений (толеранса) i -го ограничения или цели.

Задача теперь имеет вид

$$\max_x \mu_1(\tilde{B}x) \wedge \mu_2(\tilde{B}x) \wedge \dots \wedge \mu_l(\tilde{B}x) \text{ при } x \geq 0. \quad (6)$$

Однако для удобства использования симплекс-метода целесообразно сделать следующие подстановки:

$$\tilde{b}_i^* = \frac{\tilde{b}_i}{d_i}; \quad (7)$$

$$\tilde{b}_i = \frac{\tilde{b}_i}{d_i}. \quad (8)$$

В результате задача может быть представлена в виде

$$\text{Max}_x \lambda \quad (9)$$

при $\lambda \leq 1 + \tilde{b}_i'' - (\tilde{B}'x)_i, i = 1, 2, \dots, l$, где $\lambda \in [0, 1]$.

Задача нечеткого линейного программирования в представленной формулировке может быть решена с помощью нескольких различных подходов

Так, можно считать некоторые ограничения задачи (9) более «жесткими» (важными) по сравнению с другими и решая эту задачу с помощью метода итераций добиться обязательного их выполнения.

Можно также все переменные задачи (9) разбить на четкие и нечеткие и применять для ее решения широкий арсенал методов, включая симплекс-метод или методы нелинейного программирования в зависимости от принятых ограничений. При этом симплекс-метод применяется в случае, когда функции принадлежности нечетких целей и ограничений являются кусочно-линейными, а методы нелинейного программирования — в остальных случаях.

И наконец, по отношению к исходным — нечетким переменным, можно ввести так называемые сопряженные переменные, что позволит сформулировать новую задачу, двойственную к (9). Эта двойственная задача решается проще исходной, но позволяет в итоге получить ее решение.

Рассмотрим теперь один важный частный случай задачи линейного программирования — транспортную задачу в нечеткой постановке. Она может использоваться для моделирования и планирования работы технологических систем на верхнем уровне АСУ ТП.

Формулировка этой задачи в классическом виде выглядит так:
минимизировать целевую функцию

$$\min_x z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (10)$$

при ограничениях вида

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq \sum_{j=1}^n b_j; \quad x_{ij} \geq 0, \quad (13)$$

где x_{ij} — ресурсы, извлекаемые из i -го источника в период времени j для удовлетворения потребителей; c_{ij} — стоимость единицы ресурсов x_{ij} ; a_i — количество единиц ресурсов, получаемых из источника i ; b_j — потребность в ресурсах в период времени j ; m — общее количество источников; n — общее количество периодов времени

Ограничение (11) подразумевает, что ресурсы, извлекаемые из источника i не превышают емкости этого источника. Ограничение (12) обеспечивает удовлетворение запросов в период j , а ограничение (13) гарантирует, что общий спрос на ресурсы не превышает суммарных возможностей источников. В зависимости от того, какие из входных величин сформулированной задачи являются нечеткими возможны различные подходы к ее решению. Если нечеткими являются только стоимости ресурсов (c_{ij}), тогда целевую функцию запишем в виде

$$\tilde{c} = \tilde{\min}_{c \in S} (+) c s_{ij} x_{ij}, \quad (14)$$

где (+) — символ нечеткого сложения; $\tilde{\min}$ — обозначает нечеткий минимум; \tilde{c} — искомое решение; S — нечеткое множество перестановок из n элементов. Один из эвристических способов приблизительного определения величины c состоит в исследовании его α_1 -сечения (c^{α_1}), а также другого α_2 -сечения, имеющего два уровня: c_1^{α} , c_2^{α} . Другими словами, в соответствии с этим способом, решаются три детерминированные транспортные задачи, в которых в качестве $c s_{ij}$, используются c^{σ_1} , c_1^{α} и c_2^{α} для всех стоимостей переменных принятия решения. Такой эвристический подход позволяет значительно уменьшить количество анализируемых перестановок и в результате упрощается. Рассмотрим пример, иллюстрирующий приведенный подход.

Пример. Минимизировать целевую функцию вида

$$z = x_{11} + 2x_{12} + 4x_{21} + 6x_{22} \quad (15)$$

при

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} &= 5; & x_{21} + x_{22} &= 5; \\ x_{11} + x_{21} &= 6; & x_{12} + x_{22} &= 4; \\ x_{ij} &\geq 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Решение сформулированной задачи при детерминированных коэффициентах стоимости следующее

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (1, 4, 5, 0); \quad z_{\min} = 29.$$

Теперь используем коэффициенты стоимости, которые являются нечеткими величинами с функциями принадлежности следующего вида:

$$\begin{aligned} \mu_{c_{11}}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{1} - \frac{0}{1}, & 0 \leq x \leq 1; \\ -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}, & 1 < x \leq 4; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ \mu_{c_{12}}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{0}{2}, & 0 \leq x \leq 2; \\ -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}, & 2 < x \leq 5; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ \mu_{c_{21}}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{2}{2}, & 2 \leq x \leq 4; \\ -\frac{x}{1} + \frac{5}{1}, & 4 < x \leq 5; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\ \mu_{c_{22}}(x) &= \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{4}{2}, & 4 \leq x \leq 6; \\ -\frac{x}{1} + \frac{7}{1}, & 6 < x \leq 7; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ задача сводится к детерминированной, поскольку при $\alpha = 1$ все нечеткие величины стоимости принимают детерминированные значения. В качестве дополнительного α -сечения произвольным образом выбрано значение $\alpha = 0,3$. Определение значений стоимости в случаях, когда в качестве каждой из этих переменных применяются ЛСТ функции дает для

$$c_{11} \quad 0,3 = x - 0, \text{ или } c_{11} = 0,3;$$

$$c_{12} \quad 0,3 = \frac{x}{2} - 0, \text{ или } c_{12} = 0,6;$$

$$c_{21} \quad 0,3 = \frac{x}{2} - 1, \text{ или } c_{21} = 2,6;$$

$$c_{22} \quad 0,3 = \frac{x}{2} - 2, \text{ или } c_{22} = 4,6.$$

Детерминированное решение с использованием вышеприведенных значений $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ следующее:

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (1, 4, 5, 0);$$

$$z_{\min} = 15,7.$$

Определение значений стоимости, которые необходимо использовать когда в качестве каждой из них применяются ПСТ функции дает для

$$c_{11} \quad 0,3 = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}, \text{ или } c_{11} = 3,1;$$

$$c_{12} \quad 0,3 = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}, \text{ или } c_{12} = 4,1;$$

$$c_{21} \quad 0,3 = -x + 5, \text{ или } c_{21} = 4,7;$$

$$c_{22} \quad 0,3 = -x + 7, \text{ или } c_{22} = 6,7.$$

Детерминированное решение с использованием вышеприведенных значений стоимости

$$(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = (1, 4, 5, 0); \quad z_{\min} = 43.$$

Заметим, что значения переменных принятия решения остаются одинаковыми во всех трех детерминированных задачах, так что это является оптимальным набором решений со следующей нечеткой функцией общей стоимости:

$$\mu_c(x) = \begin{cases} \frac{x}{13,3} - \frac{15,7}{13,3}, & 15,7 \leq x \leq 29; \\ -\frac{x}{14} + \frac{43}{14}, & 29 < x \leq 43, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

Если три детерминированных решения не дают один и тот же набор результатов, необходимо выбирать конечное решение эвристически.

В ситуации, когда c_{ij} являются детерминированными величинами, а a_i и b_j — нечеткими, возникает необходимость использовать нечеткие допусковые ограничения, обычно применяемые в любой общей нечеткой задаче линейного программирования. При использовании этих ограничений, целевая функция транспортной задачи следующая:

$$\min_x \mu_{\tilde{a}_i} \left[\sum_{j=1}^n x_{ij} \right]; \quad i = 1, \dots, m; \quad (18)$$

$$\max_x \mu_{\tilde{b}_j} \left[\sum_{i=1}^m x_{ij} \right]; \quad j = 1, \dots, n; \quad (19)$$

Другими словами, требуется удовлетворять ограничения (11), (12) как можно лучше вдобавок к минимизации первоначальной цели.

В том случае, когда c_{ij} , a_i и b_j являются нечеткими и если удовлетворение ограничений считается более важным, чем оптимизация критерия, можно использовать процедуру, которая применялась при нечетких c_{ij} с дополнительным исследованием других α -уровней. Если при различных высоких значениях α будем получать близкие решения, то без большого риска можно использовать набор решений x_{ij} . Однако, поскольку величины a_i и b_j также являются нечеткими, то необходимо определить «степень допустимости» F , или степень, с которой решение допустимо:

$$F = \sup_k \left[\mu_{\sum_{i=1}^m \tilde{a}_i} (k) \wedge \mu_{\sum_{j=1}^n \tilde{b}_j} (k) \right]. \quad (20)$$

Величина F определяет степень, с которой спрос может быть удовлетворен предложением. В детерминированном случае при

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

степень допустимости всегда равна 1. Следующий пример иллюстрирует это положение.

Предположим, что ограничения на предложение и спрос являются нечеткими и в задаче (15), (16) нечеткость каждого ограничения представлена следующими функциями принадлежности:

$$\mu_{\tilde{a}_1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1} - \frac{4}{1}, & 4 \leq x \leq 5; \\ -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}, & 5 < x \leq 7; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{a_1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, & 3 \leq x \leq 5; \\ -\frac{x}{1} + \frac{6}{1}, & 5 < x \leq 6; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu_{b_1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3}{5}, & 3 \leq x \leq 6; \\ -\frac{x}{2} + \frac{8}{2}, & 6 < x \leq 8; \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu_{b_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{0}{4}, & 0 \leq x \leq 4; \\ -\frac{x}{4} - \frac{8}{4}, & 4 < x \leq 8; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Функции принадлежности для предложения и спроса следующие:

$$\mu_{b_1(+)\tilde{b}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{3}{7}, & 3 \leq x \leq 10; \\ -\frac{x}{6} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$\mu_{a_1(+)\tilde{a}_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{7}{3}, & 7 \leq x \leq 10; \\ -\frac{x}{3} + \frac{13}{3}, & 10 < x \leq 13; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Степень допустимости задачи, т. е. наибольшее возможное значение пересечения двух приведенных функций принадлежности, равна 1 (рис. 1).

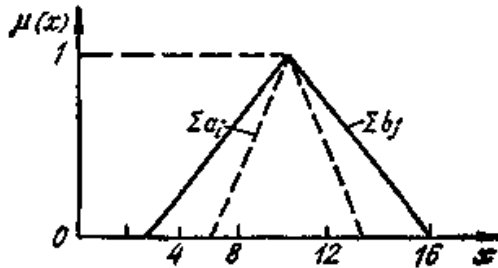


Рис. 1

Следующий метод решения нечеткой транспортной задачи состоит в объединении нечетких целей и ограничений на предложение и спрос в единую функцию цели u . В этом случае постановка задачи имеет вид

$$\min_x \gamma \tag{21}$$

при наличии ограничений

$$\begin{aligned} \bar{z}_0 \gamma - \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} &\geq -z_0; \\ \underline{a}_i \gamma + \sum_j x_{ij} &\geq \bar{a}_i; \quad \bar{a}_i \gamma - \sum_j x_{ij} &\geq -\bar{a}_i; \\ \underline{b}_j \gamma + \sum_i x_{ij} &\geq \bar{b}_j; \quad \bar{b}_j \gamma - \sum_i x_{ij} &\geq -\bar{b}_j; \\ -\gamma &\geq -1, \quad x_{ij} &\geq 0. \end{aligned}$$

В данном случае нечеткая целевая функция \bar{z} , нечеткие ограничения на поставки $\bar{a}_i, i = 1, \dots, m$, и нечеткие ограничения на спрос $\bar{b}_j, j = 1, \dots, n$ имеют треугольные функции принадлежности вида $(\underline{y}, \underline{y}, \bar{y})$, где \underline{y} — средняя точка; \underline{y} — нижний разброс; \bar{y} — верхний разброс. На рис. 2 показана нечеткая величина такого вида.

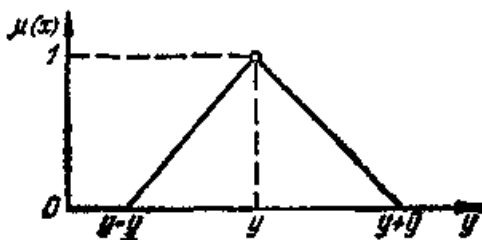


Рис. 2

В сформулированной задаче целевая функция γ имеет смысл степени неудовлетворения ограничениям. Это соответствует λ — степени удовлетворения ограничениям общей задаче нечеткого линейного программирования, причем, $\gamma = 1 - \lambda$. Такая формулировка обладает большей гибкостью, чем общая формулировка задачи линейного программирования, поскольку она позволяет использовать различные левосторонние и правосторонние разбросы (см. рис. 2). В общей формулировке задачи линейного программирования возможно задание лишь одного уровня допуска.

Конечно, приведенная задача может быть решена непосредственным применением методов линейного программирования, но ситуация значительно упростится, если ввести дополнительную задачу, экви-

валентную исходной, но имеющую более простое решение. Эта дополнительная задача, также основанная на треугольных функциях принадлежности имеет следующую формулировку:

$$\min \sum_i \sum_j c_{ij} \alpha_{ij}$$

при наличии ограничений

$$\sum_j \tilde{a}_{ij} \geq -\underline{a}_i; \quad -\sum_j \tilde{a}_{ij} \geq -\bar{a}_i;$$

$$\sum_j \bar{a}_{ij} \geq -\underline{b}_j; \quad -\sum_j \bar{a}_{ij} \geq -\bar{b}_j,$$

где $\alpha_{ij} \in R$; α_{ij} определено на структуре данных (x_{ij}^*) , а $\alpha^* = \{\alpha_{ij}^*\}$ есть оптимальное решение задачи. При этом важными являются следующие утверждения.

1. Если любое $\alpha_{ij} = 0$, то соответствующее x_{ij} не находится в базисе.
2. Справедливо соотношение

$$\gamma^* = \frac{z_0 - z^*}{A^* - z_0}, \quad (22)$$

где z^* — оптимальное решение детерминированной задачи; z_0 — решение первоначальной нечеткой задачи для нечеткой цели; A^* — решение дополнительной эквивалентной задачи и γ^* — степень рассогласования в оптимальном решении для первоначальной нечеткой задачи.

3. Если $\gamma^* \in [0, 1]$ и $x_{ij}^* + \gamma^* \alpha_{ij}^* \geq 0 \forall x_{ij}^*$, то γ^* , $x_{ij}^* + \gamma^* \alpha_{ij}^*$ представляет собой оптимальное решение задачи (21).

Следовательно, если найдены x_{ij}^* , γ^* и α_{ij}^* , то решение нечеткой транспортной задачи (21) может быть найдено при помощи утверждения 3.

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Минимизировать целевую функцию

$$z = 4x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 6x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{24} + 3x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \quad (23)$$

с учетом ограничений

$$\sum_j x_{1j} \simeq 8 \quad \sum_j x_{2j} \simeq 6 \quad \sum_j x_{3j} \simeq 5, \quad (24)$$

$$\sum_i x_{i1} \simeq 4 \quad \sum_i x_{i2} \simeq 5 \quad \sum_i x_{i3} \simeq 6 \quad \sum_i x_{i4} \simeq 4;$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Пусть необходимо получить $z_0 = 35$ с верхним разбросом $\bar{z}_0 = 10$. При этом величины \bar{a}_i и \bar{b}_j представлены следующими нечеткими множествами вида $(y, \underline{y}, \bar{y})$:

$$\bar{a}_1 = (8, 4, 5); \quad \bar{a}_2 = (6, 4, 3); \quad \bar{a}_3 = (5, 1, 1);$$

$$\bar{b}_1 = (4, 1, 3); \quad \bar{b}_2 = (5, 2, 3); \quad \bar{b}_3 = (6, 3, 1); \quad \bar{b}_4 = (4, 3, 2).$$

Задача (22), (23) в нечеткой формулировке следующая: минимизировать целевую функцию y с учетом ограничений вида

$$\begin{aligned} 10y - [4x_{11} + 5x_{12} + 2x_{13} + x_{14} + 6x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{24} + 3x_{31} + x_{32} + \\ + x_{33} + x_{34}] &\geq -35; \\ 4y + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\geq 8; \\ 5y - (x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) &\geq -8; \\ 4y + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\geq 6; \\ 3y - (x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) &\geq -6; \\ y + (x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) &\geq 5; \\ y - (x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) &\geq -5; \\ y + x_{12} + x_{21} + x_{31} &\geq 4; \\ 3y - (x_{11} + x_{21} + x_{31}) &\geq -4; \\ 2y + x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 5; \\ 3y - (x_{12} + x_{22} + x_{32}) &\geq -5; \\ 3y + x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 6; \\ y - (x_{13} + x_{23} + x_{33}) &\geq -6; \\ 3y + x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 4; \\ 2y - (x_{14} + x_{24} + x_{34}) &\geq -4; \\ -y &\geq -1; \quad y, x_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

(25)

В соответствии с представленным методом необходимо ввести дополнительную задачу вида

$$\min_{\alpha} A = 4\alpha_{11} + 2\alpha_{12} + \alpha_{14} + 6\alpha_{21} + 2\alpha_{22} + \alpha_{23}$$

при

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{14} &\geq -4; \quad -(\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{14}) \geq -5; \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} &\geq -4; \quad -(\alpha_{21} + \alpha_{22}) \geq -3; \\ \alpha_{23} &\geq -1; \quad -\alpha_{23} \geq -1; \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} &\geq -1; \quad (-\alpha_{11} + \alpha_{21}) \geq -3; \\ \alpha_{22} &\geq -2; \quad -\alpha_{22} \geq -3; \\ (\alpha_{12} + \alpha_{23}) &\geq -3; \quad -(\alpha_{12} + \alpha_{23}) \geq -1; \\ \alpha_{14} &\geq -3; \quad -\alpha_{14} \geq -2; \end{aligned}$$

При этом $\alpha_{ij} \in \mathcal{R}$ и определено в базисе оптимального детерминированного решения. Заметим, что $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{24}, \alpha_{31}, \alpha_{32}$ и α_{34} не учитываются, потому что $x_{12}, x_{23}, x_{24}, x_{32}, x_{31}$ и x_{34} не находятся в базисе оптимального детерминированного решения.

Решение дополнительной задачи, полученное с использованием метода линейного программирования следующее:

$\alpha_{11}^* = 1; \alpha_{13}^* = -2; \alpha_{14}^* = -3; \alpha_{21}^* = -2; \alpha_{22}^* = -2; \alpha_{33}^* = 1;$
при $A^* = -18$.

В результате γ^* может быть легко найдено согласно уравнения (22):

$$\gamma^* = \frac{35 - 39}{(-18 - 10)} = 0,1429.$$

Затем находится решение нечеткой задачи на основе использования утверждения 3;

$$\begin{aligned} x_{ij} &= x_{ij}^* + \gamma^* \alpha_{ij}; \\ x_{11} &= 3 + 0,1429 (1) = 3,1429; \\ x_{13} &= 1 + 0,1429 (-2) = 0,7142; \\ x_{14} &= 4 + 0,1429 (-3) = 3,5713; \\ x_{21} &= 1 + 0,1429 (-2) = 0,7142; \\ x_{22} &= 5 + 0,1429 (-2) = 4,7142; \\ x_{23} &= 5 + 0,1429 (-2) = 5,1429. \end{aligned}$$

Для решения задачи нечеткого линейного программирования и ее частного случая — транспортной задачи может также успешно использоваться метод параметрического программирования. В этом случае транспортная задача с нечеткими ограничениями на предложение и спрос \tilde{a}_i и \tilde{b}_j и нечеткой целью сводится к задаче одновременного удовлетворения цели и ограничениям с максимально возможной степенью, т. е.

$$\max_x \mu_{\tilde{c}}(x_{ij}) = \mu_{\tilde{G}} \left[\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \right] \wedge \mu_{\tilde{c}}(x_{ij}), \quad (26)$$

где

$$\mu_{\tilde{G}} \left[\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \right]$$

— степень удовлетворения лица, принимающего решения, полученной общей стоимостью;

$$\mu_{\tilde{c}}(x_{ij})$$

— одновременное выполнение ограничений на предложение и спрос:

$$\mu_{\bar{\alpha}}(x_{ij}) = \left[\left(\bigoplus_i \right) \mu_{\bar{a}_i} \left(\sum_j x_{ij} \right) \right] \wedge \left[\left(\bigoplus_j \right) \mu_{\bar{b}_j} \left(\sum_i x_{ij} \right) \right]. \quad (27)$$

Для каждого α -уровня выполнения набора ограничений, обозначаемого $\bar{\alpha}$, $\alpha \in [0, 1]$, наиболее дешевый план транспортировки получается при $\mu_{\bar{\alpha}}(x_{ij}) \geq \bar{\alpha}$. Поэтому необходимо определить набор решений и конечной задачей является обнаружение максимизирующего решения в полученном наборе в соответствии с (26). Акцент при решении этой задачи смещается с поиска x_{ij} на поиск оптимального α , максимизирующего функцию удовлетворения цели и ограничений.

Перед началом использования представленного алгоритма необходимо задать верхнюю и нижнюю границы для каждого ограничения на предложение a_i и для каждого ограничения на спрос b на α -сечении:

$$\bar{a}_i^{\alpha} = \{x \mid \mu_{\bar{a}_i}(x) \geq \alpha\} = [a_{1i}^{\alpha}, a_{2i}^{\alpha}];$$

$$\bar{b}_j^{\alpha} = \{x \mid \mu_{\bar{b}_j}(x) \geq \alpha\} = [b_{1j}^{\alpha}, b_{2j}^{\alpha}].$$

Теперь необходимо решить следующую транспортную задачу на любом α -уровне:

$$\min_x \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}; \quad (28)$$

при

$$\sum_j x_{ij} \in [a_{1i}^{\alpha}, a_{2i}^{\alpha}], \quad i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_i x_{ij} \in [b_{1j}^{\alpha}, b_{2j}^{\alpha}]; \quad j = 1, \dots, n;$$

$$x_{ij} \geq 0; \quad \alpha \in [1 - \bar{\alpha}, 1],$$

где $\bar{\alpha}$ — максимальная степень удовлетворения набора ограничений, т.е. $\mu_{\bar{\alpha}}(x_{ij})$ удовлетворяет (28), а $\bar{\alpha}$ определяется с использованием (27):

$$\bar{\alpha} = \sup_x \mu_{\bar{\alpha}}(x_{ij}) = \sup_x \mu_{\bar{a} \cap \bar{b}}(x_{ij}), \quad (29)$$

где $\bar{a} = \sum_i \bar{a}_i$ и $\bar{b} = \sum_j \bar{b}_j$.

Приведенная транспортная задача и ее параметры для любого α -сечения могут быть выражены в табличной форме, как показано в табл. 1.

Таблица 1.

Представление нечеткой транспортной задачи в параметрической форме

Поставщики	Потребители							\geq	Запасы		
	1	2	...	n	1*	2*	...			n*	
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	c_{11}^*	c_{12}^*	...	c_{1n}^*	N	$a_1 - r\underline{a}_1$	
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	c_{21}^*	c_{22}^*	...	c_{2n}^*	N	$a_2 - r\underline{a}_2$	
...	
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	c_{m1}^*	c_{m2}^*	...	c_{mn}^*	N	$a_m - r\underline{a}_m$	
1*	c_{1*1}	c_{1*2}	...	c_{1*n}	c_{1*1}^*	c_{1*2}^*	...	c_{1*n}^*	0	$r(\underline{a}_1 + \bar{a}_1)$	
2*	c_{2*1}	c_{2*2}	...	c_{2*n}	c_{2*1}^*	c_{2*2}^*	...	c_{2*n}^*	0	$r(\underline{a}_2 + \bar{a}_2)$	
...	
m*	c_{m*1}	c_{m*2}	...	c_{m*n}	c_{m*1}^*	c_{m*2}^*	...	c_{m*n}^*	0	$r(a_m + \bar{a}_m)$	
Σ	M	M	...	0	0	0	...	0	0	$r \sum_i (b_i + \bar{b}_i)$	
Потребности	$b_1 - rb_1$	$b_2 - rb_2$...	$b_n - rb_n$	$r(b_1 - \bar{b}_1)$	$r(b_2 - \bar{b}_2)$...	$r(b_n - \bar{b}_n)$	$(\sum_i a_i - \sum_i b_i) + r(\sum_i \times \bar{a}_i + \sum_i b_i)$		

Заметим, что ограничения на спрос и предложение для первоначальных поставок и потребления являются просто нижним пределом α -сечения, а ограничения на поставки и потребление со звездочками представляют собой область, равную разности верхнего и нижнего пределов α -сечения. Обычно нечеткая транспортная задача предполагает подразделение на минимальный базовый набор ограничений

на спрос и предложения и дополнительный набор ограничений на спрос и предложения, основанный на степени нечеткости первоначальных ограничений. Решение каждой из этих задач для α -сечения удовлетворяет ограничениям на α -сечении и одновременно имеет минимальную стоимость. Следовательно, решение уравнения (26) для α -сечения имеет вид

$$\mu_{\tilde{p}}(x_{ij}(\alpha)) = \sup_x \left\{ \mu_{\tilde{G}} \left[\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}(\alpha) \right] \wedge \mu_{\tilde{c}}(x_{ij}(\alpha)) \right\}. \quad (30)$$

Поскольку $\mu_{\tilde{G}}[x_{ij}(\alpha)]$ является неявной в этой процедуре, то функция принадлежности для G может быть получена объединением каждой α с $\sup \mu_{\tilde{G}} \left[\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}(\alpha) \right]$ или $\mu_{\tilde{p}}[x_{ij}(\alpha)]$, а α -точка с каждой α -точкой на каждом α -сечении транспортной задачи. После того, как $\mu_{\tilde{G}}(\alpha)$ определена на всем диапазоне изменения α : $[1 - \tilde{\alpha}, 1]$, ее можно выразить математически и графически.

Теперь остается лишь выбрать величину α , максимизирующую одновременно $\mu(\alpha)$ и $\mu_{\tilde{p}}[x_{ij}(\alpha)]$, т. е.

$$\sup_r \mu_{\tilde{p}}[x_{ij}(\alpha)] \wedge \mu(\alpha), \quad (31)$$

где $\mu(\alpha)$ представляет собой

$$\alpha \vee \alpha \in [0, 1], \text{ а } \vee$$

оператор объединения.

Это значение α затем определяет набор решений, который одновременно удовлетворяет цели и ограничениям в максимальной степени.

Однако, решение многих транспортных задач для различных α -сечений, которые сводятся к определению $\mu_{\tilde{G}}(\alpha)$ весьма неудобно. Поэтому часто эти задачи целесообразно представлять в параметрической форме, используя следующие подстановки:

$$\alpha = 1 - r; \quad r \in [0, 1];$$

и

$$\tilde{a}_i^{1-r} = \{x \mid \mu_{\tilde{a}_i}(x) \geq 1 - r\} = [a_i - r\underline{a}_i, a_i + r\bar{a}_i];$$

$$\tilde{b}_j^{1-r} = \{x \mid \mu_{\tilde{b}_j}(x) \geq 1 - r\} = [b_j - r\underline{b}_j, b_j + r\bar{b}_j],$$

где \tilde{a} и \tilde{b} — треугольные нечеткие величины, обозначаемые $(\underline{y}, y, \bar{y})$.

Результаты параметрического преобразования приведены в табл. 1. В этом случае функция принадлежности представлена в терминах r или $\mu_{\tilde{p}} [x_{ij}(r)]$, а уравнение (31) принимает вид

$$\sup_r \{ \mu_{\tilde{p}} [x_{ij}(r)] \wedge \mu(r) \}, \quad (32)$$

где $\mu(r) = 1 - r \forall r \in [0, 1]$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Два поставщика имеют следующие нечеткие ограничения на поставки:

$$\tilde{a}_1 = (5, 10, 5); \quad \tilde{a}_2 = (5, 16, 5).$$

Три потребителя имеют следующие нечеткие ограничения на спрос

$$\tilde{b}_1 = (5, 10, 5); \quad \tilde{b}_2 = (4, 9, 4); \quad \tilde{b}_3 = (1, 1, 1).$$

Цены c_{ij} , зависящие от переменных принятия решения x_{ij} , $i = 1, 2; j = 1, 2, 3$,

следующие:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 20 & 50 & 60 \end{bmatrix}.$$

Функция принадлежности нечеткой цели линейна:

$$\mu_{\tilde{G}}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 300 \\ \frac{800 - x}{500}, & 300 \leq x \leq 800 \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (33)$$

Нечеткие общие поставки двух поставщиков:

$$\tilde{a} = (10, 26, 10).$$

Нечеткое общее потребление трех потребителей:

$$\tilde{a} = (10, 20, 10).$$

Следовательно, максимальная степень удовлетворения ограничений α имеет вид

$$\alpha = \sup_x \mu_{\tilde{a} \wedge \tilde{b}}(x_{ij}) = 0,7,$$

(рис. 3).

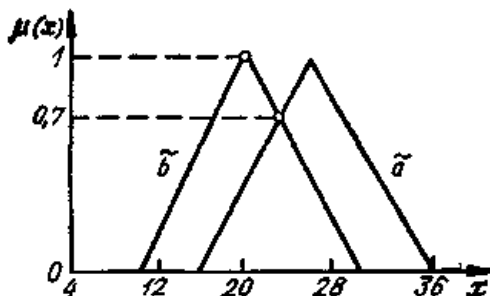


Рис. 3

При этом нижняя граница α , подлежащая исследованию, равна $1 - \bar{\alpha}$, или 0,3, а $r \in [0,3, 1]$.

Решения задачи перевозок, представленные в параметрической форме, приведены в табл. 2.

Таблица 2.

Решение нечеткой транспортной задачи в параметрической форме

Поставщики (i)	Потребители (j)			Диапазон измерения параметра
	1	2	3	
1	0	$3 + 14r$	$7 - 19r$	$0,3 \leq r \leq 0,33$
2	$10 + 5r$	$6 - 10r$	0	
1	0	$9 - 4r$	$1 - r$	$0,33 \leq r \leq 0,6$
2	$10 + 5r$	$6 - 10r$	0	
1	0	$9 - 4r$	$1 - r$	$0,6 \leq r \leq 1$
2	$16 - 5r$	0	0	

Функция принадлежности цели в терминах r , полученная путем вычисления стоимости каждого из приведенных выше решений и подстановки их в уравнение (33), следующая:

$$\mu_{\bar{p}} [x_{ij}(r)] = \begin{cases} 0,06 + 1,38r, & 0,3 \leq r \leq 0,33; \\ 0,18 + 1,02r, & 0,33 < r \leq 0,6; \\ 0,54 + 0,42r, & 0,6 < r \leq 1,0. \end{cases}$$

График этой функции и результаты решения (32) приведены на рис. 4.

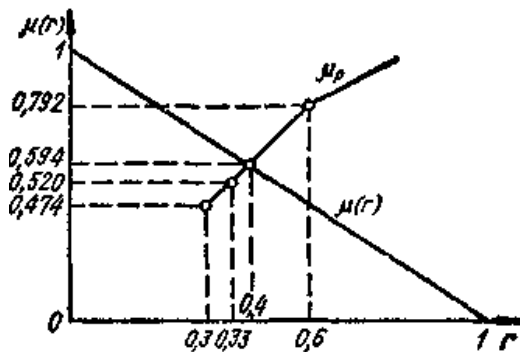


Рис. 4

Величина, которая максимизирует $\mu_p[x_{ij}(r) \wedge \mu(r)]$, равна 0,406 при экстремальном значении $\mu_p[\cdot] = 0,594$. Таким образом, решение нечеткой транспортной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} x_{12} &= 9 - 4(0,406) = 7,376; \\ x_{13} &= 1 - (0,406) = 0,595; \\ x_{21} &= 10 + 5(0,406) = 12,03; \\ x_{22} &= 6 - 10(0,406) = 1,94 \end{aligned}$$

при общей стоимости 8502,94.

МЕТОД ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В НЕЧЕТКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

При необходимости получения целочисленных значений, принимаемых вместо метода линейного программирования можно использовать метод целочисленного программирования. В этой ситуации можно указать три способа получения нечетких задач программирования.

1. Использовать «почти удовлетворяющиеся ограничения» наряду с «почти оптимальной» целевой функцией.
2. Использовать «почти целые» переменные принятия решения.
3. Комбинированный способ, объединяющий первые два.

Для каждого из способов необходимо определить функции принадлежности, используемые для представления степени нечеткости целевой функции, ограничений и переменных принимаемых решений. Так, для нечеткой целевой функции задачи функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\tilde{f}(x_i)}(x_i) = \begin{cases} f(x_i)/f(x_{NI_i}), & f(x_i) \leq a; \\ 1, & a \leq f(x_i) \leq f(x_{NI_i}); \\ \exp(-k_0(f(x_i) - f(x_{NI_i}))), & f(x_i) > f(x_{NI_i}), \end{cases} \quad (34)$$

где $f(x_i)$ — значение целевой функции при условии, что $x_i, i = 1, \dots, \dots, m$, — целые; $f(x_{NI_i})$ — нецелочисленное решение; a — минимальный пороговый уровень, устанавливаемый лицом, принимающим решение; k_0 — параметр принадлежности. Уравнение (34) называется также *условной функцией принадлежности*. Для нечетких ограничений функция принадлежности следующая:

$$\mu_{\tilde{g}_j}(x_i) = \begin{cases} 1, & g_j(x_i) \leq 0; \\ \exp[-k_j g_j(x_i)], & g_j(x_i) > 0; \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (35)$$

где $g_j(x_i) < 0, j = 1, \dots, m$, — ограничения задачи целочисленного программирования; k_j — параметр принадлежности ограничения j . Если необходимо представить функции принадлежности ограничений в линейной форме, запишем

$$\mu_{\tilde{g}_j(x_i)}(x_i) = \begin{cases} 1, & g_j(x_i) < 0; \\ -k_j g_j(x_i), & g_j(x_i) > 0; \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (36)$$

Здесь параметр принадлежности k_j может трактоваться как «коэффициент штрафа», используемый для взвешивания каждого ограничения j . Для нечетких переменных принятия решения функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\tilde{x}_i}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i = [x_i]; \\ \exp[-l_i |x_i - 0,5| x_i], & x_i \approx [x_i], \end{cases} \quad (37)$$

где x_i может быть нецелым; $[x_i]$ — целая часть x_i ; l_i — параметр принадлежности переменной принятия решения x_i .

Один из возможных методов решения этой задачи заключается в преобразовании задачи целочисленного программирования с нечеткими ограничениями, т. е. без учета нечеткой целевой функции и нечетких переменных принятия решения, при помощи функций принадлежности этих нечетких ограничений в детерминированную модель целочисленного программирования, решение которой может быть получено с использованием обычного ЛП метода линейного программирования. Обобщенная нечеткая модель задачи целочисленного программирования имеет вид:

максимизировать целевую функцию $z = f(x_i)$

$$\text{при } g_i(x_i) \leq b, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \\ x_i \geq 0, \quad x_i \text{ — целые числа.}$$

Символ \leq будем использовать для гибких или нечетких ограничений.

Нечеткие ограничения преобразуются для того, чтобы количественно определить величину нечеткости ограничения, т. е. степень нарушения строгого ограничения вида $a < b$:

$$g_j(x_i) + y_j + c_j = b_j + \Delta b_j; \\ y_j = b_j - g_j(x_i); \\ 0 \leq c_j \leq \Delta b_j; \\ x_i \text{ — целые числа,}$$

где c_j называется компенсирующей переменной и характеризует степень нарушения ограничения; Δb_j — максимальная величина, на которую может быть нарушено детерминированное ограничение.

Целевая функция модифицируется с учетом влияния изменений и переменных:

$$\max_x z = f(x_i) + \sum_{j=1}^n \gamma_j [\exp(k_j(c_j - \Delta b_j))] - 1.$$

Если функции принадлежности ограничений нелинейны (соотношения (35)), то γ_j представляют собой веса каждого ограничения, выраженные в единицах измерения целевой функции. Если же функции принадлежности ограничений линейны, то целевая функция приобретает вид

$$\max_x z = f(x_i) + \sum_{j=1}^n \rho_j (c_j - \Delta b_j). \quad (38)$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Найти решения задачи

$$\max_x z = 2x_1 + 5x_2; \quad (39)$$

при

$$2x_1 - x_2 \leq 9, \\ 2x_1 + 8x_2 \leq 31, \quad (40)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ — целые числа.}$$

Принимая $\rho_1 = \rho_2 = 1$; $\Delta b_1 = 4$, $\Delta b_2 = 4$, получаем преобразованную детерминированную задачу целочисленного программирования:

$$\max_x z = 2x_1 + 5x_2 + (c_1 - 3) + (c_2 - 4),$$

при

$$2x_1 - x_2 + y_1 + c_1 = 12; \quad 2x_1 + 8x_2 + y_2 + c_2 = 35;$$

$$y_1 = 9 - 2x_1 + x_2; \quad y_2 = 31 - 2x_1 - 8x_2;$$

$$c_1 \leq 3; \quad c_2 \leq 4;$$

$$x_1, x_2, c_1, c_2, y_1, y_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 \text{ — целые числа.}$$

О т в е т. $x_1 = 4, x_2 = 3$ при $f(x_i) = 22$. Если бы первоначальная задача целочисленного программирования имела детерминированные ограничения, то ответ был бы $x_1 = 3, x_2 = 3$ при $f(x_i) = 21$. При рассмотрении нечеткой задачи второе ограничение (40) нарушается на одну единицу (3,2 %), что приводит к росту значения целевой функции на 4,8 %.

Следующий метод решения задач нечеткого целочисленного программирования позволяет одновременно учитывать функции принадлежности цели, ограничений и переменных принятия решения. Метод основан на процедуре градиентного поиска. Направление максимального возрастания целевой функции находится с помощью метода моделирования. При попадании в недопустимую точку направление поиска изменяется с учетом ограничения, которое нарушено в наибольшей степени. В соответствии с этим методом определяется глобальная функция принадлежности, которая может быть линейной комбинацией или произведением функций принадлежности цели, ограничений и переменных принятия решений.

Определим вектор переменных принятия решений $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_m)$. Тогда

$$\mu_{\tilde{G}}(\mathbf{X}) = \mu_{\tilde{f}(\mathbf{X})}(\mathbf{X}) + \mu_{\tilde{g}_1(\mathbf{X})}(\mathbf{X}) + \mu_{\tilde{X}}(\mathbf{X}), \quad (41)$$

где $\mu_{\tilde{f}(\mathbf{X})}(\mathbf{X})$ — функция принадлежности в уравнении (34);

$$\mu_{\tilde{g}_1(\mathbf{X})}(\mathbf{X})$$

— функция принадлежности, определяемая уравнением (35) или (36), а $\mu_{\tilde{X}}(\mathbf{X})$ представляет собой модификацию уравнения (37)

$$\mu_{\tilde{X}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & x_i = [x_i]; \\ \exp[-((x_i - [x_i])/l_i x_i)^2], & x_i \approx [x_i]. \end{cases}$$

Процедура решения начинается с нахождения градиента глобальной функции принадлежности

$$\text{grad } \mu_{\tilde{G}}(\mathbf{X}) = \left[\frac{\partial \mu_{\tilde{G}}(x_1)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mu_{\tilde{G}}(x_2)}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mu_{\tilde{G}}(x_m)}{\partial x_m} \right].$$

Если X не удовлетворяет первоначальным детерминированным ограничениям $g_i(x_i)$ и $X \notin \{x \mid f(x) = a\}$, тогда этот градиент всегда существует. Как уже говорилось a представляет собой минимальный пороговый уровень функции принадлежности цели.

Определим $h_i(X)$ как нормализованное абсолютное значение компонентов вектора градиента:

$$h_i(X) = \frac{|\partial \mu_{\tilde{g}}(X)/\partial X_i|}{\sum_{i=1}^m |\partial \mu_{\tilde{g}}(X)/\partial X_i|}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Пусть N — совокупность случайных чисел r_1, r_2, \dots, r_n , равномерно распределенных на интервале $[0, 1]$. Если

$$\sum_{j=1}^{k-1} h_j(x_j) \leq r_i \leq \sum_{j=1}^{k-1} h_j(X) \quad \forall i,$$

то могут быть получены новые значения вектора X :

$$X_{k+1} = X_k + \delta_k,$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & \partial \mu_{\tilde{g}}(X)/\partial X_k < 0; \\ -1, & \partial \mu_{\tilde{g}}(X)/\partial X_k \geq 0. \end{cases}$$

Если вектор X удовлетворяет первоначальным детерминированным ограничениям и если

$$\mu_{\tilde{f}(X_i)}(X_i) = 1; \quad x \in \{x \mid f(X) = a\} \text{ и } \mu_{\tilde{g}_i(X_i)}(X_i) = 1 \quad \forall i,$$

то работа алгоритма завершается. Если полученное решение не допустимо, то новое направление определяется при помощи глобальной функции принадлежности.

Решим предыдущий пример при помощи этого метода.

Пример. Глобальная функция принадлежности имеет вид

$$\mu_{\tilde{G}}(X) = \mu_{\tilde{f}(X)}(X) + \mu_{\tilde{g}_i(X)}(X),$$

где

$$\mu_{\tilde{f}(X)}(X) = \begin{cases} f(X)/f(X_0), & f(X) \leq 18; \\ 1, & 18 \leq f(X) \leq (X_0); \\ \exp[-f(X) - f(X_0)], & f(X) > f(X_0), \end{cases}$$

где X_0 — начальный набор $\{x_i\}$.

$$\mu_1(X) = \begin{cases} 1, & g_1(X) \leq 0; \\ \exp[-(2x_1 - x_2 - 9)], & g_1(X) > 0; \end{cases}$$

$$\mu_2(Y) = \begin{cases} 1, & g_2(X) \leq 0; \\ \exp[-(2x_1 - 8x_2 - 31)], & g_2(X) > 0. \end{cases}$$

Исходные данные для расчета следующие:

$X_0 = (2,44, 5,72)$; $f(X_0) = 23,64$; стартовая точка $X_1 = (1, 1)$; $f(X_0) = 7$. Нормализованный градиент $\mu_G(X)$ в точке X равен:

$$\text{grad } \mu_{\tilde{G}}(X) = \left[\frac{2}{7}, \frac{5}{7} \right].$$

После трех итераций имеем: $X_4 = (1, 4)$; $f(X_4) = 22$.

В этой точке $g_2(X_4) > 0$ и

$$\text{grad } \mu_{\tilde{G}}(X_4) = \left[\frac{2}{10}, \frac{8}{10} \right].$$

Следующая итерация дает: $X_5 = (2, 3)$; $f(X_5) = 19$. В этой точке $\text{grad } \mu_{\tilde{G}}(X_5) = 1$ и работа алгоритма завершается.

О т в е т. $X = (2, 3)$; $f(X) = 19$.

Возможен также и третий метод решения задачи нечеткого целочисленного программирования, заключающийся в округлении оптимального нецелочисленного решения согласно логике:

$$x_i^j = \begin{cases} [x_i^0] + 1, & R_i^j \leq f_i; \\ [x_i^0], & R_i^j > f_i, \end{cases}$$

где $R_i^j \in [0, 1]$ и является равномерно распределенной случайной переменной $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, N$; n — количество переменных; N — число предлагаемых сгенерированных решений; $f_i = x_i^0 - [x_i^0]$. Считается, что наилучшим округленным решением является то, у которого самое большое значение глобальной функции принадлежности. Алгоритм решения этой задачи состоит из следующей последовательности шагов.

Шаг 1. Решить задачу без целочисленных ограничений. Если полученное решение целое, тогда работа алгоритма завершается. В противном случае принимается

$$\alpha = \sup_r \{ \mu_{\tilde{p}} [x_{ij}(r)] \wedge \mu(r) \}.$$

Шаг 2. Решить следующую задачу с использованием табличной формы с целыми ограничениями на спрос и предложения

$$\begin{aligned} \min_x z &= \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}; \\ \sum_j x_{ij} &\in [\tilde{a}_i^\alpha]; \quad i = 1, \dots, m; \\ \sum_i x_{ij} &\in [\tilde{b}_j^\alpha], \quad j = 1, \dots, n; \\ x_{ij} &\geq 0, \end{aligned}$$

где $[\tilde{a}_i^\alpha]$ — целочисленное α -сечение \tilde{a}_i ; $[\tilde{b}_j^\alpha]$ — целочисленное α -се-

чение \bar{b}_i . Целочисленное α -сечение представляет собой наибольший интервал с целочисленными границами, лежащий в α -сечении. Обозначим это решение как $\{\bar{x}_{ij}\}$.

Шаг 3. Уменьшить α до такого уровня $\bar{\alpha}$, для которого увеличивается хотя бы один интервал из нижеприведенных:

$$\{\bar{a}_i^\alpha\}, \{\bar{b}_j^\alpha\}; \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Это достигается прямым перебором при

$$\bar{\alpha} = \sup_{\alpha} \{[a_{1i}^\alpha - 1, a_{2i}^\alpha]; [a_{1i}^\alpha, a_{2i}^\alpha + 1]; [b_{1i}^\alpha - 1, b_{2i}^\alpha]; [b_{1i}^\alpha, b_{2i}^\alpha + 1]\};$$

$$i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n, \quad x - \text{целое.}$$

Если $\{\sup_r \mu_p \bar{x}_i(r) \wedge \mu(r)\}$, найденный на шаге 2, больше $\bar{\alpha}$, тогда работа алгоритма завершается, поскольку $\{\bar{x}_{ij}\}$ является решением. Если $\{\sup_r \mu_p \bar{x}_i(r) \wedge \mu(r)\} < \bar{\alpha}$, то необходимо принять $\alpha = \bar{\alpha}$ и возвратиться к шагу 2.

Для иллюстрации этого метода продолжим рассмотрение примера, приведенного в предыдущем пункте.

При оптимальном решении $\alpha = 0,594$ верхние и нижние границы для нечетких ограничений на спрос и предложения равны:

$$\{a_1^{0,594}\} = [8, 12]; \quad \{a_2^{0,594}\} = [14, 18];$$

$$\{b_1^{0,594}\} = [8, 12]; \quad \{b_2^{0,594}\} = [8, 10];$$

$$\{b_3^{0,594}\} = [1, 1].$$

Таблица решений этой задачи следующая (табл. 3).

Таблица 3.

Решения нечеткой задачи целочисленного программирования

Поставщики (i)	Потребители (j)						\bar{z}	Запасы
	1	2	3	1*	2*	3*		
1	10	20	30	10	20	30		8
2	20	50	60	20	50	60		14
1*	10	20	30	10	20	30	0	4
2*	20	50	60	20	50	60	0	4
Σ	M	M	M	0	0	0	0	6
Потребности	8	8	1	4	2	0	13	38

Результаты решения:

$$\bar{x}_{12} = 8; \bar{x}_{21} = 11; \bar{x}_{23} = 2; \bar{x}_{23} = 1.$$

Заметим, что это решение уже целочисленно, но его необходимо проверить на $\bar{\alpha}$. Значение

$$\sup_r \{ \mu_{\rho} [x_t(r)] \wedge \mu(r) \} = 0,52.$$

Затем вычисляем

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \{ a_1^{\alpha} = [7, 12], a_1^{\alpha} = [8, 13], a_2^{\alpha} = [13, 18], a_2^{\alpha} = [14, 19], \\ b_1^{\alpha} &= [7, 12], b_1^{\alpha} = [8, 13], b_2^{\alpha} = [7, 10], b_2^{\alpha} = [8, 11], b_3^{\alpha} = [0, 1], \\ b_3^{\alpha} &= [1, 2] \} = \sup_{\alpha} \{ 0,4, 0,4, 0,4, 0,4, 0,4, 0,5, 0,5, 0,0, 0,0 \} = 0,5. \end{aligned}$$

Поскольку $\bar{\alpha} = 0,52$, то настоящее решение является оптимальным и процедура завершается.

НЕЧЕТКИЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Метод динамического программирования (ДП) целесообразно использовать для моделирования задач управления и проектирования, которые сводятся к многошаговым процедурам принятия решений. Однако в условиях существенных неопределенностей, связанных с неполнотой информации об исследуемом процессе и его поведении, нечеткостью используемых данных, неоднозначностью и нечеткостью целей применения традиционного ДП-метода без его соответствующей модификации является весьма неэффективным.

Такую модификацию можно осуществить за счет замены принципа оптимальности нечетким функциональным неравенством. Конечно, в этом случае нельзя говорить об отыскании глобального оптимума задачи многошагового принятия решений. Речь может идти только о получении приемлемых с практической точки зрения результатов.

Пусть исследуемый процесс описывается уравнением состояния вида

$$X(t+1) = F[X(t), y(t), q(t), t], \quad (42)$$

где $X(t)$ — вектор состояний процесса; $y(t)$ — последовательность выбираемых решений; $q(t)$ — вектор параметров процесса; t — дискретное время $t = 0, 1, \dots, N$; $F[\cdot]$ — нелинейный оператор.

Поскольку поведение процесса, его параметры, а также последовательность принимаемых решений носят нечеткий характер, для учета этих факторов введем функцию принадлежности вида $\mu(\eta, x_0, R)$, где η — нечеткая последовательность принимаемых решений (нечеткая стратегия); x_0 — нечеткое начальное состояние; R — верхняя граница конечного состояния или результата $S(N)$.

Функция, описывающая обратное движение или функция возврата имеет вид

$$S(N) = R(x(N)) + \sum_{t=0}^{N-1} g[x(t), y(t), q(t), t], \quad (43)$$

где $g[\cdot]$ — нелинейный оператор возврата.

Задача состоит в отыскании такой последовательности выбираемых решений $y(t)$, которая бы приводила к оптимизации, в смысле заданной цели, функции возврата $S(N)$, при учете ограничений на состояния процесса и на принимаемые решения.

В описанных выше условиях неопределенности (далее будем называть эти условия нечеткой средой) цели и ограничения сформулированной задачи являются нечеткими.

Так, цель может формулироваться:

общая стоимость проектируемой технологической системы не должна намного превышать величину P ; а ограничение — объем выпускаемой продукции за период T должен составлять около z единиц.

При этом в основу метода решения нечетких ДП-задач можно положить принцип согласованности нечетких целей и ограничений.

Пусть m нечетких целей и n ограничений представлены функциями принадлежности вида

$$\mu_{\tilde{c}_j}(x), \quad j = 1, \dots, n,$$

и

$$\mu_{\tilde{g}_i}(X), \quad i = 1, \dots, m,$$

соответственно. Рассматриваемые задачи могут быть дискретными или непрерывными, но для определенности будем использовать дискретное время.

В соответствии с принципом согласованности нечетких целей и ограничений решение D представляет собой одновременное удовлетворение целей и ограничений:

$$D = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_m \cap c_1 \cap c_2 \cap \dots \cap c_n,$$

где \cap — логический оператор «И».

В терминах теории нечетких множеств это условие имеет вид

$$\mu_D(x) = \mu_{\tilde{g}_1}(x) \wedge \mu_{\tilde{g}_2}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{g}_m}(x) \wedge \mu_{\tilde{c}_1}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{c}_n}(x),$$

где \wedge — оператор пересечения нечетких величин.

На рис. 5 проиллюстрирован принцип согласованности двух нечетких целей и двух ограничений.

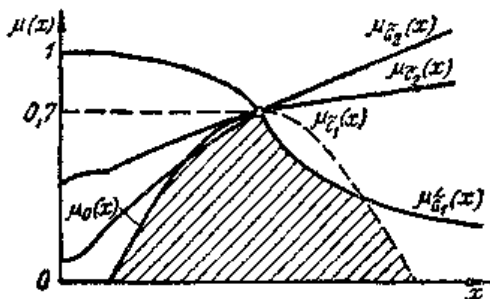


Рис. 5

Под оптимальным решением будем понимать такое значение x , которое максимизирует значение $\mu_{\tilde{D}}(x)$ или

$$D = \arg \sup_{x \in X} \mu_{\tilde{D}}(x).$$

В большинстве случаев функция принадлежности решения никогда не достигает значения 1. Этот результат очевиден, поскольку в действительности цели и ограничения конфликтуют друг с другом. В идеальном случае, если функция принадлежности решения нормальна, т. е. имеет максимальное значение равное единице, то существует значение x , которое полностью удовлетворяет целям и ограничениям. Более того, если нечеткие цели являются функциями стратегии выбора решений y , а нечеткие ограничения являются функциями состояний x , тогда положим

$$y = f(x), \tag{44}$$

а уравнение (44) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mu_D(x) = & \mu_{\tilde{G}_1}[f(x)] \wedge \mu_{\tilde{G}_2}[f(x)] \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{G}_m}[f(x)] \wedge \\ & \mu_{\tilde{c}_1}(x) \wedge \mu_{\tilde{G}_n}(x) \wedge \dots \wedge \mu_{\tilde{c}_n}(x). \end{aligned} \tag{45}$$

При изменении принципа согласованности и целей и ограничений к детерминированным или вероятностным многошаговым процессам принятия решений очевидно, что на каждом шаге t имеется нечеткое ограничение c_t , функция принадлежности которого является функцией переменной принятия решения u_t и существует единственная цель G^N связанная с состоянием процесса на последнем шаге $N - 1$. Обозначим дискретное состояние x_t , а максимизирующее решение — вектором

$$y_{..} = (u_0^M, u_1^M, \dots, u_{M-1}^M)$$

с функцией принадлежности

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{D}}(u_0^M, u_1^M, \dots, u_{N-1}^M) &= \\ &= \sup_{u_0, \dots, u_{N-1}} [\mu_0(u_0) \wedge \dots \wedge \mu_{N-2}(u_{N-2}) \wedge \\ &\wedge \mu_{N-2}(u_{N-2}) \wedge \mu_{\tilde{G}}^{N-1}(x_{N-1})] \end{aligned} \quad (46)$$

и с функцией возврата

$$\mu_{\tilde{G}^{N-1}}(x_{N-1}) = \sup_{u_{N-1}} [\mu_{N-1}(u_{N-1}) \wedge \mu_{\tilde{G}}^N(f(x_{N-1}, u_{N-1}))]. \quad (47)$$

Пусть переход от $(N - u)$ -го к $(N - 1 + 1)$ -му шагу описывается детерминированной функцией

$$f(x_{N-u+1}) = f(x_{N-u}, u_{N-u}). \quad (48)$$

Тогда функция возврата для процедуры динамического программирования описывается следующим соотношением:

$$\mu_{\tilde{G}^{N-u}}(x_{N-u}) = \sup_{u_{N-u}} [\mu(u_{N-u}) \wedge \mu_{\tilde{G}^{N-u+1}}(x_{N-u+1})]. \quad (49)$$

Для иллюстрации представленного метода рассмотрим числовой пример.

Пример. Пусть процесс принятия решения осуществляется за три шага. При этом задача имеет два состояния и две переменных принятия решения. Два возможных значения переменной принятия решения u_i равны α_1 и α_2 . Три возможных значения состояния x_i равны $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Нечеткая цель в момент времени $t = 3$ определяется следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{G}^3}(x_3) = \{0,4 | \beta_1, 0,6 | \beta_2, 1,0 | \beta_3\},$$

где вертикальная черта означает «дано». Нечеткие ограничения, исходя из переменных принятия решения u_1 и u_2 на каждой стадии $t = 0, 1, 2$ описывается соотношениями:

$$\mu_0(u_0) = \{0,3 | \alpha_1, 1,0 | \alpha_2\};$$

$$\mu_1(u_1) = \{1,0 | \alpha_1, 0,8 | \alpha_2\};$$

$$\mu_2(u_2) = \{0,5 | \alpha_1, 1,0 | \alpha_2\}.$$

Матрица переходов, определяющая в явном виде соотношение (48), имеет вид, представленный в таблице

Переменные решения, u_i	Состояния, x_i		
$x_{i+1} = f(x_i, u_i)$	β_1	β_2	β_3
α_1	β_1	β_3	β_2
α_2	β_3	β_2	β_1

Для того, чтобы начать процесс вычислений, необходимо найти $\mu_{\tilde{G}^2}(x_2)$, используя (49),

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) \sup_{u_2} [\mu_2(u_2) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(x_2)] = \sup_{u_2} [\mu_2(u_2) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(f(x_1, u_2))].$$

При $x_2 = \beta_1$

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) = \sup_{\alpha_1, \alpha_2} \{[\mu_2(\alpha_1) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_1, \alpha_1)], [\mu_2(\alpha_2) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_1, \alpha_2)]\}.$$

При $x_2 = \beta_2$

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) = \sup_{\alpha_1, \alpha_2} \{[\mu_2(\alpha_1) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_2, \alpha_1)], [\mu_2(\alpha_2) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_2, \alpha_2)]\}.$$

При $x_2 = \beta_3$

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) = \sup_{\alpha_1, \alpha_2} \{[\mu_2(\alpha_1) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_3, \alpha_1)],$$

$$[\mu_2(\alpha_2) \wedge \mu_{\tilde{G}^1}(\beta_3, \alpha_2)]\}.$$

В итоге

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) = \{\sup[\inf(0,5, 0,4), \inf(1,0, 1,0)] \times$$

$$\times |\beta_1, \sup[\inf(0,5, 1,0), \inf(1,0, 0,6)] | \beta_2,$$

$$\sup[\inf(0,5, 0,6), \inf(1,0, 0,4)] | \beta_3\}.$$

Отсюда

$$\mu_{\tilde{G}^2}(x_2) = \{1,0 | \beta_1, 0,6 | \beta_2, 0,5 | \beta_3\}.$$

Следовательно, если $x_2 = \beta_1$, то $u_2 = \alpha_2$, и если $x_2 = \beta_2$, то $u_2 = \alpha_2$, и, наконец, если $x_2 = \beta_3$, то $u_2 = \alpha_1$. Повторение процесса с целью нахождения $\mu_{\tilde{G}^1}(x_1)$ дает

$$\mu_{\tilde{G}^1}(x_1) = \{1,0 | \beta_1, 0,6 | \beta_2, 0,6 | \beta_3\},$$

что преобразуется к максимизирующему решению: если $x_1 = \beta_1$, то $u_1 = \beta_2$, и если $x_1 = \beta_2$, то $u_1 = \alpha_2$ и, наконец, если $x_1 = \beta_3$, то $u_1 = \alpha_1$.

Следующее повторение процесса для нахождения $\mu_{\tilde{G}^0}(x_0)$ дает

$$\mu_{\tilde{G}^0}(x_0) = \{0,6 | \beta_1, 0,6 | \beta_2, 1,0 | \beta_3\}.$$

Из этого соотношения получаем следующее максимизирующее решение:

$$\begin{aligned} \text{если } x_0 = \beta_1, \text{ то } u_0 = \alpha_2; \\ \text{если } x_0 = \beta_2, \text{ то } u_0 = \alpha_2; \\ \text{если } x_0 = \beta_3, \text{ то } u_0 = \alpha_2. \end{aligned}$$

Таким образом, в зависимости от начального состояния x_0 на основании матрицы переходов и функции принадлежности $\mu_{\tilde{G}}(x_t)$, можно выбрать стратегии принятия решений согласно следующей матрице:

x_0	Стратегия (u_0, u_1, u_2)
β_1	$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$
β_2	$(\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2)$
β_3	$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2)$

Однако если система стохастическая по своей природе, то переходы зависят от условных вероятностей вида

$$\mathbf{P}(x_{N-u+1} | x_{N-u}, u_{N-u}).$$

Нечеткая цель G^N в этом случае имеет вероятностную природу и выражается:

$$\mathbf{P}(\tilde{G}^N | x_{N-1}, u_{N-1}) = \sum_{x_N} \mathbf{P}(x_N | x_{N-1}, u_{N-1}) \mu_{\tilde{G}}^N(x_N). \quad (50)$$

Уравнение (50) известно так же как условное математическое ожидание принадлежности \tilde{G}^N и может быть записано в виде

$$\mathbf{E}[\mu_{\tilde{G}}^N(x_N)].$$

Уравнение (50) можно также трактовать как стохастический эквивалент уравнения (48). При использовании прямой подстановки функция возврата процесса стохастического динамического программирования имеет вид

$$\mu_{\tilde{G}^{N-u}}(x_{N-u}) = \sup_{u_{N-u}} [\mu(U_{N-u}) \wedge \mathbf{E}[\mu_{\tilde{G}^{N-u+1}}(x_{N-u+1})]],$$

где

$$\mathbf{E}[\mu_{\tilde{G}^{N-u+1}}(x_{N-u+1})] = \sum_{x_{N-u+1}} \mathbf{P}(x_N | x_{N-u}, u_{N-u}) \mu_{\tilde{G}^{N-u+1}}(x_{N-u+1}).$$

В этом случае процедура решения аналогична соответствующей детерминированной процедуре за исключением того, что вместо $\mathbf{P}_{\tilde{G}^{N-u+1}}$ производится подстановка $\mathbf{E}[\mu_{\tilde{G}^{N-u+1}}]$. Перед тем, как производится определение пересечения цели и ограничений на каждой стадии нечеткую цель необходимо нормализовать. Это особенно важ-

но, если вероятность достижения цели уменьшается из-за наличия ограничений.

Заметим, что в рассмотренной нечеткой ДП-задаче можно также использовать функцию принадлежности решения вида

$$\mu_{\bar{D}}(x_0; u_0, u_1, \dots, u_{N-1}) = \prod_{s=0}^N \mu_{\bar{G}}(x_s) \prod_{s=0}^{N-1} \mu_{\bar{G}}(u_s).$$

Мультипликативный характер этой функции подчеркивает тот факт, что с ростом количества целей и ограничений удовлетворить им всем становится сложнее. При этом формулировка нечеткой задачи в мультипликативной функции принадлежности приводит к такому же решению, как и при использовании детерминированной квадратичной формы.

МЕТОД НЕЧЕТКОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Используем методику нечеткого динамического программирования, рассмотренную в предыдущем разделе для решения задачи планирования производства технологических систем.

Пусть переменная состояния x_t обозначает наблюдаемый уровень производства в начале периода времени $(0, t)$, а переменная принятия решения u_t обозначает уровень производства в течение периода $(0, t)$. Обе переменные являются нечеткими потому, что значения, которые они принимают, зависят от нечетких установок «поддержание наилучшей стабильности производства» (для u_t) и «достижение завершающего наблюдаемого уровня, близкого к заданному» (для x_t). Целью решения рассматриваемой задачи является максимизация выполнения этих двух функций. Оценка степени максимизации производится с использованием нормализованных функций принадлежности для u_t и x_t .

При формулировке задачи таким образом достаточно применить метод нечеткого динамического программирования. Уравнение состояния для этой задачи имеет вид

$$f(x_{T-v}, u_{T-v}) = x_{T-v+1} = x_{T-v} + u_{T-v} - a_{T-v}, \quad (51)$$

где T — временной интервал для ряда периодов $(0, t)$; v — номер стадии и a_{T-v} — заданный детерминированный спрос на продукцию ТС в период $T - v$.

Рекуррентная функция возврата, оценивающая достижение целей в терминах переменных функции принадлежности имеет вид

$$\mu_{0_{T-v}}(x_{t-v}) = \sup_{u_{T-v}} \{ \mu_{T-2}(u_{1-v}) \wedge \mu_{0_{T-v+1}}(x_{T-v+1}) \} \quad (52)$$

Таким образом, задача может быть решена с использованием хорошо известной процедуры динамического программирования.

При этом необходимо применить дополнительную процедуру, заключающуюся в фиксировании числовых границ переменных состояния и принятия решений до начала выполнения итераций при использовании метода динамического программирования. Верхняя и нижняя границы u_i^B и u_i^H переменной принятия решений u , находятся непосредственно из функции принадлежности для u_i путем выполнения условия $\mu_i(u_i) > 0$. Однако для переменных состояния границы определяются не так просто. Верхняя граница находится как минимальное значение из двух возможных верхних границ. Одна из этих возможных верхних границ находится «прямым» вычислением:

$$x_i^{B,n} = x_{i-1}^{B,n} + u_{i-1}^B - a_{i-1}. \quad (53)$$

Другая возможная верхняя граница находится «обратным» вычислением:

$$x_i^{B,o} = x_{i+1}^{B,o} - u_i^H + a_i, \quad (54)$$

где B означает верхнюю, а n нижнюю границы; p — прямое; o — обратное вычисление, а t — время. Общая верхняя граница определяется как минимальная из двух возможных верхних границ или

$$x_i^B = \min_x (x_i^{B,n}, x_i^{B,o}). \quad (55)$$

Аналогично общая нижняя граница состояния представляет собой максимум из двух возможных нижних границ, определенных «прямым» и «обратным» способами:

$$\left. \begin{aligned} x_i^{H,n} &= \max_x (0, x_{i-1}^{H,n} + u_{i-1}^H - a_{i-1}); \\ x_i^{H,o} &= \max_x (0, x_{i+1}^{H,o} - u_i^B + a_i); \\ x_i^H &= \max_x (x_i^{H,n}, x_i^{H,o}). \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Целью вычисления этих границ является сужение диапазона исследуемых значений x_i и u_i при генерации таблиц состояния, осуществляемой в процессе решения задачи динамического программирования.

Определение заданных нечетких входных величин для оптимальной инвариантной во времени (долгосрочной) модели планирования производства можно осуществить с использованием подхода нечеткого динамического программирования. Эта модель обладает несколько

большой нечеткостью по сравнению с рассмотренной выше, так как в ней наблюдаемые уровни, а также уровни производства и спроса являются нечеткими. В качестве основы для задания функций принадлежности используются дискретные опорные множества. В случае, когда основы функций принадлежности становятся неприемлемыми для дальнейших вычислений необходимо использовать метод аппроксимации нечетких входных величин. Основа растет по мере того, как на ней выполняются нечеткие операции (сложение, вычитание и т. д.). На первой стадии разработки оптимальной долгосрочной стратегии производства создается таблица переходов, отражающая нечеткие уровни наблюдений (инвентаризационные уровни), уровни производства и спроса. Нечеткие инвентаризационные уровни в момент времени t выражаются:

$$\tilde{I}_{t_i} = \{\mu_{\tilde{I}_{t_i}}^-(x_1) | x_1, \mu_{\tilde{I}_{t_i}}^-(x_2) | x_2, \dots, \mu_{\tilde{I}_{t_i}}^-(x_n) | x_n\} \quad (57)$$

для $i = 1, \dots, m$ различных инвентаризационных уровней, где все \tilde{I}_{t_i} имеют общую основу $\{x_1, \dots, x_n\}$. Нечеткие уровни производства в момент времени t следующие:

$$\tilde{P}_{t_j} = \{\mu_{\tilde{P}_{t_j}}^-(u_1) | u_1, \mu_{\tilde{P}_{t_j}}^-(u_2) | u_2, \dots, \mu_{\tilde{P}_{t_j}}^-(u_q) | u_q\} \quad (58)$$

для $j = 1, \dots, z$ различных уровней производства, где все \tilde{P}_{t_j} имеют общую базу $\{u_1, u_2, \dots, u_q\}$.

Нечеткий спрос (считается одним и тем же для каждого периода времени) выражается формулой

$$\tilde{D} = \{\mu_{\tilde{D}}^-(d_1) | d_1, \mu_{\tilde{D}}^-(d_2) | d_2, \dots, \mu_{\tilde{D}}^-(d_k) | d_k\}. \quad (59)$$

Функция перехода для нечетких переменных состояния инвентаризационного уровня следующая:

$$\tilde{I}_{t+1} = C [\tilde{I}_t (+) \tilde{P}_t (-) \tilde{D}],$$

где (+) и (-) — операции нечеткого сложения и вычитания соответственно; C — константа. И, наконец, можно составить общую матрицу переходов:

\bar{p}_t	\bar{I}_t
	$\bar{I}_{t_1} \bar{I}_{t_2} \dots \bar{I}_{t_m}$
\bar{p}_{t_1} \bar{p}_{t_2} \vdots \bar{p}_{t_z}	\bar{I}_{t+t}

На следующем этапе разработки оптимальной стратегии необходимо определить нечеткую цель с ее нечеткими ограничениями. Нечеткая цель, остающаяся неизменной во все периоды времени, представляет собой определенный целевой инвентаризационный нечеткий уровень:

$$\tilde{G}_t = \{ \mu_{\tilde{G}_t}(\tilde{I}_{t_1}) | \tilde{I}_{t_1}, \mu_{\tilde{G}_t}(\tilde{I}_{t_2}) | \tilde{I}_{t_2}, \dots, \mu_{\tilde{G}_t}(\tilde{I}_{t_m}) | \tilde{I}_{t_m} \}. \quad (60)$$

Значение функции принадлежности нечеткого аргумента (например, \tilde{I}_{t_1}) может быть определено с помощью следующих способов.

Метод относительного расстояния. В основе этого метода лежит соотношение

$$\mu_{\tilde{G}}(\tilde{I}_{t_k}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m | \mu_{\tilde{G}'}(x_i) - \mu_{\tilde{I}_{t_k}}(x_i) |, \quad (61)$$

где G' — предварительно определенная нечеткая цель, основа которой такая же, как и для переменной уровня инвентаризации.

Метод равенства нечетких множеств. Этот метод основывается на следующем соотношении

$$\mu_{\tilde{G}}(\tilde{I}_{t_k}) = 1 - \max_i | \mu_{\tilde{G}'}(x_i) - \mu_{\tilde{I}_{t_k}}(x_i) |. \quad (62)$$

Нечеткое множество ограничений, зависящее от времени, образуется путем создания ограничений для каждого нечеткого уровня инвентаризации, причем основа каждого из них представляет собой набор нечетких уровней производства $j = 1, 2, \dots, z$. Таким образом,

ограничение для каждого уровня производства и инвентаризации следующее:

$$c_{i_i}(I_{i_i}) = \{\mu_{\tilde{c}_{i_i}}(\tilde{P}_{i_i}) | \tilde{P}_{i_i}, \mu_{\tilde{c}'_{i_i}}(\tilde{P}_{i_i}) | \tilde{P}'_{i_i}, \dots, \mu_{\tilde{c}'_{i_q}}(\tilde{P}'_{i_q}) | \tilde{P}'_{i_q}\}, \quad (63)$$

где $i = 1, 2, \dots, m$ — различные уровни инвентаризации.

Функция принадлежности для нечеткого аргумента находится согласно с (61) или (62)

$$\mu_{\tilde{c}'_{i_k}}(\tilde{P}'_{i_k}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 |\mu_{c'}(u_j) - \mu_{\tilde{P}'_{i_k}}(u_j)|, \quad (64)$$

где c' — заранее определенное нечеткое ограничение в терминах уровня производства по отношению к уровню инвентаризации, основа которого та же, что для уровня производства или

$$\mu_{\tilde{c}'_{i_k}}(\tilde{P}'_{i_k}) = 1 - \max_i |\mu_{c'}(u_i) - \mu_{\tilde{P}'_{i_k}}(u_i)|. \quad (65)$$

Задача теперь заключается в том, чтобы одновременно удовлетворить нечетким целям и ограничениям во все периоды времени, т. е.

$$S(\tilde{I}_0) = \{b^0 [\tilde{C}_0(\tilde{I}_0) \wedge \tilde{C}_0]\} \wedge \{b^1 [\tilde{C}_1(\tilde{I}_1) \wedge \tilde{C}_1]\} \wedge \\ \wedge \dots \wedge \{b^\infty [\tilde{C}_\infty(\tilde{I}_\infty) \wedge \tilde{G}_\infty]\} \quad (66)$$

при рассмотрении долгосрочных (или с бесконечным пределом) задач, где $b^i < 1$ — весовые коэффициенты, используемые для придания большего веса периодам времени, расположенным ближе к текущему. В терминах функций принадлежности соотношение (66) можно записать

$$\mu_s(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots | \tilde{I}_0) = \bigwedge_{i=0}^{\infty} b^i [\mu_{\tilde{c}'_i}(\tilde{P}_i) \wedge \mu_{\tilde{G}'_i}(\tilde{I}_{i+1})] = \\ = \bigwedge_{i=0}^{\infty} b^i [\mu_{\tilde{c}'_i}(\tilde{P}_i) \wedge \mu_{\tilde{G}'_i}(C(\tilde{I}_i + \tilde{P}_i - \tilde{D}))]. \quad (67)$$

Определение оптимальной инвариантной во времени стратегии, т. е. оптимальной последовательности

$$\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots,$$

сводится к нахождению решения задачи:

$$\max_{\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots} \mu_s(\tilde{P}_0, \tilde{P}_1, \dots | \tilde{I}_0). \quad (68)$$

Пусть выбор $a_\infty(\tilde{I}_i) = \tilde{P}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$, представляет собой стратегию выбора $\tilde{P} = \tilde{P}_i$ для каждого периода времени выбора начального уровня инвентаризации — \tilde{I}_i .

Пусть $a_i(\tilde{I}_i) = \tilde{P}_i$ не обязательно является инвариантной во

времени стратегией. Подстановка этого соотношения в уравнение (67) дает:

$$\mu_{\tilde{S}} [a_t(\tilde{I}) | \tilde{I}_0] = \bigwedge_{t=0}^{\infty} b^t \{ \mu_{\tilde{c}_t} [a_t(\tilde{I}_t)] \wedge \mu_{\tilde{G}} [C(\tilde{I}_t + a_t(\tilde{I}_t) - \tilde{D})] \}. \quad (69)$$

С учетом (69) уравнение (68) принимает вид

$$\max_{a_1, a_2, \dots} \mu_{\tilde{S}} [a_t(\tilde{I}) | \tilde{I}_0]. \quad (70)$$

Предполагая, что инвариантная во времени стратегия существует, рассмотрим следующий алгоритм решения задачи (70).

Шаг 1. Выбрать произвольную инвариантную во времени стратегию a_{∞} .

Шаг 2. Решить следующую систему уравнений относительно $\mu_{\tilde{S}}$:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{S}} (a_{\infty} | \tilde{I}_i) = & \{ \mu_{\tilde{c}_i} [a(\tilde{I}_i) | \tilde{I}_i] \wedge \mu_{\tilde{G}} [C(\tilde{I}_i + a(\tilde{I}_i) - \tilde{D})] \wedge \\ & \wedge b \mu_{\tilde{S}} (a_{\infty} | C(\tilde{I}_1 + a(\tilde{I}_1) - \tilde{D})) \}; \\ & i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Заметим, что решение относительно $\mu_{\tilde{S}}$ не является единственным. При этом рекомендуется использовать наибольшее возможное значение $\mu_{\tilde{S}} [a_{\infty} | C(\tilde{I} + a(\tilde{I}) - \tilde{D})]$. Следовательно, оно выпадет при использовании оператора минимума пересечения (\wedge).

Шаг 3. Улучшить стратегию подстановкой $\mu_{\tilde{S}}$ найденного на шаге 2, в следующее уравнение:

$$\begin{aligned} z' = \arg \max_z & \{ \mu_{\tilde{c}_i} [z(\tilde{I}_i) | \tilde{I}_i] \wedge \mu_{\tilde{G}} [C(\tilde{I}_i + z(\tilde{I}_i) - \tilde{D})] \wedge \\ & \wedge b \mu_{\tilde{S}} [a_{\infty} | C(\tilde{I}_i + a(\tilde{I}_i) - \tilde{D})] \}. \end{aligned}$$

Таким образом, стратегия P_i максимизирует выражение в фигурных скобках. По существу ее определение сводится к процедуре проб и ошибок.

Шаг 4. Если стратегия, определенная на шаге 3, достаточно близка к стратегии, определенной на шаге 2, алгоритм останавливается и результат, полученный на шаге 3, принимается за оптимальную инвариантную во времени стратегию. Если же различия между результатами, полученными на шагах 2 и 3, существенны, то необходимо повторить шаги 1, 2 и 3 с новой начальной стратегией.

9.6. Планирование работ системы технологических агрегатов с использованием методов нечетких множеств

Рассмотрим технологическую систему дискретного характера, состоящую из M агрегатов, которая должна выполнить n видов работ. При этом времена выполнения работ являются нечеткими величинами, а количество агрегатов, используемых для выполнения одного вида работ, а также время начала первого вида работ и время окончания последнего вида работ являются детерминированными.

Для рассматриваемой системы необходимо осуществить планирование работ, то есть определить набор временных соотношений между работами, выполняемых каждым агрегатом, а также время начала и время окончания каждой работы.

Временные соотношения между работами, выполняемыми каждым агрегатом, находятся в следующей зависимости:

операция (i, j) предшествует операции (k, l) , если

$$f_{ij} - c_{kl} < p_{ij} + p_{kl}, \quad (1)$$

где c_{mn} , f_{mn} , p_{mn} — время начала, время окончания и время выполнения работы (m, n) ; m — номер вида работ; n — номер работы. Временные соотношения для каждого агрегата могут обновляться при помощи итеративного процесса, модифицирующего c_{mn} , f_{mn} до тех пор, пока все работы будут либо упорядочены, либо удовлетворены ограничения совместимости всей совокупности работ. В результате этой процедуры происходит упорядочивание большинства работ для каждого агрегата, а остаток последовательности выполняемых работ определяется посредством простой нумерации.

При использовании нечетких времен выполнения работ p_{mn} определение временных соотношений сводится к задаче сравнения нечетких величин поскольку как правая, так и левая части соотношения (1) становятся нечеткими. При этом можно использовать следующее правило:

$$\tilde{A} > \tilde{B}, \text{ если } A - B \geq \beta + \gamma, \quad (2)$$

$$\tilde{B} > \tilde{A}, \text{ если } B - A \leq \alpha + \gamma,$$

где A и B являются детерминированными составляющими нечетких величин \tilde{A} и \tilde{B} (обычно средними значениями); $\beta + \gamma$ и $\alpha + \gamma$ — заранее определенные пороговые значения. Эти пороговые значения определяются следующим образом:

A больше \bar{B} , если $\pi(\bar{A} \leq \bar{B}) \leq 1$,

$$\pi(\bar{A} \leq \bar{B}) = \sup_{r \leftarrow s} [\mu_{\bar{A}}(r) \wedge \mu_{\bar{B}}(s)]. \quad (3)$$

Задача составления графика работ может быть представлена как задача математического программирования. Ограничения в такой задаче следующие:

ограничения на спрос

$$\sum_{k=1}^m x_{ik} \geq D_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (4)$$

ограничения на снабжение

$$\sum_{i=1}^n t_{ik} x_{ik} \leq T_k, \quad k = 1, \dots, m; \quad (5)$$

ограничения из-за наличия узких мест

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m f_{ik} x_{ik} \leq h; \quad (6)$$

$$x_{ik} \geq 0; \quad \alpha_{ik} \geq 0, \quad (7)$$

где

$$x_{ik} = \sum_{j=1}^s x_{ijk}, \quad i = 1, \dots, n.$$

— номер изделия; $j = 1, \dots, s$ — номер периода времени; $k = 1, \dots, m$ — номер агрегата.

При наличии этого набора ограничений может быть использовано несколько функций цели. Если целью является минимизация количества агрегатов, необходимых для выполнения работ, то целевая функция имеет вид:

$$\min_x \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ik} / (\alpha_{ik} + x_{ik}) \quad (8)$$

при $\alpha_{ik} \geq 0$.

Если целью является минимизация стоимости производства и наладки, то можно использовать

$$\min_x \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m c_{ik} x_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ik} / (\alpha_{ik} - x_{ik}), \quad (9)$$

где c_{ik} — стоимость производства i -го изделия на k -м агрегате; M_{ik} — стоимость наладки k -го агрегата для производства i -го изделия.

Нечеткость приведенных формулировок задач объясняется двумя способами. Во-первых, соотношение вида

$$x_{ik}/(\alpha_{ik} + x_{ik}) \quad (10)$$

имеет смысл функции принадлежности возможности обработки i -го изделия на k -м агрегате. Во-вторых, в ограничения (4), (5) вводятся коэффициенты ослабления q_i, τ_k , которые делают эти ограничения нечеткими:

$$\sum_{k=1}^m x_{ik} \geq D_i - q_i \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n t_{ik} x_{ik} \leq T_k + \tau_k \quad (12)$$

$$0 \leq q_i \leq \bar{q}_i; \quad 0 \leq \tau_k \leq \bar{\tau}_k,$$

где \bar{q}_i и $\bar{\tau}_k$ — максимальные значения коэффициентов ослабления.

При этом дополнительной целью является минимизация коэффициентов q_i, τ_k . Эти параметризованные ограничения могут интерпретироваться как линейные функции принадлежности удовлетворения параметризованным ограничениям.

Такой подход к простой интерпретации параметризованных ограничений и отдельных элементов целевых функций как функций принадлежности, связанных с их параметризованными эквивалентами, является не единственной интерпретацией, но помогает при решении сформулированной задачи, делая ограничения более гибкими.

Сформулированная задача может рассматриваться как нечеткая задача управления проектом (управление планированием работ), если либо времена выполнения работ или соотношения последовательности выполнения этих работ являются нечеткими. При разработке алгоритма управления проектом для прямого и обратного проходов в критических точках принятия решений определим время начала (ВН) и время окончания (ВО) для каждого действия v_i :

$$\tilde{ВН}_i = \max_{v_j \in p_i} [\tilde{ВН}_j (+) \tilde{A}_j], \quad (13)$$

$$\tilde{ВО}_i = \min_{v_j \in p_i} [\tilde{ВО}_j (-) \tilde{A}_j], \quad (14)$$

где v_j — обозначает j -е действие; $\tilde{ВН}_i$ — время начала действия i ; $\tilde{ВО}_i$ — время окончания действия i ; p_i — набор действий, непосредственно предшествующих действию v_i ; s_i — набор действий, непосредственно следующих за действием v_i . К сожалению, эффективность представленного метода прогрессивно ухудшается после каждой операции $\tilde{\max}$

(или $\tilde{\min}$), поскольку ВН или ВО сводятся к нечетким величинам, име-

ющим дополнительную точку разрыва. Поэтому дальнейшие манипуляции с нечеткими величинами становятся все более громоздкими. Это замечание иллюстрируется следующим примером.

Пусть проект представляется графиком событий (рис. 1).

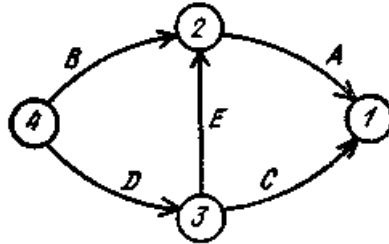


Рис. 1

Рассмотрим два варианта расчета этого проекта.

Детерминированное решение. Считая сроки действий детерминированными при $A = 3, B = 5, C = 5, D = 4$ и $E = 3$, ожидаемое время завершения выполнения проекта равно 10. Критическим является путь $(A—E—D)$, поскольку эти работы обладают нулевым запасом, что вычисляется после выполнения обратного прохода.

Нечеткое решение. Предположим теперь, что продолжительности работ (действий) A, B, C, D, E являются нечеткими величинами и представляются функциями принадлежности треугольного типа. Заметим, что точка x там, для $\mu(x) = 1$ является детерминированной продолжительностью ранее начатой работы.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \leq x \leq 3, \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\mu_B(x) = \begin{cases} x/2 - 3/2, & 3 \leq x \leq 5, \\ -x + 6, & 5 < x \leq 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mu_C(x) &= \begin{cases} x - 4, & 4 \leq x \leq 5, \\ -x/2 + 7/2, & 5 < x \leq 7, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\
 \mu_D(x) &= \begin{cases} x/3 - 1/3, & 1 \leq x \leq 4, \\ -x/2 + 6/2, & 4 < x \leq 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \\
 \mu_E(x) &= \begin{cases} x/2 - 1/2, & 1 \leq x \leq 3, \\ -x/3 + 6/3, & 3 \leq x \leq 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Времена раннего начала и окончания каждого события, полученные при прямом проходе, приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Соотношения для определения нечетких величин раннего времени начала и окончания работ

№ п/п	Операция	Раннее время начала ($\tilde{ВН}$)	Раннее время окончания ($\tilde{ВО}$)
1	A	0	$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
2	B	$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{8}{4}, & 4 < x \leq 8, \\ -\frac{x}{2} + \frac{10}{2}, & 8 < x \leq 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3	C	0	$\begin{cases} x - 4 & 4 \leq x \leq 5, \\ -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}, & 5 < x \leq 7, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
4	D	$\begin{aligned} & \max \{ \tilde{ВН}_C (+) \tilde{A}_B, \\ & \tilde{ВН}_C (+) \tilde{A}_C \} = \\ & = \begin{cases} x - 4, & 4 \leq x \leq \frac{14}{3}, \\ \frac{x}{4} - \frac{2}{4}, & \frac{1}{3} < x \leq 6, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \end{aligned}$	$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{5}{4}, & 5 \leq x \leq \frac{23}{3}, \\ \frac{x}{7} - \frac{7}{3}, & \frac{23}{3} < x \leq 10, \\ \frac{x}{6} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
5	E	$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3, \\ -x + 4, & 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{2}{4}, & 2 \leq x \leq 6, \\ -\frac{x}{4} + \frac{10}{4}, & 6 < x \leq 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

График для $\tilde{ВН}_D$ приведен на рис. 2.

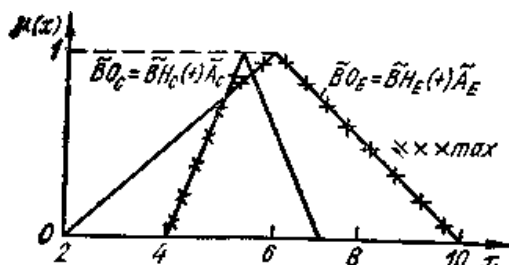


Рис. 2

Заметим, что нечеткая величина не является более треугольной. Нечеткая ожидаемая длительность работ следующая:

$$\tilde{\max} (\tilde{B}H_B (+) \tilde{A}_B, \tilde{B}H_D (+) \tilde{A}_D)$$

и представляется функцией принадлежности вида

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{5}{4}, & 5 \leq x \leq \frac{23}{3}, \\ \frac{x}{7} - \frac{3}{7}, & \frac{23}{3} < x \leq 10, \\ -\frac{x}{6} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (16)$$

Если диаграмма работ значительно больше представленной на рис. 1, то для нее при последующих вычислениях $\tilde{B}H$ необходимо учитывать дополнительный «сегмент» в функции принадлежности. В общем случае, при каждом выполнении операции $\tilde{\max}$ к функции принадлежности начала последующего события добавляется еще один сегмент $\tilde{T}_{\text{доп}}$ или отрезок. Например, для функции принадлежности вида (16) эта особенность иллюстрируется на рис. 3.

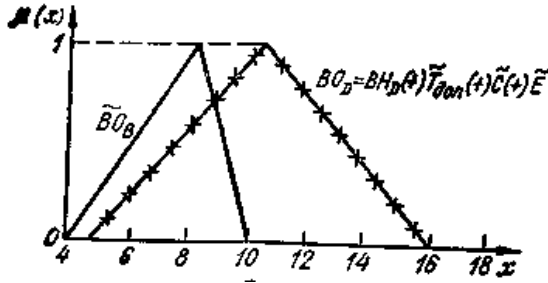


Рис. 3

Обратный проход позволяет получить значения поздних начал и окончаний, которые приведены в табл. 2.

Таблица 2.

Соотношения для определения нечетких величин позднего начала и позднего окончания работ

№ п/п	Опера ция	Позднее время начала (\tilde{BH})	Позднее время окончания (\tilde{BO})
1	A	$\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{11}{4}, & -11 \leq x - \frac{25}{3}, \\ \frac{x}{7} + \frac{13}{7}, & -\frac{25}{3} < x \leq 0, \\ -\frac{x}{13} + 1, & 0 < x \leq \frac{26}{3}, \\ -\frac{x}{10} + \frac{12}{10}, & \frac{26}{3} \leq x \leq 12, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{7}{3}, & -7 \leq x \leq -5, \\ \frac{x}{6} - 1, & -5 < x \leq 3, \\ -\frac{x}{11} + \frac{14}{11}, & 3 < x \leq \frac{31}{3}, \\ -\frac{x}{8} + \frac{13}{8}, & \frac{31}{3} < x \leq 13, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
2	B	$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{1}{5}, & -1 \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ \frac{x}{8} + \frac{13}{8}, & \frac{7}{3} < x \leq 5, \\ -\frac{x}{10} + \frac{13}{8}, & 5 < x \leq 13, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{5}{4}, & 5 \leq x \leq \frac{23}{3}, \\ \frac{x}{7} - \frac{3}{7}, & \frac{23}{3} \leq x < 10, \\ -\frac{x}{6} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Л. п/п	Операция	Позднее время начала ($\widetilde{ВН}$)	Позднее время окончания ($\widetilde{ВО}$)
3	C	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{8} + 1, \quad -8 \leq x \leq -\frac{8}{3}, \\ \frac{x}{11} + \frac{10}{11}, \quad -\frac{8}{3} < x < 1, \\ -\frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \quad 1 < x \leq 11, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} - \frac{1}{6}, \quad -1 \leq x \leq 3, \\ \frac{x}{9} - \frac{3}{9}, \quad 3 < x \leq 6, \\ -\frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \quad 6 < x \leq 15, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$
4	D	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{1}{6}, \quad -1 \leq x \leq 3, \\ \frac{x}{9} - \frac{3}{9}, \quad 3 < x \leq 6, \\ -\frac{x}{9} + \frac{15}{19}, \quad 6 < x \leq 15, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{4} - \frac{1}{4}, \quad 5 \leq x \leq \frac{23}{3}, \\ \frac{x}{7} - \frac{3}{7}, \quad \frac{23}{3} < x \leq 10, \\ -\frac{x}{6} + \frac{16}{6}, \quad 10 < x \leq 16, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$
5	E	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{7}{3}, \quad -7 \leq x \leq -5, \\ \frac{x}{6} + \frac{9}{6}, \quad -5 < x \leq 3, \\ -\frac{x}{11} + \frac{14}{11}, \quad 3 < x \leq 14, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{1}{6}, \quad -1 \leq x \leq 3, \\ \frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \quad 3 < x \leq 6, \\ -\frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \quad 6 < x \leq 15, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$

График для $\widetilde{ВО}_A$ приведен на рис. 4.

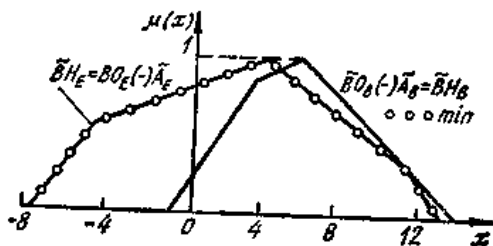


Рис. 4

Заметим, что теперь нечеткая величина состоит не из трех, а из четырех разрывных частей.

Тенденция при выполнении операций $\widetilde{\max}$ или $\widetilde{\min}$ для двух нечетких величин следующая: количество разрывных участков возрастает на 1 при выполнении каждой операции $\widetilde{\max}$ или $\widetilde{\min}$. К сожалению, после прямого и обратного проходов критические работы все еще нельзя определить. Это связано с тем, что операция нечеткого вычитания не является обратной операции нечеткого сложения и в связи с этим не может существовать работ с нулевым временем запаса. Можно также определить время начала работы $\widetilde{ВН}_i$ следующим образом:

$$\widetilde{ВН}_i = \max_{j \in P_i} \widetilde{ВО}_j, \quad (17)$$

где $ВО_j$ — времена раннего окончания для набора непосредственно предшествующих работ p_j . Времена окончания работ находятся простым сложением нечеткого времени выполнения работы с нечетким временем ее начала:

$$\widetilde{ВО}_i = \widetilde{ВН}_i (+) \bar{A}_i$$

Заметим, что эта логика соответствует ранее описанной методике прямого хода. При этом нечеткое сложение в явном виде производится последовательно для каждого α -сечения. Использование нечетких времен работ, имеющих конечное опорное множество требует применения конечного опорного нечеткого сложения в виде свертки. Кроме того, использование нечетких величин треугольного типа выглядит разумным благодаря предположению о наличии оптимистической (наиболее вероятной) и пессимистической оценок времени. Эти времена могут непосредственно соответствовать высотам треугольников, образуемым при построении треугольных нечетких величин. Однако во многих случаях время окончания работ вычислить весьма трудно в связи с трудностями осуществления обратного прохода при определении времени завершения работ с использованием (16). Если время завершения работ, которое может быть детерминированным или нечетким, не определяется уравнением (17), то нечеткие времена позднего окончания работ могут быть определены при выполнении прямого прохода (при вычислении нечетких времен раннего начала работ) Это осуществляется на основе зеркального отражения по отношению к развернутому направлению стрелок первоначального сетевого графика и использования первоначальных времен выполнения работ при учете, что время завершения работ является аддитивно инверсно.

Ограничением для этой процедуры с точки зрения использования ее только для независимо зафиксированных времен завершения работ является тот факт, что операция нечеткого вычитания не является взаимно обратной нечеткому сложению и поэтому ни у каких работ не будет обнаружено нулевого запаса времени при прямом и обратном проходах. Определение «степени критичности» каждой работы и пути при псевдообратном проходе (при учете времени раннего начала работ для зеркального отображения сети) может быть выполнено на основе теории возможности. Для этого функция принадлежности нечеткого множества критических работ представляется в виде

$$\mu_{CA}(i) = \rho_{0ss} \{(\bar{s}_i + \bar{A}_i + \bar{s}_i^-)\}, \quad (18)$$

где \bar{s}_i^- — нечеткое время начала работ для зеркального отображения (с развернутыми стрелками) сети; $\rho_{0ss} \{ \}$ — символ вычисления возможности. Функция принадлежности для нечеткого множества критических путей следующая:

$$\mu_{Cr}(p) = \rho_{0ss} \{ \bar{T}_p \text{ есть } \tilde{T} \}, \quad (19)$$

где $\tilde{T}_p = \sum_{i=1}^n \tilde{A}_i$, n — число работ на пути p .

Учитывая, что мера возможности представляет собой детерминированное число, запишем (18) и (19) в виде

$$C_{CA} = \sup_i \{ \mu_{\bar{s}_i} + \bar{A}_i + \bar{s}_i^- - (x) \wedge \mu_{\bar{T}}(x) \}; \quad (20)$$

$$C_{Cr} = \sup_p \{ \mu_{\tilde{T}_p}(x) \wedge \mu_{\tilde{T}}(x) \}.$$

Для иллюстрации вычисления степени критичности работ и критического пути, используем данные, приведенные в табл. 1. Для определения $\bar{B}H_i^-$ для всех работ необходимо выполнить псевдообратный проход. Нечеткое время завершения проекта \tilde{T} представляется следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{5}{4}, & 5 \leq x \leq \frac{23}{3}, \\ \frac{x}{7} - \frac{5}{7}, & \frac{23}{3} < x \leq 16, \\ -\frac{x}{8} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что \tilde{T} — это то же нечеткое время завершения работ, которое определяется при помощи нечеткого алгоритма при завершении прямого прохода. Однако введение ограничения, заключающегося в

выборе независимого от прямого прохода времени завершения, в этом примере несколько ослаблено.

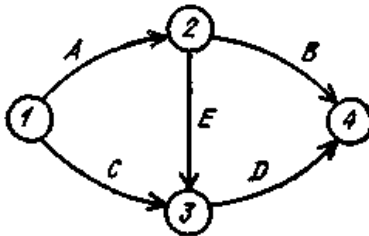


Рис. 5

Перед началом выполнения псевдообратного прохода сетевой график перерисовывается. На рис. 5 представлено зеркальное отображение (с развернутыми стрелками) первоначального сетевого графика.

Нечеткие времена работ $A—E$ являются такими же, как и величины, полученные с помощью уравнений (15).

Аддитивная инверсия нечеткого времени завершения проекта находится при помощи операции свертки и имеет вид

$$\mu_{\tilde{T}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} - \frac{16}{6}, & -16 \leq x \leq -10, \\ -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}, & -10 < x \leq \frac{23}{3}, \\ -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}, & \frac{23}{3} \leq x \leq -5, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Ранние времена начала и окончания работ были вычислены с использованием операций нечеткого сложения и оператора $\tilde{\max}$ (17) при условии, что рассматриваемой работе непосредственно предшествует более одной работы (табл. 3).

Таблица 3.

Нечеткие величины раннего начала и раннего окончания работ, полученные при псевдопрямом проходе

№ п/п	Операция	Раннее время начала ($\widetilde{ВН}^-$)	Раннее время окончания ($\widetilde{ВО}^-$)
$\widetilde{\max} \{ \widetilde{ВН}_B, \widetilde{ВН}_E \} =$			
1	A	$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{8} + \frac{13}{8}, \quad -13 \leq x \leq -\frac{31}{3}, \\ \frac{x}{11} + \frac{14}{11}, \quad -\frac{31}{3} < x \leq -3, \\ -\frac{x}{12} + \frac{9}{12}, \quad -3 < x \leq 1, \\ -\frac{x}{9} - \frac{7}{9}, \quad 1 < x \leq 7, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{10} + \frac{12}{10}, \quad 12 < x \leq -\frac{26}{3}, \\ -\frac{x}{13} + 1, \quad -\frac{12}{3} < x \leq 0, \\ -\frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \quad 0 < x \leq \frac{13}{3}, \\ -\frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \quad \frac{13}{3} < x \leq 11, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$
2	B	$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{16}{6}, \quad -16 \leq x \leq -10, \\ -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}, \quad -10 < x \leq -\frac{23}{3}, \\ -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}, \quad -\frac{23}{3} < x \leq -5, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{8} + \frac{13}{8}, \quad -13 \leq x \leq -5, \\ -\frac{x}{8} + \frac{13}{8}, \quad -13 < x \leq -\frac{7}{3}, \\ -\frac{x}{5} + \frac{1}{5}, \quad -\frac{7}{3} < x \leq 1, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$

№ п/п	Операция	Раннее время начала ($\widetilde{ВН}^-$)	Раннее время окончания ($\widetilde{ВО}^-$)
3	C	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \quad -15 \leq x \leq -6, \\ -\frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \quad -6 < x \leq -3, \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{6}, \quad -3 < x \leq 1, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \quad -11 \leq x \leq -1, \\ -\frac{x}{11} + \frac{10}{11}, \quad -1 < x \leq \frac{8}{3}, \\ -\frac{x}{8} + 1, \quad \frac{8}{3} < x \leq 8, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$
4	D	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{16}{6}, \quad -16 \leq x \leq \\ \leq -10, \\ -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}, \quad -10 < x \leq \\ \leq -\frac{23}{3}, \\ -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}, \quad -\frac{23}{3} < x \leq \\ \leq -5, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \quad -15 \leq x \leq -6, \\ -\frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \quad -6 < x \leq -3, \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{6}, \quad -3 < x \leq 1, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$
5	E	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \quad -15 \leq x \leq \\ \leq -6 \\ -\frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \quad -6 < x \leq \\ \leq -3 \\ -\frac{x}{6} + \frac{1}{6}, \quad -3 < x \leq 1 \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{11} + \frac{14}{11}, \quad -14 \leq x \leq -3, \\ -\frac{x}{12} + \frac{9}{12}, \quad -3 < x \leq 1, \\ -\frac{x}{9} + \frac{7}{9}, \quad -1 < x \leq 7, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{array} \right.$

На рис. 6 показано время начала работы $A - \widetilde{ВН}_A^-$, определенное при помощи операции нечеткого \max .

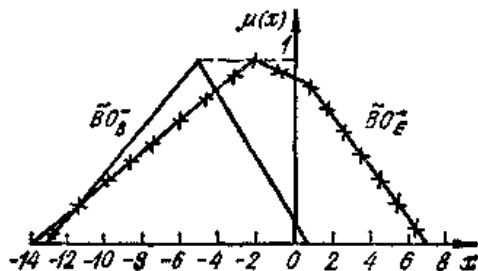


Рис. 6

Для вычисления степени критичности каждой работы необходимо использовать (20) с целью нахождения наивысшего значения пересечения функций принадлежности для $[\tilde{B}H_i(+), \tilde{A}_i(+), \tilde{B}H_i(-)]$. Данные, необходимые для вычисления степени критичности работ сведены в табл. 4.

Таблица 4.

Функции принадлежности нечетких величин

$\widetilde{BH}_1, \bar{A}_1, \widetilde{BH}_1^-, \widetilde{BH}_1^+, (+) \bar{A}_1, (+) \widetilde{BH}_1^+$

Операция	\widetilde{BH}_1	\bar{A}_1	\widetilde{BH}_1^-	$\widetilde{BH}_1^+, (+) \bar{A}_1, (+) \widetilde{BH}_1^+$
2	3	4	5	6
А	0	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, 1 \leq x \leq 3, \\ -x + 4, 3 < x \leq 4, \\ 0 \text{ в остальных случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{8} + \frac{13}{8}, -13 \leq x \leq 31, \\ -\frac{x}{11} + \frac{14}{11}, -\frac{31}{3} < x \leq -3, \\ -\frac{x}{12} + \frac{9}{12}, -3 < x \leq 1, \\ -\frac{x}{9} + \frac{7}{9}, 1 < x \leq 7, \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{10} + \frac{12}{10}, -12 \leq x \leq \frac{26}{3}, \\ \frac{x}{13} + 1, -\frac{26}{3} < x \leq 0, \\ -\frac{x}{13} + 1, 0 < x \leq \frac{13}{3}, \\ -\frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \frac{12}{13} < x \leq 11, \end{array} \right.$
			0	0
			в остальных случаях	в остальных случаях

2	B	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \\ -x + 4, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \leq x \leq 5, \\ 3 < x \leq 4, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{3}{2}, \\ -x + 6, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \leq x \leq 5, \\ 5 < x \leq 6, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} + \frac{16}{6}, \\ -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}, \\ -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -16 \leq \\ \leq x \leq 10, \\ -10 < x \leq \\ \leq -\frac{23}{3}, \\ -\frac{23}{3} < \\ < x \leq -5, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{10} + \frac{12}{10}, \\ -\frac{x}{9} + \frac{7}{9}, \\ -\frac{x}{6} + \frac{5}{6}, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -12 < \\ < x \leq -2, \\ -2 < x \leq \\ \leq 1, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$
3	C	$\left\{ \begin{array}{l} x - 4, \\ -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 < x \leq 5, \\ 5 < x \leq 7, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \\ -\frac{x}{9} + \frac{3}{9}, \\ -\frac{x}{6} - \frac{1}{6}, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -15 \leq x \leq \\ \leq -6, \\ -6 < x \leq \\ \leq -3, \\ -3 < x \leq \\ \leq 1, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \\ -\frac{x}{10} + \frac{10}{11}, \\ \frac{x}{8} + 1, \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -11 \leq \\ \leq x \leq -1, \\ -1 < x \leq \\ \leq \frac{8}{3}, \\ \frac{8}{3} < x \leq \\ \leq 5, \\ \text{в остальных} \\ \text{случаях} \end{array} \right.$		

	1	2	3	4	5		
4	D	$\left\{ \begin{array}{l} x-4, \\ \frac{x}{4}-\frac{2}{4}, \\ \frac{x}{4}+\frac{10}{4} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4 \leq x \leq 3, \\ \frac{14}{3} < x \leq 6, \\ 6 < x \leq 1, \end{array} \right\}$ <p>в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, \\ -\frac{x}{2} + \frac{6}{2}, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>1 < x ≤ 4, 4 < x ≤ 6, в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{6} - \frac{16}{6}, \\ -\frac{x}{7} - \frac{3}{7}, \\ -\frac{x}{4} - \frac{5}{4}, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>$-\frac{16}{6} < x \leq -10,$ $-\frac{3}{7} < x \leq -\frac{23}{3},$ $\frac{23}{3} < x \leq -5,$ в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{11} + 1, \\ -\frac{x}{11} + 1, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>$-11 < x \leq 0,$ $0 < x \leq 11,$ в остальных случаях</p>	
5	E	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \\ -x + 4, \\ 0 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1 < x \leq 3, \\ 3 < x \leq 6, \end{array} \right\}$ <p>в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}, \\ \frac{x}{3} + \frac{6}{3}, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>1 < x ≤ 3, 3 < x ≤ 6, в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{9} + \frac{15}{9}, \\ \frac{x}{9} - \frac{3}{9}, \\ \frac{x}{8} - \frac{1}{8}, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>$-15 < x \leq -6,$ $6 < x \leq -3,$ $-3 < x \leq 1,$ в остальных случаях</p>	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{13} + 1, \\ -\frac{x}{13} + 1, \\ -\frac{x}{10} + \frac{11}{10}, \\ 0 \end{array} \right\}$ <p>$-13 < x \leq 0,$ $0 < x \leq \frac{13}{3},$ $\frac{13}{3} < x \leq 11,$ в остальных случаях</p>	

На рис. 7—11 рассмотренная процедура приведена для каждой из пяти работ.

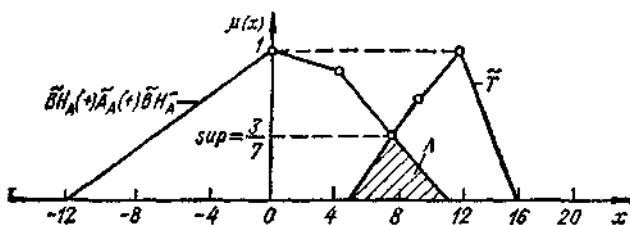


Рис. 11

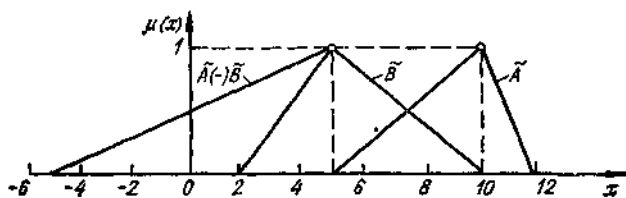


Рис. 8

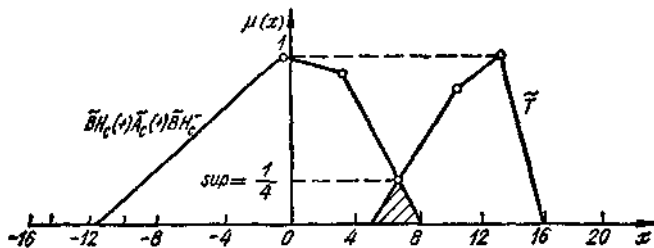


Рис. 9

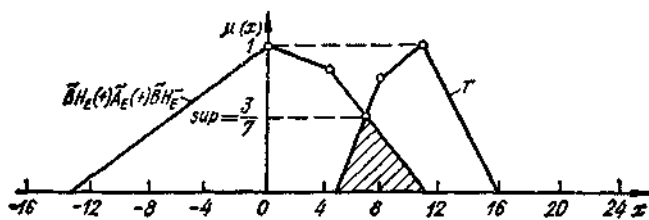


Рис. 10

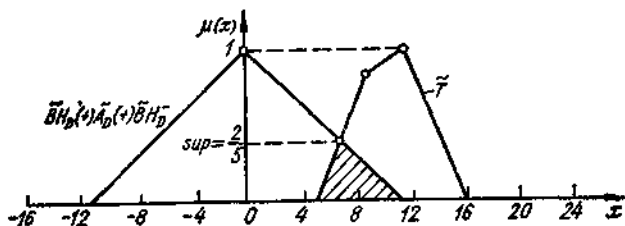


Рис. 11

В табл. 5 приведены значения степеней критичности для каждой работы.

Таблица 5.

Степень критичности работ

п/п	Операции работы	ССА (θ)
1	A	0,43
2	B	0,0
3	C	0,25
4	D	0,4
5	E	0,43

По данным табл. 5 можно сделать вывод, что наиболее критичными можно считать работы *A* и *E*, поскольку они лежат на нечетком «критичном пути».

Определение наиболее критичного пути из рассмотренного набора путей заключается в определении степени критичности для каждого пути с использованием (20). Для каждого пути необходимо определить его нечеткую длину \tilde{T}_p . В рассматриваемом примере имеется три пути: *A—B*, *A—E—D*, *C—D*. Нечеткие длины путей находятся при помощи операции нечеткого сложения длительностей работ, лежащих на нечетком пути. Результаты этой процедуры приведены в табл. 6.

Таблица 6.

Соотношения для определения нечетких значений длины пути

№ п/п	Путь	$\mu_{\tilde{T}_p}(x)$
1	A—B	$\begin{cases} \frac{x}{4} - 1, & 4 \leq x \leq 8, \\ -\frac{x}{2} + \frac{10}{2}, & 8 < x \leq 10, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
2	A—E—D	$\begin{cases} \frac{x}{7} - \frac{3}{7}, & 3 \leq x \leq 10, \\ -\frac{x}{6} + \frac{16}{6}, & 10 < x \leq 16, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$
3	C—D	$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{5}{4}, & 5 \leq x \leq 9, \\ -\frac{x}{4} + \frac{13}{4}, & 9 < x \leq 13, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$

Для вычисления степени критичности каждого пути необходимо найти наибольшее возможное значение пересечения длительности пути и времени завершения проекта \tilde{T} на основе соотношения:

$$C_{Cp} = \sup_p \{ \mu_{\tilde{T}_p}(x) \wedge \mu_{\tilde{T}}(x) \}. \quad (21)$$

Это удобно осуществить с использованием графического подхода. На рис. 12—14 показаны критичные пути A—B, A—E—D, C—D.

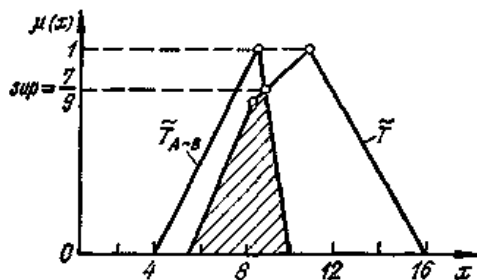


Рис. 12

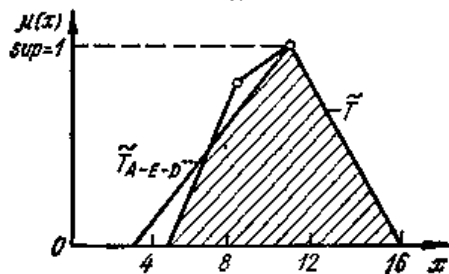


Рис. 13

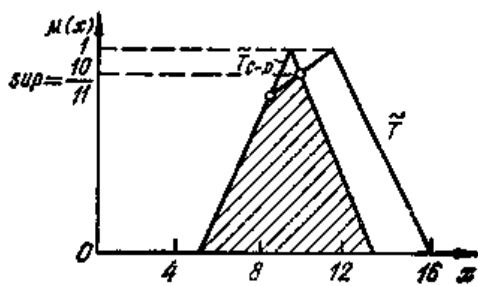


Рис. 14

Результаты вычислений сведены в табл. 7.

Таблица 7.

Степень критичности путей

№ п/п	Операции работы	C_{CP} (м)
1	$A \rightarrow B$	0,78
2	$A \rightarrow E$ $\rightarrow D$	1,0
3	$C \rightarrow D$	0,91

На основе этого анализа можно заключить, что наиболее критичным путем в рассмотренной сети является путь $A \rightarrow E \rightarrow D$,

В случае рассмотрения нечетких времен предшествующих работ рекомендуется использовать следующий нечеткий алгоритм:

$$\tilde{L}_{ij} = \min_{k \in B(i,j)} \tilde{L}_k, \quad (22)$$

где \tilde{L}_{ij} — нечеткое кратчайшее расстояние; \tilde{L}_k — нечеткая длина пути k , найденная с использованием операций нечеткого сложения; $B(i, j)$ — множество всех путей между узлами i и j .

Определение нечеткого кратчайшего расстояния между узлами i и j может быть осуществлено с помощью одного из методов нечеткой оптимизации, рассмотренных в п. 9.5.

9.7. Агрегатированное планирование работы технологических систем на основе метода нечетких множеств

Агрегатированное планирование работы технологических систем представляет собой процесс получения наилучшего соответствия между предложением и спросом на продукцию этих систем на некоторый «промежуточный» период времени (например, от двух до двенадцати месяцев). Этот тип планирования заполняет пробел между краткосрочным планированием производства (от одной до восьми недель) и долгосрочным планированием (на один год или более.) Предметом краткосрочного планирования работы технологических систем является распределение ресурсов на сроки от одного дня до недели в то время как долгосрочное планирование заключается в оценке спроса на несколько лет вперед и определении при необходимости возможных зон расширения производства.

Промежуточное планирование сводится к определению необходимых уровней ресурсов, обеспечивающих промежуточный спрос на про-

дукцию без значительных расширений объемов. Существует большое количество стратегий, которыми можно воспользоваться для агрегатированного планирования, причем, все они используют комбинации следующих пяти переменных принятия решения: мощность производства; интенсивность работы технологической системы (перепроизводство или недопроизводство); объем инвентаризационных запасов; объем предварительных заказов; общий объем договоров (контрактов).

Те из стратегий, в которых изменяется только одна из перечисленных переменных принятия решения называются чистыми стратегиями. Стратегии, в которых изменяется две или более переменные принятия решений называются смешанными.

Выбор соответствующей промежуточной стратегии осуществляется в соответствии с определенными критериями, устанавливаемыми предприятием-производителем. Эти критерии могут включать стоимость инвентаризации, затраты на производство, стоимость предварительных заказов, стоимость договоров и стоимость недопроизводства или перепроизводства. Во многих случаях критерием служит суммарная стоимость перечисленных показателей. Заметим, что все эти критерии являются стоимостными, так что основной целью производства служит минимизация одного, нескольких или всех критериев. Однако на практике все эти критерии не могут быть минимизированы одновременно. Например, минимизация затрат на производство может привести к росту стоимости предварительных заказов в том случае, если имеющийся уровень производительности труда недостаточен для удовлетворения спроса. Следовательно, при выборе критериев необходимы компромиссы. Учитывая эти компромиссы и степень важности, которую предприятие придает минимизации каждого из критериев, человек, планирующий производство, выбирает соответствующую стратегию агрегатированного планирования. При этом возможны два подхода для решения задач агрегатированного планирования. Это детерминированный подход к минимизации суммарных затрат на множестве представленных критериев с использованием эвристических знаний проектировщика и метод нечетких множеств, используемый для рассматриваемой задачи. Рассмотрим эти подходы.

МИНИМИЗАЦИЯ СУММАРНЫХ ЗАТРАТ НА МНОЖЕСТВО КРИТЕРИЕВ АГРЕГАТИРОВАННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Существует множество способов, при помощи которых можно выбрать стратегию для минимизации приведенных критериев. Некоторые

из способов основаны на процедурах проб и ошибок. Они являются эвристическими по природе и не могут гарантировать получение оптимальных решений.

Такие способы основаны на использовании коэффициентов управления, построении графиков решений, параметрическом планировании и моделировании. Другие способы заключаются в использовании математических моделей, обеспечивающих оптимальность решений при возможном использовании упрощающих допущений для облегчения математической трактовки. Примерами таких математических моделей являются формулировки задач линейного программирования, целевого программирования и линейные правила принятия решений. В частности задача линейного программирования может использоваться для выбора оптимального решения из непрерывного пространства решений. Эта модель является расширенной, так как она допускает использование предварительных заказов на продукцию и недопроизводство продукции. Целью задачи является минимизация общей стоимости производства, включающей стоимость производства продукции в основное и дополнительное время, стоимость изменения мощности производства при наличии ограничений на спрос и предложение в каждый из периодов, в течение которых производится планирование. Использование такой постановки задачи подразумевает линейность всех стоимостей. Но даже в том случае, когда стоимости линейны лишь приблизительно, задача линейного программирования работает лучше, чем метод линейных правил принятия решения (учитывающий нелинейность стоимостей).

Рассмотрим пример решения задачи агрегатированного планирования с использованием детерминированного подхода.

Пусть производство работает на удовлетворение сезонного спроса на продукцию A с предсказанием потребности в этой продукции на следующие двенадцать месяцев. Имеющаяся мощность производства может обеспечить производство 500 единиц в месяц. Каждая дополнительная единица мощности увеличивает производство на 29 единиц в месяц при затратах 1000 руб/мес. Стоимость материалов составляет 20 руб. на единицу продукции. Допускается также перепроизводство с полуторной оплатой за единицу продукции. Стоимость инвентаризации составляет 50 руб. в год на одно изделие. Изменение объема производства на 20 единиц (в сторону увеличения или уменьшения) обходится в 2000 руб. Начальный запас составляет 100 единиц продукции. Повышение объема производства может быть получено путем заключения контрактов при дополнительных затратах размером 15 руб. на единицу продукции за счет организации производства вне основного времени. Предварительные заказы

обходятся в 15 руб. на единицу продукции из-за дополнительной работы и возможной нереализации. Стоимость недоиспользованного труда составляет 50 руб. на единицу продукции и входит в ее общую стоимость. Требуется из шести предлагаемых ниже стратегий линейного программирования выбрать лучшую, минимизирующую общую стоимость затрат на производство. При этом для всех стратегий накладывается ограничение на объем производства. Он составляет 1000 единиц за расчетный период времени. Все величины взяты относительно стандартного уровня производства. Дополнительные ограничения для каждой из стратегий следующие.

1°. **Стратегия «всесторонней выгоды» («понемногу отовсюду»)**

максимальное значение перепроизводства за расчетный период составляет 10 %;

максимальное количество изделий по контрактам за расчетный период составляет 10 %;

максимальное количество предварительных заказов — 10 %

2°. **Стратегия «соответствия потребностям»**

перепроизводство не допускается;

дополнительные контракты запрещены;

максимальное количество предварительных заказов за расчетный период — 10 %.

3°. **Стратегия «запрета на контракты»**

максимальное перепроизводство за расчетный период — 10 %.

дополнительные контракты запрещены;

максимальное количество предварительных заказов за расчетный период — 10 %.

4°. **Стратегия «не ограничивающая контракты»**

максимальное перепроизводство за расчетный период— 10 %.

максимальное количество изделий, выполненных по контрактам за расчетный период равно спросу за этот же период времени;

максимальное количество предварительных заказов за расчетный период составляет 10 %.

5°. **Стратегия «перепроизводства перед сокращением»**

максимальное перепроизводство за расчетный период—10 %;

максимальное количество изделий, изготовленных по контрактам за расчетный период — 5 %;

максимальное количество предварительных заказов за расчетный период — 10 %.

6°. **Стратегия «запрета на предварительные заказы»**

максимальное перепроизводство за расчетный период — 20 %;

максимальное количество изделий, изготовленных по контрактам, соответствует спросу за расчетный период;

предварительные заказы запрещены.

Для всех приведенных стратегий месячный спрос на продукцию в последующие двенадцать месяцев представлен в табл. 8.

Таблица 8.

Спрос на продукцию в последующий год												
Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Спрос	600	700	800	700	600	500	600	700	800	900	700	600

Переменные принятия решения следующие:

x_{rt} — количество изделий, которые можно произвести в основное рабочее время при заданном уровне мощности производства за период t ;

x_{pt} — количество реально произведенных в основное рабочее время изделий за период t ;

x_{nt} — количество изделий, которое недопроизведено за период t ;

x_{bt} — количество предварительно заказанных изделий за период t ;

x_{Dt} — количество изделий, изготовленных за счет перепроизводства за период t ;

x_{st} — количество изделий, произведенных по контрактам за период t ;

I_t — объем инвентаризации в начале периода t ;

H_t — количество дополнительных изделий, произведенных в основное рабочее время за счет увеличения мощности производства за период t ;

F_t — количество недопроизведенных в основное рабочее время изделий за счет уменьшения мощности производства в период t .

Целевая функция имеет вид:

минимизировать

$$C_3 = \sum_{t=1}^n (70x_{pt} + 50x_{nt} + 15x_{bt} + 95x_{Dt} + 85x_{st} + 4,17I_t + 100H_t + 100F_t)$$

при учете следующих ограничений для $t = 1, 2, \dots, n$:

$$x_{pt} + x_{Dt} + x_{st} + x_{b(t-1)} + I_{t-1} - I_t = d_t$$

(ограничена спрос);

$$x_{rt} = x_{r(t-1)} + H_t - F_t \quad (\text{ограничение на мощность производства});$$

$x_{pt} + x_{nt} = x_{rt}$ (максимально допустимое количество изделий при недопроизводстве);

$$x_{rt} \leq M \quad (\text{ограничение на объем производства});$$

$$x_{Dt} \leq N \quad (\text{максимально допустимое пере производство});$$

$x_{bt} \leq B$ (максимально допустимые предварительные заказы);
 $x_{st} \leq s$ (максимальное количество изделий, изготовленных по контрактам);

Заметим, что все переменные принятия решений положительны. Задача решалась путем составления модели линейного программирования для каждой из приведенных шести стратегий и выполнения расчетной процедуры оптимизации при изменении переменных M , N , B и S соответственно.

Оптимизация каждой из шести стратегий в отдельности и сравнение полученных результатов позволила получить следующие оптимальные общегодовые стоимости (табл. 9).

Таблица 9.

Значения годовых затрат на производство

Стратегия	Общая годовая стоимость, C_t (руб)
1°	591 965
2°	592 762
3°	592 746
4°	591 128
5°	592 250
6°	591 751

Анализ полученных результатов показывает, что наименьшее значение годовых затрат на производство позволяет получить стратегия 4°, что позволяет выбрать ее как лучшую.

В приведенном выше примере разность между суммами затрат для низшей и высшей стратегий составляет 1634 руб. или 28 % от затрат для низшей стратегии. Следовательно, цена ошибочного решения или риска не очень велика. Однако в действительности возникает ряд практических вопросов. Например, какова чувствительность использованной модели к изменению входных величин? Что произойдет, если одна или несколько входных стоимостей будут заданы неточно? Что случится, если предсказания спроса окажутся неверными? Изменится ли решение и как? Изменится ли величина разности стоимостей затрат для альтернативных вариантов решения (т. е. возрастет ли риск получения приемлемого решения)?

При использовании любого из упомянутых в предыдущем разделе способов решения задачи агрегатированного планирования обычно считается, что входные величины модели детерминированы и легко задаются. В реальной же жизни такое предположение может не соответствовать действительности. Например, как определяется стоимость предварительного заказа. Она должна включать стоимость труда

человека, который заполняет бланк заказа, но не находит изделия, стоимость труда дополнительной «бумажной» работы по учету предварительного заказа, стоимость труда по слежению за инвентаризацией и определению момента времени когда может быть выполнен заказ и стоимость возможных потерь из-за недовольства и рекламаций клиентов, сделавших заказы. В практической деятельности не производится детальный анализ первых трех составляющих стоимости затрат, а последняя составляющая стоимости обычно не может быть выражена численно. Следовательно, в реальной действительности делаются догадки относительно указанных величин. В лучшем случае они более или менее близки в смысле определения порядка этих величин, но почти всегда субъективны и редко бывают точными. Учитывать неточность задания или нечеткость входных параметров стоимости и спроса в задаче агрегатированного планирования, их уточнение или определение можно осуществить путем использования методов анализа чувствительности или линейного программирования, включая и метод параметрического программирования. Для заданной модели такой анализ позволяет получить диапазон изменения параметров, внутри которого переменная принятия решения не изменяется. Но в приведенном выше примере одновременно сравнивается несколько моделей. В этом случае достигнуть пересечения диапазонов изменения параметров для каждой модели и выбрать лучшую стратегию на основании интуиции лица, принимающего решения относительно значений параметров может быть весьма сложно, если вообще возможно вследствие большого количества взаимосвязей между переменными принятия решения. В такой ситуации использование теории нечетких множеств для решения рассматриваемой задачи может оказаться более эффективным по сравнению с детерминированным подходом или теорией вероятностей. Процедура определения альтернатив в соответствии с их множественными свойствами для случая, когда одно или более значений (рейтингов) параметров являются нечеткими должна учитывать соотношения между альтернативами в терминах предпочтения.

При использовании же рейтингов применения (степеней удовлетворения) для сравнения альтернатив, происходят две нежелательные вещи. Во-первых, не учитываются парные предпочтения в альтернативах и, во-вторых, что самое важное — полностью игнорируется явление несравнимости альтернатив. Примером такого явления можно считать попытку сравнить очень дорогой большой автомобиль с дешевой маленькой повседневной машиной. Эти две альтернативы просто не могут сравниваться друг с другом поскольку они слишком различны. В контексте агрегатированного планирования явление несравни-

мости может принять форму попыток сравнения двух различных стратегий: одну, у которой общая стоимость состоит в основном из затрат на основное рабочее время и предварительные заказы, и другой — общая стоимость реализации которой состоит в основном из затрат, произведенных в основное рабочее время и затрат на инвентаризацию.

МНОГОЦЕЛЕВАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ С НЕЧЕТКИМИ СТОИМОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Рассмотренный выше пример планирования агрегатированного производства сведен к задаче с одной целью. Однако эту задачу можно рассматривать как многоцелевую многопараметрическую, если разделить общую стоимость на восемь составляющих ее компонентов и рассматривать каждую в отдельности. Если составляющие стоимости считаются нечеткими величинами, то для решения задачи можно применить многоцелевую процедуру расстановки при наличии нечеткости.

При использовании этой процедуры составляется два нечетких соотношения: частичное нечеткое соотношение расстановки, основанное на парном сравнении альтернатив, и нечеткое соотношение несогласия, учитывающее степень несравнимости альтернатив. Затем эти два соотношения используются совместно для получения сложного нечеткого соотношения расстановки, на основе которого получается нечеткое множество равнозначных альтернатив. Из полученного множества можно выбрать любую альтернативу, основываясь на предположении, что лучшей альтернативы не существует.

Пусть $d_i(a, b)$ обозначает частичное нечеткое соотношение расстановки. Введем термин « a превосходит b при расстановке», который в детерминированном смысле означает, что лицо, принимающее решение, предпочитает альтернативу a альтернативе b . Поэтому детерминированное частичное соотношение расстановки для атрибута $d_i(a, b)$ может быть записано в виде

$$d_i(a, b) = \begin{cases} 1, & g_i(b) - g_i(a) \leq 0, \\ 0, & g_i(b) - g_i(a) > 0, \end{cases}$$

где $g_i(b)$ и $g_i(a)$ — значения i -го атрибута для альтернатив b и a соответственно.

Однако это определение должно быть уточнено в связи с вносимой в значения альтернатив и атрибутов. Нечеткость вызывает проблемы только в том случае, если разность $|g_i(b) - g_i(a)|$ относительно мала.

Введем величину S_i , называемую максимальным порогом незначительности, за пределами которого альтернативы b и a могут сравниваться между собой с абсолютной уверенностью. Иногда этот порог является просто максимальной ошибкой при определении значения альтернатив или атрибута. В табл. 10 представлены результаты вычислений максимального порога незначительности для каждого атрибута примера решения задачи агрегатированного планирования.

Таблица 10.

Определение максимальных значений «порога незначительности»

Операция	Показатели производства	Составляющие стоимости (руб.)						
		Рабочего времени	Перепроизводства	Недопроизводства	Заказов	Контрактов	Найма	Цинкеризации
(а)	Цена изделия	70,0	95,0	50,0	15,0	85	100	4,17
(б)	Минимальное значение цены изделия	68,5	92,75	48,5	10,0	84,99	70,00	3,0
(в)	Максимальное значение цены изделия	72,5	98,75	52,5	20,0	85,1	110,0	4,5
(г) = (в) — (б)	Диапазон нечеткости	4,0	6,0	4,0	10,0	0,02	40,0	1,50
(д)	Максимальное значение по каждой альтернативе	566,993	5,7	285	1,95	76,5	17,57	6,178
(е) = (д) — (а)	Максимальное количество изделий для каждой альтернативы	8,1	60	5,7	130	900	175,7	1,482
$S_i = (е) \times (г)$	Максимальный порог незначительности	32,4	360	23	1,3	18	7,028	2,222

При этом нечеткое частичное соотношение расстановки принимает вид

$$d_i(a, b) = \begin{cases} 1, & g_i(b) - g_i(a) \leq 0; \\ 0, & g_i(b) - g_i(a) \geq s_i; \\ \left(1 - \frac{g_i(b) - g_i(a)}{S_i}\right)^l & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

При $l = 1$, $d_i(a, b)$ представляет собой обычную интерполяцию с узлами в точках 0 и S_i . Это соотношение проиллюстрировано на рис. 15.

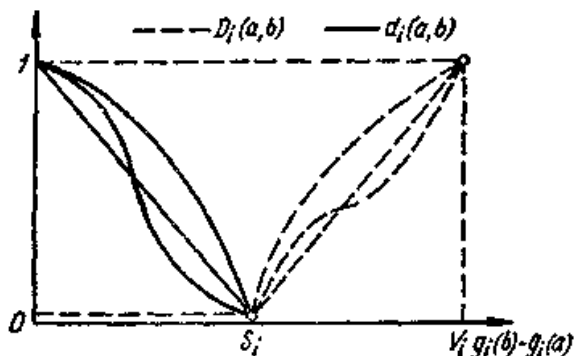


Рис. 15

Теперь введем несколько новых понятий.

Нечеткое соотношение несогласия $D_i(a, b)$. Пусть между двумя альтернативами отсутствует согласие в том случае, когда для i -го атрибута альтернатива a доминирует над альтернативой b ($g_i(a) - g_i(b) \geq S_i$) в то время, как для всех остальных $(n - 1)$ -го атрибута альтернатива b доминирует над альтернативой a . В этом случае, если i -я разность «слишком велика», то этот критерий является безусловным «диктатором» при сравнении двух альтернатив, что приводит к явлению несравнимости. Для того, чтобы «пометить» те разницы, которые «слишком большие» и таким образом указать на пару альтернатив, которые не должны сравниваться, вводится порог запрета V_i для каждого i -го атрибута. Иногда это просто наибольшая разность между двумя альтернативами для данного атрибута. В табл. 11 представлены результаты вычисления V_i для задачи агрегатированного планирования.

Таблица 11.

Определение значений «порога запрета», V_i

Операция	Показатели производства	Составляющие стоимости (руб)						
		Рабочего времени	Перепроизводства	Недопроизводства	Заказов	Контрактов	Срём	Инвентаризации
(а)	Минимальное значение по каждой альтернативе	504,0	0,0	0,0	0,0	0,0	10,0	1,25
(б)	Максимальное значение по каждой альтернативе	566,99	5,7	285	1,95	76,5	17,57	6,178
$V_i =$	Порог запрета	62,9	5,7	285	1,95	76,5	7,57	4,297
$= (а) -$								
$- (б)$								

Когда разность $g_i(b) - g_i(a) \geq V_i$, то альтернатива b ни в каком случае не может превзойти альтернативу a при расстановке, поскольку разность «слишком велика».

В детерминированном случае — соотношение несогласия $D_i(a, b)$ может быть выражено в виде

$$D_i(a, b) = \begin{cases} 1, & g_i(b) - g_i(a) \geq V_i, \\ 0, & g_i(b) - g_i(a) < V_i. \end{cases}$$

Данное соотношение можно модифицировать с учетом нечеткости альтернатив и атрибутов

$$D_i(a, b) = \begin{cases} 1, & g_i(b) - g_i(a) \geq 0, \\ 0, & g_i(b) - g_i(a) \geq S_i, \\ \left(\frac{g_i(b) - g_i(a) - S_i}{V_i - S_i} \right)', & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

При $l = 1$ $D_i(a, b)$ является просто линейной интерполяцией с узлами в точках S_i и V_i . Это соотношение также соответствует рис. 15.

Нечеткие соотношения расстановки $d(a, b)$ и согласия $C(a, b)$. Перед составлением нечеткого соотношения расстановки необходимо провести комбинирование частичных нечетких соотношений расстановки $d_i(a, b)$ по всем атрибутам для получения нечеткого соотношения согласия $C(a, b)$. Это соотношение затем комбинируется с нечетким соотношением несогласия $D_i(a, b)$ для получения нечеткого соотношения расстановки. Величина $C(a, b)$ является взвешенной суммой рангов атрибутов для каждого соотношения альтернатив. Поэтому необходимо ввести вектор весовых коэффициентов \bar{p} . Каждый весовой коэффициент p_i должен отражать относительную степень важности соответствующего ему атрибута в процессе принятия решений. Сумма весов должна быть равна 1. В задаче агрегатированного планирования, рассматриваемой в примере, приняты одинаковые веса, т. е. принимающее решение не отдает предпочтения каким-либо составляющим стоимости (атрибутам) в смысле их минимизации. В общем случае нечеткое соотношение согласия имеет вид

$$C(a, b) = \sum_{i=1}^n p_i d_i(a, b).$$

Это соотношение для рассмотренного примера агрегатированного планирования приведено в табл. 12.

Таблица 12.

Нечеткое соотношение согласия $C(a, b)$ для примера решения задачи агрегатированного планирования

a	b					
	1	2	3	4	5	6
1	1,0	0,84	0,86	0,78	0,81	0,44
2	0,69	1,0	0,77	0,54	0,74	0,29
3	0,78	0,83	1,0	0,55	0,79	0,29
4	0,86	0,86	0,86	1,0	0,86	0,49
5	0,92	0,86	0,84	0,76	1,0	0,44
6	0,86	0,86	0,86	0,86	0,86	1,0

После составления нечеткого соотношения согласия необходимо учесть возможную несравнимость альтернатив. Если при составлении нечеткого соотношения расстановки значение какого-либо соотношения несогласия атрибутов превосходит значение соответствующего нечеткого соотношения согласия, то значение нечеткого соотношения согласия должно быть значительно уменьшено из-за несравнимости альтернатив. В противном случае значение нечеткого соотношения расстановки просто равно значению нечеткого соотношения согласия. Формально

$$d(a, b) = \begin{cases} C(a, b), & C(a, b) > D_i^*(a, b) \text{ для всех } i, \\ \frac{C(a, b)}{1 - C(a, b)}, & \prod_{i^*} (1 - D_{i^*}(a, b)) \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $i^* \in i \mid D_i(a, b) > C(a, b)$.

Рассмотрим пример вычисления величины $d(5,6)$ в задаче агрегатированного планирования. Пусть

$$\begin{aligned} D_5(5, 6) &= 0,44; & D_6(5, 6) &= 0,77; \\ D_1(5, 6) &= 0,00; & D_2(5, 6) &= 0,0; \\ D_3(5, 6) &= 0,31; & D_4(5, 6) &= 0,0; \\ D_7(5, 6) &= 0,0 & D_8(5, 6) &= 0,77. \end{aligned}$$

Тогда

$$d(5, 6) = \frac{C(5, 6)}{1 - C(5, 6)} \prod_{i^*=1,7} (1 - D_{i^*}(5, 6)),$$

поскольку $D_1(5,6), D_7(5,6) > C(5,6)$.

Это означает, что альтернативы 5 и 6 довольно несогласованы по атрибутам 1 и 7 и не должны сравниваться между собой. Поэтому нечеткое соотношение расстановки составляется при существенном уменьшении нечеткого соотношения согласия

$$d(5, 6) = \frac{0,44}{1 - 0,44} (1 - 0,77) (1 - 0,77) = 0,04,$$

Полностью нечеткое соотношение расстановки приведено в табл. 13.

Таблица 13.

Нечеткое соотношение расстановки $d(a, b)$

	b					
	1	2	3	4	5	6
1	1,0	0,84	0,86	0,78	0,81	0,02
2	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0
4	0,86	0,86	0,86	1,0	0,86	0,49
5	0,92	0,86	0,84	0,76	1,0	0,04
6	0,86	0,0	0,0	0,86	0,68	1,0

Нечеткое множество недоминирующих альтернатив $\mu^{ND}(a^*)$.

Классическая теория нечетких множеств может быть использована для определения нечеткого множества недоминирующих альтернатив. При этом сначала вычисляется мера доминируемости или интенсивности расстановки альтернатив:

$$d^D(a, b) = \begin{cases} d(a, b) - d(b, a), & d(a, b) > d(b, a); \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нечеткое соотношение доминируемости, определяемое функцией принадлежности $d^D(a, b) \in [0, 1]$, обозначает степень доминирования альтернативы a над альтернативой b . Функция принадлежности соотношения доминируемости для примера агрегатированного планирования представлена в табл. 14.

Таблица 14

Нечеткое соотношение доминируемости, $d^D(a, b)$

a	b					
	1	2	3	4	5	6
1	0,0	0,84	0,86	0,0	0,0	0,0
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
4	0,08	0,86	0,86	0,0	0,1	0,0
5	0,11	0,86	0,84	0,0	0,0	0,0
6	0,84	0,0	0,0	0,37	0,64	0,0

Мера недоминируемости $D^{ND}(a, b)$. Эта величина определяется так

$$d^{ND} = 1 - d^D(a, b).$$

Функция принадлежности меры недоминируемости означает степень, с которой альтернатива a не доминирует над альтернативой b . Здесь 1 означает полное отсутствие доминируемости альтернативы a над альтернативой b (т. е. альтернатива b доминирует над альтернативой a). Значения меры недоминируемости для рассматриваемого примера приведено в табл. 15.

Таблица 15.

Нечеткое соотношение недоминируемости, $d^{ND}(a, b)$

a	b					
	1	2	3	4	5	6
1	1,0	0,16	0,14	1,0	1,0	1,0
2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
3	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
4	0,92	0,14	0,14	1,0	0,9	1,0
5	0,89	0,14	0,16	1,0	1,0	1,0
6	0,16	1,0	1,0	0,63	0,36	1,0

Теперь можно сделать вывод о том, какие альтернативы имеют наименьшие меры недоминируемости и, таким образом, являются наилучшими. Каждая строка (для фиксированного a) в матрице $d^{ND}(a, b)$ может рассматриваться как нечеткое множество альтернатив, которые имеют определенные значения меры недоминируемости по отношению к альтернативе a .

Теперь, чтобы для каждой альтернативы найти меру недоминируемости (с которой над альтернативой b не доминируют все альтернативы a), необходимо определить нечеткое пересечение упомянутых выше нечетких множеств этой строки с каждой альтернативой b :

$$\mu^{ND}(b) = \min_a d^{ND}(a, b).$$

Нечеткое пересечение для рассматриваемого примера следующее: $H^{ND}(b) = (0,16, 0,14, 0,14, 0,63, 0,36, 1,00)$ — для альтернатив 1-6 соответственно.

Наконец, чтобы найти альтернативу b^* с минимальной мерой недоминируемости, необходимо определить максимальное значение $\mu^{ND}(b)$:

$$\mu^{ND}(b^*) = \max_b \mu^{ND}(b).$$

Для рассматриваемого примера наиболее недоминированной альтернативой является шестая стратегия «запрета на предварительные заказы», поскольку $\mu^{ND}(b^*) = 1,00$ соответствует стратегии 6°. И, наконец, несмотря на громоздкость процедуры, требуется проанализировать шесть различных векторов весовых коэффициентов и при условии, что величина разности между значениями нечеткого пересечения изменяется, определить последующие альтернативы. Для ранее рассмотренного примера такими альтернативами являются:

первый выбор: стратегия 6°;

второй выбор: стратегия 4°;

третий выбор: стратегия 5°.

Очевидно, что возможность заключения контрактов снижает стоимость агрегатированного планирования. Таким образом, применение нечеткого подхода позволило определить предпочтительное решение из группы относительно мало отличающихся друг от друга альтернатив (при детерминированном решении) на основе стоимостного критерия. Такое применение метода нечетких множеств в отличие от других рассмотренных в настоящей главе приложений, основано на использовании нечетких целей (понятий пороговых значений). Этот косвенный подход более прост и гибок. Другими словами, использование специфических нечетких множеств для моделирования нечетких величин может применяться для решения различных детерминированных задач.

Литература

1. Кононюк А. Ю. Вища математика, книга 1.- Київ: КНТ, 2009.- 580 с.
2. Кононюк А. Ю. Вища математика, книга 2.- Київ: КНТ, 2009.- 784 с.
3. Кононюк А. Е. Дискретаная математика, кн. 1, ч.1- Київ: Освіта України, 2010.- 452 с.
4. Кононюк А. Е. Дискретаная математика, кн. 1, ч.2 - Київ: Освіта України, 2010.- 464 с.
5. Кононюк А. Е. Дискретаная математика, кн. 2, ч.1- Київ: Освіта України, 2011.- 448 с.
6. Кононюк А. Е. Дискретаная математика, кн. 2, ч.2- Київ: Освіта України, 2010.- 472 с.
7. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - Київ: Техніка, 1975. – 768 с.
8. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторый анализ и начала тензорного исчисления. –Харьков: Издательство Харьковского университета, 1972. – 256 с.
9. Згуровский М.З. Интегрированные системы оптимального управления и проектирования. – Киев: Вища школа, 1990. - 452 с.

Научно-практическое издание

Кононюк Анатолий Ефимович

Обобщенная теория моделирования

Книга 3

**Величины и размерности
как параметры моделей**

Часть 1

Математические величины

Авторская редакция

Подписано в печать 25.09.2012 г.

Формат 60x84/16.

Усл. печ. л. 26,5. Тираж 300 экз.

Издатель и изготовитель:

Издательство «Освита Украины»

04214, г. Киев, ул. Героев Днепра, 63, к. 40

Свидетельство о внесении в Государственный реестр
издателей ДК №1957 от 23.04.2009 г.

Тел./факс (044) 411-4397; 237-5992

E-mail: osvita2005@ukr.net, www.rambook.ru

Издательство «Освита Украины» приглашает
авторов к сотрудничеству по выпуску изданий,
касающихся вопросов управления, модернизации,
инновационных процессов, технологий, методических
и методологических аспектов образования
и учебного процесса в высших учебных заведениях.