Парадигма развития науки

Методологическое обеспечение

А. Е. Кононюк

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ МАТЕМАТИКА

Книга 11

Автоматы

Часть 3

Вероятностные и нечеткие автоматы

Киев
«Освіта України»
2017

УДК   51 (075.8)
ББК   В161.я7
К213

Рецензенты:

В. В. Довгай — к-т физ.-мат. наук, доц. (Национальный тех— нический университет «КПІ»);

В. В. Гавриленко — д-р физ.-мат. наук, проф.,

О. П. Будя — к-т техн. наук, доц. (Киевский университет эко— номики, туризма и права);

Н. К. Печурин — д-р техн. наук, проф. (Национальный ави— ационный университет).

Кононюк А. Е.
К213 Дискретно-непрерывная математика. (Автоматы). — В 12-и кн. Кн. 11, Ч.3— К.: 2017. —408 с.

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-11 (книга 11, ч.3)

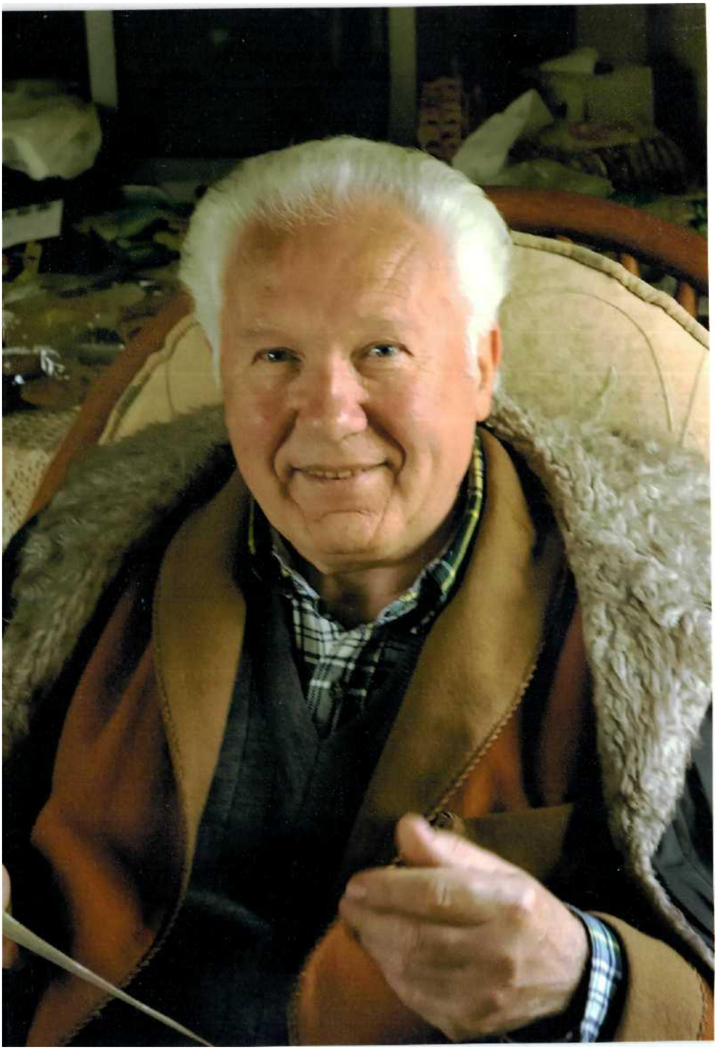
Многотомная работа содержит систематическое изложение математических дисциплин, исспользуемых при моделировании и исследованиях математических моделей систем.

В работе излагаются основы теории множеств, отношений, поверхностей, пространств, алгебраических систем, матриц, графов, математической логики, теории вероятностей и массового обслуживания, теории формальных грамматик и автоматов, теории алгоритмов, которые в совокупности образуют единную методолгически взамосвязанную математическую систему «Дискретно-непрерывная математика».

Для бакалавров, специалистов, магистров, аспирантов, докторантов и просто ученых и специалистов всех специальностей.

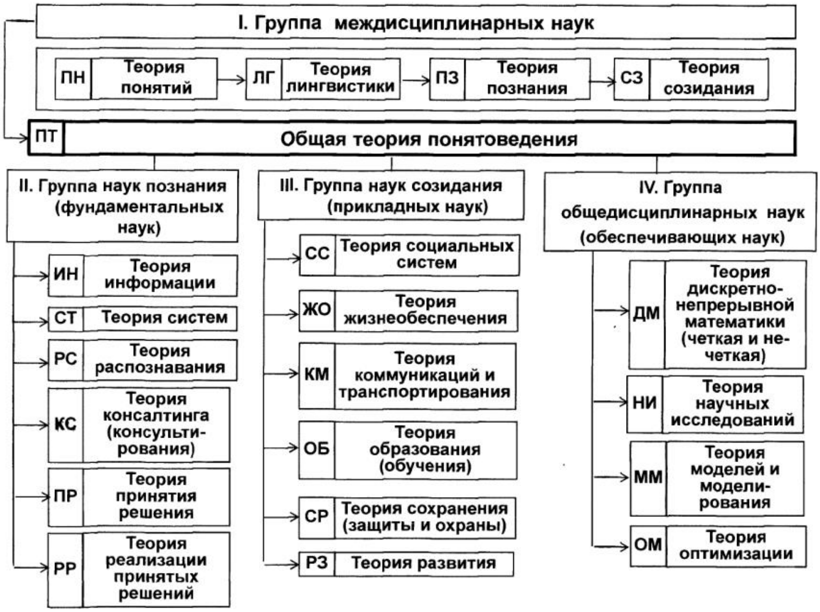
УДК 51 (075.8)
ББК В161.я7

ISBN 978-966-373-693-8 (многотомное издание)
ISBN 978-966-373-694-11 (книга 11, ч. 3)

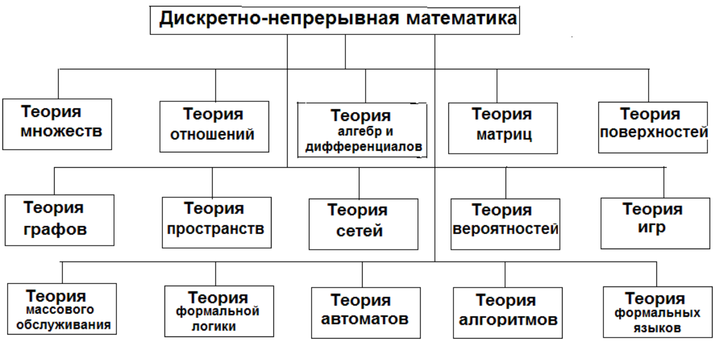


Кононюк Анатолий Ефимович

Структурная схема развивающейся панмедийной системы наук



Структура
открытой развивающейся панмедийной системы математических наук (дисциплин)
"Дискретно-непрерывная математика"



Оглавление

Введение..9
1. Основные понятия……………………………………………12
1.1 Случайные функции.. 12
1.1.1 Понятие случайной функции.. 12
1.1.2 Матрицы, соответствующие конечным случайным функциям……………………………………………13
1.1.3 Вероятностные распределения....... ………………………..13
1.2 Строки и функции на строках..14
1.2.1 Строки и связанные с ними понятия .... ……………………14
1.2.2 Функции на строках.. 14
1.3 Вероятностные автоматы……………………………………15
1.3.1.Способы задания вероятностных автоматов……………………...16
1.3.2. Анализ вероятностного автомата. 18
1.3.3. Вероятности появления выходных букв………………………19
1.3.4. Автоматные каналы………………………………………..21
1.3.5. Конечно-автоматные каналы……………………………..29
1.4 Автоматы Мили и Мура...43
1.4.1. Автомат Мили...43
1.4.2 Понятие автомата Мура 44
1.4.3 Достижимые состояния и реакция автомата…………………..47
1.4.4 Достижимая часть автомата...47
1.5. Линейные автоматы 48
2.Вероятностные автоматы и вероятностные реакции…………………49
2.1 Вероятностные автоматы...49
2.1.1 Понятие вероятностного автомата..... ……………………..49
2.1.2 Матрицы, связанные с вероятностными автоматами…………50
2.1.3. Вероятностные автоматы Мили...51
2.1.3.1. Дискретно стохастические модели. (Р-схемы)………………..51
2.1.3.2. Вероятностныы автомат Мили...51
2.1.4. Вероятностные автоматы Мура…………………………………52
2.1.4.1. Дискретно стохастические модели, (р- схемы)………………..52
2.1.4.2. Вероятностный автомат Мура……………………………………..53
2.1.5 Реакция вероятностного автомата...53
2.1.6 Базисные матрицы вероятностных автоматов ………………..55
2.1.7 Матричные обозначения 57
2.1.8 Эквивалентность вероятностных автоматов…………………..58
2.2 Редукция вероятностных автоматов........ ………………………..58
2.2.1 Выделение достижимой части....... …………………………….58
2.2.2 Удаление выпуклых комбинаций ..... ………………………..59

2.2.3 Метод распознавания выпуклых комбинаций состояний..........61
2.3 Вероятностные реакции..........62
2.3.1 Понятие вероятностной реакции..........62
2.3.2 Остаточные вероятностные реакции..........63
2.3.3 Реализуемость вероятностных реакций 67
2.4 Случайные последовательности..........71
2.4.1 Понятие случайной последовательности 71
2.4.2 Остаточные случайные последовательности..........71
2.4.3 Парные случайные последовательности 72
2.4.4 Автоматные преобразования случайных последовательностей...73
2.4.5 Цепи Маркова..........75
3 Вероятностные автоматы Мура с числовым выходом..........77
3.1 Вероятностные автоматы Мили и Мура 77
3.2 Вероятностные автоматы Мура с числовым выходом..........79
3.2.1 Понятие вероятностного автомата Мура с числовым выходом..........79
3.2.2 Усреднённые реакции..........79
3.2.3 Усреднённые базисные матрицы..........80
3.2.4 Редукция вероятностных автоматов Мура с числовым выходом..........81
3.2.5 Соглашение..........83
3.3 Вероятностная реализуемость функций на строках..........83
3.4 Связь между линейно-автоматными функциями и реакциями вероятностных автоматов..........86
3.5 Эргодичные автоматы..........88
3.5.1 Вспомогательные понятия и результаты 88
3.5.2 Понятие эргодичного вероятностного автомата и критерий эргодичности..........91
3.6 Устойчивость вероятностных автоматов..........92
3.6.1 Вспомогательные утверждения 92
3.6.2 Понятие устойчивости вероятностных автоматов 95
4 Вероятностные языки..........99
4.1 Понятие вероятностного языка..........99
4.2 Свойства вероятностных языков..........100
4.3 Языки, представимые вероятностными автоматами общего вида..........102
4.4 Регулярность вероятностных языков..........103
4.4.1 Понятие регулярного языка..........103
4.4.2 Изолированные точки сечения..........104
4.5 Дефинитные языки..........108
4.6 Языки, представимые линейными автоматами 109

4.7. Свойства замкнутости классов рациональных, и положительно-рациональных словарных функций……………………………………112
4.8. Конечно-автоматная представимость словарных функций……...123
4.9. Определение представимости языков……………………………..133
4.10. Алгебраические свойства класса стохастических языков……...141
4.11. Примеры непредставимых языков. Соотношения представимостей…………………………………………………………...150
4.12. Конечно-автоматная представимость языков…………………...164
4.13. Рациональные вероятностные автоматы………………………...176
4.14. Стохастические языки в однобуквенном алфавите. Однородные стохастические языки………………………………185
5 Алгебраические вопросы теории линейных автоматов…………..204
5.1 Алгебраические свойства множества функций на строках…….204
5.2 Операции на линейных автоматах...207
5.3 Алгебраические свойства множества линейно-автоматных функций.................. ………………………………………………210
5.4 Линейные пространства, связанные с линейно-автоматными функциями............... ……………………………………………..216
5.5 Счетномерные линейные автоматы и их языки . . …………..222
5.5.1 Вспомогательные понятия......... ……………………………222
5.5.2 Понятие счетномерного линейного автомата и связанные с ним понятия....... ……………………………………..223
5.5.3 Свойства счетномерных линейных автоматов ………………224
5.6 Достижимость и различимость в линейных автоматах…………227
5.6.1 Достижимость................ ……………………………………..227
5.6.2 Различимость .... ………………………………...227
5.7 Реализация функций на строках линейными автоматами……...228
5.8. О сравнительной сложности вероятностных и детерминированных автоматов……………………………………...230
6. Некоторые проблемы теории вероятностных автоматов…………238
6.1. Проблема редукции…………………………………………...238
6.2. Проблема идентификации…………………………………….249
6.3. Проблема устойчивости……………………………………….265
6. 4. Представимость последовательностей пар случайных кодов…..274
7. Структурная теория вероятностных автоматов……………………285
7.1. Беспетельная декомпозиция…………………………………..285
7. 2. Декомпозиция с расщеплением состояний……………………298
7.3. Декомпозиция с выделением случайности. Задача синтеза имплицирующего вектора………………………………………310
7.4. Алгоритм декомпозиции вероятностных конечных автоматов…326
8. Нечеткие грамматики и автоматы…………………………………..337
8.1. Нечеткий язык и его свойства……………………………………..337

8.2. Нечеткие грамматики и их свойства……………………………340
8.3. Порождение языков нечеткими грамматиками…………………..350
8.4. Описание нечетких регулярных языков
регулярными выражениями………………………………………….352
8.5. Определение нечеткого автомата…………………………………353
8.6. Распознавание языков нечеткими автоматами………………....357
8.7. Нечеткие регулярные грамматики и автоматы…………………...358
8.8. Реализация нечеткими автоматами временных соотношений…..361
8.8.1. Нечеткая логика
времени……………………………………………………………..363
8.8.2. Секвенциальные автоматы……………………………………364
8.8.3. Нечеткие секвенциальные автоматы…………………………365
8.9. Обучающийся нечеткий автомат……………………………….370
8.10. Приведение конечного нечеткого автомата к нечеткой
комбинационной схемы………………………………………………...387
Литература………………………………………………………………408

Введение

Понятие **вероятностного автомата (ВА)** впервые было сформулировано в 1963 г. М. Рабином. Данное понятие возникло как синтез понятий конечного детерминированного автомата и цепи Маркова и было предназначено для построения математических моделей динамических систем, в которых присутствует неопределённость, описываемая статистическими закономерностями. Эта неопределённость связана:

- с неточностью знаний о состояниях, в которых моделируемые системы находятся в процессе своего функционирования, и
- с недетерминированностью правил изменения этих состояний.

Неопределённость в ВА может быть вызвана различными причинами, которые подразделяются на два класса.

1. Причины из первого класса связаны с природой системы, моделируемой вероятностным автоматом. К ним относятся:

- влияние случайных факторов на функционирование системы, например: случайные сбои компонентов системы или отказы в их работе, случайное изменение условий функционирования анализируемой системы, случайность потока заявок в системе массового обслуживания и т. п.;
- несовершенство (или невозможность) точного измерения состояний этой системы.

2. Второй класс причин связан с преднамеренным внесением неточности и неопределённости в математические модели анализируемых систем. Это делается в тех случаях, когда точные модели анализируемых систем имеют неприемлемо высокую сложность и проведение анализа поведения таких систем возможно только с использованием их упрощённых моделей, в которых некоторые компоненты состояний этих систем игнорируются. В частности, анализ поведения сложной программной системы (например, операционной системы компьютера) в большинстве случаев возможен только с использованием таких упрощённых математических моделей этих систем, в которых принимаются во внимание значения лишь некоторых программных переменных, от которых существенно зависит поведение анализируемой программной системы.

Как правило, моделирование систем при помощи ВА производится:

- либо с целью анализа свойств этих систем (к числу которых относятся, например, корректность, безопасность, надёжность, устойчивость функционирования в непредусмотренных ситуациях и т. д.),

• либо с целью вычисления различных количественных характеристик анализируемых систем, среди которых могут быть, например, следующие:
— частота выполнения тех или иных действий или переходов в анализируемых системах,
— вероятность отказа компонентов анализируемых систем,
— вероятность вторжения злоумышленника в компьютерную сеть,
— математическое ожидание времени отклика веб-сервиса.

Первоначальное понятие В А, введённое М. Рабином, было предназначено главным образом для изучения вопросов **представимости регулярных языков вероятностными автоматами**. Затем оно было обобщено до такого понятия, которое позволило моделировать **вероятностные преобразователи информации**.

Определение В А в общей форме было введено независимо в работах Дж. Карлайла , Р. Г. Бухараева и П. Штарке .

С начала возникновения понятия ВА исследовательская деятельность в этой области отличалась высокой активностью. Подробный список (около 500) ссылок на работы с наиболее существенными теоретическими и практическими результатами по ВА, полученными до 1985 г., можно найти в фундаментальной монографии Р. Г. Бухараева, которую можно рассматривать как итог первого периода развития теории ВА, продолжавшегося более двух десятилетий.

В последующие годы произошло некоторое снижение активности исследований в этой области, но в настоящее время теория ВА вновь находится в состоянии подъёма. Возрождение исследовательской активности в области ВА в значительной степени связано с тем, что в связи с бурным развитием современных информационных технологий возник широкий круг новых задач, в решении которых ВА могут служить эффективным инструментом. К числу таких задач относятся задачи в следующих областях:

• верификация программ и протоколов передачи данных в компьютерных сетях,
• информационный поиск в Интернете,
• финансово-экономический анализ,
• обработка и извлечение знаний из больших массивов данных (data mining и process mining), в частности, в задачах анализа бизнес-процессов, биоинженерии и биоинформатики,
• извлечение смысла из текстов на естественных языках,
• машинное зрение и обработка изображений и др.

Началом современного этапа развития теории ВА можно считать работу, в которой рассмотрены ВА, возникающие при моделировании параллельных вычислительных систем с асинхронным взаимодействием.

Главное отличие нового понятия ВА от того, которое изучалось в предшествующий период, заключается в том, что в новом понимании ВА определяется как **система переходов (transition system),** с которой связано некоторое множество переменных. ВА функционирует путём выполнения переходов, после каждого из которых происходит обновление значений переменных этого ВА. Можно доказать, что если множество переменных ВА конечно и множества значений этих переменных тоже конечны, то новое и старое понятия ВА будут эквивалентны.

Наряду с упомянутыми выше понятиями ВА существуют и другие модели динамических систем со случайным поведением, например скрытые марковские модели (hidden Markov models)**,** байесовские сети (Bayesian networks)**,** вероятностные графические модели , марковские решающие процессы (Markov decision processes) , вероятностные I/O автоматы (probabilistic I/O automata) **.** Все эти модели являются частными случаями исходного понятия ВА общего вида.

Наряду с перечисленными выше моделями в последние годы изучаются модели динамических систем со случайным поведением, переходы в которых могут быть ассоциированы не только с вероятностями их выполнения, но и с модальностями must и may, которые позволяют существенно усилить выразительные возможности этих моделей по сравнению с другими упомянутыми выше моделями. Основные концепции и методы, относящиеся к таким моделям, содержатся в ряде работ**.**

Также изучаются и другие обобщения понятия ВА, в частности вероятностные сети Петри**,** ВА с непрерывным временем , вероятностные процессные алгебры **.**

1. Основные понятия

1.1 Случайные функции

1.1.1 Понятие случайной функции

Пусть задана пара множеств *X, Y*.
Случайной функцией (СФ) из *X* в *Y* называется произвольная функция *f* вида

$$f : X \times Y \to [0,1], \tag{1.1}$$

удовлетворяющая условиям:

• $\forall x \in X$ множество $\{y \in Y \mid f(x,y) > 0\}$ конечно или счётно,

• $\forall x \in X \quad \sum\limits_{y \in Y} f(x,y) = 1.$

Для любых $x \in X$ **и** $y \in Y$ значение *f(x,y)* можно интерпретировать как вероятность того, что СФ *f* отображает *x* в *y*.
Если *f* СФ из *X* в *Y*, то мы будем обозначать этот факт записью $f : X \underset{r}{\to} Y$. Мы будем называть ***X* областью определения СФ *f*,** а **Y областью значений** СФ *f*.
Если *f* и *g* - СФ вида $f : X \underset{r}{\to} Y, \quad g : Y \underset{r}{\to} Z$ то их **композицией** называется СФ
$fg : X \underset{r}{\to} Z,$

определяемая следующим образом:

$$\forall x \in X,\ \forall z \in Z \quad (fg)(x,z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{y \in Y} f(x,y)g(y,z) \tag{1.2}$$

СФ (1.1) называется **детерминированной,** если для каждого $x \in X$ существует единственный $y \in Y$, такой, что *f*(*x, y)* = 1. Если *f* детерминированная СФ вида (1.1), и *x, y* такие элементы *X* и *Y* соответственно, что *f*(*x, y)* = 1, то мы будем говорить, что *f* **отображает** *x* **в** *y*.

1.1.2 Матрицы, соответствующие конечным случайным функциям

СФ называется **конечной (КСФ),** если её область определения и область значений являются конечными множествами.
Пусть задана КСФ $f: X \underset{r}{\to} Y$, и на *X* и *Y* заданы упорядочения их элементов, которые имеют вид $(x_1, \dots x_m)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ соответственно. Тогда *f* можно представить в виде матрицы (обозначаемой тем же символом *f*)

$$f = \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & \dots & f(x_1, y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ f(x_m, y_1) & \dots & f(x_m, y_n) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Ниже мы будем отождествлять каждую КСФ *f* с соответствующей ей матрицей (1.3).
Мы будем предполагать, что для каждого множества *X*, являющегося областью определения или областью значений какой-либо из рассматриваемых КСФ, на *X* задано фиксированное упорядочение его элементов. Таким образом, для каждой рассматриваемой КСФ соответствующая ей матрица определена однозначно.
Согласно определению произведения матриц, из (1.2) следует, что матрица *fg* является произведением матриц *f* и *g*.

1.1.3 Вероятностные распределения

Вероятностным распределением (или просто **распределением)** на множестве *X* называется произвольная СФ ξ вида

$$\xi: \mathbf{1} \underset{r}{\to} X$$

где **1** - множество, состоящее из одного элемента, который мы будем обозначать символом *e*. Совокупность всех распределений на *X* мы будем обозначать записью $X^{\triangle}$. Для каждого $x \in X$ и каждого $\xi \in X^{\triangle}$ значение $\xi(e, x)$ мы будем обозначать более коротко записью x^{ξ}. Для каждого $x \in X$ мы будем обозначать записью ξ_x распределение из $X^{\triangle}$, определяемое следующим образом:
$\forall y \in X \;\; y^{\xi_x} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, если $y = x$, и $y^{\xi_x} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, если $y \neq x$.

1.2 Строки и функции на строках

1.2.1 Строки и связанные с ними понятия

Для каждого множества X мы будем обозначать записью X^* совокупность всех конечных строк, компонентами которых являются элементы X. Множество X^* содержит **пустую строку,** она обозначается символом ε.
Для каждого $x \in$ G X строка, состоящая из одного этого элемента, обозначается той же записью x.
Для каждой строки $u \in X^*$ её **длиной** называется количество компонентов этой строки. Длина пустой строки равна нулю. Длина строки u обозначается записью $|u|$.
Для каждого целого числа $k > 0$ записи X^k, $X^{\leq k}$, $X^{<k}$, $X^{\geq k}$, $X^{>k}$, обозначают совокупности всех строк из X^*, длина которых равна k, меньше или равна k, и т.д., соответственно.
Для каждой пары строк $u, v \in X^*$ их **конкатенацией** называется строка, обозначаемая записью uv, и определяемая следующим образом:

- $u\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon u \stackrel{\text{def}}{=} u$, **и**
- **если** $u = x_1 \ldots x_n$ **и** $v = x'_1 \ldots x'_m$, **то** $uv \stackrel{\text{def}}{=} x_1 \ldots x_n x'_1 \ldots x'_m$.

Для каждой строки $u \in X^*$ запись $\tilde{u}$ обозначает строку u, записанную в обратном порядке, т.е. $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, и если $u = x_1 \ldots x_n$, то $\tilde{u} = x_n \ldots x_1$.

1.2.2 Функции на строках

Пусть задано конечное множество X.
Функцией на строках из X^* мы будем называть произвольную функцию вида $f : X^* \to \mathbf{R}$ (где символ R обозначает множество действительных чисел). Совокупность всех функций на строках из X^* мы будем обозначать записью $\mathbf{R}^{X^*}$.
На множестве $\mathbf{R}^{X^*}$ определены следующие операции.
• Для функций $f_1, f_2 \in \mathbf{R}^{X^*}$ их **сумма** $f_1 + f_2$ и **разность** $f_1 — f_2$ определяются следующим образом:

$$\forall u \in X^* \begin{cases} (f_1 + f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u) + f_2(u), \\ (f_1 - f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u) - f_2(u). \end{cases} \quad (1.4)$$

• Для каждого $a \in \mathbf{R}$ и каждой функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ **произведение** af определяется следующим образом:

$$\forall u \in X^* \quad (af)(u) \stackrel{\text{def}}{=} af(u). \quad (1.5)$$

Множество $\mathbf{R}^{X^*}$ можно рассматривать как векторное пространство над **R**. относительно определённых выше операций сложения и умножения на числа из **R.**

1.3 Вероятностные автоматы

В отличие от детерминированных автоматов, где функции переходов и выходов взаимнооднозначны:

$$a(t+1) = F[a(t), x(t)]$$

$$y(t) = \Phi[a(t), x(t)],$$

в вероятностных автоматах эти функции носят вероятностный характер и задают вероятности появления состояния в момент времени t + 1и вероятности появления выходной буквы. В вероятностном автомате действует механизм случайности: состояния автомата и выходные буквы появляются случайным образом:

$$P[a(t+1)y(t)/a(t), x(t)]$$

Эта формула задает условную вероятность того, что в момент времени t + 1 автомат перейдет в состояние a(t+1), если в момент времени t автомат был в состоянии a(t), и поступила x(t).

Предполагают, что состояние автомата и появление входной буквы являются независимыми. При этом условии различают:

1) Вероятностный автомат Мили:

$$P[a(t+1)y(t)/a(t),x(t)] = P[a(t+1)/a(t), x(t)]*P[y(t)/a(t), x(t)].$$

Функция перехода функция выхода

2) Вероятностный автомат Мура:

$$P[a(t+1)y(t)/a(t),x(t)] = P[a(t+1)/a(t), x(t)]*P[y(t)/a(t)].$$

3) Y - детерминированный автомат: функция переходов вероятностная, функция выходов детерминированная:

$$y(t) = \Phi[a(t), x(t)]$$

4) A - детерминированный автомат. Автомат, у которого функция переходов детерминированная:

$$a(t+1) = F[a(t), x(t)]$$

1.3.1.Способы задания вероятностных автоматов

Методы теории вероятностей

Основным математическим аппаратом для анализа поведения ВА является широко распространенный аппарат **цепей Маркова.** Практическое значение вероятностных автоматов заключается в следующем:

1) Модель ненадежно работающих устройств вычислительных машин.
2) Модель работы процессора ЭВМ в многозадачном режиме.
3) Вероятностный автомат используется для получения последовательности случайных величин, чисел, событий и т.д.

Вероятностная функция, описывающая поведение ВА:

$P[a(t+1)y(t)/a(t), x(t)]$

сложная, многомерная функция. В чистом виде не используется, ее обычно разбивают на 2части:

1) Функция перехода автомата из одного состояния в другое.
2) Выходная функция.

Для задания поведения ВА необходимо таким образом задавать обе эти функции.

2способа задания этих функций:

1) **Табличный.** Таблицы переходов вероятностных автоматов и таблицы выходов.

Таблица переходов задает вероятности появления **a** в момент времени **t+1** , взависимости от **a** в момент времени **t** и **x** в момент времени **t**. Для вероятностного автомата необходимо столько таблиц переходов, сколько входных букв x_i . Такое

x_i	$a_{j,t+1}$	
$a_{i,t}$	P_{ij}	

x_k	$a_{j,t+1}$	
$a_{i,t}$	P_{ij}	

2) **Таблицы выходов**. Вероятность появления выходной буквы в зависимости от состояния и выходной буквы.

Допустим, имеем следующее описание автомата Мили:

	a_0			a_1		
y_i	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}
x_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_{21}	β_{22}	β_{23}

$\alpha_{ij}, P_{ij}, \gamma_{ij}, \beta_{ij}$ – вероятности.

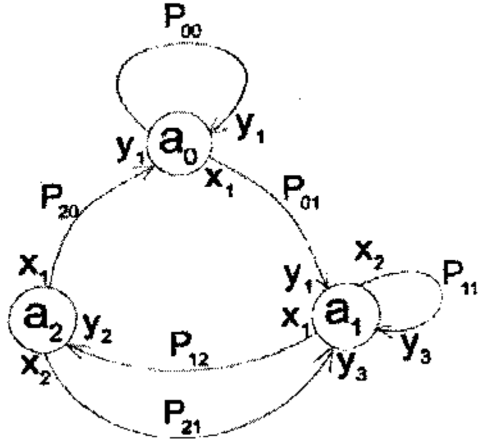
$\Sigma\ \alpha_{ij}=1, \Sigma\ P_{ij}=1, \Sigma\ \gamma_{ij}=1, \Sigma\ \beta_{ij}=1$

Математическое описание ВА значительно сложнее, чем ДА.

Таблица выходов для автомата Мура упрощается (зависимость только от состояния).

	y_1	Y_2	y_3
a_0	P_{01}	P_{02}	P_{03}
a_1	γ_{11}	γ_{12}	γ_{13}

Следующий способ задания вероятностного автомата - графический способ. Все данные указываются на графе.



Переходы случайны: на стрелках показываются вероятности переходов.

$P_{01} + P_{00} = 1$

$P_{11} + P_{12} = 1$

$P_{21} + P_{21} = 1$

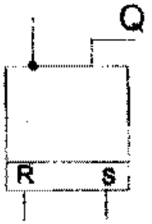
Графический способ часто используется для анализа работы вероятностных автоматов.

1.3.2. Анализ вероятностного автомата.

Исходные данные - некоторая схема вероятностного автомата.
 2 этапа анализа:

1) Составить таблицу переходов, уточнив входные буквы, выходные буквы и т.д.
2) Известна таблица переходов, таблица выходов неизвестна. Найти вероятности появления выходных букв

Пример: В качестве вероятностного автомата возьмем триггер RS типа.



Известно, что на входы этого триггера нельзя одновременно подавать единицы, так как он переходит в неявное состояние. Но для вероятностных автоматов подавать такие входные сигналы можно. Схема - источник случайной двоичной последовательности.
Составим таблицы переходов.
Сперва определяем, какие входные и какие выходные данные:

S	R	x_i
0	0	x_1
0	1	x_2
1	0	x_3
1	1	x_4

Следовательно, имеем 4 таблицы переходов:

X_0	Q_0	Q_1
Q_0	1	0
Q_1	0	1

(установка в 0)

X_1	Q_0	Q_1
Q_0	1	0
Q_1	1	0

(установка в 1)

X_1	Q_0	Q_1
Q_0	0	1
Q_1	0	1

(имеем симметричный триггер)

X_i	Q_0	Q_1
Q_0	½	½
Q_1	½	½

Это одношаговые таблицы переходов.
Q_i— состояние автомата.
Примечание: на самом деле оба плеча триггера не одинаковы, что приводит к тому, что на практике вероятность перехода отличается от ½.

1.3.3. Вероятности появления выходных букв.

Для нахождения вероятности появления выходных букв используется уравнения Маркова, уравнения Колмогорова - Чепмена и формулы полной вероятности.

Общая методика анализа вероятностного автомата состоит в следующем:

1. **Исходными данными для анализа является вектор**

начального состояния ВА $P(a_0), P(a_1), P(a_2), \ldots , P(a_m); t=0$

Матрица переходов за один шаг для каждой входной буквы.

Таблица вероятности выходных букв.

2. Нахождение матрицы переходов за *n* шагов, например:

$$P_{ij}(n=5) = P_{ij}/x_1\ P_{ij}/x_2\ P_{ij}/x_3\ P_{ij}/x_4\ P_{ij}/x_5$$

В общем случае, если на вход автомата поступает одна буква, то можно воспользоваться уравнением Колмогорова - Чепмена:

$$P_{ij}(n) = P_{ik}(m)\ P_{kj}(n-m)$$

3. Нахождение вероятностей состояний ВА:

Сначала воспользуемся уравнениями Маркова для нахождения условных вероятностей состояний

$$P(a_i/x_k) = \Sigma\, P(a_j/x_k)\ P_{ji}/x_k \qquad \textit{для } j = (1..m)$$

Затем находим абсолютную вероятность состояний по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(a_i) = \Sigma\ P(x_k)\ P(\ a_i/x_k)} \qquad \text{для } k = (1..l)$$

4. Нахождение вероятностей выходных букв y_i для разных случаев:
а) Y - детерминированный автомат Мура

$$\mathbf{P(y_i) = P(\ a_i)}$$

б) Просто ВА Мура по формуле полной вероятности:

$$\mathbf{P(y_i) = \Sigma\ P(a_j)\ P(\ y_i/a_j)} \qquad \text{для } i=(1..m)$$

в) Сложный случай - ВА Мили:

$$\mathbf{P(y_i) = \Sigma\, P(a_j)\, \Sigma\, P(\, y_i/a_i x_j)} \qquad \text{для } i=(1..m),\ j=(1..k)$$

Примечание: в случае, если состояние автомата и входная буква независимы, то

$$\mathbf{P(y_i) = \Sigma\, P(a_j)\, \Sigma\, P(\, y_i/a_i)\, P(\, y_i/x_j)}$$

1.3.4. Автоматные каналы

Обозначим через **e** вектор-столбец со всеми координатами, рамными единице:

$$\mathbf{e}^T = (1,\ \ldots,\ 1(,\ 1,\ \ldots)).$$

Далее введем обозначение

$$\tau\,(q/p) = \tau_A^{\mu(e)}\,(q/p) = \sum_{a \in \mathfrak{A}} \mu\,(a,\, q/p). \quad (*)$$

Здесь A - конечное множество состояний ВА

В матричной форме соотношение (*) будет иметь вид

$$\tau(q/p) = \mu(e) A(q/p)\mathbf{e}. \quad (**)$$

Величина $\tau(q/p)$ называется *входно-выходным отношением* ВА $(A,\ \mu(e))$ или *многотактпым каналом,* представленным в ВА $(A,\ \mu(e))$. В содержательной интерпретации величина $\tau(q/p)$ означает вероятность реакции на входное слово *p* выходным словом *q* при заданном начальном векторе состояний $\mu(e)$. В случае $p = q = e$ будем иметь

$$\tau(e/e) = 1.$$

Первая задача, возникающая в теории ВА, связана с анализом условного вероятностного распределения, заданного формулой (**). Это входно-выходное отношение ВА определяет вероятность реакции выходным словом *q* на входное слово *p* в предположении, что начальным вектором состояний является вектор $\mu(e)$.

Определение 1. Пусть *X* и Y — конечные множества, и условное вероятностное распределение $\tau(q/p)$ определено для любых слов $p \in X^*$ и $q \in Y^*$. Объект

$$I = \langle X,\ Y,\ \tau(q/p)\rangle \quad (1)$$

называется *многотактным каналом.*

Из определения вытекает, что выполнены условия $\sum_q \tau(q/p) = 1$,

$\tau(q/p) \geqslant 0$.

Каквидно из формулы (**), понятия ВА и многотактного канала тесно связаны. Однако не каждый многотактный канал может быть представлен ВА, тем более с конечным числом состояний.

Пусть ВА $A = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \mu(a', y/a, x)\rangle$.

Определение 2. *Автоматным каналом* называется многотактный канал, определенный условным вероятностным распределением $\tau_A(q/p)$, которое является входно-выходным отношением ВА *A*. В этом случае говорят, что многотактный канал I_A *представлен (реализован)* ВА *A* при начальном векторе состояний $\boldsymbol{\mu}(e)$.

Теорема 1. *Для того чтобы многотактный канал I был автоматным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $\tau(q/p) = 0$, *если* $|p| \neq |q|$;

2) $\tau(q_1q_2/p_1p_2) = 0$, *если* $\tau(q_1/p_1) = 0$ *и* $|p_1| = |q_1|$;

3) *отношение* $\tau(q_1q_2/p_1p_2)/\tau(q_1/p_1) = \tau_{p_1,q_1}(q_2/p_2)$ '

есть условное вероятностное распределение для каждой фиксированной пары слов p_1, q_1 $(|p_1| = |q_1|)$, *определенное для любых слов*

$p_2 \in X^*$, $q_2 \in Y^*$, *если* $\tau(q_1/p_1) \neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Выполнение первого условия очевидно из того, что распределение $\tau(q/p)$ является входно-выходным отношением ВА, следовательно, из $|p| \neq |q|$ вытекает, что $\tau(q/p) = 0$. Второе легко проверить. Действительно, можно получить, что $\tau_A^{\mu(e)}(q_1/p_1) = \mu(q_1/p_1)\,\mathbf{e} = 0$, поэтому $\mu(q_1/p_1) = 0$, поскольку все координаты вектора $\mu(q_1/p_1)$ неотрицательны. Тогда для слов одинаковой длины p_2 и q_2 мы получим,

$\tau_A^{\mu(e)}(q_1q_1/p_1p_2) = \mu(q_1/p_1)\,\tau(q_2/p_2) = 0$.

Если слова p_2 и q_2 имеют различные длины, то различные длины будут иметь и слова p_1p_2 и q_1q_2, так что второе условие теоремы будет следствием первого.

Далее, пусть $\tau(q_1/p_1) \neq 0$, и рассмотрим отношение $\tau(q_1q_2/p_1p_2)/\tau(q_1/p_1)$. Для любых слов p_2, q_2 $(|p_2| = |q_2|)$ эти отношения неотрицательны. Из стохастпчности матриц *A(p)* имеем

$$\sum_{q_2 \in Y^*} \tau(q_1q_2/p_1p_2) = \sum_{\substack{q_2 \in Y^* \\ |p_2| = |q_2|}} \mu(q_1/p_1)\,\tau(q_2/p_2) = \mu(q_1/p_1)\,\mathbf{e} = \tau(q_1/p_1).$$

Следовательно,

$$\sum_{q_2 \in Y} \tau_{p_1,q_1}(q_2/p_2) = 1,$$

поэтому $\tau_{p_1,q_1}(q_2/p_2)$ есть вероятностное распределение.

Достаточность. Пусть условия теоремы выполнены. Построим ВА, реализующий канал *I*. По условиям 1)—3) отношение $\tau_{p_1,q_1}(q_2/p_2)$ есть условное вероятностное распределение для каждой пары слов p_1, q_1, если $\tau(q_1/p_1) \neq 0$. Такие условные распределения будем называть *существенными.* Сопоставим каждому условному вероятностному распределению $\tau_{p_1,q_1}(q_2/p_2)$ символ τ_{p_1,q_1}. Обозначим множество всех введенных таким образом символов через

$\mathfrak{A} = \{\tau_{p_1,q_1}, |p_1| = |q_1|, \tau(q_1/p_1) \neq 0\}$ и будем строить ВА с множеством состояний $\mathfrak{A}$.

В качестве условного распределения ВА рассмотрим распределение вероятностей

$$\mu(a', y/a, x) = \mu(a'/a, x, y)\mu(y/a, x),$$

где положепо

$$\mu(a'/a, x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = \tau_{p,q}, \quad a' = \tau_{px,qy}, \\ 1, & \text{если } a = \tau, \quad a' = \tau_{x,y}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu(y/a, x) = \begin{cases} \tau_{p,q}(y/x), & \text{если } a = \tau_{p,q}, \\ \tau(y/x), & \text{если } a = \tau. \end{cases}$$

В качестве начального состояния a_0 фиксируем с вероятностью единица символ τ, соответствующий условному вероятностному распределению $\tau(q/p)$. Автомат определен полностью. Покажем, что он действительно реализует канал *I*.

Пусть $\tau(q/p) \neq 0$ и слова p' и q' $(|p'| = |q'|)$ суть начала соответственно слов *p* и *q*. Тогда из условия 2) следует, что $\tau(q'/p') \neq 0$. Таким образом, если слова *p* и *q* имеют вид $p = x_1 \ldots x_n$ и $q = y_1 \ldots y_n$, то используя вид условного вероятностного распределения $\mu(a', y/a, x)$, получим

$$\begin{aligned} \tau_A^{a_0}(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n) = \\ = \sum_{a_1,\ldots,a_n} \mu(a_1, y_1/a_0, x_1) \ldots \mu(a_n, y_n/a_{n-1}, x_n) = \\ = \sum_{a_1,\ldots,a_n} \mu(a_1/a_0, x_1, y_1)\,\mu(a_2/a_1, x_2, y_2) \ldots \\ \ldots \mu(a_n/a_{n-1}, x_n, y_n)\,\mu(y_1/a_0, x_1)\,\mu(y_2/a_1, x_2) \ldots \mu(y_n/a_{n-1}, x_n) = \\ = \tau(y_1/x_1)\frac{\tau(y_1y_2/x_1x_2)}{\tau(y_1/x_1)} \ldots \frac{\tau(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n)}{\tau(y_1 \ldots y_{n-1}/x_1 \ldots x_{n-1})} = \\ = \tau(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\tau(y_1 \dots y_n/x_1 \dots x_n) = 0$. Тогда найдется максимальное $m<n$ такое, что $\tau(y_1 \dots y_m/x_1 \dots x_m) \neq 0$, а $\tau(y_1 \dots y_{m+1}/x_1 \dots x_{m+1}) = 0$. Если $m = 0$, то, следовательно, $\tau(e/e) = 1 \neq 0$, а $\tau(y_1/x_1) = 0$. Согласно определению $\mu(y/a,\ x)$ имеем

$$\mu\left(y_{m+1}/\tau_{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_m}, x_{m+1}\right) = \tau_{x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_m}(y_{m+1}/x_{m+1}) = \\ = \frac{\tau(y_1 \dots y_{m+1}/x_1 \dots x_{m+1})}{\tau(y_1 \dots y_m/x_1 \dots x_m)} = 0.$$

Однако последнее влечет за собой равенство

$$\tau_A^{a_0}(y_1 \dots y_{m+1}/x_1 \dots x_{m+1}) = 0$$

и, далее, для любого $n > m$ равенство

$$\tau_A^{a_0}(y_1 \dots y_n/x_1 \dots x_n) = 0.$$

Замечание 1. Если многотактный канал является автоматным, то $\tau(e/e) = 1$.

Действительно, поскольку существуют слова p и q такие, что $\tau(q/p) \neq 0$, то $\tau(e/e) \neq 0$. Поэтому отношение $\frac{\tau(q/p)}{\tau(e/e)}$ есть условное вероятностное распределение. Следовательно,

$$\sum_{|q|=|p|} \frac{\tau(q/p)}{\tau(e/e)} = \frac{1}{\tau(e/e)} = 1,$$

откуда вытекает, что $\tau(e/e) = 1$.

Лемма 1. *Из тождества условных автоматных вероятностных распределений* $\tau_{p',q'}(q/p) \equiv \tau_{p'',q''}(q/p)$ *следует тождество* $\tau_{p'x,q'y}(q/p) \equiv \tau_{p''x,q''y}(q/p)$ *для всех* $p \in X^*$, $q \in Y^*$, $|p| = |q|$, $x \in X$, $y \in Y$.

Доказательство. Если $\tau(q'/p') = 0$, то $\tau(q'y/p'x) = 0$.

Поэтому требует рассмотрения лишь случай, когда $\tau(q'/p') \neq 0$ и $\tau(q''/p'') \neq 0$. Если $\tau(q'y/p'x) \neq 0$, мы получим

$$\tau_{p'x,q'y}(q/p) = \frac{\tau(q'yq/p'xp)}{\tau(q'y/p'x)} \frac{\tau(q'/p')}{\tau(q'/p')} = \frac{\tau_{p',q'}(yq/xp)}{\tau_{p',q'}(y/x)} = \\ = \frac{\tau_{p'',q''}(yq/xp)}{\tau_{p'',q''}(y/x)} = \frac{\tau(q''/p'')}{\tau(q''/p'')} \frac{\tau(q''yq/p''xp)}{\tau(q''y/p''x)} = \tau_{p''x,q''y}(q/p),$$

так как $\tau(q'y/p'x) = 0$ эквивалентно $\tau(q''y/p''x) = 0$.

Лемма 2. *Если* $I(e/e) = \langle X,\ Y,\ \tau(q/p)\rangle$*—автоматный канал, то многотактный канал* $I(q'/p') = \langle X, Y, \tau_{p'q'}(q/p)\rangle$ *будет автоматным при* $\tau(q'/p') \neq 0$.

Доказательство леммы сводится к проверке условий автоматности канала $I(q'/p')$.

Будем называть автоматный канал $I(q'/p')$ *существенным,*

если вероятностное распределение $\tau_{q'p'}(q/p)$ является существенным, иначе говоря, если $\tau(q'/p') \neq 0$.
Пусть $I = I(e/e)$ — автоматный канал.
Определение 3. Множество $\omega(I)$ автоматных каналов, состоящее из всех существенных каналов вида $I(q'/p')$:

$$\omega(I) = \{I(q'/p'): (p', q') \in (X \times Y)^*, \ \tau(q'/p') \neq 0\},$$

называется *множеством состояний* автоматного канала *I*.
Замечание 2. Лемма 1 показывает, что определение ВА *A* в доказательстве достаточности условий теоремы 3 останется корректным, если отождествлять символы состояний $\tau_{p',q'}$, соответствующие идентичным существенным условным вероятностным распределениям $\tau_{p',q'}(q/p)$, и все те символы, которые соответствуют несущественным условным вероятностным распределениям. Отсюда следует, что если множество $\omega(I)$ конечно, то можно построить автомат *A* с конечным числом состояний. Для этого необходимо в определении ВА *A* в качестве множества его состояний рассмотреть множество символов $\tau_{p',q'}$, соответствующих лишь различным существенным автоматным каналам $I(q'/p')$.
Отметим очевидное следствие теоремы 1.
Следствие 1. *Для того чтобы автоматный канал был реализуем в управляемом источнике, необходимо и достаточно, чтобы условное вероятностное распределение канала было подчинено условиям*

$$\tau(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \tau(y_i/x_i), \quad n = 1, \ldots; \quad x_i \in X, \quad y_i \in Y;$$

$$\sum_{y \in Y} \tau(y/x) = 1, \quad x \in X.$$

Доказательство следует из того факта, что управляемый источник есть вероятностный автомат, обладающий единственным состоянием.
Определение 4. Многотактный канал $I = \langle X, Y, \tau(q/p) \rangle$ называется *последователъностным,* если для всех слов $p \in X^*$, $q \in Y^*$, $x \in X$, выполнены условия:

1) при $|p| \neq |q| \quad \tau(q/p) = 0;$

2) $$\sum_{y \in Y} \tau(qy/px) = \tau(q/p). \qquad (2)$$

Теорема 2. *Для того чтобы многотактный канал был автоматным, необходимо и достаточно, чтобы он был последователъностным.*
Доказательство. В силу условия 1) теоремы 1, необходимо проверить необходимость и достаточность лишь второго условия. Предположим

вначале, что $\tau(q/p) \neq 0$. Но тогда отношение $\frac{\tau(qy/px)}{\tau(q/p)} = \tau_{p,q}(y/x)$ есть условное вероятностное распределение, следовательно, $\sum_{y \in Y} \tau_{p,q}(y/x) = 1$, откуда вытекает, что $\sum_{y \in Y} \tau(qy/px) = \tau(q/p)$. Обратно, если выполнено последнее условие, то отношение $\tau_{p,q}(y/x)$ есть условное вероятностное распределение. Пусть теперь для слов $p \in X^*$, $q \in Y^*$, $|p| = |q|$, имеем $\tau(q/p) = 0$. Тогда для любых букв $x \in X$, $y \in Y$ в силу условия 2) теоремы1 имеем $\tau(qy/px) = 0$, следовательно, $\sum_{y \in Y} \tau(qy/px) = 0 = \tau(q/p)$. Обратно, если выполнено условие 2) теоремы 1, то из того, что $\tau(q/p) = 0$ для $x \in X$, $y \in Y$, вытекает равенство нулю всех слагаемых $\tau(qy/px)$ в сумме $\sum_{y \in Y} \tau(qy/px) = 0$, поскольку все они неотрицательны. Но тогда по индукции легко получить выполнение условия 2) теоремы 1.

Следствие 2. *Для того чтобы многотактный канал I был последователъностным, необходимо и достаточно, чтобы для него выполнялись условия теоремы* 1.

Впредь для последовательностного (автоматного) канала будем применять обозначение

$I = \langle \tau(q/p),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$.

Пусть $I = \langle X,\ Y,\ \tau(q/p) \rangle$ — многотактиый канал. *Начальным сегментом длины п* многотактного канала *I* называется конечная система величин $I_n = \{\tau(q/p),\ |p| \leqslant n,\ |q| \leqslant n\}$.

Рассмотрим задачу синтеза конечного ВА, представляющего такой автоматный канал, начальный сегмент которого совпадает с заданным начальным сегментом длины *п* некоторого многотактного канала. Очевидно, что для решения этой задачи необходимо уметь доопределить заданный начальный сегмент до автоматного канала с конечным числом состояний. Возможность такого доопределения характеризует следующая

Теорема 3. *Для того чтобы начальный сегмент длины п многотактного канала I допускал доопределение до автоматного канала* с *конечным числом состояний, необходимо и достаточно, чтобы на этом сегменте выполнялись условия автоматности канала.*

Доказательство. Необходимосаь очевидна. Докажем достаточность. Доопределение до автоматного канала произведем следующим образом.

1. Для слов длины $|p| = |q| \leqslant n$ полагаем $\tau_A(q/p) = \tau(q/p)$.
2. Слова длины более *п* представляем в виде $p = p_1 \ldots p_s t$,

$q = q_1 \ldots q_s r$, где $|p_i| = |q_i| = n$, $i = 1, \ldots, s$, $|t| = |r| < n$,
и полагаем

$$\tau_A(q/p) = \prod_{i=1}^{s} \tau(q_i/p_i)\,\tau(r/t).$$

Далее доказательство сводится к проверке условий автоматности в соответствии с теоремой 1.

Пусть $\Sigma = \{\mu_z = (\mu_{1z}, \ldots, \mu_{kz}),\ z \in Z\}$ — конечная система вероятностных распределений. Допустим, что для некоторых алфавитов *X, Y* и для фиксированной длины слова *n* определено взаимно однозначное соответствие между множеством индексов $\{1, \ldots, k\}$ и множеством слов Y^n, между множеством *Z* и множеством слов X^n. Обозначим через $i = \varphi(q)$, $z = \psi(p)$, $|p| = |q| = n$, взаимно однозначные функции, реализующие это соответствие. Пусть, далее $\mu_{iz} = \mu_{\varphi(q)\psi(p)} = \tau(q/p)$. Теперь система вероятностных распределений $\sum$ задана в форме

$$\Sigma' = \{\tau(q/p),\ (p,\ q) \in X^n \times Y^n\}. \quad (3)$$

Для того чтобы доопределить систему $\sum'$ до начального сегмента автоматного канала I_n, в соответствии с теоремой 4 должно выполняться условие

$$\sum_{|q_1|=|p_1|} \tau(qq_1/pp_1) = \tau(q/p). \quad (4)$$

Дополним систему $\sum'$ значениями $\tau(q/p)$ для всех слов *p* и *q* длины менее *n* в соответствии с формулой (4) до начального сегмента длины *n* некоторого автоматного канала *I*. Пусть построен ВА *A,* представляющий канал с начальным сегментом длины *n,* совпадающим с I_n . Тогда для входного слова *p* длины *n,* $\psi(p) = z$, ВА удовлетворяет условию $\tau_A(q/p) = \mu_{iz}$, $i = \varphi(q)$, иначе говоря, для каждого значения параметра $z \in Z$, ВА реализует на выходе одно из вероятностпых распределений системы $\sum$.

Рассмотрим метод синтеза ВА в предположении, что задан класс случайных кодов в виде (3). Произведем, прежде всего, доопределение системы вероятностных распределений $\tau(q/p)$, $|p| = |q| \leqslant n$, до автоматного канала в соответствии с п. 1 и 2 вдоказательстве теоремы 3. П. 2 можпо представить в следующем виде:

$$\tau_A(q_1q'/p_1p') = \tau_A(q_1/p_1)\tau_A(q'/p')$$
$$p = p_1p', \quad q = q_1q', \quad |p_1| = |q_1| = n, \quad |p| = |q|.$$

Отсюда видно, что для пар слов одинаковой длины $|p'| = |q'| = n$, $|p''| = |q''|$

$$\tau_{p',q'}(q''/p'') = \tau_A(q'q''/p'p'')/\tau_A(q'/p') = \tau_A(q''/p''),$$

т. е. действительно многотактный канал-доопределение имеет конечное число состояний. В качестве множества состояний синтезируемого ВА берем множество символов $\mathfrak{A} = \{\tau,\ \tau_{p,q},\ |p| = |q| = n\}$. Пусть $\mu(a',\ y/a,\ x)$ — система переходных вероятностей искомого автомата. Полагаем

$$\mu(a',\ y/a,\ x) = \mu(a'/a,\ x,\ y)\mu(y/a,\ x),$$

где

$$\mu(a'/a,x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = \tau_{p,q},\ a' = \tau_{px,qy},\quad |px| = |qy| < n, \\ 1, & \text{если } a = \tau_{p,q},\ a' = \tau,\qquad |px| = |qy| = n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\mu(y/a,x) = \begin{cases} \tau_{p,q}(y/x), & \text{если } a = \tau_{p,q}, \\ \tau(y/x), & \text{если } a = \tau. \end{cases}$$

В качестве начального состояния фиксируем с вероятностью единица символ τ, соответствующий вероятностному распределению

$\tau(q/p)$.

Полученный ВА представляет многотактный канал-доопределение, что следует из доказательства теоремы 1, т. е., в частности, для каждого входного слова *p,* определенного условием $\psi(p) = z$, на выходе автомата реализуется одно из вероятностных распределений системы (3) таким образом, что $\tau_A(q/p) = \mu_{iz}$ для слова q, $i = \varphi(q)$.

Пример 1. В качестве системы вероятностных распределений (4) рассмотрим следующую систему, удовлетворяющую условиям (5) автоматности кодирования:

p \ q		0 0	1 0	0 1	1 1	В частном случае			
0	0	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	0	1/3	1/3	1/3
0	1	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}	1/3	0	1/3	1/3
1	0	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	1/3	1/3	0	1/3
1	1	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}	1/3	1/3	1/3	0

1. Из правила определения системы вероятностей перехода автомата вытекает, что

$$\mu(a',y/a,x) = \begin{cases} \tau_{p,q}(y/x), & \text{если } a = \tau_{p,q},\ a' = \tau_{px,qy},\quad |px| = |qy| < n, \\ \tau_{p,q}(y/x), & \text{если } a = \tau_{p,q},\ a' = \tau,\qquad |px| = |qy| = n; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поэтому если $A(y/x)$ — переходная матрица вероятностного автомата для пары букв *(x, y),* то она имеет вид

$$A(y/x)=\begin{array}{c}\begin{matrix} \qquad\qquad & \tau & \qquad\qquad & \tau_{px,qy} & \qquad\qquad \end{matrix}\\ \begin{pmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \cdots 0 \cdots & 0 & \cdots & \tau_{p,q}(y/x) & \cdots & 0 \\ \cdots & \tau_{p',q'}(y/x) & \cdots & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \tau_{p\,q} \\ \tau_{p'\,q'}\end{matrix}\end{array}$$

при

$|p| = |q| < n - 1, \quad |p'| = |q'| = n - 1.$

2. Каждое состояние канала $\tau_{p,q}(y/x)$ определяется по правилу $\tau_{p,q}(y/x) = \frac{\tau(qy/px)}{\tau(q/p)}$, если $|p| = |q| \leqslant n - 1$. Поэтому для построения системы матриц $A(y/x),\ x \in X,\ y \in Y$, достаточно задать таблицы канала $\tau(q/p)$ на всех парах слов $|p| = |q| < n - 1$. Построим таблицу для $\tau(y/x)$. Она будет иметь вид:

$x \backslash y$	0	1	В частном случае
0	$p_{11} + p_{12}$	$p_{13} + p_{14}$	$\begin{pmatrix}1/3 & 2/3\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$
1	$p_{21} + p_{22}$	$p_{23} + p_{24}$	

3. Теперь строится каждая матрица $A(y/x),\quad x \in X,\quad y \in Y$ (см. табл. 1). ВА построен. Он имеет пять состояний. Начальным вектором состояний является стохастический вектор $\mu(e) = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$. Методами минимизации ВА число состояний может быть уменьшено до трех.

1.3.5. Конечно-автоматные каналы

В предыдущем параграфе рассматривались условия автоматности многотакного канала. В частности, было установлено, что когда автоматный канал обладает конечным числом состояний, то существует ВА с конечным числом состояний, который его представляет. Возникает естественный вопрос, не является ли условие конечности числа состояний автоматного канала и необходимым условием его представимости конечным ВА, так, как это имеет место в детерминированном случае? Нижеследующий пример убеждает нас в противном.

Пример 1. Допустим, что одна из матриц перехода ВА с двумя состояниями имеет вид

$$A(y/x) = \begin{pmatrix}\alpha & \alpha\beta\\ 0 & \alpha\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

Таблица 1

$A(0/0)$	τ	$\tau_{0,0}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_{1,1}$	В частном случае
τ	0	$p_{11}+p_{12}$	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,0}$	$p_{11}/p_{11}+p_{12}$	0	0	0	0	
$\tau_{0,1}$	$p_{13}/p_{13}+p_{14}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,0}$	$p_{31}/p_{31}+p_{32}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,1}$	$p_{33}/p_{33}+p_{34}$	0	0	0	0	

$A(0/1)$	τ	$\tau_{0,0}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_{1,1}$	
τ	0	0	0	$p_{31}+p_{32}$	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,0}$	$p_{21}/p_{11}+p_{12}$	0	0	0	0	
$\tau_{0,1}$	$p_{23}/p_{13}+p_{14}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,0}$	$p_{41}/p_{31}+p_{32}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,1}$	$p_{43}/p_{33}+p_{34}$	0	0	0	0	

$A(1/0)$	τ	$\tau_{0,0}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_{1,1}$	
τ	0	0	$p_{13}+p_{14}$	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,0}$	$p_{12}/p_{11}+p_{12}$	0	0	0	0	
$\tau_{0,1}$	$p_{14}/p_{13}+p_{14}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,0}$	$p_{32}/p_{31}+p_{32}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,1}$	$p_{34}/p_{33}+p_{34}$	0	0	0	0	

$A(1/1)$	τ	$\tau_{0,0}$	$\tau_{0,1}$	$\tau_{1,0}$	$\tau_{1,1}$	
τ	0	0	0	0	$p_{33}+p_{34}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\tau_{0,0}$	$p_{22}/p_{11}+p_{12}$	0	0	0	0	
$\tau_{0,1}$	$p_{24}/p_{13}+p_{14}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,0}$	$p_{42}/p_{31}+p_{32}$	0	0	0	0	
$\tau_{1,1}$	$p_{44}/p_{33}+p_{34}$	0	0	0	0	

где α и β — некоторые константы $0 < \alpha,\ \beta < 1.$ Тогда видно, что

$$A\left(y^k/x^k\right) = \alpha^k \begin{pmatrix} 1 & k\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots$$

Таким образом, при начальном векторе состояний $\mu(e) = (1,\ 0)$ для автоматного канала $\tau_A(q/p)$, представляемого этим ВА, получим для пар слов вида $(x^k,\ y^k)$ $\tau(y^k/x^k) = \alpha^k(1+k\beta)$. Воспользуемся преобразованием

$$\frac{\tau\left(y^{k+s}/x^{k+s}\right)}{\tau\left(y^k/x^k\right)} = \tau_{x^k,y^k}\left(y^s/x^s\right).$$

Видно, что для любых $k,\ s=0,\ 1,\ \ldots$

$$\tau_{x^k,y^k}\left(y^s/x^s\right) = \alpha^s\frac{1+(k+s)\beta}{1+k\beta}.$$

Предположим, что для $k_1 \neq k_2$ имеем

$$\alpha^s\frac{1+(k_1+s)\beta}{1+k_1\beta} \equiv \alpha^s\frac{1+(k_2+s)\beta}{1+k_2\beta},\quad s=0,1,\ldots$$

При $s \neq 0$ это тождество возможно лишь при $k_1 = k_2$. Поэтому все состояния канала $\tau(q/p)$ вида $\tau_{x^k,y^k}(q/p),\ k=0,1,\ldots,$ различны между собой.

Определение 1. Многотактыый канал называется *конечно-автоматным,* если существует конечный ВА, для которого условное вероятностное распределение канала является входно-выходным отпошением.

Критерий конечно-автоматной представимости многотактного канала дает нижеследующая теорема 1. Для формулировки и доказательства этой теоремы введем некоторые новые определения.

Будем рассматривать векторные пространства с лексикографической индексацией координат векторов. В основе этой индексации лежит упорядоченность, которая вводится на множестве элементов свободной полугруппы X^* (или, более обще, на множестве элементов декартова произведения конечной или счетной последовательности свободных полугрупп $(X_1^*\times\ldots\times X_k^*(\times\ldots))$.

Пусть $\varphi\colon X_1^*\times\ldots\times X_k^*\to R$ — функция, определенная на декартовом произведении свободных полугрупп $X_1^*\times\ldots\times X_k^*$. Такие функции называются *словарными функциями.* Если область определения словарной функции φ вполне упорядочена, то имеется возможность рассматривать последовательность всех ее значений, упорядоченную по значениям аргумента, и интерпретировать эту последовательность как вектор линейного пространства с лексикографической индексацией координат. Мы будем в дальнейшем использовать такую геометрическую интерпретацию словарных функций. Первый пример использования этой интерпретации дает критерий конечной автоматпости многотактного канала.

Итак, пусть $N(p,\ q)\colon (X\times Y)^*\to N$ — некоторая нумерация пар слов одинаковой длины из свободных полугрупп соответственно X^* и Y^*. Естественно при этой нумерации воспользоваться лексикографическим принципом упорядочения и рассматривать пару (p, q) как индекс. Пусть $I = \langle \tau(q/p),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$— автоматный канал. Обозначим также через I последовательность значений словарной функции $\tau(q/p)$:

$$I = (\underset{(e,e)}{1}, \ldots, \underset{(p,q)}{\tau(q/p)}, \ldots), \quad (1)$$

где на (p, q)-м месте последовательности расположено значение $\tau(p,\ q)$ вероятностного распределения, определяющего канал I. Обозначим через E_I линейное пространство последовательностей вида (1). Элементами пространства E_I являются последовательности значений двуместных словарных функций, в том числе входно-выходных отношений ВА, имеющих входной алфавит X и выходной алфавит Y. На вектор-каналы естественным образом распространяются понятия линейной комбинации, выпуклой линейной комбинации и линейного преобразования.

Пусть счетномерная матрица $D(p'/q') = (d_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}\ \ (q'/p'))$ определена условиями

$$d_{(p_1,q_1)(p_2,q_2)}(q'/p') = \begin{cases} 1, & \text{если } p_1 = p'p_2,\ q_1 = q'q_2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad \textbf{(2)}$$

Матрица $D(q'/p')$ осуществляет некоторую перестановку на множестве индексов координат вектора-канала (1), иначе говоря, производит «перестановку осей координат». Поэтому будем называть эту перестановку *(p', q')-вращением,* а матрицу $D(q'/p')$ *матрицей (p', q')-вращения.*

Пусть $\tau(q/p) \neq 0$. Обозначим через $I(q/p)$ автоматный канал, определенный состоянием $\tau_{(p,\,q)}(q'/p')$ автоматного канала $\tau(q'/p')$:

$$I(q/p) = \langle X,\ Y,\ \tau_{p,\,q}(q'/p') \rangle.$$

Тогда верно матричное равенство

$$ID(q/p) = \tau(q/p)I(q/p). \quad (3)$$

Определение 2. *Множество многотактных каналов* $\Gamma \subset E_I$ называется *выпуклым относительно полугруппы* $(X \times Y)^*$ *(p, q)-вращений,* если произвольные *(p, q)*-вращения $I_\alpha D(q/p)$, $I_\alpha \in \Gamma$, каналов множества Г являются неотрицательными линейными комбинациями каналов из этого же множества.

Иначе говоря, множество каналов Г является выпуклым относительно полугруппы *(p, q)*-вращений тогда и только тогда, когда для любого многотактного канала I_α из Г и любой пары слов *(p, q)* одинаковой длины имеем

$$I_\alpha D(q/p) = \sum_{I_\beta \in \Gamma} a_{\alpha\beta}(q/p)\, I_\beta, \quad (4)$$

где все числа $a_{\alpha\beta}(q/p)$ неотрицательны. Мы будем иметь дело со счетными или конечными множествами многотактных каналов Г. Обозначим через $\mathcal{I}_\Gamma$ счетномерную матрицу, все строки которой в фиксированном порядке перечисляют векторы-каналы множества Г:

$$\mathcal{I}_\Gamma = \begin{pmatrix} \cdots \\ I \\ \cdots \end{pmatrix}.$$

Из определения 1 вектора-канала следует, что первый столбец матрицы $\mathcal{I}_\Gamma$ состоит из одних единиц. Введем в рассмотрение также систему счетномерных матриц с неотрицательными элементами $A(q/p) = (a_{\alpha\beta}(q/p))$. Тогда соотношение (4) в матричной форме будет иметь вид

$$\mathcal{I}_\Gamma D(q/p) = A(q/p)\mathcal{I}_\Gamma. \quad (5)$$

Обозначим через $\mathbf{e}_p$ вектор-столбец, *(p, q)*-е координаты которого равны единице, а остальные координаты равны нулю. Верна следующая

Лемма 1. *Для всех слов* $p,\ p' \in X^*$, *таких, что* $I\mathbf{e}_p = 1$, $D(q/p)\mathbf{e} = \mathbf{e}$, *имеют место следующие соотношения:*

$$\sum_{|q'|=|p'|} D(q'/p')\,\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_{p'p}, \quad \mathcal{I}_\Gamma \mathbf{e}_p = \mathbf{e}.$$

Доказательство получается непосредственной проверкой.

Замечание 1. Матрица $\sum_{|q|=|p|} A(q/p)$ является стохастической. Действительно, для проверки достаточно умножить на вектор-столбец $\mathbf{e}_p$ справа соотношение

$$\sum_{|q|=|p|} \mathcal{I}_\Gamma D(q/p) = \sum_{|q|=|p|} A(q/p)\,\mathcal{I}_\Gamma.$$

Введем еще одно определение.

Определение 3. *Опорным множеством* Г(Ω) множества *Ω* векторного пространства *L* называется такое множество векторов из *L*, выпуклая линейная оболочка которого содержит множество Ω.

Теорема 1. *Для того чтобы автоматный капал* $I = \langle \tau(q/p),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$ *был конечно-автоматным, необходимо и достаточно, чтобы опорное множество множества состояний канала I было конечным множеством, выпуклым относительно полугруппы всех (р, q)-вращений,* $(p,\ q) \in (X \times Y)^*$.

Доказательство. Если ВА *A,* представляющий автоматный капал *I*, имеет конечное число состояний, то каждое состояние $\tau_{p',q'}$ этого канала определяется условием

$$\tau_{p',q'}(q/p) = \frac{\mu(q'/p')}{\tau(q'/p')}\tau(q/p) = \alpha(p', q')\,\tau(q/p), \quad \textbf{(6)}$$

где $\alpha(p',\ q')$— стохастический вектор-строка. Выберем в качестве опорного множества множество каналов, определенных координатами вектор-столбца $\tau(q/p)$, иначе говоря, условными вероятностными распределениями $\tau_A^{a_i}(q/p) = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)A(q/p)\mathbf{e}$, $i = 1,\ldots,n$.

Соотношение (6) подтверждает, что выбранное множество каналов является опорным множеством множества состояний канала I. Покажем, что оно выпукло относительно полугруппы вращений $(X \times Y)^*$. Действительно, опорное множество определяется матрицей ,

$$\mathcal{I}_\Gamma = \begin{pmatrix} \ldots \tau_A^{a_1}(q/p) \ldots \\ \cdots\cdots\vdots\cdots\cdots \\ \ldots \tau_A^{a_n}(q/p) \ldots \end{pmatrix}_{(p,q)}.$$

Имеем

$$\mathcal{I}_\Gamma D(q'/p') = \begin{pmatrix} \ldots \tau_A^{a_1}(q/p) \ldots \\ \cdots\cdots\vdots\cdots\cdots \\ \ldots \tau_A^{a_n}(q/p) \ldots \end{pmatrix}_{(p,q)} D(q'/p') = \begin{pmatrix} \ldots \tau_A^{a_1}(q'q/p'p) \ldots \\ \cdots\cdots\vdots\cdots\cdots \\ \ldots \tau_A^{a_n}(q'q/p'p) \ldots \end{pmatrix}_{(p,q)} =$$

$$= (\ldots \underset{(p,q)}{\tau_A(q'q/p'p)} \ldots) = (\ldots A(q'/p')\underset{(p,q)}{\tau_A}(q/p) \ldots) = A(q'/p')\,\mathcal{I}_\Gamma.$$

Поскольку все матрицы $A(p'/q')$ имеют неотрицательные элементы, то необходимость условий теоремы доказана.

Пусть условия теоремы выполнены. Это означает, что каждый канал $I(q'/p')\ \ (\tau(q'/p') \neq 0)$ представляется в виде выпуклой линейной комбинации некоторого конечного множества каналов Г или, иначе говоря, для каждой пары слов $(p,\ q) \in (X \times Y)^*$ и любой пары слов $(p',\ q') \in (X \times Y)^*$ имеет место равенство

$$\tau_{p',q'}(q/p) = \alpha(p', q')\,\tau(q/p),$$

где $\alpha(p',\ q')$— стохастический вектор-строка, а $\tau(q/p)$— n-мерный вектор-столбец, координаты которого суть условные вероятностные распределения каналов из $\Gamma = \{\tau^1(q/p),\ \ldots,\ \tau^n(q/p)\}$. В матричном виде это можно переписать так:

$$I(q'/p') = \alpha(p',\ q')\mathcal{I}_\Gamma.$$

Обозпачим через $\mu(e)$ вектор $\alpha(e,\ e)$, соответствующий каналу I, и рассмотрим ВА $\langle A(y/x),\ x \in X,\ y \in Y\rangle$ с начальным вектором состояний $\mu(e)$. Покажем, что этот автомат представляет канал I. Действительно, умножая соотношение

$$\mathcal{I}_\Gamma D(q/p) = A(q/p)\mathcal{I}_\Gamma$$

слева на вектор-строку $\boldsymbol{\mu}(e)$ и справа на вектор-столбец $\mathbf{e}_{p'}$ и используя соотношения, описанные в лемме 1, получим

$$\boldsymbol{\alpha}(e, e)\, A(q/p)\, \mathcal{I}_\Gamma \mathbf{e}_{p'} = \boldsymbol{\mu}(e)\, A(q/p)\, \mathbf{e} = \boldsymbol{\alpha}(e, e)\, \mathcal{I}_\Gamma D(q/p)\, \mathbf{e}_{p'} = \\ = I(e, e)\, D(q/p)\, \mathbf{e}_{p'} = \tau(q/p)\, I(p, q)\, \mathbf{e}_{p'} = \tau(q/p).$$

Дадим еще одну формулировку критерия конечной автоматности многотактного канала, который яснее демонстрирует структуру взаимосвязи между автоматными каналами и конечнымн ВА. Особую роль в этой структуре играют полудетермнированные ВА.

Теорема 2. *Для того чтобы автоматный канал I обладал конечным числом состояний, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный полудетерминированный вероятностный автомат, который представляет этот канал фиксированным начальным состоянием.*

Докажем вначале лемму.

Лемма 2. *Если конечный ВА А является полудетерминированным, то стохастический вектор*

$$\boldsymbol{\alpha}(p, q) = \boldsymbol{\mu}_A(q/p)/\boldsymbol{\tau}_A(q/p), \quad (p, q) \in (X \times Y)^*, \quad \boldsymbol{\tau}_A(q/p) \neq 0,$$

принимает конечное число значений.

Доказательство. Из определений полудетерминированного автомата вытекает, что при фиксированном начальном состоянии автомата вектор состояний $\boldsymbol{\mu}_A(q/p)$ имеет не более одной ненулевой координаты. Если $\tau_A(q/p) \neq 0$, то вектор $\boldsymbol{\alpha}(p, q) = \boldsymbol{\mu}_A(q/p)/\boldsymbol{\tau}_A(q/p)$ — стохастический, следовательно, единственная ненулевая координата его равна единице. Поскольку существует конечное число таких векторов, то лемма доказана.

Доказательство теоремы. Достаточность. Пусть канал *I* представлен в конечном полудетерминированном автомате фиксированным начальным состоянием. Любое состояние $I(p', q')$, $(p', q') \in (X \times Y)^*$ канала *I* определяется условным вероятностным распределением $\boldsymbol{\tau}_{p',q'}(q/p)$, $\tau(q'/p') \neq 0$, где $\boldsymbol{\tau}_{p',q'}(q/p) = \boldsymbol{\alpha}(p', q')\, \boldsymbol{\tau}(q/p)$. В силу леммы 2 таких каналов будет конечное число.

Необходимость. Идея доказательства необходимости состоит в следующем. Если автоматный канал *I* представлен в некотором полудетерминировапиом ВА, то все его состояпия содержатся в множестве автоматных каналов, реализованных этим автоматом при различных начальных состояниях.

Рассмотрим еще один подход к проблеме доказательства конечной автоматности многотактного канала. Результаты, изложенные выше, дают ясную интерпретацию свойства конечной автоматности с точки зрения структуры множества состояний многотактного капала, как множества элементов линейного пространства E_I с лексикографической индексацией координат. Нижеследующий подход имеет значение с точки зрения приложений при решении задачи реализации конечно-автоматного канала или решении проблемы идентификации. Введем некоторые определения.

Пусть

$$\Sigma_1 = \{(p_1, q_1), \ldots, (p_k, q_k)\}, \quad \Sigma_2 = [(p'_1, q'_1), \ldots, (p'_k, q'_k)] \quad \textbf{(7)}$$

— две произвольные равномощные последовательности пар слов одинаковой длины из свободной полугруппы $(X \times Y)^*$. Пусть, далее, $I = \langle \tau(q/p),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$— автоматный канал.

Определение 4. Матрица

$$R_{\Sigma_1\Sigma_2} = \begin{pmatrix} \tau(q_1q'_1/p_1p'_1) & \ldots & \tau(q_1q'_k/p_1p'_k) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau(q_kq'_1/p_kp'_1) & \ldots & \tau(q_kq'_k/p_kp'_k) \end{pmatrix} \quad (8)$$

называется *составной последовательностной матрицей* с входным множеством $\sum_1$ и выходным множеством $\sum_2$.

Предположим, что множества $\sum_1$ и $\sum_2$ конечны. Введем в рассмотрение матрицы соответственно для множества векторов $\sum_1$ и множества поствекторов $\sum_2$. В случае, когда канал *I* является конечно-автоматным, имеем

$$R_{\Sigma_1\Sigma_2} = M_{\Sigma_1}N_{\Sigma_2}. \quad (9)$$

Соотношение вида (9) возможно получить для автоматного канала и в том случае, когда он не конечно-автоматен.

Определение 5. *Рангом* многотактпого канала *I* называется максимальный ранг составной последовательностной матрицы (8) для произвольных входного и выходного множеств и любого конечного номера $к = 1, \ldots$

Из соотношения (9) явствует, что если матрицы M_{Σ_1} и N_{Σ_2} имеют конечный ранг, то конечный ранг имеет и матрица $R_{\Sigma_1\Sigma_2}$. Однако для конечного ВА ранги матриц M_{Σ_1} и N_{Σ_2} конечны для любых множеств $\sum_1$ и $\sum_2$. Возникает желание связать проблему конечной автоматности многотактного канала с проблемой конечности его ранга. Картина этого соответствия оказывается сложнее. Для того чтобы прояснить этот вопрос, необходимо ввести еще два определения.

Определение 6. *Псевдовероятностным автоматом* (ПВА) называется математический объект $A = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \mu(a',\ y/a,\ x)\rangle$, где множества *X, Y* и $\mathfrak{A}$ определены, как у ВА, а система чисел $\mu'(a',\ y/a,\ x)$у довлетворяет условиям

$$\sum_{a' \in \mathfrak{A}, y \in Y} \mu(a', y/a, x) = 1, \quad a \in \mathfrak{A}, \quad x \in X.$$

Таким образом, отличие от определения ВА состоит в том, что не предполагается неотрицательность чисел $\mu(a', y/a, x)$. Как и для ВА, для ПВА будем использовать матричное представление. Несмотря на то, что переходные матрицы ПВА могут содержать отрицательные элементы, тем не менее система чисел

$$\tau(q/p) = \mu(e)A(q/p)\mathbf{e}, \quad (p, q) \in (X \times Y)^*,$$

может определять многотактный канал.

Определение 7. Многотактный канал *I* называется *слабо конечно-автоматным,* если существует ПВА, для которого условное вероятностное распределение $\tau(q/p)$ канала является входно-выходным отношением.

Конечность ранга многотактного канала оказывается в первую очередь связанной со слабо конечно-автоматной представимостью, иначе говоря, представимостью канала *I* некоторым ПВА.

Теорема 3. *Для того чтобы автоматный капал I был слабо конечно-автоматным, необходимо и достаточно, чтобы он был конечного ранга. Ранг канала равен числу состояний минимального ПВА, представляющего этот многотактный канал.*

Доказательство. Необходимость очевидна и вытекает из формулы 9. Докажем достаточность. Пусть $I = \langle \tau(q/p), (p, q) \in (X \times Y)^* \rangle$ — произвольный многотактный автоматный канал конечного ранга *r*. Тогда существует две такие равномощные последовательности пар слов одинаковой длины $\Sigma_1 = \{(p_1, q_1), \ldots, (p_r, q_r)\}$, $\Sigma_2 = \{(p'_1, q'_1), \ldots, (p'_r, q'_r)\}$, что составная последовательностная матрица $R_{\Sigma_1\Sigma_2} = R$ есть неособенная матрица максимального ранга *r*. Обозначим через $R(y/x)$ составную последовательностную матрицу

$$R(y/x) = \begin{pmatrix} \tau(q_1 y q'_1/p_1 x p'_1) & \ldots & \tau(q_1 y q'_r/p_1 x p'_r) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \tau(q_r y q'_1/p_r x p'_1) & \ldots & \tau(q_r y q'_1/p_r x p'_r) \end{pmatrix}.$$

Матрица $R(y/x)$ представима в виде произведения $R(y/x) = MN(y/x)$, где $M = M_{\Sigma_1}$, $N(y/x) = N_{\Sigma_2(x,y)}$, $\Sigma_2(x, y) = \{(xp'_1, yq'_1), \ldots, (xp'_r, yq'_r)\}$. Заметим, что так как матрица *R* — неособенная, то обе матрицы $M_{\Sigma_1} = M$ и $N_{\Sigma_2} = N$ есть матрицы полного ранга *r*. Поэтому в них могут быть выбраны неособенные подматрицы *r*-го порядка. Для матрицы *M,* очевидно, это может быть только подматрица *M',* составленная из столбцов с номерами, принадлежащими множеству $\sum_1$. При этом для неособенной матрицы $R_{\Sigma_1\Sigma_2}$ мы должны иметь $\tau(q_i/p_i) \neq 0$ $((p_i, q_i) \in \in \Sigma_1)$. Таким образом, получаем

$$M' = \begin{pmatrix} \tau(q_1/p_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tau(q_r/p_r) \end{pmatrix}, \quad |M'| \neq 0.$$

Тогда неособенная подматрица N' равна

$$N' = \begin{pmatrix} \tau_{p_1q_1}(q_1'/p_1') & \dots & \tau_{p_1q_1}(q_r'/p_r') \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{p_rq_r}(q_1'/p_1') & \dots & \tau_{p_rq_r}(q_r'/p_r') \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $R = M'N'$. Для матрицы $R(y/x)$ получим

$$R(y/x) = M'N'(y/x).$$

Поскольку матрица N' — неособенная, то существует такая система $r\times r$ –матриц $C(y/x)$, $(x, y) \in X \times Y$, что

$$N'(y/x) = C(y/x)N'.$$

Введем обозначения

$$B(y/x) = M'C(y/x)M'^{-1}.$$

Тогда получаем

$$R(y/x) = M'N'(y/x) = M'C(y/x)N =$$
$$= M'C(y/x)M'^{-1}M'N = B(y/x)R.$$

Дальнейшему доказательству предпошлем следующую лемму.

Лемма 3. *Если I — многотактный канал конечного ранга r, то неособенная составная последовательностная матрица максимального порядка r может быть выбрана так, что* $p_1 = q_1 = = p_1' = q_1' = e$.

Доказательство. Предположим, что это неверно и каждая составная последовательностная матрица порядка r с $p_1 = q_1 = p_1 = q_1 = e$ — особенная матрица. Будем рассматривать такие $\sum_1$, что M'_{Σ_1} — неособепная матрица. Для особенных матриц R будет особенной матрица N'_{Σ_2}. В данном случае матрица N'_{Σ_2} имеет вид

$$N'_{\Sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & \tau(q_2'/p_2') & \dots & \tau(q_r'/p_r') \\ 1 & \tau_{p_2q_2}(q_2'/p_2') & \dots & \tau_{p_2q_2}(q_r'/p_r') \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \tau_{p_rq_r}(q_2'/p_2') & \dots & \tau_{p_rq_r}(q_r'/p_r') \end{pmatrix}.$$

Наряду с матрицей N'_{Σ_2} рассмотрим квадратную матрицу r + 1-го порядка

$$N = \left|\begin{array}{c|c} N'_{\Sigma_2} & \begin{array}{c} \tau\left(q'_{r+1}/p'_{r+1}\right) \\ \tau_{p_2q_2}\left(q'_{r+1}/p'_{r+1}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau_{p_rq_r}\left(q'_{r+1}/p'_{r+1}\right) \end{array} \\ \hline 1 \ldots \tau_{p_{r+1}q_{r+1}}\left(q'_r/p'_r\right) & \tau_{p_{r+1}q_{r+1}}\left(q'_{r+1}/p'_{r+1}\right) \end{array}\right|.$$

Иначе матрица *N* может быть переписана в форме

$$N = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \ldots \quad \tau\left(q'_r/p'_r\right) \quad \tau\left(q'_{r+1}/p'_{r+1}\right) \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{array} & N\left(\Sigma'_1, \Sigma'_2\right) \end{array}\right),$$

где множества Σ'_1 и Σ'_2 суть

$$\Sigma'_1 = \{(p_2, q_2), \ldots, (p_r, q_r), (p_{r+1}, q_{r+1})\},$$
$$\Sigma'_2 = \{(p'_2, q'_2), \ldots, (p'_r, q'_r), (p'_{r+1}, q'_{r+1})\}.$$

Предположим, что Σ'_1 и Σ'_2 выбраны так, что матрица $R_{\Sigma'_1\Sigma'_2}$ — неособенная. Тогда будет неособенной и матрица $N\left(\Sigma'_1, \Sigma'_2\right)$, поскольку

$$R_{\Sigma'_1\Sigma'_2} = M_{\Sigma'_1} N\left(\Sigma'_1, \Sigma'_2\right).$$

Сама матрица *N* — особенная, так как, по условию, ранг канала *I* равен *r*, а матрица *N* имеет порядок *r+1*. Мы предположили, что будут особенными и все подматрицы *r*-го порядка матрицы *N*, включающие первый столбец. Но если вычислить детерминант |*N*|, разлагая его по элементам первой строки, то получаем $|N| = \left|N\left(\Sigma'_1, \Sigma'_2\right)\right|$, что противоречиво. Следовательно, существует неособенная подматрица *N* *r*-го порядка с первым столбцом из единиц.

В соответствии с леммой 3 далее будем полагать, что $p_1 = q_1 = p'_1 = q'_1 = e$. Пусть *Q* — неособенная $r \times r$-матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

а) сумма элементов матрицы *Q* по строкам $Q\mathbf{e}$ равна первому столбцу матрицы *R;*

б) первая строка матрицы *Q* есть стохастический вектор. Обозначим его через $\boldsymbol{\mu}(e)$.

Введем в рассмотрение систему $r \times r$ -матриц

$$A(y/x) = Q^{-1}B(y/x)Q.$$

Докажем, что ПВА $A = \langle A(y/x),\ (x,\ y) \in X \times Y\rangle$ с начальным вектором состояний $\boldsymbol{\mu}(e)$ представляет многотактный канал *I*.

Ясно, что для пар слов *(p, q)* произвольной длины

$$R(q/p) = B(q/p)R, \quad A(q/p) = Q^{-1}B(q/p)Q.$$

Имеем

$$\mu(e)A(q/p)\mathbf{e} = \mu(e)Q^{-1}B(q/p)Q\mathbf{e} =$$
$$= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)B(q/p)(\text{первый столбец матрицы } R) =$$
$$= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)(\text{первый столбец матрицы}$$
$$R(q/p)) = \tau\left(q_1qq_1'/p_1pp_1'\right) = \tau(q/p).$$

Далее,

$$\sum_y A(y/x)\,\mathbf{e} = \sum_y Q^{-1}B(y/x)\,Q\mathbf{e} =$$
$$= Q^{-1}\sum_y B(y/x)\ \ (\text{первый столбец матрицы } R) =$$
$$= Q^{-1}\sum_y\ \ (\text{первый столбец матрицы } R(y/x)).$$

Поскольку в силу автоматности канала каждая сумма $\sum_y \tau(yq/xp) = \tau(q/p)$, то

$$Q^{-1}\sum_y\ (\text{первый столбец матрицы } R(y/x)) =$$
$$= Q^{-1}\ (\text{первый столбец матрицы } R) = 1.$$

Из теоремы 3 следует, что понятие ранга составной последовательностной матрицы не является достаточным для того, чтобы характеризовать конечно-автоматную представимость автоматного канала. Можно привести пример автоматного канала, являющегося слабо конечно-автоматным, но не являющегося конечно-автоматным . Формулировка критерия конечной автоматности вновь приводит к необходимости рассматривать понятие выпуклого конечного опорного множества относительно системы вращений полугруппы $(X \times Y)^*$. Теорема 3 может быть переформулирована, с учетом указанного замечания, и мы получим критерий конечной автоматности многотактного канала еще в одной форме.

Рассмотрим вновь задачу синтеза конечного ВА, представляющего данный автоматный канал, начальный сегмент которого заданной длины *n* известен. В отличие от метода синтеза, использованного в предыдущем параграфе и сводящегося к синтезу полудетерминированного автомата, здесь мы применим метод, основанный на доказательстве теоремы 1. Этот метод предполагает умение строить выпуклое опорное множество для множества состояний канала. В общем случае такой алгоритм неизвестен. В некоторых случаях его удается построить, в частности, если известно, что существует выпуклое опорное множество, принадлежащее самому множеству состояний автоматного канала L_τ.

Пример 2. Как и в примере 1, будем предполагать, что исходные данные для синтеза автомата определены в виде конечной системы вероятностных распределений (4). Для сравнения возьмем ту же систему вероятностных распределений

$\tau(y_1y_2/x_1x_2)$:

x_1x_2 \ y_1y_2	00	01	10	11
00	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}
01	p_{21}	p_{22}	p_{23}	p_{24}
10	p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}
11	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}

Как и прежде, доопределяем систему условных вероятностей $\tau(\sigma_1\sigma_2/\rho_1\rho_2) = p_{ij}$ до конечно-автоматного канала условием

$$\tau(q_1q/p_1p) = \tau(q_1/p_1)\tau(q/p), \quad |p_1| = |q_1| = 2. \quad (10)$$

Тогда получим:

$$\tau_{\rho'\sigma'}(\sigma_1\sigma_2/\rho_1\rho_2) = \frac{\tau(\sigma'\sigma_1\sigma_2/\rho'\rho_1\rho_2)}{\tau(\sigma'/\rho')} = \frac{\tau(\sigma_2/\rho_2)}{\tau(\sigma'/\rho')}\tau(\sigma'\sigma_1/\rho'\rho_1).$$

Поскольку $\tau(yq/xp) = \tau(y/x)\tau_{x,y}(q/p)$, то

$$\tau_{\rho',\sigma'}(yq/xp) = \frac{\tau(\sigma' y/\rho' x)}{\tau(\sigma'/\rho')}\tau(q/p) = \tau_{\rho',\sigma'}(y/x)\,\tau(q/p). \quad (11)$$

Из соотношений (10) и (11) видно, что выпуклое опорное множество следует искать только среди каналов $\tau(q/p)$, $\tau_{xy}(q/p)$, $(x,\ y) \in X \times Y$. Для того чтобы его обнаружить, будем выписывать подряд значения вероятностей для пар слов *(p, q)* в лексикографическом порядке. Получаем, используя таблицы и соотношения (11):

	e/e	0/0	0/1	1/0	1/1	00/00
$\tau(q/p)$	1	1/3	2/3	2/3	1/3	
$\tau_{0,0}$	1	1	0	0	1	. . .
$\tau_{0,1}$	1	1/2	1/2	1/2	1/2	
$\tau_{1,1}$	1	1	0	0	1	

Значения вероятностей для пар слов длины более единицы в данном случае выписывать нет необходимости, поскольку ввиду (11) столбец с номером $\sigma q/\rho p$ имеет значения

$$\tau(\sigma q/\rho q) = \tau(\sigma/\rho)\,\tau(q/p),$$
$$\tau_{\sigma',\rho'}(\sigma q/\rho p) = \tau_{\sigma',\rho'}(\sigma/\rho)\,\tau(q/p),$$

где $\tau(q/p)$ — фиксированная неотрицательная константа для каждого столбца, поэтому линейная зависимость первых пяти строк определяет базисные каналы. Видно, что в качестве опорного множества можно выбрать каналы τ, $\tau_{0,0}$, $\tau_{0,1} = \tau_{1,0}$. Переходные матрицы искомого ВА определяются из того условия, что матрица $A(y/x)$ осуществляет (x, y)-вращение вершин опорного множества:

(0, 0)-вращение:

$$\tau \to \tau(0/0)\,\tau_{00} = \frac{1}{3}\tau_{00},$$
$$\tau_{00} \to \frac{\tau(00/00)}{\tau(0/0)}\tau = 0, \qquad A(0/0) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{01} \to \frac{\tau(10/00)}{\tau(1/0)}\tau = \frac{1}{2}\tau,$$

(0, 1)-вращение:

$$\tau \to \tau(0/1)\,\tau_{01} = \frac{2}{3}\tau_{01},$$
$$\tau_{00} \to \frac{\tau(00/01)}{\tau(0/0)}\tau = \tau, \qquad A(0/1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{01} \to \frac{\tau(10/01)}{\tau(1/0)}\tau = \frac{1}{2}\tau,$$

(1, 0)-вращение:

$$\tau \to \tau(1/0)\,\tau_{10} = \frac{2}{3}\tau_{01},$$
$$\tau_{00} \to \frac{\tau(01/00)}{\tau(0/0)}\tau = \tau, \qquad A(1/0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\tau_{01} \to \frac{\tau(11/01)}{\tau(1/0)}\tau = \frac{1}{2}\tau,$$

(1, 1)-вращение:

$$\tau \to \tau(1/1)\,\tau_{11} = \frac{1}{3}\tau_{00},$$
$$\tau_{00} \to \frac{\tau(01/01)}{\tau(0/0)}\tau = 0, \qquad A(1/1) = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
$$\tau_{01} \to \frac{\tau(11/01)}{\tau(1/0)}\tau = \frac{1}{2}\tau,$$

Начальный вектор состояний определяется из условия $\tau = \sum_i \alpha_i \tau_i$,

где τ_i, $i = 1, 2, 3$, составляют опорное множество. В нашем случае $\mu(e) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 0, 0)$. ВА построен. Он имеет три состояния, и это число уже неуменьшаемо.

1.4 Автоматы Мили и Мура

Конечный автомат представляет собой объект, который функционирует в моменты автоматного времени $t_0=0,\ t_1=T_0,\ t_2=2T_0$ или в конечном виде $t_i = i \cdot T_0\ ;\ i = \overline{0,\infty}$. Здесь T_0 период дискретизации модели автомата. В каждый момент $t_i \in T$, автомат может находиться в одном из конечного числа состояний $z_j \in Z$.

Принято различать два типа автоматов автомат Милля и автомат Мурра.

1.4.1. Автомат Мили.

Автомат Мили может быть задан функционала:

$$A = (Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda, q_0, F)$$

Здесь: Q является множеством возможных состояний $|Q| < \infty$.

Вместо Q часто используется также условное обозначение в виде латинской буквы Z.

Множество $\sum$ является алфавитом ввода,

$|\Sigma| < \infty$.

Множество Ω является алфавитом выхода,

$|\Omega| < \infty$.

Переходная функция имеет вид:

$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$.

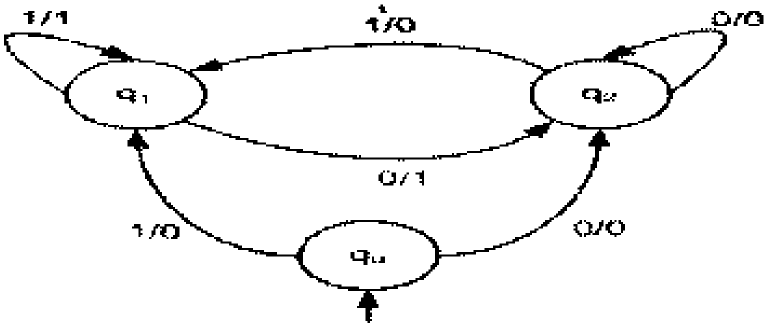
Функция выхода определяется выражением:

$\lambda : Q \times \Sigma \rightarrow \Omega$.

В конечном итоге выбирается компактная нотация и обе функции сводятся к одной переходной функции состояния $\zeta : Q \times \Sigma \rightarrow \Omega \times Q$.

$q_0 \in Q$ Это стартовое-начальное состояние. Вместо q_0 могут быть использованы условные обозначения начального состояния z_0 и s_0. Такое начальное состояние может быть отмечено двойной стрелкой. Множество $F \subseteq Q$ это конечное множество возможных доступных состояний. Когда автомат после чтения входных слов $w \in \Sigma^*$ находится в состоянии из множества F, то слово w относится к словарному множеству автомата L(A). Множество F может не использоваться, в этом случае w является частью словаря автомата, и оно определяется выходом автомата.

Автомат Миля может быть представлен в виде графа, дуга графа показывает переход из одного состояния в другое. Обозначается дуга кодом в виде Σ_i / Ω_i , то есть переход происходит в зависимости от значения из множества алфавита ввода и значения из множества алфавита вывода. Пример автомата Милли показан на рисунке. Начальное состояние автомата отмечено как q_0.



Пример автомата Милли

Переход из одного состояния в другое показывается дугами. Например, условное обозначение дуги 0/1, означает, что при задании 0 для смены состояний на выходе появляется 1.

1.4.2 Понятие автомата Мура

Автомат Мура - это совокупность объектов

$$M = (X, Y, S, \delta, \lambda, s^0) \quad (1.6)$$

(называемая здесь просто **автоматом),** компоненты которой имеют следующий смысл:

- *X, Y, S* - множества, элементы которых называются соответственно **входными сигналами, выходными сигналами,** и **состояниями** автомата *M,*
- $\delta : S \times X \to S$ и $\lambda : S \to Y$ - отображения, называемые соответственно **отображением перехода** и **отображением выхода** автомата *M,*
- s^0 - элемент *S,* называемый **начальным состоянием** автомата *M.*

Автомат является моделью динамической системы, работа которой происходит в дискретном времени и заключается в

- изменении состояний под воздействием входных сигналов, поступающих на её вход, и
- выдаче в каждый момент времени *t* = 0,1,... некоторого выходного сигнала.

Функционирование автомата *M* вида (1.6) происходит следующим образом. В каждый момент времени *t* = 0,1,... автомат *M* находится в некотором состоянии *s(t),* причем $s(0) \stackrel{\text{def}}{=} s^0$. В каждый момент времени *t* автомат *M*

- получает входной сигнал $x(t) \in X$,
- переходит в состояние $s(t+1) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(s(t), x(t))$, и
- выдаёт выходной сигнал $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(s(t))$.

Автомат Мура получил свое наименование по имени математика Эдварда Ф. Мура. По сравнению с автоматом Мили вход такого автомата исключительно зависит от его состояния. При достижении определенного состояния формируется выходное значение, которое не зависит от перехода в это состояние.

Автомат описывается кортежем $A = <Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda, q_0, F>$.

Здесь Q конечное множество состояний $|Q| < \infty$. множество ∑ - входной алфавит автомата $|\Sigma| < \infty, Q \cap \Sigma = 0$, множество Ω - выходной алфавит автомата $|\Omega| < \infty$. Переходная функция автомата описывается выражением $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, а функция выхода имеет вид

$\lambda : Q \to \Omega$

Когда автомат после чтения задающего слова $J \in \Sigma^*$находится в состоянии из множества F, тогда слово J принадлежит словарю языка автомата L(A).

В случае если регулярный язык автомата не имеет значение, множество F может быть исключено из кортежа автомата. Автомат будет определяться кортежем, состоящим из шести элементов. Под регулярным языком автомата понимают формальный язык, который отвечает определенным ограничениям.

Число состояний автомата Мура больше по сравнению с числом состояний соответствующего автомата Мили.

Пример автомата Мура

Пусть задан детерминированный автомат кортежем из шести элементов $< Q, \Sigma, \Omega, \delta, \lambda, q_0 >$. Известны следующие значения для множеств автомата

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$$

$$\Sigma = \{x, y, z\},$$

$$\Omega = \{a, b, c\}$$

Работу автомата покажем в виде графа

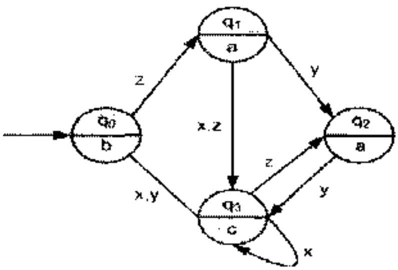


Рис. Граф автомата Мура

Работа автомата может быть представлена в табличном виде

Переход ()	x	y	z	Выходное зна
q_0	q_3	q_3	q_1	
q_1	q_3	q_2	q_3	
q_2	-	q_3	-	
q_3	q_3	-	q_2	

Из таблицы можно видеть: Если автомат переходит из состояния q_o в состояния q_3 , то входное значение равно y, а выходное значение равно c.

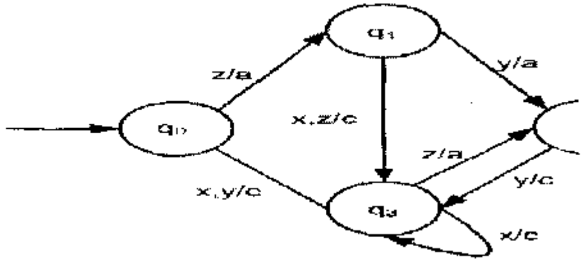


Рис.. Перевод автомата Мура в автомат Мили.

Для перевода на дуге перехода нужно указать дополнительно символ из множества выходных значений целевого состояния.

1.4.3 Достижимые состояния и реакция автомата

Пусть *M* - автомат вида (1.6). Для каждого $s \in S$ и каждой строки $u \in X^*$ запись *su* обозначает состояние, определяемое индуктивно следующим образом: $s\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} s$, и если *u* = *vx*, где $v \in X^*$ и $x \in X$, то $su \stackrel{\text{def}}{=} \delta(sv, x)$. Нетрудно видеть, что если строка *u* имеет вид $x_0 \ldots x_n$ то *su* - это состояние, в которое перейдёт *M* через *n+1* тактов времени, при условии, что

- в текущий момент времени *t* он находился в состоянии *s*, и
- в моменты $t, t+1, \ldots, t+n$ на вход *M* подавались сигналы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно.

Состояние $s \in S$ называется достижимым, если оно имеет вид s^0u для некоторого $u \in X^*$.

Реакция автомата *M* - это отображение $f_M : X^* \to Y$, определяемое следующим образом:

$$\forall u \in X^* \quad f_M(u) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(s^0 u).$$

Нетрудно видеть, что если строка $u \in X^*$ имеет вид $x_0 \ldots x_n$, то $f_M(u)$ - это выходной сигнал, который выдает *M* в момент *n* + 1, если в моменты 0,1,..., *n* на его вход подавались сигналы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ соответственно.

Автоматы называются **эквивалентными,** если их реакции совпадают.

1.4.4. Достижимая часть автомата

Пусть *M* - автомат вида (1.6). Обозначим

• символом S' множество всех достижимых состояний M, и
• символом M' автомат, получаемый из M заменой S на S', и отображений δ и λна ограничения этих отображений на подмножества $S' \times X$ и S' соответственно (нетрудно видеть, что

$\forall s \in S', \forall x \in X \;\; \delta(s, x) \in S')$

Автомат M' называется **достижимой частью** автомата M. Очевидно, что M и M' эквивалентны.
Если X и S конечны, то S' может быть найдено следующим образом: определим последовательность $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$,где

- $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{s^0\}$,
- $\forall i \geq 0 \quad S_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} S_i \cup \{sx \mid s \in S_i,\ x \in X\}$.

Т.к. все члены последовательности $S_1, S_2, \ldots$ - подмножества конечного множества S, то $\exists\, k < |S| : S_k = S_{k+1}$. Нетрудно видеть, что $S_k = S'$.

1.5. Линейные автоматы

Пусть заданы конечное множество X и натуральное число n.
Линейным автоматом (ЛА) размерности n над X мы будем называть тройку L вида

$$L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda), \quad (1.7)$$

где
• ξ^0 - вектор-строка размерности n над **R**,
• $\forall x \in X \;\; L^x$ - квадратная матрица размерности n над **R**, и
• λ - вектор-столбец размерности n над **R**.
Для каждого ЛА L мы будем обозначать записью dim L размерность этого ЛА.
Л А (1.7) определяет автомат Мура, обозначаемый тем же символом L,
• множествами входных и выходных сигналов которого являются X и **R** соответственно,
• множеством состояний которого является совокупность $\mathbf{R}^n$ всех вектор-строк размерности n над **R**,
• начальным состоянием - вектор-строка ξ^0,
• отображение перехода сопоставляет паре $(\xi, x) \in \mathbf{R}^n \times X$ вектор-строку ξL^x, и
• отображение выхода сопоставляет состоянию $\xi \in \mathbf{R}^n$ число

$\xi\lambda \in \mathbf{R}$.

Нетрудно видеть, что реакция f_L данного автомата сопоставляет каждой строке $u \in X^*$ число $\xi^0 L^u \lambda$, где $L^\varepsilon \overset{\text{def}}{=} E$ (единичная матрица размерности *n),* и если строка *u* имеет вид $x_1 \dots x_k$, то

$L^u \overset{\text{def}}{=} L^{x_1} \dots L^{x_k}$.

Пусть *f* - функция из $\mathbf{R}^{X^*}$. Мы будем называть её **линейно-автоматной функцией (ЛАФ),** если для некоторого ЛА *L* над *X* верно равенство $f = f_L$.

2. Вероятностные автоматы и вероятностные реакции

2.1 Вероятностные автоматы

2.1.1 Понятие вероятностного автомата

Вероятностный автомат (ВА) - это пятерка *А* вида

$$A = (X, Y, S, P, \xi^0) \quad (2.1)$$

компоненты которой имеют следующий смысл.

1. *X, Y* и *S* - конечные множества, элементы которых называются соответственно **входными сигналами, выходными сигналами** и **состояниями** ВА *A*.

2. *Р* - СФ вида $P : S \times X \to S \times Y$, называемая **поведением** ВА *A*. $\forall (s, x, s', y) \in S \times X \times S \times Y$ значение $P(s, x, s', y)$ понимается как вероятность того, что

• если в текущий момент времени *(t) A* находится в состоянии s, и в этот момент времени на его вход поступил сигнал *x,*

• то в следующий момент времени $(t + 1)$ *A* будет находиться в состоянии s', и в момент времени *t* выходной сигнал *A* равен *у.*

3. ξ^0 - распределение на *S,* называемое **начальным распределением** ВА *A*. $\forall s \in S$ значение s^{ξ^0} понимается как вероятность того, что в начальный момент времени $(t = 0)$ ВА *A* находится в состоянии s.

ВА (2.1) называется **детерминированным,** если $\xi^0 = \xi_s$ для некоторого $s \in S$, и СФ *P* является детерминированной.

2.1.2 Матрицы, связанные с вероятностными автоматами

Пусть *A* - ВА вида (2.1), и упорядочение множества *S* его состояний имеет вид ($s_1,..., s_n$). Для любых $x \in X$ и $y \in Y$ мы будем обозначать записью A^{xy} матрицу порядка *n*

$$\begin{pmatrix} P(s_1, x, s_1, y) & \dots & P(s_1, x, s_n, y) \\ \dots & \dots & \dots \\ P(s_n, x, s_1, y) & \dots & P(s_n, x, s_n, y) \end{pmatrix} \quad \textbf{(2.2)}$$

и для любой пары строк $u \in X^*, v \in Y^*$ мы будем обозначать записью $A^{u,v}$ (запятая в этой записи может опускаться) матрицу порядка *n,* определяемую следующим образом:

- $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E$ (единичная матрица),
- если $|u| \neq |v|$, то $A^{u,v} = 0$ (нулевая матрица), и
- если $u = x_1 \dots x_k$ и $v = y_1 \dots y_k$, то $A^{u,v} = A^{x_1 y_1} \dots A^{x_k y_k}$.

Пусть *s* - произвольное состояние из *S*, и в упорядочении элементов *S* данное состояние имеет номер *i* (т.е. $s = s_i$). Мы будем называть

- строку номер *i* матрицы $A^{u,v}$ - **строкой** *s*, и обозначать её записью $\vec{A}_s^{u,v}$
- столбец номер *i* матрицы $A^{u,v}$ - **столбцом** *s*, и обозначать его записью $A_s^{u,v\downarrow}$

Для любых $s, s' \in S$ мы будем обозначать записью $A_{s,s'}^{u,v}$ элемент матрицы $A^{u,v}$, находящийся в строке *s* столбце *s'*.
Если строки $u \in X^*$ и $v \in Y^*$ имеют вид $x_0 \dots x_k$ и $y_0 \dots y_k$ соответственно, то $A_{s,s'}^{u,v}$ можно понимать как вероятность того, что

- если в текущий момент *(t) A* находится в состоянии *s*, и, начиная с этого момента, на вход *A* последовательно поступали элементы строки *u* (т.е. в момент *t* поступил сигнал x_0, в момент $t + 1$ поступил сигнал x_1, и т.д.)
- то в моменты $t, t+1, \dots, t+k$ выходные сигналы *A* равны $y_0, \dots, y_k$ соответственно, и в момент $t+k+1$ *A* будет находиться в состоянии *s'*.

2.1.3. Вероятностные автоматы Мили

2.1.3.1. Дискретно стохастические модели. (P-схемы)

Сущность дискретизации времени при дискретно - стохастическом подходе остается аналогичной конечным автоматом. Влияние стохастичности рассмотрим на разновидности этих автоматов, а именно на вероятностных автоматах.

<u>Вероятностный автомат</u> - это дискретный преобразователь информации с памятью, функционирование которого, в каждом такте, зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано стохастически.

Рассмотрим множество G, элементами которого являются (x_j, z_s) , $x_j \in X$, $z_s \in Z$

X - множество входных значений,

Z -Множество возможных состояний.

Если существует две такие функции ϕ , f с помощью которых выполняется отображение $G \to Z$, $G \to Y$, то говорят что пятерка элементов, входящая в кортеж $F=(Z,X,Y,\phi,f)$ определяет автомат детерминированного типа.

Здесь Y - множество выходных значений.

Введем в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть Ф множество возможных пар вида $\Phi(z_k,y_j)$; $y_j \in Y$

Потребуем, чтобы любой элемент множества G порождал на множестве Φ некоторый закон распределения вида:

Элементы из Φ …(z_1, y_1)… (z_1, y_2) …(z_k, y_{j-1}) (z_k, y_J)

(x_i, z_s) ….b_{11}… b_{12}…$b_{k(j-1)}$ b_{kJ}

$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$; b_{kj} - это вероятность перехода автомата в состояние z_k и выдачи выходного сигнала y_j, если автомат находиться в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i

Число таких распределений равно числу элементов множества G и составляют множество B . Тогда кортеж $P=<Z,X,Y,B>$ называется вероятностным автоматом.

2.1.3.2. Вероятностный автомат Мили

Пусть элементы множества g порождают некоторые законы распределения на множествах z и *y*. Элементы из Y y_1 ,y_2 ….., y_{j-1} ,y_j

(x_i,z_s) q_1 ,q_2 ....., q_{j-1} ,q_j

Элементы из Z z_1 , z_2 ....., z_{k-1} , z_k (x_i,z_s) υ_1 , υ_2 ....., υ_{k-1}, υ_k

$\sum_{j=1}^{J} q_j = 1$ $\sum_{k=1}^{K} \upsilon_k = 1$ q_j и υ_k, это вероятности перехода автоматов в состояние z_k и появления выходного сигнала y_k , если автомат находиться в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i. Если для всех k и j выполняется условие $q_k z_j = b_{kj}$, то такой P- автомат называется вероятностным автоматом Милли. У такого автомата распределения независимы для нового состояния и его выходного сигнала.

2.1.4. Вероятностные автоматы Мура

2.1.4.1. Дискретно стохастические модели, (p- схемы)

Сущность дискретизации времени при дискретно - стохастическом подходе остается аналогичной конечным автоматом. Влияние стохастичности рассмотрим на разновидности этих автоматов, а именно на вероятностных автоматах.

Вероятностный автомат - это дискретный преобразователь информации с памятью, функционирование которого, в каждом такте, зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано стохастически.

Рассмотрим множество G, элементами которого являются (x_i,z_s) , $x_i \in X$, $z_s \in Z$

X - множество входных значений, Z -Множество возможных состояний.

Если существует две такие функции ϕ , f с помощью которых выполняется отображение $G \to Z$, $G \to Y$, то говорят что пятерка элементов, входящая в кортеж $F=(Z,X,Y,\phi,f)$ определяет автомат детерминированного типа.

Здесь Y - множество выходных значений.

Введем в рассмотрение более общую математическую схему. Пусть Ф множество возможных пар вида $\Phi(z_k,y_j)$; $y_j \in Y$

Потребуем, чтобы любой элемент множества G порождал на множестве Ф некоторый закон распределения вида:

Элементы из Φ ...(z_1 ,y_1)... (z_1 ,y_2) ...(z_k ,y_{j-1}) (z_k ,y_J)

(x_i,z_s) ....b_{11}... b_{12}...$b_{k(j-1)}$ b_{kJ}

$\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J} b_{kj} = 1$; b_{kj} - это вероятность перехода автомата в состояние z_k и выдачи выходного сигнала y_j, если автомат находиться в состоянии z_s и на его вход поступил входной сигнал x_i

Число таких распределений равно числу элементов множества G и составляют множество B . Тогда кортеж $P=<Z,X,Y,B>$ называется вероятностным автоматом.

2.1.4.2. Вероятностный автомат Мура

Пусть определение выходного сигнала р-автомата завит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы. Элементы из Y $y_1, y_2 \ldots, y_{i-1}, y_i$ z_k $s_1, s_2 \ldots\ldots, s_{i-1}, s_i$

$$\sum_{i=1}^{I} s_i = 1$$

s_i - вероятность выдачи выходного сигнала y_i при условии ,что автомат находится в z_k

Если для всех k и i выполняется условие $z_k s_i = b_{ki}$, то такой Р- автомат называется вероятностным автоматом Мура.

Y и Z детерминированные автоматы.

Частным случаем Р-автомата, задаваемого как $P=<Z,X,Y,B>$ являются автоматы, у которых либо переход в новое состояние, либо выходной сигнал определяются детерминировано. Если выходной сигнал Р-автомата определяется детерминировано то такой автомат называется Y-детерминированным вероятностным автоматом. Аналогично, Z-детерминированным вероятностным автоматом называется Р-автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

2.1.5. Реакция вероятностного автомата

Пусть заданы ВА *A* вида (2.1) и распределение $\xi \in S^{\triangle}$.

Мы будем говорить, что **ВА *A* в момент времени *t* имеет распределение** ξ, если для каждого состояния $s \in S$ вероятность того, что *A* в момент времени *t* находится в состоянии *s*, равна s^{ξ}.

Реакцией ВА *A* в распределении ξ называется функция

$$A^{\xi} : X^* \times Y^* \to \mathbf{R}$$

определяемая следующим образом:

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \quad A^{\xi}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \xi A^{u,v} I$$

где запись $\boldsymbol{I}$ обозначает вектор-столбец порядка |S|, все компоненты которого равны **1.**

Реакцией ВА *A* мы будем называть реакцию этого ВА в его начальном распределении. Мы будем обозначать реакцию ВА *A* записью f_A.

Нетрудно доказать, что если ВА *A* детерминированный, то СФ f_A - детерминированная.

Если строки $u \in X^*$ и $v \in Y^*$ имеют вид $x_0 \ldots x_k$ и $y_0 \ldots y_k$ соответственно, то $f_A(u, v)$ можно понимать как вероятность того, что если, начиная с момента 0, на вход *A* последовательно поступали элементы строки *u* (т.е. в момент 0 поступил сигнал x_0, в момент 1 поступил сигнал x_1, и т.д.), то в моменты 0,1,..., *k* выходные сигналы *A* равны $y_0, \ldots, y_k$ соответственно.

Теорема 1. Если *A* - ВА вида (2.1) и $\xi \in S^{\triangle}$, то A^{ξ} - СФ.

Доказательство.

Поскольку $\forall u \in X^*, \forall v \in X^*$ значение $A^{\xi}(u, v)$ неотрицательно, то для доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$\forall u \in X^* \quad \sum_{v \in Y^*} A^{\xi}(u, v) = 1,$$, т.е.

$$\forall u \in X^* \quad \sum_{v \in Y^*} \xi A^{u,v} I = 1. \quad \textbf{(2.3)}$$

Поскольку $A^{u,v} = 0$ при $|u| \neq |v|$, то (2.3) эквивалентно условию:

$\forall k \geq 0$

$$\forall u \in X^k \quad \sum_{v \in Y^k} \xi A^{u,v} I = 1. \quad (2.4)$$

Докажем (2.4) индукцией по *k*. Если *k* = 0, то (2.4) следует из того, что $A^{\varepsilon,\varepsilon} = E$ и $\xi E I = \xi I = 1$ (т.к. $\xi \in S^{\triangle}$).

Пусть (2.4) верно для некоторого *k*. Докажем, что

$$\forall u \in X^{k+1} \quad \sum_{v \in Y^{k+1}} \xi A^{u,v} I = 1. \quad \textbf{(2.5)}$$

(2.5) эквивалентно соотношению

$$\forall u \in X^k, \forall x \in X \quad \sum_{v \in Y^k,\, y \in Y} \xi A^{ux,vy} I = 1. \quad (2.6)$$

Т.к. $A^{ux,vy} = A^{u,v} A^{xy}$, то (2.6) можно переписать в виде

$$\forall u \in X^k, \ \forall x \in X \quad \sum_{v \in Y^k} \xi A^{u,v} (\sum_{y \in Y} A^{xy} I) = 1. \quad (2.7)$$

(2.7) следует из (2.4) и равенства

$$\sum_{y \in Y} A^{xy} I = I \quad (2.8)$$

которое верно потому, что если A^{xy} имеет вид (2.2), то $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ элемент с индексом *i* столбца $\sum_{y \in Y} A^{xy} I$ равен сумме

$$\sum_{y \in Y,\ j=1,\ldots,n} P(s_i, x, s_j, y)$$

которая равна 1, т.к. *P* - СФ вида $P : S \times X \underset{r}{\rightarrow} S \times Y.$

Распределения $\xi_1, \xi_2 \in S^{\Delta}$ называются **эквивалентными относительно** *A,* если реакции A^{ξ_1} и A^{ξ_2} совпадают, т.е.

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \qquad \xi_1 A^{u,v} I = \xi_2 A^{u,v} I.$$

Если распределения ξ_1 и ξ_2 эквивалентны относительно *A,* то мы будем обозначать этот факт записью $\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2$.

2.1.6 Базисные матрицы вероятностных автоматов

Ниже мы будем использовать следующее обозначение: для каждого множества *W* элементов какого-либо линейного пространства мы будем обозначать записью *(W)* подпространство этого линейного пространства, порожденное векторами из *W.*

Пусть *A* - ВА вида (2.1). Обозначим записью *AI* совокупность всех вектор-столбцов вида $A^{u,v} I$, где $u \in X^*, v \in Y^*$.

Базисной матрицей ВА *A* называется матрица, обозначаемая записью *[A],* и удовлетворяющая условиям:

- каждый столбец матрицы *[A]* является элементом *AI,*
- столбцы матрицы *[A]* образуют базис пространства <*AI*>. Нетрудно видеть, что для любых $\xi_1, \xi_2 \in S^{\Delta}$

$$\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 [A] = \xi_2 [A].$$

Для каждого $s \in S$ мы будем называть **строкой** *s* матрицы *[A]* ту её строку, которая содержит значения вида $\vec{A}_s^{u,v} I$. Мы будем обозначать эту строку записью $[A]_s$.

Матрица *[A]* м.б. построена при помощи излагаемого ниже алгоритма.

Пусть $k \geq 0$. Обозначим записью AI_k совокупность вектор-столбцов вида $A^{u,v}I$, где $u \in X^*$, $v \in Y^*$, $|u| = |v| \leq k$. Нетрудно видеть, что

$$\langle AI_0 \rangle \subseteq \langle AI_1 \rangle \subseteq \langle AI_2 \rangle \subseteq \ldots \quad \text{и} \quad \bigcup_{k \geq 0} \langle AI_k \rangle = \langle AI \rangle. \qquad (2.9)$$

Поскольку все пространства $\langle AI_k \rangle$ являются подпространствами конечномерного линейного пространства (размерности |S|), то, следовательно, последовательность включений в (2.9) не может неограниченно возрастать, т.е. для некоторого k верны равенства

$$\langle AI_k \rangle = \langle AI_{k+1} \rangle = \langle AI_{k+2} \rangle = \ldots = \langle AI \rangle. \quad (2.10)$$

Алгоритм построения матрицы *[A]* основан на следующей теореме.

Теорема 2. Если для некоторого k верно равенство

$$\langle AI_{k+1} \rangle = \langle AI_k \rangle \quad (2.11)$$

то k обладает свойством (2.10).

Доказательство.

Достаточно доказать равенство

$$\langle AI_{k+2} \rangle = \langle AI_k \rangle. \quad (2.12)$$

Пусть $V \in AI_{k+2} \setminus AI_{k+1}$, тогда V имеет вид $A^{xy}A^{u,v}I$, где $x \in X, y \in Y$ и $|u| = |v| = k+1$.

Поскольку $A^{u,v}I \in AI_{k+1} \subseteq \langle AI_k \rangle$, то, следовательно, $A^{u,v}I$ является линейной комбинацией вида

$$A^{u,v}I = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i \quad (\forall i = 1, \ldots, m \quad \lambda_i \in \mathbf{R},\ V_i \in AI_k).$$

Следовательно,

$$V = A^{xy}\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i V_i \Big) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (A^{xy} V_i) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i W_i \quad (2.13)$$

где $W_i \in AI_{k+1} \subseteq \langle AI_k \rangle$. Откуда на основании (2.13) заключаем, что V является линейной комбинацией элементов $\langle AI_k \rangle$, поэтому $V \in \langle AI_k \rangle$. Таким образом, $AI_{k+2} \subseteq \langle AI_k \rangle$, откуда следует (2.12).

Из теоремы 2 непосредственно следует, что если k - наименьший номер, для которого верно (2.11), то $k \leq |S| - 1$.

Используя теорему 2, можно определить следующий алгоритм построения матрицы *[A]*. Мы будем обозначать записью *CA* переменную, значениями которой являются множества вектор-столбцов порядка |*S*|. Алгоритм состоит из перечисленных ниже трёх шагов. Шаг 2 может выполняться несколько раз.

1. Значение *CA* полагается равным $\{I\}$ $(= AI_0)$.
2. Пусть $V_1, \ldots, V_m$ - список всех столбцов вида $A^{xy}V$, где $x \in X, y \in Y$ и $V \in CA$. Выполняется цикл:

for i=1 **to** m **do** {
  if $V_i \notin \langle CA \rangle$ **then** V_i добавляется к CA
}

3. Если во время выполнения шага 2 множество *CA* изменилось, то шаг 2 выполняется ещё раз, иначе алгоритм заканчивает работу.
Обоснуем корректность данного алгоритма. Нетрудно видеть, что если перед выполнением шага 2 было верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI_k \rangle$ для некоторого $k \geq 0$, то после выполнения этого шага будет верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI_{k+1} \rangle$. Следовательно, через не более чем |S| — 1 выполнений шага 2 будет верно равенство $\langle CA \rangle = \langle AI \rangle$, и шаг 2 выполнится не более |S| раз. Поскольку каждый добавляемый к *CA* вектор V_i не принадлежит пространству $\langle CA \rangle$, то, следовательно, в каждый момент времени *CA* состоит из линейно независимых векторов, т.е. после завершения работы алгоритма *CA* является базисом пространства $\langle AI \rangle$.

2.1.7 Матричные обозначения

Мы будем использовать следующие обозначения, связанные с матрицами.

• Если ξ_1 и ξ_2 - вектор-строки размерностей n_1 и n_2 соответственно, то запись (ξ_1, ξ_2) обозначает вектор-строку размер ности $n_1 + n_2$, первые n_1 компонентов которой совпадают с соответствющими компонентами ξ_1, а остальные компоненты - с соответствующими компонентами ξ_2.

• Если λ_1 и λ_2 - вектор-столбцы размерностей n_1 и n_2 соответственно, то запись $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ обозначает вектор-столбец размерности $n_1 + n_2$, первые n_1 компонентов которого совпадают с соответствующими компонентами λ_1, а остальные компоненты - с соответствующими компонентами λ_2.

• Если *A* и *B* - матрицы размерностей (m, n) и (k, l) соответственно, то запись $\begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$ обозначает матрицу размерности $(m + k, n + l)$, определяемую естественным образом.

• Для каждой матрицы *A* запись .$\tilde{A}$(или$A^{\sim}$) обозначает матрицу, транспонированную к матрице *A*.

2.1.8 Эквивалентность вероятностных автоматов

Пусть задана пара ВА A_1, A_2, у которых одинаковы множества входных сигналов и множества выходных сигналов, т.е. A_1 и A_2 имеют вид

$$A_i = (X, Y, S_i, P_i, \xi_i^0) \quad (i = 1, 2).$$

A_1 и A_2 называются **эквивалентными,** если их реакции совпадают, т.е. верно равенство

$$f_{A_1} = f_{A_2}. \quad (2.14)$$

Нетрудно доказать, что равенство (2.14) равносильно соотношению $\xi_1 \underset{A}{\sim} \xi_2$, где *A* имеет вид $(X, Y, S_1 \sqcup S_2, P, \xi^0)$, и

$$\forall x \in X,\ y \in Y \quad A^{xy} = \begin{pmatrix} A_1^{xy} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{xy} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\xi_1 = (\xi_1^0, \mathbf{0}), \ \ \xi_2 = (\mathbf{0}, \xi_2^0)$$

(символы 0 в (2.15) изображают нулевые матрицы или вектор-строки соответствующих размеров).

Если ВА A_1 и A_2 эквивалентны, то мы будем обозначать этот факт записью $A_1 \sim A_2$.

2.2 Редукция вероятностных автоматов

Редукция ВА заключается в построении по заданному ВА *A* такого ВА, который был бы эквивалентен *A,* и содержал меньше состояний, чем *A* (если это возможно). Мы будем рассматривать два метода редукции: выделение достижимой части и удаление выпуклых комбинаций.

2.2.1 Выделение достижимой части

Пусть *A* - ВА вида (2.1). Понятие **достижимого состояния** ВА *A* определяется рекурсивно: состояние $s \in S$достижимо, если

• либо$s^{\xi^0} \neq 0$,

• либо существует достижимое состояние$s' \in S$,такое, что

$$\exists\, x \in X, y \in Y : \quad P(s', x, s, y) > 0. \quad (2.16)$$

Нетрудно доказать, что $A \sim A_r \stackrel{\text{def}}{=} (X, Y, S_r, P_r, \xi_r^0)$, где

- S_r состоит из всех достижимых состояний ВА A, и
- P_r и ξ^0_r являются соответствующими ограничениями Р и ξ^0.

ВА A_r называется **достижимой частью** ВА A. Алгоритм построения по заданному ВА его достижимой части аналогичен соответствующему алгоритму для детерминированных автоматов .

2.2.2 Удаление выпуклых комбинаций

Пусть A - ВА вида (X, Y, S, P, ξ^0). Мы будем говорить, что со-
Стояние $s \in S$ является **выпуклой комбинацией** других состояний ВА A, если строка s матрицы $[A]$ является выпуклой комбинацией других строк этой матрицы, т.е. существует распределение $\xi \in (S \setminus \{s\})^{\Delta}$, удовлетворяющее условию

$$[A]_s = \sum_{s' \in S \setminus \{s\}} (s')^{\xi} [A]_{s'}. \quad (2.17)$$

Если в множестве S состояний ВА A есть состояние s, являющееся выпуклой комбинацией других состояний этого ВА, то можно определить ВА B, который эквивалентен A, и множество состояний которого имеет вид $S \setminus \{s\}$. Мы будем говорить, что B получается из A путем удаления выпуклой комбинации s.

Автомат B определяется следующим образом. Пусть упорядочение множества S имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$,и вышепомянутое состояние s является последним в этом упорядочении (т.е. $s = s_n$). Обозначим символом M матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ & \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ s_1^{\xi} & s_2^{\xi} & \ldots & s_{n-1}^{\xi} & 0 \end{pmatrix}$$

и обозначим символом C ВА $(X, Y, S, Q, \xi^0 M)$, где

$$\forall x \in X, \ y \in Y \quad C^{xy} = A^{xy} M. \quad (2.18)$$

Докажем, что $\forall u \in X^*, v \in Y^*$ верно равенство

$$C^{u,v} I = A^{u,v} I. \quad (2.19)$$

(2.19) верно, когда u и v имеют разную длину. Для u и v одинаковой длины будем доказывать (2.19) индукцией по длине u.

1. (2.19) верно, когда $u = v = \varepsilon$.
2. Пусть (2.19) верно для некоторых u, v. Тогда $\forall x \in X, y \in Y$

$$C^{xu,yv} I = C^{xy} C^{u,v} I = A^{xy} M A^{u,v} I \quad (2.20)$$

(второе равенство в (2.20) следует из (2.18) и (2.19)). Докажем, что верно равенство

$MA^{u,v}I = A^{u,v}I.$ (2.21) Из (2.17)

следует, что

$$(s_1^{\xi} \ \dots \ s_{n-1}^{\xi} \ 0)[A] = [A]_{s_n} = (0 \ \dots \ 0 \ 1)[A]$$

откуда следует

$$M[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} [A] = [A] \quad (2.22)$$

Из (2.22) следует, что для каждого столбца *V*, матрицы *[A]* верно равенство

MV = *V*. (2.23)

Поскольку столбцы *[A]* образуют базис *<AI>*, то, следовательно, (2.23) верно в том случае, когда *V* является произвольным элементом *<AI>*. В частности, (2.23) верно для всех векторов из *AI*. Таким образом, равенство (2.21) доказано.

Из (2.21) и из (2.20) следует, что

$$C^{xu,yv}I = A^{xy}MA^{u,v}I = A^{xy}A^{u,v}I = A^{xu,yv}I. \quad (2.24)$$

Таким образом, если (2.19) верно, то будет верно равенство, получаемое из (2.19) заменой *u* на *xu,* а *v* - на *yv*.

Следовательно, (2.19) верно для всех $u \in X^*, \ v \in Y^*.$

Докажем, что ВА *A* и *C* эквивалентны, т.е. $f_A = f_C.$ Данное равенство равносильно утверждению

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \qquad \xi^0 A^{u,v}I = \xi^0 MC^{u,v}I. \quad (2.25)$$

(2.25) следует из (2.19) и из (2.21).

Заметим, что состояние s_n ВА *C* не является достижимым. Действительно, т.к. последний столбец матрицы *M* является нулевым, то

- значение $s_n^{\xi^0 M}$, которое является последним элементом вектор-строки $\xi^0 M$, равно 0, и
- для каждого $x \in X$ и каждого $y \in Y$ последний столбец матрицы $C^{xy} = A^{xy}M$ является нулевым, поэтому неравенство (2.16), в котором *P* заменено на *Q,* и *s* - на s_n, неверно для каждого $s' \in S.$

Искомый ВА *B* определяется как ВА, получаемый из ВА *C* удалением недостижимого состояния s_n и соответствующим ограничением поведения и начального распределения ВА *C.* Из утверждения в пункте

2.2.1 следует, что *C* ~ *B*. Поскольку свойство эквивалентности ВА является транзитивным, то из *A* ~ *C* и C~B следует, что *A* ~ *B*.

2.2.3 Метод распознавания выпуклых комбинаций состояний

Для реализации изложенного в предыдущем пункте метода редукции ВА путем удаления выпуклых комбинаций состояний необходимо иметь алгоритм решения следующей задачи: пусть задан ВА *A,* и *s* - одно из состояний этого ВА, требуется

• определить, является ли состояние *s* выпуклой комбинацией других состояний ВА *A,* т.е. является ли строка $[A]_s$ выпуклой комбинацией других строк матрицы $[A]$, и

• если ответ на этот вопрос положителен, то найти коэффициенты этой выпуклой комбинации.

Данную задачу можно свести к задаче линейного программирования (ЗЛП), на основе нижеследующей теоремы.

Теорема 3.

Пусть задан ВА *A,* и *s* - одно из состояний этого ВА. Обозначим записью $\{W_1, \ldots, W_m\}$ совокупность строк матрицы $[A]$, за исключением строки $[A]_s$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. $[A]_s$ является выпуклой комбинацией строк $\{W_1, \ldots, W_m\}$, т.е.

$$\exists\, (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \{1, \ldots, m\}^{\Delta} : [A]_s = \sum_{i=1}^{m} \xi_i W_i. \quad (2.26)$$

2. Существует решение ЗЛП, в которой

• множество переменных имеет вид

$\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$

где *n* - число состояний ВА *A,*

• ограничения в форме неравенств имеют вид $x_i \geq 0$ и $y_j \geq 0$, где $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$,

• ограничения в форме равенств выражаются в виде матричного равенства $(X,\ Y) \begin{pmatrix} W \\ E_n \end{pmatrix} = [A]_s$, где

— *X* и *Y* - вектор-строки переменных:

$$X = (x_1, \ldots, x_m), \quad Y = (y_1, \ldots, y_n).$$

— *W* - матрица, получаемая из $[A]$ путем удаления строки $[A]_s$,

— E_n - единичная матрица порядка n, а также равенства

$$\sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,$$

- целевая функция имеет вид $\sum_{i=1}^{n} y_i \to \min,$

и значение целевой функции на этом решении равно 0.

Доказательство.

Пусть верно утверждение 1. Тогда решение ЗЛП имеет вид

$$x_1 = \xi_1, \ldots, x_m = \xi_m,\ y_1 = 0, \ldots, y_n = 0.$$

Обратно, пусть верно утверждение 2, т.е. существует решение ЗЛП, значение целевой функции на котором равно 0. Тогда из ограничения $y_j \geq 0\ (j = 1, \ldots, n)$ следует, что значения переменных $y_1, \ldots, y_n$ на этом решении равны 0. Нетрудно видеть, что совокупность $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_m$ на этом решении удовлетворяет условиям в соотношении (2.26).

Отметим, что одно из опорных решений ЗЛП, сформулированной в теореме 3, имеет вид $X = \mathbf{0},\ Y = [A]_s$.

2.3 Вероятностные реакции

2.3.1 Понятие вероятностной реакции

Пусть X и Y - конечные множества.

Вероятностной реакцией (ВР) из X в Y называется СФ $f : X^* \underset{r}{\to} Y^*$, удовлетворяющая условию: $\forall u \in X^*, \forall v \in Y^*$

$$\textbf{если } |u| \neq |v|, \textbf{ то } f(u,v) = 0$$
$$\forall x \in X \quad f(u,v) = \sum_{y \in Y} f(ux, vy). \quad (2.27)$$

Запись $R(X,Y)$ обозначает совокупность всех **ВР** из X в Y.

Теорема 4.

Для каждого ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ и каждого $\xi \in S^{\Delta}$

$A^{\xi} \in R(X, Y)$.

Доказательство.

Докажем, что $\forall u \in X^*, \forall v \in Y^*$ СФ $f \stackrel{\text{def}}{=} A^{\xi}$ удовлетворяет условию (2.27).

- Если $|u| \neq |v|$, **то** $A^{u,v} = \mathbf{0}$, поэтому $A^{\xi}(u,v) = \xi A^{u,v} I = 0,$
- $\forall x \in X$

$$\sum_{y\in Y} A^{\xi}(ux, vy) = \sum_{y\in Y} \xi A^{ux,vy} I =$$
$$= \sum_{y\in Y} \xi A^{u,v} A^{xy} I = \xi A^{u,v}\left(\sum_{y\in Y} A^{xy} I\right) = \quad (2.28)$$
$$= \xi A^{u,v} I = A^{\xi}(u, v)$$

(в (2.28) используется равенство (2.8)).

2.3.2 Остаточные вероятностные реакции

Пусть заданы

- конечные множества *X* и *Y*,
- ВР $f \in R(X, Y)$,f
- строки $u \in X^*, v \in Y^*$, такие, что $f(u, v) \neq 0$.

Обозначим записью $f_{u,v}$ функцию вида $f_{u,v} : X^* \times Y^* \to \mathbf{R}$, определяемую следующим образом:

$$\forall u' \in X^*, \forall v' \in Y^* \quad f_{u,v}(u', v') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(uu', vv')}{f(u, v)}. \quad (2.29)$$

Теорема 5.
Если $f \in R(X, Y)$ и $f(u, v) \neq 0$, то функция $f_{u,v}$, определяемая соотношением (2.29), является СФ.
Доказательство.
Поскольку все значения функции $f_{u,v}$ неотрицательны, то достаточно доказать, что

$$\forall u' \in X^* \quad \sum_{v'\in Y^*} f_{u,v}(u', v') = 1. \quad (2.30)$$

(2.30) эквивалентно соотношению

$$\forall u' \in X^* \quad \sum_{v'\in Y^*} f(uu', vv') = f(u, v). \quad (2.31)$$

Из предположения $f(u, v) \neq 0$ следует, что $|u| = |v|$. Поэтому $f(uu', vv') = 0$ при $|u'| \neq |v'|$, и, следовательно, (2.31) эквивалентно условию: $\forall k \geq 0$

$$\forall u' \in X^k \quad \sum_{v'\in Y^k} f(uu', vv') = f(u, v). \quad (2.32)$$

Докажем (2.32) индукцией по *k*. Если *k* = 0, то (2.32), очевидно, верно. Пусть (2.32) верно для некоторого *k*. Докажем, что

$$\forall u' \in X^{k+1} \quad \sum_{v' \in Y^{k+1}} f(uu', vv') = f(u, v). \quad (2.33)$$

(2.33) эквивалентно утверждению: $\forall u' \in X^k, \ \forall x \in X$

$$\sum_{v' \in Y^k, \ y \in Y} f(uu'x, vv'y) = f(u, v). \quad (2.34)$$

Поскольку $\forall x \in X, \ \forall u' \in X^k, \ \forall v' \in Y^k$

$$f(uu', vv') = \sum_{y \in Y} f(uu'x, vv'y)$$

то (2.34) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\sum_{v' \in Y^k, \ y \in Y} f(uu'x, vv'y) = \sum_{v' \in Y^k} \Big(\sum_{y \in Y} f(uu'x, vv'y) \Big) = \\ &= \sum_{v' \in Y^k} f(uu', vv') = f(u, v). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Последнее равенство в (2.35) совпадает с равенством в (2.32), и оно верно по индуктивному предположению.

Теорема 6.

Если $f \in R(X, Y)$ **и** $f(u, v) \neq 0$, **то** $f_{u,v} \in R(X, Y)$.

Доказательство.

Требуется доказать, что $\forall u' \in X^*, \forall v' \in Y^*$

$$\begin{aligned} &\textbf{если } |u'| \neq |v'|, \text{то } f_{u,v}(u', v') = 0 \\ &\forall x \in X \quad f_{u,v}(u', v') = \sum_{y \in Y} f_{u,v}(u'x, v'y). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из условия $f(u, v) \neq 0$ следует, что $|u| = |v|$, поэтому, согласно определению функции f_{uv}, можно переписать (2.36) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\textbf{если } |uu'| \neq |vv'|, \textbf{то } f(uu', vv') = 0 \\ &\forall x \in X \quad f(uu', vv') = \sum_{y \in Y} f(uu'x, vv'y). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Первое утверждение в (2.37) верно потому, что f - ВР, а второе утверждение следует из доказанного выше соотношения (2.32) (в данном случае $k = 1$).

Теорема 7.

Если $f \in R(X, Y)$, $f(u, v) \neq 0$ **и** $f(uu', vv') \neq 0$, то

$$f_{uu', vv'} = (f_{u,v})_{u', v'}.$$

Доказательство.

$$\forall u'' \in X^*, \forall v'' \in Y^*$$

$$\text{(a)}\quad f_{uu',vv'}(u'',v'') = \frac{f(uu'u'',vv'v'')}{f(uu',vv')}$$

$$\text{(b)}\quad (f_{u,v})_{u',v'}(u'',v'') = \frac{f_{u,v}(u'u'',v'v'')}{f_{u,v}(u',v')} = \frac{f(uu'u'',vv'v'')/f(u,v)}{f(uu',vv')/f(u,v)}$$

Нетрудно видеть, что правые части в (a) и (b) совпадают.
Если $f \in R(X,Y)$ и u, v - строки из X^* и Y^* соответственно, такие, что $f(u,v) \neq 0$, то $f_{u,v}$ называется **остаточной ВР** для *f*.
Мы будем обозначать записью S_f совокупность всех остаточных ВР для *f*. Отметим, что $f \in S_f$, т.к. $f(\varepsilon,\varepsilon) = 1$, поэтому $f_{\varepsilon,\varepsilon} = f$.
Обозначим записью A_f пятерку (X, Y, S_f, P_f, ξ_f), где P_f - СФ вида

$$P_f : S_f \times X \underset{r}{\rightarrow} S_f \times Y,$$

определяемая следующим образом:

$$\forall g, g' \in S_f, \forall x \in X, \forall y \in Y$$

$$P_f(g,x,g',y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} g(x,y), & \text{если } g' = g_{x,y}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \qquad (2.38)$$

Теорема 8.
Если $f \in R(X,Y)$ и $|S_f| < \infty$, то A_f – ВА, и $f_{A_f} = f$.

Доказательство.
Из определения СФ P_f следует, что для любых $g \in S_f$, $x \in X$, $y \in Y$, таких, что $g(x,y) \neq 0$, верно равенство

$$\xi_g A_f^{xy} = g(x,y)\xi_{g_{x,y}}. \qquad (2.39)$$

(напомним, что ξ_g - распределение, такое, что $\forall h \in S_f \quad h^{\xi_g} = 1$, если *h* = *g*, и $h^{\xi_g} = 0$,ξg=0$h \neq g$).
Докажем, что $\forall u \in X^*,\ \forall v \in Y^* : f(u,v) \neq 0$

$$\xi_f A_f^{u,v} = f(u,v)\xi_{f_{u,v}}. \qquad (2.40)$$

Доказательство будем вести индукцией по длине *u*.
Если $|u| = 0$, т.е. $u = v = \varepsilon$, то обе части (2.40) равны ξ_f.
Иначе *u* и *v* имеют вид $u'x$ и $v'y$ соответственно, причём $f(u',v') \neq 0$, (т.к. если $f(u',v') = 0 = \sum_{y' \in Y} f(u'x, v'y')$, то $f(u,v) = f(u'x, v'y) = 0$), и, по индуктивному предположению, верно равенство

$$\xi_f A_f^{u',v'} = f(u',v')\xi_{f_{u',v'}}. \qquad (2.41)$$

Используя (2.39), (2.41) и теорему 7, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}&\xi_f A_f^{u,v} = \\ &= \xi_f A_f^{u'x,v'y} = \xi_f A_f^{u',v'} A_f^{x,y} = \\ &= f(u',v')\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x,y} = \\ &= f(u',v') f_{u',v'}(x,y)\xi_{(f_{u',v'})_{x,y}} = \\ &= f(u',v')\frac{f(u'x,v'y)}{f(u',v')}\xi_{f_{u'x,v'y}} = \\ &= f(u'x,v'y)\xi_{f_{u'x,v'y}} = f(u,v)\xi_{f_{u,v}}.\end{aligned} \qquad (2.42)$$

Таким образом, для любых $u \in X^*$, $v \in Y^*$, таких, что $f(u,v) \neq 0$, верно равенство (2.40), из которого следует цепочка равенств

$$\begin{aligned}&A_f^{\xi_f}(u,v) = \xi_f A_f^{u,v} I = \\ &= f(u,v)\xi_{f_{u,v}} I = f(u,v)\cdot 1 = f(u,v).\end{aligned}$$

Следовательно, в случае $f(u,v) \neq 0$ верно равенство

$$f_{A_f}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} A_f^{\xi_f}(u,v) = f(u,v). \quad (2.43)$$

Докажем, что (2.43) верно и в случае $f(u,v) = 0$.

- Если $|u| \neq |v|$, то левая часть (2.43) равна 0 по определению матриц вида $A^{u,v}$.
- Пусть $|u| = |v| > 0$, и u и v имеют вид $x_1 \dots x_n$ и $y_1 \dots y_n$ соответственно. Существуют номер $k \in \{1,\dots,n\}$ и строки u', v', такие, что

$$\begin{aligned}&u = u'x_k \dots x_n,\ v = v'y_k \dots y_n, \\ &f(u',v') \neq 0,\ f(u'x_k, v'y_k) = 0.\end{aligned} \quad (2.44)$$

Имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned}&A_f^{\xi_f}(u,v) = \xi_f A_f^{u',v'} A_f^{x_k,y_k} \dots A_f^{x_n,y_n} I = \\ &= f(u',v')\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k} \dots A_f^{x_n,y_n} I\end{aligned} \qquad (2.45)$$

Строка $\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k}$ является нулевой, поскольку её элементы имеют вид

$$P_f(g, x_k, g', y_k) \quad (2.46)$$

где $g = f_{u',v'}$, и, согласно определению (2.38) СФ P_f, элемент (2.46) отличен от 0 если и только если $f_{u',v'}(x_k, y_k) \neq 0$, т.е. $f(u'x_k, v'y_k) \neq 0$. Учитывая (2.44), получаем, что все элементы (2.46) равны 0, т.е. $\xi_{f_{u',v'}} A_f^{x_k,y_k}$ является нулевой строкой. Таким образом, правая часть в (2.45) равна 0, откуда следует, что равенство (2.43) в рассматриваемом случае также верно.

2.3.3 Реализуемость вероятностных реакций

ВР *f* называется **реализуемой,** если $\exists$ ВА $A: \ f_A = f$.

Согласно теореме 8, если $|S_f| < \infty$, то *f* реализуема. Обращение этого утверждения неверно: согласно нижеследующей теореме, существует реализуемая ВР *f*, такая, что $|S_f| = \infty$.

Теорема 9.

Пусть $f = f_A$, где *A* - ВА вида (X, Y, S, P, ξ^0), компоненты которого удовлетворяют условиям:

$$|S| = 2, \ \xi^0 = (1, 0),$$

$$\exists x \in X, \exists y \in Y : A^{x,y} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \in (0, 1)).$$

Тогда $|S_f| = \infty$.

Доказательство.

Если $u_k = \underbrace{x \ldots x}_{k}, \ v_k = \underbrace{y \ldots y}_{k}$, **то** $A^{u_k, v_k} = \alpha^k \begin{pmatrix} 1 & k\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

поэтому $f(u_k, v_k) = \alpha^k(1 + k\beta)$. $\forall k \geq 1$ определена остаточная ВР f_{u_k, v_k}, и нетрудно видеть, что $\forall s \geq 1$

$$f_{u_k, v_k}(u_s, v_s) = \frac{f(u_k u_s, v_k v_s)}{f(u_k, v_k)} = \frac{\alpha^{k+s}(1 + (k+s)\beta)}{\alpha^k(1 + k\beta)} = \frac{\alpha^s(1 + (k+s)\beta)}{1 + k\beta}.$$

Если для некоторых $k_1, k_2 \geq 1$ функции $f_{u_{k_1}, v_{k_1}}$ **и** $f_{u_{k_2}, v_{k_2}}$ совпадают, то

$$\forall s \geq 1 \quad \frac{\alpha^s(1 + (k_1 + s)\beta)}{1 + k_1\beta} = \frac{\alpha^s(1 + (k_2 + s)\beta)}{1 + k_2\beta},$$

откуда следует, что $k_1 = k_2$. Таким образом, при различных *k* функции f_{u_k, v_k} различны, т.е. $|S_f| = \infty$.

Пусть *X* и *Y* - конечные множества. Мы будем использовать следующие определения и обозначения.

- Запись $[0, 1]^{X^* \times Y^*}$ обозначает множество функций вида $f : X^* \times Y^* \to [0, 1]$.
- Для каждого $\Gamma \subseteq [0, 1]^{X^* \times Y^*}$ **конусом** над Г называется подмножество $C_0(\Gamma) \subseteq [0, 1]^{X^* \times Y^*}$, состоящее из функций вида $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i$, где

– $\forall i = 1, \ldots, n \quad a_i \in [0, 1], \ f_i \in \Gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$, и

– $\forall (u, v) \in X^* \times Y^* \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right)(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(u, v)$.

• $\forall x \in X, \forall y \in Y$ запись D^{xy} обозначает отображение вида

$D^{xy} : [0, 1]^{X^* \times Y^*} \to [0, 1]^{X^* \times Y^*}$,

называемое **сдвигом,** сопоставляющее каждой функции *f* из $[0, 1]^{X^* \times Y^*}$ функцию, обозначаемую записью $f D^{xy}$, где

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \quad (f D^{xy})(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} f(xu, yv). \quad (2.47)$$

• Подмножество $\Gamma \subseteq [0, 1]^{X^* \times Y^*}$ называется **устойчивым относительно сдвигов,** если

$$\forall f \in \Gamma, \forall x \in X, \forall y \in Y \quad f D^{xy} \in C_0(\Gamma).$$

Теорема 10.

Пусть *X* и *Y* - конечные множества, и $f \in R(X, Y)$. Следущие условия эквивалентны:

• *f* реализуема,

• $\exists$ конечное $\Gamma \subseteq R(X, Y)$, устойчивое относительно сдвигов, и такое, что $f \in C_0(\Gamma)$.

Доказательство.

Пусть *f* реализуема, т.е. $\exists$ ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$:

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \quad f(u, v) = \xi^0 A^{u,v} I.$$

$\forall s \in S$ обозначим записью A_s ВА (X, Y, S, P, ξ_s). В качестве искомого Г можно взять множество $\{f_{A_s} \mid s \in S\}$.

$f \in C_0(\Gamma)$, т.к. $f = \sum_{s \in S} s^{\xi^0} f_{A_s}$, и $\Gamma \subseteq R(X, Y)$ (по теореме 4).

Докажем, что Г устойчиво относительно сдвигов, т.е. $\forall s \in S$, $\forall x \in X, \forall y \in Y \ f_{A_s} D^{xy} \in C_0(\Gamma)$. Согласно (2.47),

$$\begin{gathered}\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \\ (f_{A_s} D^{xy})(u, v) = f_{A_s}(xu, yv) = \xi_s A^{xu,yv} I = \xi_s A^{xy} A^{u,v} I.\end{gathered} \quad (2.48)$$

Нетрудно видеть, что

$$\xi_s A^{xy} A^{u,v} I = \sum_{s' \in S} a_{s'} f_{A_{s'}}(u, v)$$

где $\forall s' \in S \quad a_{s'}$ - компонента вектор-строки $\xi_s A^{xy}$, соответствующая состоянию *s'* (т.е. элемент матрицы A^{xy}, находящийся в строке *s* столбце *s'*). Свойства $\forall s' \in S \quad a_{s'} \in [0, 1]$ и

$\sum\limits_{s' \in S} a_{s'} \leq 1$

являются следствием соответствующих свойств матрицы A^{xy}.
Обратно, пусть $f \in C_0(\Gamma)$, где $\Gamma = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq R(X, Y)$, и Г устойчиво относительно сдвигов. Определим A как ВА

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (X, Y, S, P, \xi^0), \quad (2.49)$$

компоненты которого имеют следующий вид.

- $S \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \ldots, n\}$.
- $\xi^0 = (a_1, \ldots, a_n)$, где $a_1, \ldots, a_n$ - коэффициенты представления $f/$ в виде суммы

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i, \quad \text{где } \forall i = 1, \ldots, n \;\; a_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1. \quad (2.50)$$

По предположению, $f \in R(X, Y)$, в частности, $f(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, откуда следует равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, поэтому $\xi^0 \in S^{\triangle}$.

- Поведение $P : S \times X \times S \times Y \to [0, 1]$ ВА (2.49) определяется матрицами A^{xy} порядка n $(x \in X, y \in Y)$:

$$P(i, x, j, y) \stackrel{\text{def}}{=} A^{xy}_{ij},$$

где $\forall x \in X, \forall y \in Y, \forall i = 1, \ldots, n$ строка i матрицы A^{xy} состоит из элементов $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ представления функции $f_i D^{xy}$ в виде суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} f_j$ $(\forall i, j \;\; a_{ij} \geq 0, \; \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1)$.

Докажем, что P является СФ вида $S \times X \xrightarrow{r} S \times Y$. Данное утверждение эквивалентно соотношению $\left(\sum\limits_{y \in Y} A^{xy}\right) I = I$.

$\forall i = 1, \ldots, n$ из

$$f_i D^{xy} = \sum_{j=1}^{n} A^{xy}_{ij} f_j \quad (2.51)$$

следует, что

$$(f_i D^{xy})(\varepsilon, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} A^{xy}_{ij} f_j(\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.52)$$

Т.к. $\forall i = 1, \ldots, n \;\; f_j \in R(X, Y)$, то $f_j(\varepsilon, \varepsilon) = 1$. Кроме того, левая часть (2.52) равна $f_i(x, y)$. Поэтому (2.52) можно переписать в виде $f_i(x,y) = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}^{xy}$, откуда следует соотношение

$$\sum_{y\in Y} f_i(x,y) = \sum_{y\in Y}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{xy}. \quad (2.53)$$

Т.к. $f_i \in R(X,Y)$, то, согласно второму соотношению в (2.27), левая часть (2.53) равна $f_i(\varepsilon,\varepsilon)$, т.е. равна 1. Учитывая это, и поменяв порядок суммирования в правой части (2.53), получаем соотношение

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in Y} A_{ij}^{xy} = 1. \quad (2.54)$$

Нетрудно видеть, что истинность (2.54) $\forall i = 1,\dots,n$ эквивалентна доказываемому равенству $\left(\sum\limits_{y\in Y} A^{xy}\right) I = I$.

Докажем, что реакция ВА (2.49) совпадает с f, т.е.

$$\forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \quad \xi^0 A^{u,v} I = f(u,v). \quad (2.55)$$

Если $|u| \neq |v|$, то левая часть равенства в (2.55) равна 0 по определению матриц вида $A^{u,v}$, и правая часть равенства в (2.55) равна 0 согласно предположению $f \in R(X,Y)$ и первому соотношению в (2.27).

Пусть $|u| = |v|$. Докажем (индукцией по $|u|$), что

$$A^{u,v} I = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ \dots \\ f_n(u,v) \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Если $u = v = \varepsilon$, то обе части (2.56) равны I.

Если $u = xu'$ и $v = yv'$, то, предполагая верным равенство (2.56), в котором u и v заменены на u' и v', имеем:

$$A^{u,v} I = A^{xu',yv'} I = A^{xy} A^{u',v'} I = A^{xy} \begin{pmatrix} f_1(u',v') \\ \dots \\ f_n(u',v') \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{1j}^{xy} f_j(u',v') \\ \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A_{nj}^{xy} f_j(u',v') \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Из (2.51) следует, что правую часть в (2.57) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} (f_1 D^{xy})(u',v') \\ \ldots \\ (f_n D^{xy})(u',v') \end{pmatrix}. \quad (2.58)$$

Согласно определению (2.47) функций вида $f D^{xy}$, столбец (2.58) совпадает с правой частью доказываемого равенства (2.56).
Таким образом, равенство (2.56) доказано. Согласно этому равенству, левая часть доказываемого равенства (2.55) равна

$$\xi^0 \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ \ldots \\ f_n(u,v) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^0 f_i(u,v). \quad (2.59)$$

По определению ξ^0 (см. (2.50)), правая часть (2.59) равна *f(u,v),* т.е. правой части доказываемого равенства (2.55).

2.4 Случайные последовательности

2.4.1 Понятие случайной последовательности

Пусть *X* - конечное множество.
Случайной последовательностью (СП) над *X* называется функция $\zeta \in [0,1]^{X^*}$, удовлетворяющая условиям

$$\zeta(\varepsilon) = 1,$$
$$\forall u \in X^* \quad \zeta(u) = \sum_{x \in X} \zeta(ux). \quad (2.60)$$

Множество всех СП над *X* будет обозначаться записью *R(***1***,X).*
Если $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$, то запись D_ζ обозначает множество $\{u \in X^* \mid \zeta(u) \neq 0\}$.

2.4.2 Остаточные случайные последовательности

Если $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$, и *u* - строка из *X**, такая, что $\zeta(u) \neq 0$, то
Запись ζ_u обозначает СП из *R(***1***,X),* называемую **остаточной СП** для ζ, и определяемую следующим образом:

$$\forall u' \in X^* \quad \zeta_u(u') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\zeta(uu')}{\zeta(u)}.$$

$\forall \zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ запись S_ζ обозначает множество всех остаточных СП для ζ. Отметим, что $\zeta \in S_\zeta$, т.к. $\zeta = \zeta_\varepsilon$.
Обозначим записью A_ζ пятерку $(\mathbf{1}, X, S_\zeta, P_\zeta, \xi_\zeta)$, где **1** - од-

ноэлементное множество, единственный элемент которого будет обозначаться символом *e*, и P_ζ - СФ вида

$$P_\zeta : S_\zeta \times \mathbf{1} \underset{r}{\to} S_\zeta \times X,$$

определяемая следующим образом: $\forall\, \zeta', \zeta'' \in S_\zeta, \forall\, x \in X$

$$P_\zeta(\zeta', e, \zeta'', x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \zeta'(x), & \textbf{если } \zeta'' = \zeta'_x, \\ 0, & \textbf{иначе.} \end{cases} \quad (2.61)$$

Теорема 11.

Если $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ **и** $|S_\zeta| < \infty$, **то** A_ζ - В А, и

$$\forall\, u \in X^* \;\; f_{A_\zeta}(e^{|u|}, u) = \zeta(u)$$

(запись $e^{|u|}$ обозначает строку из *u*\\ символов е, где $\{e\} = \mathbf{1}$).

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из того, что если строка *u* имеет вид $x_1 \ldots x_k$, где $x_1, \ldots, x_k \in X$, то

$$f_{A_\zeta}(u) = \zeta(x_1)\zeta_{x_1}(x_2)\ldots\zeta_{x_1 \ldots x_{k-1}}(x_k).$$

Теорема 12.

Если $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ **и** $|S_\zeta| < \infty$, то ζ полностью определяется своими значениями на строках из $X^{\le 2(|S_\zeta| - |X| + 1)}$.

2.4.3 Парные случайные последовательности

Пусть *X, Y* - пара конечных множеств.

Парной случайной последовательностью (ПСП) над парой *(X, Y)* называется функция $\eta \in [0, 1]^{X^* \times Y^*}$, удовлетворяющая условиям:

$$\eta(\varepsilon, \varepsilon) = 1,$$

$$\forall\, u \in X^*, \forall\, v \in Y^* \quad \begin{cases} \textbf{если } |u| \ne |v|, \text{ то } \eta(u, v) = 0, \\ \eta(u, v) = \sum\limits_{x \in X, y \in Y} \eta(ux, vy). \end{cases} \quad (2.62)$$

Запись *R*(**1**,*X* × *Y*) обозначает множество всех ПСП над *(X, Y)*.

Если $\eta \in R(\mathbf{1}, X \times Y)$, то записи η^X **и** η^Y обозначают СП из $R(\mathbf{1}, X)$ **и** $R(\mathbf{1}, Y)$ соответственно, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} &\forall\, u \in X^* \quad \eta^X(u) = \sum_{v \in Y^*} \eta(u, v), \\ &\forall\, v \in Y^* \quad \eta^Y(v) = \sum_{u \in X^*} \eta(u, v). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Если $\eta \in R(\mathbf{1}, X \times Y)$, и *u,v* - строки из *X** и *Y** соответственно, такие, что $\eta(u,v) \neq \mathbf{0}$, то запись $\eta_{u,v}$ обозначает ПСП из *R(***1***,X × Y)*, называемую **остаточной ПСП** для η и определяемую следующим образом:

$$\forall u' \in X^*,\ \forall v' \in Y^* \quad \eta_{u,v}(u',v') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\eta(uu',vv')}{\eta(u,v)}.$$

$\forall \eta \in R(\mathbf{1}, X \times Y)$ запись S_η обозначает множество всех остаточных ПСП для η. Отметим, что $\eta \in S_\eta$, т.к. $\eta = \eta_{\varepsilon,\varepsilon}$.

Теорема 13.

Пусть *X, Y* - пара конечных множеств, и $\eta \in R(\mathbf{1}, X \times Y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $|S_\eta| < \infty$,
2. $|S_{\eta X}| < \infty$, и существуют

- ВА *A* вида (X, Y, S, P, ξ_{s^0}),
- функция $\delta : S \times (X \times Y) \to S$, и
- совокупность $\{f_s \mid s \in S\}$ функций вида $X \times Y \to [0,1]$,

удовлетворяющие условиям:

$$\forall s, s' \in S, \forall x \in X, \forall y \in Y$$
$$P(s,x,s',y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f_s(x,y), & \text{если } s' = s(x,y), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \qquad (2.64)$$

и

$$\begin{gathered} \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall u \in X^*, \forall v \in Y^* \\ \eta(ux, vy) = \eta(u,v) \cdot f_{s^0(u,v)}(x,y), \end{gathered} \qquad (2.65)$$

где $\forall s \in S, \forall x \in X, \forall y \in Y, \forall u \in X^*, \forall v \in Y^*$

$$s(\varepsilon,\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} s, \quad s(ux,vy) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(s(u,v),(x,y)).$$

(отметим, что из (2.64) и (2.65) следует равенство $f_A = \eta$).

2.4.4 Автоматные преобразования случайных по следовательностей

Для любой СП $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ и любого ВА *A* вида *(X,* Y,...) запись $\eta_{\zeta,A}$ обозначает функцию из $[0,1]^{X^* \times Y^*}$, определяемую следующим образом: $\forall u \in X^*, \forall v \in Y^*$

$$\eta_{\zeta,A}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(u) f_A(u,v). \qquad (2.66)$$

Теорема 14.

$\forall \zeta \in R(\mathbf{1}, X)$, $\forall$ ВА A **вида** $(X, Y, \ldots)$

$$\eta_{\zeta,A} \in R(\mathbf{1}, X \times Y).$$

Доказательство.

Докажем, что выполнены условия (2.62) для $\eta \stackrel{\text{def}}{=} \eta_{\zeta,A}$.

- $\eta_{\zeta,A}(\varepsilon, \varepsilon) = \zeta(\varepsilon) f_A(\varepsilon, \varepsilon) = 1 \cdot 1 = 1.$
- Если $|u| \neq |v|$, то $\eta_{\zeta,A}(u, v) = \zeta(u) f_A(u, v) = \zeta(u) \cdot 0 = 0.$
- Равенство $\eta_{\zeta,A}(u, v) = \sum\limits_{x \in X, y \in Y} \eta_{\zeta,A}(ux, vy)$, т.е.

$$\zeta(u) f_A(u, v) = \sum_{x \in X, y \in Y} \zeta(ux) f_A(ux, vy) \quad (2.67)$$

верно потому, что, согласно (2.60), левая часть (2.67) равна

$$\zeta(u) f_A(u, v) = \Big(\sum_{x \in X} \zeta(ux) \Big) f_A(u, v) = \sum_{x \in X} \Big(\zeta(ux) f_A(u, v) \Big) \quad (2.68)$$

и, поскольку $f_A \in R(X, Y)$, то, согласно (2.27),

$$\forall x \in X \quad f_A(u, v) = \sum_{y \in Y} f_A(ux, vy),$$

поэтому правая часть (2.68) равна

$$\sum_{x \in X} \Big(\zeta(ux) f_A(u, v) \Big) = \sum_{x \in X} \Big(\big(\sum_{y \in Y} \zeta(ux) f_A(ux, vy) \big) \Big). \quad (2.69)$$

Нетрудно видеть, что правая часть (2.69) совпадает с правой частью (2.67).

С $\eta_{\zeta,A}$ связаны две СП, определяемые соотношениями (2.63):

- $\eta^X_{\zeta,A}$, нетрудно видеть, что эта СП совпадает с ζ, и
- $\eta^Y_{\zeta,A}$, мы будем обозначать эту СП записью ζ_A, и называть её

результатом преобразования СП ζ вероятностным автоматом *A*.

Будем говорить, что СП ζ и ζ' **эквивалентны** (и обозначать это записью $\zeta \sim \zeta'$), если $\exists$ ВА *A* и *B*, такие, что $\zeta' = \zeta_A$ и $\zeta = \zeta'_B$.

Теорема 15.

1. Если СП $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ такова, что множество S_ζ конечно, то $\forall$ ВА $A = (X, \ldots)$ множество S_{ζ_A} конечно.

2. Если СП ζ и ζ' таковы, что множества S_ζ и $S_{\zeta'}$ конечны, то $\exists$ ВА $A : \zeta' = \zeta_A$.

3. Для любых СП $\zeta \in R(\mathbf{1}, X)$ и $\zeta' \in R(\mathbf{1}, Y)$ следующие условия эквивалентны:

(a) $\zeta \sim \zeta'$
(b) $\exists$ детерминированный ВА A: $\zeta' = \zeta_A$ и его реакция f_A биективно отображает D_ζ на $D_{\zeta'}$.

Доказательство.
Обоснуем лишь импликацию $3b \Rightarrow 3a$. Из 3b следует существование детерминированного ВА B, такого, что ограничения f_A и f_B на D_ζ и $D_{\zeta'}$ соответственно являются взаимно обратными отображениями, откуда нетрудно вывести равенство $\zeta'_B = \zeta$:

$$\forall u \in X^* \;\; \zeta'_B(u) = \sum_{v \in Y^*} \zeta'(v) f_B(v,u) = \sum_{v \in D_{\zeta'}} \zeta'(v) f_B(v,u) =$$

$$\sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \zeta'(v) = \sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \zeta_A(v) = \sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \sum_{r \in X^*} \eta_{\zeta,A}(r,v) =$$

$$= \sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \sum_{r \in X^*} \zeta(r) \cdot f_A(r,v) = \sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \sum_{r \in D_\zeta} \zeta(r) \cdot f_A(r,v) =$$

$$= \sum_{v \in f_B^{-1}(u)} \sum_{r \in f_A^{-1}(v)} \zeta(r) = \sum_{r \in f_A^{-1} f_B^{-1}(u)} \zeta(r) = \zeta(u).$$

2.4.5 Цепи Маркова

Один из способов задания СП связан с понятием цепи Маркова. **Цепь Маркова (ЦМ)** - это пятёрка M вида

$$M = (X, S, P, \lambda, \xi^0),$$

компоненты которой имеют следующий смысл.

1. X и S - конечные множества, элементы которых называются соответственно **сигналами** и **состояниями** ЦМ M.

2. P - СФ вида $S \underset{r}{\to} S$, называемая **функцией перехода.**

$\forall (s, s') \in S \times S$ значение $P(s, s')$ понимается как вероятность того, что если в текущий момент времени (t) M находится в состоянии s, то в следующий момент времени $(t + 1)$ M будет находиться в состоянии s'.

3. λ - функция вида $S \to X$, $\forall s \in S$ $\lambda(s)$ понимается как сигнал, который ЦМ M выдаёт в текущий момент времени, если в этот момент времени M находится в состоянии s.

4. ξ^0 - распределение на S, называемое **начальным распределением,** $\forall s \in S$ s^{ξ^0} понимается как вероятность того, что в начальный момент времени $(t = 0)$ ЦМ M находится в состоянии s.

Функция ЦМ $M = (X,...)$ - это функция $f_M \in [0,1]^{X^*}$, значение которой

• на пустой строке равно 1, и

- на непустой строке $u = x_0 \ldots x_k \in X^*$ равно вероятности того, что в моменты 0,..., *k* сигналы, выдаваемые *M,* совпадают с $x_0, \ldots, x_k$, соответственно.

Пусть $M = (X, S, P, \lambda, \xi^0)$ - ЦМ, и упорядочение множества *S* её состояний имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$. Мы будем использовать следующие обозначения.

- Будем обозначать тем же символом *M* матрицу порядка *n*

$$\begin{pmatrix} P(s_1, s_1) & \ldots & P(s_1, s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P(s_n, s_1) & \ldots & P(s_n, s_n) \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

- Для любого $x \in X$ будем обозначать записью E^x квадратную матрицу порядка *n,* каждый элемент которой равен 0 или 1, и элемент E^x в строке *i* и столбце *j* равен 1 тогда и только тогда, когда $i = j$ и $\lambda(s_i) = x$.

Теорема 16.

Пусть *M* - ЦМ вида $(X, S, P, \lambda, \xi^0)$. Если строка $u \in X^*$ непуста и имеет вид $x_0, \ldots, x_k$, то

$$f_M(u) = \xi^0 E^{x_0} M E^{x_1} \ldots M E^{x_k} I, \quad (2.71)$$

где ***I*** - столбец порядка *n,* все элементы которого равны **1.**

Доказательство.

Равенство (2.71) следует из правил вычисления вероятностей несовместных и независимых событий.

Теорема 17.

Если *M* - ЦМ, то $f_M \in R(\mathbf{1}, X)$.

Доказательство.

Первое соотношение в (2.60) выполняется по определению, а второе соотношение в (2.60) для $\zeta \stackrel{\text{def}}{=} f_M$ следует из (2.71), равенства $MI = I$ и того, что $\sum_{x \in X} E^x$ является единичной матрицей.

Теорема 18.

Пусть *X* - конечное множество, и $f \in [0,1]^{X^*}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\exists$ ЦМ $M : f = f_M$,
2. $\exists$ ВА A вида $(\mathbf{1}, X, \ldots) : f = f_A \circ in$,
   где $in : X^* \to \mathbf{1}^* \times X^*, \forall u \in X^* \;\; in(u) = (e^{|u|}, u)$,
3. $\exists \zeta \in R(\mathbf{1}, Y) : \;\forall y_1, \ldots, y_n \in Y \quad \zeta(y_1 \ldots y_n) = \zeta(y_1) \ldots \zeta(y_n)$,
   и $\exists$ детерминированный ВА A: $f = \zeta_A$.

3. Вероятностные автоматы Мура с числовым выходом

3.1 Вероятностные автоматы Мили и Мура

С каждым ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ связаны СФ

$$\delta : S \times X \underset{r}{\to} S, \quad \lambda : S \times X \underset{r}{\to} Y,$$

называемые соответственно **функцией перехода** и **функцией выхода,** и определяемые следующим образом:

- $\forall s, s' \in S, x \in X \quad \delta(s, x, s') \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{y \in Y} P(s, x, s', y),$

- $\forall s \in S, x \in X, y \in Y \quad \lambda(s, x, y) \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{s' \in S} P(s, x, s', y).$

ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ называется **ВА Мили,** если

$$\forall s, s' \in S, x \in X, y \in Y \quad P(s, x, s', y) = \delta(s, x, s') \cdot \lambda(s, x, y).$$

ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ называется **ВА Мура,** если он является ВА Мили, и его функция выхода λ не зависит от *x* (т.е. имеет вид $\lambda : S \underset{r}{\to} Y$).

Пусть $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ - ВА Мура, и упорядочение множества *S* его состояний имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$. $\forall x \in X$ мы будем обозначать записью A^x матрицу порядка *n,* называемую **матрицей перехода,** соответствующей входному сигналу *x* и имеющую вид

$$\begin{pmatrix} \delta(s_1, x, s_1) & \ldots & \delta(s_1, x, s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta(s_n, x, s_1) & \ldots & \delta(s_n, x, s_n) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где δ - функция перехода ВА *A.*

$\forall x \in X, \forall s, s' \in S$ мы будем обозначать записью $A^x_{s,s'}$ элемент матрицы A^x, находящийся в строке *s* столбце *s'* (т.е. $A^x_{s,s'} = \delta(s, x, s')$). Из того, что δ - СФ, следует, что элементы матрицы A^x обладают свойствами

$$\forall s, s' \in S \quad A^x_{s,s'} \geq 0,$$
$$\forall s \in S \quad \sum_{s' \in S} A^x_{s,s'} = 1 \quad (\text{т.е. } A^x I = I). \quad \textbf{(3.2)}$$

(Матрица, обладающая такими свойствами, называется **стохастической.)**

$\forall u \in X^*$ мы будем обозначать записью A^u матрицу порядка *n,* определяемую следующим образом: $A^\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} E$, и если $u = x_1, \ldots, x_k$, то $A^u \stackrel{\text{def}}{=} A^{x_1} \ldots A^{x_k}$.

Нетрудно доказать, что матрица A^u - стохастическая.

Пусть *s* - произвольное состояние из *S*, и в упорядочении элементов *S* данное состояние имеет номер *i* (т.е. $s = s_i$). Будем называть

- строку номер *i* матрицы A^u - **строкой** *s*, и обозначать её записью $\vec{A}^u_s$
- столбец номер *i* матрицы A^u - **столбцом** *s*, и обозначать его записью $A^{u\downarrow}_s$.

$\forall u \in X^*, \forall s, s' \in S$ мы будем обозначать записью $A^u_{s,s'}$ элемент матрицы A^u, находящийся в строке *s* столбце *s'*.

Если строка $u \in X^*$ имеет вид $x_0, \ldots, x_k$, то $A^u_{s,s'}$ можно понимать как вероятность того, что

- если в текущий момент *(t)* ВА *A* находится в состоянии *s*, и, начиная с этого момента, на вход *A* последовательно поступают элементы строки *u* (т.е. в момент *t* поступил сигнал x_0, в момент $t + 1$ поступил сигнал x_1, и т.д.)
- то в момент $t + k + 1$ *A* будет находиться в состоянии *s'*.

ВА Мура с детерминированным выходом - это ВА Мура (X, Y, S, P, ξ^0), функция выходов λ которого является детерминированной (т.е. можно считать, что λ имеет вид $S \to Y$).

Если ВА $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ является ВА Мура с детерминированным выходом, то для обозначения такого ВА мы будем использовать запись

$$(\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda), \quad (3.3)$$

компоненты которой определяются следующим образом.

- Компонента ξ^0 в (3.3) является вектор-строкой, соответствующей начальному распределению ξ^0 ВА *A*.
- Компонента $\{A^x \mid x \in X\}$ в (3.3) является совокупностью матриц перехода ВА *A*.
- Компонента λ в (3.3) является вектор-столбцом $\begin{pmatrix} \lambda(s_1) \\ \ldots \\ \lambda(s_n) \end{pmatrix}$

значений функции выхода $\lambda : S \to Y$ ВА *A* (где $(s_1, \ldots, s_n)$ - фиксированное упорядочение множества *S*.)

Если A - ВА Мура с детерминированным выходом, то запись S_A обозначает множество состояний этого ВА.

3.2 Вероятностные автоматы Мура с числовым выходом

3.2.1 Понятие вероятностного автомата Мура с числовым выходом

ВА Мура с числовым выходом - это ВА Мура с детерминированным выходом, множество выходных сигналов которого является подмножеством множества **R** действительных чисел.

Для ВА Мура с числовым выходом можно определить понятие реакции, отличное от того понятия реакции ВА, которое было определено в пункте 2.1.3. Мы будем называть это понятие **усреднённой реакцией.**

3.2.2 Усреднённые реакции

Пусть A - ВА Мура с числовым выходом вида (3.3), и $\xi \in S_A^{\triangle}$.

Усреднённая реакция ВА A в распределении ξ - это функция $A^\xi : X^* \to \mathbf{R}$, определяемая следующим образом:

$$\forall u \in X^* \;\; A^\xi(u) \stackrel{\text{def}}{=} \xi A^u \lambda.$$

Усреднённую реакцию ВА A в его начальном распределении мы будем называть просто **усреднённой реакцией ВА** A, и будем обозначать её записью f_A.

Если строка $u \in X^*$ имеет вид $x_0 \ldots x_k$, то значение $A^\xi(u)$ можно понимать следующим образом:

- если A в некоторый момент времени t имеет распределение ξ, и, начиная с этого момента, на его вход последовательно поступают элементы строки u (т.е. в момент t поступает сигнал x_o, в момент t + 1 поступает сигнал x_1, и т.д.),
- то $A^\xi(u)$ - это среднее значение (т.е. математическое ожидание) выходного сигнала A в момент времени $t + k + 1$.

Мы будем говорить, что распределения $\xi_1, \xi_2 \in S_A^{\triangle}$ **эквивалентны по усреднению относительно** A (и обозначать это записью $\xi_1 \underset{A}{\approx} \xi_2$), если усреднённые реакции A^{ξ_1} **и** A^{ξ_2} совпадают, т.е.

$$\forall u \in X^* \qquad \xi_1 A^u \lambda = \xi_2 A^u \lambda.$$

Пусть задана пара A_1, A_2 ВА Мура с числовым выходом, у которых одинаковы множества входных сигналов, т.е. A_1 и A_2 имеют вид

$$A_i = (\xi_i^0, \{A_i^x \mid x \in X\}, \lambda_i) \quad (i = 1, 2).$$

Мы будем говорить, что A_1 и A_2 **эквивалентны по усреднению** (и обозначать это записью $A_1 \approx A_2$), если их усреднённые реакции совпадают, т.е.

$$\forall u \in X^* \qquad \xi_1^0 A_1^u \lambda_1 = \xi_2^0 A_2^u \lambda_2.$$

3.2.3 Усреднённые базисные матрицы

Для ВА Мура с числовым выходом можно ввести понятие усреднённой базисной матрицы, аналогично тому, как было введено понятие базисной матрицы в пункте 2.1.4.

Пусть $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - ВА Мура с числовым выходом. Обозначим записью A совокупность всех вектор-столбцов вида $A^u \lambda$, где $u \in X^*$.

Усреднённой базисной матрицей ВА A называется матрица, обозначаемая записью $[\![A]\!]$, и удовлетворяющая условиям:

- каждый столбец матрицы $[\![A]\!]$ является элементом $\hat{A}$,
- столбцы матрицы $[\![A]\!]$ образуют базис линейного пространства $\langle \hat{A} \rangle$.

Нетрудно видеть, что

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in S_A^{\triangle} \quad \xi_1 \underset{A}{\approx} \xi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 [\![A]\!] = \xi_2 [\![A]\!].$$

Матрицу $[\![A]\!]$ можно построить при помощи алгоритма, аналогичного соответствующему алгоритму из пункта 2.1.4.

Для каждого $s \in S_A$ мы будем называть **строкой** s матрицы $[\![A]\!]$ ту её строку, которая содержит значения вида $\vec{A}_s^u \lambda$. Мы будем обозначать эту строку записью $[\![A]\!]_s$.

Мы будем говорить, что состояние $s \in S_A$ является **выпуклой комбинацией** других состояний ВА A, если строка s матрицы $[\![A]\!]$ является выпуклой комбинацией других строк этой матрицы, т.е. существует распределение $\xi \in (S_A \setminus \{s\})^{\triangle}$, удовлетворяющее условию

$$[\![A]\!]_s = \sum_{s' \in S_A \setminus \{s\}} (s')^{\xi} [\![A]\!]_{s'}. \quad \textbf{(3.4)}$$

3.2.4 Редукция вероятностных автоматов Мура с числовым выходом

Пусть *A* - ВА Мура с числовым выходом.
Редукция ВА *A* заключается в построении такого ВА Мура с числовым выходом *B,* который
- был бы эквивалентен *A* по усреднению, и
- содержал бы меньше состояний, чем *A* (если это возможно).

К вероятностным автоматам Мура с числовым выходом можно применять те же методы редукции, которые были изложены в пункте 2.2. Мы рассмотрим лишь метод редукции путем удаления выпуклых комбинаций. Данный метод основан на нижеследующей теореме.

Теорема 19.
Пусть $A = (\xi_A^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda_A)$ - ВА Мура с числовым выходом, и состояние $s \in S_A$ является выпуклой комбинацией других состояний, т.е. $\exists \xi \in (S_A \setminus \{s\})^\Delta$: верно (3.4). Будем считать, что упорядочение S_A имеет вид $(s_1, \ldots, s_n)$ и $s = s_n$.
Обозначим символом *B* ВА Мура с числовым выходом, который имеет вид $(\xi_B^0, \{B^x \mid x \in X\}, \lambda_B)$, где $S_B = S_A \setminus \{s_n\}$, и

$$\begin{aligned} \xi_B^0 &= \xi_A^0 \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix}, \\ B^x &= (E_{n-1} \;\; \mathbf{0}) A^x \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix}, \\ \lambda_B &= (E_{n-1} \;\; \mathbf{0}) \lambda_A, \end{aligned} \quad \textbf{(3.5)}$$

где E_{n-1} - единичная матрица порядка $n-1$, $\xi = (s_1^\xi, \ldots, s_{n-1}^\xi)$,
0 - столбец порядка n — 1 с нулевыми компонентами.
Тогда $A \approx B$.

Доказательство.
С учетом предположений, изложенных в формулировке теоремы, можно переписать (3.4) в виде

$$[\![A]\!]_{s_n} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^\xi [\![A]\!]_{s_i}. \quad \textbf{(3.6)}$$

Согласно определению матрицы $[\![A]\!]$, равенство (3.6) равносильно соотношению

$$\forall\, u \in X^* \quad A_n^u \lambda_A = \sum_{i=1}^{n-1} s_i^\xi A_i^u \lambda_A, \quad \textbf{(3.7)}$$

где $\forall i = 1, \ldots, n$ A_i^u обозначает *i*-ю строку матрицы A^u.
Можно переписать (3.7) в матричном виде:

$$\forall u \in X^* \quad \vec{e}_n A^u \lambda_A = \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0})A^u\lambda_A \quad \textbf{(3.8)}$$

(где $\vec{e}_n$ - вектор-строка длины *n,* у которой *n*-я компонента равна 1, а остальные компоненты равны 0).
В частности, (3.8) верно при $u = \varepsilon$, т.е.

$$\vec{e}_n\lambda_A = \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A. \quad (3.9)$$

Докажем, что $A \approx B$, т.е. $\forall u \in X^*$ $\xi_A^0 A^u \lambda_A = \xi_B^0 B^u \lambda_B$.
Согласно (3.5), для этого достаточно доказать, что $\forall u \in X^*$

$$A^u\lambda_A = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} B^u (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A. \quad (3.10)$$

Докажем (3.10) индукцией по $|u|$.
Если $u = \varepsilon$, то (3.10) имеет вид

$$\lambda_A = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A. \quad (3.11)$$

Согласно правилам матричного умножения, и учитывая (3.9), можно переписать правую часть (3.11) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} E_{n-1}(E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A \\ \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A \\ \vec{e}_n\lambda_A \end{pmatrix} = \lambda_A.$$

Таким образом, в случае $u = \varepsilon$ равенство (3.10) верно. Пусть (3.10) верно для некоторого *u.* Докажем, что $\forall x \in X$

$$A^{xu}\lambda_A = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} B^{xu} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A. \quad (3.12)$$

Используя определение B^x из (3.5), перепишем (3.12) в виде

$$A^{xu}\lambda_A = \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})A^x \begin{pmatrix} E_{n-1} \\ \xi \end{pmatrix} B^u (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})\lambda_A. \quad (3.13)$$

Учитывая индуктивное предположение (3.10), и используя правила матричного умножения перепишем (3.13) в виде

$$\begin{aligned} A^{xu}\lambda_A &= \begin{pmatrix} E_{n-1}(E_{n-1}\ \ \mathbf{0}) \\ \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0}) \end{pmatrix} A^x A^u \lambda_A = \\ &= \begin{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0}) \\ \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0}) \end{pmatrix} A^{xu}\lambda_A = \begin{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})A^{xu}\lambda_A \\ \xi(E_{n-1}\ \ \mathbf{0})A^{xu}\lambda_A \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Используя (3.8), перепишем правую часть (3.14) в виде

$$\begin{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0})A^{xu}\lambda_A \\ \vec{e}_n A^{xu}\lambda_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_{n-1}\ \ \mathbf{0}) \\ \vec{e}_n \end{pmatrix} A^{xu}\lambda_A = A^{xu}\lambda_A. \quad (3.15)$$

Таким образом, (3.12) верно.

Следовательно, (3.10) верно для любого $u \in X^*$.

Отметим, что задачу распознавания того, является ли какое-либо из состояний ВА Мура с числовым выходом выпуклой комбинацией других состояний этого ВА, можно решать методом, аналогичным методу, изложенному в пункте 2.2.3.

3.2.5 Соглашение

Начиная со следующего пункта, все рассматриваемые ВА по умолчанию (т.е. если их вид не указан особо) предполагаются ВА Мура с числовым выходом. Мы будем обозначать эти ВА записями вида (3.3), и для каждого такого ВА *A* запись f_A обозначает его усреднённую реакцию (которую мы будем называть просто **реакцией).** Те ВА, которые были введены в главе 2, мы будем называть **ВА общего вида.** Для каждого рассматриваемого ВА *A* запись S_A обозначает множество состояний этого ВА.

3.3 Вероятностная реализуемость функций на строках

Пусть *X* - конечное множество.

Функция на строках $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ называется **вероятностно реализуемой,** если $\exists$ ВА, реакция которого совпадает с *f*.

Будем использовать следующие определения и обозначения.

- Для каждого $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^{X^*}$ **выпуклой оболочкой** множества Г называется подмножество $C(\Gamma) \subseteq \mathbf{R}^{X^*}$, состоящее из функций вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i$ (называемых **выпуклыми комбинациями** функций $f_1, \ldots, f_n$), где

$$- \ \forall i = 1,\ldots,n \quad a_i \in [0,1],\ f_i \in \Gamma, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1, \text{ и}$$

$$- \ \forall u \in X^* \quad \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)u \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(u).$$

- $\forall x \in X$ запись D^x обозначает отображение вида $D^x : \mathbf{R}^{X^*} \to \mathbf{R}^{X^*}$, называемое **сдвигом,** сопоставляющее каждой функции *f* из $\mathbf{R}^{X^*}$ функцию, обозначаемую записью fD^x, где

$$\forall u \in X^* \quad (fD^x)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(xu). \quad (3.16)$$

• Подмножество $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^{X^*}$ называется **устойчивым относительно сдвигов,** если

$$\forall f \in \Gamma, \forall x \in X \quad fD^x \in C(\Gamma).$$

Теорема 20.

Пусть *X* - конечное множество, и $f \in \mathbf{R}^{X^*}$. Следущие условия эквивалентны:

• *f* вероятностно реализуема,

• $\exists$ конечное $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^{X^*}$,устойчивое относительно сдвигов, и такое, что $f \in C(\Gamma)$.

Доказательство.

Пусть *f* вероятностно реализуема, т.е. $\exists$В А$A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$:

$$\forall u \in X^* \quad f(u) = \xi^0 A^u \lambda.$$

Будем считать, что множество состояний S_A этого ВА имеет вид $\{1, \ldots, n\}$, и $\forall i \in S_A$ запись ξ_i обозначает распределение из $S_A^{\triangle}$, представляемое вектор-строкой порядка *n, i*-я компонента которой равна 1, а остальные компоненты равны 0.

$\forall i = 1, \ldots, n$ **определим** $A_i \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_i, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

Полагаем $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{f_{A_i} \mid i = 1, \ldots, n\}$. $f \in C(\Gamma)$,т.к.

$$f = \sum_{i=1}^{n} i^{\xi^0} f_{A_i}.$$

Докажем, что $\forall i = 1, \ldots, n, \forall x \in X \quad f_{A_i} D^x \in C(\Gamma)$.

Согласно (3.16),

$$\forall u \in X^* \quad (f_{A_i} D^x)(u) = f_{A_i}(xu) = \xi_i A^{xu} \lambda = \xi_i A^x A^u \lambda. \quad (3.17)$$

Нетрудно видеть, что

$$\xi_i A^x A^u \lambda = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^x f_{A_j}(u).$$

Таким образом, $f_{A_i} D^x = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}^x f_{A_j} \in C(\Gamma)$.

Обратно, пусть $f \in C(\Gamma)$,где $\Gamma = \{f_1, \ldots, f_n\}$,и Г устойчиво относительно сдвигов. Определим ВА

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda), \quad (3.18)$$

где

• ξ^0 - вектор-строка коэффициентов представления *f* в виде выпуклой комбинации функций из Г, т.е.

$$f = \sum_{i=1}^{n} i^{\xi^0} f_i, \quad (3.19)$$

• $\forall x \in X, \forall i = 1, \ldots, n$ строка *i* матрицы A^x состоит из коэффициентов представления функции $f_i D^x$ в виде выпуклой комбинации функций из Г, т.е.

$$f_i D^x = \sum_{j=1}^{n} A^x_{ij} f_j, \quad (3.20)$$

• $$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_1(\varepsilon) \\ \ldots \\ f_n(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Докажем, что реакция ВА (3.18) совпадает с *f*, т.е.

$$\forall u \in X^* \quad \xi^0 A^u \lambda = f(u). \quad (3.21)$$

Для этого сначала докажем (индукцией по $|u|$), что

$$A^u \lambda = \begin{pmatrix} f_1(u) \\ \ldots \\ f_n(u) \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Если $u = \varepsilon$, то обе части (3.22) совпадают по определению λ.
Если $u = xu'$, то, предполагая верным равенство (3.22), в котором u заменено на u', имеем:

$$A^u \lambda = A^{xu'} \lambda = A^x A^{u'} \lambda = A^x \begin{pmatrix} f_1(u') \\ \ldots \\ f_n(u') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} A^x_{1j} f_j(u') \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} A^x_{nj} f_j(u') \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Из (3.20) следует, что правую часть в (3.23) можно переписать в виде

$$\begin{pmatrix} (f_1 D^x)(u') \\ \dots \\ (f_n D^x)(u') \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Согласно определению (3.16) функций вида fD^x, столбец (3.24) совпадает с правой частью доказываемого равенства (3.22).
Таким образом, равенство (3.22) доказано. Согласно этому равенству, левая часть доказываемого равенства (3.21) равна

$$\xi^0 \begin{pmatrix} f_1(u) \\ \dots \\ f_n(u) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} i^{\xi^0} f_i(u). \quad (3.25)$$

По определению ξ^0 (см. (3.19)), правая часть (3.25) равна $f(u)$, т.е. правой части доказываемого равенства (3.21).

3.4 Связь между линейно-автоматными функциями и реакциями вероятностных автоматов

Теорема 21.
Пусть $L = (\xi_L^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda_L)$ - ЛА размерности *n*.
Тогда существуют ВА *A* и число *a* > *0*, такие, что $\forall u \in X^*$

$$f_A(u) = a^{|u|+1} f_L(u) + \tfrac{1}{n+2}. \quad (3.26)$$

Доказательство.
Если все компоненты λ_L равны нулю, то все значения функции f_L равны нулю, в этом случае искомый ВА может иметь вид

$$(\vec{e}_1, \{E \mid x \in X\}, \tfrac{1}{n+2} e_1^{\downarrow}),$$

где $\vec{e}_1$ и $e_1^{\downarrow}$ - вектор-строка и вектор-столбец соответственно, у которых первая компонента равна 1, а остальные равны 0.
Пусть не все компоненты λ_L равны нулю. Можно считать, что $\lambda_L = e_1^{\downarrow}$ (а если $\lambda_L \neq e_1^{\downarrow}$, то заменим *L* на эквивалентный ему ЛА

$$\left(\xi_L^0 P, \{P^{-1} L^x P \mid x \in X\}, e_1^{\downarrow}\right),$$

где *P* - обратимая матрица, первый столбец которой равен λ_L).
$\forall x \in X$ определим A_1^x как матрицу порядка *n* + 2 вида

$$\begin{pmatrix} & & & a_1 & 0 \\ & L^x & & \dots & \dots \\ & & & a_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \dots & b_n & b_0 & 0 \end{pmatrix}$$

в которой

• левая верхняя подматрица порядка n совпадает с L^x, и

• компоненты $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n, b_0$ выбраны так, что сумма компонентов в каждой строке и в каждом столбце матрицы A_1^x равна нулю.

Второе из этих свойств можно выразить в виде равенств

$$A_1^x I = 0^{\downarrow}, \quad \tilde{I} A_1^x = \vec{0}, \quad (3.27)$$

где I и $\tilde{I}$ - вектор-столбец и вектор-строка порядка n+2, каждый элемент которых равен 1, и $0^{\downarrow}$ и $\vec{0}$ - вектор-столбец и вектор-строка порядка n + 2, каждый элемент которых равен 0.

Нетрудно видеть, что $\forall u \neq \varepsilon$ левая верхняя подматрица порядка n матрицы A_1^u совпадает с L^u, и все компоненты строки n — 1 и столбца n матрицы A_1^u равны нулю. Кроме того, будут верны равенства (3.27), в которых x заменено на u.

Обозначим записью ξ_1^0 вектор-строку $(\xi_L^0, c, 0)$ порядка n + 2, в которой левая подстрока порядка n совпадает с ξ_L^0, и число c выбрано так, что сумма компонентов ξ_1^0 равна нулю (т.е. $\xi_1^0 I = 0$).

Выберем число a > 0 так, чтобы модуль каждого элемента строки $a\xi_1^0$ и матрицы aA_1^x был меньше $\frac{1}{n+2}$.

Определим матрицу B порядка n + 2 и вектор-строку ξ порядка n + 2 следующим образом:

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+2} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n+2}(1 \dots 1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{gathered} B^2 = B,\ BI = I,\ \xi I = 1,\ \xi B = \xi, \\ A_1^x B = 0,\ BA_1^x = 0,\ \xi_1^0 B = 0,\ \xi A_1^x = 0, \end{gathered} \quad (3.28)$$

где символ 0 в (3.28) обозначает нулевую матрицу или вектор-строку порядка n + 2.

Искомый ВА имеет вид $A = (\xi_A^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda_A)$, где

$$\xi_A^0 := a\xi_1^0 + \xi, \quad \forall x \in X \quad A^x := aA_1^x + B, \quad \lambda_A := \begin{pmatrix} \lambda_L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что все элементы вектор-строки ξ_A^0и матриц A^x положительны,$\xi_A I = 1$,и$\forall x \in X \quad A^x I = I$ (т.е. ξ_A - распределение, и $\forall x \in X$матрица A^x определяет СФ).

Докажем, что верно равенство (3.26).

Если $u = \varepsilon$, то левая часть (3.26) равна

$$a\xi_L^0\lambda_L + \xi\lambda_A = a\xi_L^0\lambda_L + \tfrac{1}{n+2},$$

что равно правой части (3.26).

Если $u \neq \varepsilon$, то из (3.28) следует, что .$A^u = a^{|u|}A_1^u + B$, и, используя (3.28), получаем:

$$\begin{aligned} f_A(u) &= \xi_A^0 A^u \lambda_A = (a\xi_1^0 + \xi)(a^{|u|}A_1^u + B)\lambda_A = \\ &= (a^{|u|+1}\xi_1^0 A_1^u + \xi)\lambda_A = a^{|u|+1}\xi_1^0 A_1^u \lambda_A + \tfrac{1}{n+2} = \\ &= a^{|u|+1} f_L(u) + \tfrac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

3.5 Эргодичные автоматы

3.5.1 Вспомогательные понятия и результаты

Мы будем использовать следующие обозначения:

• если $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbf{R}^n$, то записи $|v|$ и $\|v\|$ обозначают соответственно числа

$$\max_{i=1\ldots n} |v_i| \quad \text{и} \quad \max_{i=1\ldots n} v_i - \min_{i=1\ldots n} v_i,$$

• если A - квадратная матрица порядка n, то записи $|A|$и $\|A\|$ обозначают соответственно числа

$$\max_{i,j=1\ldots n} |a_{ij}| \quad \text{и} \quad \max_{i=1\ldots n} \|A_i^{\downarrow}\|,$$

где $A_i^{\downarrow}$ - i-й столбец матрицы A,

• если A - матрица (в частности, вектор-строка или вектор-столбец), то запись $A > 0$ означает, что каждый элемент этой матрицы положителен,

• если A - квадратная матрица, то запись $Q(A)$ обозначает **булев шаблон** матрицы A, т.е. матрицу, получаемую из A заменой каждого ненулевого элемента на 1,

• если $\{A^x \mid x \in X\}$ совокупность матриц порядка *n,* индексированных элементами множества *X,* то

— $\forall u \in X^*$ запись A^u обозначает матрицу, определяемую следующим образом: A^ξ - единичная матрица порядка *n,* и

если $u = x_1 \dots x_k$, то $A^u \stackrel{\text{def}}{=} A^{x_1} \dots A^{x_k}$, и

— $\forall u \in X^*, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ запись A^u_{ij} обозначает элемент матрицы A^u в строке *i* и столбце *j*.

Нетрудно доказать, что если $\{A^x \mid x \in X\}$- совокупность стохастических матриц одинакового порядка, то

$$\forall u, v \in X^* \quad Q(A^{uv}) = Q(A^u)Q(A^v),$$

где произведение булевых шаблонов определяется аналогично обычному произведению матриц, с единственным отличием: сумма 1 + 1 считается равной 1 (мы будем называть такое произведение **булевым произведением).**

Теорема 22.

Пусть заданы конечное множество *X,* натуральное число *n,* и совокупность $\{A^x \mid x \in X\}$ стохастических матриц порядка *n.* Следующие условия эквивалентны:

$$\text{(a)} \quad \lim_{|u|\to\infty} \|A^u\| = 0,$$

$$\text{(b)} \quad \exists k > 0 : \forall u \in X^k \; \exists i \in \{1, \dots, n\} : A^{u\downarrow}_i > 0,$$

$$\text{(c)} \quad \exists k > 0 : \forall u \in X^k$$

$$\forall i, i' \in \{1, \dots, n\} \; \exists j : A^u_{ij} > 0, A^u_{i'j} > 0. \quad (3.29)$$

Доказательство.

Схема доказательства: $\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)} \Rightarrow \text{(c)} \Rightarrow \text{(a)}$.

• $\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}$: выберем *k* так, что $\forall u \in X^k \; \|A^u\| < \frac{1}{n}$.

Поскольку $\forall u \in X^k$ матрица A^u стохастическая, то в любой её строке существует элемент $\geq \frac{1}{n}$. Столбец $A^{u\downarrow}_i$, в котором содержится этот элемент, обладает свойством $\|A^{u\downarrow}_i\| < \frac{1}{n}$, поэтому $A^{u\downarrow}_i > 0$.

• $\text{(b)} \Rightarrow \text{(c)}$: очевидно.

• $\text{(c)} \Rightarrow \text{(a)}$: пусть верно (с), т.е. $\exists k > 0 : \forall u \in X^k$ верно (3.29). Обозначим символом с минимальный положительный элемент матриц вида A^u, где $u \in X^k$.

Лемма.
Для любой матрицы *B* порядка *n* верно неравенство

$$\|A^u B\| \le (1-c)\cdot\|B\|. \quad (3.30)$$

Доказательство.
Обозначим матрицу A^uB символом *D*, и элементы матриц *B* и *D* – записями $b_{ij},\ d_{ij}\quad (i,j=1,\ldots,n)$ соответственно.
Для доказательства неравенства (3.30) достаточно доказать, что $\forall i,i',j\in\{1,\ldots,n\}$ верно неравенство

$$|d_{ij}-d_{i'j}|\le(1-c)(M_j-m_j), \quad (3.31)$$

где $M_j:=\max\limits_t b_{tj},\ m_j=\min\limits_t b_{tj}$.
Пусть $i,i'\in\{1,\ldots,n\}$. Обозначим записью j_0 индекс, удовлетворяющий условию $A^u_{ij_0}\ge c,\ A^u_{i'j_0}\ge c$.
Верны равенства

$$d_{ij}=\sum_{t\ne j_0}A^u_{it}b_{tj}+\Big(A^u_{ij_0}M_j-A^u_{ij_0}(M_j-b_{j_0j})\Big)$$
$$d_{i'j}=\sum_{t\ne j_0}A^u_{i't}b_{tj}+\Big(A^u_{i'j_0}m_j+A^u_{i'j_0}(b_{j_0j}-m_j)\Big)$$

из которых следуют соотношения

$$d_{ij}\le\Big(\sum_t A^u_{it}\Big)M_j-A^u_{ij_0}(M_j-b_{j_0j})=M_j-A^u_{ij_0}(M_j-b_{j_0j})$$
$$d_{i'j}\ge\sum_t A^u_{i't}m_j+A^u_{i'j_0}(b_{j_0j}-m_j)=m_j+A^u_{i'j_0}(b_{j_0j}-m_j)$$

из которых следует неравенство

$$d_{ij}-d_{i'j}\le M_j-A^u_{ij_0}(M_j-b_{j_0j})-m_j-A^u_{i'j_0}(b_{j_0j}-m_j). \quad (3.32)$$

Поскольку $M_j-b_{j_0j}\ge 0$ и $b_{j_0j}-m_j\ge 0$, то, используя определение c, можно оценить сверху правую часть (3.32) значением

$$M_j-c(M_j-b_{j_0j})-m_j-c(b_{j_0j}-m_j)=(1-c)(M_j-m_j).$$

Таким образом, доказано неравенство

$$d_{ij}-d_{i'j}\le(1-c)(M_j-m_j). \quad (3.33)$$

В силу произвольности выбора индексов *i, i*' верно неравенство

$$d_{i'j}-d_{ij}\le(1-c)(M_j-m_j). \quad (3.34)$$

Из (3.33) и (3.34) следует (3.31).
Из леммы следует, что

$$\forall u\in X^*\ \|A^u\|\le(1-c)^{[|u|/k]}\cdot\|A^l\|\quad(|l|<k). \quad (3.35)$$

Правая часть (3.35) стремится к нулю при $|u| \to \infty$,поэтому условие (a) верно.

3.5.2 Понятие эргодичного вероятностного автомата и критерий эргодичности

ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ называется **эргодичным,** если

$$\forall s, s' \in S_A \quad |\vec{A}^u_s - \vec{A}^u_{s'}| \to 0 \quad (|u| \to \infty). \quad (3.36)$$

Теорема 23.
ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$эргодичен тогда и только тогда, когда$\forall u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}$матрица A^u **регулярна** (т.е.$\exists n: \ (A^u)^n > 0$).

Доказательство.
Если A эргодичен, но для некоторого $u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}$ матрица A^u нерегулярна, то $\forall k \geq 1 \ (A^u)^k$ нерегулярна. Из эргодичности A следует, что выполнено условие (a) в теореме 22 ($\lim\limits_{|u| \to \infty} \|A^u\| = 0$).

Поэтому выполнено условие (b) в этой теореме, т.е.

$$\exists l > 0 : \forall u \in X^l \ \exists i : \ A^{u\downarrow}_i > 0.$$

Можно доказать, что это противоречит нерегулярности матриц вида $(A^u)^k$, где k - произвольное натуральное число.

Обратно, пусть $\forall u \in X^* \setminus \{\varepsilon\} \ \exists n : \ (A^u)^n > 0$.

Мы будем использовать следующие обозначения.

- Запись $\mathcal{Q}_A$ обозначает множество $\{Q(A^u) \mid u \in X^*\}$ булевых шаблонов матриц вида A^u.

Нетрудно видеть, что множество $\mathcal{Q}_A$конечно.

- Символ $\mathcal{Q}^I_A$ обозначает множество всех матриц из $\mathcal{Q}_A$, содержащие столбец I (все его элементы равны 1).
- Символ k обозначает число различных матриц из $\mathcal{Q}_A \setminus \mathcal{Q}^I_A$.

Отметим, что

$$P \in \mathcal{Q}^I_A \ \Rightarrow \ \forall Q \in \mathcal{Q}_A \ \ QP \in \mathcal{Q}^I_A. \quad (3.37)$$

Докажем, что

$$\forall u \in X^{k+1} \ \ Q(A^u) \in \mathcal{Q}^I_A. \quad (3.38)$$

Пусть $u = (x_1 \dots x_{k+1})$ и $Q(A^u) \notin \mathcal{Q}^I_A$.Из (3.37) следует, что

$$\forall i = 1, \dots, k+1 \quad Q(A^{x_1}) \cdot \ldots \cdot Q(A^{x_{k+1}}) \in \mathcal{Q}_A \setminus \mathcal{Q}^I_A. \quad (3.39)$$

Поскольку $|\mathcal{Q}_A \setminus \mathcal{Q}^I_A| = k$, то из (3.39) следует, что

$$\exists i, j \in \{1, \ldots, k+1\} : i < j,$$
$$Q(A^{x_i}) \cdot \ldots \cdot Q(A^{x_{k+1}}) = Q(A^{x_j}) \cdot \ldots \cdot Q(A^{x_{k+1}}) \notin \mathcal{Q}_A^I. \quad (3.40)$$

Определим $v \stackrel{\text{def}}{=} (x_i \ldots x_{j-1}),\ w \stackrel{\text{def}}{=} (x_j \ldots x_{k+1})$. Из (3.40) следует, что

$$\forall t \geq 1 \quad Q((A^v)^t A^w) = Q(A^w) \notin \mathcal{Q}_A^I. \quad (3.41)$$

Поскольку

- из регулярности A^v следует, что $\exists\, t \geq 1 : (A^v)^t > 0$, и
- из регулярности A^w следует, что $\exists\, s : A_s^{w\downarrow} \neq \mathbf{0}^{\downarrow}$,

то $(A^v)^t A_s^{w\downarrow} > 0$, т.е. $Q((A^v)^t A^w) \in \mathcal{Q}_A^I$, что противоречит (3.41). Таким образом, свойство (3.38) верно. Это свойство совпадает с условием (b) теоремы 22 для ВА *A*. Следовательно, верно условие (a) этой теоремы, откуда следует эргодичность *A*.

3.6 Устойчивость вероятностных автоматов

3.6.1 Вспомогательные утверждения

Мы будем использовать следующие обозначения: если *A* - матрица, и $c \in \mathbf{R}$, то записи $A > c$ и $A \geq c$ означают, что каждый элемент этой матрицы > c или $\geq c$ соответственно.

Теорема 24.
Если *A* - стохастическая матрица порядка n, $A \geq c \geq 0$, и $\lambda \in \mathbf{R}^n$ - вектор-столбец, то

$$\|A\lambda\| \leq (1-2c)\|\lambda\|.$$

Доказательство.
Обозначим элементы матрицы *A* и вектор-столбца λ записями a_{ij} и λ_i $(i, j = 1, \ldots, n)$ соответственно. Кроме того, обозначим записью $b = (b_1 \ldots b_n)^\sim$ вектор-столбец $A\lambda$. Будем считать, что

$$b_1 = \max b_i, \quad b_2 = \min b_i, \quad \lambda_1 = \max \lambda_i, \quad \lambda_2 = \min b_i$$

(если это не так, то соответствующим образом переставим в матрице *A* столбцы и строки).
Надо доказать, что $b_1 - b_2 \leq (1-2c)(\lambda_1 - \lambda_2)$.
Мы докажем более сильное неравенство:

$$b_1 - b_2 \leq (1 - a_{12} - a_{21})(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Нетрудно видеть, что верны следующие соотношения:

$$b_1 = \sum_j a_{1j}\lambda_j = (1 - \sum_{j\geq 2} a_{1j})\lambda_1 + \sum_{j\geq 2} a_{1j}\lambda_j =$$
$$= \lambda_1 - \sum_{j\geq 2} a_{1j}(\lambda_1 - \lambda_j) \leq \lambda_1 - a_{12}(\lambda_1 - \lambda_2),$$
$$b_2 = \sum_j a_{2j}\lambda_j = a_{21}\lambda_1 + (1 - a_{21} - \sum_{j\geq 3} a_{2j})\lambda_2 + \sum_{j\geq 3} a_{2j}\lambda_j =$$
$$= \lambda_2 + a_{21}(\lambda_1 - \lambda_2) + \sum_{j\geq 3} a_{2j}(\lambda_j - \lambda_2) \geq \lambda_2 + a_{21}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Таким образом,

$$b_1 - b_2 \leq \lambda_1 - a_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_2 - a_{21}(\lambda_1 - \lambda_2) =$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2) - (a_{12} + a_{21})(\lambda_1 - \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2)(1 - a_{12} - a_{21}).$$

Теорема 25.
Если $\exists\, c > 0$: $\forall\, x \in X$ матрица A^x удовлетворяет неравенству $A^x \geq c$ и является стохастической, то $\forall\, u \in X^*$

$$\|A^u\| \leq (1 - 2c)^{|u|-1}. \quad (3.42)$$

Доказательство.
Обозначим символом *n* порядок матриц A^x. Сначала докажем, что $\forall\, u \in X^*$ верно соотношение

$$\forall\, \lambda \in \mathbf{R}^n \quad \|A^u\lambda\| \leq (1 - 2c)^{|u|}\|\lambda\|. \quad (3.43)$$

(3.43) верно для $u = \varepsilon$.

Если (3.43) верно для некоторого $u \in X^*$, то $\forall\, x \in X$, используя предположение (3.43) и теорему 24, получаем:

$$\|A^{ux}\lambda\| = \|A^u A^x \lambda\| \leq (1 - 2c)^{|u|}\|A^x\lambda\| \leq$$
$$\leq (1 - 2c)^{|u|}(1 - 2c)\|\lambda\| = (1 - 2c)^{|ux|}\|\lambda\|.$$

Таким образом, (3.43) верно для всех $u \in X^*$.

Теперь докажем (3.42) индукцией по \u .

- Если $|u| = 0$ или 1, то (3.42) верно.
- Пусть (3.42) верно для некоторой строки $u \in X^*$, и пусть $x \in X$.

Обозначим совокупность столбцов A^x записью $(\lambda_1 \ldots \lambda_n)$.
Используя (3.43) и свойство $\forall\, i = 1, \ldots, n \ \|\lambda_i\| \leq 1$, получаем:

$$\|A^{ux}\| = \|A^u A^x\| = \|A^u(\lambda_1 \ldots \lambda_n)\| = \|(A^u\lambda_1 \ldots A^u\lambda_n)\| =$$
$$= \max_i \|A^u\lambda_i\| \leq (1 - 2c)^{|u|} \max_i \|\lambda_i\| \leq (1 - 2c)^{|u|} =$$
$$= (1 - 2c)^{|ux|-1}.$$

Таким образом, (3.42) верно для любой строки $u \in X^*$.

Теорема 26.
Если *A* - стохастическая матрица порядка *n,* то для любой матрицы *B* порядка *n* верно неравенство

$|AB - B| \leq \|B\|$.

Доказательство.

Пусть представление матрицы *B* в виде последовательности столбцов имеет вид $(B_1^{\downarrow} \dots B_n^{\downarrow})$, тогда

$$|AB - B| = |A(B_1^{\downarrow} \dots B_n^{\downarrow}) - (B_1^{\downarrow} \dots B_n^{\downarrow})| =$$
$$= |(AB_1^{\downarrow} - B_1^{\downarrow} \dots AB_n^{\downarrow} - B_n^{\downarrow})| =$$
$$= \max_i |AB_i^{\downarrow} - B_i^{\downarrow}| \leq \max_i \|B_i^{\downarrow}\| = \|B\|,$$

где последнее неравенство следует из нижеслежующей леммы.

Лемма.

Если *A* - стохастическая матрица порядка *n,* и $\lambda \in \mathbf{R}^n$ - вектор-столбец, то $|A\lambda - \lambda| \leq \|\lambda\|$.

Доказательство.

Пусть элементы *A* и λ имеют вид a_{ij} и λ_i $(i, j = 1, \dots, n)$.

Поскольку $\forall i = 1, \dots, n \quad \sum\limits_j a_{ij} = 1$,то

$$|A\lambda - \lambda| = \max_i |\sum_j (a_{ij}\lambda_j) - \lambda_i| =$$
$$= \max_i |\sum_j (a_{ij}\lambda_j) - \sum_j (a_{ij}\lambda_i)| = \max_i |\sum_j a_{ij}(\lambda_j - \lambda_i)| \leq$$
$$\leq \max_i \sum_j a_{ij}|\lambda_j - \lambda_i| \leq \max_i \sum_j a_{ij}\|\lambda\| = \|\lambda\|.$$

Теорема 27.

Пусть *P*,*Q* - стохастические матрицы порядка *n,* тогда для любой матрицы *B* порядка *n* верно неравенство

$$|PB - QB| \leq \|B\|. \quad (3.44)$$

Доказательство.

Обозначим матрицу *P* — *Q* символом *A,* и элементы матриц *A, P, Q* - записями $a_{ij}, p_{ij}, q_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$ соответственно.

Матрица *A* удовлетворяет условию:

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(+)} \leq 1, \quad (3.45)$$

где $a_{ij}^{(+)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a_{ij}, & \text{если } a_{ij} \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$, т.к. $\forall i = 1, \dots, n$

- $\sum\limits_j a_{ij} = \sum\limits_j (p_{ij} - q_{ij}) = \sum\limits_j p_{ij} - \sum\limits_j q_{ij} = 1 - 1 = 0,$
- если $a_{ij_1}, \dots, a_{ij_k}$ - список всех неотрицательных элементов *i*-й строки матрицы *A,* то

$$\sum_s a_{ij_s} = \sum_s (p_{ij_s} - q_{ij_s}) = \sum_s p_{ij_s} - \sum_s q_{ij_s} \le 1 - \sum_s q_{ij_s} \le 1.$$

Перепишем доказываемое неравенство (3.44) в виде

$$|AB| \le \|B\|. \quad (3.46)$$

Обозначим матрицу *AB* символом С, и элементы матриц *A, B, C* – записями $a_{ij},\ b_{ij},\ c_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$ соответственно. Пусть элемент c_{kr} матрицы *C* таков, что

$$|c_{kr}| = \max_{i,j} |c_{ij}| \quad (= |AB|\,). \quad (3.47)$$

Определим $M \overset{\text{def}}{=} \max_j b_{jr},\ m \overset{\text{def}}{=} \min_j b_{jr}$, и $B_r^{\downarrow} \overset{\text{def}}{=}$ r-й столбец матрицы *B*. Из этого определения следует, что

$$M - m = \|B_r^{\downarrow}\| \le \|B\|. \quad (3.48)$$

Из (3.47) и (3.48) следует, что для доказательства неравенства (3.46) достаточно доказать неравенство

$$|c_{kr}| \le M - m. \quad (3.49)$$

Обозначим записью $a^{(+)} \quad (a^{(-)})$ сумму всех положительных (отрицательных) чисел вида $a_{kj} \ (j = 1, \ldots, n)$. Заметим, что

• из $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 0$ следует $a^{(+)} + a^{(-)} = 0$, или $a^{(-)} = -a^{(+)}$,

• из $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{(+)} \le 1$ следует $a^{(+)} \le 1$.

Для доказательства неравенства (3.49) рассмотрим отдельно случаи $c_{kr} \ge 0$ и $c_{kr} < 0$.

• Если $c_{kr} \ge 0$, то

$$|c_{kr}| = c_{kr} = \sum_j a_{kj} b_{jr} \le a^{(+)} M + a^{(-)} m =$$

$$= a^{(+)} (M - m) \le M - m,$$

т.е. в данном случае неравенство (3.49) верно.

• Если $c_{kr} < 0$, то

$$c_{kr} = \sum_j a_{kj} b_{jr} \ge a^{(+)} m + a^{(-)} M = a^{(+)} (m - M),$$

поэтому $|c_{kr}| = -c_{kr} = a^{(+)} (M - m) \le M - m$, т.е. в данном случае неравенство (3.49) также верно.

3.6.2 Понятие устойчивости вероятностных автоматов

Пусть заданы ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ и число ε > 0.

Запись $O_\varepsilon(A)$ обозначает множество ВА, каждый из которых получается из *A* путем прибавления к элементам строки ξ^0 и матриц A^x чисел из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

ВА *A* называется **устойчивым** относительно ИТС $a \in I(A)$, если $\exists \varepsilon > 0 : \forall B \in O_\varepsilon(A) \quad a \in I(B)$ и $A_a = B_a$.

Теорема 28.

Пусть задан ВА $A = (\xi_A^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и $\forall x \in X \quad A^x > 0$. Тогда $\forall a \in I(A)$ *A* устойчив относительно *a*.

Доказательство.

По предположению, $\exists \delta > 0$: $\forall u \in X^*$

$$|f_A(u) - a| > \delta. \quad (3.50)$$

Докажем, что $\exists \varepsilon > 0$: $\forall B \in O_\varepsilon(A)$, $\forall u \in X^*$

$$|f_A(u) - f_B(u)| \le \frac{\delta}{2}. \quad (3.51)$$

Отметим, что из (3.51) следуют требуемые соотношения $a \in I(B)$ и $A_a = B_a$, т.к.

• $a \in I(B)$, верно потому, что $\forall u \in X^*$ из неравенства

$$|f_A(u) - a| \le |f_A(u) - f_B(u)| + |f_B(u) - a|$$

согласно (3.51) и (3.50) следуют соотношения

$$\begin{aligned} &|f_B(u) - a| \ge |f_A(u) - a| - |f_A(u) - f_B(u)| > \\ &> \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

• $A_a = B_a$ верно потому, что если $\exists u \in X^*$: соотношение

$$f_A(u) > a \;\Leftrightarrow\; f_B(u) > a$$

неверно, то, согласно (3.50) и (3.52), будет верно неравенство

$$|f_A(u) - f_B(u)| > \delta,$$

которое противоречит (3.51).

Пусть *B* имеет вид $(\xi_B^0, \{B^x \mid x \in X\}, \lambda)$, тогда можно переписать (3.51) в виде

$$|\xi_A^0 A^u \lambda - \xi_B^0 B^u \lambda| \le \frac{\delta}{2}. \quad (3.53)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} &|\xi_A^0 A^u \lambda - \xi_B^0 B^u \lambda| \le \\ &\le |\xi_A^0 A^u \lambda - \xi_A^0 B^u \lambda| + |\xi_A^0 B^u \lambda - \xi_B^0 B^u \lambda| = \\ &= |\xi_A^0 (A^u - B^u)\lambda| + |(\xi_A^0 - \xi_B^0) B^u \lambda| \le \\ &\le |A^u - B^u| \cdot n \cdot |\lambda| + |\xi_A^0 - \xi_B^0| \cdot n \cdot |\lambda| \end{aligned}$$

(где $n = |S_A|$),то, следовательно, неравенство (3.53) будет верно, если будут верны неравенства

$$|A^u - B^u| \leq \delta_1, \quad |\xi_A^0 - \xi_B^0| \leq \delta_1, \quad \textbf{где } \delta_1 = \frac{\delta}{4n|\lambda|}. \quad (3.54)$$

Таким образом, для доказательства теоремы (28) достаточно доказать, что $\exists\, \varepsilon \in (0, \delta_1)$: $\forall\, B \in O_\varepsilon(A)$, $\forall\, u \in X^*$

$$|A^u - B^u| < \delta_1. \quad (3.55)$$

По предположению, $\exists\, c > 0$: $\forall\, x \in X \quad A^x \geq c$.

Выберем *k* так, чтобы было верно неравенство

$$(1-c)^{k-1} < \frac{\delta_1}{3}. \quad (3.56)$$

Лемма.

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{c}{2})$, $B \in O_\varepsilon(A)$, и

$$\forall\, u \in X^{\leq k} \quad |A^u - B^u| < \frac{\delta_1}{3}. \quad (3.57)$$

Тогда $\forall\, u \in X^*$ верно неравенство (3.55).

Доказательство.

Если $|u| \leq k$, то (3.55) следует из (3.57).

Пусть $|u| > k$, тогда $u = u_1 u_2$, где $|u_2| = k$, и

$$\begin{aligned} &|A^u - B^u| = |A^{u_1 u_2} - B^{u_1 u_2}| \leq \\ &\leq |A^{u_1} A^{u_2} - A^{u_2}| + |B^{u_1} B^{u_2} - B^{u_2}| + |A^{u_2} - B^{u_2}|. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Согласно теореме (26), верны неравенства

$$|A^{u_1} A^{u_2} - A^{u_2}| \leq \|A^{u_2}\|, \quad |B^{u_1} B^{u_2} - B^{u_2}| \leq \|B^{u_2}\|,$$

поэтому из (3.58) и из истинности $\forall\, u \in X^k$ неравенства в (3.57) следует неравенство

$$|A^u - B^u| < \|A^{u_2}\| + \|B^{u_2}\| + \frac{\delta_1}{3}. \quad (3.59)$$

Согласно теореме 25 и условию (3.56),

- из условия $\forall\, x \in X \quad A^x \geq c$ следует соотношение

$$\forall\, u \in X^k$$
$$\|A^u\| \leq (1-2c)^{k-1} < (1-c)^{k-1} < \frac{\delta_1}{3}, \quad (3.60)$$

- из условий $B \in O_\varepsilon(A)$, $\varepsilon \in (0, \frac{c}{2})$ и $\forall\, x \in X \quad A^x \geq c$ следует условие $\forall\, x \in X \quad B^x \geq \frac{c}{2}$, из которого следует соотношение

$$\forall u \in X^k$$
$$\|B^u\| \le (1 - 2 \cdot \tfrac{c}{2})^{k-1} = (1-c)^{k-1} < \tfrac{\delta_1}{3}. \quad (3.61)$$

Из (3.59), (3.60), и (3.61) следует, что

$$|A^u - B^u| < \tfrac{\delta_1}{3} + \tfrac{\delta_1}{3} + \tfrac{\delta_1}{3} = \delta_1.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 28 осталось доказать, что $\exists \varepsilon \in (0, \min\{\delta_1, \frac{c}{2}\}) : \forall B \in O_\varepsilon(A)$ верно (3.57). Нетрудно доказать, что для каждой строки $u \in X^{\le k}$

$$\exists \varepsilon_u > 0 : \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_u), \forall B \in O_\varepsilon(A) \quad |A^u - B^u| < \tfrac{\delta_1}{3}.$$

(для доказательства этого факта можно использовать следующее соображение: $\forall x \in X$ обозначим символом M^x матрицу порядка *n*, элемент в строке *i* и столбце *j* которой имеет вид $A^x_{ij} + t^x_{ij}$, где t^x_{ij} - различные переменные, и если $u = x_1 \ldots x_s$, то $M^u \stackrel{\text{def}}{=} M^{x_1} \ldots M^{x_s}$, тогда выражение $|A^u - M^u|$ определяет непрерывную функцию от переменных t^x_{ij}, значение которой равно 0 в том случае когда значения всех переменных t^x_{ij} равны 0, и т.д.)

Поскольку число строк в $X^{\le k}$ конечно, то в качестве искомого ε можно взять $\min\{\delta_1, \frac{c}{2}, \varepsilon_u \ (u \in X^{\le k})\}$.

Нижеследующая теорема является усилением теоремы 28.

Теорема 29.

Пусть задан ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и

$$\exists l : \forall u \in X^l \ \ A^u > 0.$$

Тогда $\forall a \in I(A)$ *A* устойчив относительно *a*.

Доказательство.

Пусть $a \in I_\delta(A)$, и $|S_A| = n$.

Как и в доказательстве теоремы 28, для доказательства теоремы 29 достаточно доказать, что $\exists \varepsilon \in (0, \delta_1)$, где $\delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta}{4n|\lambda|}$:

$$\forall B \in O_\varepsilon(A), \ \ \forall u \in X^* \quad |A^u - B^u| < \delta_1. \quad (3.62)$$

По предположению, $\forall u \in X^l \ \exists c_u > 0 : A^u \ge c_u$.

Определим $c \stackrel{\text{def}}{=} \min\limits_{u \in X^l} c_u$. Таким образом, $\forall u \in X^l \ A^u \ge c$.

Выберем *k* так, чтобы было верно неравенство $(1-c)^{[k/l]} < \frac{\delta_1}{3}$.

Аналогично доказательству теоремы 28, доказываются свойства

$$\forall u \in X^k \ \ \|A^u\| \le (1-c)^{[k/l]}, \text{ и}$$
$$\exists \varepsilon > 0 \colon \forall B \in O_\varepsilon(A), \forall u \in X^{\le k} \ \ |A^u - B^u| \le \tfrac{\delta_1}{3},$$

из которых следует (3.62).

Можно доказать, что если $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - ВА, то $\forall a \in I(A)$ *A* устойчив относительно *a* тогда и только тогда, когда $\exists \delta < 1 : \forall x \in X \ \ \|A^x\| < \delta$.

4. Вероятностные языки

4.1 Понятие вероятностного языка

Пусть *A* - ВА, и $a \in [0, 1)$.

Вероятностным языком (ВЯ) ВА *A* с точкой сечения *a* называется множество строк $A_a \subseteq X^*$ (где *X* - множество входных сигналов *A),* определяемое следующим образом:

$A_a \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f_A(u) > a\}$.

Понятие ВЯ может использоваться для решения различных задач, в частности для моделирования процесса обучения. Одна из моделей обучения имеет следующий вид. Задано конечное множество *S,* элементы которого называются **реакциями** на некоторый стимул, причём каждая реакция $s \in S$ рассматривается либо как правильная, либо как неправильная. Обозначим символом λ вектор-столбец, компоненты которого индексированы реакциями $s \in S$, причем те компоненты λ, индексы которых являются правильными реакциями, равны 1, а остальные компоненты равны 0. С обучаемой системой в каждый момент времени $t = 0,1,...$ связано некоторое распределение $\xi \in S^\Delta$, в соответствии с которым она реагирует на стимул в этот момент: для каждого $s \in S$ вероятность того, что система выдаст реакцию *s* в момент *t,* равна s^ξ. Из данных определений следует, что вероятность выдачи правильной реакции в момент *t* имеет вид $\xi\lambda$. Предполагается, что задано конечное множество $\{A^x \mid x \in X\}$ **обучающих операторов,** каждый из которых является стохастической матрицей порядка |S| и определяет изменение реакции системы на стимул по следующему правилу: если

- в текущий момент времени система реагировала на стимул в соответствии с распределением $\xi \in S^\Delta$, и
- в этот момент был применён обучающий оператор A^x,

то в следующий момент времени система будет реагировать на стимул в соответствии с распределением ξA^x. Таким образом, путем применения к обучаемой системе обучающих операторов можно добиться изменения вероятности правильной реакции на стимул. Система считается **обученной** в некоторой момент времени, если вероятность того, что она выдаст в этот момент правильную реакцию

на стимул, превышает некоторое заданное значение $a \in [0,1)$. Одна из задач, связанных с обучением, имеет следующий вид: задано начальное распределение $\xi^0 \in S^\Delta$, требуется описать все последовательности $(A^{x_1}, \ldots, A^{x_n})$ обучающих операторов, каждая из которых обладает следующим свойством: после последовательного применения операторов, входящих в эту последовательность, система станет обученной. Нетрудно видеть, что каждая такая последовательность соответствует строке $x_1 \ldots x_n \in X^*$, такой, что $\xi^0 A^{x_1} \ldots A^{x_n} \lambda > a$, т.е. строке из ВЯ A_a, где
$A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

4.2 Свойства вероятностных языков

Теорема 30.
Пусть $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ – ВА, и $a \in [0,1)$.
Тогда $A_a = B_a$, где ВА B имеет вид

$$B = (\vec{e}_1, \begin{pmatrix} 0 & \xi^0 A^x \\ \mathbf{0} & A^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi^0 \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}),$$

где $\vec{e}_1$- вектор-строка длины $|S_A| + 1$, у которой первая компонента равна 1, а остальные компоненты равны 0, и **0** - вектор-столбец длины $|S_A|$, все компоненты которого равны 0.
Доказательство.

Нетрудно доказать, что $\forall u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}\, B^u = \begin{pmatrix} 0 & \xi^0 A^u \\ \mathbf{0} & A^u \end{pmatrix}$,

откуда следует равенство $f_A = f_B$.
Теорема 31.
Пусть задан ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, где каждая компонента λ_j вектора λ принадлежит отрезку $[0,1]$, и $a \in [0,1)$.
Тогда $A_a = B_a$, где $B = (\xi^0_B, \{B^x \mid x \in X\}, \lambda_B)$, $|S_B| = 2|S_A|$, и
• ξ^0_B получается из ξ^0 добавлением 0 после каждой компоненты,
• $\forall x \in X$ матрица B^x получается из матрицы A^x заменой каждого её элемента A^x_{ij} на матрицу $\begin{pmatrix} \lambda_j A^x_{ij} & (1-\lambda_j) A^x_{ij} \\ \lambda_j A^x_{ij} & (1-\lambda_j) A^x_{ij} \end{pmatrix}$,
• $\lambda_B = (1\,0 \ldots 1\,0)^\sim$.

Доказательство.

Нетрудно доказать, что $\forall u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}$ матрица B^u получается из матрицы A^u заменой каждого её элемента A^u_{ij} на матрицу

$\begin{pmatrix} \lambda_j A^u_{ij} & (1-\lambda_j)A^u_{ij} \\ \lambda_j A^u_{ij} & (1-\lambda_j)A^u_{ij} \end{pmatrix}$, откуда следует равенство $f_A = f_B$.

Теорема 32.

Пусть A - ВА, и $a, b \in [0, 1)$. Тогда $\exists$ ВА B :

$A_a = B_b$. (4.1)

Доказательство.

Пусть ВА A имеет вид $(\xi^0_A, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda_A)$.

Рассмотрим отдельно случаи $b < a$ и $b > a$.

- Если $b < a$, то $b = \alpha a$, где $\alpha \in [0, 1)$.

В этом случае $|S_B| = 2|S_A|$, и компоненты ξ^0_B, B^x, λ_B искомого ВА B имеют следующий вид:

— $\xi^0_B = (\xi^0_A, \mathbf{0})$, где 0 - вектор-строка длины $|S_A|$, все компоненты которого равны 0,

$$\forall x \in X \quad B^x \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \alpha A^x & (1-\alpha)A^x \\ \alpha A^x & (1-\alpha)A^x \end{pmatrix},$$

— $\lambda_B = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$, где 0 - вектор-столбец длины $|S_A|$, все компоненты которого равны 0.

Нетрудно доказать, что

$$\forall u \in X^* \setminus \{\varepsilon\} \quad B^u = \begin{pmatrix} \alpha A^u & (1-\alpha)A^u \\ \alpha A^u & (1-\alpha)A^u \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $\forall u \in X^* \quad f_B(u) = \alpha f_A(u) = \frac{b}{a} f_A(u)$.

Из последнего соотношения следует (4.1).

- Если $b > a$, то $b = \alpha + (1-\alpha)a$, где $\alpha \in (0, 1)$.

В этом случае $|S_B| = 1 + |S_A|$, и компоненты ξ^0_B, B^x, λ_B искомого ВА B имеют следующий вид:

$$- \ \xi^0_B = (\alpha, (1-\alpha)\xi^0_A),$$

$$- \ \forall x \in X \quad B^x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A^x \end{pmatrix},$$

$$- \ \lambda_B = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_A \end{pmatrix}.$$

Нетрудно доказать, что $\forall u \in X^*$

$$f_B(u) = \alpha + (1-\alpha) f_A(u) = \frac{b-a}{1-a} + \frac{1-b}{1-a} f_A(u),$$

откуда следует (4.1).

4.3 Языки, представимые вероятностными автоматами общего вида

Пусть $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ - ВА общего вида,
$y \in Y$, и $a \in [0,1)$.

Обозначим записью $A_{y,a}$ множество

$$A_{y,a} \stackrel{\text{def}}{=} \{ux \mid u \in X^*, x \in X, \xi^0 A^u A^{xy} I > a\},$$

где $A^u \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{v \in Y^*} A^{u,v}$.

Если строка $u \in X^*$ имеет вид $x_0 \ldots x_{k-1}$, то значение $\xi^0 A^u A^{xy} I$ можно интерпретировать как вероятность того, что если

- в моменты времени *0,1,... ,k — 1* на вход *A* последовательно поступали элементы строки *u* (т.е. в момент 0 поступил сигнал x_0, в момент 1 поступил сигнал x_1, ..., в момент *k* — 1 поступил сигнал x_{k-1}), и
- в момент *k* поступил сигнал *x,*

то в момент времени *k* выходный сигнал *A* равен *y.*

Таким образом, множество $A_{y,a}$ можно интерпретировать как совокупность всех строк $u \in X^* \setminus \{\varepsilon\}$, обладающих следующим свойством: вероятность того, что

- если, начиная с момента 0, на вход *A* последовательно поступали элементы строки *u*
- то при подаче на вход *A* последнего входного сигнала из *u* выходной сигнал *A* в этот момент времени равен *y,*

больше *a.*

Множество $A_{y,a}$ называется **языком, представимым ВА общего вида** *A* выходным сигналом *y* и точкой сечения *a.*

Теорема 33.

Пусть $A = (X, Y, S, P, \xi^0)$ - ВА общего вида, $y \in Y$, и $a \in [0,1)$.

Тогда $A_{y,a} = B_a \setminus \{\varepsilon\}$, где *B* - ВА вида

$$B = \left((\xi^0, \mathbf{0}), \{ \begin{pmatrix} \sum\limits_{y' \neq y} A^{xy'} & A^{xy} \\ \sum\limits_{y' \neq y} A^{xy'} & A^{xy} \end{pmatrix} \mid x \in X\}, (\mathbf{0}, \mathbf{1})^{\sim} \right)$$

где 0 и 1 вектор-строки длины $|S_A|$, все компоненты которых равны 0 и 1, соответственно.

Доказательство.

Нетрудно доказать, что

$$\forall u \in X^*, \forall x \in X \quad B^{ux} = \begin{pmatrix} A^u \sum\limits_{y' \neq y} A^{xy'} & A^u A^{xy} \\ A^u \sum\limits_{y' \neq y} A^{xy'} & A^u A^{xy} \end{pmatrix},$$

откуда следует соотношение

$$\forall u \in X^*, \forall x \in X \quad f_B(ux) = \xi^0 A^u A^{xy} I,$$

которое влечёт доказываемое утверждение.

4.4 Регулярность вероятностных языков

4.4.1 Понятие регулярного языка

Регулярный язык над конечным множеством *X* - это подмножество $U \subseteq X^*$, такое, что существует автомат Мура *M* вида (1.6), удовлетворяющий условиям:

$$|S| < \infty, \; Y = \{0,1\}, \; U = \{u \in X^* \mid f_M(u) = 1\}. \quad \textbf{(4.2)}$$

Весом регулярного языка *U* называется наименьшее число *n,* такое, что $\exists$ автомат Мура *M* вида (1.6), такой, что $|S| = n$ и выполнены условия (4.2). Мы будем обозначать вес регулярного языка *U* записью $w(U)$.

Можно доказать, что для любого языка $U \subseteq X^*$ следующие утверждения эквивалентны:

- язык *U* является регулярным,
- число классов эквивалентности $\underset{U}{\sim}$ на множестве *X*,* определяемой

следующим образом: $\forall u, u' \in X^*$

$$u \underset{U}{\sim} u' \;\Leftrightarrow\; \forall v \in X^* \; (uv \in U \Leftrightarrow u'v \in U) \quad (4.3)$$

является конечным,

и если *U* регулярен, то *w(U)* совпадает с числом классов эквивалентности $\underset{U}{\sim}$.

Теорема 34.

Пусть *X* - конечное множество, и $U \subseteq X^*$- регулярный язык.

Тогда *U* - ВЯ.

Доказательство.

Пусть $M = (X, \{0,1\}, S, \delta, \lambda, s^0)$- автомат Мура такой, что

$U = \{u \in X^* \mid f_{\tilde{M}}(u) = 1\}$.

Обозначим записью $\tilde{M}$ ВА $(\xi_{s^0}, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, множество состояний и отображение λ которого совпадают с соответствующими компонентами автомата *M,* и

$$\forall x \in X, \forall s, s' \in S \quad A^x_{s,s'} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } \delta(s,x) = s', \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нетрудно доказать, что $U = \tilde{M}_0$.

4.4.2 Изолированные точки сечения

Пусть задан ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

Число $a \in [0,1)$ называется **изолированной точкой сечения (ИТС)** для ВА *A,* если $\exists\, \delta > 0$:

$\forall u \in X^* \quad |f_A(u) - a| > \delta$. **(4.4)**

Для каждого ВА *A* и каждого δ> 0 запись $I_\delta(A)$ обозначает совокупность всех ИТС *a* для *A,* обладающих свойством (4.4). Запись *I(A)* обозначает множество $\bigcup\limits_{\delta>0} I_\delta(A)$.

Можно доказать, что проблема выяснения истинности утверждения $a \in I(A)$ (где *a* и все численные значения ВА *A* - рациональные числа) алгоритмически неразрешима.

Теорема 35.

Пусть задан ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, где $\lambda \in [0,1]^n$, $n = |S_A|$, и $\exists\, \delta > 0 : a \in I_\delta(A)$.

Тогда A_a - регулярный язык, и

$w(A_a) \le (1 + \frac{1}{\delta})^{n-1}$. (4.5)

Доказательство.

Обозначим символом *R* множество, содержащее по одному представителю каждого класса эквивалентности $\underset{A_a}{\sim}$. Из определения *R* следует, что $\forall\, u, u' \in U,\ u \neq u' \Rightarrow \exists\, v \in X^*$:

$uv \in A_a \not\Leftrightarrow u'v \in A_a$. (4.6)

Т.к. $a \in I_\delta(A)$, то из (4.6) и (4.4) следует неравенство

$|f_A(uv) - f_A(u'v)| > 2\delta$,

т.е.

$|\xi^0(A^u - A^{u'})A^v\lambda| > 2\delta$. **(4.7)**

Поскольку $A^v I = I$ и $\lambda \in [0,1]^n$, то $\lambda' \stackrel{\text{def}}{=} A^v \lambda \in [0,1]^n$.
Можно доказать, что существует частичная функция Vol_{n-1} с неотрицательными значениями на подмножествах множества $\mathbf{R}^n$, называемая n — 1—**мерным объемом,** и обладающая следующими свойствами:

- значение $Vol_{n-1}(\{1,\ldots,n\}^{\triangle})$ определено и положительно,

(обозначим это значение символом С)

- если $Vol_{n-1}(M)$ определено, то $\forall \vec{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$Vol_{n-1}(\vec{x} + M) = Vol_{n-1}(M),$$

где $\vec{x} + M \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n) \mid (y_1,\ldots,y_n) \in M\}$,

- если $Vol_{n-1}(M)$ определено, то $\forall d > 0$

$$Vol_{n-1}(dM) = d^{n-1} Vol_n(M),$$

где $dM \stackrel{\text{def}}{=} \{(dx_1,\ldots,dx_n) \mid (x_1,\ldots,x_n) \in M\}$,

- если $Vol_{n-1}(M)$ и $Vol_{n-1}(M')$ определены, и $M \cap M' = \emptyset$, то

$$Vol_{n-1}(M \cup M') = Vol_{n-1}(M) + Vol_{n-1}(M'),$$

- если $Vol_{n-1}(M)$ и $Vol_{n-1}(M')$ определены, и $M \subseteq M'$, то

$$Vol_{n-1}(M) \leq Vol_{n-1}(M').$$

Введём следующие обозначения: пусть $d > 0$ и $u \in R$, тогда записи Δ_d и Δ_d^u обозначают множество $d\{1,\ldots,n\}^{\triangle}$ и $\xi^0 A^u + \Delta_d$ соответственно. Из сказанного выше следует, что

$$\forall d > 0 \quad Vol_{n-1}(\Delta_d) = Vol_{n-1}(\Delta_d^u) = d^{n-1} C. \quad (4.8)$$

Нетрудно видеть, что

(A) $\forall u \in R \quad \Delta_\delta^u \subseteq \Delta_{1+\delta}$, т.к. если $\vec{x} \in \Delta_\delta^u = \xi^0 A^u + \Delta_\delta$, то

$$\vec{x} = \xi^0 A^u + \delta\vec{y}, \text{ где } \vec{y} \in \Delta_1.$$

Все компоненты $\vec{y}$ неотрицательны и $\vec{y}I = 1$, поэтому все компоненты $\vec{x}$ неотрицательны и

$$\vec{x}I = (\xi^0 A^u + \delta\vec{y})I = \xi^0 A^u I + \delta\vec{y}I = 1 + \delta,$$

откуда следует, что $\vec{x} \in \Delta_{1+\delta}$.

(B) $\forall u, u' \in R,\ u \neq u' \Rightarrow \Delta_\delta^u \cap \Delta_\delta^{u'} = \emptyset$, т.к. если $\exists \vec{x} \in \Delta_\delta^u \cap \Delta_\delta^{u'}$, то $\exists \vec{y}, \vec{z} \in \Delta_1$:

$$\vec{x} = \xi^0 A^u + \delta\vec{y}, \quad \vec{x} = \xi^0 A^{u'} + \delta\vec{z}. \quad (4.9)$$

Из (4.9) следует, что $\xi^0(A^u - A^{u'}) = \delta(\vec{z} - \vec{y})$, откуда на основании (4.7) получаем: $|\delta(\vec{z}-\vec{y})\lambda'| > 2\delta,$ или

$|(\vec{z}-\vec{y})\lambda'| > 2,$ **где** $\lambda' \in [0,1]^n$. (4.10)

Если $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n), \lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)^{\sim}$, то

$$|(\vec{z}-\vec{y})\lambda'| = |\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)\lambda'_i| \le \sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i|\lambda'_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}|z_i - y_i| \le \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 2,$$

что противоречит соотношению (4.10).

Из (A), (B) и из перечисленных выше свойств функции Vol_{n-1} следует, что если *R* содержит *к* элементов $u_1, \dots, u_k$, то

$$\sum_{i=1}^{k} Vol_{n-1}(\Delta_\delta^{u_i}) \le Vol_{n-1}(\Delta_{1+\delta}),$$

откуда, ввиду (4.8), следует неравенство

$$k\delta^{n-1}C \le (1+\delta)^{n-1}C,$$

которое эквивалентно неравенству $k \le (1+\frac{1}{\delta})^{n-1}$, откуда следует регулярность A_a и неравенство (4.5).

Следующая теорема показывает, что в ВА ограниченного размера можно представлять сколь угодно сложные регулярные языки.

Теорема 36.

Пусть $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - ВА, где

$|S_A| = 2,\ X = \{0, 2\},\ \xi^0 = (1\ \ 0),$

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и $\forall n \ge 1$ a_n - число из (0,1), имеющее в троичной записи вид 0.2 ... 211 (количество двоек = *n* — 1).

Тогда $\forall n \ge 1\ \ a_n \in I(A)$ **и** $w(A_{a_n}) \ \ge n.$

Доказательство.

Индукцией по длине строки $u \in X^*$ доказывается, что если *u* имеет вид $x_1 \dots x_k$, то $f_A(u) = 0.x_k \dots x_1$ (в троичной записи).

Обозначим символом *D* топологическое замыкание множества $\{f_A(u) \mid u \in X^*\}$. Множество *D* называется **канторовым дисконтинуумом.** Нетрудно доказать, что $[0,1] \setminus D \subseteq I(A)$.

Из определения a_n следует, что $a_n < f_A(u) \ \Leftrightarrow\ u = u_1 2 \dots 2$ (количество двоек $\ge n$), поэтому если $u \in A_{a_n}$, то $|u| \ge n$, откуда следует свойство $w(A_{a_n}) \ge n.$

Нижеследующая теорема является обобщением теоремы 35.

Теорема 37.
Пусть *M* - автомат Мура вида $(X, \{0,1\}, S, \delta, \lambda, s^0)$, причем *S* - компактное метрическое пространство с метрикой ρ, такой, что для любой пары s_1, s_2 достижимых состояний автомата *M* выполнены условия:

$$\forall x \in X \quad \rho(s_1 x, s_2 x) \le \rho(s_1, s_2), \quad (4.11)$$

$$\exists \delta > 0: \ \lambda(s_1) \ne \lambda(s_2) \ \Rightarrow \ \rho(s_1, s_2) \ge \delta. \quad (4.12)$$

Тогда язык $U \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f_M(u) = 1\}$ регулярен, и *w(U)* не превосходит числа элементов в минимальном (по числу элементов) покрытии множества *S* открытыми шарами радиуса δ/2.
Доказательство.
Обозначим символом *R* множество, содержащее по одному представителю каждого класса эквивалентности $\widetilde{U}$. Из (4.12) и (4.11) следует, что $\forall u, u' \in R$: $u \ne u'$ $\exists v \in X^*$:

$$\delta \le \rho(s^0 uv, s^0 u'v) \le \rho(s^0 u, s^0 u'). \quad (4.13)$$

Пусть $\mathcal{C}$ - минимальное (по числу элементов) конечное покрытие *S* открытыми шарами радиуса $\delta/2$. Если *u, u'* - различные элементы *R*, то из (4.13) следует, что $s^0 u$ и $s^0 u'$ не могут попасть в один и тот же шар из $\mathcal{C}$, поэтому $|R| \le |\mathcal{C}|$.
Теорема 35 является следствием теоремы 37, т.к. если заданы ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ и число $a \in [0,1)$, удовлетворяющие условиям теоремы 35, то, полагая

$$M \stackrel{\text{def}}{=} (X, \{0,1\}, S_A^{\triangle}, \delta, \lambda_M, \xi^0),$$

где $\delta(\xi, x) \stackrel{\text{def}}{=} \xi A^x, \quad \lambda_M(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \textbf{если } \xi\lambda > a, \\ 0, & \textbf{иначе}, \end{cases}$ получаем:

$$\forall u \in X^* \quad u \in A_a \ \Leftrightarrow \ f_M(u) = 1.$$

Множество $S_A^{\triangle}$ является компактным метрическим пространством относительно метрики

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \max_{i=1\ldots n} |x_i - y_i|, \quad (4.14)$$

т.к. оно является ограниченным подмножеством $\mathbf{R}^n$. Нетрудно доказать, что для любой пары s_1, s_2 достижимых состояний автомата *M* условия (4.11) и (4.12) выполнены.
Следующая теорема также является следствием теоремы 37.
Теорема 38.
Пусть *M* - автомат Мура вида

$$(X, \{0,1\}, \{1,\ldots,n\}^{\triangle}, \delta, \lambda, \xi^0),$$

где $|X| < \infty$, и для любой пары s_1, s_2 достижимых состояний автомата M выполнены условия (4.11) и (4.12), где метрика ρ определяется соотношением (4.14).

Тогда язык $U \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f_M(u) = 1\}$ регулярен, и

$$w(U) \leq C^m_{n+m-1}, \quad \text{где } m =]\tfrac{2}{\delta}[. \quad (4.15)$$

Доказательство.

Регулярность U непосредственно следует из теоремы 37.

Для доказательства неравенства (4.15) определим покрытие множества $\{1,\ldots,n\}^{\triangle}$ открытыми шарами радиуса $\frac{1}{m}$ (поскольку $\frac{1}{m} \leq \frac{\delta}{2}$, то, согласно теореме 37, $w(U)$ не превосходит числа элементов в этом покрытии).

Обозначим записью F^n_m совокупность точек $\{1,\ldots,n\}^{\triangle}$, имеющих вид $(\frac{k_1}{m},\ldots,\frac{k_n}{m})$, где $k_1,\ldots,k_n$ - неотрицательные целые числа, сумма которых равна m. Нетрудно видеть, что

$$\forall \vec{x} \in \{1,\ldots,n\}^{\triangle}\ \exists \vec{y} \in F^n_m : \rho(\vec{x},\vec{y}) < \frac{1}{m}$$

(если $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots)$, то

$$\vec{y} = (\,]x_1 m[,](x_1 + x_2)m[-]x_1 m[, \ldots)),$$

поэтому множество открытых шаров радиуса $\frac{1}{m}$ с центрами в точках из F^n_m является покрытием множества $\{1,\ldots,n\}^{\triangle}$. Число элементов в этом покрытии равно $|F^n_m| = C^m_{n+m-1}$.

4.5 Дефинитные языки

Пусть задано конечное множество X.

Мы будем использовать следующие обозначения.

• $\forall S \subseteq X^*,\ \forall k \geq 0$ записи $S_k,\ S_{\geq k}$, и т.д. обозначают множества $S \cap X^k,\ S \cap X^{\geq k}$, и т.д., соответственно.

• $\forall S_1, S_2 \subseteq X^*$ записи $S_1 + S_2$ и $S_1 \cdot S_2$ (точка в этой записи обычно опускается) обозначают множества

$$S_1 \cup S_2 \quad \text{и} \quad \{uv \mid u \in S_1, v \in S_2\}$$

соответственно.

$S \subseteq X^*$ называется **дефинитным языком (ДЯ),** если

$$\exists k \geq 0 : \quad S_{\geq k} = X^* \cdot S_k.$$

Теорема 39.
Пусть задан ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и $\forall x \in X \quad A^x > 0$.
Тогда $\forall a \in I(A) \quad A_a$ - ДЯ.
Доказательство.
По предположению, $\exists c > 0$: $\forall x \in X \quad A^x \geq c$, **и** $\exists \delta > 0$:
$\forall u \in X^* \quad |f_A(u) - a| > \delta.$ (4.16)
Выберем k: $(1-2c)^{k-1} < \frac{2\delta}{n|\lambda|}$, где $n = |S_A|$.
По теореме 25,
$\forall u \in X^k \quad \|A^u\| \leq (1-2c)^{k-1} < \frac{2\delta}{n|\lambda|}$. (4.17)

$$\forall u \in X^k, \forall v \in X^*$$
$$|f_A(vu) - f_A(u)| = |\xi^0 A^{vu}\lambda - \xi^0 A^u \lambda| = |\xi^0(A^{vu} - A^u)\lambda| \leq$$
$$\leq |A^{vu} - A^u| \cdot n \cdot |\lambda| = |A^v A^u - A^u| \cdot n \cdot |\lambda| \leq \|A^u\| \cdot n \cdot |\lambda| < 2\delta.$$

(предпоследнее неравенство верно по теореме 26, а последнее - согласно (4.17)). Таким образом,
$\forall u \in X^k, \forall v \in X^* \quad |f_A(vu) - f_A(u)| < 2\delta.$ (4.18)
Докажем, что $(A_a)_{\geq k} = X^* \cdot (A_a)_k$, т.е. $\forall u \in X^k, \forall v \in X^*$
$vu \in A_a \quad \Leftrightarrow \quad u \in A_a$. (4.19)
Если для некоторых $u \in X^k, v \in X^*$ соотношение (4.19) неверно, то, согласно определению ВЯ A_a и соотношению (4.16),
$|f_A(vu) - f_A(u)| > 2\delta$
что противоречит соотношению (4.18).
Теорема 40.
Пусть ВА $A = (\xi^0, \{A^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - эргодичный.
Тогда $\forall a \in I(A) \quad A_a$ - ДЯ.
Доказательство.
Пусть $a \in I_\delta(A)$, **и** $|S_A| = n$.
Из эргодичности A следует, что $\|A^u\| \to 0$ при $|u| \to \infty$, поэтому
$\exists k$:
$\forall u \in X^k \quad \|A^u\| < \frac{2\delta}{n|\lambda|}$.
Оставшаяся часть доказательства совпадает с частью доказательства теоремы 39, идущей после соотношения (4.17).

4.6 Языки, представимые линейными автоматами

Пусть задан ЛА *L*. Для каждого $a \in \mathbf{R}$ запись L_a обозначает подмножество множества *X**, определяемое следующим образом:

$$L_a \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f_L(u) > a\}. \quad (4.20)$$

Множество (4.20) называется языком, представимым ЛА *L* с точкой сечения *a*.

Теорема 41.

Пусть $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$ – ЛА, и $a \in \mathbf{R}$.

Тогда существует ВА *A* вида

$(\vec{e}_1, \{A^x \mid x \in X\}, e_1^{\downarrow})$, (4.21) такой, что

$|S_A| = n + 4, \quad L_a = A_{\frac{1}{n+4}}, \quad$ где $n = \dim L$.

Доказательство.

Определим ЛА L' следующим образом:

$$L' \stackrel{\text{def}}{=} \left((\xi^0, 1), \{\begin{pmatrix} L^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \mid x \in X\}, \begin{pmatrix} \lambda \\ -a \end{pmatrix}\right),$$

где символы 0 обозначают строку и столбец соответствующего размера с нулевыми компонентами. Отметим, что

- $\dim L' = \dim L + 1$, и
- $f_{L'} = f_L - a, \;\Rightarrow\; L_a = L'_0$,

поэтому для доказательства теоремы 41 достаточно доказать следующее утверждение: для каждого ЛА *L* существует ВА *A* вида (4.21), такой, что $|S_A| = n + 3$ и $L_0 = A_{\frac{1}{n+3}}$, где $n = \dim L$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим отдельно случаи $f_L(\varepsilon) > 0$ и $f_L(\varepsilon) \le 0$. Пусть $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

• Если $f_L(\varepsilon) > 0$, то $\varepsilon \in L_0$. Определим функцию $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ следующим образом:

$$\forall u \in X^* \quad f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } u = \varepsilon \\ f_L(u), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим записью L_1 ЛА $(\xi_1^0, \{L_1^x \mid x \in X\}, \lambda_1)$, где

$$\xi_1^0 = (\xi^0, 1), \quad L_1^x = \begin{pmatrix} L^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 - f_L(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где символы **0** обозначают строку и столбец соответствующего размера с нулевыми компонентами.

Пусть *P* - невырожденная матрица порядка $\dim L_1$, первый столбец которой равен λ_1, а остальные столбцы ортогональны ξ_1^0.

Нетрудно видеть, что $Pe_1^{\downarrow} = \lambda_1$, $\xi_1^0 P = \vec{e}_1$.

Обозначим записью L_2 ЛА $(\vec{e}_1, \{P^{-1}L_1^x P \mid x \in X\}, e_1^{\downarrow})$. Нетрудно видеть, что $f_{L_2} = f_{L_1}$.

Затем L_2 преобразуется в искомый ВА *A* (в соответствии с построением, изложенным в доказательстве теоремы 21), такой, что $\exists b > 0$:

$$\forall u \in X^* \quad f_A(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = \varepsilon, \\ b^{|u|+1} f_{L_2}(u) + \frac{1}{n+3}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

• Если $f_L(\varepsilon) \leq 0$, то $\varepsilon \notin L_0$. Определим функцию $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ следующим образом:

$$\forall u \in X^* \quad f(u) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } u = \varepsilon \\ f_L(u), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим записью *L₁* ЛА $(\xi_1^0, \{L_1^x \mid x \in X\}, \lambda_1)$, где

$$\xi_1^0 = (\xi^0, 1), \quad L_1^x = \begin{pmatrix} L^x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ -f_L(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

Пусть *P* - невырожденная матрица порядка dim L_1, первый столбец которой равен λ_1, все столбцы кроме последнего ортогональны ξ_1^0, и $\xi_1^0 P_{n+1}^{\downarrow} = 1$, где $n = \dim L$ и $P_{n+1}^{\downarrow}$ - последний столбец *P*.

Нетрудно видеть, что $Pe_1^{\downarrow} = \lambda_1$, $\xi_1^0 P = \vec{e}_{n+1}$.

Обозначим записью L_2 ЛА $(\vec{e}_{n+1}, \{P^{-1}L_1^x P \mid x \in X\}, e_1^{\downarrow})$.
Нетрудно видеть, что $f_{L_2} = f_{L_1}$.
Затем L_2 преобразуется в искомый ВА *A* (в соответствии с построением, изложенным в доказательстве теоремы 21), такой, что $\exists b > 0$:

$$\forall u \in X^* \quad f_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u = \varepsilon, \\ b^{|u|+1} f_{L_2}(u) + \frac{1}{n+3}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 42.
Пусть *X* - конечное множество, и $S \subseteq X^*$.
Следующие условия эквивалентны:
• S - ВЯ,
- $\exists$ ЛАФ $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, $\exists a \in \mathbf{R}$: $S = f_a \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f(u) > a\}$,
- $\exists$ ЛАФ $f \in \mathbf{R}^{X^*}$: $S = f_0$.

В доказательстве этой теоремы используется утверждение из главы 5, что если *f* - ЛАФ и $a \in \mathbf{R}$, то $f - a$ - ЛАФ.

4.7. Свойства замкнутости классов рациональных, и положительно-рациональных словарных функций

До сих пор мы изучали входно-выходное отношепие ВА общего вида. Пусть $L = \langle \hat{L}(x),\ \mathbf{m},\ x \in X \rangle$— ЛА. Для некоторого начального вектора $\mathbf{a}(e)$ ЛА L определяет словарную функцию

$\varphi(p) = \mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m},$ (1)

которая называется *характеристической функцией* ЛА *L*. Существует тесная связь между характеристическими функциями конечных ВА без выхода и характеристическими функциями конечномерных ЛА. Для таких словарных функций удобно использовать специальные названия. Характеристические функции конечномерных линейных автоматов называются *рациональными словарными функциями.* Класс всех рациональных словарных функций над свободной полугруппой X^* обозначается $R\langle X^*\rangle$. Характеристические функции конечных ВА без выхода называются *положительно-рациональными словарными функциями.* Класс всех положительно-рациональных словарных функций над свободной полугруппой X^* обозначается $R^+\langle X^*\rangle$.

Теорема 1. *Пусть φ(p) — рациональная словарная функция, которую определяет k-мерный ЛА. Существует ВА без выхода с k + 2 состояниями, дважды стохастическими матрицами переходов со строго положительными элементами и единственным финальным состоянием, который определяет положительно-рациональную словарную функцию*

$$\chi(p) = \alpha^{|p|+1}\varphi(p) + \frac{1}{k+2},$$

где α — некоторое положительное число.

Доказательство. Пусть словарную функцию $\varphi(p)$ определяет ЛА $L = \langle L(x),\ \mathbf{m},\ x \in X \rangle$ соотношением (1). Без потери общности можно полагать, что поствектор $\mathbf{m} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$.

Действительно, если это не так, то можно рассматривать ЛА *L'* с системой матриц перехода $L'(x) = P^{-1}L(x)P$, где матрица $P = (\mathbf{m}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\ldots\mathbf{v}_{k-1})$ неособенная. Соответственно, если положить, что $\mathbf{a}'(e) = \mathbf{a}(e)P,\ \mathbf{m}' = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$, то словарная функция $\varphi(p)$ может быть определена соотношением

$\varphi(p) = \mathbf{a}'(e)L'(p)\mathbf{m}'.$

Построим систему $(k+2)\times(k+2)$-матриц $A_1(x)$, имеющих вид

$$A_1(x) = \left(\begin{array}{c:c:c} L(x) & \begin{array}{c}\alpha_1(x)\\ \vdots \\ \alpha_k(x)\end{array} & \begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array} \\ \hdashline 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \beta_1(x)\ \ldots\ \beta_k(x) & \beta_0(x) & 0 \end{array}\right),$$

где элементы $\alpha_i(x)$ и $\beta_j(x)$ подобраны так, что сумма элементов любой строки и любого столбца $A_1(x)$ равна нулю. Легко проверить по индукции, что для любого непустого слова *p* матрица $A_1(p)$ имеет вид

$$A_1(p) = \left(\begin{array}{c:c:c} L(p) & \begin{array}{c}\alpha_1(p)\\ \vdots \\ \alpha_k(p)\end{array} & \begin{array}{c}0\\ \vdots\\ 0\end{array} \\ \hdashline 0\ \ldots\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline \beta_1(p)\ \ldots\ \beta_k(p) & \beta_0(p) & 0 \end{array}\right),$$

причем свойство иметь нулевые суммы рядов и столбцов матриц сохраняется. Начальный вектор $\mathbf{a}_1(e)$ положим равным $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}(e), a_{n+1}, 0)$, где число a_{n+1} выбрано так, чтобы обеспечить нулевую сумму элементов вектора. Пусть α — положительное число, достаточно малое для того, чтобы все элементы вектора $\alpha\mathbf{a}_1$ и матриц $\alpha A_1(x)$ были по модулю меньше числа $1/(k+2)$. Обозначим через *B* и *b* соответственно матрицу и вектор

$$B = \frac{1}{k+2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \ldots, \frac{1}{k+2}\right).$$

Верны матричные равенства

$$A_1(x)B = BA_1(x) = 0, \qquad B^2 = B, \qquad \mathbf{b}B = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Рассмотрим ВА с *к* + 2 состояниями, переходные матрицы, начальный вектор состояний и решающий поствектор которого определены условиями

$$A_2(x) = \alpha A_1(x) + B, \quad \boldsymbol{\mu}(e) = \alpha\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{n}_F = \begin{pmatrix}\mathbf{m}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Для любого слова $p \neq e$ в силу соотношений (2) получим

$$A_2(p) = \alpha^{|p|}A_1(p) + B.$$

Легко вычислить, что для любого слова *p*

$$\boldsymbol{\mu}(e)A_2(p) = \alpha^{|p|+1}\mathbf{a}_1A_1(p) + \mathbf{b}.$$

Поэтому

$$\chi_{A_2}(p) = \mu(e) A_2(p)\, \mathbf{n}_F = \alpha^{|p|+1} \mathbf{a}_1 A_1(p)\, \mathbf{n}_F + 1/(k+2) =$$
$$= \alpha^{|p|+1} \mathbf{a} L(p)\, \mathbf{m} + 1/(k+2) = \alpha^{|p|+1} \varphi(p) + 1/(k+2).$$

Несмотря на наличие простой связи между классами словарных функций $R\langle X^*\rangle$ и $R^+\langle X^*\rangle$, алгебраическая структура этих классов существенно различна. Введем в рассмотрение некоторые алгебраические операции над словарными функциями.

Определение 1. Пусть $\varphi(p)$ и $\psi(p)$—словарные функции над свободной полугруппой *X**. Словарные функции, определенные условиями

1) $$(\varphi + \psi)(p) = \varphi(p) + \psi(p),$$

2) $$\varphi\psi(p) = \varphi(p)\, \psi(p),$$

3) $$\varphi \circ \psi(p) = \sum_{p_1 p_2 = p} \varphi(p_1)\, \psi(p_2),$$

называются соответственно *суммой, произведением* и *сверткой* пары словарных функций $\varphi(p)$ и $\psi(p)$.

Операции, введенные определением 1, оказываются естественными в том смысле, что для каждой из них существует адекватная операция над конечномерными ЛА, определяющими словарные функции-аргументы.

В соответствии с соотношением (1) фиксированную словарную функцию определяет ЛА *L* с заданным начальным вектором $\mathbf{a}(e)$. Такой ЛА будем называть *настроенным* и обозначать в форме $L = \langle L(x),\ \mathbf{a},\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$.

Введем в рассмотрение операции над настроенными ЛА. Напомним, что *прямой суммой* $n \times n$-матрицы *A* и $m \times m$-матрицы *B* называется $(n+m) \times (n+m)$-матрица $A \oplus B$, где

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Крямым произведением $A \otimes B$ матриц *A* и *B* называется *mn* ×*mn* -матрица

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}B & \dots & \alpha_{nn}B \end{pmatrix},$$

Если $A = (\alpha_{ij})$.

Определение 2. Пусть $L_1 = \langle L_1(x),\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{m}_1,\ x \in X\rangle$

$L_2 = \langle L_2(x),\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{m}_2,\ x \in X\rangle$ — настроенные конечномерные ЛА. Настроенный конечномерный ЛА $L = \langle L(x),\ \mathbf{a},\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$, определенный условиями

$$1)\ L(x) = L_1(x) \oplus L_2(x),\quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_2,\quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2,$$

$$2)\ L(x) = L_1(x) \otimes L_2(x),\quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2,\quad \mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_2,$$

$$3)\ L(x) = \begin{pmatrix} L_1(x) & L_1(x)D \\ 0 & L_2(x) \end{pmatrix},\quad D = \mathbf{m}_1\mathbf{a}_2,\quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_1\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2,\quad \mathbf{m} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{m}_2,$$

называется соответственно *прямой суммой, прямым произведением* и *сверткой* настроенных ЛА L_1 и L_2 (обозначается соответственно $L_1 \oplus L_2$, $L_1 \otimes L_2$ и $L_1 \circ L_2$).

Лемма 1. *Для любого слова p переходная матрица L(p) ЛА* $L_1 \circ L_2$ *равна*

$$L(p) = \begin{pmatrix} L_1(p) & C(p) \\ 0 & L_2(p) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$C(p) = -L_1(e)DL_2(e) + \sum_{p_1p_2=p} L_1(p_1)DL_2(p_2).$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по длине слова *p.* Для пустого слова *e,* полагая, что *C(e)* = 0, имеем

$$L(e) = \begin{pmatrix} L_1(e) & C(e) \\ 0 & L_2(e) \end{pmatrix} = E.$$

Пусть лемма верна для слова *p.* Для слова *px* получим

$$L(px) = \begin{pmatrix} L_1(p) & C(p) \\ 0 & L_2(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(x) & L_1(x)D \\ 0 & L_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1(px) & C(px) \\ 0 & L_2(px) \end{pmatrix},$$

где

$$C(px) = L_1(px)D + C(p)L_2(x) =$$
$$= L_1(px)DL_2(e) + \left[-L_1(e)DL_2(p) + \sum_{p_1p_2=p} L_1(p_1)DL_2(p_2)\right]L_2(x) =$$
$$= -L_1(e)DL_2(px) + \sum_{p_1p_2=px} L_1(p_1)DL_2(p_2).$$

Следствие 1. *Пусть настроенные конечномерные ЛА L_1 и L_2 определяют соответственно словарные функции* φ(*p*) *и* ψ(*p*). *Тогда настроенный конечномерный ЛА* $L_1 \circ L_2$ *определяет словарную функцию* $\varphi \circ \psi(p)$.

Доказательство. Действительно, вследствие леммы 1, имеем

$$\mathbf{a}L(p)\mathbf{m} = (\mathbf{a}_1 \oplus \mathbf{a}_1m_1\mathbf{a}_2)\begin{pmatrix} L_1(p) & C(p) \\ 0 & L_2(p) \end{pmatrix}(\mathbf{0} \oplus \mathbf{m}_2) =$$

$$= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2)\begin{pmatrix} L_1(p) & C(p) \\ 0 & L_2(p) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1C(p)\mathbf{m}_2 + \mathbf{a}_1\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2L_2(p)\mathbf{m}_2.$$

Подставляя значение матрицы *C(p),* получаем для произвольного слова *p*

$$\mathbf{a}L(p)\mathbf{m} = -\mathbf{a}_1L_1(e)\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2L_2(p)\mathbf{m}_2 + \sum_{p_1p_2=p}\mathbf{a}_1L_1(p)\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2L_2(p_2)\mathbf{m}_2 + \\ + \mathbf{a}_1\mathbf{m}_1\mathbf{a}_2L_2(p)\mathbf{m}_2 = \sum_{p_1p_2=p}\varphi(p_1)\psi(p_2) = \varphi\circ\psi(p).$$

Теорема 2. *Класс рациональных словарных функций замкнут относительно операций суммы, произведения и свертки словарных функций.*

Доказательство. Для операций суммы и произведения достаточно ясно, что прямая сумма и прямое произведение настроенных конечномерных ЛА определяют соответственно сумму и произведение словарных функций, определяемых настроенными ЛА-аргументами. Что касается операции свертки, то справедливость утверждения теоремы вытекает из следствия 1.

Исследуем алгебраическую структуру множества $R\langle X^*\rangle$ рациональных словарных функций. Обозначим через χ_e словарную функцию, которая равна нулю на каждом непустом слове и равна единице на пустом слове.

Лемма 2. *Операция свертки ассоциативна.*

Доказательство. Предлагается в качестве упражнения получить формулу

$$\varphi_1\circ\varphi_2\circ\varphi_3(p) = \sum_{p_1p_2p_3=p}\varphi_1(p_1)\varphi_2(p_2)\varphi_3(p_3). \quad \textbf{(4)}$$

Из формулы 4 ассоциативность свертки следует немедленно.

Лемма 3. *Если* $\varphi(e)\neq 0,$ *то существует единственная словарная функция* ψ *такая, что* $\varphi\circ\psi = \psi\circ\varphi = \chi_e.$

Доказательство. Прежде всего верно, что $\varphi\circ\chi_e = \chi_e\circ\varphi = \varphi.$ Таким образом, словарная функция χ_e играет роль единицы для операции свертки. Поскольку последняя ассоциативна, то, если правые и левые обратные по свертке функции существуют и единственны, то они совпадают. Пусть $\varphi\circ\psi_1 = \chi_e,$ $\psi_2\circ\varphi = \chi_e.$ Тогда $\varphi\circ\psi_2 = \varphi\circ\psi_2\circ\chi_e = \varphi\circ\psi_2\circ\varphi\circ\psi_1 = \varphi\circ\chi_e\circ\psi_1 = \varphi\circ\psi_1 = \chi_e.$ Докажем теперь единственность, например, правой обратной словарной функции. Если $\varphi\circ\psi(p) = \chi_e(p),$ то, прежде всего $\varphi(e)\psi(e) = 1.$ Таким образом, если $\varphi(e)\neq 0,$ то $\psi(e) = \varphi^{-1}(e)$ и определяется однозначно. Для слов длины единица мы получим

$$\varphi(e)\psi(x) + \varphi(x)\psi(e) = 0, \quad x\in X.$$

Поскольку $\psi(e)$ уже известно, то при условии $\varphi(e)\neq 0$ значение

$\psi(x)$ находится единственным образом. Пусть найдено значение $\psi(p)$ для всех слов p, $|p| \leqslant n$. Для слов вида *xp* получим

$$\varphi \circ \psi(xp) = \varphi(e)\psi(xp) + \varphi(x)\psi(p) + \ldots + \varphi(xp)\psi(e) = 0.$$

Все слагаемые, начиная со второго, в этой сумме уже известны, поэтому $\psi(xp)$ находится единственным образом. Доказательство для случая левой обратной функции проводится аналогично.

Следствие 2. *Пусть* $\varphi(p)$ *— такая словарная функция, что* $\varphi(e) \neq 1$*. Тогда всегда имеют решение следующие функциональные уравнения:*

$$(\chi_e + \varphi^+) \circ (\chi_e - \varphi) = \chi_e, \quad (\chi_e - \varphi) \circ (\chi_e + \varphi^+) = \chi_e, \qquad \textbf{(5)}$$

где решения φ^+ *в первом и втором уравнениях совпадают и определяются единственным образом.*

Доказательство следует из того факта, что если $\varphi(e) \neq 1$, то словарная функция $\chi_e(p) - \varphi(p)$ не равна нулю на пустом слове.

Замечание 1. Из теоремы 2 и последующих лемм вытекает, что класс $R\langle X^*\rangle$ рациональных словарных функций образует ассоциативное, некоммутативное кольцо относительно операций сложения и свертки словарных функций. Единицей этого кольца является словарная функция χ_e, а нулем — словарная функция $O(p) \equiv 0$.

Рассмотрим еще некоторые унарные операции над словарными функциями. Если слово $p = x_1 \ldots x_s$, то введем обозначение $\mathrm{mi}\,(p) = x_s \ldots x_1$.

Определение 3. Пусть $\varphi(p)$— словарная функция над свободной полугруппой X*. Словарные функции, определенные следующим образом:

1) $\qquad (a\varphi)\,(p) = a\varphi\,(p),$

2) $\qquad \varphi^T\,(p) = \varphi\,(\mathrm{mi}\,(p)),$

3) $\varphi^+(p)$ — решение функционального уравнения (5) (любого из двух в случае $\varphi(e) = 0$), где *a* — некоторая действительная константа, называются соответственно *умножением* словарной функции φ и действительной константы *a*, *инверсией* словарной функции φ, *итерацией* словарной функции φ *по свертке.*

Для итерации по свертке возможно предложить и другое определение. Рассмотрим для фиксированного слова *p* ряд

$$\varphi(p),\ \varphi \circ \varphi(p),\ \varphi \circ \varphi \circ \varphi(p),\ \ldots \qquad (6)$$

Обозначим через *u(p)* формальную сумму

$$u(p) = \varphi(p) + \varphi \circ \varphi(p) + \varphi \circ \varphi \circ \varphi(p) + \ldots \qquad (7)$$

Мы будем рассматривать случай, когда $\varphi(e) = 0$. В этом случае для любого слова *p* ряд (6) содержит конечное число ненулевых функций, следовательно, формальная сумма (7) является обычной суммой и имеет конечное значение. Действительно, в том случае, если в формуле (4) длина слова *p* будет превышать количество сомножителей, в каждом слагаемом будет встречаться нулевой сомножитель, поэтому в ряде (6) все функции, начиная с некоторой, будут нулевыми.

Лемма 4. *Если* $\varphi(e)=0$, *то сумма u(p) равна решению любого из функциональных уравнений* (5).

Доказательство. Будем иметь в виду, что вследствие $\varphi(e)=0$ формальная сумма (7) имеет только конечное число слагаемых. Если $u(p)=\varphi(p)+\varphi\circ\varphi(p)+\varphi\circ\varphi\circ\varphi(p)+\ldots$, то

$$u\circ\varphi(p)=u(p)-\varphi(p)\quad \text{или}\quad u(p)-\varphi(p)-u\circ\varphi(p)=0.$$

Складывая обе части последнего равенства со словарной функцией $\chi_e(p)$, получим

$$u(p)-\varphi(p)-u\circ\varphi(p)+\chi_e(p)=u(p)+\chi_e(p)-$$
$$-(u(p)+\chi_e(p))\circ\varphi(p)=(u(p)+\chi_e(p))\circ(\chi_e(p)-\varphi(p))=\chi_e(p).$$

Отсюда видно, что *u(p)* есть решение уравнения (5). Поскольку это решение единственно, то для $\varphi(e)=0$ получаем $u(p)=$ $=\varphi^+(p)$. O

Лемма 5. *Если* $\varphi(e)=0$, *то итерация по свертке* $\varphi(p)$ *равна сумме*

$$\varphi^+(p)=\sum_{k=1}^{|p|}\sum_{p_1\ldots p_k=p}\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_k).$$

Доказательство. Положим, что $g_k(p)=\underbrace{\varphi\circ\varphi\circ\ldots\circ\varphi}_{k}(p)$.

По формуле (5) видно, что

$$g_k(p)=\sum_{p_1\ldots p_k=p}\varphi(p_1)\ldots\varphi(p_k).$$

Поскольку $\varphi(e)=0$, то для $k\geqslant|p|+1$ $g_k(p)=0$. С другой стороны, по лемме 4 $\varphi^+=g_1+\ldots+g_k+\ldots$

Из леммы 4 следует, что итерацию словарной функции $\varphi(p)$, $\varphi(e)=0$, можно определить как сумму ряда (7).

Лемма 5 дает явное выражение для итерации словарной функции.

Определим унарные операции над настроенными конечномерными ЛА.

Определение 4. Пусть $L=\langle L(x),\ \mathbf{a},\ \mathbf{m},\ x\in X\rangle$ настроенный конечномерпый ЛА. Настроенный конечномерный ЛА $\langle L'(x),\ \mathbf{a}',\ \mathbf{m}',\ x\in X\rangle$, заданный следующим образом:

1) $L'(x)=L(x)$, $\mathbf{a}'=\mathbf{a}$, $\mathbf{m}'=\alpha\mathbf{m}$,
2) $L'(x)=L^T(x)$, $\mathbf{a}'=\mathbf{m}^T$, $\mathbf{m}'=\mathbf{a}^T$,
3) $L'(x)=L(x)(E+\mathbf{ma})$, $\mathbf{a}'=\mathbf{a}$, $\mathbf{m}'=\mathbf{m}$, если $\mathbf{am}=0$;

где α — действительная константа, называется соответственно *произведением* ЛА L и действительной константы *α*, *инверсией* ЛА L, *итерацией по свертке* ЛА L и обозначается соответственно αL, L^T и L^+.

Л е м м а 6. *Пусть словарная функция φ(p) определена настроенным конечномерным ЛА L. Тогда настроенные конечномерные ЛА* αL, L^T *и* L^+ *определяют соответственно словарные функции* $\alpha\varphi(p)$, $\varphi^T(p)$ *и* $\varphi^+(p)$.

Доказательство. Из первой строчки определения 4 следует

$$\varphi'(p) = \mathbf{a}'L'(p)\mathbf{m}' = \mathbf{a}L(p)\alpha\mathbf{m} = \alpha\mathbf{a}L(p)\mathbf{m} = \alpha\varphi(p),$$

что доказывает первое утверждение леммы. Что касается операции инверсии, то соответствующий результат следует из свойства транспозиции произведения матриц. Действительно, если $C = AB$, то $C^T = B^T A^T$. Поэтому

$$\varphi'(p) = \mathbf{a}'L'(p)\mathbf{m}' = \mathbf{m}^T L^T(p)\mathbf{a}^T = (\mathbf{a}L(\mathrm{mi}\, p)\mathbf{m})^T = \varphi(\mathrm{mi}\, p).$$

Это означает, что $\varphi'(p) = \varphi^T(p)$.

Перейдем к доказательству утверждения леммы для операции итерации словарной функции. Обозначив через $g(p)$ словарную функцию, определенную настроенным ЛА L^+, получим

$$g(p) = aL(x_1)(E + \mathbf{ma}) \ldots L(x_s)(E + \mathbf{ma})\mathbf{m},$$

где $p = x_1 \ldots x_s$ — произвольное слово из X^*. Так как $\mathbf{am} = 0$ и $(E + \mathbf{ma})\mathbf{m} = \mathbf{m}$, то

$$g(p) = \mathbf{a}L(x_1)(E + \mathbf{ma})L(x_2)(E + \mathbf{ma}) \ldots L(x_s)\mathbf{m}.$$

Раскрывая скобки в правой части этого отношения, получим сумму сверток словарной функции $\varphi(p)$ по всем типам сверток кратности от 1 до $|p|$, где конкатенации слов $p_1 \ldots, p_k$ дают p.

В соответствии с леммой 5 это дает итерацию по свертке словарной функции $\varphi(p)$, поскольку $\varphi(e) = am = 0$.

З а м е ч а н и е. 2. Класс рациональных словарных функций $R\langle X^*\rangle$ замкнут относительно операций умножения на действительную константу и операции инверсии. Если $\varphi(e) = 0$, то итерация по свертке рациональной словарной функции $\varphi(p)$ рациональна. Доказательство этого факта следует из леммы 6.

Из теоремы 2 и замечания 2 следует, что класс рациональных словарных функций $R\langle X^*\rangle$ образует алгебру относительно системы операций — умножения на действительную константу, суммирования, свертки и итерации по свертке (для $\varphi(e) = 0$) словарных функций. Докажем конечную порожденность этой алгебры.

Пусть S — язык, иначе говоря, некоторое подмножество свободной полугруппы X^*. *Характеристической функцией* языка S называется словарная функция, определенная условием

$$\dot{\chi}_S(p)=\begin{cases}1, & \text{если } p\in S,\\ 0, & \text{если } p\not\in S.\end{cases}$$

Ясно, в частности, что словарная функция χ_e есть характеристическая функция языка, состоящего из одного пустого слова.

Теорема 3. *Для того чтобы словарная функция* $\varphi(p)$ *была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было получить из характеристических словарных функций языков* $\{e\}$, $\{x\}$, $x\in X$, *применением конечного числа операций суммирования, свертки, итерации по свертке и умножения на действительную константу.*

Иначе говоря, *класс* $R\langle X^*\rangle$ *есть минимальное множество словарных функций, замкнутое относительно перечисленных операций и содержащее рациональные словарные функции* χ_e, $\chi_{(x)}$.

Доказательство. Достаточность условий теоремы ясна из доказательства свойств замкнутости класса $R\langle X^*\rangle$ и рациональности характеристических функций χ_e, $\chi_{(x)}$. В самом деле, например, характеристическая словарная функция $\chi_{(x)}$ определяется настроенным двумерным ЛА с матрицами перехода

$$L(x_1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad L(x_2)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

начальным вектором $\mathbf{a}=(1,\ 0)$ и решающим поствектором $\mathbf{m}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.

Необходимость условий теоремы следует из того, что множество словарных функций над свободной полугруппой X* образует некоммутативное кольцо относительно операций суммы и свертки. Единицей этого кольца, как мы видели, является функция χ_e, нулем — функция 0. Пусть $\varphi(p)$ — рациопальная словарная функция и $\varphi(e)=0$. Из определения итерации по свертке (5) следует, что

$$(\chi_e+\varphi^+)\circ(\chi_e-\varphi)=(\chi_e-\varphi)\circ(\chi_e+\varphi^+)=\chi_e.$$

Определим *кольцо словарных матриц* порядка $n\times n$ над кольцом словарпых функций $R\langle X^*\rangle$ относительно операций сложения и умножения матриц, полагая, что сумма матриц определена обычным образом, как поэлементная сумма, а произведение определено с помощью операции свертки функции, если

$$A(p)=(a_{ij}(p)),\ B(p)=(b_{jk}(p)),\quad \text{то}\quad A\circ B(p)=(c_{ik}(p)),$$

где

$$c_{ik}(p)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\circ b_{jk}(p).$$

Нулем этого кольца, очевидно, будет служить нулевая словарная матрица, а единицей — словарная матрица $E(p)=\chi_e(p)E$. Действительно, для матриц $A=(a_{ij}(p))$ и $\chi_e(p)E=(\delta_{ij}\chi_e(p))$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\circ\chi_e(p)\,\delta_{jk}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(p)\,\delta_{jk}=a_{ik}(p),$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\chi_e\circ a_{jk}(p)=\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}a_{jk}(p)=a_{ik}(p),$$

что означает в матричной форме $A\circ E(p)=E\circ A(p)=A(p)$.

Л е м м а 7. *Если* $A(p)$*— словарная матрица, удовлетворяющая условию* $A(e)=0$, *то существует словарная матрица*

$$A^+(p)=A(p)+A\circ A(p)+A\circ A\circ A(p)+\ldots$$

Аналогично доказательству леммы 4 доказывается матричное соотношение

$$(E(p)+A^+(p))\circ(E(p)-A(p))=$$
$$=(E(p)-A(p))(E(p)+A^+(p))=E(p). \quad \textbf{(8)}$$

Из соотношения (8) вытекает, что система словарных матричных уравнений

$$(E(p)-A(p))\circ Z=V, \quad (9)$$

где матрица *A(p)* равна нулевой над пустым словом,

$$Z=\begin{pmatrix} Z_1\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix}$$

— словарный вектор-столбец из неизвестных функций $Z_i(p)$, $i=1,\ldots,n$, *V* — произвольный вектор-столбец над кольцом $R\langle X^*\rangle$, всегда имеет единственное решение $Z(p)=(E(p)+$ $+A^+(p))V$. Для завершения доказательства потребуется следующая

Лемма 8. *Компоненты решения системы* (9) *получаются из компонент словарных матриц E(p), A(p) и вектор-столбца V посредством применения конечного числа операций суммирования, свертки, итерации по свертке и умножения на действительную константу.*

Доказательство. Обозначим ради краткости столбец $(E+A^+)V$ буквой *Y* и рассмотрим систему тождеств $(E-A)Y=$ $=V$, или поэлементно:

$$(\chi_e - a_{11})Y_1 - a_{12}Y_2 - \ldots - a_{1,n-1}Y_{n-1} - a_{1n}Y_n = V_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$-a_{n-1,1}Y_1 - a_{n-1,2}Y_2 - \ldots + (-\gamma_e - a_{n-1,n-1})Y_{n-1} - a_{n-1,n}Y_n = V_{n-1},$$
$$-a_{n1}Y_1 - a_{n2}Y_2 - \ldots - a_{n,n-1}Y_{n-1} + (\chi_e - a_{nn})Y_n = V_n. \quad (10)$$

Для *n =1* имеем $(\chi_e - a_{11})Y_1 = V_1$ и $Y_1 = (\chi_e + a_{11}^{+})V_1$ — утверждение леммы справедливо. Предположим, чго оно равно для систем (9) размерности $n-1,\ n \geqslant 2,$ и докажем, что оно будет верно и для *n.* Из последнего равенства системы (10) следует, что

$$Y_n = (\chi_e + a_{nn}^{+})(V_n + a_{n1}Y_1 + \ldots + a_{n,n-1}Y_{n-1}). \quad (11)$$

Подставив это выражение для Y_n в первые *n*— 1 равенства системы (10) и приведя подобные члены, убедимся, что вектор-столбец $\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix}$ есть решение системы уравнений типа (9). По индуктивному предположению словарные функции $Y_1, \ \ldots \ Y_{n-1}$ получены из известных компонент системы, образованной первыми *n* — 1 уравнениями системы (10) после элиминирования Y_n посредством использования конечного числа перечисленных операций. Тогда нз (11) следует, что то же верно и для Y_n.

Пусть $\varphi(p)$ — рациональная словарная функция, представленная конечномерным ЛА $L = \langle A(x),\ \mathbf{a},\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle.$ Обозначим через A_P словарную матрицу, (*i, j*)-элемент которой есть словарная функция $a_{ij}(p)\chi_{\{p\}}.$ Здесь $a_{ij}(p)$ есть действительная константа, зависящая от параметра *p,* а $\chi_{\{p\}}$ — характеристическая словарная функция. Таким образом, матрица A_P фактически имеет вид

$$A_p = A(p)\chi_{\{p\}},$$

где *A(p)*—действительная матрица, зависящая от параметра*p,* а $\chi_{\{p\}}$ — характеристическая словарная функция. Заметим, что для характеристических словарных функций типа $\chi_{\{p\}}$ верно соотношение $\chi_{\{p_1\}} \circ \chi_{\{p_2\}} = \chi_{\{p_1 p_2\}}.$ Поэтому

$$\Big(\sum_{x \in X} A_x\Big)^{+} = \Big(\sum_{x \in X} A(x)\chi_{\{x\}}\Big)^{+} = \sum_{x_1 \in X} A_{x_1} + \sum_{x_1 x_2 \in X^2} A_{x_1 x_2} + \ldots = \sum_{p \in X^*} A_p.$$

Положим $A_e = A(e)\chi_e = \chi_e E$ и, следовательно, получим

$$\sum_{p \in X^*} A_p = \chi_e E + \Big(\sum_{x \in X} A_x\Big)^{+}.$$

Применительно к данному случаю равенство (5) дает

$$\Big(\chi_e E - \sum_{x \in X} A_x\Big) \circ \Big(\sum_{p \in X^*} A_p\Big) = \chi_e E.$$

Обратим внимание на то, что все элементы матрицы $\chi_e E - \sum_{x \in \Lambda} A_x$ представляют собой либо характеристические словарные функции $\chi_e,\ \chi_{\{x\}},\ x \in X,$ либо те же функции, умноженные на некоторые действительные константы, какими являются коэффициенты матриц *A(x)*. Тогда в соответствии с леммой 8 все компоненты матрицы $\sum_{p \in X^*} A_p$, каждый столбец которой представляет собой решение системы, удовлетворяющей условиям леммы, получены из системы характеристических словарных функций $\chi_e,\ \chi_{\{x\}}$ посредством конечного числа операций суммирования, свертки, итерации по свертке и умножения на действительные константы. Последний этап доказательства состоит в том, чтобы узнать в словарной матрице $\sum_{p \in \Lambda^*} A_p(p)$ матрицу *A (p):* для каждого фиксированного слова *p*

$$\sum_{p \in X^*} A_p(p) = A(p).$$

Тогда, следовательно, и словарная функция $\varphi(p) = \mathbf{a}A(p)\mathbf{m}$ будет принадлежать замыканию множества $\{\chi_e,\ \chi_{\{x\}},\ x \in X\}$ относительно перечисленных операций.

Структура класса $R^+\langle X^*\rangle$ всех положительно-рациональных словарных функций не изучена исчерпывающе, и об алгебраической природе его пока известно мало.

4.8. Конечно-автоматная представимость словарных функций

Мы изучили алгебраические свойства класса рациональных словарных функций и рассмотрели некоторые свойства класса положительно-рациональных словарных функций. В этом параграфе будут описаны необходимые и достаточные условия, определяющие рассмотренные классы.

Обозначим через $K\langle X^*\rangle$ множество всех словарных функций, определенных на свободной полугруппе *X** и принимающих значения в поле *K*.

Замечание 1. Множество $K\langle X^*\rangle$ словарных функций над полем *K* образует линейное пространство относительно операций сложения словарных функций $(\varphi \oplus \psi)(p) = \varphi(p) + \psi(p)$ и перации умножения их на элемент поля $(\lambda\varphi)(p) = \lambda\varphi(p)$.

Сопоставим каждой букве *x* алфавита *X* оператор $\gamma(x):\ \varphi \to \varphi_x$ в $K\langle X^*\rangle$, где элемент $\varphi_x(p)$ определен следующим образом:

$\varphi_x(p) = \varphi(xp)$. (1)

Замечание 2. Оператор $\gamma(x)$ является линейным.

В соответствии с принятой интерпретацией словарной функции, как вектора линейного пространства с лексикографической индексацией координат, удобно называть оператор $\gamma(x)$ *x-вращением* в линейном пространстве $K\langle X^*\rangle$ над полем *К (левое x-вращение).*

Определим в линейном пространстве $K\langle X^*\rangle$ функционал $\varkappa$ следующим образом:

$\varkappa : \varphi \to \varphi(e), \quad \varphi \in K\langle X^*\rangle$. (2)

Замечание 3. Функционал $\varkappa$ является линейным.

Определение 1. ДА со счетным числом, состояний

$D = \langle X,\ K\langle X^*\rangle,\ \gamma(x),\ \varkappa\rangle$ (3)

называется *универсальным ЛА без выхода над полем К.*

Мы будем его в дальнейшем называть просто *универсальным ЛА* или *универсальным автоматом.*

Лемма 1. *Универсальный ЛА над полем К при надлежащем выборе начального состояния определяет любую словарную функцию линейного пространства* $K\langle X^*\rangle$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 = \varphi$— начальное состояние универсального автомата. Под воздействием входного слова *р* автомат не имеет несовпадающих эквивалентных состояний. Однако функции отметки на этом состоянии равно $\varphi_p(e) = \varphi(p)$.

Из доказательства леммы 1 следует, что универсальный автомат переходит в состояние $\varphi_0\gamma(p) = \varphi_p$. Значение $\varkappa(\varphi_p) = \varphi_p(e)$ априори неясна структура этого автомата. Обозначим через E_φ линейное подпространство пространства $K\langle X^*\rangle$, натянутое на множество таких состояний универсального автомата *D*, которые достижимы из состояния φ , т. е. множество состояний

$L_\varphi = \{\varphi_p,\ p \in X^*\}$. (4)

Таким образом, $E_\varphi = \mathrm{Lin}\, L_\varphi$.

Теорема 1. *Любая словарная функция* $\varphi(p)$ *над полем К может быть определена ЛА, размерность которого равна* dim E_φ. *Размерность любого ЛА, определяющего* φ, *не меньше чем* dim E_φ .

Доказательство. Ясно, что связный ЛА

$D_\varphi = \langle X,\ E_\varphi,\ \gamma(x),\ \varkappa\rangle$ **(5)**

определяет словарную функцию $\varphi(p)$ при начальном состоянии φ. Размерность этого ЛА, по определению, равна dim E_φ . Пусть существует другой ЛА $L = \langle X,\ \mathfrak{A},\ \delta(x),\ \lambda\rangle$, определяющий ту же словарную функцию $\varphi(p)$ при начальном состоянии a_0. Покажем, что размерность этого ЛА не может быть меньше, чем $\dim E_\varphi$. Рассмотрения требует только случай, когда пространство состояний $\mathfrak{A}$ имеет конечную размерность *k*. Вводя в конечномерном линейном пространстве $\mathfrak{A}$ систему координат, представим ЛА *L* в матричной форме $L = \langle L(x),\ \mathbf{a},\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$, где квадратные матрицы *L(x),* вектор **а** и поствектор **m** имеют соответственно порядки $k \times k,\ k \times 1,\ 1 \times k.$ Словарная функция $\varphi(p)$ определяется ЛА *L* условием

$\varphi(p) = \mathbf{a}L(p)\mathbf{m} = \mathbf{a}(p)\mathbf{m}.$ (6)

Рассмотрим систему векторов $\mathbf{a}(p_1),\ \ldots,\ \mathbf{a}(p_s),\ \ s > k.$ Поскольку это *k*-координатпые векторы, то между ними существует линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mathbf{a}\ (p_i) = 0,$$

где не все коэффициенты α_i из поля *К* равны нулю. Умножая справа это соотношение на поствектор **m** и используя формулу (6), получим линейную зависимость между элементами множества L_φ. Таким образом, $\dim E_\varphi \leqslant \dim \mathfrak{A} = k.$

Итак, если пространство E_φ конечномерно, то словарная функция $\varphi(p)$ может быть определена конечномерным линейным автоматом с наименьшей размерностью $\dim E_\varphi$. Если же пространство E_φ — счетной размерности, то счетную размерность будет иметь любой другой ЛА, определяющий данную словарную функцию $\varphi(p)$.

Ниже мы опишем условия рациональности словарной функции, опираясь на свойства некоторых линейных эквивалентностей, определяемых этой словарной функцией. Предварительно введем некоторые определения с тем, чтобы полнее раскрыть возможности метода, который будет использован при получении результатов.

Обозначим через $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$ свободную ассоциативную алгебру над полем *К,* порожденную конечным множеством *X*. Ее элементами являются все формальные полиномы τ от некоммутативных переменных вида $\tau = \sum \alpha_i p_i$, где коэффициенты α_i принадлежат полю *К,* а слова p_i— свободной полугруппе *X**. Сложение и умпожеиие полиномов, а также умножение полинома на элемент поля *К* производится по обычным для полиномов правилам. Обозначим через E_τ линейное пространство формальных полиномов. Если задала произвольная словарная функция $\varphi(p)$, то можно расширить область ее определения на все линейное пространство E_τ, полагая, что при

$\tau = \sum \alpha_i p_i$

$\varphi(\tau) = \sum \alpha_i \varphi(p_i).$ **(7)**

В соответствии с принятой методологией рассмотрим над про-страиством E_τ линейное пространство с лексикографической ин-дексацией координат. Пусть $\tilde{v}_\tau = (\tau, \tau x, \ldots, \tau p, \ldots)$— счетномер-ный вектор с p-й коордипатой, равной τp. Будем обозначать через E_τ^∞ линейное пространство над полем K, полученное как линейная оболочка множества векторов $\{\tilde{v}_\tau, \tau \in E_\tau\}$. Иначе говоря, пусть

$E_\tau^\infty = \mathrm{Lin}\,\{\tilde{v}_\tau, \tau \in E_\tau\}$.

Поскольку мы определили соотношением (7) продолжение словарной функции $\varphi(p)$ на любой полином τ из E_τ, то каждый вектор $\varphi(\tilde{v}_\tau) = \tilde{\omega}$ координатно определяется как последовательность $\{\varphi(\tau), \ldots, \varphi(\tau p), \ldots\}$ векторов, образующих линейное про-странство φE_τ^∞. Для расширенной словарной функции $\varphi_{\tau_1}(\tau)$ ес-тественно ввести понятие состояния расширенной словарной функции $\varphi_{\tau_1}(\tau)$ условием

$$\varphi_{\tau_1}(\tau) = \varphi(\tau_1\tau), \quad \tau \in E_\tau.$$

Если $L_{\varphi(\tau)} = \{\varphi_{\tau_1}(\tau), \tau_1 \in E_\tau\}$, то обозначим через $E_{\varphi(\tau)}$ линейное пространство $E_{\varphi(\tau)} = \mathrm{Lin}\, L_{\varphi(\tau)}$. Выше мы ввели также линейное пространство E_φ, натянутое на множество словарных функций L_φ над полем K: $E_\varphi = \mathrm{Lin}\, L_\varphi$.

Замечание 4. Верно соотношение

$$\varphi E_\tau^\infty = E_{\varphi(\tau)} = E_\varphi. \quad \textbf{(8)}$$

Доказательство. Если $\tilde{\omega} \in \varphi E_\tau^\infty$, то существует $\tilde{v}_\tau \in E_\tau^\infty$ такой, что $\tilde{\omega} = \varphi(\tilde{v}_\tau)$. Но $\tilde{v}_\tau$ представимо в виде

$$\tilde{v}_\tau = \sum_{\tau_i \in E_\tau} \alpha_i \tilde{v}_{\tau_i} = \sum_{\tau_j \in E_\tau} \alpha_i \Big(\sum_{p_i \in X^*} \beta_{ij} \tilde{v}_{p_j}\Big) = \sum_{p_j \in X^*} \gamma_j \tilde{v}_{p_j}.$$

Заметим, что по определению $\varphi\tilde{v}_\tau = \varphi_\tau$ и, следовательно,

$$\varphi\tilde{v}_p = \varphi_p.$$

Поэтому

$$\tilde{\omega} = \varphi(\tilde{v}_\tau) = \sum_{\tau_i \in E_\tau} \alpha_i \varphi \tilde{v}_{\tau_i} = \sum_{p_j \in X^*} \gamma_j \varphi \tilde{v}_{p_j} = \sum_{\tau_i \in E_\varphi} \alpha_i \varphi_{\tau_i} = \sum_{p_j \in X^*} \gamma_j \varphi_{p_j}.$$

Таким образом, имеем включения $\varphi E_\tau^\infty \subset E_{\varphi(\tau)}$, $\varphi E_\tau^\infty \subset E_\varphi$. Обрат-ные включения очевидны.

Соотношение (8) определяет, что линейное пространство E_φ, так же как и линейное пространство $E_{\varphi(\tau)}$, для любой словарной функции φ над полем K гомоморфно линейному пространству E_τ^∞ над полем K (точнее, эпиморфно), причем словарная функция $\varphi(p)$ (или ее расширение $\varphi(\tau)$) определяет этот линейный гомоморфизм.

Соошошение (8) позволяет редуцировать критерии рациональности или положительной рациональности словарной функции $\varphi(p)$ на язык размерности каждого из линейных пространств E_τ^∞, $E_{\varphi(\tau)}$ и $.E_\varphi$.
Получим некоторые критерии, которые могут быть редуцированы с использованием замечания 4.
Пусть $\varphi(p)$ — произвольная словарная функция. Обозначим символом $\hat{\varphi}_p$ двуместную словарную функцию, определенную условием

$$\hat{\varphi}_p(p_1,\ p_2) = \varphi(p_1 p p_2). \quad (9)$$

Аналогично (7) мы можем определить линейное расширение словарной функции $\hat{\varphi}_p$ на пространстве $E_{\hat{\varphi}}$ всех двуместных словарных функций типа (9).

Лемма 2. *Для того чтобы линейное пространство* $E_{\hat{\varphi}}$ *было конечномерным, необходимо и достаточно, чтобы было конечномерным линейное пространство* E_φ.

Доказательство. Действительно, пусть система словарных функций $\hat{\varphi}_{p_1}, \ldots, \hat{\varphi}_{p_k}$инейно зависима:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \hat{\varphi}_{p_i}(p', p'') = 0.$$

Полагая, что $p' = e$, мы получим линейную зависимость системы словарных функций $\varphi_{p_1}, \ldots, \varphi_{p_k}$. Тогда из теоремы 1 вытекает, что существует k-мерный линейный автомат, представляющий словарную функцию $\varphi(p)$. Пусть это ЛА с системой переходных матриц L(*x*).
Если рассмотреть систему произведений матриц перехода для произвольных $k^2 + 1$ входных слов $p_1, p_2, \ldots, p_{k^2}, p_{k^2+1}$, то это множество матриц $\{L(p_i),\ i = 1, \ldots, k^2 + 1\}$ находится в линейной зависимости:

$$\sum_{i=1}^{k^2+1} \alpha_i L(p_i) = 0 \quad (10)$$

для некоторой системы элементов $\alpha_i\ (i = 1, \ldots, k^2 + 1)$, среди которых имеются не равные нулю.
Умножая матричное равенство (10) слева на вектор $\mathbf{a}(p')$ и справа на поствектор $\mathbf{m}(p'')$для произвольных слов $p',\ p''$ из свободной полугруппы *X**, получим линейную зависимость для системы словарных функций $\hat{\varphi}_{p_1}, \ldots, \hat{\varphi}_{p_{k^2+1}}$.

Определение 2. Пусть $\varphi(p)$ — произвольная словарная функция. Будем говорить, что элементы линейного пространства E_τ *эквивалентны по модулю* φ, если

$$\tau_1 \equiv_\varphi \tau_2 \leftrightarrow (p)\{p \in X^* \longrightarrow \varphi(\tau_1 p) = \varphi(\tau_2 p)\}. \quad (11)$$

Введем также в рассмотрение идеал I_φ, образованный такими полиномами ρ из свободной ассоциативной алгебры $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$, которые удовлетворяют соотношению

$$\rho \in I_\varphi \leftrightarrow (\tau_1, \tau_2)\{\tau_1, \tau_2 \in K\langle\langle X^*\rangle\rangle \longrightarrow \varphi(\tau_1\rho\tau_2) = 0\}. \quad (12)$$

Т е о р е м а 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *словарная функция* $\varphi(p)$ *представима в конечномерном линейном автомате наименьшей размерности k;*

2) *факторпространство* $E_\tau/\equiv_\varphi$ *линейного пространства* E_τ *по отношению эквивалентности* (11) *конечномерно и имеет размерность не более чем* k: $\dim(E_\tau/\equiv_\varphi) \leqslant k$;

3) *размерность линейного пространства* $E_{\hat\varphi}$ *конечна и не более чем* k^2+1: $\dim E_{\hat\varphi} \leqslant k^2+1$;

4) *факторалгебра свободной ассоциативной алгебры* $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$ *по идеалу* I_φ *конечномерна, причем размерность ее не более к*

$$\dim(K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi) \leqslant k.$$

Доказательство. Из теоремы 1 и леммы 2 мы видим, что конечномерность линейного пространства $E_{\hat\varphi}$ я вляется необходимым и достаточным условием рациональности словарной функции φ*(p).* Если размерность E_φ равна *k* —.наименьшей размерности представляющего линейпого автомата, то размерность $E_{\hat\varphi}$ не более чем $k^2 + 1$. Таким образом, условия 1) и 3) эквиваленты. Рассмотрим факторпространство линейного пространства E_τ относительно эквивалентности (11). Из определения расширения словарной функции $\varphi(p)$ на линейное пространство E_τ видно, что

$$\dim(K\langle\langle X^*\rangle\rangle/\equiv_\varphi) \leqslant \dim E_\varphi. \quad (13)$$

Действительно, из условия (11) при $p = e$ следует, что если $\tau_1 \equiv_\varphi \tau_2$, то $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$. Таким образом, если словарная функция $\varphi(p)$ рациональна, то факторпространство $E_\tau/\equiv_\varphi$ конечномерно и имеет размерность не более $\dim E_\varphi$. Предположим теперь, что факторпространство $E_\tau/\equiv_\varphi$ имеет конечную размерность *k* . Покажем, что словарная функция $\varphi(p)$ в этом случае рациональпа. Определим конечномерный автомат следующим образом:

$$L = \langle X, E_\tau/\equiv_\varphi, \delta(\omega, x), \lambda(\omega)\rangle. \quad (14)$$

Здесь $\omega = \omega_\psi$ — класс эквивалентности, содержащий функцию $\psi(p)$, а линейная функция переходов $\delta(\omega, x)$ и функция выходов

$\lambda(\omega)$ задаются условиями

$$\psi \in \omega, \quad \psi_x \in \omega' \to \omega' = \delta(\omega, x), \quad \psi(e) = \lambda(\omega).$$

Из определения эквивалентности $\equiv_\varphi$ видно, что она стабильна относительно преобразований (1), определеяных ЛА D_φ. Поэтому определение функции переходов является корректным и не зависит от выбора элементов ψ_1, ψ_2 в классе эквивалентности ω. То же можно сказать и относительно функции выходов $\lambda(\omega)$.

Пусть ω_φ — класс эквивалентности, содержащий словарную функцию $\varphi(p)$. Тогда видно, что конечномерный ЛА (14) начальным состоянием ω_φ представляет как раз словарную функцию $\varphi(p)$. Размерность автомата (14) равна размерности факторпространства $E_t/\equiv_\varphi$. Таким образом, условия 1) и 2) теоремы также эквивалентны. Докажем теперь эквивалентность условий 3) и 4). Предположим, что множество словарных функций $\{\hat{\varphi}_p,\ p \in X\}$ N-мерно. Это означает, что каковы бы ни были элементы $\hat{\varphi}_{p_1}, \ldots, \hat{\varphi}_{p_{N+1}}$, некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулю: $\sum\limits_{i=1}^{N+1} \alpha_i \hat{\varphi}_{p_i} = 0$.

Иначе это условие можно переписать в виде

$$(p', p'')\left\{p', p'' \in X^* \to \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \varphi(p' p_i p'') = 0\right\}.$$

Поскольку произвольные элементы τ_1, τ_2 свободной ассоциативной алгебры $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$ суть конечные линейные комбинации слов из свободной полугруппы X*, то отсюда следует в силу линейности доопределения словарной функции $\varphi(p)$ на алгебре $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$

$$(\tau_1, \tau_2)\left\{\tau_1, \tau_2 \in K\langle\langle X^*\rangle\rangle \to \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i \varphi(\tau_1 p_i \tau_2) = 0\right\}.$$

Повторно используя линейность доопределения $\varphi(p)$, получим

$$(\tau_1, \tau_2)\left\{\tau_1, \tau_2 \in K\langle\langle X^*\rangle\rangle \to \varphi\left(\tau_1\left(\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i p_i\right)\tau_2\right) = 0\right\}, \quad (15)$$

т. е. нетривиальная линейная комбинация $\tau = \sum\limits_{i=1}^{N+1} \alpha_i p_i$ принадлежит идеалу I_φ. Обратно, если предположить, что каждая нетривиальная линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{N+1} \alpha_i \tau_i$ последовательности $\tau_1, \ldots$ $\ldots, \tau_{N+1}$ элементов алгебры $K\langle\langle X^*\rangle\rangle$ принадлежит идеалу I_φ, это означает конечномерность множества $\{\hat{\varphi}_p,\ p \in X^*\}$. Однако условие (15) есть условие конечномерности факторалгебры $K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi$. В самом деле, факторалгебра $K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi$ состоит из классов смежности по идеалу I_φ, т. е. для того, чтобы элементы τ_1 и τ_2 были эквивалентны в смысле факторразбиения, необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$(\tau_1 - \tau_2) \in I_\varphi$. (16)

Поэтому для того, чтобы некоторая –последовательность $k_1, \ldots, k_{N+1}$ классов смежности находилась в линейной зависимости, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая линейная комбинация представителей $\tau_1, \ldots, \tau_{N+1}$ этих классов смежности принадлежала идеалу I_φ.

Из первой части доказательства эквивалентности условий 3) и 4) ясно, что размерность факторалгебры $K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi$ не больше размерности линейной оболочки множества $\{\widehat{\varphi}_p,\ p \in X^*\}$. Обратно, если факторалгебра $K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi$ имеет конечную размерность N, то для любой последовательности представителей $\tau_1, \ldots, \tau_{N+1}$ из различных классов смежности существует нетривиальная линейная комбинация $\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i\tau_i$, принадлежащая идеалу I_φ. Следовательно, размерность линейной оболочки $\{\widehat{\varphi}_p,\ p \in X^*\}$ не больше размерности $K\langle\langle X^*\rangle\rangle/I_\varphi$.

Теорема 2 представляет собой обобщение известных критериев представимости языков в конечных ДА.

Картина зависимости между свойством рациональности словарной функции и свойствами конечномерности некоторых линейных пространств, естественным образом связанных со словарной функцией, может быть еще более детализирована. Исследуем эту картину зависимости подробнее, но уже применительно к положительно-рациональным словарным функциям. Применяемый при этом метод аналогичен методу, использованному нами при получении условия конечно-автоматной представимости многотактного канала.

Теорема 3. *Для того чтобы словарная функция* $\chi(p)$, *принимающая неотрицательные значения, была положительно-рациональной, необходимо и достаточно, чтобы опорное множество семейства* $L_\chi = \{\chi_p(p_1),\ p \in X^*\}$, было конечным множеством, выпуклым относительно систем левых *x-вращений* $\gamma(x)\colon \chi(p) \to \chi(xp)$, $x \in X$.

Доказательство. Необходимость. Положим $E_\chi = \mathrm{Lin}\ L_\chi$, упорядочим координаты $\chi(p)$ «вектора» χ в пространстве E_χ в соответствии с выбранным порядком слов *p*. Естественно, в частности, рассматривать лексикографическое упорядочение свободной полугруппы при выбранном порядке следования букв алфавита *X*.

Пусть словарная функция $\chi(p)$ положительно-рациональна. Следовательно, существует конечный ВА $\langle A(x),\ x \in X\rangle$ такой, что для начального вектора состояний $\mu(e)$ и решающего поствектора $\mathbf{n}_F$ имеем

$$\chi(p) = \mu(e)A(p)\mathbf{n}_F = \mu(e)\chi(p).$$

Обозначим через χ_i $(i = 1, \ldots, k)$ счетпомерные вектор-столбцы с неотрицательными компонентами

$$\chi_i(p) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)A(p)\mathbf{n}_F,$$

а через $\chi(\dot{p})$— счетномерный вектор-столбец с компонентами

$$\chi_p(p_1) = \mu(p)A(p_1)\mathbf{n}_F.$$

Пусть $D(p) = (d_{p_1p_2}(p))$ — счетномерная матрица p-вращепия такая, что

$$D(p)\chi = \chi_p \quad (17)$$

(иначе говоря, $d_{p_1p_2}(p) = \delta_{pp_1,p_2}$— символ Кронекера). Будем рассматривать матрицу $\Xi_A = (\chi_1, \ldots, \chi_k)$ с k столбцами и счетным числом строк. Для матрицы Ξ_A, с одной стороны, очевидно, что

$$\chi_p = \begin{pmatrix} \cdots \\ \mu(p)\,\chi(p_1) \\ \cdots \end{pmatrix} p_1 = \Xi_A \mu^T(p).$$

Отсюда следует, что множество вектор-столбцов $\Gamma_A = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ составляет опорное множество множества L_χ. С другой стороны, видно, что

$$D(p)\,\Xi_A = (\chi_{1p} \ldots \chi_{kp}) = \begin{pmatrix} \cdots \\ \chi^T(pp_1) \\ \cdots \end{pmatrix} p_1 = \begin{pmatrix} \cdots \\ \chi^T(p_1)\,A^T(p) \\ \cdots \end{pmatrix} p_1 = \Xi_A A^T(p).$$

Поскольку матрицы $A(p)(p \in X^*)$ — стохастические, то множество Γ_A выпукло относительно системы левых p-вращений. Необходимость условии теоремы доказана.

Достаточность. Обозначим через $\Gamma = \{\chi_1(p), \ldots, \chi_k(p)\}$ конечное опорное множество системы словарных функций L_χ. Пусть $\mathbf{z}(p)$ — k-мерный поствектор с i-ми компонентами, равными $\chi_i(p)$ из Г. Поскольку множество Г является опорным множеством для L_χ, то

$$\chi(pp_1) = \alpha(p)\mathbf{z}(p_1).$$

В матричном виде это можно записать следующим образом:

$$\chi_p^T = \alpha(p)\,\Xi_\Gamma^T, \quad \text{где} \quad \Xi_\Gamma = \begin{pmatrix} \cdots \\ \chi_1(p_1) \ldots \chi_k(p_1) \\ \cdots \end{pmatrix} p_1.$$

Здесь вектор $\alpha(p)$ по условию является стохастическим. Поскольку опорное множество Г выпукло относительно системы левых

p-вращеиий, то верно матричное соотношение (в транспонированном виде)

$$\Xi_{\Gamma}^{T} D^{T}(p) = A^{T}(p)\, \Xi_{\Gamma}^{T}, \quad (18)$$

где $n \times n$-матрицы $A^{T}(p)$— стохастические.

Рассмотрим конечный ВА $\langle A^{T}(x),\ x \in X \rangle$ с начальным вектором состояний $\mathbf{a}(e)$ и решающим поствектором $\mathbf{z}(e)$. Тогда столбец соотношения (18), соответствующий пустому слову, дает равенство

$$\mathbf{z}(p) = A^{T}(p)\mathbf{z}(e).$$

Умножая это равенство слева на вектор $\mathbf{a}(e)$, получим

$$\chi(p) = \mathbf{a}(e)\mathbf{z}(p) = \mathbf{a}(e)A^{T}(p)\mathbf{z}(e).$$

Следовательно, вероятностный автомат $A^{\text{т}}$ представляет словарную функцию $\chi(p)$.

Из доказательства теоремы 3 видно, что при рассмотрении правых p-вращений можно сформулировать аналогичный критерий положительной рациональности словарной функции $\chi(p)$.

Замечание 5. Для того чтобы словарная функция $\chi(p)$, принимающая неотрицательные значения, была положительно-рациональной, необходимо и достаточно, чтобы опорное множество семейства счетномерных векторов $L_{\mathbf{x}} = \{\chi_p,\ p \in X^*\}$, где в естественной нумерации p_i-я компонента вектора $\chi_p(p_1)$ равна $\chi(p_1 p)$, было конечным множеством, выпуклым относительно системы правых p-вращений.

Очевидно следующее ослабление условий теоремы 3 и соответственно замечания 5.

Теорема 4. *Для того чтобы словарная функция* $\chi(p)$, *принимающая неотрицательные значения, была положительно-рациональной, необходимо и достаточно, чтобы условия теоремы* 3 *(или замечания* 5) *выполнялись для конечной системы левых (или, соответственно, правых) х-вращений.*

Доказательство предоставляется читателю.

Сравнение результатов по конечно-автоматной представимости-многотактных каналов и конечно-автоматной представимости словарных функций показывает аналогию в методике их получения. Действительно, многотактные каналы формально также могут быть рассматриваемы как двуместные словарные функции $\tau(p,\ q)$ или, если ограничиться рассмотрением только автоматных каналов, как одноместные словарные функции над парным алфавитом $X \times Y$. Поэтому методы факторизации по некоторым линейным конгруэнтностям или идеалам, связанным с заданной словарной функцией, развитые в настоящем параграфе применительно к словарным функциям, могут быть применены в полной мере и к конечно-автоматной характеризации многотактных каналов. Обратно, понятие составной последовательностной матрицы и понятие ранга можно ввести по отношению к заданной словарной функции и получить критерии слабой конечной автоматности для словарных функций на этом языке.

4.9. Определение представимости языков

Новый аспект, в котором мы будем изучать ВА — это исследование их возможностей по классификации множеств слов. Напомним, что произвольное множество слов *S,* принадлежащее свободной полугруппе X*, называется языком над алфавитом *X*. Нас будут интересовать возможности конечных ВА.

Определение 1. Язык *S представлен в ВА А,* если существуют вектор $\mu(e)$, поствектор **m** и число $\lambda \in [0, 1)$ такие, что выполнено соотношение

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \mu(e)A(p)\mathbf{m} > \lambda]. \quad (1)$$

Подробнее такой язык обозначается $S = T(A, \mu, \mathbf{m}, \lambda)$.

Число λ, фигурирующее в определении представимости, называется *точкой сечения.* Чаще всего в качестве решающего поствектора **m** рассматривается поствектор вида

$$\mathbf{n}_F = \begin{pmatrix} n_{a_1} \\ \cdots \\ n_{a_k} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad n_{a_i} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad a_i \notin F, \\ 1, & \text{если} \quad a_i \in F, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m. \quad (2)$$

В этом случае говорят также, что язык *S представлен в ВА* (A, μ) *множеством состояний F и точкой сечения λ.*

В содержательной интерпретации ВА соотношение (1) при условии, что решающий поствектор $\mathbf{n}_F$ определен соотношением типа (2), очевидно, означает следующее: слово *р* принадлежит языку *S* тогда и только тогда, когда с вероятностью больше λ при подаче на вход слова *р* ВА (A, μ) оказывается в состоянии из множества *F*.

Ранее была введена в рассмотрение характеристическая функция ВА *А*. С использованием характеристической функции можно определить язык *S,* представленный в ВА *А,* соотношением

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \chi_A(p) > \lambda]. \quad (3)$$

В этом случае для языка *S* применяется также обозначение $S = T(\chi, \lambda)$. Вообще, если язык определен соотношением

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \varphi(p) > \eta], \quad (4)$$

где $\varphi(p)$ — произвольная словарная функция, определенная на свободной полугруппе X^*, то пишут $S = T(\varphi, \eta)$. В том случае, если точка сечения $\lambda = 0$, применяется также обозначение $S = T(\varphi, 0) = T(\varphi)$.

Аналогичноопределению 1 может быть дано определение представимости языков в ВА общего вида выходной буквой.

Определение 2. Пусть ВА A — общею вида. Язык *S представлен в ВА A выходной буквой y,* если существует вектор $\boldsymbol{\mu}(e)$ и число $\lambda \in [0, 1]$ такие, что выполнено соотношение

$$(px)[px \in X^* \to px \in S \sim \boldsymbol{\mu}(p)A(y/x)\mathbf{e} > \lambda]. \quad (5)$$

Подробнее такой язык обозначается $S = T(A, \boldsymbol{\mu}, y, \lambda)$.

В содержательной интерпретации соотношение (5) означает, что слово px принадлежит языку S тогда и только тогда, когда с вероятностью более λ при подаче на вход ВА $(A, \boldsymbol{\mu})$ слова px последней буквой выходного слова оказывается буква y.

Из определения 2 следует, что выходной буквой можно представить в ВА только языки, не содержащие пустого слова. Для представимости языков множеством состояний такое ограничение отсутствует. Существенно выяснить, насколько различаются классы языков, представимых в конечных ВА в смысле первого и второго определений. Существенно также знать, как зависят классы представимых языков от ограничений, которые могут быть наложены на начальный вектор состояний $\boldsymbol{\mu}(e)$, решающий поствектор **m** и точку сечения λ. Результаты этого параграфа отвечают на поставленные вопросы.

Лемма 1. *Если язык S представим в конечном ВА множеством состояний и произвольным стохастическим начальным вектором состояний, то он представим в конечном ВА множеством. состояний и фиксированным начальным состоянием.*

Доказательство. Пусть ВА $A = \langle A(x),\ x \in X \rangle$ с k состояниями представляет язык S в соответствии с условием (1). Введем в рассмотрение новый ВА A' с $(k + 1)$-м состоянием a_0, переходные матрицы которого имеют вид

$$A'(x) = \begin{array}{c} a_0 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{\mu}(e)\,A(x) \\ \hline 0 & A(x) \end{array}\right).$$

Конструкция матриц $A'(x)$ сохраняется при их перемножении, поэтому для каждого слова p получаем

$$A(p) = \begin{array}{c} a_0 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{c|c} 0 & \boldsymbol{\mu}(e)\,A(p) \\ \hline 0 & A(p) \end{array}\right).$$

Возьмем в качестве решающего поствектора вектор

$$\mathbf{m}' = \begin{pmatrix} \mu(e)\,\mathbf{m} \\ \mathbf{m} \end{pmatrix},$$

а в качестве начального вектора состояний — вектор

$$\mu(e) = (\underset{a_0}{1}, 0, \ldots, 0).$$

Справедливо тождество $\mu'(e)A'(p)\mathbf{m}' = \mu(e)A(p)\mathbf{m}$, поэтому ВА A и A' предстаиляют один и тот же язык одной и той же точки сечения λ.

Лемма 2. *Если язык S представлен в конечном ВА решающим поствектором* $\mathbf{m}$ *с неотрицательными координатами, не большими единицы, то он представим в конечном ВА множеством состояний.*

Доказательство. Пусть для любого $p \in S$ $\mu(e)A(p)\mathbf{m} > \lambda$, где матрицы *A(x)* имеют вид $A(x) = (a_{ij}(x))$ и поствектор $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k)^T$. Рассмотрим систему стохастических матриц порядка $2|\mathfrak{A}| = 2k$

$$A'(x) = \begin{pmatrix} A_{11}(x) & \ldots & A_{1k}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1}(x) & \ldots & A_{kk}(x) \end{pmatrix},$$

где каждая матрица $A_{ij}(x)$ является матрицей второго порядка, определенной следующим образом:

$$A_{ij}(x) = \begin{pmatrix} m_j a_{ij}(x) & (1 - m_j)\,a_{ij}(x) \\ m_j a_{ij}(x) & (1 - m_j)\,a_{ij}(x) \end{pmatrix}.$$

Для каждого слова *p* имеем

$$A'(p) = \begin{pmatrix} A_{11}(p) & \ldots & A_{1k}(p) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1}(p) & \ldots & A_{kk}(p) \end{pmatrix}.$$

Поэтому для начального вектора состояний $\mu'(e) = (\mu_1, 0, \ldots, \mu_k, 0)$ и решающего поствектора $\mathbf{n}_F = (1\,0 \ldots 1\,0)^T$ получим

$$\mu(e)A(p)\mathbf{m} = \mu'(e)A'(p)\mathbf{n}_F.$$

Следовательно, для той же точки сечения конечный ВА A' представляет язык *S*.

Лемма 3. *Если язык S представлен в конечном ВА точкой сечения* $\lambda \in (0, 1)$, *то он представим в конечном ВА с любой точкой сечения* $\lambda' \in (0, \lambda)$ *или* $\lambda' \in (\lambda, 1)$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно два случая — когда новая точка сечения λ′ меньше *λ* и когда она больше *λ*.

Итак, пусть $\lambda' < \lambda$. Определим конечный ВА A' следующим образом. В качестве матриц перехода возьмем,матрицы

$$A'(x) = \begin{pmatrix} \alpha A(x) & \beta A(x) \\ \alpha A(x) & \beta A(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0,$$

для произвольных, но фиксированных значений параметров α и β. Аналогичный вид будут иметь все матрицы *A'(p).* Зададим начальный вектор состояний условием $\boldsymbol{\mu}'(e) = (\boldsymbol{\mu}(e),\ \mathbf{0})$ и определим решающий поствектор как $\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$. Поскольку для любого слова p верно тождество

$$\boldsymbol{\mu}'(e)A'(p)\mathbf{n}' = \alpha\boldsymbol{\mu}(e)A(p)\mathbf{n}_F,$$

то

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \boldsymbol{\mu}'(e)A'(p)\mathbf{n}' > \alpha\lambda],$$

т. е. ВА A' представляет язык S с точкой сечения $\lambda' = \alpha\lambda < \lambda$.
Теперь пусть $\lambda' > \lambda$. Определим конечный ВА A'' следующим образом: пусть матрицы перехода равны

$$A''(x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \dots & A(x) \\ 0 & \end{array}\right).$$

Так как для любого слова p мы получим

$$A''(p) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline 0 & \\ \dots & A(p) \\ 0 & \end{array}\right),$$

то для начального вектора состояний $\boldsymbol{\mu}''(e) = (\alpha,\ (1-\alpha)\boldsymbol{\mu}(e))$, где $0 < \alpha < 1$, и решающего поствектора $\mathbf{n}'' = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n}_F \end{pmatrix}$ получим

$$\boldsymbol{\mu}''(e)A''(p)\mathbf{n}'' = \alpha + (1-\alpha)\boldsymbol{\mu}(e)A(p)\mathbf{n}_F,$$

т. е. ВА A'' представляет язык S с точкой сечения $\lambda' = \alpha + (1-\alpha)\lambda$, где $\lambda' > \lambda$.

Лемма 4. *Если язык S представлен в конечном ВА общего вида выходной буквой, то он представим, с точностью до пустого слова, в конечном ВА множеством состояний.*

Доказательство. Пусть A — конечный ВА общего вида и язык S представлен в нем в соответствии с условием (4). Если $A(y/x)$ — матрицы перехода ВА A, то положим

$$A'(x) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{y \neq y_1} A(y/x) & A(y_1/x) \\ \sum\limits_{y \neq y_1} A(y/x) & A(y_1/x) \end{pmatrix}.$$

Матрицы *A'(x)* являются стохастическими. Произведение матриц типа *A'(x)* строится по следующему закону:

$$A'(px) = \begin{pmatrix} A(p)\sum\limits_{y \neq y_1} A(y/x) & A(p)A(y_1/x) \\ A(p)\sum\limits_{y \neq y_1} A(y/x) & A(p)A(y_1/x) \end{pmatrix}.$$

Тогда для начального вектора состояний $\mu'(e) = (\mu(e),\ 0)$ и решающего поствектора $\mathbf{n}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ мы получим

$$\mu'(e)A'(px)\mathbf{n}' = \mu(e)A(p)A(y_1/x)\mathbf{e}.$$

Следовательно, конечный ВА *A'* без выхода с системой матриц перехода *A'(x)* представляет с точностью до пустого слова тот же язык *S,* что и ВА *A,* если точки сечения выбраны одинаково. Поскольку представимость языков множеством состояний сводится к представимости языков в ВА выходной буквой очевидным образом, то доказана

Теорема 1. *Класс языков, представимых в конечных ВА выходной буквой, совпадает с классом языков, не содержащих пустого слова и представимых в конечных ВА множеством состояний.*

В последующем мы будем употреблять термин «представимость», опуская слова «множеством состояний». Языки, представимые в конечных ВА, будем называть *стохастическими, языками.*

Определение 3. Пусть $L = \langle L(x),\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$—конечномерный ЛА. Язык *S представлен в ЛА L,* если существует вектор $\mathbf{a}(e)$ и точка сечения η, такие, что выполнено соотношение

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in S \sim \mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m} > \eta]. \quad (6)$$

Такой язык обозначается $S = T(L,\ \mathbf{a},\ \eta)$.

Существенно отметить, что в этом определении на вектор **a**, поствектор **m** и на константу η не наложено никаких ограничений, кроме того, что они заданы в поле действительных чисел.

Следующая теорема еще более расширяет класс конечных дискретных преобразователей, представляющих стохастические языки.

Теорема 2. *Язык S, представимый в конечномерном ЛА размерности k, представим в ВА с* k + 4 *состояниями, имеющем дважды стохастические матрицы перехода со строго положительными элементами, фиксированным начальным и единственным финальным состоянием и точкой сечения* $\lambda = 1/(k+4)$, *не зависящей от автомата.*

Доказательство. Если не требовать того, чтобы начальное состояние ВА было фиксированным, то доказательство проводится легко. Действительно, ранее ВА представляет с точкой сечения $1/(k+2)$ язык, который ЛА *L* представляет с точкой сечения 0. Пусть мы имеем язык, который представлен *k*-мерным ЛА *L* с точкой сечения η в соответствии с условием 5. Тогда (*k*+1)-мерный линейный автомат с матрицей перехода

$$L_1(x) = \left(\begin{array}{ccc|c} & L(x) & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right), \quad x \in X, \ \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}, 1), \quad \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{m}\\ -\eta\end{pmatrix},$$

начальный вектором $a_1(e) = a_1$ и решающим поствектором **m**, представляет тот же язык *S* с нулевой точкой сечения. Таким образом, для каждого *k*-мерного ЛА, представляющего язык *S*, можно построить ВА всего лишь с *(k + 3)* состояниями, который представляет тот же язык.

Несколько видоизменив ход рассуждений, докажем, что ВА, представляющий язык *S*, может иметь фиксированное начальное состояние. Будем считать для удобства, что в ЛА *L* язык *S* представлен с нулевой точкой сечения:

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in S \sim \mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m} > 0].$$

Положим $\varphi(p) = \mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m}$.

1. Пусть $e \in S$ и $\varphi(e) = \mathbf{a}(e)\mathbf{m} > 0$. Определим словарную функцию *g(p)* условием

$$g(p) = \begin{cases}\varphi(p), & \text{если} \quad p \neq e, \\ 1, & \text{если} \quad p = e.\end{cases}$$

Из определения *g(p)* видно, что $T(\varphi) = T(g)$. Достроим исходный ЛА следующим образом: для всех *x*

$$L_1(x) = \left(\begin{array}{ccc|c} & L(x) & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad \mathbf{a}_1(e) = (\mathbf{a}(e), 1), \quad \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix}\mathbf{m}\\ 1-\varphi(e)\end{pmatrix}.$$

Построенный ЛА представляет словарную функцию *g(p)*. Обозначим через *P* неособенную $(k+1) \times (k+1)$-матрицу, первый столбец которой равен поствектору $\mathbf{m}_1$, а остальные образуют вместе с первым столбцом базис *(k* + 1)-мерного пространства столбцов и ортогональны к $\mathbf{a}_1$. Строение матрицы *P* таково, что

$$\mathbf{a}_1 P = (1, 0, \dots, 0), \quad P^{-1}\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Положим $L_2(x) = P^{-1}L(x)P$. Преобразуем полученный ЛА L_2 в ВА. Полученный ВА будет иметь фиксированное начальное состояние, которое одновременно является и единственным финальным состоянием. Характеристическая функция этого автомата удовлетворяет условию

$$\chi(p) = \begin{cases} \alpha^{|p|} g(p) + 1/(k+3), & \text{если} \quad p \neq e, \\ 1, & \text{если} \quad p = e. \end{cases}$$

Поскольку на непустых словах значения словарных функций $\varphi(p)$ и $g(p)$ совпадают, то в этом условии *g(p)* можно заменить на $\varphi(p)$. Тогда

$$T(\chi,\ 1/(k+3)) = T(\varphi)$$

и построенный ВА представляет язык *S*.

2. Пусть $\varphi(e) \leqslant 0$, т. е. $e \notin T(\varphi)$. Определим словарную функцию *g(p)* условием

$$g(p) = \begin{cases} \varphi(p), & \text{если} \quad p \neq e, \\ 0, & \text{если} \quad p = e. \end{cases}$$

Эту функцию реализует ЛА (L_1, $\mathbf{a}_1$), где

$$L_1(x) = \left(\begin{array}{ccc|c} & L(x) & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 \end{array}\right), \quad x \in X, \quad \mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}, 1), \quad \mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ -\varphi(e) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через *P* неособенную матрицу, первый столбец которой равен поствектору $\mathbf{m}_1$, и при этом первые *k* столбцов, линейно независимые между собой, ортогональны вектору $\mathbf{a}_1$. Последний столбец $\mathbf{v}_{k+1}$ выберем так, чтобы было $\mathbf{a}_1\mathbf{v}_{k+1} = 1$. Тогда имеем

$$\mathbf{a}_1 P = (0, \ldots, 0, 1), \quad P^{-1}\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Действуя далее, как в п. 1, построим В А, характеристическая функция которого теперь равна

$$\chi(p) = \begin{cases} \alpha^{|p|} \varphi_S^{\gamma}(p) + 1/(k+3), & \text{если} \quad p \neq e, \\ 0, & \text{если} \quad p = e, \end{cases}$$

причем ВА имеет *k* + 3 состояния, фиксированное начальное и единственное финальное состояние. Учитывая возможное увеличение размерности исходного ЛА при переходе к нулевой точке сечения, завершаем доказательство.

Следствие 1. *Класс языков, представимых в конечномерных ЛА, и класс стохастических языков совпадают между собой.*

Действительно, так как ВА без выхода является ЛА, то класс стохастических языков содержится в классе языков, представимых конечномерными ЛА. Обратное вытекает из теоремы 2.

Рассмотрим пример использования понятия представимости языков в ВА в задаче анализа строения обучающих последовательностей в вероятностной модели обучаемости.

Пример 1. Пусть Δ — конечномерный или счетномерный симплекс стохастических векторов **μ** — дискретных вероятностных распределений. Через $\mathcal{I}$ обозначим множество индексов $\mathcal{I} = \{1, \ldots, k(, \ldots)\}$, и пусть $F = \{i_1, \ldots, i_l(, \ldots)\}$ — некоторое подмножество $\mathcal{I}$. Пусть $h\colon \Delta \to \Delta$ — некоторый эндоморфизм симплекса Δ в себя. Будем говорить, что эндоморфизм h *обучает вероятностное распределение* **μ**, *предикату F*, если выполняется неравенство

$$h\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}_F > \boldsymbol{\mu}\mathbf{n}_F.$$

Пусть имеется некоторый запас ∑ элементарных обучающих операторов — эндоморфизмов Δ. Можно рассматривать процесс последовательного применения к вероятностному распределению **μ** операторов из множества ∑ как процесс обучения вероятностного распределения **μ**. Для полного определения процесса обучения необходимо выбрать некоторый критерий, характеризующий меру обученности распределения **μ**. Если в общем случае этот критерий задается предикатом *H,* то можно говорить, что последовательность операторов $h_1, \ldots, h_s$ обучила меру **μ** предикату *F* относительно критерия *H* , если выполнено условие

$$H(h_1 \ldots h_s\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}_F) = 1.$$

Сделаем некоторые дополнительные предположения относительно множества эндоморфизмов ∑ и критерия *H* .

1. ∑ есть множество линейных эндоморфизмов Δ, образующих конечнопорожденную полугруппу.
2. Распределение вероятностей **μ** считается, обученным предикату *F* относительно константы $\lambda,\ 0 < \lambda < 1,$ если выполнено условие

$$\boldsymbol{\mu}_0\mathbf{n}_F > \lambda.$$

При этих предположениях система ∑ представляет собой некоторую полугруппу линейных отображений симплекса Δ в себя и описывается системой стохастических матриц. Пусть *A(x)* — система стохастических матриц, образующих этой полугруппы, $\boldsymbol{\mu}(e)$— вероятностное распределение, подлежащее обучению, и *F* — предикат, т. е. некоторое подмножество множества координат вектора $\boldsymbol{\mu}(e)$. Понятно, что необходимым и достаточным условием того, что линейный оператор $A(p) = A(x_1) \ldots A(x_s)$ (где $p =(x_1 \ldots x_s)$ — обучающий, является выполнение условия

$$\boldsymbol{\mu}(e)A(p)\mathbf{n}_F > \lambda.$$

Иначе говоря, задача описания всех обучающих последовательностей при предположениях 1 и 2 сводится к описанию языка, представленного в некотором ВА (вообще говоря, не обязательно конечном) при начальном векторе состояний, определяемом распределением вероятностей, подлежащим обучению, решающим поствектором, определенным предикатом обучения и константой, являющейся критерием обученности. Содержательная интерпретация рассмотренной модели достаточно очевидна. Случайное испытание с распределением $\boldsymbol{\mu}$ интерпретируется как реакция на стимул индексами из множества $\mathcal{I}$. Реакция индексами из множества *F* считается правильной. Тогда процесс обучения состоит в увеличении вероятности правильной реакции на стимул. Обучение завершено, если эта вероятность более λ.

4.10. Алгебраические свойства класса стохастических языков

Ранее мы исследовали алгебраические свойства множеств рациональных и положительно-рациональных словарных функций. Теперь рассмотрим аналогичные задачи для класса стохастических языков. Как мы увидим ниже, класс стохастических языков континуален. Поэтому не следует ожидать, что по аналогии с алгеброй регулярных языков возможно построить некоторую конечно-порожденную алгебру стохастических языков.
Тем ие менее известен целый ряд свойств замкнутости класса стохастических языков относительно некоторых операций над языками, к изучению которых мы переходим.
Лемма 1. *Каждый регулярный язык является стохастическим.*
Доказательство. Если язык *R* регулярен, то, по определению, существует конечный ДА $A = \langle X, \mathfrak{A}, \delta(a, x)\rangle$, который представляет его условием

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in R \sim \delta(a_0, p) \in F]. \quad (1)$$

Здесь a_0 — начальное состояние ДА *A* и *F* — множество его финальных состояний, $F \subset \mathfrak{A}$. Определим конечный ВА без выхода *A* со входным множеством *X* и множеством состояний $\mathfrak{A}$ такой, что его матрицы перехода $A(x) = (a_{ij}(x))$ заданы условиями

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \delta(a_i, x) = a_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим начальный вектор состояний в виде стохастического вектора

$$\mu(e) = (0, \ldots, 0, \underset{a_0}{1}, 0, \ldots, 0),$$

а в качестве решающего поствектора рассмотрим поствектор $\mathbf{n}_F = (0 \ldots 0 \; \underbrace{1 \ldots 1}_{F})^T$. Для любого слова p условие $\delta(a_0, \; p) \in F$ эквивалентно матричному соотношению $\mu(e)A(p)\mathbf{n}_F = 1$ или, следовательно, соотношение (1) эквивалентно соотношению

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in R \sim \mu(e)A(p)\mathbf{n}_F = 1].$$

Последнее означает, что конечный ВА A представляет язык R начальным вектором состояний $\mu(e)$ и решающим поствектором $\mathbf{n}_F$ при любом значении точки сечения $\lambda \in [0, \; 1)$. Конечный ВА A называется *матричной формой* конечного ДА A.

Лемма 2. *Если язык R регулярен и язык S — стохастический, то языки* $R \cap S$ *и* $R \cup S$ *являются стохастическими.*

Доказательство. В соответствии с леммой 1 и определением стохастического языка, для некоторого конечного ДА A_i, заданного в матричной форме, и конечного ВА A_2, имеем

$$(p)[p \in X^* \rightarrow \mu_1(e)A_1(p)\mathbf{n}_1 = 1 \sim p \in R],$$
$$(p)[p \in X^* \rightarrow \mu_2(e)A_2(p)\mathbf{n}_2 > \lambda \sim p \in S].$$

Здесь $\mu_1(e)$ и $\mu_2(e)$ — начальные векторы состояний, а $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ — решающие поствекторы автоматов A_1 и A_2 соответственно. Рассмотрим конечный ВА A, определенный системой стохастических матриц перехода

$$A(x) = \begin{pmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mu(e) = (\mu_1(e)/2, \; \mu_2(e)/2)$ — начальный вектор состояний и $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix}$ — решающий поствектор ВА A. Для языков, представляемых им точками сечения, равными $\lambda/2$ и $(1+\lambda)/2$, получим

$$\mu(e)A(p)\mathbf{n} > \lambda/2 \sim 1/2(\mu_1(e)A_1(p)\mathbf{n}_1 + \\ + \mu_2(e)A_2(p)\mathbf{n}_2) > \lambda/2 \sim p \in R \cup S,$$
$$\mu(e)A(p)\mathbf{n} > (1+\lambda)/2 \sim 1/2(\mu_1(e)A_1(p)\mathbf{n}_1 + \\ + \mu_2(e)A_2(p)\mathbf{n}_2) > (1+\lambda)/2 \sim p \in R \cap S.$$

Таким образом, $R \cup S = T(A, \; \lambda/2)$ и $R \cap S = T(A, \; (1+\lambda)/2)$.

Определение 1. Пусть S —язык. Язык $S^T = \mathrm{mi}\, S$, определенный соотношением

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in S \sim \mathrm{mi}\,(p) \in S^T],$$

называется *инверсией языка S.*

Лемма 3. *Если язык S — стохастический, то язык* S^T *— также стохастический.*

Доказательство. Пусть конечный ВА *A* представляет язык условием (3 р.4.9). Характеристическая функция $\chi_A(p)$ ВА *A* — положительно-рациональна, следовательно, рациональна. По лемме словарная функция $\varphi(p) = \chi_A^T(p)$ будет рациональна, поэтому существует конечномерный настроенный ЛА *L*, который определяет эту функцию. В таком случае ЛА *L* представляет язык S^T соотношением

$$(p)[p \in X^* \rightarrow \varphi(p) > \lambda \sim p \in S^T].$$

Тогда по теореме 2 язык S^T — стохастический.

Пусть *S* — некоторый язык. Обозначим через S_p язык, определяемый эквивалентностью

$$(pp_1)[pp_1 \in X^* \rightarrow pp_1 \in S \sim p_1 \in S_p], \quad (2)$$

и через ${}_pS$ — язык, определяемый эквивалентностью

$$(p_1p)[p_1p \in X^* \rightarrow p_1p \in S \sim p_1 \in {}_pS]. \quad (3)$$

Языки S_p и ${}_pS$ называются соответственно *левой p-проещией и правой p-проещией языка S.*

Лемма 4. *Для каждого непустого языка S справедливы представления*

$$S = \bigcup_{|p|=k} pS_p \cup \widetilde{S}_k, \quad S = \bigcup_{|p|=k} {}_pSp \cup \widetilde{S}_k, \quad \textbf{(4)}$$

где конечный язык $\widetilde{S}_k = \{p\colon\ p \in S,\ |p| < k\}.$

Теорема 1. *Для того чтобы непустой язык S был стохастическим, необходимо и достаточно, чтобы были стохастическими все его правые или левые проекции для всех слов p одной и той же длины k для одного произвольно заданного значения k.*

Доказательство. Докажем теорему для случая левых *p*-проекций.

Необходимость. Так как, по условию, язык *S* — стохастический, то для некоторого конечного ВА *A* с системой матриц перехода *A (x),* начальным вектором состояний $\mu(e)$ и решающим поствектором $\mathbf{n}_F$ будем иметь для всех слов вида $pp_1 \in S$ $\mu(pp_1)\mathbf{n}_F > \lambda.$ Однако $\mu(pp_1) = \mu(e)A(pp_1) = \mu(p)A(p_1).$ Рассмотрим тот же ВА *A,* который представляет язык *S,* только в качестве начального вектора состояний возьмем стохастический вектор $\mu(p).$ Можно записать, что

$$(p_1)[p \in X^* \rightarrow p_1 \in S_p \sim \mu(p)A(p_1)\mathbf{n}_F > \lambda],$$

т. е. ИСХОДНЫЙ ВА *A* при начальном векторе состояний $\mu'(e) = \mu(p)$ представляет язык S_p.

Для того чтобы доказать необходимость условий теоремы для случая правых проекций языка *S,* следует рассмотреть тот же ВА *A,* однако в качестве нового решающего поствектора рассмотреть поствектор $\mathbf{m} = A(p)\mathbf{n}_F = \boldsymbol{\tau}_A(p).$ В соответствии с леммой 2 тогда языки вида ${}_pS$ — также стохастические.

Достаточность. Сначала рассмотрим случай, когда слова p имеют длину единица, а также предположим, что система языков S_x представлепа в конечных ВА A_x, имеющих соответственно k_x состояпий, подмножествами состояний F_x, начальными векторами состояпий $\boldsymbol{\mu}_x(e)$ и одной и той же точкой сечения λ. Следовательно, имеем

$$(p)\left[p \in X^* \rightarrow p \in S_x \sim \boldsymbol{\mu}_x(e)\, A_x(p)\, \mathbf{n}_{F_x} > \lambda\right].$$

Рассмотрим ВА A, имеющий

$$k = 1 + \sum_{x \in X} k_x$$

состояний, с системой матриц перехода, определенной следующим образом:

$$A(x_j) = \begin{array}{c|cccccc|l}
 & a_0 & & \mathfrak{A}_{x_i} & & \mathfrak{A}_{x_j} & & \\
\hline
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{x_j}(e) & & \\
 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & A_{x_i}(x_j) & & 0 & & \}\mathfrak{A}_{x_i} \\
 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & A_{x_j}(x_j) & & \}\mathfrak{A}_{x_j} \\
 & 0 & & & & & &
\end{array}.$$

При перемножении этих матриц их произведение подчинено следующему закону:

$$A(xp) = \begin{array}{c|cccccc|l}
 & a_0 & & \mathfrak{A}_{x_i} & & \mathfrak{A}_{x} & & \\
\hline
a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{x}(p) & 0 & \\
 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & A_{x_i}(xp) & & 0 & & \}\mathfrak{A}_{x_i} \\
 & 0 & & & & & & \\
 & 0 & & 0 & & A_{x}(xp) & & \}\mathfrak{A}_{x} \\
 & 0 & & & & & &
\end{array}.$$

Поэтому, если положить

$$\mu(e) = (\underset{a_0}{1}, 0, \ldots, 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_{F_{x_1}} \\ \ldots \\ \mathbf{n}_{F_{x_m}} \end{pmatrix},$$

то для каждого значения x получим

$$\mu_x(e)\, A_x(p)\, \mathbf{n}_{F_x} = \mu(e)\, A(xp)\, \mathbf{n}_F.$$

Отсюда следует, что

$xp \in S \sim p \in S_x \sim \mu_x(p)\, \mathbf{n}_{F_x} > \lambda \sim \mu(xp) \times \mathbf{n}_F > \lambda,$ т. е. ВА A представляет язык $\bigcup_x xS_x$ множеством состояний $F = \bigcup_x F_x$ и точкой сечения λ, при фиксированном с вероятностью единица начальном состоянии a_0.

Если язык S содержит пустое слово, то $S = \bigcup_x xS_x \bigcup \{e\}.$

Применяя лемму 2 к регулярному языку $\{e\}$ и языку $\bigcup_x xS_x,$ мы, получим представимость языка S.

Для общего случая применим лемму 3 р.4.9. Пусть языки S_x представлены в конечных ВА A_x различными точками сечения λ_x. На основании леммы 3 р.4.9, все языки S_x представимы в некоторых конечных ВА одной и той же константой $\lambda \in (0,\ 1).$ Возьмем именно эти автоматы и применим описанный способ синтеза автомата для представления языка S.

Пусть теперь система языков $S_p,\ |p| = k,$ представима в конечных ВА A_P. Применяя доказательство в случае $k = 1$ к системе языков S_{px} при фиксированном, но произвольно выбранном $p',\ |p'| = k - 1,$ получим, что является стохастическим каждый язык $S_{p'} = \bigcup_x xS_{px}.$

Так как k — конечное число, то на k-м шаге получим стохастичность самого языка S. Для доказательства достаточности условий теоремы для случая правых p-проекций языка S следует использовать доказанное для инверсии языка mi S, а затем воспользоваться леммой 3.

Следствие 1. *Если все левые или правые р-проекции языка S для всех слов р некоторой фиксированной длины* $|p| = k > 0$ *являются стохастическими, то будут стохастическими всевозможные левые и правые р-проекции этого языка, включая сам язык S.*

Теорема 1 не дает, к сожалению, завершенной характеристики стохастических языков, а лишь подчеркивает инвариантность свойства стохастичности и нестохастичности языка относительно операции p-проектирования.

Следствие 2. *Класс стохастических языков замкнут относительно операций левого и правого р-проектирования для любого слова р из свободной полугруппы Х*.*

Все результаты относительно свойств замкнутости класса стохастических языков, полученные до сих пор в этом параграфе, носили позитивный характер. Определим теперь некоторые операции над языками, относительно которых класс стохастических языков является незамкнутым.

Определение 2. *Конкатенацией* $S = S_1S_2$ *языков* S_1 и S_2 называется язык, образованный множеством конкатенаций каждой упорядоченной пары слов языков S_1 и S_2:

$$(p_1p_2)[p_1p_2 \in X^* \to (p_1 \in S) \,\&\, (p_2 \in S_2) \sim p_1p_2 \in S_1S_2].$$

Теорема 2. *Класс стохастических языков незамкнут относительно операции конкатенации языков.*

Доказательство. На самом деле мы докажем большее, чем утверждается в теореме. Будет построен пример стохастического языка и регулярного языка, таких, что их конкатенация в любом порядке дает нестохастический язык. Таким образом, даже конкатенация класса стохастических языков с классом регулярных языков (в любом порядке) шире класса стохастических языков. Доказательству предшествуют леммы.

Лемма 5. *Пусть* $L = \langle L(x),\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$ *— конечномерный ЛА с рациональными элементами матриц перехода, координаты начального вектора состояний* $\mathbf{a}(e)$ *и решающего поствектора* $\mathbf{m}$ *также рациональны. Тогда язык, определенный условием*

$$p \in S \sim \mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m} = \eta,$$

является стохастическим для любого действительного η.

Доказательство. Обозначим через $\chi(p)$ рациональную словарную функцию $\mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m}$. Тогда язык *S* определяется условием

$$p \in S \sim \chi_1(p) = \chi(p) - \eta = 0.$$

Класс рациональных словарных функций замкнут относительна операций сложения и умножения функций. Поэтому существует конечномерный ЛА, который представляет словарную функцию $(\chi(p) - \eta)^2$. Язык *S* представляется посредством этой словарной функции условием

$$p \in S \sim \chi_1^2(p) = 0.$$

Воспользуемся тем, что все элементы матриц перехода ВА L_i, представляющего словарную функцию $\chi_1^2(p)$, являются рациональными числами. Пусть $c > 0$ — общий знаменатель всех элементов матриц $L_1(x)$. Для матриц с целочисленными элементами $L_2(x)$, полученными из матриц $L_1(x)$ вынесением общего знаменателя всех элементов, получим

$$\chi_1^2(p) = c^{-|p|}\mathbf{a}'L_2(p)\,\mathbf{m}' = c^{-|p|}\chi_2(p).$$

Существует ЛА, который определяет рациональную словарную функцию $g(p) = c^{|p|}$. Для наглядности в качестве такого автомата можно взять двумерный ЛА с системой переходных матриц

$$A(x) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

с начальным вектором состояний (1, 0) и решающим поствектором $(1, 0)^T$. (Существует такой автомат и одномерный.) Если эта так, то существует и конечномерный ЛА с целочисленными элементами, который представляет словарную функцию $\chi_1^2(p)\,c^{|p|}$ или словарную функцию $\chi_2(p) = \mathbf{a}'L_2(p)\mathbf{m}'$. Поскольку словарная функция $\chi_2(p)$ принимает только целочисленные значения, то, выбрав в качестве точки сечения $\eta = 1/2$, будем иметь

$$p \in S \sim \chi_1^2(p) = 0 \sim \chi_1^2(p)\,c^{|p|} =$$
$$= 0 \sim \chi_2(p) = 0 \sim \chi_2(p) < 1/2 \sim$$
$$\sim -\chi_2(p) > -1/2.$$

Следовательно, язык *S*— стохастический.

Лемма 6. *Язык*

$$S = \{x^k y (x^* y)^* x^k y, \quad k \geqslant 0\},$$

определенный в алфавите (x, y), — стохастический.(Здесь звездочка, как обычно, обозначает знак свободной полугруппы.*)*

Доказательство. Рассмотрим ВА с девятью состояниями и двумя входными символами *x*, *y*, матрицы перехода которого суть (см. рис. 1)

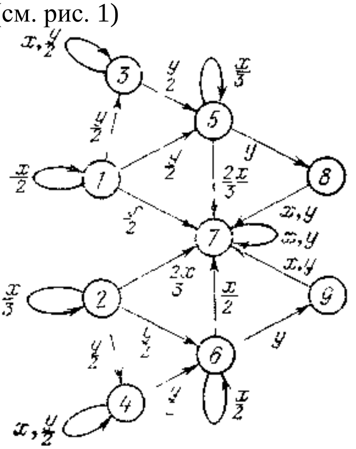


Рис.1

$$A(x)=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A(y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального вектора состояний рассматривается вектор $\mu(e)=(1/2,\ 1/2,\ 0,\ \ldots,\ 0)$. Предположим, что выбран решающий поствектор $\mathbf{m}=(0,\ldots,0,\ 1,\ -1)^T$. Обозначим через S_1 язык, состоящий из слов вида $p\in\{x,\ y\}^*$ и такой, что $p\in S_1\sim$ $\sim\mu(e)A(p)\mathbf{m}=0$. Язык S_2, состоящий из всех слов вида $x^*y(x^*y)^*x^*y$, является подмножеством языка S_1 и регулярен. Например, этот язык представляет следующий ДА с тремя состояниями (рис. 2).

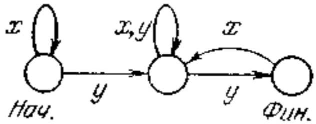


Рис. 2

Пусть p — произвольное слово из S_1, не принадлежащее S_2. Тогда оно имеет вид $p=x^kyp'x^ly$, где $k,\ l\geqslant 0$, и слово p' принадлежит языку $\{\{x^*\}y\}^*$. Обозначим через t число символов y в слове p'. Легко подсчитать, что

$$\mu(e)A(p)\mathbf{m}=1/2(1/2)^k(1/2)^{t+1}(1/3)^l-1/2(1/3)^k(1/2)^{t+1}(1/2)^l.$$

Это число равно нулю тогда и только тогда, когда $k=l$. Следовательно, мы имеем, что $S_1=S_2+S$. В соответствии с леммой 2 язык S_1 — стохастический. Тогда является стохастическим и язык S_1-S_2, поскольку это есть пересечение стохастического языка с регулярным языком, являющимся дополнением регулярного языка S_2.

Лемма 7. *Язык* $L=S\{x,\ y\}^*$ *не является стохастическим.*

Доказательство. Будем доказывать от противного. Пусть язык L представлен в конечном ВА $A=\langle A(x),\ x\in X\rangle$, и пусть матрица переходов $A(x)$ имеет характеристическое уравнение

$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0.$$

По теореме Гамильтона — Кэли мы получим для матрицы $A(x)$

$$a_nA(x^n)+a_{n-1}A(x^{n-1})+\ldots+a_1A(x)+a_0E=0.$$

Домножая слева па вектор состояний $\mu(e)$ и справа на поствектор $A(p)\mathbf{m}$ для произвольного слова получим $p\in X^*$,

$$a_n\mu(e)A(x^np)\mathbf{m}+a_{n-1}\mu(e)A(x^{n-1}p)\mathbf{m}+\ldots+a_0\mu(e)A(p)\mathbf{m}=0. \quad \textbf{(5)}$$

Поскольку 1 — корень характеристического уравнения стохастической матрицы, то $a_0+a_1+\ldots+a_n=0$. Пусть $a_{k_1},\ldots,a_{k_r}$—положительные числа среди коэффициентов a_i. Рассмотрим слово $p=yx^{k_1}\ldots yx^{k_r}y$. Условие $\mu(e)A(x^ip)\mathbf{m}>\lambda$ выполнено тогда и только тогда, когда i есть одно из чисел $k_1,\ \ldots,\ k_r$. Следовательно, левая часть соотношения (5) строго больше, чем $(\bar{a_0}+\ldots\ldots+a_n)\lambda$. Это противоречиво, поскольку $a_0+\ldots+a_n=0$. Следовательно, L — нестохастический язык.

Лемма 8. *Язык* $L'=\{x,\ y\}^*S$ — *нестохастический.*

Доказательство. Вновь будем доказывать от противного. Пусть язык L' представлен в конечном ВА A. Действуем аналогично доказательству леммы 7 и выбираем слово $p=yx^{k_1}y\ \ldots\ yx^{k_r}y$. Условие $\mu(e)A(px^i)\mathbf{m}>\lambda$ верно тогда и только тогда, когда i равно одному из $k_1,\ \ldots,\ k_r$. Это ведет к противоречию, как и в лемме 7.

Последовательность лемм 5—8 доказывает теорему 2.

Мы рассматривали конкатенацию стохастического языка S и регулярного языка R. Если рассмотреть теперь зеркальные отображения этих языков $\mathbf{mi}\,S,\ \mathbf{mi}\,R$, то в сочетании с леммой 3 получим, что конкатенация регулярного языка и стохастического языка есть нестохастический язык.

Определение 3. Пусть X и X' — конечные алфавиты и p — произвольное слово в алфавите X. Отображение $h\colon\ X^*\to X'^*$ называется *гомоморфизмом свободной полугруппы* X^* *на свободную полугруппу* X'^*, если выполнено условие

$$p_1,\ p_2\in X\to h(p_1p_2)=h(p_1)h(p_2). \quad (6)$$

Теорема 3. *Класс стохастических языков незамкнут относительно операции гомоморфизма.*

Доказательство. Пусть язык L определен, как в лемме 6. Рассмотрим язык S, определенный в алфавите $\{x,\ y,\ z\}$, равный $L_C\{x,\ y\}^*$. Этот язык является стохастическим. Действительно, пусть конечный ВА A представляет язык L и конечный ДА B представляет регулярный язык $\{x,\ y\}^*$ соответственно условиями

$$p_1\in L\sim\mu_1(e)\,A\,(p)\,\mathbf{n}_{F_1}\geqslant\lambda,$$

$$p_2\in\{x,\ y\}^*\sim\mu_2(e)\,B\,(p_2)\,\mathbf{n}_{F_2}=1.$$

Определим конечный ВА C с множеством состояний $C = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} \cup \cup \{\gamma\}$ и входным алфавитом $\{x,\ y,\ z\}$, переходные матрицы которого суть

$$C(x) = \begin{array}{c} \\ \gamma \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \gamma \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\ldots\; 0 \\ \hline 0 & A(x) \\ \ldots & \\ 0 & B(x) \end{array}\right) \end{array}, \quad C(y) = \begin{array}{c} \\ \gamma \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \gamma \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \;\ldots\; 0 \\ \hline 0 & A(y) \\ \ldots & \\ 0 & B(y) \end{array}\right) \end{array},$$

$$C(z) = \left(\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \hdashline \mathbf{e}_A & 0 & 0 \\ \hdashline \mathbf{e}_B - \mathbf{n}_{F_2} & \mathbf{n}_{F_2}\mu_1(e) & 0 \end{array}\right).$$

При начальном векторе состояний $\mu_C(e) = (0,\ 0,\ \mu_2(e))$ и множестве заключительных состояний F_1 ВА C представляет язык $Lz\{x,\ y\}^*$. Рассмотрим гомоморфизм h свободной полугруппы $\{x,\ y,\ z\}^*$ на свободную полугруппу $\{x,\ y\}^*$, определенный условием $h(z) = e$. Тогда гомоморфным образом языка $Lz\{x,\ y\}^*$, является язык $L\{x,\ y\}^*$, который по лемме 7 является нестохастическим.

В заключение заметим, что вопрос о стохастпчности дополнения стохастического языка остается открытым. Сумма и пересечение стохастических языков — не всегда стохастический язык, однако здесь мы это доказывать не будем. Дальше будет рассмотрен один подкласс класса стохастических языков, который замкнут относительно операций суммы, пересечения и дополнения.

4.11. Примеры непредставимых языков. Соотношения представимостей

Продолжим изучение свойств стохастических языков и выявление места класса стохастических языков среди других известных классов языков. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть для целого* $t > 1$ *определены матрицы*

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{t-1}{t} & \frac{1}{t} \end{pmatrix}, \quad A(t-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & \frac{t-1}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тогда для ВА с системой, переходных матриц (1) *при начальном векторе состояний* $\mu(e) = (1,\ 0)$ *и решающем поствекторе* $\mathbf{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *для любого слова* $p = x_1 \ldots x_s$ *из* $\{0,\ t-1\}^*$ *верно соотношение* $\chi_A(p) = 0,\ x_s x_{s-1} \ldots x_1$, *где число* $\chi_A(p)$ *записано в t-ичной системе счисления.*

Доказательство сводится к проверке по индукции.

Теорема 1. *Класс стохастических языков имеет несчетную мощность.*

Доказательство. Рассмотрим ВА без выхода с двумя состояниями и двумя входными символами, определенный стохастическими матрицами перехода

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A(1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{\mu}(e) = (1,\ 0)$ и $\mathbf{u}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что стохастические матрицы *A(0)* и *A(1)* удовлетворяют условиям леммы 1 при $t = 2$. Если $p = x_1 \ldots x_s$, то из леммы 1 следует, что $\chi_A(p) = 0,\ x_s x_{s-1} \ldots x_1$. Значения $\chi_A(p)$ всюду плотны на отрезке [0, 1]. Отсюда следует, что если для пары точек сечения $\lambda_1,\ \lambda_2$ верно $\lambda_1 < \lambda_2$, то для языков $T(A,\ \lambda_1)$ и $T(A,\ \lambda_2)$, представленных в ВА *A* с точками сечения λ_1 и λ_2, верно строгое включение $T(A,\ \lambda_1) \subset\ \subset T(A,\ \lambda_2)$. Поэтому множество стохастических языков $\{T(A,\ \lambda),\ \lambda \in [0,\ 1]\}$ имеет мощность континуума.

Следствие 1. *Существуют нерегулярные стохастические языки.* Доказательство вытекает из теоремы 1, поскольку класс регулярных языков счетен.

Наша следующая задача состоит в том, чтобы построить континуальное семейство нестохастпческих языков, но предварительно мы рассмотрим более частный способ этого построения, который наглядно демонстрирует геометрическую интерпретацию принципов алгоритма построения.

Пусть *A* — конечный ВА и $\Sigma_1 = \{p_1,\ \ldots,\ p_s\}$ — такое минимальное по мощности множество слов, что система векторов состояний $\boldsymbol{\mu}(p_1),\ \ldots,\ \boldsymbol{\mu}(p_s)$ образует базис линейного пространства E_A. Будем называть $\sum_1$ *правосторонним базисом относительно ВА A.*

Аналогично, будем называть *левосторонним базисом относительно ВА A* минимальное множество слов $\Sigma_2 = \{p_1,\ \ldots,\ p_t\}$ такое, что система поствекторов состояний $\boldsymbol{\tau}(p_1),\ \ldots,\ \boldsymbol{\tau}(p_t)$ образует базис линейного пространства $\mathscr{E}_A$. Правосторонний (соответственно левосторонний) базис назовем *сплошным,* если он удовлетворяет условию

$$(x)[x \in X \rightarrow (px \in \Sigma_1 \rightarrow p \in \Sigma_1)]$$
$$((x)[x \in X \rightarrow (xp \in \Sigma_2 \rightarrow p \in \Sigma_2)]).$$

Замечание 1. Пустое слово принадлежит непустому сплошному базису.

Назовем *окаймлением* правостороннего (соответственно левостороннего) базиса множество слов Γ_Σ, удовлетворяющее условию

$$(x)\left[x \in X \mathbin{\&} p \in \Sigma_1 \mathbin{\&} px \notin \Sigma_1 \to px \in \Gamma_{\Sigma_1}\right]$$
$$\left((x)\left[x \in X \mathbin{\&} p \in \Sigma_2 \mathbin{\&} xp \notin \Sigma_2 \to xp \in \Gamma_{\Sigma_2}\right]\right).$$

Лемма 2. *Для того чтобы размерность линейной оболочки множества L_A (соответственно $\mathscr{L}_A$) была равна k, необходимо и достаточно, чтобы существовал сплошной правосторонний (левосторонний) базис относительно ВА А, содержащий ровно k элементов.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы для правостороннего базиса, так как для левостороннего базиса доказательство аналогично.

Достаточность. Пусть $\Sigma_1 = \{p_1, \ldots, p_k\}$—сплошной правосторонний базис. Тогда для каждого слова p имеем $\boldsymbol{\mu}(p) = = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{\mu}(p_i), \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$ Поэтому, если вектор **v** принадлежит линейной оболочке L_A, $\mathbf{v} = \sum_p c_p \boldsymbol{\mu}(p)$, то $\mathbf{v} = \sum_p c_p \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{\mu}(p_i) =$

$$= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_p c_p \alpha_i(p)\right)\boldsymbol{\mu}(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \tilde{\alpha}_i \boldsymbol{\mu}(p_i).$$

Необходимость. Пусть $\dim E_A = k$. Будем строить сплошной базис, начиная с вектора $\boldsymbol{\mu}(e)$. Пусть построена некоторая часть сплошного базиса ∑'. Рассмотрим тогда окаймление множества ∑' и присоединим к ∑' последовательно, в порядке лексикографической упорядоченности, те элементы окаймления $\Gamma_{\Sigma'}$, которые линейно независимы от уже включенных в базис элементов. Обозначим новую полученную часть базиса ∑'' и рассмотрим его окаймление и т. д. Пусть на некотором шаге все элементы окаймления окажутся линейно зависимыми от элементов уже построенной части базиса. Тогда построение сплошного базиса Σ_1 завершено. Действительно, пусть p — произвольное число. Тогда вектор $\boldsymbol{\mu}(p)$ линейно выражается через систему векторов, определенных базисом Σ_1. Каждое слово p либо принадлежит базису Σ_1, либо имеет вид $p = p'p_1$: где слово p' принадлежит окаймлению базиса Γ_{Σ_1}. Будем доказывать индукцией по длине слов вида p_1. Если p_1 — пустое слово, утверждение верно по построению базиса Σ_1. Пусть утверждение верно для всех слов вида $p'p_1$, где длина слова p_1 не более t. Следовательно, существует представление

$$\boldsymbol{\mu}(p'p_1) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{\mu}(p_i).$$

Тогда для слова $p'p_1x$ получим

$$\mu(p'p_1x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(p_i) A(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(p_i x). \quad (2)$$

Каждое слово p_ix в левой части разложения (2) либо принадлежит базису $\sum_1$, либо принадлежит его окаймлению. Поэтому для каждого вектора $\mu(p_ix)$ существует представление

$$\mu(p_ix) = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} \mu(p_j),$$

откуда следует наличие представления

$$\mu(p'p_1x) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{ij} \right) \mu(p_j) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \mu(p_j)$$

для слова $p'p_1x$. В базисе $\sum_1$ ровно k элементов. В противпом случае, в силу доказательства достаточности, мы бы получили размерность пространства E_A, не совпадающую с k.

Пусть $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_s\}$ — конечное множество слов и S — язык в X^*. Положим

$$\sigma_i = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p_i \in S, \\ 0, & \text{если} \quad p_i \notin S, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Последовательность $\sigma_\Sigma(S) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$, упорядоченную в соответствии с естественным порядком слов множества $\sum$, назовем *сигнатурой множества $\sum$ (относительно языка S).*

Пусть $\Sigma_1 = \{p_1, \ldots, p_s\}$ — конечный правосторонний базис в X^* относительно конечного ВА A, и p — произвольное слово. Если имеет место разложение $\mu(p) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu(p_i)$, то положим

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \alpha_i \leqslant 0, \\ 1, & \text{если} \quad \alpha_i > 0, \end{cases} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Последовательность $\gamma_{\Sigma_1}(p) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$, упорядоченную в соответствии с естественным порядком слов множества $\sum_1$, назовем *сигнатурой слова p (относительно правостороннего базиса $\sum_1$* для ВА A).

Аналогично определяется сигнатура слова p относительно левостороннего базиса для ВА A.

Лемма 3. *Сигнатура слова p относительно правостороннего (соответственно левостороннего) базиса $\sum_1$ для ВА A не зависит от одновременной конкатенации слова p и всех слов базиса $\sum_1$ справа (соответственно слева) на произвольное слово из полугруппы X^*.*

Доказательство. Проведем доказательство только для правостороннего базиса. Пусть

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu(p_i) = \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i \mu(p_i) + \sum_{\alpha_i < 0} \alpha_i \mu(p_i).$$

Если осуществим приписывание справа слова p_0, то получим

$$\mu(pp_0) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \mu(p) A(p_0) = \sum_{\alpha_i > 0} \alpha_i \mu(p_i p_0) + \sum_{\alpha_i < 0} \alpha_i \mu(p_i p_0).$$

Поскольку коэффициенты разложения при конкатенации не изменились, то

$$\gamma_{\Sigma_1}(p) = \gamma_{\Sigma_1 p_0}(pp_0),$$

т. е. сигнатура слова pp_0 относительно сдвинутого базиса $\Sigma_1 p_0 = \{p_1 p_0, \ldots, p_s p_0\}$ будет совпадать с сигнатурой слова p относительно первоначального базиса.

Лемма 4. *Пусть* $S = T(A, \lambda)$ *— язык, представленный в конечном ВА A,* $\Sigma_1 = \{p_1, \ldots, p_s\}$ *— правосторонний базис относительно ВА A с сигнатурой* $\sigma_{\Sigma_1}(S) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ *множества* $\sum_1$ *относительно языка S и сигнатурой* $\gamma_{\Sigma_1}(p) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$ *произвольного слова p относительно правостороннего базиса* $\sum_1$ *для ВА A. Тогда, если для любого* $i = 1, \ldots, s,\ \sigma_i + \gamma_i = 0 \pmod 2)$, *то* $p \in T(A, \lambda)$.

Доказательство. По определению, язык *T(A, λ)* представлен в конечном ВА *A,* если он определен соотношением

$$(p)[p \in X^* \to p \in T(A, \lambda) \sim \mu(p)\mathbf{n}_F > \lambda].$$

Пусть для некоторого слова *p* мы имеем

$$\mu(p) = \sum_{i \in \mathfrak{A}'} \alpha_i \mu(p_i) + \sum_{j \in \mathfrak{A}''} \alpha_j \mu(p_j),$$

где из $i \in \mathfrak{A}'$ следует $\alpha_i > 0$ и из $j \in \mathfrak{A}''$ следует $\alpha_j \leqslant 0$. Однако, в соответствии с условием леммы, тогда из $i \in \mathfrak{A}'$ следует $\alpha_i > 0$ или $\gamma_i = 1$, или $\sigma_i = 1$, или $p_i \in T(A, \lambda)$, или $\mu(p_i)\mathbf{n}_F > \lambda$. Аналогично из $\alpha_j \leqslant 0$ следует $\mu(p_j)\mathbf{n}_F \leqslant \lambda$. Тогда для характеристической функции $\chi_A(p)$ ВА *A* получим

$$\chi_A(p) = \mu(p)\mathbf{n}_F = \sum_{i \in \mathfrak{A}'} \alpha_i \mu(p_i)\mathbf{n}_F + \sum_{j \in \mathfrak{A}''} \alpha_j \mu(p_j)\mathbf{n}_F > \lambda,$$

т. е. $p \in T(A, \lambda)$. **○**

Аналогично лемма формулируется и доказывается для левостороннего базиса.

Введем в рассмотрение помеченные базисы в свободной полугруппе X*. *Пометка базиса* $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_s\}$ заключается в том, что ему присваивается определенная сигнатура, иначе говоря, каждому слову базиса приписывается символ 0 или 1. Имеется 2^s помеченных s-элементных базисов различной сигнатуры. Упорядочим все сплошные помеченные базисы, начиная с одноэлементного базиса, каковым, очевидно, является базис $\{e\}$. Тогда каждый сплошной помеченный базис данной сигнатуры σ_Σ будет иметь номер $N(\Sigma, \sigma_\Sigma)$. В окаймлении каждого базиса будем фиксировать три точки, которые обозначим $p_1(\Sigma)$, $p_2(\Sigma)$ и $p_3(\Sigma)$ и назовем соответственно *связующей точкой, индикаторной точкой* и *точкой свободного параметра.* Предположим, что в качестве связующей точки фиксируется всегда одно из слов окаймления максимальной длины, так что выполняется соотношение

$$|p_1(\Sigma)| > \max_{p_i \in \Sigma} |p_i|.$$

Введем процедуру сдвига помеченных сплошных базисов, которая заключается в следующем.

Для левосторонних базисов. Пусть сплошному помеченному базису (Σ, σ_Σ) с номером N соответствует слово $t(N)$, которое выполняет сдвиг базиса $\sum$ посредством конкатенации $t(N)\Sigma = \{t(N)p_1, \ldots, t(N)p_s\}$. Пусть связующая точка этого базиса $\sum$ есть $p_1(\Sigma)$. Тогда следующему помеченному сплошному базису с номером *N+1* сопоставляется левый сдвиг, равный конкатенации слов $t(N)$ и $p_1(\Sigma)$: $t(N+1) = t(N)p_1(\Sigma)$.

Для правосторонних базисов. Следующему сплошному помеченному базису с номером $N+1$ сопоставляется левый сдвиг, равный конкатенации слов $p_1(\Sigma)$ и $t(N)$: $t(N+1) =$
$= p_1(\Sigma)t(N)$.

В обоих случаях первому сплошному помеченному базису соответствует отсутствие сдвига: $t(1) = e$.

Будем называть последовательности базисов, построенные в соответствии с указанными процедурами сдвига, *цепочками базисов.*

Лемма 5. *В цепочке базисов (левосторонних или правосторонних) нет пересекающихся.*

Доказательство. Пусть $\Sigma' = \{p_1', \ldots, p_m'\}$ и $\Sigma'' = \{p_1'', \ldots$
$\ldots, p_m''\}$ — два сплошных левосторонних базиса с номерами соответственно N' и N'' $(N' < N'')$. Тогда сдвинутые базисы в цепочке имеют вид

$$t(N')\Sigma' = \{t(N')p_1', \ldots, t(N')p_m'\},$$
$$t(N'')\Sigma'' = \{t(N'')p_1'', \ldots, t(N'')p_m''\}.$$

Сдвиги связаны соотношением $t(N'') = t(N')p_1(\Sigma') \ldots p_1(\check{\Sigma})$, где $\check{\Sigma}$ — сплошной помеченный базис, предшествующий $\sum''$. Поскольку для слов базиса $\sum'$ имеем $|p_i'| < |p_1(\Sigma')|$, то все слова базиса $t(N'')\Sigma''$ имеют длину, большую длин слов базиса $t(N')\Sigma'$, поэтому они пересекаться не могут.

Замечание 2. По построению цепочка базисов обладает следующим свойством. Каким бы ни задали конечный сплошной помеченный базис $\sum$ наперед заданной сигнатуры, найдется такой сдвиг $t(N)$ вдоль цепочки базисов, что $\Sigma(N) = t(N)\Sigma$ (для левостороннего базиса) и $\Sigma(N) = \Sigma t(N)$ (для правостороннего базиса), где $\sum(N)$ — базис в цепочке.

Используем введенные понятия для конструирования примера континуального семейства языков, не представимых ни в каком конечном ВА.

Будем определять языки $T(\alpha)$ при помощи характеристической функции $T_\alpha(p)$, которая принимает значение единица на словах p, принадлежащих языку $T(\alpha)$, и значение 0 на остальных словах свободной полугруппы X^*.

Правило определения значения $T_\alpha(p)$ состоит в том, что если слово $p \in X^*$ принадлежит одному из базисов в цепочке базисов $\Sigma(N) = \{p_1, \ldots, p_{m_N}\}$ (левосторонних или правосторонних), то $T_\alpha(p)$ принимает значение соответствующего разряда сигнатуры, которой помечен данный базис. Если слово оказывается индикаторной точкой некоторого базиса цепочки, то $T_\alpha(p)$ принимает значение нуль. Наконец, если слово p оказывается точкой свободного параметра базиса с номером N, то $T_\alpha(p)$ принимает значение N-го разряда двоичного разложения числа $\alpha = 0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_N \ldots$

В остальных случаях значение $T_\alpha(p)$ может быть произвольным, положим его равным нулю. Точнее, положим:

$$T_\alpha(p) = \begin{cases} \sigma_i(N), & \text{если} \quad p = t(N)\, p_i,\ p_i \in \Sigma(N), \\ 0, & \text{если} \quad p = t(N)\, p_2(\Sigma(N)), \\ \alpha_N, & \text{если} \quad p = t(N)\, p_3(\Sigma(N)), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Т е о р е м а 2. *Ни один язык в семействах языков $T(\alpha)$, определенных для произвольного параметра α $(0 < \alpha < 1)$, как в случае правосторонней, так и левосторонней цепочки базисов непредставим ни в каком конечном ВА.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для некоторого значения параметра α существует ВА с *к* состояниями, который представляет язык T_α, полученный, допустим, с правосторонней цепочкой. Пусть размерность линейной оболочки L_A равна *s*. По лемме 2 найдется сплошной правосторонний базис $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_s\}$ относительно этого ВА *А*. Пусть индикаторная точка этого базиса $p_2(\Sigma)$ имеет определенную сигнатуру $\gamma_\Sigma(p_2(\Sigma))$ относительно базиса Σ: $\gamma_\Sigma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_s\}$. В построенной нами цепочке помеченных базисов найдется базис, помеченный именно сигнатурой γ_Σ. Пусть номер этого базиса в цепочке есть N. Рассмотрим сигнатуру слова $t(N-1)p_2(\Sigma)$, относительно базиса $\Sigma(N)$. Так как по определению $\Sigma(N) = t(N-1)\Sigma$, то по лемме 3 сигнатура слова $t(N-1)p_2(\Sigma)$ относительно базиса $\Sigma(N)$ совпадает с сигнатурой слова $p_2(\Sigma)$ относительно базиса ∑, т. е. равна γ_Σ. С другой стороны, по определению языка T_α, помеченный базис ∑(N) обладает сигнатурой γ_Σ относительно этого языка. По в этом случае, в соответствии с леммой 4, слово $t(N-1)p_2(\Sigma)$ должно принадлежать языку T_α, что противоречит второй строчке определения характеристической функции языка $T_\alpha(p)$.

Следствие 2. *Существует континуум языков, непредставимых в конечных ВА.*

Действительно, построенное нами семейство языков зависит от континуального параметра α $(0 < \alpha < 1)$.

Изложенная методика построения примеров нестохастических языков может быть обобщена и описана в весьма компактной форме.

Пусть $S \subset X^*$ некоторый язык в алфавите X и ∑ — конечное множество слов в том же алфавите. Символом $\sum_P$ будем обозначать подмножество ∑, возможно, пустое, состоящее из всех слов $p_1 \in \Sigma$ таких, что $p_1 p \in S$. Иначе говоря, это пересечение правой p-проекции языка S с конечным множеством ∑. Введем в рассмотрелие отношение эквивалентности $\equiv_п(\Sigma,\ S)$ на свободной полугруппе X^* условием

$$p_1 \equiv_п p_2\,(\Sigma, S) \sim \Sigma_{p_1} = \Sigma_{p_2}.$$

Аналогично отношению $\equiv_п$ можно ввести отношение эквивалентности $\equiv_л(\Sigma,\ S)$, связанное с понятием левой, p-проекции языка S.

Замечание 3. Ранг эквивалентности $\equiv(\Sigma,\ S)$ не превышает $2^{|\Sigma|}$. Действительно, ранг или число классов эквивалентности $\equiv(\Sigma,\ S)$, очевидно, равен числу различных подмножеств вида $\Sigma' \subseteq \Sigma$. Максимум ранга достигается, если для каждого подмножества $\Sigma' \subseteq \Sigma$ найдется слово p такое, что $\Sigma' = \Sigma_p$.

Лемма 6. *Пусть язык S определен характеристической функцией* $\varphi(p)$ *при условии*

$$(p)[p \in X^* \rightarrow p \in S \sim \varphi(p) > 0].$$

Если для некоторого конечного языка $\Sigma \subset X^*$ *ранг эквивалентности* $\equiv_п(\Sigma,\ S)$ (или $\equiv_л(\Sigma,\ S)$) равен $2^{|\Sigma|}$, *то* $\dim E_\varphi \geqslant |\Sigma|$.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{p_1,\ \ldots,\ p_k\}$. Покажем, что если ранг отношения эквивалентности $\equiv_п(\Sigma,\ S)$ максимален, то словарные функции $\varphi_{p_1}(p), \ldots, \varphi_{p_k}(p)$ линейно независимы. Будем доказывать от противного. Пусть $c_1,\ \ldots,\ c_k$— не все равные нулю, такие, что

$$(p)\left[p \in X^* \to \sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_{p_i}(p) = 0\right].$$

Обозначим через $\mathcal{I}$ множество индексов *i*, для которых $c_i > 0$. В силу предположения леммы, для любого множества $\mathcal{I}$ найдется такое слово *p*, что $\varphi_{p_i}(p) > 0$. По тогда для этого слова *p*

$\sum_{i=1}^{k} c_i \varphi_{p_i}(p) > 0$, что противоречит предположению о линейной зависимости φ_{p_i}. Это рассуждение применимо и в том случае, когда множество $\mathcal{I}$ пусто. В этом случае выберем такое слово *p,* что $i \notin \mathcal{I} \sim \varphi_{p_i}(p) > 0$. Это вновь ведет к противоречию.

Из известной теоремы и леммы 6 вытекает

Теорема 3. *Пусть язык S обладает следующим свойством: для любого натурального п найдется конечный язык* $\sum$, $|\Sigma| = n$, *такой, что ранг эквивалентности* $\equiv(\Sigma,\ S)$ *(правой или левой) равен* 2^n. *Тогда язык S непредставим ни в каком конечном ВА.*

Из доказательства леммы 6 следует, что формулировка теоремы 3 является развитием идеи построения приведенного ранее примера нестохастического языка. Теорема 3 дает эффективное средство для построения примеров нестохастических языков.

Приведем еще два необходимых условия стохастпчности языков. Первое (теорема 4) представляет интерес способом доказательства. Второе (теорема 5) выявляет новое важное свойство стохастических языков.

Теорема 4. *Пусть S — стохастический язык. Тогда при некотором натуральном п для каждого слова р существует такое подмножество* $\mathcal{I}$ *множества* $\{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$, *что для любых слов* $p_1,\ p_2$

$$\{i \in \mathcal{I} \sim p_1 p^i p_2 \in S\} \to p_1 p^n p_2 \in S.$$

Доказательство. Пусть стохастический язык *S* представлен в ВА *A* с *n* состояниями. Для любого слова *p* матрица переходов *A(p)* является стохастической, следовательно, один из характеристических корней этой матрицы равен единице. Поэтому, если

$t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \ldots - a_1 t - a_0 = 0$ — характеристическое уравнение матрицы *A(p),* то $a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0 = 1$. По теореме Гамильтона — Кэли имеем

$$A(p^n) - a_{n-1}A(p^{n-1}) - \ldots - a_1 A(p) - a_0 E = 0. \quad (3)$$

Умножая соотношение (3) слева на вектор состояний $\mu(p_1)$ и справа на поствектор $\mathbf{n}_F(p_2)$ для произвольных слов p_1 и p_2, получим

$$\chi_A(p_1 p^n p_2) - a_{n-1}\chi_A(p_1 p^{n-1} p_2) - \ldots - a_1\chi_A(p_1 p p_2) - a_0\chi_A(p_1 p_2) = 0.$$

Пусть $\mathcal{I}$ — множество натуральных чисел $i \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\}$ таких, что $a_i \geqslant 0$. Предположим, что $p_1 p^i p_2 \in S$ тогда и только тогда, когда $i \in \mathcal{I}$. Тогда $\chi_A(p_1p^ip_2) > \lambda$, если $a_i \geqslant 0$, и $\chi_A(p_1p^ip_2) \leqslant \leqslant \lambda$, если $a_i < 0$. Следовательно,

$$\chi_A(p_1p^np_2) = \sum_{a_i \geqslant 0} a_i\chi_A(p_1p^ip_2) + \sum_{a_i<0} a_i\chi_A(p_1p^ip_2) >$$

$$> \sum_{a_i \geqslant 0} a_i\lambda + \sum_{a_i<0} a_i\lambda = \lambda,$$

т. е. $p_1p^np_2 \in S$.

Пусть $\Sigma \subset X$— подалфавит *X* и *к* — целое число. Язык *S* порождает в свободной полугруппе *X** бинарные отношения

$$R_{S,\Sigma,k}(p_1, p_2) \sim (p)[|p| \leqslant k \to p_1p \in S \sim p_2p \in S],$$
$$L_{S,\Sigma,k}(p_1, p_2) \sim (p)[|p| \leqslant k \to pp_1 \in S \sim pp_2 \in S].$$

Введенные отношения являются *эквивалентностями конечного ранга.* Обозначим через r_R и r_L ранги эквивалентиостей соответственно $R_{S,\Sigma,k}$ и $L_{S,\Sigma,k}$. В том случае, если $\Sigma = X$, будем опускать обозначение ∑ и писать $R_{S,k}$ и $L_{S,k}$. Эквивалентности $R_{S,k}$ и $L_{S,k}$ без ограничения на длину слов *p* известны в теории ДА.

В том случае, если язык *S* регулярен, ранг эквивалентности $R_{S,k}$ с ростом *k* стабилизируется и принимает значение числа состояний минимального ДА, представляющего этот язык *S*. В том случае, если язык *S* нерегулярен, стабилизация значения ранга эквивалентности $R_{S,k}$ с ростом *k* невозможна. Однако в этом случае правомерно поставить вопрос о том, какова степень роста функции $r_R(k)$ для определенных классов языков. В частности, представляет интерес ответ на этот вопрос для класса стохастических языков. Частично на это отвечает

Теорема 5. *Пусть S — стохастический язык и ∑ — подалфавит X. Тогда существуют натуральное n и константа c* > 1 *такие, что:*

1) *если* $|\Sigma| = 1$, *то* $r_R(k) \leqslant (k+1)^n$, $r_L(k) \leqslant (k+1)^n$,

2) *если* $|\Sigma| > 1$, *то* $r_R(k) \leqslant c^k$, $\qquad r_L(k) \leqslant c^k$.

Доказательство. Предположим, что язык *S* представлен в ВА *A* с *n* состояниями и с системой матриц перехода *A(x).* Обозначим через $W = \{p_1, \ldots, p_N\}$ множество слов длины не более *k* в алфавите ∑. Для каждого слова из *W* определим гиперплоскость

$$P_i : \boldsymbol{\mu}\mathbf{n}_F(p_i) = \boldsymbol{\mu}A(p_i)\mathbf{n}_F = \lambda, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Слово pp_i принадлежит *S* тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\mu}(p)\mathbf{n}_F(p_i) > \lambda$. Таким образом, для любых слов p_1, p_2 предикат $R_{S,\Sigma,k}(p_1, p_2)$ истинен тогда и только тогда, когда соответствующие точки $\boldsymbol{\mu}(p_1)$ и $\boldsymbol{\mu}(p_2)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ лежат в одной связной области, определенной гиперплоскостями $P_1, \ldots, P_N$. Все точки $\boldsymbol{\mu}(p)$ расположены на гиперплоскости $\boldsymbol{\mu}(p)\mathbf{e} = 1$, которая представляет собой *n* — 1-мерное евклидово пространство, а ее пересечения с гиперплоскостями P_i $(i = 1, \ldots, N)$ — (*n* — 2)-мерные гиперплоскости, которые мы обозначим через $Q_1, \ldots, Q_N$. Следовательно, ранг эквивалентности $r_R(k)$ не может быть больше, чем число связных полостей, которые могут быть определены в *n*-мерном евклидовом пространстве *h* (*n*—1)-мерными гиперплоскостями. Это число $\xi(n, h)$ оценивается следующим образом:

1) если $n = 1$ и $h \geqslant 1$, то $\xi(n, h) = h + 1$;

2) если $n \geqslant 2$ и $h \geqslant 2$, то $\xi(n, h) \leqslant h^n$.

В данном случае получим (предполагая *n*>2), что $r_R(k) \leqslant N^{n-1}$. При этом:

1) если $|\Sigma| = 1$, то $N = k + 1$, $r_R(k) \leqslant (k+1)^{n-1}$;

2) если $|\Sigma| = m - 1$, то $N = \frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}$.

Положим $c = m^{2(n-1)}$. Поскольку, как нетрудно убедиться,

$$N^{n-1} = \left(\frac{m^{k+1} - 1}{m - 1}\right)^{n-1} < m^{2k(n-1)},$$

то - $r_R(k) \leqslant c^k$. Аналогично получаются оценки для эквивалентности $r_L(k)$..

Важной задачей является выявление соотношений между классом стохастических языков и другими известными классами языков. Было уже установлено, что каждый регулярный язык является стохастическим. Ниже будет получен ряд, свойств рациональных стохастических языков. Здесь мы опишем соотношения между классами стохастических, рекурсивных и коитекстно-свободпых языков.

Определение 1. Язык *S* в свободной полугруппе X* называется *рекурсивным,* если существует алгоритм, который

1) применим к каждому слову свободной полугруппы *X*;*

2) перерабатывает каждое слово языка *S,* и только эти слова, в специальный символ алфавита алгоритма.

Замечание 4. Нестохастичесюш язык T_α, описанный и доказательстве теоремы 2, является примером рекурсивного нестохастического языка. Действительно, в данном случае алгоритмом, определяющим язык T_α, является алгоритм, описывающий процесс вычисления характеристической функции языка,— он применим ко всем словам свободной полугруппы $X^* = \{0, 1\}^*$ и перерабатывает слова из, T_α, и только их, в специальный символ — единицу.

Приведем пример стохастического нерекурсивного языка.

Теорема 6. *Пусть ВА определен, как в теореме* 1. *Если λ невычеслимо, то язык T(A, λ) — нерекурсивен.*

Доказательство. Предположим, что язык $T(A, \lambda)$ рекурсивен. Покажем, что тогда существует алгоритм, вычисляющий все двоичные знаки разложения числа $\lambda = 0, \sigma_1\sigma_2\ldots$ Действительно, по предположению, существует алгоритм $\mathfrak{A}$, определенный для всех слов свободной полугруппы X^* и перерабатывающий все слова языка $T(A, \lambda)$, и только их, в определенный символ, который мы без ограничения общности можем считать равным нулю. Остальные слова пусть алгоритм перерабатывает в единицу. Таким образом,

$$p \in T(A, \lambda) \sim \mathfrak{A}(p) = 0, \qquad p \notin T(A, \lambda) \sim \mathfrak{A}(p) = 1.$$

Пусть первые $(n-1)$ $(n \geqslant 1)$ знаков числа λ после запятой уже вычислены и равны $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. Рассмотрим слово $p = 1\sigma_{n-1}\ldots\sigma_2\sigma_1$ (если $n= 1$, то $p = 1e = 1$). Поскольку для слова $p=\gamma\sigma_{n-1}\ldots\sigma_2\sigma_1$ имеем

$$p \in T(A, \lambda) \sim \chi_A(p) > \lambda \sim 0, \sigma_1, \sigma_2\ldots\sigma_{n-1}\gamma > \lambda,$$

то из $1\sigma_{n-1}\ldots\sigma_2\sigma_1 \in T(A, \lambda)$ вытекает, что $\sigma_n = 0$, а из $1\sigma_{n-1}\ldots\ldots\sigma_2\sigma_1 \notin T(A, \lambda)$ вытекает, что $\sigma_n = 1$. Поскольку λ, по предположению, невычислимо, то случай равенства λ, конечной двоичной дроби следует исключить. Тогда получаем $\sigma_n = \mathfrak{A}(1\sigma_{n-1}\ldots\sigma_2\sigma_1)$, $n = 1, \ldots$, т. е. существует алгоритм вычисления любого наперед заданного разряда двоичного разложения числа λ, что противоречит исходному предположению.

Классы, определения или условия, описывающие некоторые подмножества R, Q элементов одного и того же множества, взаимно независимы, если эти подмножества и их дополнения все имеют непустые пересечения: множества $R \cap Q$, $R \cap \bar{Q}$, $\bar{R} \cap Q$, $\bar{R} \cap \bar{Q}$ непусты.

Следствие 3. *Классы стохастических и рекурсивных языков взаимно независимы.*

Напомним, что *порождающей грамматикой* называется объект $G = \langle V, \Sigma, P, \sigma\rangle$, где V — конечный алфавит, $\Sigma \subseteq V$ — конечный алфавит (терминальных символов), P — конечное множество упорядоченных пар (u, v), где $u \in (V-\Sigma)^* - \{e\}$ и $v \in V^*$, и σ — элемент множества $V - \Sigma$, называемый *начальным символом* или *аксиомой*. Элементы (u, v) множества P называются *правилами подстановки* или *продукциями* и записываются в виде $u \to v$. Пишем $\omega \Rightarrow \omega'$, если существуют слова z_1, z_2 из V^* и слова u, v такие, что $\omega = z_1uz_2$, $\omega' = z_1vz_2$ и $u \to v$ — продукция из P. Далее, пишем $\omega \overset{*}{\Rightarrow} \omega'$, если существует цепочка, возможно пустая (т. е. $\omega = \omega'$), слов $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r$ такая, что $\omega_0 = \omega$, $\omega_r = \omega'$ и $\omega_i \Rightarrow \omega_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, r-1$.

Множество $L(G)=\{\omega\in\Sigma^*:\ \sigma\overset{*}{\Rightarrow}\omega\}$ называется *языком, порождаемым грамматикой G*. Порождающая грамматика называется *контекстно-свободной,* если каждая ее продукция имеет вид $\xi\to v$, где $\xi\in V-\Sigma$, $v\in V^*$.

Определение 2. Язык *S* называется *контекстно-свободным,* если существует контекстно-свободная грамматика, порождающая этот язык.

Теорема 7. *Контекстно-свободный язык в алфавите из двух букв*

$X=\{a,\ b\}$

$$S=\{a^iba^{j_1}ba^{j_2}\ldots ba^{j_r}b:\ i=j_1+j_2+\ldots+j_l,\ 1\leqslant l\leqslant r\}$$

является нестохастическим.

Доказательство. Будем опираться в доказательстве нестохастичности языка *S* на теорему 3. Положим $\Sigma_n=\{a^1,\ \ldots\ \ldots,\ a^n\}$. Пусть $\Sigma'=\{a^{i_1},\ldots,a^{i_s}\}$ — произвольное подмножество$\sum_n$, где степени упорядочены в соответствии с условием $i_1<\ldots\ \ldots<i_s$. Составим слово $p=ba^{j_1}ba^{j_2}\ldots ba^{j_s}b$ такое, что $j_1+\ldots+j_k=i_k$, $1\leqslant k\leqslant s$. Очевидно, что

$$(i)[a^i\in\Sigma_n\to a^ip\in S\sim a^i\in\Sigma'].$$

Таким образом, для выбранного множества $\sum'$ условия теоремы 3 выполняются. Поэтому язык *S* — нестоха.стический. Пусть, далее, $G=\langle V,\ U,\ P,\ \sigma\rangle$— грамматика, где множество нетерминальных символов равно $V-U=\{\sigma,\ \xi,\ \xi_a,\ \xi_b\}$, множество терминальных символов есть $U=\{a,\ b\}$, а множество продукций *P* задается следующим образом:

$$\begin{array}{llll}\sigma\to\xi_b, & \xi\to\xi_a, & \xi\to\xi_b, & \sigma\to\xi_ab,\\ \xi\to\xi_ab, & \xi_b\to\xi_bb, & \xi_b\to a\xi_aa, & \xi_b\to\cdot b,\\ \xi\to\xi_aa, & \xi_a\to\xi_bb, & \xi_a\to\cdot b. & \end{array}$$

Грамматика *G* контекстно-свободна. С другой стороны, для аксиомы σ эта грамматика порождает язык *S*.

Теорема 8. *Пусть язык S в однобуквенном алфавите строится следующим образом: если двоичная последовательность*

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\ldots\sigma_k\ldots$ **(4)**

есть результат последовательной конкатенации всех слов в алфавите $\{0,\ 1\}$, *взятых в порядке лексикографической упорядоченности, тогда* $S=\{a^i:\sigma_i=1\}$. *Язык S не является контекстно-свободным и стохастическим.*

Доказательство. Докажем вначале, что язык *S* — нестохастический. Вновь полагаем $\Sigma_n=\{a^1,\ \ldots,\ a^n\}$, и пусть $\Sigma'=\{a^{i_1},\ldots,a^{i_s}\}$ —

произвольное подмножество $\sum_n$. В силу построения языка S для любого подмножества $\sum'$ можно подобрать «участок» в последовательности $\sigma_{l+1}, \ldots, \sigma_{l+k}$, такой, что $\sigma_{l+i} = 1$ тогда и только тогда, когда $a^i \in \Sigma'$, т. е.

$$(i)[a^i \in \Sigma_n \to a^{l+i} \in S \sim a^i \in \Sigma'].$$

Однако это означает, что для языка S выполнены условия теоремы 3. Покажем теперь, что язык S — не контекстно-свободный. Предположим противное. Тогда существует контекстно-свободная грамматика $G = \langle V, U, P, \sigma\rangle$, $V = \{\sigma, \ldots\}$, $U = \{x\}$, с конечной системой продукций P, имеющих вид либо $\sigma \to p'_1\sigma' p'_2$, где σ — начальный нетерминальный символ, либо $\sigma' \to p''_1\sigma'' p''_2$, либо $\tilde{\sigma} \to \cdot p$, где →• означает заключительную продукцию, которая порождает язык S. Если язык, порождаемый грамматикой, не конечен, то хотя бы в одной последовательности продукций $\sigma \to p'_1\sigma' p'_2$, $\sigma' \to p''_1\sigma'' p''_2, \ldots, \tilde{\sigma} \to \cdot p$, задающих вывод некоторого слова языка, должен повторяться какой-либо нетерминальный символ $\bar{\sigma}$, не совпадающий с начальным символом и не принадлежащий заключительной продукции. Однако, если такой вывод найдется, то в данной грамматике будут выводимы все слова, получаемые посредством последовательности продукций вида

$$\sigma \to p'_1\sigma' p'_2, \ldots, \check{\sigma} \to \check{\bar{p}}_1\bar{\sigma}\check{\bar{p}}_2, [\bar{\sigma} \to \bar{\bar{p}}_1\bar{\bar{\sigma}}\bar{\bar{p}}_2, \ldots, \check{\check{\sigma}} \to \check{\check{p}}_1\bar{\sigma}\check{\check{p}}_2], \ldots$$

$\ldots, \tilde{\sigma} \to \cdot p$, где циклическая часть вывода может повторяться неограниченно. Посколкку терминальный алфавит состоит лишь из одной буквы, это означает, что язык S, порождаемый грамматикой G, будет содержать последовательность слов, длины которых образуют периодическую последовательность, возможно, с некоторым предпериодом. Это означает, что будет содержаться периодическая подпоследовательность в последовательности всех единиц среди значений характеристической функции языка S — иначе говоря, в подпоследовательности единиц последовательности (4). Последнее невозможно, так как в этой последовательности встречаются серии из последовательных нулей сколь угодно большой длины. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 4. *Классы стохастических языков и контекстно-свободных языков взаимно независимы.*

Действительно, теоремы 5, 6 показывают, что пересечения класса нестохастических языков с классами контекстно-свободных языков и его дополнением непусты. Пересечение класса стохастических языков с классом контекстно-свободных языков иепусю, так как любой регулярный язык является стохастическим и контекстно-свободным.

4.12. Конечно-автоматная представимость языков

В этом параграфе изучается одна из наиболее ранних и, тем не менее, еще не решенная в удовлетворительной форме проблема — формулирование необходимых и достаточных условий представимости языков конечными ВА. Мы уже видели, что семейство стохастических языков, а также его дополнение, имеют мощность континуума. Это обстоятельство является существенным при попытках получить критерий конечно-автоматной представимости, поскольку описание семейства стохастических языков в виде некоторой конечно-порожденной алгебры над конечной системой операций оказывается невозможным. Критерии стохастичности языков мы опишем в нескольких формах и различными математическими средствами, однако все эти критерии не являются конструктивными. Наиболее естественными математическими объектами, связанными с ВА, оказываются не языки, а словарные функции. Это же утверждение относится к многотактным каналам, представляющим собой также словарные функции двух аргументов и, как будет ясно из дальнейшего, к последовательностям пар случайных кодов. Ранее мы видели, что над рациональными словарными функциями можно ввести такие операции, что каждой из них адекватно соответствует операция над конечномерными ЛА, определяющими словарные функции — аргументы. Конечная порожденность алгебры рациональных словарных функций, существенно зависит от этой возможности. При переходе от словарной функции $\varphi(p)$ к языку *S*, связанному со словарной функцией условием вида $p \in S \sim \varphi(p) > \lambda,$ имеющееся в правой части условия неравенство «уводит» алгебру языков от алгебры автоматов. Возникает естественный вопрос: почему в случае с конечными ДА дело обстоит иначе? Ответ прост. Словарная функция, определяемая конечным ДА, принимает лишь значения 0 или 1, поэтому она оказывается характеристической функцией того регулярного языка, который этот ЛА представляет. Таким образом, алгебра регулярных языков есть алгебра рациональных словарных функций, определяемых конечными ДА. Что касается алгебраического описания класса стохастических языков хотя бы в бесконечно порожденной алгебре, то его, возможно, не существует. После такого вступления перейдем к описанию некоторых форм критериев стохастичпости языков.

Пусть *φ(p)* — словарная функция над свободной полугруппой *X**. Тогда язык *S* в *X** можно определить условием вида

$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \varphi(p) > \lambda]$, (1)

где *λ* — некоторая действительная константа. В соответствии с определениями рациональной словарной функции и стохастического языка, из теоремы 3.1.2 следует

Теорема 1. *Для того чтобы язык S был стохастическим, необходимо и достаточно, чтобы существовали рациональная словарная функция* $\varphi(p)$ *и действительная константа λ такие, что язык S определяется условием* (1).

Замечание 1. В формулировке теоремы 1 константу λ можно заменить нулем. Действительно, если словарная функция $\varphi(p)$ рациональна, то рациональна и словарная функция $\varphi(p) - \lambda$. Таким образом, стохастические языки можно задавать в форме

$S = T(\varphi(p),\ 0) = T(\varphi)$, где $\varphi(p)$ — рациональная словарная функция.

В теории автоматов существует критерий регулярности языка, опирающийся на свойство эквивалентности, связанной с этим языком. Напомним этот критерий. Пусть *S* — язык в *X**. Тогда он порождает в *X** отношение эквивалентности слов условием

$p_1 \equiv_R p_2 \sim (p)[p \in X^* \to p_1 p \in S \sim p_2 p \in S]$. Для того чтобы язык *S* был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы эквивалентность $\equiv_R$ имела конечный ранг. Если этот ранг равен *к,* то таким же будет число состояний минимального автомата, представляющего язык *S*.

Критерий стохастичности языка, который будет описан ниже, по форме аналогичен приведенному критерию регулярности. Метод получения этого критерия, так же как и в случае критерия регулярности, позволяет решать задачу минимизации числа состояний, представляющего ВА.

Для уяснения идеи последующих построений обратимся к геометрической интерпретации представимости языков в конечных ВА. Пусть, для простоты, $A = \langle A(x),\ x \in X \rangle$— некоторый ВА с тремя состояниями и он представляет язык *S* условием

$$p \in S \sim \mu(e) A(p) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \lambda.$$

Геометрически это означает (см. рис. 1), что гиперплоскость $\mu n_F = \lambda$ разделяет все точки многообразия $L_A = \{\mu(p),\ p \in X^*\}$ на два подмножества, причем все точки $\mu(p)$, где $p \in S$, расположены на рис. 1 выше этой гиперплоскости.

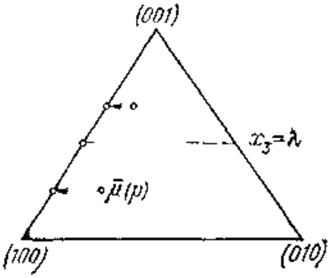


Рис. 1

Мы имели бы возможность осуществить такое же разделение свободной полугруппы X^*, используя автомат с меньшим числом состояний, если бы картина преобразования вектора $\mu(e)$ в векторы множества L_A допускала проектирование на один из координатных симплексов меньшего числа измерений, причем:

1) сохранялась бы линейность и стохастичность преобразования;

2) разделительная гиперплоскость проектировалась бы вновь в разделительную гиперплоскость.

Известно, что операция проектирования в векторном пространстве равносильна введению линейной эквивалентности, относящей в один класс эквивалентности все векторы, определяющие точки одной проектирующей гиперплоскости. Таким образом, мы приходим к необходимости рассматривать в линейном пространстве E_A линейные эквивалентности, связанные с представленным в ВА A языком. Если ВА A уже задан и линейное пространство E_A имеет конечную размерность, то приведенные рассуждения подсказывают идею получения алгоритма минимизации числа состояний вероятностного автомата, представляющего язык S. Однако на этом пути возможно и получение критерия представимости языка S в конечном вероятностном автомате.

Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$ — пространства вещественных числовых последовательностей $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)\in\mathscr{L}$, $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots)^T\in\mathscr{L}'$, с нормами $\|\xi\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|<\infty$, $\|\eta\|=\sup_i|\eta_i|<\infty$ соответственно.

Обозначим через Δ^+ множество векторов из $\mathscr{L}$ с неотрицательными координатами и нормой $\|\xi\|=1$. Заметим, что любой вектор $\xi\in\mathscr{L}$ представим в виде

$$\xi=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i v_i. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}_i$ — векторы с единственной ненулевой i-й координатой, равной единице, а равенство (2) понимается в смысле сходимости по норме в $\mathscr{L}$.

Обозначим через $H = H(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ множество всех счетномерных матриц A с вещественными элементами a_{ij}, $i, j = 1, \ldots,$ таких, что

$$\sup_i \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty. \quad (3)$$

Будем обозначать через $\xi A = \xi'$ счетномедшый вектор, j-я координата которого $\xi'_j = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i a_{ij}$, и через $\eta' = A\eta$ — счетномерный вектор, i-я координата которого

$$\eta'_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\eta_j.$$

Произведение счетномерных матриц A и B определяетсятак, что (i, j)-й элемент матрицы AB равен произведению i-й вектор-строки матрицы A и j-го вектор-столбца матрицы B. Существование произведения матриц, определенного таким образом, гарантируется свойствами линейных пространсив $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ и условием (3).

Замечание 2. Из того, что $\xi \in \mathscr{L}$, $\eta \in \mathscr{L}'$, $A \in H(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$, следует $\xi A \in \mathscr{L}$, $A\eta \in \mathscr{L}'$. Если матрицы A, B и C принадлежат H, то $AB \in H$ и $(AB)C = A(BC)$. В частности, счетномерные стохастические матрицы принадлежат H.

Пусть $\xi \in \mathscr{L}$, $\eta \in \mathscr{L}'$ и $A(x) \in H(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$.

Определение 1. *Линейным* $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$*-автоматом* называется объект

$$A = \langle A(x),\ x \in X\rangle. \quad (4)$$

Если задана вещественная константа λ, то $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автомат определяет некоторый язык условием

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \xi A(p)\eta > \lambda]. \quad (5)$$

Свободный ВА без выхода, определенный ранее, очевидно, является линейным $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автоматом.

Будем рассматривать эквивалентности на линейных пространствах $\mathscr{L}$ и $\mathscr{L}'$. Напомним, что эквивалентность R в линейном пространстве E называется *линейной,* если для любых пар элементов u_1, v_1 и u_2, v_2 из E и вещественных чисел α, β из u_1Rv_1 и u_2Rv_2 следует, что $(\alpha u_1 + \beta u_2)R(\alpha v_1 + \beta v_2)$.

Замечание 3. Класс линейной эквивалентности в линейном пространстве замкнут относительно операции линейной комбинации элементов.

Пусть *R*— линейная эквивалентность в *E,* элементы *u* и *v* принадлежат соответственно классам *R*-эквивалентности K_u и K_v, α, β — вещественные числа. Класс *R*-эквивалентности, который содержит элемент *αu,* будем обозначать $\alpha K_u = K_{\alpha u}$ и называть *произведением числа α* и класса *R*-эквивалентности K_u. Класс *R*-эквивалентности, который содержит элемент $\alpha u + \beta v$, будем обозначать $\alpha K_u + \beta K_v$ и называть *линейной* комбинацией классов *R*-эквивалентности K_u и K_v с коэффициентами α и β.

Замечание 3 гарантирует корректность определения операций умножения на число и линейной комбинации элементов в множестве классов *R*-эквивалентности.

Замечание 4. Множество классов линейной *R*-эквивалентности линейного пространства *E* образует линейное пространство относительно введенных операций линейной комбинации классов эквивалентности и умножения их па число.

Это линейное пространство обозначается *E/R* и называется *факторпространством E* относительно линейной эквивалентности *R*.

Определение 2. Пусть *Ф(u)*— автоморфизм линейного пространства *E.* Линейная эквивалентность *R стабильна относительно автоморфизма* Ф, если для любой пары элементов *u, v* из *uRv* следует $\Phi(u)R\Phi(v)$.

Замечание 5. Если линейная эквивалентность *R* стабильна относительно линейного автоморфизма Ф в *E,* то определен линейный автоморфизм $\Phi(K_u)$ факторпространства *E/R* условием

$$(u)[u \in E \to \Phi(K_u) = K_{\Phi(u)}].$$

Преобразование $\Phi(K_u)$ определяется корректно и не зависит от выбора конкретных векторов *u* из класса эквивалентности K_u ввиду стабильности *R* относительно автоморфизма *Ф(u).*

Определение 3. Линейная эквивалентность в пространстве $\mathscr{L}$ $(\mathscr{L}')$ называется *стабильной относительно линейного* $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$*-автомата* (4), если она стабильна относительно каждого из автоморфизмов Φ_x, определяемых умножением на матрицу *A(x)* справа (слева) элементов пространства $\mathscr{L}(\mathscr{L}')$.

Классы эквивалентности, стабильные относительно линейного $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ -автомата, будем обозначать буквами ω как в фактор-пространстве $\mathscr{L}/R$, так и в факторпространстве $\mathscr{L}'/R$. В соответствии с замечанием 4 каждый линейный автоморфизм, определяемый матрицей *A (x),* индуцирует в факторпространстве $\mathscr{L}/R$ (соответственно $\mathscr{L}'/R$) некоторый линейный автоморфизм. Матрицу, определяющую этот автоморфизм, мы будем обозначать

$A^R(x)$, полагая $\omega(p) = \omega_0 A^R(p)$, если
$\xi_0 A(p) = \xi'$, $\xi_0 \in \omega_0$, $\xi' \in \omega(p)$ (соответственно $\omega(p) = A^R(p)\omega_0$,
если $A(p)\eta_0 = \eta'$, $\eta_0 \in \omega_0$, $\eta' \in \omega(p)$).

Пусть язык S определен через некоторый линейный $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$ автомат условием (5).

Теорема 2. *Для того чтобы язык S был стохастическим, необходимо и достаточно выполнение условия критерия K_s: существуют линейная эквивалентность R конечного ранга в линейном пространстве $\mathscr{L}$ (или $\mathscr{L}'$), стабильная относительно линейного $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автомата, определяющего язык S, линейный вещественный функционал g(ω) с областью определения $\mathscr{L}/R$ (соответственно $\mathscr{L}'/R$), класс эквивалентности* ω_0 *и вещественная константа λ такие, что*

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim g(\omega(p)) > \lambda], \quad (6)$$

где $\omega(p) = \omega_0 A^R(p)$ *(соответственно* $\omega(p) = A^R(p)\omega_0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть язык S — стохастический. Для некоторого натурального числа k существуют система $k \times k$-матриц *B (x)*, k-мерный вектор $\mathbf{a}(e)$ и поствектор $\mathbf{b}(e)$, вещественное число λ такие, что для любого $p \in S$ $\mathbf{a}(e)B(p)\mathbf{b}(e) > \lambda$. Выберем произвольно систему матриц $C(x) \in H(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$.

Счетномерпый вектор $\xi = (\mathbf{a}(e),\ 0,\ 0,\ \ldots)$ принадлежит пространству $\mathscr{L}$, счетномерный вектор-столбец $\eta = (\mathbf{b}^T(e),\ 0,\ 0,\ \ldots)^T$ принадлежит $\mathscr{L}'$. Обозначим через *A (x)* счетномерпую матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} B(x) & 0 \\ 0 & C(x) \end{pmatrix},$$

а через *E'* — счетномерную матрицу с k единицами в верхней части диагонали

$$E' = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы *A (x)* и *E'* принадлежат множеству $H(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$. Определим в линейном пространстве $\mathscr{L}$ линейную эквивалентность условием

$$\mathbf{u}' \equiv_R \mathbf{u}'' \sim (p)[p \in X^* \to \mathbf{u}'A(p)E' = \mathbf{u}''A(p)E']$$

(аналогично в случае пространства $\mathscr{L}'$:

$$\mathbf{v}' \equiv_R \mathbf{v}'' \sim (p)[p \in X^* \to E'A(p)\mathbf{v}' = E'A(p)\mathbf{v}'']).$$

Эквивалентность R имеет конечный ранг. Действительно, она сводится к разбиению множества k-мерных векторов $\{\mathbf{a}(e)B(p),\ p \in X^*\}$ (соответственно $\{B(p)\mathbf{b},\ p \in X^*\}$) в линейном пространстве всех k-мерных вектор-строк (вектор-столбцов) с вещественными координатами на классы эквивалентности по отношению обычного векторного равенства, причем имеет место линейное соответствие между обеими эквивалентностями.

Определим функционал $g(\omega)$ как операцию умножения некоторого вектора из класса эквивалентности ω, являющегося аргументом, на вектор-столбец $E'\eta$ справа (соответственно на вектор-строку $\xi E'$ слева). Таким образом, линейный функционал $g(\omega)$ определяется однозначно и независимо от выбора вектора — представителя класса эквивалентности. Пусть ω_0 — класс эквивалентности, содержащий вектор ξ (соответственно η). Имеем

$$g(\omega_0(p)) = \mathbf{a}(e)B(p)\mathbf{b}.$$

Достаточность. Пусть выполнены условия критерия K_s и R — линейная эквивалентность ранга k, стабильная относительно системы линейных преобразований, определяемых матрицами A (x). В силу линейности и стабильности линейной эквивалентности R определена система линейных преобразований $\omega \to \omega A(x)$ в пространстве классов эквивалентности $\mathscr{L}/R$ (или $\mathscr{L}'/R$). Поскольку эквивалентность R имеет конечный ранг k, то пространство $\mathscr{L}/R$ $(\mathscr{L}'/R)$ имеет размерность k. Выбирая в этом пространстве некоторый базис $\{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, можно записать $\mathbf{a}_\omega B(x) = \mathbf{a}_{\omega(x)}$, где $B(x)$ — система $k \times k$-матриц, $\mathbf{a}_\omega$— векторстрока, определяющая класс ω, и $\mathbf{a}_{\omega(x)}$— вектор-строка, определяющая класс $\omega(x)$. В k -мерном липейном пространстве с заданной системой координат линейный функционал g(ω) можно задать в виде вектор-столбца $\mathbf{b}$: $g(\omega) = \mathbf{a}_\omega\mathbf{b}$. Поэтому окончательно мы получаем для любого $p \in S$ $\mathbf{a}_{\omega_0}B(p)\mathbf{b} > \lambda$, т. е. язык S представим в конечномерном линейном автомате или является стохастическим.

Следствие 1. *Пусть задана словарная функция* $\varphi(p)$. *Пусть критерий* K_φ *получается из критерия* K_s *заменой условия* (6) *на условие*

$$(p)[p \in X^* \to \varphi(p) = g(\omega(p))].$$

Тогда для того, чтобы словарная функция φ(р) была рациональной, необходимо и достаточно выполнение критерия K_φ.

Доказательство фактически содержится в доказательстве самой теоремы 2.

В данном случае словарная функция $\varphi(p)$ задается посредством произвольного счетномерного линейного $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автомата.

Следствие 2. *Если к критерию* K_s *присоединить условие конечности множества* $\{\lambda\colon \lambda = g(\omega(p)),\ p \in X^*\}$, *то получим необходимое и достаточное условие регулярности языка S.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2 поскольку, если в качестве автомата, представляющего язык S, выбрать конечный ДА, то для подходящего начального вектора состояний и решающего поствектора функционал $g(\omega(p))$ принимает на свободной полугруппе X^* всего два значения 0 или 1. Для доказательства достаточности докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть вещественный или комплексный функционал* $\psi(u)$, *определенный на некоторой полугруппе G, принимает на этой полугруппе конечное число различных значений. Для того чтобы линейная оболочка T множества* $T_\psi = \{\psi_u(\cdot), u \in G\}$, *где* $\psi_u(z) = \psi(uz) \quad (z \in G)$, *была конечномерной, необходимо и достаточно, чтобы множество* T_ψ *было конечным.*

Доказательство. Доказательства требует только необходимость. Линейная оболочка T превращается в нормированное конечномерное пространство, если ввести в нем следующую норму:

$$\|\psi\| = \sup_{u \in G} |\psi(u)|.$$

Ограниченное подмножество T_ψ конечномерного банахова пространства T компактно в нем. Поскольку функционал $\psi(u)$ принимает по условию конечное число различных значений, то найдется такая константа $c > 0$, что для любой пары различных функционалов ψ_{u_1} и ψ_{u_2} из T_ψ $\|\psi_{u_1} - \psi_{u_2}\| \geqslant c$. Отсюда следует, что множество T_ψ конечно. Более того, в качестве верхней оценки мощности T_ψ можно указать c-энтропию компактного множества T_ψ: $|T_\psi| \leqslant 2^{H_c(T_\psi)}$.

Вернемся к доказательству следствия 2. Поскольку по условию словарная функция $\varphi(p)$ рациональна, то линейная оболочка множества L_φ конечномерна. Тогда по лемме 1 множество L_φ имеет конечную мощность. Применяя стандартный прием, будем строить ДА, представляющий язык, с множеством состояний $\{\varphi_p, \ p \in X^*\}$ и системой функций переходов $\varphi_p \xrightarrow{x} \varphi_{px}$. Для начального состояния $\varphi_e = \varphi$ и финального множества состояний $\{\varphi_p\colon \ \varphi_p'(e) > \lambda\}$ данный ДА с конечным числом состояний представляет язык S.

Из леммы 1 и теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Для того чтобы вещественная скалярная словарная функция* $\varphi(p)$, *принимающая конечное число различных значений, была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы множество ее состояний* $\{\varphi_p, \ p \in X^*\}$ *было конечным.*

Следствие 4. *Для того чтобы характеристическая словарная функция некоторого языка S была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы* язык *S был регулярным.*

В этом случае рациональная словарная функция является и положительно-рациональной. Более общим является

Следствие 5. *Для того чтобы вещественная скалярная словарная функция* $\varphi(p)$, *принимающая конечное множество различных* *значений, была рациональной, необходимо и достаточно, чтобы для каждого вещественного числа X язык* $S(\lambda) = \{p : \varphi(p) = \lambda,\ p \in X^*\}$ *был регулярным.*

Доказательство. Необходимость вытекает из следствия 2. Докажем достаточность. Непустых языков типа $S(\lambda)$ столько же, сколько различных значений словарной функции $\varphi(p)$, допустим, *т*.

Пусть $B_i = \langle B_i(x),\ x \in X\rangle$ — матричная форма конечного ДА, представляющего регулярный язык $S(\lambda_i)$ с начальным вектором состояний $\mu_i(e)$ и решающим поствектором $\mathbf{n}_i$. Построим систему матриц

$$B(x) = \begin{pmatrix} B_1(x) & & & 0 \\ & B_2(x) & & \\ & & \cdots & \\ 0 & & & B_m(x) \end{pmatrix}.$$

Конечномерный ЛА с системой матриц перехода *В(х),* начальным вектором состояний $\mathbf{a}(e) = (\mu_1(e) \ldots \mu_m(e))$ и решающим поствектором $\mathbf{b} = (\lambda_1\mathbf{n}_1^T \ldots \lambda_m\mathbf{n}_m^T)^T$ вычисляет словарную функцию $\varphi(p) = \mathbf{a}(e)B(p)\mathbf{b}$. Это легко проверить, если учесть, что языки $S(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$, образуют разбиение свободной полугруппы *X**.

Замечание 6. Если в следствии 5 константа λ_i принимает лишь неотрицательные значения, не большие единицы, то соответствующая словарная функция $\varphi(p)$ будет положительно рациональной. Доказательство следствия 5 полностью сохраняет силу, со ссылкой на лемму 3.1.2.

Пусть *N* (или, соответственно *М)* — базисная матрица линейного $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автомата *А.* Введем в рассмотрение в линейном пространстве $\mathscr{L}(\mathscr{L}')$ эквивалентность *R* условием

$u_1 \equiv_R u_2 \sim u_1N = u_2N (v_1 \equiv_R v_2 \sim Mv_1 = Mv_2)$. **(7)**

Следствие 6. *Если линейная эквивалентность R, определенная условием* (7),*— конечного ранга, в частности, если базисная матрица N (или М) содержит конечное число столбцов (строк), то критерии* K_φ *и* K_S *для словарной функции* $\varphi(p) = \xi A(p)\eta$ *и языка* $S = T(\varphi)$ *выполнены.*

Доказательство. Введенная эквивалентность *R*, очевидно, линейна и стабильна относительно $(\mathscr{L}, \mathscr{L}')$-автомата, учитывая, что матрица *N* (или *М)* — базисная. Определим функционал $g(\omega)$ как результат умножения какого-либо вектора из класса эквивалентности ω на поствектор *η* (соответственно вектор *ξ).* Поскольку *N* (или *М*) — базисная матрица, то результат не зависит от выбора конкретного вектора из класса ω и функционал $g(\omega)$ определяется корректно.

Обозначим через ω_0 класс эквивалентности, содержащий вектор ξ (соответственно поствектор η). На введенных объектах критерии K_Φ и K_s выполнены.
Как уже упоминалось в начале параграфа, доказательство теоремы 2 является основой алгоритма минимизации размерности линейного автомата, представляющего язык *S*. Пусть язык *S* представлен в конечномерном ЛА *L* условием типа (5). Если в линейном пространстве конечной размерности E_L существует линейная эквивалентность, стабильная относительно ЛА *L*, то факторпространство E_L/R будет иметь размерность, меньшую чем $\dim E_L$, и можно построить линейный автомат меньшей размерности, представляющий язык *S*. Автомат строится в точном соответствии с тем, как он строится в доказательстве достаточности условий теоремы 2.
Мы не будем специально рассматривать этот алгоритм, а построим другой алгоритм, который решает задачу минимизации числа состояний непосредственно в классе вероятностных автоматов.
Обратимся вновь к геометрической интерпретации факторизации линейного пространства E_L относительно линейной эквивалентности *R*, стабильной относительно ЛА *L*, представляющего язык *S*. В соответствии с леммой 1.3.1 для того, чтобы индуцированная в факторпространстве E_L/R система линейных преобразований описывалась стохастическими матрицами, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих преобразований отображало в себя координатный симплекс факторпространства $E_L/\bar{R}$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в результате факторизации относительно линейной эквивалентности *R*, стабильной относительно ВА *A*, координатный симплекс линейного пространства E_A отображался целиком на координатный симплекс линейного факторпространства E_A/R. Приведенные геометрические рассуждения определяют условия, при которых возможна минимизация числа состояний конечного вероятностного автомата, представляющего фиксированную положительно-рациональную словарную функцию или стохастический язык.
Направлением в симплекс Δ называется ненулевая вектор-строка, сумма координат которой равна нулю.
Определение 4. Пусть $\Delta^{(k)}$ — координатный симплекс. Направление τ в симплекс $\Delta^{(k)}$ называется *внутренним,* если существуют вершина симплекса $\mathbf{v}_i = (0, \ldots, 0, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0)$ и вещественное λ такие, что вектор-строка $\mathbf{v}_i + \lambda\boldsymbol{\tau}$ — стохастическая.

Для того чтобы направление τ было внутренним, необходимо и достаточно, чтобы при сумме координат, равной нулю, вектор τ имел единственную отрицательную координату. Действительно, в этом и только этом случае при *i*-й отрицательной координате τ, найдется вектор $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + \frac{1}{\tau_i}\boldsymbol{\tau}$, который будет стохастическим.

В дальнейшем будем характеризовать внутренние направления векторами τ, отрицательная координата которых равна —1, следовательно, остальные координаты определяют стохастический вектор τ' с *(k* — 1) координатами.

Теорема 3. *Пусть ВА А с k состояниями представляет язык S условием*

$$(p)[p \in X^* \to p \in S \sim \boldsymbol{\mu}(e)A(p)\mathbf{n}_F > \lambda].$$

Пусть в координатном симплексе $\Delta^{(k)}$ *найдется внутреннее направление* τ, *удовлетворяющее условию*

$$(p)[p \in X^* \to \boldsymbol{\tau}A(p)\mathbf{n}_F = 0]. \quad \textbf{(8)}$$

Тогда существует ВА с (k — 1) *состоянием, представляющий множеством состояний и константой λ тот же язык S и ту же словарную функцию, что и ВА А. Если внутреннему направлению τ соответствует k-я вершина координатного симплекса* $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}, -1)$ *, то система переходных матриц этого автомата определяется условиями*

$$B(x) = H_1 A(x) H_2,$$

где

$$H_1 = \left(E \left| \begin{matrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{matrix}\right.\right), \quad H_2 = \begin{pmatrix} E \\ \hline \tau' \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}' = (\tau_1, \ldots, \tau_{k-1}).$$

Доказательство. Любая точка $\boldsymbol{\mu}$ симплекса $\Delta^{(k)}$ удовлетворяет представлению $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\mu} + \mu_k\boldsymbol{\tau}$, так что стохастический вектор $\boldsymbol{\mu}'$ имеет *k*-ю координату, равную нулю. Пусть матрица *A(p)* имеет вид

$$A(p) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(p) \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{a}_k(p) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{a}_i(p) = (a_{i1}(p), \ldots, a_{ik}(p))$. Все векторы $\mathbf{a}'_i(x) = \mathbf{a}_i(x) + a_{ik}(x)\boldsymbol{\tau} = a_i(x)(E_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\tau})$, где $\boldsymbol{\varepsilon}_k$— вектор-столбец, имеющий нулевые координаты, кроме последней, равной единице, являются стохастическими, с последней координатой, равной нулю. Пусть $\mathbf{b}_i(x)$ — вектор-строки, полученные из векторов $\mathbf{a}_i$(x) удалением последней координаты. Система стохастических матриц

$$B(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1(x) \\ \cdots\cdots \\ \mathbf{b}_{k-1}(x) \end{pmatrix}$$

определяет ВА с *(k—1)* состоянием. Если начальный вектор состояний ВА *A* был $\mu(e)$, то в качество начального вектора состояний ВА *B* выберем вектор $\tilde{\mu}(e)$, полученный отбрасыванием последней координаты вектор-строки $\mu'(e) = \mu(e) + \mu_k\tau$.

В качестве решающего поствектора выберем поствектор $\tilde{\mathbf{n}}_F$, полученный из поствектора $\mathbf{n}_F$ удалением последней координаты. Тогда ВА *B* определяет ту же словарную функцию, что и ВА *A*. Действительно, из условия (8) следует, что

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i \mathbf{a}_i(p)\,\mathbf{n}_F = 0,$$

откуда получаем

$$\mathbf{a}_k(p)\,\mathbf{n}_F = \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \mathbf{a}_i(p)\,\mathbf{n}_F.$$

Используя (8) для пустого слова, имеем

$$\chi_B(e) = \tilde{\mu}\tilde{\mathbf{n}}_F = \mu'(e)\mathbf{n}_F = \mu(e)\mathbf{n}_F + \mu_k\tau\mathbf{n}_F = \mu(e)\mathbf{n}_F = \chi_A(e).$$

Для слов длины единица

$$B(x)\tilde{\mathbf{n}}_F = H_1A(x)[E_k + \varepsilon_k\tau]\mathbf{n}_F = H_1A(x)\mathbf{n}_F.$$

Пусть $B(p)\tilde{\mathbf{n}}_F = H_1A(p)\mathbf{n}_F$ для слов длины $|p| = s$. Тогда для слова *xp* получим

$$B(xp)\tilde{\mathbf{n}}_F = B(x)B(p)\tilde{\mathbf{n}}_F = H_1A(x)[E_k + \varepsilon_k\tau]A(p)\mathbf{n}_F = H_1A(xp)\mathbf{n}_F,$$

поскольку последний столбец матрицы $A(x)[E_k + \varepsilon_k\tau]$ состоит из нулевых элементов. Следовательно,

$$\chi_B(p) = \tilde{\mu}(e)B(p)\tilde{\mathbf{n}}_F = \mu(e)[E_k + \varepsilon_k\tau]A(p)\mathbf{n}_F = \\ = \mu(e)A(p)\mathbf{n}_F = \chi_A(p).$$

Внутреннее направление τ, удовлетворяющее системе условий (8), очевидно, является решением матричного уравнения

$$\tau N_A = 0, \quad \textbf{(9)}$$

где N_A — базисная матрица линейной оболочки множества $\mathfrak{L}_A$, и обратно, любое решение матричного уравнения (9) с нулевой суммой координат и с единственной отрицательной координатой дает внутреннее направление, удовлетворяющее системе условий (8). Задача нахождения внутреннего направления как решения матричного уравнения (9) может быть сведена к задаче линейного программирования. Предположим для определенности, что мы ищем решение τ с последней *i*-й координатой, равной —1, в виде $\tau = (\tilde{\tau}, -1)$. Если матрица N_A имеет вид

$$N_A = \begin{pmatrix} H \\ p \end{pmatrix},$$

то решение матричного уравнения (9) эквивалентно решению матричного уравнения

$\tilde{\tau} H = P.$ (10)

Пусть дана следующая задача линейного программирования *С:* указать решение системы линейных алгебраических уравнений, записанной в матричной форме как

$$(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2)\begin{pmatrix} H \\ E \end{pmatrix} = P,$$

минимизирующее функционал

$y = \mathbf{x}_2\mathbf{e}$ (11)

при дополнительном условии $x_1^i \geqslant 0,\ x_2^j \geqslant 0,\quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ n.$ Существование неотрицательного решения матричного уравнения (10) эквивалентно тому, что минимальное значение функционала (11) для решения задачи линейного программирования *С* равно нулю. Поэтому задача нахождения внутреннего направления эквивалентности совпадает с задачей линейного программирования: внутреннее направление эквивалентности вида $\tau = (\tilde{\tau},\ -1)$ существует тогда и только тогда, когда существует решение задачи линейного программирования *С* при минимуме функционала *у,* равном нулю.

4.13. Рациональные вероятностные автоматы

Результаты предыдущих параграфов показывают, что описание класса стохастических языков представляет собой трудную задачу. В этих условиях возникает потребность рассматривать отдельные классы ВА, в частности, автоматов, в том или ином смысле близких к детерминированным. Одним из таких классов является класс рациональных вероятностных автоматов (РВА).

Определение 1. ВА без выхода $A = \langle X,\ \mathfrak{A},\ \mu(a'/a,\ x)\rangle$ называется *рациональным,* если все условные вероятности $\mu(a'/a,\ x)$ — рациональные числа.

В матричной форме РВА записывается как система $A = \langle A(x),\ x \in X\rangle,$ где матрицы перехода *А(х)* суть матрицы с рациональными элементами. Все координаты начального вектора состояний $\mu(e)$ инициального РВА также принадлежат полю рациональных чисел, как и все координаты решающего поствектора $\boldsymbol{n}$.

Мы будем изучать представимость языков РВА без выхода. Если язык *S* представлен в РВА *А* условием

$(p)\,[p \in X^* \rightarrow p \in S \sim \mu\,(e)\,A\,(p)\,n\,\underline{\Delta}\,\lambda],$ (3.5.1)

то будем применять обозначение $S = T\,(A, \lambda, \underline{\Delta}),$ где знак $\underline{\Delta}$

означает либо >, либо <, либо =. Для краткости языки, представимые в конечных РВА с рациональной точкой сечения, будем называть *рациональными* языками.

Замечание 1. Каждый регулярный язык является рациональным языком. Для доказательства достаточно представить конечный ДА, представляющий регулярный язык в его вероятностном варианте, в матричной форме. Получающийся при этом конечный ВЛ является рациональным.

Класс рациональных языков, однако, шире класса регулярных языков, что мы сейчас покажем. Ниже мы убедимся в том, что класс рациональных языков обладает хорошими алгебраическими свойствами. Так, например, он замкпут относительно операции дополнения. Это позволяет проводить многие доказательства, если понимать представимость языка в смысле условия (1).

Теорема 1. *Для рационального числа* λ, $0<\lambda<1$, *существует конечный РВА такой, что языки* $T(A, \lambda, >)$, $T(A, \lambda, <)$, $T(A, \lambda, =)$ *нерегулярны.*

Доказательство. Основное содержание доказательства сводится к следующей лемме, которую мы будем доказывать для ВА общего вида, но из доказательства будет яспо, что лемма верна и для РВА. Формулировка леммы в такой общей форме ценна тем, что мы получаем одновременно в явном виде пример нерегулярного стохастического языка, тогда как ранее было доказано лишь существование таких языков.

Лемма 1. *Для любого вещественного числа* λ, $0<\lambda<1$, *существует конечный ВА А такой, что язык* $T(A, \lambda)$*— нерегулярный.*

Доказательство. Случай 1. $0<\lambda\leqslant 1/2$. Пусть $\delta = 2\lambda$, $0<\delta\leqslant 1$. Рассмотрим ВА *А* с восемью состояниями над двухбуквенным алфавитом $X=\{0, 1\}$, переходные матрицы которого суть

$$A(0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon & & & 1-\varepsilon & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & 1-\varepsilon & & & & & 1/\varepsilon & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/2 & & & 1/2 & & \\ & & & \delta & & & & 1-\delta \\ & & & & & & & \\ & & & & & 1/2 & & 1/2 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

На незаполненных местах матриц стоят нули. Начальный вектор состояний $\mu(e)=(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, решающий поствектор $\mathbf{n}_F^T = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$. Граф этого ВА изображен на рис. *1,* где сплошные линии соответствуют дугам, определяющим матрицу *A(0),* а пунктирные линии — дугам, определяющим матрицу *A*(1).

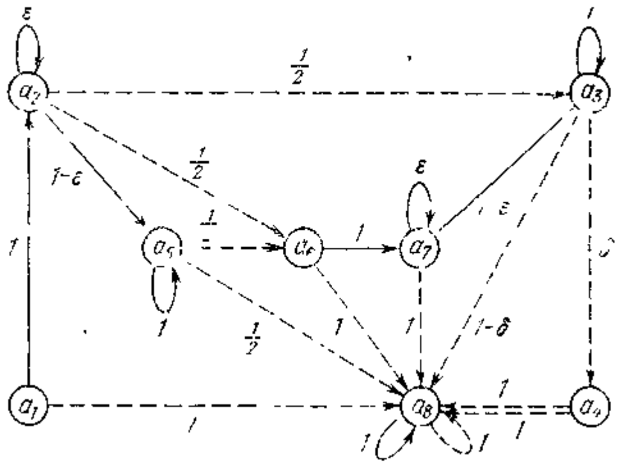


Рис. 1.

Переходы при нулевых вероятностях на графе отсутствуют. Нетрудно проверить на графе следующие элементарные утверждения.

1. $\mu(a_4/a_1,\ p)=0$, если $|p|\leqslant 2$.
2. $\mu(a_4/a_1,\ p)=0$, если $p=1p'$.
3. $\mu(a_4/a_1,\ p)=0$, если $p=p''0$.

4. $\mu(a_4/a_1,\ p) > 0$, если слово p содержит два вхождения символа 1. В этом случае слово p имеет вид $p = 0^n10^k1,\ n \geqslant 1.$

а) Пусть $p = 0^n11\quad (n \geqslant 1).$ Тогда $\mu\left(a_4/a_1, 0^n11\right) = \frac{\varepsilon^{n-1}\delta}{2} =$
$= \varepsilon^{n-1}\lambda < \lambda$ для $n > 1$ и $\mu(a_4/a_1,\ 011) = \lambda.$

б) Подсчитаем вероятность для случая, когда слово p имеет вид $p = 0^n10^k1,\ k,\ n \geqslant 1:$

$$\mu\left(a_4/a_1, 0^n\,1\,0^k\,1\right) = \mu\left(a_4/a_2, 0^{n-1}\,1\,0^k\,1\right) =$$
$$= \varepsilon^{n-1}\mu\left(a_4/a_2, 1\,0^k\,1\right) + \left(1-\varepsilon^{n-1}\right)\mu\left(a_4/a_5, 1\,0^k1\right) =$$
$$= \frac{\varepsilon^{n-1}}{2}\mu\left(a_4/a_6, 0^k\,1\right) + \frac{\varepsilon^{n-1}}{2}\mu\left(a_4/a_3, 0^k\,1\right) +$$
$$+ \frac{\left(1-\varepsilon^{n-1}\right)}{2}\mu\left(a_4/a_6, 0^k\,1\right) = \frac{\mu\left(a_4/a_6, 0^k\,1\right)}{2} + \frac{\varepsilon^{n-1}\delta}{2} =$$
$$= \frac{\mu\left(a_4/a_7, 0^{k-1}\,1\right)}{2} + \varepsilon^{n-1}\lambda = \frac{\left(1-\varepsilon^{k-1}\right)}{2}\mu\left(a_4/a_3, 1\right) + \varepsilon^{n-1}\lambda =$$
$$= \left(1-\varepsilon^{k-1}\right)\lambda + \varepsilon^{n-1}\lambda = \lambda\left(1-\varepsilon^{k-1}+\varepsilon^{n-1}\right).$$

Рассмотрим язык $T(A,\ \lambda,\ =).$ Из п. 4 следует, что

$$T(A,\ \lambda,\ =) = S_1 = \{p : \boldsymbol{\mu}A(p)\mathbf{n}_F = \lambda\} =$$
$$= \{p : \mu(a_4/a_1,\ p) = \lambda\} = \{p : p = 0^n10^n1,\ n \geqslant 1\} \cup \{011\}.$$

Покажем, что полученный язык нерегулярен. Для этого достаточно выбрать следующую бескопечпую последовательность слов $p_1,\ \ldots,\ p_n,\ \ldots,$ где $p_i = 0^i1,\quad i = 1,\ \ldots$ Для любой пары слов p_ip_j $(i \neq j)$ мы получнм

$$\boldsymbol{\mu}A(p_ip_i)\mathbf{n}_F = \lambda,\quad \boldsymbol{\mu}A(p_jp_i)\mathbf{n}_F \neq \lambda,$$

т. е. слова p_i и p_j принадлежат различным классам эквивалентности, бесконечность ранга которой, как известно, характеризует нерегулярный язык. Аналогично докажем нерегулярность языка $S_2 = T(A,\ \lambda,\ >) = \{p : p = 0^n10^k1,\ k > n \geqslant 1\}.$ Наконец, язык $S_3 = \overline{T}(A,\ \lambda,\ <)$ нерегулярен как дополнение нерегулярного языка $S_1 \cup S_2.$

Определение 2. ЛА $L = \langle L(x),\ \mathbf{m},\ x \in X\rangle$ называется *целочисленно-линейным,* если все элементы матриц перехода *L(x)* и координаты решающего поствектора **m** — целые числа.

В этом случае координаты начального вектора состояний $\mathbf{a}(e),$ а также и значения точки сечения λ принадлежат кольцу целых чисел *N*. Класс языков, представимых в конечномерных целочисленно-линейных автоматах, обозначается $\mathfrak{L}_{\mathrm{Int}}.$ Если, сверх того, предполагается, что элементы матриц перехода, координаты начального вектора состояний и решающего поствектора, а также точка сечения неотрицательны, то соответствующий класс языков обозначается $\mathfrak{L}^+_{\mathrm{Int}}.$

Лемма 2. *Для каждого рационального языка существует представляющий его конечномерный целочисленно-линейный автомат.*
Доказательство. Пусть РВА *A* представляет язык *S* рациональной точкой сечения $\lambda \in [0, 1)$, начальным вектором состояний $\mathbf{\mu}$ и решающим поствектором $\boldsymbol{n}$. Положим $\mathbf{m} = \mathbf{n} - \lambda\mathbf{e}$. Имеем $\mathbf{\mu} A(p)\mathbf{m} = \mathbf{\mu} A(p)\mathbf{n} - \lambda$, т. е. для решающего поствектора $\mathbf{m}$ $S = T(A, 0)$. Однако элементы матриц *A(x)* и векторов $\mathbf{\mu}$ и $\mathbf{m}$ суть рациональные числа, поэтому существует такое целое $k > 0$, что элементы матриц *kA(x)* и векторов $k\mathbf{\mu}$ и $k\mathbf{m}$ будут целыми. Тогда для конечномерного целочисленно-линейного автомата $L_{\text{int}} = \langle kA(x), k\mathbf{m}, x \in X\rangle$ при начальном векторе состояния $k\mathbf{\mu}$ получим $S = T(L_{\text{int}}, 0)$.
Доказательство для представимости равенством или представимости условием < остается тем же самым. Таким образом, верно
Следствие 1. *Для соответствующего знака* $\underline{\Delta}$: $\mathfrak{L}_{\text{rat}}(\underline{\Delta}) \subseteq$
$\subseteq \mathfrak{L}_{\text{int}}(\underline{\Delta})$.
Случай 2. (Доказательство леммы1.) $1/2 < \lambda < 1$. Тогда $0 < 1 - \lambda < 1/2$ и $\delta = 2 - 2\lambda$. Рассуждая, как в первом случае, мы сможем доказать нерегулярность языков $T(A, 1-\lambda, >)$, $T(A, 1-\lambda, <)$, $T(A, 1-\lambda, =)$. Рассмотрим КВА $\bar{A}$, у которого вместо решающего поствектора $\mathbf{n}_F$ выбран поствектор $\mathbf{n}_{\bar{F}} = \mathbf{e} - \mathbf{n}_F$. Тогда получим:

$$\chi_{\bar{A}}(p) = \mathbf{\mu} A(p)\mathbf{n}_{\bar{F}} = \mathbf{\mu} A(p)(\mathbf{e} - \mathbf{n}_F) = 1 - \chi_A(p).$$

Таким образом, $T(A, \lambda, <) = T(\bar{A}, 1-\lambda, >)$, что верно и для Знаков > и =.
Из доказательства леммы видно, что она остается в силе, если числа ε и δ рациональны. Таким образом, мы получаем доказательство первой части теоремы. Одновременно мы имеем возможность сформулировать следующее
Следствие 2. *Если* $\mathfrak{L}_{\text{st}}$, $\mathfrak{L}_{\text{rat}}$, $\mathfrak{L}_{\text{det}}$ — *соответственно классы стохастических, рациональных, регулярных языков, то*

$$\mathfrak{L}_{\text{det}} \subset \mathfrak{L}_{\text{rat}}(=), \quad \mathfrak{L}_{\text{det}} \subset \mathfrak{L}_{\text{rat}}(>) = \mathfrak{L}_{\text{rat}}(<) \subset \mathfrak{L}_{\text{st}}.$$

Продолжим доказательство теоремы. Поскольку РВА одновременно есть ВА, то включение $\mathfrak{L}_{\text{rat}}(>) \subset \mathfrak{L}_{\text{st}}(>)$ очевидно. Однако мощность множества языков, представимых в конечных РВА, не более чем счетна, поскольку рассматриваются лишь рациональные точки сечения, а мощность множества конечных рациональных вероятностных автоматов счетна. Поскольку мощность класса стохастических языков есть мощность континуума, то теорема доказана полностью.

Следствие 3. *Пусть* $S = T(A, \lambda, \underline{\Delta})$ *— стохастический язык, представленный в конечном ВА А с точкой сечения* $\lambda \in (0, 1)$. *Тогда для любого вещественного числа с язык S представим в том же ВА точкой сечения λ+c и в соответствующем смысле* $\underline{\Delta}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2, только вместо решающего поствектора ***n*** достаточно выбрать поствектор $\mathbf{m} = \mathbf{n} = c\mathbf{e}$.

Теорема 2. *Для соответствующего знака* $\underline{\Delta} : \mathfrak{L}^{+}_{\text{int}} \subseteq \mathfrak{L}^{+}_{\text{rat}}$.

Предпошлем доказательству теоремы несколько лемм.

Лемма 3. *Язык, представимый в конечномерном цело-численно-линейном автомате, представим в аналогичном автомате с матрицами переходов, имеющими нулевую сумму элементов по всем строкам и столбцам.*

Доказательство. Строим систему матриц

$$L'(x) = \left\{ \begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \hline \alpha_1(x) & & & & 0 \\ \vdots & & L(x) & & \vdots \\ \alpha_n(x) & & & & \cdot \\ \hline \beta_0(x) & \beta_1(x) & \ldots & \beta_n(x) & 0 \end{array} \right\},$$

где *L(x)* суть матрицы переходов того целочисленно-линейного автомата L_{int}, который представляет язык *S* с целочисленной точкой сечения *λ* и целочисленными векторами $\mathbf{a}(e)$ и $\mathbf{m}$. Коэффициенты $\alpha_i(x), \beta_0(x), \beta_i(x), i = 1, \ldots, n,$ подобраны так, что каждая матрица *L'(x)* имеет сумму элементов по строкам и столбцам, равную нулю. Теперь определяем новые целочисленные векторы $\mathbf{a}_1(e) = (0, \ \mathbf{a}(e), \ 0), \ \mathbf{m}_1^T = (0, \mathbf{m}^T, 0)$. Тогда имеем $\mathbf{a}(e)L(p)\mathbf{m} = \mathbf{a}_1(e)L'(p)\mathbf{m}_1$, т. е. при той же точке сечения λ, целочисленно-линейные автоматы L_{int} и L'_{int} представляют один и тот же язык.

Лемма 4. *Если язык S представим в конечномерном целочисленно-линейном автомате L, то он представим в конечномерном целочисленно-линейном автомате с неотрицательными элементами матриц перехода.*

Доказательство. В соответствии с леммой 3 полагаем, что язык представлен в конечномерном цолочислеппо-линейном автомате $L = \langle L(x), \ \mathbf{m}, \ x \in X \rangle$ с суммой элементов матриц перехода по строкам и столбцам, равной нулю. Обозначим через *N(a)* матрицу, все элементы которой равны заданному целому числу *a.* Выберем целое число *b* > 0 настолько большим, чтобы для любого *x* все элементы матриц $L_2(x) = L(x) + N(b)$ были неотрицательны. Так как матрицы *b(x)* обладают нулевой суммой элементов строк и столбцов, то для любого слова *p* получим

$$L_2(p) = L(p) + N(n^{|p|-1}b^{|p|}).$$

Рассмотрим целочисленно-линейпый автомат размерности $2n + 2$ с системой матриц переходов

$$L_3(x) = \begin{pmatrix} L_2(x) & & \\ & N(b) & \\ & & A \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

начальным вектором состояний $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a},\ \mathbf{a},\ \mathbf{am},\ 0)$, и решающим поствектором $\mathbf{m}_1^T = (\mathbf{m}_1^T, -\mathbf{m}^T, 1, 0)$. Тогда для любого слова *p*

$$L_3(p) = \begin{pmatrix} L_2(p) & & \\ & N(n^{|p|-1}b^{|p|}) & \\ & & A \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{a}_1 L_3(p)\mathbf{m}_1 = \mathbf{a}L(p)\mathbf{m}_1$, т. е. автомат L_3 представляет язык *S* той же константой, что и автомат *L*.

Лемма 5. *Если язык S, не содержащий пустого слова, представим в конечномерном целочисленно-линейном автомате, то он представим и в конечном РВА с положительной рациональной точкой сечения.*

Доказательство. В соответствии с леммой 4 будем считать, что язык *S* представлен в конечномерном целочисленно-линейном автомате с неотрицательными элементами перехода $S = T\ (A_{\text{int}}, \lambda, \underline{\Delta})$.

Выберем такое число $a \geqslant 1$, которое было бы больше суммы элементов любой из строк переходпых матриц *A (x).* Пусть рациональные числа $b_i(x),\ 0 \leqslant b_i(x) \leqslant 1$, таковы, что является стохастической матрицей каждая из матриц

$$L_4(x) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \ldots \ 0 \\ \hline b_1(x) & \\ \vdots & a^{\mathrm{I}} L(x) \\ b_n(x) & \end{array}\right).$$

Видно, что каждая матрица $L_4(p)$ имеет вид

$$L_4(p) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ \ldots \ 0 \\ \hline b_1(p) & \\ \vdots & a^{|p|} L(p) \\ b_n(p) & \end{array}\right).$$

Пусть $A_1 = \langle X,\ \mathfrak{A}_1,\ \{A(x),\ x \in X\}\rangle$ — конечный РВА, где $|\mathfrak{A}_1| = n + 3$, $\mu_1 = (0,\ \mathbf{a},\ \lambda,\ 0)$, $\mathbf{n}_1^T = (0, \mathbf{m}^T, -1, 0)$ и для любого x матрица $A_1(x)$ имеет вид

$$A_1(x) = \left(\begin{array}{c|cc} L_4(x) & 0 & 0 \\ \hline 0 & a^{-1} & 1 - a^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Для любого слова p

$$A_1(p) = \left(\begin{array}{c|cc} L_4(p) & 0 & 0 \\ \hline 0 & a^{-|p|} & 1 - a^{-|p|} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и $\mu_1 A_1(p)\mathbf{n}_1 = a^{|p|}(\mathbf{a}L(p)\mathbf{m} - \lambda)$, следовательно, $S = T(A_1, 0, \underline{\Delta})$ и матрицы $A_1(x)$ являются стохастическими для каждого x. Если вектор состояний $\mu_1 = (\mu_1,\ \ldots,\ \mu_l)$, где $|\mathfrak{A}_1| = l$, то выберем такое целое r>0, что все координаты вектора $\mu_2 = (\mu_1 + r,\ \ldots,\ \mu_l + r)$ положительны. Положим $d = \mu_1 + \ldots + \mu_l + 2lr$, $d > 0$. Тогда рассмотрим РВА $A_2 = \langle X,\ \mathfrak{A}_2,\ \{A_2(x),\ x \in X\}\rangle$, где $|\mathfrak{A}_1| = 2l$, $\mu_2 = d^{-1}(\mu_1 + r,\ \ldots,\ \mu_l + r,\ r,\ r,\ \ldots,\ r)$— стохастический вектор, поствектор $\mathbf{n}_2^T = (\mathbf{n}_1^T, -\mathbf{n}_1^T)$ имеет целочисленные координаты и для каждого x матрицы

$$A_2(x) = \left(\begin{array}{c|c} A_1(x) & 0 \\ \hline 0 & A_1(x) \end{array}\right)$$

— стохастические. Мы получим $\mu_1 A_1(p)\mathbf{n}_1 = d^{-1}\mu_2 A_2(p)\mathbf{n}_2$ или $S = T\ (A_2, 0,\ \underline{\Delta})$,

где у РВА A_2 начальный вектор состоянии μ_2 иматрицы $A_2(x)$ являются стохастическими с рациональными элементами. Используя лемму 1, можно построить РВА A_3 такой, что вектор-столбец $\mathbf{n}_3^T = (n_3^1, \ldots, n_3^{2l})$ имеет положительные координаты, $S = T(A_3,\ \ c, \underline{\Delta})$, где c > 0 - целое. Построим РВА $A_{\text{rat}} = \langle X,\ \mathfrak{A},\ \{A(x),\ x \in X\}\rangle$, где $|\mathfrak{A}| = k^2$, $\mu = k^{-1}(\mu_2,\ \mu_2,\ \ldots\ \ldots,\ \mu_2)$, $k = 2l$, множество финальных состоянии $F = \{a_1, a_{k+2}, a_{2k+3},\ \ldots, a_{k^2}\}$, т. е. поствектор $\mathbf{n}$ имеет вид $\mathbf{n}^T = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$. Пусть ,

$$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 A_2(x) & \ldots & \alpha_k A_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1 A_2(x) & \ldots & \alpha_k A_2(x) \end{pmatrix},$$

где $\alpha_3 = n_3^i/\beta_i$, $i = 1, \ldots, k$, и $\beta = \sum_{i=1}^{k} n_3^i > 0$.

Из построения видно, что вектор $\boldsymbol{\mu}$ и матрицы A (x) —стохастические. Для произвольного слова p вид матриц $A(p)$ сохраняется с заменой буквы x на слово p. Поэтому $\mu A(p)\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_2^i\alpha_j a_{ij}(p)$, где $a_{ij}(p)$— элемент матрицы $A(p)$ и μ_2^i—элемент вектора μ_2, $\mu_2 A_2(p)\,\mathbf{n}_3 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\mu_2^i n_3^j a_{ij}(p)$. Так как $\alpha_j = n_3^j/\beta$, то для каждого слова $p \neq e$

$$\mu A(p)\,\mathbf{n} = \frac{1}{\beta}\,\mu_2 A_2(p)\,\mathbf{n}_3.$$

Таким образом, если $p \in T\left(A_3, \lambda, \underline{\Delta}\right) - \{e\}$, то $p \in T\left(A_{\mathrm{rat}}, \lambda', \underline{\Delta}\right)$, где $\lambda' = c/\beta$— рациональное число, $0 < \lambda' < 1$.

Лемма 6. *Если $S_1 \in \mathfrak{L}_{\mathrm{rat}}(>)$— рациональный стохастический язык и S_2 — регулярный язык, то языки $S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2$, $S_1 - S_2$ являются рациональными стохастическими языками.*

Доказательство для объединения и пересечения языков аналогично доказательству леммы 3.2.2. Разность S_1 — S_2 может быть представлена в виде $S_1 \cap \bar{S}_2$, где $\bar{S}_2$— дополнение языка S_2. Если язык S_2 — регулярен, то его дополнение также регулярно, поэтому язык S_1 — S_2 — рациональный стохастический.

Следствие 4. $L_{\mathrm{int}}^{\sim}(\Delta) \subseteq L_{\mathrm{rat}}(>)$, *где* $\Delta = \{>, <\}$.

Доказательство. Если $S = T\left(A_{\mathrm{int}}, \lambda, \Delta\right)$, где λ — целое, то по лемме 4

$$T\left(A_{\mathrm{int}}, \lambda, \Delta\right) = \{T\left(A_{\mathrm{int}}, \lambda, >\right) - \{e\}\} + \{e\} = \{T(A_{\mathrm{rat}}, \lambda', >) - \{e\}\} + \{e\}.$$

Здесь язык $\{T(A_{\mathrm{rat}}, \lambda', >) - \{e\}\}$ является рациональным стохастическим, так как $\mathfrak{L}_{\mathrm{rat}}(>) = \mathfrak{L}_{\mathrm{rat}}(<)$, а по лемме 6 объединение рационального стохастического языка с регулярным языком *{e}* тоже является рациональным стохастическим языком.

Следствие 5.

$$\mathfrak{L}_{\mathrm{rat}}(>) = \mathfrak{L}_{\mathrm{int}}(>) = \mathfrak{L}_{\mathrm{int}}(<).$$

Докажем важное свойство семейства рациональных стохастических языков, которое для всего семейства стохастических языков остается проблематичным.

Теорема 3. *Класс рациональных стохастических языков замкнут относительно операции дополнения.*

Доказательство. Пусть S — рациональный стохастический язык. По лемме 2 существует конечный целочисленно-линейный автомат A_{int} такой, что $S = T(A_{\text{int}}, 0, >)$. Если $A_{\text{int}} = \langle\{A(x), x \in \mathfrak{X}\}, \mu, \mathbf{n}\rangle$, то для каждого слова p выражение $\mu A(p)\mathbf{n}$ есть целое число. В этом случае

$$\bar{S} = \{p\colon p \in \mathfrak{X}^*, \mu A(p)n \leqslant 0\} = \\ = \{p\colon p \in \mathfrak{X}^*, \mu A(\mathrm{p})n < 1\} \in \mathfrak{L}_{\text{int}}(<) = \mathfrak{L}_{\text{rat}}(>).$$

4.14. Стохастические языки в однобуквенном алфавите. Однородные стохастические языки

Рассмотрим два частных типа ВА, для которых описание представимого языка получено в аналитической форме. Первым таким классом является класс автономных ВА, входной алфавит которых содержит единственный символ: $X = \{x\}$. Матрица переходов автономного ВА определяет матрицу переходов однородной цепи Маркова. Мы будем переносить на автономный ВА все определения, касающиеся однородных цепей Маркова без дополнительных оговорок, например, понятие возвратных и невозвратных состояний, поглощающих состояний, эргодических классов и т. п. Для того чтобы ввести в рассмотрение второй класс ВА, дадим необходимые определения. Одновременно посвятим часть параграфа изложению (без доказательств) пужных сведений из теории матриц.

Пусть A — произвольная n ×nг-матрица с действительными элементами. Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ все ненулевые характеристические числа матрицы A, через $m_1, \ldots, m_\mu$— степени соответствующих элементарных делителей в поле комплексных чисел и через $m_{\mu+1}, \ldots, m_\nu$ — степени всех элементарных делителей, принадлежащих нулевому характеристическому корню, $\sum_{i=1}^{\mu} m_i + \sum_{j=\mu+1}^{\nu} m_j = n.$ Пусть, далее, n×n-матрицы $\mathcal{I}_s$— блочно-диагональные матрицы вида

$$\mathcal{I}_s = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

где ненулевой блок (вне этого блока все элементы равны нулю) стоит на месте, соответствующем определенному характеристическому числу λ_s в жордановой нормальной форме матрицы A, E_s — $n\times n$ - матрица, имеющая единицы на местах, соответствующих диагонали ненулевого блока матрицы $\mathcal{J}_s$, и нули на остальных местах, неособенная матрица T приводит A к жордановой нормальной форме.

Замечание 1. Справедливо разложение

$$A^k = \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{s=0}^{m_i-1} C_k^s T^{-1} E_i (\mathcal{J}_i/\lambda_i)^s T\lambda_i^k + \sum_{j=\mu+1}^{\nu} T^{-1}\mathcal{J}_j^k T,$$

где C_k^s — число сочетаний из k элементов по s для $k\geqslant s$ и нуль, если $k< s$.

Конечная система $n\times n$-матриц $\{A_1, \ldots, A_n\}$ *согласована,* если существует неособенная матрица T, которая приводит к однотипной жордановой пормальпой форме одновременно каждую матрицу системы и их сумму. Из замечания 1 следует

Замечание 2. Существует согласованная система коммутативных μ полиномиальных матриц $A_1(k), \ldots, A_\mu(k)$ соответственно степеней $m_i-1,\ i=1, \ldots, \mu,$ и $(\nu-\mu)$ нильпотентных матриц $\mathcal{J}_{\mu+1}, \ldots, \mathcal{J}_\nu$ соответственно индексов нильпотентности m-1, $j=\mu+1, \ldots, \nu$, такая, что для любых целых положительных степеней матрицы A справедливо разложение

$$A^k = \sum_{s=1}^{\mu} A_s(k)\lambda_s^k + \sum_{s=\mu+1}^{\nu}\mathcal{J}_s^k,\quad k=1, \ldots$$

При этом матрицы системы удовлетворяют следующим условиям.

I. Попарные произведения различных матриц равны нулю.

II. Полиномиальные матрицы удовлетворяют соотношениям $A_s(k)A_s(l)=A_s(k+l),\quad s=1, \ldots, \mu,\ k,\ l=1, \ldots$

III. Матрицы $A_s(k)$ при любом целом положительном k имеют вид $A_s(k)=B_s+\mathcal{J}_s^k$, где B_s — постоянная матрица, $\mathcal{J}_s^k$ — нильпотентная матрица индекса нильпотентности m_s.

Согласованная система матриц $\{A_1, \ldots, A_s\}$ *максимальна,* если ни одну из матриц системы нельзя расчленить на слагаемые таким образом, что $A_k = A_k' + A_k''$, а система матриц $\{A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k', A_k'', A_{k+1}, \ldots A_s\}$ остается согласованной.

Определение 1 (матричного спектра в поле комплексных чисел). *Матричным спектром* называется согласованная, максимальная при k=1 система $n\times n$-полиномиальных матриц. $\Sigma = \{P_i(k),\ i=1, \ldots, \mu,\ \mathcal{J}_j,\ j=\mu+1, \ldots, \nu\},\ \nu\leqslant n$, где $P_i(k)$— действительные или комплексные (тогда найдется в системе и комплексно-сопряженная к $P_i(k)$) полиномиальные матрицы степеней m_i-1, $\mathcal{J}_j$ — действительные нильпотентные матрицы индексов

нильпотентности m_j, причем $\sum_{i=1}^{\mu} m_i + \sum_{j=\mu+1}^{\nu} m_j = n$.
Свойства матричного спектра вытекают из согласованности и максимальности системы матриц ∑, в частности, имеют место свойства, перечисленные в замечании 2.
Замечание 3. Пусть ∑ — матричный спектр и дана система действительных или комплексных (тогда найдется в системе и комплексно-сопряженное) не равных нулю чисел $\Lambda = \{\lambda_i,$ $i = 1, \ldots, \mu\}$.
Тогда матрица

$$A = \sum_{s=1}^{\mu} P_s(1)\lambda_s + \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathcal{I}_s, \quad (1)$$

где комплексно-сопряженные числа из системы Λ перемножаются соответственно с комплексно-сопряженными полиномиальными матрицами из системы ∑, имеет кортеж характеристических чисел $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, 0, \ldots, 0)$, причем каждому характеристическому числу соответствует элементарный делитель степени на единицу выше степени соответствующей полиномиальной матрицы для ненулевых характеристических чисел, равной индексу нильпотентности соответствующей нильпотентпой матрицы — для пулевых.
Замечание 3 дает способ строить матрицы с наперед заданным кортежом характеристических чисел и данным матричным спектром.
Понятие матричного спектра можно определить и в поло действительных чисел. Тогда естественно переформулируется и замечание 3.
Определение 2. ВА называется *однородным,* если все его матрицы переходов имеют один и тот же матричный спектр.
Аналогично определяются однородные линейный и целочисленно-линейнын автоматы.
Пусть матрицы *А и В* имеют один и тот же матричный спектр. Назовем *соответствующими* характеристические числа λ_s^A и λ_s^B матриц *А* и *В,* являющиеся в спектральном разложении (1) коэффициентами при одной и той же матрице спектра.
Замечание 4. При перемножении матриц, имеющих один и тот же матричный спектр, каждое характеристическое число λ_s^{AB} произведения матриц есть произведение соответствующих характеристических чисел сомножителей $\lambda_s^{AB} = \lambda_s^A \lambda_s^B$. Действительно,

из свойств матричного спектра и разложения (1) следует, что

$$AB = \sum_{s=1}^{\mu} P_s(2)\lambda_s^A\lambda_s^B + \sum_{s=\mu+1}^{\nu} \mathcal{I}_s^2.$$

Это обстоятельство сближает между собой теории однородных и автономных ВА.

Понятие матричного спектра и разложение (1) позволяют получить необходимые и достаточные условия стохастичности языков в одпобуквенном алфавите.

Теорема 1. *Для того чтобы язык S в однобуквенном алфавите был стохастическим, необходимо и достаточно, чтобы существовали*

1) *конечная система действительных чисел* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *и соответствующихим полиномов с действительными коэффициентами* $P_1(t), \ldots, P_k(t)$;

2) *конечная система действительных чисел* $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_{k+l}$ *и* $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_{k+l}$ *и соответствующих им пар полиномов с действительными коэффициентами* $P_{k+1}^{(1)}(t), P_{k+1}^{(2)}(t), \ldots, P_{k+l}^{(1)}(t), P_{k+l}^{(2)}(t)$;

3) *конечная система действительных чисел* $c_1, \ldots, c_N$ *таких, что*

$$p \in S \sim \sum_{s=1}^{k} P_s(|p|)\lambda_s^{|p|} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{l}\left[P_{k+s}^{(1)}(|p|)\cos|p|\varphi_{k+s} + P_{k+s}^{(2)}(|p|)\sin|p|\varphi_{k+s}\right]\rho_{k+s}^{|p|} + c_{|p|} > 0,$$

где $c_{|p|} = 0$, *если* $|p| > N$.

Доказательство. Если язык *S* — стохастический, то существует конечномерный автономный ЛА *L*, который представляет его нулевой точкой сечения, так что $S = T(L, 0)$.

Пусть матрица переходов ЛА *L* имеет матричный спектр $\Sigma =$~~ $= \{A_1(t), \ldots, A_s(t), \mathcal{I}_{s+1}, \ldots, \mathcal{I}_{s+m}\}$. Любая целая неотрицательная степень матрицы *L* представима в виде суммы

$$L^k = \sum_{i=1}^{s} A_i(k)\lambda_i^k + \sum_{i=s+1}^{m} \mathcal{I}_i^k,$$

где полиномиальные матрицы $A_i(k)$ и $A_j(k)$, имеющие комплексно-сопряжеппые множители λ_i^k и λ_j^k, являются комплексно-сопряженными. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$— действительные характеристические числа, а $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l}$ и $\bar\lambda_{k+1}, \ldots, \bar\lambda_{k+l}$ ...... — комплексно-сопряженные, так что

$$\lambda_{k+j} = \rho_{k+j}(\cos\varphi_{k+j} + i\sin\varphi_{k+j}),$$
$$\bar\lambda_{k+j} = \rho_{k+j}(\cos\varphi_{k+j} - i\sin\varphi_{k+j}), \quad j = 1, \ldots, l.$$

Положим, далее, $N = \max\limits_{i=s+1,\dots,s+m} (m_i - 1)$, так что существует j такое, что $\mathcal{I}_j^N \neq 0$. Однако для всех j $\mathcal{I}_j^{N+1} = 0$.

Пусть для начального вектора состояний **a** и решающего поствектора **n**

$$P_i(t) = \mathbf{a}A_i(t)\mathbf{n}, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$P_i^{(1)}(t) = 2\mathbf{a}A_i^{(1)}(t)\,\mathbf{n}, \quad P_i^{(2)}(t) = -2\mathbf{a}A_i^{(2)}(t)\,\mathbf{n}, \quad i = k+1, \dots, k+l,$$

где $A_i^{(j)}(t), \quad j = 1, 2$ — действительные полиномиальные матрицы такие, что

$$A_i(t) = A_i^{(1)}(t) + \sqrt{-1}\,A_i^{(2)}(t), \quad i = k+1, \dots, k+l,$$

и

$$\mathbf{a}\sum_{i=s+1}^{s+m} \mathcal{I}_i^t \mathbf{n} = c_t, \quad t = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\mathbf{a}A^t\mathbf{n} = \sum_{i=1}^{k} P_i(t)\,\lambda_i^t + \sum_{i=k+1}^{k+l} \left(P_i^{(1)}(t)\cos t\varphi_i + P_i^{(2)}(t)\sin t\varphi_i\right)\rho_i^t + c_t,$$

что доказывает необходимость условий теоремы.

Покажем достаточность. Пусть даны системы полиномов и коэффициентов, перечисленные в условиях теоремы. Покажем, что соответствующий автомат всегда можно построить. Докажем, прежде всего, следующую лемму.

Пусть $L - n \times n$-матрица, λ_i— ее действительные характеристические числа соответственно кратностей $m_i, \quad i = 1, \dots, k,$ $\lambda_{k+i}, \quad \overline{\lambda}_{k+i}$ — комплексно-сопряженные характеристические числа соответственно кратностей $m_{k+i}, \quad i = 1, \dots, l,$ остальные характеристические числа — нулевые. Пусть матрицы E_s и $\mathcal{I}_s$ определены для действительных характеристических чисел λ_s, как в замечании 1, а матрицы P_s и Q_s строятся для пар комплексно-сопряженных характеристических чисел $\rho_s(\cos\varphi_s \pm i\sin\varphi_s)$ по тому же закону, что и матрицы E_s и $\mathcal{I}_s$ соответственно, с тем отличием, что вместо элемента, равного единице, используется матрица второго порядка R_s вида

$$R_s = \begin{pmatrix} \cos\varphi_s & -\sin\varphi_s \\ \sin\varphi_s & \cos\varphi_s \end{pmatrix},$$

а вместо нулевого элемента — нулевая матрица второго порядка. Ненулевые блоки тогда имеют порядок, равный удвоенной кратности $2m_s$ одного из комплексно-сопряженных характеристических чисел, и занимают место жорданова блока, соответствующего этой паре характеристических чисел. Матрица $\mathcal{I}$ имеет вид

$\mathcal{I}_{k+l+1}$.

Лемма 1. *Для любой n×n-матрицы L с действительными элементами существует такая неособенная матрица T, что целые положительные степени матрицы* $\bar{L} = TLT^{-1}$ *представимы в виде суммы*

$$\bar{L}^t = \sum_{s=1}^{k} A_s(t)\lambda_s^t + \sum_{s=k+1}^{k+l} P_s(t)\rho_s^t + \mathcal{I}^t, \quad t = 1, \ldots, \qquad \textbf{(2)}$$

где $A_s(1) = E_s + \mathcal{I}_s$ *и* $P_s(1) = P_s + Q_s$.

Доказательство. Рассмотрим случай действительных характеристических чисел. Пусть матрица T_1 приводит матрицу L к жордановой нормальной форме $\tilde{L} = T_1 L T_1^{-1}$. Рассмотрим некоторую жорданову клетку $\tilde{L}' = (E + \mathcal{I}/\alpha)\alpha$ матрицы $\tilde{L}$, принадлежащую ненулевому характеристическому числу α кратности s. Неособенная матрица с действительными коэффициентами

$$T_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \alpha & & & \\ 0 & \alpha & \alpha^2 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha^{s-2} & \alpha^{s-1} \end{pmatrix}$$

выполняет преобразование

$$T_0 \tilde{L}' T_0^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & & & & \\ \alpha & \alpha & & & \\ 0 & \alpha & \alpha & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha & \alpha \end{pmatrix} = (E + \mathcal{I})\alpha.$$

Отсюда следует, что неособенная матрица T_2, составленная соответствующим, образом из диагональных блоков, имеющих вид неособенной матрицы T_0 для ненулевых действительных кратных характеристических чисел и вид матрицы E для нулевых кратных характеристических чисел, преобразует матрицу $\tilde{L}$ к виду $\bar{L}$, т. е. $T = T_2 T_1$.

Рассмотрим теперь случай комплексно-сопряженных характеристических чисел. Рассмотрим некоторую жорданову клетку

$$\tilde{L}' = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & & & & \\ & 1 & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & \lambda & & & & \\ & & & & 0 & \bar{\lambda} & & & \\ & & & & & 1 & \bar{\lambda} & & \\ & & & & & & 1 & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & & 1 & \bar{\lambda} \end{pmatrix},$$

соответствующую паре комплексно-сопряженных характеристических чисел λ и $\bar{\lambda}$ кратности s. Покажем, что существует неособенная матрица T_2 с действительными коэффициентами, которая приводит матрицу $\tilde{L}'$ к виду $\tilde{L}'' = T_2\tilde{L}'T_2^{-1}$, где

$$\tilde{L}'' = \begin{pmatrix} R & & & & \\ E & R & & & \\ & E & R & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & E & R \end{pmatrix}.$$

Здесь матрица R второго порядка имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

если $\lambda = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а E — единичная матрица второго порядка. Для этого надо показать, что матричное уравнение $\tilde{L}''T_2 = T_2\tilde{L}'$ имеет решение в поле действшельпых чисел, или что матрица $\tilde{L}''$ имеет те же характеристические числа и тех же кратностей, что и матрица $\tilde{L}'$. Из соотношения $|\tilde{L}'' - \lambda E| = |R - \lambda E|^s$ видно, что матрица $\tilde{L}''$ имеет s пар комплексно-сопряженных характеристических чисел λ, $\bar{\lambda}$. Будем искать наибольший общий делитель миноров (2s —1)-го порядка полиномиальной матрицы

$$\Delta(\lambda) = (\tilde{L}'' - \lambda E) = \begin{pmatrix} R-\lambda E & & & & \\ E & R-\lambda E & & & \\ & E & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & E & R-\lambda E \end{pmatrix}.$$

Если ввести обозначение $\Delta_1(2s-1)$ для минора, полученного из $\Delta(\lambda)$ вычеркиванием первой строки и последнего столбца, и обозначение $\Delta_2(2s-1)$ для минора, полученного из $\Delta(\lambda)$ вычеркиванием второй строки и последнего столбца, то верны рекуррентные формулы

$$\Delta_1(2k-1) = -(\cos\varphi - \lambda)\Delta_1(2k-3) - \sin\varphi\Delta_2(2k-3),$$
$$\Delta_2(2k-1) = -\sin\varphi\Delta_1(2k-3) - (\cos\varphi - \lambda)\Delta_2(2k-3),$$
$$k = s,\ s-1,\ \ldots,\ 2.$$

Обозначим через $P_1(\lambda) = (\cos\varphi - \lambda)|R - \lambda E|^{s-1}$ и $P_2(\lambda) = = \sin\varphi|R - \lambda E|^{s-1}$ значения еще двух миноров (2s—1)-го порядка, которые получаются вдоль главной диагонали. Поскольку $\Delta_1(3) = -2\sin\varphi(\cos\varphi - \lambda)$ и $\Delta_2(3) = \sin^2\varphi - (\cos\varphi - \lambda)^2$, то $\Delta_1(3)$ и $\Delta_2(3)$ не имеют общих делителей, кроме единицы, с полиномами $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$, следовательно, в силу рекуррентных соотношений, полиномы $\Delta_1(2s-1)$, $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ имеют наибольший общий делитель 1. Это означает, что матрица $\tilde{L}''$ имеет единственный нетривиальный инвариантный многочлен, равный характеристическому многочлену матрицы, и характеристические числа λ и $\bar{\lambda}$ имеют кратность *s*.

Дальнейшее доказательство следует той же схеме, что и для действительных характеристических чисел. Неособенная матрица с действительными элементами

$$T^0 = \begin{pmatrix} E & & & & & & & \\ E & R & & & & & & \\ & R & & & R^2 & & & \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & R^{s-2} & & & & R^{s-1} \end{pmatrix}$$

приводит матрицу $\tilde{L}''$ к виду

$$T_0\tilde{L}''T_0^{-1} = \begin{pmatrix} R & & & & \\ R & R & & & \\ & R & R & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & R & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & & & & \\ E & E & & & \\ & E & E & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & E & E \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} R & & & & \\ & R & & & \\ & & R & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица T_s, составленная соответствующим образом из диагональных блоков, имеющих вид неособенной матрицы T_0 для ненулевых действительных кратных характеристических чисел, вид матрицы *E* для нулевых кратных характеристических чисел и вид неособенной матрицы $T_0\bar{T}_2$ для пар комплексно-сопряженных кратных характеристических чисел, преобразует матрицу $\tilde{L}$ к виду $\bar{L}$, т. е. в общем случае $T = T_3T_1$.

Продолжим доказательство теоремы. Будем строить матрицу *L*, предполагая, что она не имеет простых нулевых характеристических чисел и имеет единственное кратное нулевое характеристическое число, если $c_N \neq 0$. В соответствии с леммой 1 без ограничения общности можно полагать, что степени матрицы *L* представимы в виде разложения (2). Докажем еще леммы.

Лемма 2. *Пусть* C_n^k — *число сочетаний из n элементов по k, если* $n \geqslant k$; $C_n^0 = 1$ *и* $C_n^k = 0$, *если k> n. Тогда*

$$\Delta(m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ C_1^1 & C_2^1 & \ldots & C_{m-1}^1 & C_m^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1^{m-1} & C_2^{m-1} & \ldots & C_{m-1}^{m-1} & C_m^{m-1} \end{vmatrix} = 1.$$

Доказательство. Применим известную формулу $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, которая верна и при наших дополнительных предположениях. Тогда

$$\Delta(m)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_1^1 & C_2^1-C_1^1 & C_3^1-C_2^1 & \dots & C_m^1-C_{m-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{m-1} & C_2^{m-1}-C_1^{m-1} & C_3^{m-1}-C_2^{m-1} & \dots & C_m^{m-1}-C_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} C_1^0 & C_2^0 & \dots & C_{m-1}^0 \\ C_1^1 & C_2^1 & \dots & C_{m-1}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1^{m-2} & C_2^{m-2} & \dots & C_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix}=\Delta(m-1)=\dots=\Delta(1)=1.$$

Лемма 3. *Если*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad A^k=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_k^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_k^2 & C_k^1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_k^{m-1} & C_k^{m-2} & \dots & C_k^1 & 1 \end{pmatrix},$$

где предположения относительно C_n^k *те же, что в лемме* 2.

Доказательство. Для *k = 1* лемма очевидна. Если она верна для *k,* то для *k* + 1 получим

$$A^{k+1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_k^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ C_k^2 & C_k^1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_k^{m-1} & C_k^{m-2} & \dots & C_k^1 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_{k+1}^1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ C_{k+1}^2 & C_{k+1}^1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{k+1}^{m-1} & C_{k+1}^{m-2} & \dots & C_{k+1}^1 & 1 \end{pmatrix}$$

в силу соотношения $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$

Лемма 4. *В условиях леммы* 3 *система уравнений*

$$\mathbf{a}A^k\mathbf{n}=b_k, \quad k=1, \dots, m, \quad (3)$$

всегда имеет решение в виде вектор-строки **a** *и вектор-столбца* ***n*** *при произвольно заданных действительных числах* b_k.

Доказательство. В самом деле выберем в качестве вектор-столбца ***n*** вектор-столбец

$$\mathbf{n}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно вектор-строки **a** при переменном $k=1, \dots, m$ получаем систему линейных алгебраических уравнений, определитель которой равен $\Delta(m) = 1$. Следовательно, решение для **a** существует, и оно ненулевое, если не является нулевым вектор $(b_1, \ldots, b_m)$.

Лемма 5. *Пусть* $P(k) = \sum_{s=0}^{m-1} a_s k^s$ *— полином степени* $m - 1$ *с произвольными действительными коэффициентами. Существуют такие действительные вектор-строка* **a**, *вектор-столбец* ***n*** *и* $m \times m$*-матрица L, степени которой представимы в виде* (2), *с единственным характеристическим числом* 1 *кратности m, что будут иметь место соотношения*

$$\mathbf{a}A_s\mathbf{n} = a_s, \quad s = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где

$$L^k = \sum_{s=0}^{m-1} A_s k^s, \; k = 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Пусть значения полинома *P(k)* есть $P(k) = b_k$, $k = 1, \ldots, m$. По лемме 4 мы сможем построить **a** и **n** такие, что будут иметь место соотношения (3). Рассмотрим теперь разложение

$$A^k = \sum_{s=0}^{m-1} A_s k^s, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Умножая это равенство на вектор-строку **a** слева и на вектор-столбец **n** справа, получим

$$\sum_{s=0}^{m-1} \mathbf{a}A_s\mathbf{n}k^s = b_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

однако числа b_k являются по условию значениями полинома *P(k)*, поэтому

$$\sum_{s=0}^{m-1} a_s k^s = b_k, \; k = 1, \ldots, m.$$

Определитель системы линейных уравнений (4) не равен нулю, поэтому она имеет единственное решение.

Следовательно, $a_s = \mathbf{a}A_s\mathbf{n}, \; s = 0, 1, \ldots, m-1$.

Рассмотрим случай комплексно-сопряженных корней.

Лемма 6. *Если*

$$K_R = \begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ R & R & \dots & 0 \\ 0 & R & R \ \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix}$$

(всего т диагональных блоков R), где R — произвольная квадратная матрица конечного порядка, то

$$K_R^t = \begin{pmatrix} R^t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C_t^1 R^t & R^t & 0 & \dots & 0 \\ C_t^2 R^t & C_t^1 R^t & R^t & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_t^{m-1} R^t & C_t^{m-2} R^t & & C_t^1 R^t & R^t \end{pmatrix}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 7. *Пусть* $2m \times 2m$*-матрица* K_R *определена, как в лемме* 6, *где матрица R имеет вид*

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда система уравнений

$$\mathbf{a} K_R^s \mathbf{n} = a_s \cos(s\varphi) + b_s \sin(s\varphi), \quad s = 1, \dots, m, \quad (5)$$

всегда имеет решение относительно вектор-строки **a** *и вектор-столбца* ***n*** *для произвольной заданной системы действительных чисел* $a_s,\ b_s,\ s = 1, \dots, m.$

Доказательство. Будем искать такое решение, чтобы вектор-столбец ***n*** имел вид

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_m \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathbf{n}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m,$$

а вектор-строки имели вид $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$, где $\mathbf{a}_i = \left(a_i^{(1)}, a_i^{(2)}\right).$
С учетом леммы 6 и вида вектор-столбца ***n***, система (5) приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i C_s^{i-1} R^s \mathbf{n}_i = a_s \cos s\varphi + b_s \sin s\varphi, \quad s = 1, \dots, m,$$

или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^{(1)} C_s^{i-1} \cos s\varphi + \sum_{i=1}^{m} a_i^{(2)} C_s^{i-1} \sin s\varphi = a_s \cos s\varphi + b_s \sin s\varphi,$$
$$s = 1, \dots, m,$$

откуда видно, что $a_i^{(1)}$ и $a_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, m,$ можно получить как решение системы линейных алгебраических уравнений с одними и теми же определителем $\Delta(m) = 1 \neq 0$ при правых частях и определенными коэффициентами a_s и b_s соответственно.

Лемма 8. *Пусть*

$$P_1(t)\cos t\varphi + P_2(t)\sin t\varphi = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i \cos t\varphi + \sum_{i=0}^{m-1} b_i t^i \sin t\varphi$$

— полиномиально-тригонометрическая функция степени (m— 1) *с произвольными действительными коэффициентами. Существуют действительные вектор-строка* **a**, *вектор-столбец* ***n*** *и* $2m \times 2m$*-матрица L, степени которой представимы в виде разложения* (2), с *единственной парой* $\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi$ *комплексно-сопряженных характеристических чисел кратности т, такие, что будут иметь место соотношения*

$$L^t = \sum_{i=0}^{m-1} K_i^{(1)} t^i \cos t\varphi + \sum_{i=0}^{m-1} K_i^{(2)} t^i \sin t\varphi,$$

$$\mathbf{a}K_i^{(1)}\mathbf{n} = a_i, \quad \mathbf{a}K_i^{(2)}\mathbf{n} = b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 5. В качестве матрицы *L* берем $2m \times 2m$-матрицу

$$L = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ R & R & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R & R & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ E & E & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E & E & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & R & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & R\ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & R \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В качестве вектор-столбца ***n*** возьмем вектор

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},$$

и будем искать вектор-строку $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ так же, как при доказательстве леммы 4.

Для завершения подготовки доказательства теоремы нам осталось рассмотреть случай нильпотентной матрицы.

Лемма 9. *Пусть имеется система действительных чисел* $c_1, \ldots, c_N$ $(c_N \neq 0)$. *Существуют нильпотентная* $(N+1)\times(N+1)$ *матрица* $\mathcal{I}$ *индекса нильпотентности* (N+1), *определенная, как в лемме* 1, *вектор-строка* **a** *и вектор-столбец* ***n*** *такие, что выполняется система равенств*

$$\mathbf{a}\mathcal{I}^k\mathbf{n} = c_k, \quad k = 1, \ldots, N,$$

$$\mathbf{a}\mathcal{I}^k\mathbf{n} = 0, \quad k > N.$$

Доказательство. Условиям леммы удовлетворяют вектор-строка $\mathbf{a} = (0, c_1, \ldots, c_N)$ и вектор-столбец

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь доказательство достаточности условий теоремы 2 проводится элементарно. Действительно, матрицы $A_1, \ldots, A_k,$ $K_{R_1}, \ldots, K_{R_l}, \mathcal{Y}$ совместно с вектор-строками $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_{k+l},$ $\mathbf{a}_{k+l+1}$ и вектор столбцами $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_k, \mathbf{n}_{k+1}, \ldots, \mathbf{n}_{k+l}, \mathbf{n}_{k+l+1}$ определяют одну из полиномиальных, полиномиально-тригонометрических сумм или нильпотентный член в разложении характеристической словарной функции, а конструктивное доказательство существования соответствующих матриц и векторов мы получили в леммах 1—9. В этом случае ЛА с матрицей переходов

$$L = \sum_{s=1}^{k} A'_s \lambda_s + \sum_{s=1}^{l} K'_{R_s} \rho_{k+s} + \mathcal{Y}'_{k+l+1},$$

где каждая из штрихованных матриц имеет порядок, равный сумме порядков матриц $A_1, \ldots, A_k, K_{R_1}, \ldots, K_{R_l}, \mathcal{Y}$, и имеет единственный диагональный ненулевой блок, равный одной из этих матриц, так, что в итоге мы получаем матричный спектр, определяет характеристическую словарную функцию $\chi(p)$ с начальным вектором состояний $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k, \ldots, \mathbf{a}_{k+l+1})$ и решающим вектором $\mathbf{n}^T = (\mathbf{n}_1^T, \ldots, \mathbf{n}_k^T, \mathbf{n}_{k+1}^T, \ldots, \mathbf{n}_{k+l}^T, \mathbf{n}_{k+l+1}^T)$.

Следствие 1. *Любой стохастический язык в однобуквенном алфавите может быть представлен в конечномерном* ЛА, *матрица переходов которого имеет только различные по значениям характеристические числа и не имеет простых (т. е. соответствующих линейным элементарным делителям) нулевых характеристических чисел.*

Заметим, что метод построения континуального семейства не-стохастических языков, который мы рассмотрели ранее, применим и к языкам в однобуквенном алфавите. Таким образом, семейство нестохастическпх языков в однобуквенном алфавите континуально.

Перейдем к изучению представимости языков в конечномерных однородных ЛА. Для краткости будем называть языки, представимые в таких автоматах, *однородными стохастическими языками.* Основное свойство однородных ЛА, которое позволяет без затруднений перенести критерий стохастичности языков в одпобуквенном алфавите на однородные языки, отмечено в замечании 4.

Введем следующие обозначения: если $A(x_1), \ldots, A(x_m)$— система

$n \times n$-матриц, принадлежащих одному и тому же матричному спектру, λ_k^x — k-е характеристическое число матрицы $A(x)$, $k = 1, \ldots, n$, $p = x_1 \ldots x_s$; — слово, то положим $\lambda_k^p = \lambda_k^{x_1} \ldots \lambda_k^{x_s}$. Из замечания 4 вытекает, что если матрицы $A(x_1), \ldots, A(x_m)$ принадлежат одному и тому же матричному спектру, то для любого слова p λ_k^p есть k-е характеристическое число матрицы $A(p)$.

Аналогично в случае комплексно-сопряженных характеристических чисел будем полагать, что, если $\lambda_k^x = \rho_k^x(\cos \varphi_k^x \pm i \sin \varphi_k^x)$, то

$$\lambda_k^p = \rho_k^p(\cos \varphi_k^p \pm i \sin \varphi_k^p),$$

где $\rho_k^p = \rho_k^{x_1} \ldots \rho_k^{x_s}$ и $\varphi_k^p = \varphi_k^{x_1} + \ldots + \varphi_k^{x_s}$.

Теперь может быть сформулирована

Теорема 2. *Для того чтобы язык S был однородным стохастическим языком, необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие конечные системы:*

1) *система действительных чисел* $\lambda_1^x, \ldots, \lambda_k^x$ *и соответствующихим полиномов с действительными коэффициентами* $P_1(t), \ldots$ $\ldots, P_k(t)$;

2) *система действительных чисел* $\rho_1^x, \ldots, \rho_l^x, \varphi_1^x, \ldots, \varphi_l^x$ *и соответствующих им пар полиномов с действительными коэффициентами* $P_{k+1}^{(1)}(t), P_{k+1}^{(2)}(t), \ldots, P_{k+l}^{(1)}(t), P_{k+l}^{(2)}(t)$;

3) *система действительных чисел* $c_1, \ldots, c_N$ *таких,, что*

$$p \in S \sim \sum_{s=1}^{k} P_s(|p|)\lambda_s^p +$$
$$+ \sum_{s=1}^{l} [P_{k+s}^{(1)}(|p|)\cos \varphi_{k+s}^p + P_{k+s}^{(2)}(|p|)\sin \varphi_{k+s}^p]\rho_{k+s}^p + c_{|p|} > 0,$$

причем если $|p| > N$, *то* $c_{|p|} = 0$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, поскольку оно связано лишь с манипулированием свойствами матричного спектра, который будет одним и тем же для всех матриц переходов однородного ЛА. Различие будет состоять в том, что вместо степеней характеристических чисел λ_k^t для степени A' матрицы A придется рассматривать произведения характеристических чисел вида $\lambda_k^p, \varphi_k^p, \rho_k^p$ для произведения матриц вида $A(p)$.

В поле комплексных чисел теорема 2 допускает следующую более простую формулировку.

Теорема 3. *Для того чтобы язык S был однородным стохастическим, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная система комплексных чисел* $\lambda_1^x, \ldots \lambda_k^x$ *и соответствующих им полиномов с* *комплексными коэффициентами* $P_1(t), \dots, P_k(t)$, *а также система действительных чисел* $c_1, \dots, c_N$ *таких, что*

1) *сумма* $\sum_{s=1}^{k} P_s(|p|)\lambda_s^p$ *—действительное число для любого слова p из свободной полугруппы X*;*

2) $p \in S \sim \sum_{s=1}^{k} P_s(|p|)\lambda_s^p + c_{|p|} > 0,$ *причем если* $|p| > N$, *то*

$c_{|p|} = 0.$

Доказательство следует схеме доказательства теоремы 1, с замечаниями относительно доказательства теоремы 2, но более просто, так как отпадает необходимость интерпретировать операции над комплексными числами в поле действительных чисел.

Следствие 2. *Любой однородный стохастический язык S является коммутативным, т. е.*

$(p_1)(p_2)[p_1p_2 \in X^* \to p_1p_2 \in S \sim p_2p_1 \in S].$

В следующей теореме мы характеризуем разнообразие возможностей конечного автономного ВА при изменении точки сечения. Эту теорему можно было бы доказать, используя уже полученную теорему 1. Мы применим другой метод, который оонован на приложении к автономным ВА теории однородных конечных цепей Маркова.

Теорема 4. *Для любого конечного автономного ВА A существует не более конечного числа r(A) действительных чисел λ таких, что язык* $T(A, \lambda)$, *представленный в этом автомате точкой сечения λ, является нерегулярным.*

Число r(A) не превышает наименьшего общего кратного чисел циклических подклассов в эргодических классах множества состояний автомата A. В частности, если A — регулярный ВА, *то таких действительных чисел λ не более чем одно.*

Доказательство. Предположим, что *A* — регулярный ВА. Тогда последовательность степеней матрицы *A* имеет предел $\lim_{k\to\infty} A^k = B = \mathbf{ea},$ где стохастический вектор **a** определяет стационарное распределение вероятностей соответствующей марковской цепи. Положим $\lambda_0 = \mathbf{a}\mathbf{n}_F.$ Если ε — некоторое положительное число, то начиная со слов некоторой длины $k = k(\varepsilon)$, мы получим $\chi_A(p) \leqslant \lambda_0 + \varepsilon = \lambda,$ что означает конечность языка $T(A, \lambda).$ Аналогично, полагая $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ для некоторого ε, найдем такое $k(\varepsilon),$ что

$$\chi_A(p) \geqslant \lambda_0 - \varepsilon/2 > \lambda$$

для всех слов длины $|p| \geqslant k(\varepsilon).$ Таким образом, язык $T(A, \lambda)$

имеет конечное дополнение. Для регулярного автомата теорема доказана.

Предположим, что матрица A определяет циклическую марковскую цепь. Обозначим через $C_0, C_1, \ldots, C_{d-1}$ $(d > 1)$ циклические классы множества состояний $\mathfrak{A}$, перенумерованные в порядке перехода состояний по классам. Зафиксируем начальное состояние a_0, принадлежащее классу C_0. Матрицу A^d можно рассматривать как переходную матрицу марковской цепи с d отдельными эргодическими множествами, которые не являются циклическими. Поэтому существует предел $\lim\limits_{h\to\infty} A^{hd} = B$. Матрица B такова, что все элементы ее, не определяемые последовательными состояниями, принадлежащими одному циклическому классу, равны нулю, а остальные определяют диагональные блоки, соответствующие циклическим классам, и являются пределом регулярной подцепи, соответствующей каждому классу. Следовательно, для каждого слова p $(|p| = t = 0, 1, \ldots, d-1)$ степени A^{hd+t} имеют пределом соответствующую матрицу BA'. Обозначим через a_{ij}^t (i, j)-й элемент матрицы BA'. Полагая, что $F = \bigcup\limits_{t=0}^{d-1} F_t$, $F_t = F \cap C_i$ $(i = 0, 1, \ldots, d-1)$, где некоторые из множеств Fi могут быть и пустыми, положим

$$\lambda_t = \sum_{a_j \in F_t} a_j^t, \quad t = 0, 1, \ldots, d-1. \quad (6)$$

Язык $T(A, F_t, \lambda)$ $(t = 0, 1, \ldots, d-1)$ содержит только слова вида $|p| = kd + t$. Из соображений, аналогичных примененным в первой части доказательства, ясно, что если $\lambda \neq \lambda_t$, то существует такое k_0, что язык $T(A, F_t, \lambda)$ либо пуст, либо содержит все слова вида $|p| = kd + t$, где $k \geqslant k_0$. В таком случае, если $\lambda \neq \lambda_t$, то язык $T(A, F_t, \lambda)$ либо конечен, либо имеет вид $T = S \cup x^{t+k_0d}\{x^d\}^*$, где язык S конечен. Ясно, что

$$T(A, F, \lambda) = \bigcup_{t=0}^{d-1} T(A, F_t, \lambda).$$

Поэтому если $\lambda \neq \lambda_t$ для $t = 0, 1, \ldots, d-1$, то язык T регулярен. Наконец, рассмотрим общий случай, когда автомат A может иметь несущественные состояния и несколько эргодических классов. В этом случае можно полагать, что автономный ВА имеет произвольный начальный вектор состояний. За счет увеличения числа состояний автомата на единицу мы сведем задачу к представимости языка автоматом с фиксированным начальным состоянием. Рассмотрим несколько случаев.

Пусть множество F целиком принадлежит одному эргодическому классу R с d циклическими подклассами $C_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_{d-1}$ $(d \geqslant 1)$ такими, что выполняется соотношение (6).

Определим числа λ_t аналогично тому, как это сделано в (6), с той разницей, что теперь коэффициенты a_{ij} относятся к предельной матрице эргодического автомага A_R, полученного из автомата A при рассмотрении только одного эргодического. класса R. Тогда множество чисел λ_t не зависит от начального распределения состояний автомата A_R.

Для некоторого состояния $a \in R$ обозначим через $p(a,\ k)$ вероятность перехода автомата A в состояние a для входного слова x^k при первом попадании в состояние из множества R. Тогда сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p(a, k)$ сходится. Пусть $0 \leqslant t \leqslant d-1$. Обозначим

$$p_1(a, t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(a, kd+t),$$

где $p_1(a,\ t)$ есть вероятность первого попадания автомата A в состояние a для входного слова типа $x^{kd+t},\ k = 1,\ \ldots,$ без попадания в состояния множества R ранее.

Будем полагать, что $t(\bar{a}) = j$, если $a \in C_j$. Введем числа

$$\zeta_v = \sum_{w=0}^{d-1} \sum_a p_1(a, \operatorname{Re}_d(v + t(a) - w))\, \lambda_w, \quad v = 0, 1, \ldots d-1,$$

где a пробегает все множество состояний R, а $\operatorname{Re}_d(z)$ есть наименьший неотрицательный остаток от деления z на d. Если $\lambda \neq \zeta_v$, то язык $T(A,\ F,\ \lambda) \cap x^v\{x^d\}^*$ либо является конечным, либо содержит все слова вида x^{kd+v}, где $k \geqslant k'$. Отсюда следует, что если $\lambda \neq \zeta_v$, то язык $T(A,\ F,\ \lambda)$ регулярен. Доказательство для случая $F \subset R$ завершено.

Допустим, что

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F^{(i)}, \quad F^{(i)} \subset R^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где каждое множество $R^{(i)}$ есть отдельное эргодическое множество с $d(i)$ циклическими классами. Положим, что D — наименьшее общее кратное чисел $d(1),\ d(2),\ \ldots,\ d(h)$. Мы уже показали, что для каждого номера $i = 1,\ \ldots,\ h$ существует $d(i)$ чисел $\zeta_v^{(i)}$ $(v = 0,\ 1,\ \ldots,\ d(i)-1)$ таких, что если $\lambda \neq \zeta_v^{(i)}$, то язык $T(A,\ F_i,\ \lambda) \cap x^v\{x^{d(i)}\}^*$ либо является конечным, либо содержит все слова вида $x^{kd(i)+v}$ для $k \geqslant k''$. Отсюда вытекает, что если

$$\lambda \neq \omega_v = \sum_i \zeta^{(i)}_{\operatorname{Re}_{d(i)}(v)}, \quad v = 0, 1, \ldots, D-1, \quad \textbf{(7)}$$

то язык

$$T(A,\ F,\ \lambda)\cap x^{v}(x^{D})^{*}\quad (8)$$

либо является конечным, либо содержит все слова вида x^{kD+v} для достаточно больших *к*. Наш вывод относительно языка (8) остается в силе для точек сечения вида (7) и в том случае, когда множество *F* содержит некоторые несущественные состояния.

Следствие 3. *Множество языков, представимых в фиксированном автономном конечном ВА, не более чем счетно.*

Для каждого фиксированного автономпого конечного ВА *А* существует такое число $\bar{k}(A)$, что регулярный язык для $\{x^{k}\}^{*}$ любого целого $k\geqslant \bar{k}(A)$ непредставим в нем. Поэтому получаем следующее следствие для произвольного конечного ВА.

Следствие 4. *Для каждого конечного ВА существуют регулярные языки, непредставимые в нем ни при каких значениях начального вектора состояний, решающего вектора и точки сечения* λ.

Следствие 4 утверждает, что не существует «универсальных» конечных ВА, представляющих все регулярные языки при различных значениях изменяемых параметров. Но известно, что существуют бесконечные «универсальные» автоматы, например, свободный автомат без выхода, причем этот ДА представляет также одновременно и все стохастические языки, поскольку гомоморфно отображается на любой конечный ВА.

Ранее был рассмотрен пример приложения стохастических языков к описанию семейств обучающих последовательностей в вероятностной линейной модели обучаемости. Пусть $\mathcal{Y}=\{1,\ldots,\ k\},\ \mu=\mu(e)$ — стохастический вектор, определяющий вероятностное распределение, подлежащее обучению, предикат *F* определяет множество $F=\{i_1,\ \ldots,\ i_l\},\ F\subset\mathcal{Y},$ а полугруппа обучающих операторов описывается системой образующих — стохастических матриц $\{A(x),\ x\in X\},$ принадлежащих одному и тому же действительному матричному спектру простой структуры $(A_1,\ \ldots,\ A_k).$ Для любого слова $p=x_1,\ \ldots,\ x_r$ получим

$$A(p)=\sum_{s=1}^{k}A_s\lambda_s^{(p)},$$

где положено $\lambda_s^{(p)}=\lambda_s^{x_1}\ldots\lambda_s^{x_r}.$ Введем обозначения $a_s=\mu A_s\mathbf{n}_F,$ $s=1,\ \ldots,\ k.$ Тогда множество обучающих последовательностей операторов относительно константы λ характеризуется системой неравенств

$$\sum_{s=1}^{k}a_s\lambda_s^{(p)}>\lambda.$$

Рассмотрим пример задачи анализа модели обучаемости, когда система обучающих операторов определяет однородный ВА.

Пример 1. В классе $\Sigma(A_1, \ldots, A_k)$ стохастических матриц, принадлежащих одному и тому же стохастическому матричному спектру простой структуры, указать такую матрицу, которая обучает стохастический вектор **μ** предикату *F* относительно константы λ не более чем за *r* шагов.

Множество кортежей характеристических чисел матриц из ∑ определяется как выпуклая линейная комбинация системы базисных кортежей $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_i, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = 1.$$

Искомая стохастическая матрица вполне определяется заданием своего кортежа характеристических чисел, поэтому задача сводится к решению системы неравенств вида

$$\sum_{s=1}^{k} a_s \lambda_s^t > \lambda, \quad 0 \leqslant t \leqslant r,$$

или вида

$$\sum_{s=1}^{k} a_s \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \lambda_{i,s} \right)^t > \lambda, \quad 0 \leqslant t \leqslant r,$$

относительно системы коэффициентов α_i $(i = 1, \ldots, N)$. Она может быть решена как задача на нахождение экстремума (максимума) выражения $y = a_1 + \sum_{s=2}^{k} a_s \lambda_s^t$ при заданной системе *N+1* ограничений вида

$$\sum_{s=1}^{k} a_{ij}^s \lambda_s \geqslant 0, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad \lambda_1 = 1.$$

Каждое линейное неравенство здесь определено одной из гиперплоскостей, определяющих границу множества Ξ кортежей характеристических чисел матриц из ∑.

Нас не будут интересовать значения $y<a_1$, так как если $a_1 > \lambda$, то в качестве решения можно рассматривать кортеж (1, 0, ..., 0), а в качестве обучающей матрицы — матрицу A_1. Обучение в собственном смысле тогда не состоится, так как матрица A_1 любое распределение вероятностей преобразует в одно в то же распределение вероятностей, однако оно будет удовлетворять критерию обученпости.

Покажем, что для $y \geqslant a_1$ экстремум достигается на границе области $\Xi(A_1, \ldots, A_k)$. Действительно, точка с координатами (1, 0, ..., 0) входит в Ξ. Ξ является выпуклой областью, поэтому -

наряду с любой точкой $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ границы в область Ξ входят точки, расположенные на луче, соединяющем эту точку с точкой $(1, 0, \ldots, 0)$; т. е. точки вида $(1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Пусть значение функции y на границе равно c:

$$\sum_{s=2}^{k} a_s\lambda_s^t = c - a_1, \quad c > a_1 \geqslant 0.$$

Тогда в любой точке $(1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k)$ получим

$$y = a_1 + \alpha^t \sum_{s=2}^{k} a_s\lambda_s^t = a_1 + \alpha^t (c - a_1) \leqslant c.$$

Отсюда следует, что в областях положительной разности $c - a_1$ для любой точки на луче найдется точка на границе, в которой y принимает не меньшее значение. Пусть $c = a_1$. Тогда уравнение

$$\sum_{s=2}^{k} a_s\lambda_s^t = 0$$

определяет гиперконус с вершиной в начале координат, инвариантный относительно преобразования подобия $\lambda_s' = \alpha\lambda_s (s = 2, \ldots, k)$. Этот гиперконус будет пересекать границу области Ξ, и, следовательно, на ней имеются точки, в которых y принимает значение a_1. Итак, процесс решения сводится к нахождению экстремума y на границе области Ξ.

5. Алгебраические вопросы теории линейных автоматов

В этом разделе мы рассматриваем некоторые алгебраические вопросы, относящиеся к линейным автомамам и связанным с ними функциям на строках.

5.1 Алгебраические свойства множества функций на строках

Пусть задано конечное множество X.
Ранее было введено понятие функции на строках из X^*, и на множестве $\mathbf{R}^{X^*}$ таких функций были определены алгебраические операции суммы, разности, и умножения на числа из $\mathbf{R}$.
Определим другие алгебраические операции на $\mathbf{R}^{X^*}$

• Для функций $f_1, f_2 \in \mathbf{R}^{X^*}$ их **произведение** $f_1 f_2$ и **свёртка** $f_1 \circ f_2$ определяются следующим образом:

$$\forall u \in X^* \begin{cases} (f_1 f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(u) f_2(u), \\ (f_1 \circ f_2)(u) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{u_1 u_2 = u} f_1(u_1) f_2(u_2). \end{cases} \quad (5.1)$$

• Для каждой функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ **инвертирование** $\tilde{f}$ определяется следующим образом: $\forall u \in X^* \quad \tilde{f}(u) \stackrel{\text{def}}{=} f(\tilde{u})$.

Для каждого подмножества $S \subseteq X^*$ мы будем обозначать записью χ_S характеристическую функцию этого подмножества, т.е. функцию из $\mathbf{R}^{X^*}$, которая отображает каждый элемент из S в 1, и все остальные элементы из S - в 0. Если множество S одноэлементно и имеет вид {s}, то мы будем обозначать функцию $\chi_{\{s\}}$ более короткой записью χ_s.

Теорема 1.

Множество $\mathbf{R}^{X^*}$ является кольцом, в котором сумма элементов определяется первым соотношением в (1.4) а в качестве умножения выступает операция свёртки. Функция χ_ε является единицей этого кольца.

Доказательство.

Ассоциативность свёртки следует из того, что $\forall f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{R}^{X^*}$ и $\forall u \in X^*$ значения $((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(u)$ и $(f_1 \circ (f_2 \circ f_3))(u)$ равны значению выражения

$$\sum_{u_1 u_2 u_3 = u} f_1(u_1) f_2(u_2) f_3(u_3).$$

и, следовательно, функции $(f_1 \circ f_2) \circ f_3$ и $f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$ совпадают. Остальные свойства кольца для $\mathbf{R}^{X^*}$ устанавливаются непосредственной проверкой.

Теорема 2.

Если $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ и $f(\varepsilon) \neq 0$, то существует единственная функция $g \in \mathbf{R}^{X^*}$, удовлетворяющая условию

$$f \circ g = g \circ f = \chi_\varepsilon. \quad \textbf{(5.2)}$$

Доказательство.

(5.2) эквивалентно конъюнкции следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&f(\varepsilon)g(\varepsilon) = 1,\\
&\forall x \in X \quad f(\varepsilon)g(x) + f(x)g(\varepsilon) = 0,\\
&\forall x_1, x_2 \in X \quad f(\varepsilon)g(x_1x_2) + f(x_1)g(x_2) +\\
&\qquad\qquad + f(x_1x_2)g(\varepsilon) = 0,
\end{aligned} \qquad (5.3)$$

и т.д.

Определим функцию $g \in \mathbf{R}^{X^*}$ индуктивно следующим образом:

$$\begin{aligned}
&g(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (f(\varepsilon))^{-1},\\
&\forall x \in X \quad g(x) \stackrel{\text{def}}{=} -(f(\varepsilon))^{-1} f(x) g(\varepsilon),\\
&\forall x_1, x_2 \in X \quad g(x_1x_2) \stackrel{\text{def}}{=} -(f(\varepsilon))^{-1}(f(x_1)g(x_2) + f(x_1x_2)g(\varepsilon)),
\end{aligned}$$

и т.д.

Нетрудно видеть, что определённая таким образом функция g является единственной функцией, удовлетворяющей соотношениям (5.3).

Мы будем использовать следующие обозначения.

- Функцию g, удовлетворяющую условию (5.2), мы будем обозначать записью f^{-1}.
- Если $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ и $k \geq 1$, то запись $f^{\circ k}$ обозначает

— функцию f, если $k = 1$, и

— функцию $f^{\circ(k-1)} \circ f$, если $k > 1$.

Лемма.

Если $f(\varepsilon) = 0$ и $u \in X^{<k}$, то $f^{\circ k}(u) = 0$.

Доказательство.

Нетрудно видеть, что $f^{\circ k}(u)$ равно сумме

$$\sum_{u_1 \dots u_k = u} f(u_1) \dots f(u_k). \qquad \textbf{(5.4)}$$

Каждое слагаемое в (5.4) равно 0, т.к. если $u_1 \dots u_k = u$ и $|u| < k$, то $\exists\, i \in \{1, \dots, k\} : u_i = \varepsilon$, откуда по предположению следует, что $f(u_i) = f(\varepsilon) = 0$.

Если функция $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ такова, что $f(\varepsilon) = 0$, то запись $\sum\limits_{k \geq 1} f^{\circ k}$ обозначает функцию из $\mathbf{R}^{X^*}$, значение которой на каждой строке $u \in X^*$ равно сумме всех чисел вида $f^{\circ k}(u)$, где $k \geq 1$. Из вышесказанного следует, что лишь конечное число чисел такого вида будет отлично от 0.

Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ и $f(\varepsilon) \neq 1$. Поскольку функция $\chi_\varepsilon - f$ принимает на ε значение, не равное 0, то, согласно теореме 2, определена функция $(\chi_\varepsilon - f)^{-1}$. Обозначим записью f^+ функцию

$$f^+ \overset{\text{def}}{=} (\chi_\varepsilon - f)^{-1} - \chi_\varepsilon. \quad (5.5)$$

Мы будем называть функцию f^+ **итерацией** функции *f*.

Теорема 3.

Если функция $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ такова, что $f(\varepsilon) = 0$,то

$$f^+ = \sum_{k\geq 1} f^{\circ k}.$$

Доказательство.

Доказываемое равенство эквивалентно равенству

$$(\chi_\varepsilon - f) \circ (\chi_\varepsilon + \sum_{k\geq 1} f^{\circ k}) = \chi_\varepsilon, \quad \textbf{(5.6)}$$

которое, в силу дистрибутивности свёртки относительно сложения и вычитания, эквивалентно равенству

$$\chi_\varepsilon - f + \sum_{k\geq 1} f^{\circ k} - f \circ \sum_{k\geq 1} f^{\circ k} = \chi_\varepsilon. \quad (5.7)$$

(5.7) можно переписать в виде

$$f + f \circ \sum_{k\geq 1} f^{\circ k} = \sum_{k\geq 1} f^{\circ k}.$$

Нетрудно доказать, что последнее равенство верно.

5.2 Операции на линейных автоматах

Пусть задано конечное множество *X*.

Ранее было введено понятие линейного автомата (ЛА) над *X*. На множестве всех ЛА над *X* можно определить операции, аналогичные тем, которые были определены в пунктах 1.2.2 и 5.1 на множестве $\mathbf{R}^{X^*}$.

Для определения этих операций мы будем использовать

- обозначения, введенные в пункте 2.1.5,
- а также следующее обозначение: если *A* и *B* - матрицы, и *A* имеет

вид $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то запись $A \otimes B$ обозначает

матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Пусть $L_i = (\xi_i^0, \{L_i^x \mid x \in X\}, \lambda_i) \quad (i = 1, 2)$- ЛА над *X*.

Определим их сумму $L_1 + L_2$, **произведение** L_1L_2 и свёртку $L_1 \circ L_2$ следующим образом.

- $L_1 + L_2 \stackrel{\text{def}}{=} (({\xi_1}^0, {\xi_2}^0), \{\left(\begin{array}{cc} L_1^x & 0 \\ 0 & L_2^x \end{array}\right) \mid x \in X\}, \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right))$.

- $L_1L_2 \stackrel{\text{def}}{=} ({\xi_1}^0 \otimes {\xi_2}^0, \{L_1^x \otimes L_2^x \mid x \in X\}, \lambda_1 \otimes \lambda_2)$.

- $L_1 \circ L_2 \stackrel{\text{def}}{=}$
  $\stackrel{\text{def}}{=} (({\xi_1}^0, {\xi_1}^0 M), \{\left(\begin{array}{cc} L_1^x & L_1^x M \\ 0 & L_2^x \end{array}\right) \mid x \in X\}, \left(\begin{array}{c} 0^{\downarrow} \\ \lambda_2 \end{array}\right))$,

где $M = \lambda_1 {\xi_2}^0$, и $0^{\downarrow}$ - вектор-столбец с нулевыми компонентами, размерность которого равна размерности λ_1.

Пусть $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - ЛА над *X*, и $a \in \mathbf{R}$. Определим ЛА aL, $\tilde{L}$ и L^+ (называемые соответственно **произведением** *a* на *L*, **инвертированием** ***L*** и **итерацией** *L*) следующим образом:

- $aL \stackrel{\text{def}}{=} (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, a\lambda)$,
- $\tilde{L} \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{\lambda}, \{(L^x)^{\sim} \mid x \in X\}, \tilde{\xi^0})$,
- $L^+ \stackrel{\text{def}}{=} (\xi^0, \{L^x(E + \lambda\xi^0) \mid x \in X\}, \lambda)$, где E – единичная матрица.

Теорема 4.

1. Пусть *X* - конечное множество, и L_1, L_2 - ЛА над *X*. Тогда

$$f_{L_1+L_2} = f_{L_1} + f_{L_2}, \quad (5.8)$$

$$f_{L_1L_2} = f_{L_1} f_{L_2}, \quad (5.9)$$

$$f_{L_1 \circ L_2} = f_{L_1} \circ f_{L_2}. \quad (5.10)$$

2. Для любого ЛА *L*

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad f_{aL} = a f_L, \quad (5.11)$$

$$f_{\tilde{L}} = (f_L)^{\sim}, \quad (5.12)$$

если $f_L(\varepsilon) = 0$, то $f_{L^+} = (f_L)^+$. (5.13)

Доказательство.

1. Пусть $L_i \ (i = 1, 2)$ имеют вид $(\xi_i^0, \{L_i^x \mid x \in X\}, \lambda_i)$.

(a) (5.8) доказывается непосредственной проверкой, с использованием того, что

$$\forall u \in X^* \quad (L_1 + L_2)^u = \begin{pmatrix} L_1^u & 0 \\ 0 & L_2^u \end{pmatrix}.$$

(b) (5.9) непосредствено вытекает из следующего утверждения: если матрицы *A, B,* C, *D* таковы, что определены произведения *AC* и *BD,* то верно равенство

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

(c) Докажем (5.10).

Нетрудно доказать (индукцией по $|u|$), что $\forall u \in X^*$

$$(L_1 \circ L_2)^u = \begin{pmatrix} L_1^u & \sum\limits_{u_1 u_2 = u} L_1^{u_1} M L_2^{u_2} - M L_2^u \\ 0 & L_2^u \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

где $M = \lambda_1 \xi_0^2$. Поэтому $\forall u \in X^*$

$$f_{L_1 \circ L_2}(u) = (\xi_1^0,\ \xi_1^0 M)(L_1 \circ L_2)^u \begin{pmatrix} 0^{\downarrow} \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\xi_1^0,\ \xi_1^0 M) \begin{pmatrix} \Big(\sum\limits_{u_1 u_2 = u} L_1^{u_1} M L_2^{u_2} - M L_2^u \Big) \lambda_2 \\ L_2^u \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \xi_1^0 \Big(\sum_{u_1 u_2 = u} L_1^{u_1} M L_2^{u_2} - M L_2^u \Big) \lambda_2 + \xi_1^0 M L_2^u \lambda_2 =$$

$$= \xi_1^0 \Big(\sum_{u_1 u_2 = u} L_1^{u_1} M L_2^{u_2} \Big) \lambda_2 = \sum_{u_1 u_2 = u} \xi_1^0 L_1^{u_1} \lambda_1 \xi_0^2 L_2^{u_2} \lambda_2 =$$

$$= \sum_{u_1 u_2 = u} f_{L_1}(u_1) f_{L_2}(u_2) = (f_{L_1} \circ f_{L_2})(u).$$

2. Пусть *L* имеет вид $(\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

(a) (5.11) доказывается непосредственной проверкой:

$$\forall u \in X^* \quad f_{aL}(u) = \xi^0 L^u (a\lambda) = a \xi^0 L^u \lambda = \\ = a f_L(u) = (a f_L)(u).$$

(b) Для доказательства (5.12) мы используем утверждение о том, что если *A, B* - матрицы, для которых определено произведение *AB,* то

$(AB)^{\sim} = \tilde{B}\tilde{A}$:

$$\forall u \in X^* \quad f_{\tilde{L}}(u) = \tilde{\lambda} \tilde{L}^u \tilde{\xi}^0 = \tilde{\lambda} (L^{\tilde{u}})^{\sim} \tilde{\xi}^0 = \\ = (\xi^0 L^{\tilde{u}} \lambda)^{\sim} = (f_L(\tilde{u}))^{\sim} = f_L(\tilde{u}).$$

(c) Докажем соотношение (5.13), т.е. $\forall u \in X^*$

$$f_{L^+}(u) = (f_L)^+(u). \quad (5.15)$$

Если $u = \varepsilon$, то левая часть (5.15) равна

$f_{L^+}(\varepsilon) = \xi^0\lambda = f_L(\varepsilon) = 0.$

Нетрудно доказать, что правая часть (5.15) в случае $u = \varepsilon$ тоже равна 0.

Пусть $u \neq \varepsilon$. Рассмотрим обе части (5.15) в этом случае, и докажем, что они совпадают.

i. Согласно теореме 3, из $f_L(\varepsilon) = 0$ следует, что правая часть (5.15) равна сумме

$\sum\limits_{k\geq 1} f_L^{ok}(u),$

которая равна сумме

$$\sum_{\substack{k\geq 1,\ u_1\dots u_k = u \\ \forall i\in\{1,\dots,k\}\ u_i\neq\varepsilon}} f_L(u_1)\dots f_L(u_k). \quad (5.16)$$

ii. Левая часть (5.15) имеет вид

$$\xi^0 L^{x_1}(E+\lambda\xi^0)\dots L^{x_k}(E+\lambda\xi^0)\lambda \quad (5.17)$$

где $u = x_1\dots x_k,\ \forall i = 1,\dots,k\ \ x_i \in X.$

Т.к. $\xi^0\lambda = 0$, то $(E+\lambda\xi^0)\lambda = \lambda$, поэтому можно переписать (5.17) в виде

$$\xi^0 L^{x_1}(E+\lambda\xi^0)\dots L^{x_k}\lambda. \quad (5.18)$$

Раскроем все скобки (5.18). Нетрудно видеть, что каждое слагаемое в получившейся сумме имеет вид

$$\xi^0 L^{u_1}\lambda\dots\xi^0 L^{u_k}\lambda \quad (5.19)$$

где $u_1\dots u_k = u$ и $\forall i\in\{1,\dots,k\}\ \ u_i\neq\varepsilon$. Согласно определению функции f_L, (5.19) совпадает с соответствующим слагаемым (определяемым тем же представлением *u* в виде конкатенации непустых подстрок $u_1\dots u_k$) в сумме (5.16).

Таким образом, каждому слагаемому в разложении выражения (5.18) взаимно однозначно соответствует равное ему слагаемое в сумме (5.16). Следовательно, значения выражений (5.18) и (5.16) совпадают.

5.3 Алгебраические свойства множества линейно-автоматных функций

Пусть задано конечное множество *X*.

Обозначим символом $\mathcal{L}^X$ множество всех ЛАФ из $\mathbf{R}^{X^*}$.

Отметим, что $\chi_\varepsilon \in \mathcal{L}^X$, т.к. $\chi_\varepsilon = f_L$, где *L* - ЛА вида (1.7) размерности 1, у которого $\xi^0 = (1), \forall x \in X \;\; L^x = (0), \lambda = (1)$. Согласно вышесказанному и теореме 1, $\mathcal{L}^X$ является кольцом относительно определённых в пункте 1.2.2 операций сложения и свёртки (рассматриваемой в данном случае как умножение). Единицей этого кольца является ЛАФ χ_ε. Ниже мы будем опускать символ свёртки $\circ$ в обозначении произведения элементов кольца $\mathcal{L}^X$ (т.е. для любых элементов *a, b* кольца $\mathcal{L}^X$ будем обозначать их произведение $a \circ b$ записью *ab).*

Обозначим записью $\mathcal{L}_n^X$ кольцо квадратных матриц порядка *n* над $\mathcal{L}^X$. Единицей этого кольца является диагональная матрица E_ε, все компоненты диагонали которой равны χ_ε.

$\forall M \in \mathcal{L}_n^X$ и $\forall u \in X^*$ мы будем обозначать записью *M(u)* матрицу над **R**, каждая компонента $M(u)_{ij}$ которой равна значению соответствующей функции M_{ij} на строке *u*.

Теорема 5.

Пусть *X* - конечное множество, и матрица $A \in \mathcal{L}_n^X$ такова, что матрица $A(\varepsilon)$- нулевая. Тогда существует матрица из $\mathcal{L}_n^X$, обозначаемая записью $\sum\limits_{k\geq 1} A^k$, для которой верно равенство

$$\Big(E_\varepsilon - A\Big)\Big(E_\varepsilon + \sum_{k\geq 1} A^k\Big) = E_\varepsilon. \quad (5.20)$$

Доказательство.

$\forall u \in X^*, \forall k > |u|$ матрица $A^k(u)$ является нулевой, т.к. каждая компонента матрицы A^k является суммой произведений вида $a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k}$, где $a_{i_s j_s}$ $(s = 1, \dots, k)$ - компоненты матрицы *A*. Нетрудно видеть, что

$$(a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k})(u) = \sum_{u_1 \dots u_k = u} a_{i_1 j_1}(u_1) \dots a_{i_k j_k}(u_k). \quad (5.21)$$

Каждое слагаемое в сумме в правой части (5.21) равно 0, т.к. если $u_1 \dots u_k = u$ и $|u| < k$, то $\exists\, s \in \{1, \dots, k\} : u_s = \varepsilon$, откуда по предположению следует, что $a_{i_s j_s}(u_s) = a_{i_s j_s}(\varepsilon) = 0$.

Искомая матрица $\sum\limits_{k\geq 1} A^k$ определяется как матрица из $\mathcal{L}_n^X$, значение которой на каждой строке $u \in X^*$ равно сумме всех матриц вида $A^k(u)$, где $k \geq 1$. Из вышесказанного следует, что лишь конечное число матриц такого вида отлично от нулевой.

Равенство (5.20) доказывается так же, как доказывается аналогичное ему равенство (5.6), и следует из того, что $\forall u \in X^*$

$$\Big(A + A\Big(\sum_{k\geq 1} A^k\Big)\Big)(u) = \Big(\sum_{k\geq 1} A^k\Big)(u). \quad (5.22)$$

Обоснуем (5.22).

Пусть $B = \sum_{k=1}^{|u|} A^k$ и $C = \sum_{k>|u|} A^k$. Нетрудно видеть, что

• матрица *(AC)(u)* - нулевая, т.к. каждая компонента матрицы *AC* является суммой произведений вида $a_{ij}c_{jk}$, где a_{ij} и c_{jk} - компоненты *A* и *C* соответственно, и поскольку

$$(a_{ij}c_{jk})(u) = \sum_{u_1u_2=u} a_{ij}(u_1)c_{jk}(u_2) \quad (5.23)$$

то из $|u_2| \leq |u|$ следует, что матрица $C(u_2)$ является нулевой, в частности $c_{jk}(u_2) = 0$, поэтому правая (а значит и левая) часть (5.23) равна 0,

$$\sum_{k\geq 1} A^k = B + C,$$

• поэтому, используя утверждение из предыдущего пункта, левую часть (5.22) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(A + A(B+C))(u) &= A(u) + (AB)(u) + (AC)(u) = \\ &= A(u) + (AB)(u) + 0 = A(u) + \sum_{k=2}^{|u|+1} A^k(u).\end{aligned} \quad (5.24)$$

Значение последнего выражения в цепочке равенств (5.24) совпадает с правой частью (5.22).

Пусть *X* - конечное множество. Мы будем использовать следующие обозначения.

• Символ Ω обозначает совокупность операций на $\mathbf{R}^{X^*}$, состоящую из определённых в пункте 1.2.2 операций сложения, свёртки, итерации (для тех функций, которые отображают e в 0) и умножения на числа из **R**.

• Для произвольного подмножества $F \subseteq \mathbf{R}^{X^*}$ запись ΩF обозначает множество всех функций из $\mathbf{R}^{X^*}$, которые могут быть получены из функций из *F* при помощи применения операций из Ω.

Теорема 6.

Пусть *X* - конечное множество, *n* - натуральное число, *A* -матрица из $\mathcal{L}_n^X$, и *B, C* - вектор-столбцы размерности *n* над $\mathcal{L}^X$, имеющие вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}$$

причём матрица $A(\varepsilon)$- нулевая, и верно равенство

$$(E_\varepsilon - A)B = C. \quad (5.25)$$

Тогда

$$\forall i = 1, \dots, n \quad b_i \in \Omega\{\chi_\varepsilon, a_{ij}, c_i \mid i, j = 1, \dots, n\}. \quad (5.26)$$

Доказательство.

Докажем теорему индукцией по *n*.

Если $n = 1$, то (5.25) имеет вид $(\chi_\varepsilon - a_{11})b_1 = c_1$. Поскольку по предположению $a_{11}(\varepsilon) = 0$,, то к a_{11} можно применить операцию итерации, и, согласно определению (5.5), верны равенства

$$b_1 = (\chi_\varepsilon + a_{11}^+)(\chi_\varepsilon - a_{11})b_1 = (\chi_\varepsilon + a_{11}^+)c_1$$

т.е. в данном случае (5.26) верно.

Пусть $n > 1$. Перепишем (5.25) в виде системы равенств

$$\begin{cases} (\chi_\varepsilon - a_{11})b_1 - \dots - a_{1,n-1}b_{n-1} - a_{1n}b_n & = c_1 \\ \dots & \\ -a_{n1}b_1 - \dots - a_{n,n-1}b_{n-1} + (\chi_\varepsilon - a_{nn})b_n & = c_n \end{cases} \quad (5.27)$$

Используя рассуждения, аналогичные вышеизложенным, получаем, что последнее равенство в (5.27) равносильно равенству

$$b_n = (\chi_\varepsilon + a_{nn}^+)(c_n + a_{n1}b_1 + \dots + a_{n,n-1}b_{n-1}). \quad (5.28)$$

Заменим в (5.27) во всех равенствах, кроме последнего, выражение b_n на правую часть равенства (5.28). После раскрытия скобок и приведения подобных членов совокупность этих *n — 1* равенств будет представлять собой систему, которая в матричной записи имеет вид

$$(E_\varepsilon - A')B' = C', \quad (5\text{-}29)$$

где компоненты $a'_{ij}, b'_i, c'_i \ (i, j = 1, \dots, n-1)$ матриц A', B', C' имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} + a_{in}(\chi_\varepsilon + a_{nn}^+)a_{nj}, \\ b'_i &= b_i, \\ c'_i &= c_i + a_{in}(\chi_\varepsilon + a_{nn}^+)c_n. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Поскольку $\forall f, g \in \mathbf{R}^{X^*}$ верно равенство $(fg)(\varepsilon) = f(\varepsilon)g(\varepsilon)$, то из (5.30) и из того, что матрица $A(\varepsilon)$ нулевая, следует, что матрица $A'(\varepsilon)$ нулевая. Таким образом, к матрицам A', B', C' можно применить индуктивное предположение, согласно которому будет верно утверждение теоремы 6, в котором матрицы *A, B, C* заменены на A', B', C' соответственно, т.е.

$$\forall i = 1, \ldots, n-1 \quad b_i \in \Omega\{\chi_\varepsilon, a'_{ij}, c'_i \mid i, j = 1, \ldots, n-1\}.$$
(5.31)

Из (5.30) следует, что

$$\forall i, j = 1, \ldots, n-1 \quad a'_{ij}, c'_i \in \Omega\{\chi_\varepsilon, a_{ij}, c_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}. \quad (5.32)$$

Из (5.31) и (5.32) следует, что

$$\forall i = 1, \ldots, n-1 \quad b_i \in \Omega\{\chi_\varepsilon, a_{ij}, c_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}. \quad (5.33)$$

Из (5.28) и (5.33) следует, что

$$b_n \in \Omega\{\chi_\varepsilon, a_{ij}, c_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}. \quad (5.34)$$ Из (5.33) и (5.34) следует утверждение теоремы 48.

Теорема 7.

Пусть *X* - конечное множество. Тогда

$$\mathcal{L}^X = \Omega\{\chi_\varepsilon, \chi_x \mid x \in X\}. \quad (5.35)$$

Доказательство.

Как было отмечено в начале пункта 5.3, $\chi_\varepsilon \in \mathcal{L}^X$. Кроме того, $\forall x \in X \ \ \chi_x \in \mathcal{L}^X$, т.к. $\chi_x = f_L$, где *L* - ЛА вида (1.7) размерности 2, компоненты которого имеют следующий вид:

$$\xi^0 = (1, 0),\ L^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ L^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ для } y \neq x,\ \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 4, $\mathcal{L}^X$ замкнуто относительно операций из Ω. Следовательно, правая часть соотношения (5.35) содержится в левой его части.

Докажем, что верно и обратное включение.

Пусть $f = f_L$, где *L* - ЛА вида $(\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$.

$\forall u \in X^*$ обозначим записью L_u матрицу из $\mathcal{L}_n^X$ (где *n* - размерность ЛА *L*), имеющую вид $L^u \chi_u$ (т.е. каждая компонента L_u представляет собой произведение соответствующей компоненты матрицы L^u и ЛАФ χ_u).

Обозначим символом *A* матрицу $\sum_{x \in X} L_x$. Нетрудно видеть, что

$$\forall k \geq 1 \ \ A^k = \sum_{x_1, \ldots, x_k \in X} L_{x_1} \ldots L_{x_k} = \sum_{u \in X^k} L_u. \quad (5.36)$$

Последнее равенство в (5.36) верно потому, что

$$\forall x_1, \ldots, x_k \in X \quad L_{x_1} \ldots L_{x_k} = L_{x_1 \ldots x_k}. \ (5.37)$$

(5.37) следует из равенства $\chi_{x_1} \cdots \chi_{x_k} = \chi_{x_1 \ldots x_k}$.
Поскольку матрица $A(\varepsilon)$- нулевая, то, согласно теореме (5), существует матрица $\sum_{k \geq 1} A^k$, для которой верно равенство (5.20).

Компоненты матрицы *A* представляют собой суммы ЛАФ вида $a\chi_x$, где $a \in \mathbf{R}$ и $x \in X$. Следовательно, используя равенство (5.20) и теорему 6, применяемую к столбцам матрицы $E_\varepsilon + \left(\sum_{k \geq 1} A^k\right)$, можно заключить, что компоненты этой матрицы принадлежат множеству $\Omega\{\chi_\varepsilon, \chi_x \mid x \in X\}$. Из (5.36) следует, что

$$\forall u \in X^* \quad \left(E_\varepsilon + \left(\sum_{k \geq 1} A^k\right)\right)(u) = L^u. \quad (5.38)$$

Напомним, что $\forall u \in X^*$

$$f_L(u) = \xi^0 L^u \lambda. \quad (5.39)$$

Обозначим компоненты векторов ξ^0, λ и матриц L^u, $E_\varepsilon + \left(\sum_{k \geq 1} A^k\right)$ записями ξ_i^0, λ_j, L_{ij}^u и a_{ij} соответственно (где $i, j = 1, \ldots, n$). В этих обозначениях равенство (5.39) можно переписать в виде

$$f_L(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^0 L_{ij}^u \lambda_j \quad (5.40)$$

Определим функцию *f* как линейную комбинацию функций a_{ij} вида

$$f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^0 \lambda_j a_{ij}. \quad (5.41)$$

Докажем, что *f* совпадает с f_L. По определению f, $\forall u \in X^*$

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^0 \lambda_j a_{ij}(u). \quad (5.42)$$

Из (5.38) следует, что $\forall i, j = 1, \ldots, n \ \ a_{ij}(u) = L_{ij}^u$, поэтому можно переписать (5.42) в виде

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i^0 \lambda_j L_{ij}^u. \quad (5.43)$$

Поскольку правая часть (5.43) совпадает с правой частью (5.40), то, следовательно, и левые части этих равенств совпадают, т.е. верно равенство $f(u) = f_L(u)$, что и требовалось доказать.

Как было отмечено выше, все функции a_{ij} принадлежат множеству $\Omega\{\chi_\varepsilon, \chi_x \mid x \in X\}$, поэтому, согласно определению (5.41), функция f (т.е. f_L) тоже принадлежит этому множеству.

5.4 Линейные пространства, связанные с линейно-автоматными функциями

Пусть X - конечное множество, и $f \in \mathbf{R}^{X^*}$.

Мы будем использовать следующие обозначения: $\forall u \in X^*$ f_u обозначает функцию из $\mathbf{R}^{X^*}$, определяемую следующим образом:

$$\forall u_1 \in X^* \quad f_u(u_1) \stackrel{\text{def}}{=} f(uu_1),$$

и E_f обозначает подпространство линейного пространства $\mathbf{R}^{X^*}$, порождённое множеством $\{f_u \mid u \in X^*\}$.

Теорема 8.

Пусть X - конечное множество, $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, и n - натуральное число. Следующие условия эквивалентны:

1. существует ЛА L размерности не больше n над X, такой, что $f_L = f$,
2. $\dim E_f \leq n$.

Доказательство.

Докажем, что из условия 1 следует условие 2. Пусть ЛА $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$ имеет размерность $k \leq n$ и удовлетворяет условию $f_L = f$, т.е.

$$\forall u \in X^* \quad f(u) = \xi^0 L^u \lambda,$$

откуда следует, что $\forall u \in X^*$ функция f_u удовлетворяет условию

$$\forall u_1 \in X^* \quad f_u(u_1) = f(uu_1) = \xi^0 L^{uu_1}\lambda = (\xi^0 L^u) L^{u_1}\lambda.$$

$\forall i = 1, \ldots, k$ обозначим

- записью e_i вектор-строку из $\mathbf{R}^k$, i-я компонента которой равна 1, а все остальные компоненты равны 0, и
- записью f_i - функцию из $\mathbf{R}^{X^*}$, определяемую следующим образом:

$$\forall u \in X^* \quad f_i(u) = e_i L^u \lambda.$$

Поскольку $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - базис в $\mathbf{R}^k$, то существуют числа $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$, такие, что $\xi^0 L^u = \sum_{i=1}^k a_i e_i$. Следовательно,

$$\forall u_1 \in X^* \quad f_u(u_1) = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i L^{u_1} \lambda = \sum_{i=1}^{k} a_i f_i(u_1),$$

т.е. $f_u = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i f_i$.

Таким образом, $\forall u \in X^*$ функция f_u принадлежит линейному подпространству в $\mathbf{R}^{X^*}$, порождённому функциями $f_1, \ldots, f_k$.
Отсюда непосредственно следует условие 2.
Теперь докажем, что из условия 2 следует условие 1.
Определим компоненты $\xi^0, L^x \ (x \in X), \lambda$ искомого ЛА L следующим образом. Выберем базис в пространстве E_f, имеющий вид $\{f_{u_1}, \ldots, f_{u_k}\}$, где $u_1, \ldots, u_k \in X^*$.

- Т.к. $f = f_\varepsilon \in E_f$, **то** $\exists \xi_1^0, \ldots, \xi_k^0 \in \mathbf{R} : f = \sum\limits_{i=1}^{k} \xi_i^0 f_{u_i}$.

Определим $\xi^0 \stackrel{\text{def}}{=} (\xi_1^0, \ldots, \xi_k^0)$.

- $$\forall x \in X \quad L^x \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

где $\forall i = 1, \ldots, k$ числа $a_{i1}, \ \ldots, \ a_{ik}$ являются коэффициентами разложения функции $f_{u_i x}$ по базису $\{f_{u_1}, \ldots, f_{u_k}\}$: $f_{u_i x} = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{ij} f_{u_j}$.

- $$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_{u_1}(\varepsilon) \\ \ldots \\ f_{u_k}(\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Докажем (индукцией по $|u|$), что $\forall u, v \in X^*$ верно равенство

$$L^u \begin{pmatrix} f_{u_1}(v) \\ \ldots \\ f_{u_k}(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{u_1}(uv) \\ \ldots \\ f_{u_k}(uv) \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

- Если $u = \varepsilon$, то (5.44) верно по определению λ.
- Пусть (5.44) верно для некоторого u и произвольного v.

Тогда $\forall x \in X$

$$L^{ux}\begin{pmatrix} f_{u_1}(v) \\ \dots \\ f_{u_k}(v) \end{pmatrix} = L^u L^x \begin{pmatrix} f_{u_1}(v) \\ \dots \\ f_{u_k}(v) \end{pmatrix} = L^u \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{1j} f_{u_j}(v) \\ \dots \\ \sum\limits_{j=1}^{k} a_{kj} f_{u_j}(v) \end{pmatrix} =$$

$$= L^u \begin{pmatrix} f_{u_1 x}(v) \\ \dots \\ f_{u_k x}(v) \end{pmatrix} = L^u \begin{pmatrix} f_{u_1}(xv) \\ \dots \\ f_{u_k}(xv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{u_1}(uxv) \\ \dots \\ f_{u_k}(uxv) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, (5.44) верно для произвольных $u, v \in X^*$. Используя (5.44), докажем, что $f_L = f$.

$$\forall u \in X^* \quad f_L(u) = \xi^0 L^u \lambda = \xi^0 L^u \begin{pmatrix} f_{u_1}(\varepsilon) \\ \dots \\ f_{u_k}(\varepsilon) \end{pmatrix} =$$

$$= \xi^0 \begin{pmatrix} f_{u_1}(u) \\ \dots \\ f_{u_k}(u) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i^0 f_{u_i}(u) = f(u).$$

Из теоремы 8 следует, что если для функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ существует ЛА *L* над *X*, такой, что $f_L = f$, то $\dim E_f$ является наименьшей возможной размерностью такого ЛА.

Пусть *X* - конечное множество. Мы будем обозначать записью $\mathbf{R}\langle X \rangle$ кольцо многочленов с коэффициентами из **R** от некоммутирующих переменных из множества *X*. Каждый элемент $p \in \mathbf{R}\langle X \rangle$ можно рассматривать как формальную сумму вида

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i$, где $\forall i = 1, \dots, n \;\; a_i \in \mathbf{R}, u_i \in X^*$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ мы будем обозначать тем же символом *f* линейное продолжение этой функции на $\mathbf{R}\langle X \rangle$, т.е. функцию вида $\mathbf{R}\langle X \rangle \to \mathbf{R}$ определяемую следующим образом:

$$\forall p \in \mathbf{R}\langle X \rangle, \;\; \textbf{если } p = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i, \;\; \textbf{то } f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i).$$

$\forall f \in \mathbf{R}^{X^*}$ мы будем обозначать записью $\sim_f$ отношение эквивалентности на $\mathbf{R}\langle X \rangle$, определяемое следующим образом:

$$\forall p_1, p_2 \in \mathbf{R}\langle X \rangle \;\; p_1 \sim_f p_2 \;\Leftrightarrow\; \forall u \in X^* \;\; f(p_1 u) = f(p_2 u).$$

Для каждого $p \in \mathbf{R}\langle X \rangle$ мы будем обозначать записью $[p]$ класс эквивалентности $\sim_f$, содержащий *p*. Нетрудно видеть, что $\sim_f$

сохраняет операции сложения и умножения на числа из **R**, поэтому определено факторпространство $\mathbf{R}\langle X\rangle/_{\sim_f}$.

Теорема 9.

Пусть *X* - конечное множество, $f \in \mathbf{R}^{X^*}$. Тогда

$$\dim E_f = \dim\left(\mathbf{R}\langle X\rangle/_{\sim_f}\right).$$

Доказательство.

Докажем, что для каждого натурального числа *n* верно соотношение

$$\dim E_f \le n \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbf{R}\langle X\rangle/_{\sim_f} \le n. \qquad (5.45)$$

Левая часть (5.45) равносильна условию

$$\begin{aligned}&\exists\, u_1, \ldots, u_n \in X^* : \forall\, u \in X^*\ \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} :\\ &\forall\, v \in X^* \quad f(uv) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i v).\end{aligned} \qquad (5.46)$$

Правая часть (5.45) равносильна условию

$$\begin{aligned}&\exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{R}\langle X\rangle : \forall\, p \in \mathbf{R}\langle X\rangle\ \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} :\\ &[p] = \sum_{i=1}^{n} a_i [p_i].\end{aligned} \qquad (5.47)$$

Нетрудно доказать, что (5.47) эквивалентно условию

$$\begin{aligned}&\exists\, u_1, \ldots, u_n \in X^* : \forall\, u \in X^*\ \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} :\\ &[u] = \sum_{i=1}^{n} a_i [u_i] = [\sum_{i=1}^{n} a_i u_i].\end{aligned} \qquad (5.48)$$

Равенство $[u] = [\sum_{i=1}^{n} a_i u_i]$ равносильно условию $u \sim_f \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, т.е. соотношению

$$\forall\, v \in X^* \quad f(uv) = f(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\Big)v) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(u_i v).$$

Используя последнее замечание, заключаем, что условия (5.46) и (5.48) эквивалентны, откуда следует доказываемое соотношение (5.45).

Пусть *X* - конечное множество, и $f \in \mathbf{R}^{X^*}$.

Мы будем использовать следующие обозначения.

• $\forall\, u \in X^*$ запись $\hat{f}_u$ обозначает функцию из $\mathbf{R}^{X^* \times X^*}$, т.е.

$$\hat{f}_u : X^* \times X^* \to \mathbf{R},$$

определяемую следующим образом:

$$\forall\, v_1, v_2 \in X^* \quad \hat{f}_u(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} f(v_1 u v_2).$$

• Запись $E_{\hat{f}}$ обозначает подпространство линейного пространства $\mathbf{R}^{X^* \times X^*}$, порождённое множеством $\{\hat{f}_u \mid u \in X^*\}$.

• Запись I_f обозначает идеал кольца $\mathbf{R}\langle X\rangle$, определяемый следующим образом:

$$I_f \overset{\text{def}}{=} \{p \in \mathbf{R}\langle X\rangle \mid \forall p_1, p_2 \in \mathbf{R}\langle X\rangle \;\; f(p_1 p p_2) = 0\}$$

Нетрудно доказать, что I_f действительно является идеалом, и, следовательно, определено фактор-кольцо $\mathbf{R}\langle X\rangle / I_f$, которое также является линейным пространством над **R**. $\forall\, p \in \mathbf{R}\langle X\rangle$ мы будем обозначать соответствующий элемент фактор-кольца $\mathbf{R}\langle X\rangle / I_f$ записью $[p]$.

Теорема 10.

Пусть *X* - конечное множество, $f \in \mathbf{R}^{X^*}$. Тогда

$$\dim E_{\hat{f}} = \dim \mathbf{R}\langle X\rangle / I_f.$$

Доказательство.

Докажем, что для каждого натурального числа *n* верно соотношение

$$\dim E_{\hat{f}} \le n \quad \Leftrightarrow \quad \dim \mathbf{R}\langle X\rangle / I_f \le n. \tag{5.49}$$

Левая часть (5.49) равносильна условию

$$\begin{gathered} \exists\, u_1, \ldots, u_n \in X^* : \forall\, u \in X^* \;\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} : \\ \forall\, v_1, v_2 \in X^* \quad f(v_1 u v_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_1 u_i v_2). \end{gathered} \tag{5.50}$$

Правая часть (5.49) равносильна условию

$$\begin{gathered} \exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathbf{R}\langle X\rangle : \forall\, p \in \mathbf{R}\langle X\rangle \;\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} : \\ [p] = \sum_{i=1}^{n} a_i [p_i]. \end{gathered} \tag{5.51}$$

Нетрудно доказать, что (5.51) эквивалентно условию

$$\begin{gathered} \exists\, u_1, \ldots, u_n \in X^* : \forall\, u \in X^* \;\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R} : \\ [u] = \sum_{i=1}^{n} a_i [u_i] = [\sum_{i=1}^{n} a_i u_i]. \end{gathered} \tag{5.52}$$

Равенство $[u] = [\sum_{i=1}^{n} a_i u_i]$ равносильно условию

$$u - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \in I_f,$$

т.е. соотношению

$$\forall\, v_1, v_2 \in X^* \quad f(v_1 (u - \sum_{i=1}^{n} a_i u_i) v_2) = 0$$

которое можно переписать в виде

$$\forall v_1, v_2 \in X^* \quad f(v_1 u v_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_1 u_i v_2).$$

Используя последнее замечание, заключаем, что условия (5.50) и (5.52) эквивалентны, откуда следует доказываемое соотношение (5.49).

Теорема 11.

Пусть *X* - конечное множество, $f \in \mathbf{R}^{X^*}$. Тогда для каждого натурального числа *n* верны импликации

$$\dim E_{\hat{f}} \leq n \quad \Rightarrow \quad \dim E_f \leq n, \quad (5.53)$$

$$\dim E_f \leq n \quad \Rightarrow \quad \dim E_{\hat{f}} \leq n^2. \quad (5.54)$$

Доказательство.

Докажем импликацию (5.53).

Как было отмечено в доказательстве теоремы 10, левая часть (5.53) равносильна условию (5.50), из которого (полагая $v_1 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon$) получаем условие (5.46), которое, как было отмечено в доказательстве теоремы 9, равносильно правой части (5.53).

Теперь докажем импликацию (5.54).

Согласно теореме 8, из левой части (5.54) следует, что существует ЛА *L* размерности $k \leq n$ над *X*, такой, что $f_L = f$.

Пусть *L* имеет вид $(\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и *u* - произвольная строка из *X**, тогда

$$\forall v_1, v_2 \in X^* \\ \hat{f}_u(v_1, v_2) = f(v_1 u v_2) = \xi^0 L^{v_1 u v_2} \lambda = \xi^0 L^{v_1} L^u L^{v_2} \lambda. \quad (5.55)$$

Обозначим записью E_{ij} (где $i, j = 1, \ldots, k$) квадратную матрицу порядка *k*, в которой компонента в строке *i* столбце *j* равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Используя эти обозначения, можно представить матрицу L^u в виде суммы

$$L^u = \sum_{i,j=1,\ldots,k} a_{ij} E_{ij}, \quad (5.56)$$

где a_{ij} - компонента матрицы L^u в строке *i* столбце *j*. Из (5.55) и (5.56) следует, что

$$\forall v_1, v_2 \in X^* \quad \hat{f}_u(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1,\ldots,k} a_{ij} \xi^0 L^{v_1} E_{ij} L^{v_2} \lambda. \quad (5.57)$$

Обозначим записью f_{ij} (где $i, j = 1, \ldots, k$) функцию из $\mathbf{R}^{X^* \times X^*}$, определяемую следующим образом:

$$\forall v_1, v_2 \in X^* \quad f_{ij}(v_1, v_2) = \xi^0 L^{v_1} E_{ij} L^{v_2} \lambda. \quad (5.58)$$

Из (5.57) и (5.58) следует, что

$$\forall v_1, v_2 \in X^* \quad \hat{f}_u(v_1, v_2) = \sum_{i,j=1,\ldots,k} a_{ij} f_{ij}(v_1, v_2). \quad (5.59)$$

Из (5.59) следует, что функция $\hat{f}_u$ принадлежит подпространству линейного пространства $\mathbf{R}^{X^* \times X^*}$, порождённому функциями f_{ij} (где $i, j = 1, \ldots, k$). Это подпространство одинаково для всех $u \in X^*$. Поскольку размерность этого подпространства не превосходит k^2, и $k \leq n$, то, следовательно, верна правая часть импликации (5.54).

Можно доказать, что $\forall f \in \mathbf{R}^{X^*} \quad \dim E_{\hat{f}} = (\dim E_f)^2$.

5.5 Счетномерные линейные автоматы и их языки

5.5.1 Вспомогательные понятия

В этом пункте мы будем использовать следующие обозначения.

- Символ **N** обозначает множество положительных натуральных чисел (1, 2, ...).
- Запись $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ обозначает множество последовательностей действительных чисел, $\forall f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \ \forall i \in \mathbf{N}$ i-й член последовательности f обозначается записью f_i.
- Символ Ξ обозначает множество всех последовательностей $\xi \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, удовлетворяющих условию $\sum_{i \geq 1} |\xi_i| < \infty$.

Мы будем рассматривать элементы Ξ как счетномерные вектор-строки.

- Символ Λ обозначает множество всех последовательностей $\lambda \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, удовлетворяющих условию $\sup_{i \geq 1} |\lambda_i| < \infty$.

Мы будем рассматривать элементы Λ как счетномерные вектор-столбцы.

- Символ $\mathcal{H}$ обозначает множество всех бесконечных матриц H, компоненты которых индексированы парами натуральных чисел, и удовлетворяют условию $\sup_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} |H_{ij}| < \infty$.

$\forall H, H' \in \mathcal{H}$ запись HH' обозначает матрицу из $\mathcal{H}$, компоненты которой определяются следующим образом:

$$\forall i, j \in \mathbf{N} \quad (HH')_{ij} = \sum_{k \geq 1} H_{ik} H_{kj}.$$

Нетрудно видеть, что

— операция умножения матриц из $\mathcal{H}$ ассоциативна, и

— нейтральным элементом относительно этой операции является матрица *E,* определяемая следующим образом:

$\forall i, j \in \mathbf{N} \;\; E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 1$, если $i = j$, и 0, иначе.

• $\forall \xi \in \Xi$, $\forall H \in \mathcal{H}$ запись ξH обозначает вектор-строку из Ξ, компоненты которой определяются следующим образом:

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad (\xi H)_i = \sum_{k \geq 1} \xi_k H_{ki}.$$

• $\forall \lambda \in \Lambda$, $\forall H \in \mathcal{H}$ запись $H\lambda$ обозначает вектор-столбец из Λ, компоненты которого определяются следующим образом:

$$\forall i \in \mathbf{N} \quad (H\lambda)_i = \sum_{k \geq 1} H_{ik} \lambda_k.$$

5.5.2 Понятие счетномерного линейного автомата и связанные с ним понятия

Пусть задано конечное множество *X*.

Счетномерным линейным автоматом (СЛА) мы будем называть тройку *L* вида

$$L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda) \quad (5.60)$$

где $\xi^0 \in \Xi$, $\forall x \in X \;\; L^x \in \mathcal{H}$, $\lambda \in \Lambda$.

Так же, как и для обычных ЛА, для каждого СЛА *L* можно определить понятие реакции $f_L \in \mathbf{R}^{X^*}$ и языка $L_a \subseteq X^*$, представимого СЛА с заданной точкой сечения $a \in \mathbf{R}$:

- $\forall u \in X^* \;\; f_L(u) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^0 L^u \lambda$, где

$$L^u \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} E, & \text{если } u = \varepsilon, \\ L^{x_1} \dots L^{x_n}, & \text{если } u = x_1 \dots x_n, \text{где } x_1, \dots, x_n \in X, \end{cases}$$

- язык L_a определяется соотношением (4.20).

Пусть $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$ - СЛА.

Базисные матрицы СЛА *L* - это бесконечные матрицы M_L и N_L, обладающие следующими свойствами:

• строки матрицы M_L образуют базис линейного подпространства пространства Ξ, порожденного строками вида $\xi^0 L^u$, где $u \in X^*$,

• столбцы матрицы N_L образуют базис линейного подпространства пространства Λ, порожденного столбцами вида $L^u\lambda$, где $u \in X^*$.

Базисные матрицы M_L и N_L определяют конгруэнции на линейных пространствах Ξ и Λ соответственно, обозначаемые символом $\sim_L$ и определяемые следующим образом:

$$\forall \xi, \xi' \in \Xi \quad \xi \sim_L \xi' \quad \Leftrightarrow \quad \xi N_L = \xi' N_L,$$
$$\forall \lambda, \lambda' \in \Lambda \quad \lambda \sim_L \lambda' \quad \Leftrightarrow \quad M_L\lambda = M_L\lambda'.$$

Нетрудно доказать, что если матрица M_L (N_L) имеет конечное число строк (столбцов), то конгруэнция $\sim_L$ на Ξ (Λ) имеет конечный индекс.

5.5.3 Свойства счетномерных линейных автоматов

Теорема 12.

Пусть L - СЛА вида (5.60), $a \in \mathbf{R}$, и $E = \Xi$ или Λ.

Тогда L_a − ВЯ $\Leftrightarrow \exists$ линейная конгруэнция ~ конечного ранга на E, обладающая следующими свойствами:

•

$$\forall x \in X \ \exists L^x_\sim : \quad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "L^x"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ E_\sim \arrow[r, dashed, "L^x_\sim"] & E_\sim \end{tikzcd} \qquad (5.61)$$

где $E_\sim$ - фактор-пространство, и $E \to E_\sim$ - каноническая проекция,

• $\exists$ линейное отображение $\lambda_\sim : E_\sim \to \mathbf{R}$, $\exists\, \xi^0_\sim \in E_\sim$, $\exists\, b \in \mathbf{R}$:

$$u \in L_a \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_\sim(\xi^0_\sim A^u_\sim) > b. \quad (5.62)$$

Доказательство.

Обоснуем лишь импликацию "$\Rightarrow$".

Пусть $\exists$ ВА B, $\exists\, b \in \mathbf{R} : L_a = B_b$.

Обозначим символом π эпиморфизм $E \to \mathbf{R}^{|S_B|}$.

Искомая конгруэнция ~ определяется следующим образом:

• если $E = \Xi$, то $\xi' \sim \xi'' \ \Leftrightarrow \ \pi(\xi')B^u = \pi(\xi'')B^u$,

• если $E = \Lambda$, то $\lambda' \sim \lambda'' \ \Leftrightarrow \ B^u\pi(\lambda') = B^u\pi(\lambda'')$.

Отметим, что для каждого СЛА L

• конгруэнция $\sim_L$ (определённая в конце пункта 5.5.2) обладает свойством (5.61), и

• если конгруэнция $\sim_L$ имеет конечный индекс, то для языка $(f_L)_0$ выполнены условия теоремы 12. (напомним, что

$\forall f \in \mathbf{R}^{X^*}\ f_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in X^* \mid f(u) > 0\}$)

Пусть *G* - некоторая полугруппа. Мы будем использовать следующие обозначения.

• Запись $\mathbf{R}^G$ обозначает множество функций вида $f : G \to \mathbf{R}$. $\mathbf{R}^G$ является линейным пространством, в котором операции сложения и умножения на действительные числа определяются стандартным образом.

• $\forall f \in \mathbf{R}^G,\ \forall u \in G$ запись f_u обозначает функцию из $\mathbf{R}^G$, которая сопоставляет каждому $u' \in G$ число $f(uu')$.

• $\forall f \in \mathbf{R}^G$ запись T_f обозначает множество $\{f_u \mid u \in G\}$.

• $\forall f \in \mathbf{R}^G$запись $\langle T_f \rangle$ обозначает подпространство линейного пространства $\mathbf{R}^G$, порожденное функциями из T_f.

Теорема 13

Пусть *G* - полугруппа, $f \in \mathbf{R}^G$, **и** $|Im(f)| < \infty$. Тогда

$$\dim \langle T_f \rangle < \infty \ \Leftrightarrow\ |T_f| < \infty.$$

Доказательство.

Импликация "$\Leftarrow$" является очевидной.

Докажем импликацию "$\Rightarrow$".

$\langle T_f \rangle$ можно рассматривать как нормированное конечномерное линейное пространство, где $\|f\| = \max\limits_{u \in G} |f(u)|$.

T_f - ограниченное подмножество $\langle T_f \rangle$, поэтому T_f - компакт.

Из $|Im(f)| < \infty$ следует, что $\exists\, c > 0$:

$$\forall f_{u_1} \neq f_{u_2} \in T_f \quad \|f_{u_1} - f_{u_2}\| \geq c \qquad (5.63)$$

Из компактности T_f следует, что множество открытых шаров с центрами в точках из T_f радиуса $\frac{c}{2}$ содержит конечное подмножество, покрывающее T_f. Согласно (5.63), отсюда следует, что $|T_f| < \infty$.

Теорема14.

Пусть *L* - СЛА вида (5.60), $a \in \mathbf{R}$, **и** $E = \Xi$ **или** Λ.

Тогда язык L_a регулярен $\Leftrightarrow\ \exists$линейная конгруэнция ~ конечного ранга на *E,* такая, что

• ~ обладает свойствами, изложенными в теореме 12,

• $|\{\lambda_\sim(\xi^0_\sim A^u_\sim) \mid u \in X^*\}| < \infty$.

Доказательство.

Импликация "$\Rightarrow$" следует из теоремы 12, в данном случае *B* КДА, и
$\forall u \in X^* \quad \lambda_\sim(\xi^0_\sim A^u_\sim) \in \{0,1\}$.
Докажем импликацию "$\Leftarrow$".
Обозначим символом *f/* функцию из $\mathbf{R}^{X^*}$, которая сопоставляет каждому $u \in X^*$ число $\lambda_\sim(\xi^0_\sim A^u_\sim)$. Поскольку *f* - ЛАФ, то $\dim\langle L_f\rangle < \infty$, поэтому по теореме 13 $|L_f| < \infty$. Нетрудно видеть, что язык b_a совпадает с множеством строк, которые принимаются конечным детерминированным автоматом
$A = (X, S, s^0, \delta, F)$, где

- $S \stackrel{\text{def}}{=} \{f_u \mid u \in X^*\}$,
- $s^0 \stackrel{\text{def}}{=} f_\varepsilon = f$,
- $\delta : S \times X \to S, \quad \delta(f_u, x) \stackrel{\text{def}}{=} f_{ux}$,
- $F \stackrel{\text{def}}{=} \{f_u \mid f(u) > a\}$.

Теорема 15.
Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}, |Im(f)| < \infty$.
Тогда f − ЛАФ $\Leftrightarrow$ $|\{f_u \mid u \in X^*\}| < \infty$.
Теорема 16.
Пусть $S \subset X^*$. Тогда χ_S (характеристическая функция подмножества *S)* - ЛАФ $\Leftrightarrow$ S регулярен.
Теорема 17.
Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}, |Im(f)| < \infty$.
Тогда f − ЛАФ $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbf{R} \ \{u \in X^* \mid f(u) = a\}$ регулярен.
Доказательство.
Импликация "$\Rightarrow$" следует из теоремы 14.
Докажем импликацию "$\Leftarrow$".
Пусть $Im(f) = \{a_1, \ldots, a_m\}$, и $\forall i = 1, \ldots, m$ существует ДА A_i, который представляет язык $\{u \in X^* \mid f(u) = a_i\}$. Представим этот ДА в виде ЛА $(\xi^0_i, \{B^x_i \mid x \in X\}, \lambda_i)$, т.е.

- ξ^0_i содержит единицу в позиции, соответствующей начальному состоянию A_i, остальные компоненты ξ^0_i равны 0,
- $(B^x_i)_{s,s'} = 1$, если $s' = \delta_i(s, x)$, и 0 - иначе,
- компоненты λ_i, соответствующие терминальным состояниям A_i, равны 1, остальные компоненты λ_i равны 0.

Тогда $f(u) = (\xi_1^0 \ldots \xi_m^0) \begin{pmatrix} B_1^u & & \\ & \ldots & \\ & & B_m^u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1\lambda_1 \\ \ldots \\ a_m\lambda_m \end{pmatrix}.$

5.6 Достижимость и различимость в линейных автоматах

5.6.1 Достижимость

Пусть задан ЛА $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и $n = \dim L$.
Вектор $\xi \in \mathbf{R}^n$ называется достижимым в *L*, если
$\exists u \in X^* : \ \xi = \xi^0 L^u.$

Степенью достижимости ЛА *L* называется число

$$\delta(L) \stackrel{\text{def}}{=} \min\ k : \langle \xi^0 L^u \mid u \in X^* \rangle = \langle \xi^0 L^u \mid u \in X^{\leq k} \rangle,$$

где $\forall\, V \subseteq \mathbf{R}^n$ запись $\langle V \rangle$ обозначает подпространство, порожденное векторами из множества *V*.
Обозначим записью M_L бесконечную матрицу, строками которой являются вектора вида $\xi^0 L^u \ (u \in X^*)$, и записью $r(M_L)$- ранг этой матрицы. Нетрудно видеть, что $r(M_L) \leq n$.

Теорема 18.
Если *L* - ЛА конечной размерности, то $\delta(L) \leq r(M_L) - 1$.

Доказательство.
Цепочка подпространств

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{R}^n,$$

где

$$V_0 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \xi^0 \rangle \text{ и } \forall\, k \geq 0 \quad V_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} V_k + \langle \{\xi L^x \mid \xi \in V_k, x \in X\} \rangle,$$

не может неограниченно возрастать. Нетрудно видеть, что

$$\forall\, k \geq 0 \quad V_k = \langle \{\xi^0 L^u \mid u \in X^{\leq k}\} \rangle,$$

и минимальное *k*, такое, что $V_k = V_{k+1}$, совпадает с $\delta(L)$, и удовлетворяет неравенству

$$k + 1 \leq \dim V_k = r(M_L),$$

откуда следует утверждение теоремы.

5.6.2 Различимость

Пусть задан ЛА $L = (\xi^0, \{L^x \mid x \in X\}, \lambda)$, и $n = \dim L$.

Векторы $\xi_1, \xi_2 \in \mathbf{R}^n$ называются **различимыми** в L, если

$$\exists u \in X^* : \ \xi_1 L^u \lambda \neq \xi_2 L^u \lambda. \quad (5.64)$$

Ниже запись $\xi_1 \not\sim_L \xi_2$ обозначает соотношение (5.64).

Степенью различимости ЛА L называется число

$$\rho(L) \stackrel{\text{def}}{=} \min k : \xi_1 \not\sim_L \xi_2 \Rightarrow \ \exists u \in X^{\leq k} : \xi_1 L^u \lambda \neq \xi_2 L^u \lambda.$$

Из определения $\rho(L)$ следует, что

$$\langle L^u \lambda \mid u \in X^* \rangle = \langle L^u \lambda \mid u \in X^{\leq \rho(L)} \rangle.$$

Обозначим записью N_L бесконечную матрицу, столбцами которой являются вектора вида $L^u \lambda \ (u \in X^*)$, и записью $r(N_L)$-ранг этой матрицы. Нетрудно видеть, что $r(N_L) \leq n$.

Теорема 19.

Если L - ЛА конечной размерности, то $\rho(L) \leq r(N_L) - 1$.

Доказательство.

Теорема доказывается аналогично теореме 18: определяется цепочка вложенных подпространств $\{V_k \mid k \geq 0\}$, где

$$\forall i \geq 0 \quad V_k = \langle \{L^u \lambda \mid u \in X^{\leq k}\} \rangle,$$

и нетрудно доказать, что тот номер k, на котором эта цепочка стабилизируется (т.е. минимальное k, такое, что $V_k = V_{k+1}$), совпадает с $\rho(L)$.

5.7 Реализация функций на строках линейными автоматами

Пусть X - конечное множество.

Ганкелева матрица функции $f \in \mathbf{R}^{X^*}$ - это бесконечная матрица H^f, строки и столбцы которой индексированы элементами множества X^* и

$$\forall u, v \in X^* \quad H^f_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} f(uv),$$

где $H^f_{u,v}$ - элемент в строке *u* и столбце *v* матрицы H^f.

Для каждого $u \in X^*$ записи $\vec{H}^f_u$ и $H^{f\downarrow}_u$ обозначают строку *u* и столбец *u* соответственно матрицы H^f (данные понятия определяются так же, как аналогичные понятия из пункта 2.1.2).

Мы будем обозначать записью $r(f)$ ранг матрицы H^f, т.е. размерность линейного пространства, порожденного множеством её строк (или столбцов).

Подмножество *B* строк (или столбцов) матрицы H^f называется **базисным,** если порождаемое ими линейное пространство $\langle B \rangle$ совпадает с пространством, порождаемым всеми строками (или столбцами) H^f, и ни один элемент *B* не является линейной комбинацией других элементов *B*.

Теорема 20.

Если $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, и $r(f) < \infty$, то в матрице H^f можно выбрать такое базисное множество *B* строк (или столбцов), что индекс *u* каждой строки (или столбца) из *B* удовлетворяет условию

$|u| \le r(f) - 1.$

Будем использовать следующие обозначения. Пусть

$$r \stackrel{\text{def}}{=} r(f) < \infty,$$

и *U* и *V* - последовательности строк из *X** вида

$$U = (u_1, \ldots, u_r), \quad V = (v_1, \ldots, v_r) \quad (5.65)$$

соответственно, обладающие следующими свойствами:

- $u_1 = v_1 = \varepsilon$,
- $\{\vec{H}^f_u \mid u \in U\}$ и $\{H^{f\downarrow}_v \mid v \in V\}$ - базисные множества строк и столбцов матрицы H^f соответственно.

Тогда

- запись $(U, V)^f$ обозначает квадратную матрицу порядка *r*, строки и столбцы которой индексированы элементами *U* и *V* соответственно (мы будем называть эту матрицу **базисной матрицей** фунции *f*), и

$$\forall u \in U, \ \forall v \in V \quad (U, V)^f_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} f(uv),$$

т.е. $(U, V)^f$ - подматрица порядка *r* матрицы H^f (нетрудно доказать, что $(U, V)^f$ - невырожденная подматрица максимального порядка матрицы H^f),

- $\forall w \in X^*$ запись $(U, V)^{f,w}$ обозначает квадратную матрицу порядка *r*, строки и столбцы которой индексированы элементами *U* и *V* соответственно, и

$$\forall u \in U, \ \forall v \in V \quad (U, V)^{f,w}_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} f(uwv).$$

Теорема 21.

Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, $r = r(f) < \infty$, и U, V - последовательности строк из *X**, такие, что $(U, V)^f$ базисная матрица функции *f*.

Тогда

$$(U, V)^{f,uv} = (U, V)^{f,u}\left((U, V)^f\right)^{-1}(U, V)^{f,v}.$$

Доказательство.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{pmatrix} (U,V)^f & (U,V)^{f,v} \\ (U,V)^{f,u} & (U,V)^{f,uv} \end{pmatrix} =$$
$$= ((u_1,\ldots,u_r,u_1u,\ldots,u_ru),(v_1,\ldots,v_r,vv_1,\ldots,vv_r))^f.$$

Доказываемое равенство является следствием того, что ранг этой матрицы равен *r*.

Из теоремы 21 вытекает нижеследующая теорема.

Теорема 22.

Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, $r = r(f) < \infty$, и *U, V* - последовательности строк из *X**, такие, что $(U,V)^f$ базисная матрица функции *f*.

Тогда $\forall\, u \in X^*$, если $u = x_1 \ldots x_s$, где $x_1,\ldots,x_s \in X$, то

$$(U,V)^{f,u} = (U,V)^{f,x_1}\Big((U,V)^f\Big)^{-1}\ldots\Big((U,V)^f\Big)^{-1}(U,V)^{f,x_s}.$$

Теорема 23.

Пусть $f \in \mathbf{R}^{X^*}$, $r = r(f) < \infty$, и *U, V* - последовательности строк из *X**, такие, что $(U,V)^f$ - базисная матрица функции *f*.

Тогда $f = f_L$, где *L* - ЛА, определяемый следующим образом:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \Big(\vec{e}_1,\ \Big\{(U,V)^{f,x}\Big((U,V)^f\Big)^{-1} \mid x \in X\Big\},\ (U,V)^f e_1^{\downarrow}\Big).$$

5.8. О сравнительной сложности вероятностных и детерминированных автоматов

Понятие представимости языка конечным вероятностным автоматом (ВА) с изолированной точкой сечения введено Рабиным. Оказалось, что ВА с изолированной точкой сечения представляют регулярные языки, т.е. по своим возможностям не превосходят детерминированные автоматы (ДА). Так как ВА "проигрывает" по сравнению с ДА в точности распознавания слов, то целесообразность использования ВА оправдывается в случае экономии сложности (чиосла состояний) по сравнению с детерминированным распознаванием.

Рабиным доказана оценка, показывающая, какую максимальную экономию сложности можно получить при использовании ВА вместо ДА. Здесь мы попытаемся уточнить эту оценку.

В настоящее время известны примеры языков, для распознавания которых использование ВА вместо ДА дает значительную экономию сложности. С другой стороны, построены языки, для распознавания которых ВА не дает никакой экономии сложности по сравнению с ДА . В связи с этим возникает вопрос: почему для некоторых языков использование ВА вместо ДА дает значительную экономию сложности, а для некоторых нет?

Ниже будет доказана нижняя оценка сложности ВА. представляющего язык с изолированной точкой сечения. Эта оценка существенно зависит от степени изолированности точки сечения и от автоматной структуры языка. Приведенные примеры языков демонстрируют соотношение между известной рзбиновской и новой оценкой вероятностной сложности

Конечное множество *X* будем называть *алфавитом.* Символами *u, v, r* будем обозначать слова в алфавите *X*. Через |*v*| будем обозначать длину слова *v*. Если *G* конечное множество, то через |G| будем обозначать его мощность. Через *X** будем обозначать множество всех слов в алфавите *X*. Для регулярного языка $L \subseteq X^*$ через *D(L)* будем обозначать число состояний минимального инициального ДА без выходов, представляющего язык *L* финальным множеством состояний.

Вероятностный автомат над алфавитом X - это система

$B = (X, C, \{M(x), x \in X\}, \mu(e), F)$,

где *C* - конечное упорядоченное множество состояний, $\{M(x): x \in X^*\}$ - множество стохастических матриц размерности $|C| \times |C|$, F $(F \subseteq C)$ финальное множество состояний; *μ(e)* - |C|-мерный стохастический вектор начальное распределение вероятностей состояний. Через *ν* будем обозначать вектор-столбец размерности |C|, *i*-я компонента которого есть 1, если *i*-е состояние $s_i \in F$, и 0 в противном случае. Для слова $v = x_1 x_2 \ldots x_n$ положим $M(x) = M(x_1)M(x_2)\ldots$ $\ldots M(x_n)$, $\mu(v) = \mu(e)M(v)$, $\nu(v) = M(v)\nu$. Через $\mu(v)$, $\nu_s(v)$ будем обозначать компоненты векторов $\mu(v)$, $\nu(v)$, соответствующие состоянию $s \in C$. Содержательно $\mu_s(v)$ - это условная вероятность того, чго автомат *B* после прочтения слова *v* окажется в состоянии $s \in C$, а $\nu_s(v)$ это условная вероятность того, что *B* перейдет в состояние из финального множества после обработки слова *v*, начав работу из состояния *s*.

Для слова *v* положим $\chi(v) = \mu(v)\nu$. Содержательно $\chi(v)$ - это вероятность того, что после прочтения слова *v* автомат *B* перейдет в состояние из финального множества. Множество слов $\{v \in X^*: \chi(v) > 1/2\}$ называется *языком, представимым а автомате B точкой сечения* 1/2. Говорят, что точка сечения 1/2

ϵ-*изолирована* относительно автомага *В,* $\epsilon \in (0, 1/2]$,если для любого слова $v \in X^*$ либо $\chi(v) \geq 1\ 2 + \epsilon$, либо $\chi(v) \leq 1/2-\epsilon$
Через $P(L, \epsilon)$ обозначим наименьшее из возможных чисел состояний ВА, представляюшего регулярный язык *L* ϵ-изолированной точкой сечения 1/2.
Все логарифмы будем рассматривать по основанию два. Нижние оценки сложности ВА имеют следующий вид. Для произвольного регулярного языка $L \subseteq X^*$ для любого $\epsilon \in (0, 1/2]$

$$P(L, \epsilon) \geq (\log D(L))/\log c(\epsilon),$$

где $c(\epsilon) =1 + k/\epsilon$, *k* - число состояний финального множества состояний соответствующею ВА. Доказано, что $c(\epsilon) = 1 + 1\ (2\epsilon)$, и установлена оценка $c(\epsilon) < ((1 + \sqrt{1/\epsilon})/2)^{2+\theta}$, где $0 < \theta < 1$, θ убывает с ростом D(*L*) и ϵ.
Пусть для регулярного языка *L* автомат $A = (X, S, \delta, s_0, F)$ - это минимальный ДА (МДА) над алфавитом *X* с множеством состояний *S* , функцией переходов δ, представляющий язык *L* выделенным начальным состоянием $s_0 \in S$ и финальным множеством состояний $F \subseteq S$.
Множество слов $R \subseteq X^*$ будем называть *контрольным* для подмножества сосюянии *S'*, если для любых двух состояний $s_1, s_2 \in S'$ существует такое слово $r \in R$, что $\delta(s_1, r) \subset F$, а $\delta(s_2, r) \notin F$, либо наоборот.
Построить контрольное множество слов *R* для подмножества состояний $S' \subseteq S$ можно, например, следующим образом.
На первом шаге выбираем произвольное слово $r \in X^*$, для которого существуют такие два непустых подмножества $S_0(r)$, $S_1(r)$, что $S_0(r) = \{s \in S':$

$$\delta(s, r) \notin F\},\ S_1(r) = \{s \in S'\ \ \delta(s, r) \in F\}.$$

Будем говорить, что слово *r разделяет* множескво *S* .
На втором шаге выбираем два произвольных слова $r', r'' \in X^*$ таких, что *r'* разделяет множество $S_0(r')$, а слово *r''* разделяет множество $S_1(r'')$ и т.д.
Через $R(S')$ обозначим произвольное минимальное по мощности контрольное множество слов для подмножества *S'*.
Положим $d(S') = |S'|$, $t(S') = |R(S')|$.
Из описанного алгоритма построения контрольного множества следует оценка.
Свойство 1. Для произвольного непустого подмножества *S'* множества состояий МДА *A*

$$\log d(S') \leq t(S') \leq d(S').$$

Теорема. *Пусть* $L \in X^*$ *регулярный язык и А - МДА, представляющий язык яшк L . Пусть S' - непустое подмножество состояний автомата А. Тогда для каждого* $\epsilon \in [0, 1/2]$

$$P(L, \epsilon) \geqslant 2^{\log d(S') \quad t(S')h(\Delta)}.$$

где $\Delta = 1/2 + \epsilon,\ h(\Delta) = -\Delta\log\Delta - (1 - \Delta)\log(1 - \Delta)$

Доказательство. При доказательстве используется энтропийный подход. Он применяется в теории вероятностных алгоритмов.

Пусть $S' = \{s_1,\ s_2, \ldots,\ s_d\} \in S,\ R(S') = \{r_1,\ r_2, \ldots,\ r_t\}$.

Пусть $G = \{u_1\ \ u_2, \ldots\ .\ u_d\}$ - такое множество слов, что $\delta(s_0,\ u_i) = S_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

На множестве *G* зададим равновероятное распределение вероятностей Р (для всех $u \in G \quad P(u) = 1/d)$. В вероятностном пространстве *(G, p)* зададим *i*-мерную случайную величину $\pi = (\pi_1,\ \pi_2, \ldots,\ \pi_t)$ следчюшич образом. Каждому слову $u \in G$ соответствует $\pi(u) = (\pi_1(u), \pi_2(u), \ldots, \pi_t(u))$ где

$$\pi_i(u) = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ ur_i \in L, \\ 0, & \text{если}\ \ ur_i \notin L, \end{cases}$$

$r_i \in R,\ \ i \in \{1, 2\ \ldots, t\}$.

Пусть *В* - это ВА, представляющий язык *L* ϵ-изолированной точкой сечения 1/ 2. Рассмотрим случайную величину θ, принимающую значения из множества G, распределение вероятностей которой задается следующим образом:

$$P(\theta = S \mid \pi = \sigma) = \mu_s(u). \quad \textbf{(1)}$$

где слово *и* соответствует значению *σ* случайной величины π. (Там. где нужно будет отметить эту связь, будем писать *u*(σ).)

Оценим количество информации о случайной величине π и случайной величине *θ*

$$I(\pi, \theta) = H(\theta) - H(\theta \mid \pi) \leqslant H(\theta) \leqslant \log|C|.$$

с другой стороны, в силу симметричности функции $I(\pi : \theta)$

$$I(\pi : \theta) = H(\pi) - H(\pi \mid \theta).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$|C| \geqslant 2^{H(\pi) \quad H(\pi, \theta)}. \quad (2)$$

Так как π принимает равновероятно *d* различных значений,то

$$H(\pi) = \log d.$$

Покажем, что

$$H(\pi \mid \theta) \leqslant th(\Delta) \quad (3)$$

(тогда из этого неравенства и (2) будет следовать утверждение теоремы) ;

$$H(\pi|\theta) = H(\pi_1\pi_2\ldots\pi_t|\theta) \leqslant \sum_{i=1}^{t} H(\pi|\theta). \quad \textbf{(4)}$$

Для произвольного $i \in \{1, 2, \ldots.\}$ оценим $H(\pi_i|\theta)$. Для этого рассмотрим случайные величины η_j, $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, принимающие два значения 1 и 0 и задаваемые вероятностями

$$P(\eta_j = 1|\theta = s) = v_s(r_j), \quad P(\eta_j = 0|\theta = s) = 1 - v_s(r_j). \quad (5)$$

Содержательно $v_s(r_j)$ - это вероятность принятия слова r_j автоматом B при условии, что автомат начал обработку слова r_j в сосюинии s.

Покажем, что

$$H(\pi_t|\theta) \leqslant H(\pi_t|\eta_t). \quad (6)$$

Действительно, поскольку значения случайной величины η_j для любого $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ определяются значением случайной величины θ и не зависят от того, при каких значениях случайной величины π_j, появились значения θ, то справедливо равенство

$$H(\pi_t|\theta) = H(\pi_t|\theta, \eta_t).$$

Следовательно,

$$H(\pi_t|\theta) = H(\pi_t|\theta, \eta_t) \leqslant H(\pi_t|\eta_t).$$

В частности, верно неравенство (6).

Оценим сверху величину

$$H(\pi_t|\eta_t) = P(\eta_t = 1)H(\pi_t|\eta_t = 1) + P(\eta_t = 0)H(\pi|\eta_t = 0)$$

Положим $\beta = P(\pi_i = 1|\eta_i = 1)$, $\beta' = P(\pi_i = 0|\eta_i = 0)$. Тогда с учетом неравенства Иенсена для выпуклой функции h получаем оценку

$$H(\pi_t|\eta_t) = P(\eta_t = 1)h(\beta) + P(\eta_t = 0)h(\beta') \leqslant h(P(\eta_t = \pi_t)). \quad \textbf{(7)}$$

Оценим значение вероятности $P(\pi_t = \eta_i)$. Содержательно $P(\pi_i = \eta_i)$ - это вероятность получения правильною результата вероятностным автомагом B при обработке слова ur_i. По определению автомата B эта вероятность не меньше A. Ясно, чю

$$P(\pi_t = \eta_t) = P(\pi_t = 1)P(\eta_t = 1|\pi_t = 1) + P(\pi_i = 0)P(\eta_t = 0|\pi_t = 0).$$

Далее

$$P(\eta_i = 1|\pi_t = 1) = \frac{\sum_{\sigma}\sum_{s \in S} P(\eta_t = 1, \pi = \sigma, \theta = S)}{P(\pi_i = 1)}$$

Здесь суммирование ведется по таким значениям σ t- мерной случайной величины π, для которых $\sigma_t = 1$.

Из (2) и (5) следует, что

$$P(\eta_i = 1 \mid \pi_i = 1) = \frac{\sum\limits_{\sigma} P(\pi = \sigma) \sum\limits_{s \in S} \mu_s(u(\sigma)\nu_s(r_i))}{P(\pi_i = 1)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{\sigma} P(\pi = \sigma)\chi(u(\sigma)r_i)}{P(\pi_i = 1)} \geqslant \min_u \{\chi(ur_i)\}.$$

Здесь суммирование ведется по всем таким значениям σ t -мерной случайной величины π, для которых $\sigma_i = 1$, а минимум берется по всем словам u таким, что $ur_i \in L$. Таким образом,

$$P(\eta_i = 1 \mid \pi_i = 1) \geqslant \Delta.$$

Далее, аналогичным образом получаем, что

$$P(\eta_i = 0 \mid \pi_i = 0) \geqslant \min_u \{1 - \chi(ur)\},$$

где минимум берется по всем словам u таким, что $ur \notin L$.
Следовательно,

$$P(\eta_i = 0 \mid \pi_i = 0) \geqslant \Delta.$$

Таким образом,

$$P(\eta_i = \pi_i) \geqslant \Delta.$$

Поскольку функция h на отрезке (1/2, 1] монотонно убывает, то в силу (6), (7) и последнего неравенства

$$H(\pi_i \mid \theta) \leqslant h(\Delta).$$

Из (5) и предыдущего неравенства следует соотношение (4).
Теорема доказана.
Обозначим $t(L)$ мощность минимального контрольного множества для множества состояний МДА, представляющего регулярный язык L.
Непосредственно из теоремы получаем
Следствие 1. *Пусть $L \subseteq X^*$ регулярный язык. Тогда для любого $\epsilon \in$* $\in [0, 1/2]$

$$P(L, \epsilon) \geqslant 2^{\log D(L) - t(L)h(\Delta)}.$$

Значение нижней оценки $P(L, \epsilon)$ в теореме и следствии 1 сильно зависит от степени изолированности ϵ точки 1/2 сечения 1/2 и характеристики t автоматной структуры языка L.
Следствие 2. *Для произвольного регулярного языка $L \subset X^*$, для любого числа $\gamma \in (0, 1)$ существует такое $\epsilon_1 \in (0, 1/2)$, что для всех* $\epsilon \in [\epsilon_1, 1/2]$

$$P(L, \epsilon) \geqslant D(L)^{1-\gamma}$$

Действительно, для языка L , для числа γ сушествует такое ϵ_1, что для всех $\epsilon \geqslant \epsilon_1$

$$h(1/2 + \epsilon) \leqslant \gamma \frac{\log D(L)}{t(L)}.$$

Из следствия 2 непосредственно получаем

Следствие 3. *Для произвольного регулярного языка* $L \subsetneq X^*$

$P(L, 1/2) \geqslant D(L)$

Заметим, что утверждение следствия 3 является тривиальным, так как из определения представимости языка изолированной точкой сечений следует, что $P(L, \epsilon) = D(L)$. Существенным в данном случае является то, что для $\epsilon = 1/2$ теорема дает точную оценку сложности и что эта оценка не извлекается из оценок рабиновского типа.

Подмножество *S'* множества состояний S МДА, представляющего регулярный язык *L*, будем называть полным, если $t(S') = \log d(S')$.

Следствие 4. *Для произвольного регулярного языка* L, *для произвольного* $\epsilon \in [0, 1/2]$

$P(L, \epsilon) \geqslant d^{1-h(\Delta)}$,

где d - *мощность полного подмножества состоянии* МДА, *представляющего язык* L,

Рассмотрим два примера. Пусть *l* целое число,

$l \geqslant 1, \quad n = 2^{2^l}, \ X = \{0, 1\}$ — алфавит.

Пример 1. Для слова $r \in X^*$ обозначим *b(r)* число, двоичное разложение которого есть *r*. Положим $\|r\| = b(r) + 1$. Пусть $t = \log(\log n)^2$. Язык L_n состоит из всех слов вида $v = ur$, где $u, r \in X^*, |u| = 2^t, |r| = t, \|r\|$-я буква слова *u* есть 1

Пусть А - это МДА, представляющий язык *L*. Через *s(u)* будем обозначать состояние автомата А, достижимое из начального состояния словом *u*. Положим

$S' = \{s(u), u \in X^*, |u| = 2^t\}, \quad R = \{r \in X^* \ |r| = t\}$

Из определения языка следует, что *R* это минимальное контрольное множество для *S'* . При этом 1) множеству *S'* является полным и 2) $|S'| = 2^{2^t}$.

Согласно следствию 4 для любого $\epsilon \in [0,1/2]$

$P(L_n, \epsilon) \geqslant 2^{2^t(1-h(\Delta))}$

или

$P(L_n, \epsilon) \geqslant n^{(1-h(\Delta))\log n}$.

Далее язык L_n состоит из слов длины $N = 2^t + t$. $D(L_n) \leqslant$ c2^N/N для некоторой константы с >1. С другой стороны, мощность подмножества *S'* дает нижнюю оценку сложности для $D(L_n)$ Таким образом,

$n^{\log n} \leqslant D(L_n) \leqslant cn^{\log n}$ (8)

Последнее неравенство и оценки рабиновского типа дают для произвольного $\epsilon \in (0,1/2]$ следующую нижнюю оценку:

$P(L_n, \epsilon) \gtrsim (\log n)^2$. (9)

Здесь и ниже для последовательностей чисел $\{u_n\}$, $\{b_n\}$ запись $u_n \gtrsim b_n$ означает, что существует положительная константа *c* такая, что $u_n \geqslant cb_n$, начиная с некоторого n_0. Из оценок (8), (9) следует, что для произвольного фиксированного значения $\epsilon \in (0, 1/2]$, начиная с некоторого n_0, оценки $P(L_n, \epsilon)$ следствия 4 точнее оценок рабиновского типа.

Пример 2. Язык V_n соечоит из слов вида $v = uu$, где $|u| = n$. Из построения МДА, представляющего язык V_n, следует, что

$D(V_n) = 2(2^{n+1} - 1) + 1$.

При этом для произвольного фиксированного $\epsilon \in (0, 1/2]$, оценка рабиновского типа даст нижнюю оценку

$P(V_n, \epsilon) \gtrsim n$

Свойство 2 . Для произвольного фиксированного $\epsilon \in (0, 1/2]$,

$$P(V_n, \epsilon) \lesssim \frac{n^4}{\log n}.$$

Свойство 3. Для произвольного фиксированного $\epsilon \in (0, 1/2]$, для всех *n* значение нижней оценки теоремы для $P(V_n, \epsilon)$ не превышает некоторой константы *c* зависящей от ϵ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть *A* это МДА, представляющий язык V_n. Для любого состояния $s \in S$ и любого слова *r* длины, большей чем 2*n*, состояние $\delta(S, r) \notin F$. Поэтому имеет смысл рассматривать работу *A* на словах из множества G, состоящего из всех слов длины, не больше 2*n* .

Обозначим M(S, G) булевскую матрицу, строки которой соответствуют состояниям из S, а столбцы словам из G . На пересечении строки $s \in S$ и столбца $r \in G$ стоит 1, если $\delta(s, r) \in F$, и 0 в противном случае. Из определения языка V_n следует, что матрица *M(*S , *G)* такова, что в каждом ее столбце стоит не более одной единицы.

Из сказанного следует, что значения оценок теоремы и следствий из нее применительно к языку V_n не превышают некоторой константы, зависящей от ϵ.

Свойство доказано.

Из следствия 2 получаем следующее утверждение

Свойство 4. Для каждого *n* для любого $\gamma \in (0, 1)$ существует $\epsilon_1 \in (0, 1/2)$ такое, что для всех $\epsilon \in [\epsilon_1, 1/2]$

$P(V_n, \epsilon) \geqslant 2^{n(1-\gamma)}$

В заключение отметим, что рассмотренные примеры языков демонстрируют степень влияния автоматной структуры языков на величину вероятностной сложности языков. Почти все множество состояний МДА, представляющею язык $L_{n,}$, является полным, тогда как в множесше состояний МДА, представляющею язык V_n . имеются только тривиальные (двухэлементные) полные подмножества состояний

Таким образом, для языков с более богатой автоматной структурой применение ВА вместо ДА не может дать большую экономию сложности, тогда как для языков с бедной автоматной структурой применение ВА вместо ДА может дать значительную экономию сложности по сравнению с ДА

Причем, как показывают рассмотренные примеры, разбросы значений детерминированной и вероятностной сложности языков могут быть таковы, что, например, язык V_n, являясь детермипированно более счожным, но автоматно "более бедным", чем язык L_n , вероятностно, наоборот имеет меньшую сложность, чем язык L_n

6. Некоторые проблемы теории вероятностных автоматов

6.1. Проблема редукции

При анализе возможностей ВА как математических моделей объектов статистической природы следует учитывать практические возможности статистического эксперимента. Эксперимент по выяснению принадлежности слова p языку $S = T(A, \lambda)$, представленному в данном ВА A, состоит в следующем. Мы должны установить, чему равна вероятность $\chi_A(p) = \mu(e)A(p)\mathbf{n}_F$, и сравнить эту вероятность с константой λ. Однако при содержательной интерпретации ВА как устройства со случайным поведением приближенное значение вероятности $\chi_A(p)$ может быть получено лишь путем многократного ввода слова p в автомат A и вычисления частоты получения заключительного состояния из множества F в результате этого эксперимента. При этом мы всегда вынуждены ограничить число испытаний некоторым, возможно, достаточно большим числом. Это обстоятельство обусловливает возможность ошибочного заключения о результате эксперимента.

Ситуация была бы приемлемой, если бы можно было для любого сколь угодно малого вещественного $\varepsilon > 0$ указать такое «равномерное» для всей полугруппы X^* число N(ε), что для эксперимента с любым словом *p* вероятность неверного вывода была бы не более ε. Однако более подробный анализ показывает, что в общем случае это невыполнимо. Действительно, пусть *A* — ВА и $\lambda \in (0, 1)$. Мы вводим слово *p* в автомат *N* раз и подсчитываем число случаев N_1, когда автомат оказывается в состоянии, принадлежащем множеству *F*. Отношение N_1/N есть выборочное значение случайной величины $\chi_A(p)$ в конкретном эксперименте, и мы считаем, что $p \in T(A, \lambda)$, если оказалось, что $N_1/N > \lambda$, в противном случае принимается, что $p \notin T(A, \lambda)$. Возможность ошибки заключается в том, что можно принять неверное решение о принадлежности слова *p* языку $T(A, \lambda)$, поскольку значение N_1/N в эксперименте случайно. Применяя неравенство Чебышева

$$\mathsf{P}(|\xi - M\xi| > \varepsilon) \leqslant \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

к случайной величине

$$\xi = \frac{1}{N}\sum_i \xi_i(p), \text{ где } \xi_i(p)$$

принимает значение 1, если при вводе слова *p* в *i*-м эксперименте автомат оказывается в заключительном состоянии из *F*, и значение 0 в противном случае, получим

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{N_i}{N} - \chi_A(p)\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sqrt{\chi_A \bar{\chi}_A}}{N\varepsilon^2}. \quad (1)$$

Из формулы (1) видно, что число испытаний *N*, которое должно быть выполнено, чтобы гарантировать наперед заданную вероятность 1-ε правильной идентификации принадлежности языку слова *p*, зависит от значения $\chi_A(p)$. Однако именно в вычислении $\chi_A(p)$ и состоит задача.

Определение 1. Точка сечения $\lambda \in (0, 1)$ называется *изолированной относительно ВА A,* если существует положительное число δ такое, что для всех слов из свободной полугруппы X^* имеем

$$|\chi_A(p) - \lambda| \geqslant \delta. \quad (2)$$

Из формулы (1) вытекает, что тогда существует такая целочисленная функция $N(\delta, \varepsilon)$, что для данной изолированной точки сечения *X* и любого слова $p \in X^*$ вероятность ошибки при классификации слова *p* на основе сравнения числа N_1/N с *X* не превышает ε. Это обстоятельство естественным образом приводит к рассмотрению ВА с изолированной точкой сечения и исследованию их возможностей. Верна следующая

Теорема 1 *(редукции). Пусть A — ВА с n состояниями, X — изолированная точка сечения и язык* $S = T(A,\ \lambda)$ *представлен в этом автомате точкой сечения X.*
Тогда язык S регулярен, и число состояний k минимального ДА, представляющего язык S, имеет оценку сверху*

$k \leqslant (1 + 1/\delta)^{n-1}$. (3)

Доказательство. Пусть слова $p_1,\ \ldots,\ p_k$ попарно неэквивалентны относительно языка *S*. Тогда для каждой пары слов p_i и p_j, $i \neq j,\ i,\ j \leqslant k$, существует слово *p* такое, что $p_i p \in S$, $p_j p \notin S$, или наоборот. Иначе говоря, мы имеем

$\chi(p_i p) > \lambda, \quad \chi(p_j p) \leqslant \lambda.$ (4)

Но поскольку *X* — изолированная точка сечения, то из (2) и (4) следует

$$\chi(p_i p) - \chi(p_j p) \geqslant 2\delta.$$

Учитывая определение $\chi(p)$, получим

$$(\mu(e)A(p_i) - \mu(e)A(p_j))A(p)\mathbf{n}_F \geqslant 2\delta.$$

Поствектор $A(p)\mathbf{n}_F = \mathbf{n}_F(p)$ имеет неотрицательные координаты, не превосходящие единицу. Поэтому

$$2\delta \leqslant (\mu(p_i) - \mu(p_j))\,\mathbf{n}_F(p) \leqslant \sum_{s=1}^{n} \left|\mu^s(p_i) - \mu^s(p_j)\right| \quad \text{для} \quad i \neq j. \qquad (5)$$

С другой стороны, рассмотрим геометрическую картину отображения, производимого ВА *A*. Пусть $\sigma_i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$ — множества, определяемые следующим образом: $\sigma_i = \{\mu\colon\ \mu^s(p_i) \leqslant \mu^s,\ s = 1,\ \ldots,\ n,\ (\mu - \mu(p))e = \delta\}$. Каждое множество σ, есть параллельный перенос множества $\sigma = \{\mu\colon\ \mu^s \geqslant 0,\ s = 1,\ \ldots,\ n,\ \mu e = \delta\}$, являющегося симплексом $\delta\Delta^{(k)}$. Объем фигуры σ, очевидно, равен $c\delta^{k-1}$, где константа *c* зависит только от размерности пространства E_A и не зависит от δ. Соотношение $(\mu - \mu(p))\mathbf{e} = \delta$ можно переписать в виде $\mu\mathbf{e} = 1 + \delta$, откуда видно, что все σ_i принадлежат области

$\tau = \{\mu\colon\ \mu^s \geqslant 0,\ s = 1,\ \ldots,\ n,\ \mu\mathbf{e} = 1 + \delta\}$.

Покажем, что области $\sigma_i,\ \sigma_j\ (i \neq j)$ не имеют общих внутренних точек. Действительно, из предположения, что μ является внутренней точкой областей σ_i и $\sigma_j\ (i \neq j)$, вытекает, что $\mu^s - \mu^s(p_i) > 0,\ \mu^s - \mu^s(p_j) > 0$ для всех $s = 1,\ \ldots,\ n$. Следовательно,

$$\left|\mu^s(p_i) - \mu^s(p_j)\right| < \left|\mu^s - \mu^s(p_i)\right| + \left|\mu^s - \mu^s(p_j)\right|,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left|\mu^s(p_i) - \mu^s(p_j)\right| < \sum_{s=1}^{n} \left|\mu^s - \mu^s(p_i)\right| + \left|\mu^s - \mu^s(p_j)\right| = 2\delta,$$

что противоречит (5).

Сравнив объемы фигур $\sigma_i\ (i = 1,\ \ldots,\ k)$ и τ, получаем $kc\delta^{n-1} =$

$= c(1+\delta)^{n-1}$. Тогда $k \leqslant (1+1/\delta)^{n-1}$.
Обозначим через *H(A)* точечное множество $H(A) = \{\chi_A(p), p \in \in X^*\}$ на [0, 1]. В тех случаях, когда множество *H(A)* не является всюду плотным на [0, 1] , появляется возможность рассмотрения изолированных точек сечения *λ* таких, что все языки $T(A, \lambda)$ будут заведомо регулярными. С другой стороны, если точка сечения *λ* является точкой сгущения множества *H(A),* то, как мы убедились в начале параграфа, задача классификации произвольного слова $p \in X^*$ по принадлежности языку $T(A, \lambda)$ не разрешима посредством статистического эксперимента с наперед заданной достоверностью. Какое бы натуральное число *N* ни было задано, найдется такое слово *p,* для которого вероятность неверного вывода окажется больше наперед заданной вероятности ошибки ε.
Создается впечатление, что реальное использование ВА не расширяет возможностей ДА по классификации слов. Тем не менее позже мы убедимся в том, что теорема редукции не только не обесценивает теорию ВА, но открывает новые возможности ее применений.
Докажем теорему, которая показывает, что в определенном смысле ВА представляют более мощный аппарат представимости языков, нежели детерминированные.
Теорема 2. *Существует ВА А с двумя состояниями и последовательность* $\lambda_n,\ n = 1, \ldots,$ *изолированных точек сечения такая, что для каждого n ДА* A_n *с наименьшим числом состояний, представляющий регулярный язык* $S_n = T(A, \lambda_n)$, *имеет по крайней мере n состояний.*
Доказательство. Пусть переходные матрицы ВА *А* суть

$$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad A(2) = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с леммой, если начальный вектор состояний есть $\mu(e) = (1,\ 0)$ и решающий поствектор задан в виде $\mathbf{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то для слова $p = \delta_1, \ldots, \delta_s$ в алфавите {0, 2} получим $\chi(p) = 0, \delta_s\delta_{s-1}\ldots\delta_1$, где число $\chi(p)$ записано в троичной системе счисления. Поскольку $\delta_j \in \{0,\ 2\},\ j = 1, \ldots, s$, то *CH* — топологическое замыкание *H* — есть канторов дисконтинуум. Ввиду этого все точки сечения, принадлежащие дополнению *CH,* являются изолированными точками сечения относительно автомата *А.*
Пусть λ_n = 0, 22... 211 записано в троичной системе счисления и число цифр равно (*n*+1). Точка сечения λ_n при любом *n* — 1, ... является изолированной, а для того чтобы имело место неравенство $\lambda_n < \chi_A(p)$, необходимо и достаточно, чтобы слово *p* имело вид $p = p_1 22 \ldots 2$, где $p_1 \in \{0,\ 2\}^*$, а число двоек было не меньше *n.* Итак, множество

$S_n = T(A,\ \lambda_n)$ непусто, и если $p \in S_n$, то $|p| \geqslant n$, а минимальный ДА, представляющий язык с минимальной длиной слова, равной *n,* имеет по крайней мере $(n + 1)$ состояние.

В связи с доказанной теоремой уместно высказать следующее замечание. При сравнении сложности детерминированных и вероятностных вычислений следует учитывать, что реальная природа представимости языков в ВА и ДА различна. Строго говоря, **конечный ВА и конечный ДА как математические модели реальных устройств несравнимы между собой, поскольку различны способы оценки результата их функционирования**. При сравнении между собой различных ВА естественно учитывать число экспериментов, которое требуется для получепия вывода о результате функционирования с наперед заданной достоверностью, одинаковой для сравниваемых автоматов.

Рассмотрим пример приложения теоремы редукции 1. Предположим, что предстоит вычисление элементов произведения матриц из некоторого конечного множества $\{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$ с некоторой наперед заданной точностью ε, с помощью ЭВМ, обладающей конечной памятью при условии, что число сомножителей произведения заранее не ограничено. Для достаточно большого числа сомножителей эта задача не может быть решена при заданном уровне ошибки ε и данном числе разрядов округления *N*. Покажем, что существуют условия, при которых эта задача может быть решена для любого числа сомножителей с применением теоремы редукции. Если порядок сомножителей определен словом $p = i_1 \ldots i_s,\ \ i_j \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, а элемент произведения фиксирован заданием соответствующей строки и столбца, то вычисление элемента $a_{ij}(p)$ произведения матриц *A(p)* сводится к определению значения словарной функции $\varphi(p) = a_{ij}(p)$ в точке $p \in \{1, \ldots, n\}^*$.

По теореме 2.3.1 задача может быть сведена к вычислению значения характеристической функции $X(p) = \alpha^{|p|+1}\varphi(p) + 1/(k+2)$ конечного ВА.

Пример 1. Пусть $\Sigma = \{A_1,\ \ldots,\ A_n\}$—конечное множество стохастических $k\times k$-матриц и пусть $\varepsilon > 0$ — некоторое заданное действительное число. Пусть в дискретные моменты времени $m = 1, \ldots$ подаются матрицы $A_{i_m} \in \Sigma$ и $p = i_1 \ldots i_m$. В каждый момент времени *m* мы хотим знать с точностью ε элемент $a_{1n}(p)$ произведения матриц $A_{i_1} \ldots A_{i_m}$.

Применим теорему редукции 1 для того, чтобы показать, что при определенных условиях, наложенных на множество матриц ∑, проблема приближенного вычисления может быть решена для любого ε.

Теорема 3. *Пусть* $X = \{1, \ldots, n\}$ *и словарная функция* χ_p, *где* $p = i_1 \ldots i_m$, *обозначает* (1, *k*)-*элемент произведения матриц* $A_{i_1} \ldots A_{i_m}$. *Предположим, что матричное множество* ∑ *таково, что множество H(A) нигде не плотно в* [0, 1].

Тогда для каждого ε > 0 *существует целое положительное N, действительные* $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *и ДА* $\bar{A}_1, \ldots, \bar{A}_N$ *над входным алфавитом X такие, что*

$$0 = \lambda_1 < \ldots < \lambda_N = 1, \quad \lambda_{i+1} - \lambda_i < \varepsilon, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad (6)$$

и $\lambda_i < \chi_p < \lambda_{i+1}$ *тогда и только тогда, когда*

$$p \in T(A_i, \lambda_i)/T(A_{i+1}, \lambda_{i+1}), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \quad (7)$$

Доказательство. То, что множество *H(A*) нигде не плотно, означает, что его топологическое замыкание *C*∑ не содержит ни одного интервала. Таким образом, для некоторого целого положительного, достаточно большого числа N существует последовательность (6), причем при $2 \leqslant i \leqslant N-1$ $\lambda_i \notin C\Sigma$.

Рассмотрим ВА *A* над входным алфавитом *X,* с множеством состояний $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, где a_0 — начальное, а a_{n-1} — финальное состояния, с системой переходных матриц $A(i) = A_i$, *i* =1, ...,*n*. Для любого слова $p = i_1 \ldots i_m$ $\chi(p) = \chi_p$. Числа λ_i $(2 \leqslant i \leqslant N-1)$ являются изолированными точками сечения для автомата *A*. Таким образом, по теореме 1 все множества $T(A, \lambda_i)$ являются регулярными, представленными некоторыми конечными ДА $\bar{A}_i$. Следовательно, для $2 \leqslant i \leqslant N-1$ имеем, что $\lambda_i < \chi_p$ тогда и только тогда, когда $p \in T(\bar{A}_i)$ (равенство $\chi_p = \lambda_i$ невозможно, поскольку λ_i — изолированная точка сечения).

Пусть $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_N$ — такие конечные ДА, что $T(\bar{A}_1) = X^*, T(\bar{A}_N) = \varnothing$. Тогда система автоматов $\bar{A}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Используя теорему 3 можно предложить следующий способ приближенного вычисления словарной функции $\chi(p)$. Если дано ε > 0, то пусть λ_i, $\bar{A}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ удовлетворяют условиям этой теоремы. Применяя строго фиксированную величину памяти вычислительной машины, возможно промоделировать ДА $\bar{A}_i$.

Когда подаются матрицы произведения $A_{i_1} \ldots A_{i_m}$, то индексы $i_1, \ldots, i_m$ поступают в промоделированные автоматы параллельно. В каждый момент времени вычислительная машина определяет, какой из автоматов $\bar{A}_i$ представляет слово $p = i_1 \ldots i_m$. Приближенное значение функции $\chi(p)$ определяется как полусумма значений

соседних точек сечения λ_i, λ_{i+1}, где индекс *i* определяется из условий $p \in T(\bar{A}_i)$ и $p \notin T(\bar{A}_{i+1})$.
Топологический анализ условий, при которых оказывается справедливой теорема 1 для конечных ВА, дает возможность сформулировать более общую теорему, определяющую условия редуцируемости для ДА со счетным числом состояний.
Пусть $A = \langle X, \mathfrak{A}, \delta(a, x)\rangle$— инициальный ДА с множеством входных символов *X*, счетным множеством состояний $\mathfrak{A}$ и функцией переходов $\delta(a, x)$. Во многих конкретных задачах, в которых автомат *A* фигурирует в реальном «контексте», множество состояний $\mathfrak{A}$ может оказаться принадлежащим некоторому метрическому пространству *E*. Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся, когда рассматриваем конечный ВА как конечномерный ЛА. Даже в том случае, если рассматривается абстрактный автомат *A*, всегда можно «погрузить» множество состояний $\mathfrak{A}$ в метрическое пространство. Тривиально это можно выполнить, отобразив множество $\mathfrak{A}$ на натуральный ряд чисел, принимая индекс данного состояния за его образ в отображении. Натуральный же ряд метрпзуем, и можно предложить метрику

$$\rho(m, n) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\chi_s(m, n)}{2^s}.$$

Здесь *m, n* — произвольные натуральные числа, а функция $\chi_s(m, n)$ определена условиями

$$\chi_s(m, n) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad m \equiv n \pmod{s}, \\ 1, & \text{если} \quad m \not\equiv n \pmod{s}. \end{cases}$$

Вообще говоря, всегда можно построить автомат, изоморфный (или, более обще, гомоморфный) данному, такой, что множество состояний последнего окажется компактным множеством в некотором метрическом пространстве. При этом функция переходов автомата $\delta(a, x)$ определяет в множестве $\mathfrak{A}$ некоторую систему автоморфизмов, обладающих свойствами, связанными с наличием метрики в пространстве *E*. Следующая теорема характеризует условия, при которых такой автомат представляет регулярный язык.
Теорема 4. *(Обобщенная теорема редукции). Пусть ДА* $B = \langle X, \mathfrak{B}, \delta_B(a, x)\rangle$, *представляющий язык S подмножеством своих состояний Q, является изоморфным образом ДА* $A = \langle X, \mathfrak{A}, \delta_A(a, x)\rangle$, *где множество* $\mathfrak{A}$ *есть компактное подмножество некоторого метрического пространства E, и пусть отображение* $a' = \delta_A(a, x)$ *является «нерастягивающим» в метрике пространства E, т. е.*

$$\rho(a_1', a_2') \leqslant \rho(a_1, a_2) \quad \textbf{(8)}$$

для любой пары состояний a_1, a_2, для произвольного значения входного символа $x \in X$.

Пусть R — подмножество $\mathfrak{A}$*, являющееся прообразом множества Q в изоморфизме автоматов A и B и удовлетворяющее условию «изолированности»*

$$(a_1)(a_2)(a_1 \in R_1) \,\&\, (a_2 \notin R) \to \rho(a_1, a_2) \geqslant \delta\} \quad \delta > 0. \quad (9)$$

Тогда язык $S = \{p\colon \ \delta_A(a_0, \ p) \in R\}$ *является регулярным. Минимальное число состояний n конечного ДА, представляющего этот язык S, имеет оценку сверху* $n \leqslant 2^{H_{\delta/2}(\mathfrak{A})}$, *где* $H_\varepsilon(\mathfrak{A})$ *— ε-энтропия компактного множества* $\mathfrak{A}$.

(ε-энтропией компактного множества $\mathfrak{A}$ называется двоичный логарифм числа элементов минимального покрытия $\mathfrak{A}$ подмножествами $\mathfrak{A}$ диаметра не более 2ε.)

Доказательство. Введем эквивалентность на множестве слов *X** условием

$$p_1 \equiv_S p_2 = (r)[r \in X^* \to p_1 r \in S \sim p_2 r \in S].$$

Задача заключается в доказательстве конечности множества классов эквивалентности $\equiv_S$ и оценке сверху мощности *n* этого множества. Пусть $K_1, \ldots, K_n, \ldots$— классы эквивалентности $\equiv_S$ и $p_1, \ p_2$— слова из разных классов. По определению эквивалентности, существует слово *r* такое, что $p_1 r \in S, \ \ p_2 r \notin S$, т. е. $a_1 = a_0 p_1 r \in R$, $a_2 = a_0 p_2 r \notin R$ (или наоборот). Из условия (9) тогда следует, что $\rho(a_1, \ a_2) \geqslant \delta$. Но в этом случае, в соответствии с условием (8), мы должны получить

$$\delta \leqslant \rho(a_1, \ a_2) = \rho(a_0 p_1 r, \ a_0 p_2 r) \leqslant \rho(a_0 p_1, \ a_0 p_2).$$

Выберем в каждом классе эквивалентности по одному представителю p_i, $i = 1, \ldots$, и рассмотрим множество слов $p_1, p_2, \ldots$ и соответствующее множество состояний $a_0 p_1 = a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Среди состояний $a_1, a_2, \ldots$ не может быть совпадающих, так как для любой пары состояний должно найтись слово, переводящее их в заведомо различные состояния так, чтобы выполнялись условия $\rho(a_i, \ a_j) \geqslant \delta, \ \ i \neq j$. Таким образом, число различных состояний $a_1, a_2, \ldots$ ограничено сверху максимумом числа элементов в компактном множестве $\mathfrak{A}$ метрического пространства *E,* попарно удаленных друг от друга не менее чем на δ. Известно, что это число $n_\varepsilon(\mathfrak{A})$, $\varepsilon = \delta/2$, связано с ε-емкостью $h_\varepsilon(\mathfrak{A})$ множества $\mathfrak{A}$ соотношением $h_\varepsilon(\mathfrak{A}) = \log_2 n_\varepsilon(\mathfrak{A})$, а последняя ограничена сверху ε-энтропией, которая конечна для любого ε в силу компактности множества $\mathfrak{A}$: $h_\varepsilon(\mathfrak{A}) \leqslant H_\varepsilon(\mathfrak{A})$. Отсюда вытекает оценка, завершающая доказательство.

(ε-емкостью компактного множества $\mathfrak{A}$ называется двоичный логарифм мощности максимальною множества элементов из $\mathfrak{A}$, попарно удаленных друг от друга строго более чем на 2ε.)
Теорема редукции для конечных ВА получается из теоремы 4 как следствие. Если *A* — конечный ВА, то в качестве множества $\mathfrak{A}$ состояний счетного ДА в теореме 4 следует рассматривать множество векторов состояний $L_A = \{\mu_A(p),\ \ p \in X^*\}$, где $\mu(e)$ — начальный вектор состояния и *A(x)* система переходных матриц. Множество *R* определено условием $\mu(p)\mathbf{n}_F > \lambda.$. Метрическое пространство *E* есть гиперплоскость $\mu\mathbf{e} = 1$, а множество $\mathfrak{A}$ компактно в нем, так как вполне ограничено условиями

$$\mu^i \geqslant 0,\ \ \sum_{i=1}^{n} \mu^i = 1.$$

Регулярность языка, представленного в конечном ВА *A* множеством состояний и изолированной точкой сечепия $X\{|\chi(p) - \lambda| > \delta),$ является прямым следствием теоремы 4. Действительно, из лемм 1.3.1 и 1.3.2 гл. 1 вытекает, что стохастическая матрица реализует отображение гиперплоскости $\mu\mathbf{e} = 1$ в себя, удовлетворяющее условию «нерастягиваемости» (8). С другой стороны, из условия изолированности вытекает, что выполняется условие (9).
Теорема редукции, доказанная непосредственно для ВА, естественно, дает лучшую оценку для числа состояний моделирующего ДА, поскольку в процессе доказательства дополнительно используется условие линейности автомата.
Замечание 1. Обратим внимание на то обстоятельство, что в доказательстве теоремы 4 не использовалось свойство линейности преобразования $a' = \delta(a,\ x)$, а использовалось только свойство «нерастягиваемости» в заданной метрике. Отсюда следует, что теорема редукции может быть применена к вероятностным дискретным преобразователям с памятью, операторы переходов которых не являются линейными. В качестве одного из следствий теоремы 4 рассмотрим теорему редукции для следующего математического объекта.
Определение 2. Произвольный автоморфизм $R\colon\ \Delta^{(n)} \to$ $\to \Delta^{(n)}$ координатного симплекса $\Delta^{(n)}$ в себя называется *стохастическим* оператором.
Определение 3. Объект $R = \langle X,\ \mathfrak{A},\ \ R(x)\rangle$, где *X*— конечное множество входных символов, $\mathfrak{A}$ — множество стохастических векторов состояний $\mathfrak{A} \subseteq \Delta^{(n)},\ R(x)$— множество стохастйческпх операторов, отображающих в себя множество $\mathfrak{A}$, называется

автоматным оператором над множеством распределений вероятностей (стохастических векторов) $\mathfrak{A}$.

Теорема 5. *Пусть R— автоматный оператор над множеством стохастических векторов* $\mathfrak{A}$*, а система стохастических операторов R(x) и подмножество* $Q \subseteq \mathfrak{A}$ *таковы, что для метрики*

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \max_i \left| \mu_1^i - \mu_2^i \right| \quad (10)$$

выполнены следующие условия:

1) $\rho(\mu_1 R(x), \mu_2 R(x)) \leqslant \rho(\mu_1, \mu_2)$ *для любых векторов* μ_1, μ_2 *из* $\mathfrak{A}$ *и любого входного символа из X;*

2) $(\mu_1)(\mu_2)[(\mu_1 \in Q) \,\&\, (\mu_2 \notin Q) \to \rho(\mu_1, \mu_2) \geqslant \delta], \; \delta > 0.$

Тогда язык $S = \{p\colon \; \mu(e)R(p) \in Q\}$ *регулярен. Минимальное число состояний N ДА, представляющего язык S, имеет оценку сверху*

$$N \leqslant C_{n+]2/\delta[-1}^{]2/\delta[}.$$

Доказательство. В метрике (10) симплекс $\Delta^{(n)}$ является вполне ограниченным множеством — диаметр его равен единице. Следовательно, это компактное множество, как и его подмножество $\mathfrak{A}$. Поэтому для автоматного оператора *R* как ДА выполняются условия теоремы 4, и язык *S*, представленный в этом автомате множеством состоянии *Q*, является регулярным. Нам остается оценить число состояний минимального ДА, представляющего этот язык.

Пусть $F_m^n = \left\{\mu\colon \; \mu^i = \frac{k_i}{m}, \; i = 1, \ldots, n, \; \sum_{i=1}^{n} k_i = m\right\}$, где k_i и m — натуральные числа. Для всякого вектора из симплекса $\Delta^{(n)}$ найдется вектор μ' в множестве F_m^n такой, что расстояние между ними в метрике (10) не превосходит $1/m\colon \; \rho(\mu, \mu') \leqslant 1/m.$ Однако это означает, что семейство векторов F_m^n представляет собой l/*m*-сеть симплекса $\Delta^{(n)}$, откуда следует, что $H_{1/m}(\Delta^{(n)})$ не больше двоичного логарифма числа элементов множества F^n_m. Число элементов *N(n, m)* множества F^n_m равно числу способов размещения *m* элементов по *n* ячейкам, или C_{n+m-1}^m, поэтому имеем

$$H_{1/m}\left(\Delta^{(n)}\right) \leqslant \log_2 C_{n+m-1}^m.$$

H_ε представляет собой монотонно возрастающую функцию δ для $0 < \varepsilon < 1/2$. Выберем $m =]1/\varepsilon[$. Здесь $]\gamma[$ означает минимальное целое число, не мепынее чем γ. Тогда $H_\varepsilon(\Delta^{(n)}) \leqslant$ $\leqslant H_{1/m}(\Delta^{(n)})$. Следовательно,

$$H_\varepsilon\left(\Delta^{(n)}\right) \leqslant \log_2 C_{n+]1/\varepsilon[-1}^{]1/\varepsilon[}.$$

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу, возникающую в эволюционной генетике. Пусть изучается эволюция популяции, состоящей из очень большого числа особей, по отношению к наличию свойства, определенного рецессивным геном «А», аллель которого «*a*» является рецессивным летальным геном. Следовательно, в популяции существуют только пары вида «*aA*», «*Aa*», «*AA*», частоты которых равны

$$Aa,\ aA \to p,$$
$$AA \to q, \quad p+q=1, \quad p,\ q \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что встреча любой пары генов в период размножения во всей популяции равновероятна, т. е. если частоты аллелей равны $a \to p/2,\ \ A \to q+p/2,$ то встреча пар аллелей определяется схемой независимой выборки пар из совокупности с возвращениями. Следовательно, в процессе эволюции получим сначала пары с частотами

$$\begin{array}{cccc} aa & aA & Aa & AA \\ p^2/4 & p/2(q+p/2) & p/2(q+p/2) & (q+p/2)^2, \end{array}$$

и затем вследствие летальности гена «*aa*» частоты станут равными:

$$Aa,\ aA \to \frac{2\frac{p}{2}(q+p/2)}{1-p^2/4} = \frac{p}{1+p/2} = p_1,\ \ AA \to \frac{(q+p/2)^2}{1-p^2/4} = \frac{q+p/2}{1+p/2} = q_1.$$

Итак, оператор преобразования имеет вид

$$R(p,q) = \left(\frac{p}{1+p/2},\ \frac{q+p/2}{1+p/2}\right),$$

т. е. является нелинейным. Мы получили автоматный оператор над множеством стохастических векторов вида $\mu(p,\ q)$. Язык $S \subset \{x\}^*$, определенный в однобуквенном алфавите (*x*) условием

$$\underbrace{x\,x\,\ldots\,x}_{r} \in S \sim R^r(p,q)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} > \lambda,$$

означает перечисление тех поколений популяции, когда частота свойства «*AA*» более λ. В общем случае этот язык не обязан быть регулярным, однако в данном случае он регулярен. В частности, к этому автоматному оператору применима обобщенная теорема редукции 4. Будем рассматривать метрику $\rho(p_1,\ p_2) = |p_1 - p_2|$. Тогда $\left|\frac{p_1}{1+p_1/2} - \frac{p_2}{1+p_2/2}\right| \leqslant |p_1 - p_2|$. Действительно, пусть $p_1 \geqslant p_2$. Тогда

$$\frac{p_1}{1+p_1/2} - \frac{p_1}{1+p_2/2} = \frac{p_1 - p_2}{(1+p_1/2)(1+p_2/2)} \leqslant p_1 - p_2,$$

так как $p_1,\ p_2 \geqslant 0$.

То, что расстояние между множествами $Q = \{x^r : q_r > \lambda\}$ и $\overline{Q}$ имеет конечную величину, проверяется тривиально, так как последовательность q_i, $i = 1, \ldots$, оказывается монотонно возрастающей. Из-за монотонности последовательности отпадает и необходимость в специальном построении языка *S* по общей схеме. Языку *S* принадлежит любое слово длины *t*, начиная с длины *r*, $t \geqslant r$, где *r* определено условием

$$\frac{q_r + p_r/2}{1 + p_r/2} > \lambda, \quad \frac{q_{r-1} + p_{r-1}/2}{1 + p_{r-1}/2} \leqslant \lambda.$$

Положим $p_i/2 = t_i$. Тогда $t_{i+1} = t_i/(1 + t_i)$, откуда следует, что $t_k = t_0/(1 + kt_0)$, $k = 0, 1, \ldots$, т. е. $p_k = p\Big/\left(1 + \frac{k}{2}p\right)$, $k = 0, 1, \ldots$ Далее $\frac{1 - p_r/2}{1 + p_r/2} > \lambda$ или $\frac{1 + (r-1)p/2}{1 + (r+1)p/2} > \lambda$, т. е.

$$r > \frac{1+\lambda}{1-\lambda} - \frac{2}{p}.$$

6.2. Проблема идентификации.

Проблема идентификации возникает во всякой научной теории, исследующей аспекты поведения формально описываемых объектов. В общем случае она состоит в том, чтобы по некоторым сведениям об объекте с разумной степенью точности определить сам объект. При этом желательно знать наименьший возможный объем исходных сведений.

Примером решения задачи идентификации в теории автоматов является идентификация конечного ДА на основе конечного эксперимента. При этом, вообще говоря, сам автомат не восстанавливается, но возможно построить минимальный по числу состояний эквивалентный ему автомат. Ситуация в вероятностном случае оказывается более сложной. В этом случае можно идентифицировать полное поведение конечного ВА на основе сведений о поведении, заданных на конечном начальном сегменте полугруппы *X**, но делается это путем построения эквивалентного и, в общем случае, конечномерного ЛА минимальной размерности.

С другой стороны, как мы уже неоднократно убеждались, использование ЛА для моделирования ВА и применение в этой связи линейно-алгебраической методологии исследования естественно и эффективно. Результаты, приводимые ниже, обобщают некоторые из важнейших результатов по идентификации теории конечных ДА и показывают, что они имеют скорее линейно-алгебраическую, нежели просто комбинаторную природу.

Нестрого говоря, смысл доказываемых утверждений этого параграфа заключается в том, что наличие или отсутствие того или иного свойства данного конечного автомата определяется по начальному сегменту его функционирования.

Первая такая задача связана с проблемой нахождения базисной матрицы *N* конечного ВА. Эта задача, безусловно, относится к классу задач идентификации. Знание базисной матрицы *N* позволяет выявить эквивалентные векторы состояний автомата или различных автоматов, а следовательно, и строить автомат, эквивалентный данному.

Определение 1. Состояния a_1 и a_2 *(векторы состояний* μ_1 и μ_2*)* ВА *A различимы,* если существует слово $p \in X^*$ такое, что

$$\mu_1 A(p)\mathbf{n}_F \neq \mu_2 A(p)\mathbf{n}_F. \quad (1)$$

Определение 2. *Степенью различимости ВА A* называется наименьшее целое $\rho(A)$ такое, что если произвольные состояния a_1 и a_2 $(\mu_1$ и $\mu_2)$. различимы, то они ρ-различимы, т. е. существует слово p, $|p| \leqslant \rho$,, такое, что верно (1).

Из формулы (1) вытекает, что степень различимости ВА можно определить в терминах базисной матрицы *N*.

Замечание 1. Для того чтобы степень различимости ВА *A* была равна ρ, необходимо и достаточно, чтобы существовала базисная матрица N_A с номерами строк $p_1, \ldots, p_k$, удовлетворяющими условию $|p_i| \leqslant \rho,\ i = 1, \ldots, k$, причем ρ неуменьшаемо.

То же самое мы можем выразить формулой

$$\mathrm{Lin}\,\{A(p)\mathbf{n}_F,\ |p| \leqslant \rho\} = \mathrm{Lin}\,\{A(p)\mathbf{n}_F,\ p \in X^*\}.$$

Определение 3. ***С**тепенью достижимости* ВА *A* с начальным вектором состояний $\mu(e)$ называется наименьшее целое $\delta(A)$ такое, что для всех $p \in X^*$ $\mu(e)A(p) \in \mathrm{Lin}\,\{\mu(e)A(p),\ |p| \leqslant \delta\}$, т. е. такое, что

$$\mathrm{Lin}\,\{\mu(e)A(p),\ |p| \leqslant \delta\} = \mathrm{Lin}\,\{\mu(e)A(p),\ p \in X^*\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $L = \langle L(x),\ x \in X^*,\ \mathbf{a},\ \mathbf{m}\rangle$ *- ЛА размерности n и счетномерные матрицы N и M равны*

$$N = (\mathbf{m}, \ldots, L(p)\,\mathbf{m}, \ldots), \qquad M = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{a}L(p) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Тогда 1) $\rho(L) \leqslant \mathrm{rg}\,N - 1$; 2) $\delta(L) \leqslant \mathrm{rg}\,M - 1$.

Доказательство. Сначала получим вспомогательное утверждение общего характера. Пусть *E* — линейное пространство, δ_x — система линейных операторов в E и L — подпространство E. Скажем, что подпространство L' есть *δ-расширение L,* если

$$L' = L + \sum_{x \in X} \delta_x(L), \quad (2)$$

где через $\delta_x L$ мы обозначили образ L в отображении δ_x и знаки + и ∑ относятся к суммированию линейных пространств.

Лемма 1. *Пусть последовательность подпространств*

$$L_0 \subseteq L_1 \subseteq \ldots \quad (3)$$

линейного пространства E получена последовательными δ-расширениямиподпространства L_0. Тогда из $L_i = L_{i+1}$ *следует* $L_i = L_{i+s}$, $s = 1, \ldots$

Доказательство следует непосредственно из (2).

Следствие 1. *Для всякой последовательности подпространств типа* (3) *имеет место альтернатива: либо для каждого номера* i $\dim L_i < \dim L_{i+1}$, *либо существует максимальное значение размерности* $\dim L_i = k$, *причем оно достигается не более чем за* k — 1 *расширений (иначе говоря, заведомо* $\dim L_{k-1} = k$).

Понятно, что если линейное пространство E конечномерно, то имеет место второе положение.

Обратимся теперь к доказательству теоремы. По существу, оно вытекает из следствия 1 и конечномерности линейного пространства E_L (или $\mathscr{E}_L$), ассоциированного с конечномерным ЛА L.

Положим $E = \mathscr{E}_L$. В качестве системы линейных операторов в $\mathscr{E}_L$ рассмотрим систему матриц перехода $A(x)$ $(x \in X)$. Если положить $L_0 = \mathrm{Lin}\,\{\mathbf{m}\}$, то подпространство $L_i = \mathrm{Lin}\,\{A(p)\mathbf{m}, |p| \leqslant i\}$. Вследствие конечномерности $\mathscr{E}_L$ размерность подпространства L_i не может возрастать неограниченно. Таким образом, существует целое $r \leqslant \dim \mathscr{E}_L$ такое, что $\mathrm{Lin}\,\{A(p)\mathbf{m}, |p| \leqslant r\} = \mathscr{E}_L$.

Предельное значение $\dim L_r$ в данном случае можно указать, оно равно размерности пространства $\mathscr{E}_r$, которая, в свою очередь, равна рангу матрицы N. Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть доказывается аналогично, с той разницей, что вместо линейпого пространства $\mathscr{E}_L$ мы рассматриваем линейное пространство E_L, и система операторов δ_x задается системой матриц перехода $L(x)$. В этом случае $L_0 = \mathrm{Lin}\,\{\mathbf{a}\}$, $L_r = \mathrm{Lin}\,\{\mathbf{a}A(p), |p| \leqslant r\} = E_L$, $\dim L_r = \mathrm{rg}\, M$.

Следствие 2. *Пусть A — конечномерный ЛА (или конечный ВА). Тогда* $\rho(A), \delta(A) \leqslant |\mathfrak{A}| - 1$.

Числа $\rho(L)$ и $\mathrm{rg}\, N$ являются характеристиками неинициального ЛА $L = \langle L(x), \mathbf{m}, x \in X\rangle$, числа $\delta(L)$ и $\mathrm{rg}\, M$ характеризуют инициальный ЛА L с заданным начальным вектором состояний **a**.

Перейдем теперь к задаче идентификации словарной функции, определяемой конечномерным ЛА $L = \langle L(x),\ \mathbf{m},\ x \in X \rangle$ с заданным начальным вектором состояний **a**.

Определение 4. *Обобщенной ганкелевой матрицей* (далее просто *ганкелевой),* соответствующей словарной функции $\varphi(p)$, называется счетномерная матрица с лексикографической индексацией номеров строк и столбцов словами в алфавите *X,* такая, что

$$\mathrm{Han}\,(\varphi) = \left(h_{p_1 p_2}\right) = \left(\varphi_{p_1}(p_2)\right).$$

Из определения ганкелевой матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$ видно, что строки ее суть упорядоченное перечисление всех состояний $\varphi_{p_1}(p)$ словарной функции $\varphi(p)$. В этом случае линейная оболочка множества всех строк ганкелевой матрицы совпадает с линейным пространством $E_\varphi = \mathrm{Lin}\,\{\varphi_p,\ p \in X^*\}$. Ранг счетномерной матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$, по определению равный максимальному порядку неособенной подматрицы в матрице $\mathrm{Han}\,(\varphi)$, равен размерности линейной оболочки строк матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$. Таким образом, верно

Замечание 2.

$$\dim L_{r-1} = \dim \mathrm{Lin}\,\{\varphi_p,\ |p| \leqslant r-1\} = \dim E_\varphi = \mathrm{rg}\,\mathrm{Han}\,(\varphi).$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{Han}\,(\varphi)$*—ганкелева матрица, соответствующая словарной функции* $\varphi(p)$*. Если имеет* $\mathrm{Han}\,(\varphi)$ *конечный ранг, то существует базисное множество линейно независимых строк с номерами из множества* $\{p\colon\ |p| \leqslant r-1,\ p \in X^*\}$ *и базисное множество линейно независимых столбцов с номерами из множества* $\{p\colon\ |p| \leqslant r-1,\ p \in X^*\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. В линейном пространстве вектор-строк E_φ будем рассматривать системы линейных операторов правых *p*-вращений $D_p^{\mathrm{rt}}(\varphi) = \varphi_p^{\mathrm{rt}}$. Применим лемму 1 к последовательности линейных подпространств $L_0 = \mathrm{Lin}\{\varphi = \varphi_e^{\mathrm{rt}}\},\ L_1 = \mathrm{Lin}\{\varphi_p^{\mathrm{rt}},\ |p| \leqslant 1\}, \ldots$ Поскольку, по предположению, линейное пространство E_φ имеет размерность *r,* то из следствия 1 получаем для некоторого номера *k* $\dim L_{k-1} = k = \dim E_\varphi = r,\ E_\varphi = L_{r-1}$. Базисное множество для строк $\mathrm{Han}\,\varphi$ может быть выбрано в множестве $\{\varphi_p\colon\ |p| \leqslant r-1\}$.

Для базисного множества столбцов доказательство остается тем же самым, с заменой правых *p*-вращений левыми.

Пусть $p_1 = e,\ p_2,\ \ldots,\ p_r$ — номера базисных строк в матрице $\mathrm{Han}\,(\varphi)$ и $q_1 = e,\ q_2,\ \ldots,\ q_r$ — номера базисных столбцов, такие, что $|p_i|,\ |q_i| \leqslant r-1,\ i = 1,\ \ldots,\ r$. Матрица $F = (\varphi(p_i q_j))$ порядка

r, стоящая на пересечении линейно независимых строк и столбцов матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$— неособенная. Обозначим через $F(p)$ матрицу $(\varphi(p_i p q_j))$.

Теорема 3. *Для произвольных слов p, q*

$F(p,\ q) = F(p) F^{-1} F(q).$

Доказательство. Рассмотрим $2r \times 2r$-матрицу

$$\begin{pmatrix} F & F(q) \\ F(p) & F(pq) \end{pmatrix}.$$

Ее ранг равен r. В самом деле, ее строки состоят из элементов матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$, расположенных в строках с номерами $p_1,\ p_2,\ \ldots$ $\ldots,\ p_r,\ p_1 p,\ p_2 p,\ \ldots,\ p_r p$ и столбцах с номерами $q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_r,$ $qq_1,\ qq_2,\ \ldots,\ qq_r$. Следовательно, в этой матрице нижние r строк суть линейные комбинации верхних r строк, которые линейно независимы, так как содержат неособенную подматрицу F. Но матрица

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

в случае, если ее подматрица A'неособенная, имеет ранг r тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$. О

Следствие 3. *Пусть* $p = x_1,\ \ldots,\ x_s$*—произвольное слово, тогда*

$F(p) = F(x_1) F^{-1} \ldots F^{-1} F(x_s)$.

Теорема 4. *Пусть словарная функция* $\varphi(p)$ *представлена в ЛА L размерности n. Тогда задание словарной функции* $\varphi(p)$ *на сегменте длины 2n* — 1 *однозначно определяет ее всюду на свободной полугруппе X*.*

Если ранг матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$ *равен r, то словарная функция* $\varphi(p)$ *однозначно определяется заданием ее на сегменте длины* $2r$-1.

Существует способ построения ЛА, представляющего словарную функцию $\varphi(p)$*минимальной размерности, равной* $\mathrm{rg}\,\mathrm{Han}\,(\varphi)$.

Доказательство. Поскольку пустое слово *e* является номером первой базисной строки и первого базисного столбца матрицы *F(p),* то в левом верхнем углу находится число $\varphi(p)$. Рассмотрим r-мерпый ЛА $L = \langle F(x) F^{-1},\ \mathbf{m},\ x \in X \rangle$.Пусть начальный вектор состояний $\mathbf{a} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, а решающий поствектор **m** равен первому столбцу матрицы F: $\mathbf{m}^T = (\varphi(p_1),\ \ldots,\ \varphi(p_r))$.. . . ... Для слов $p = x_1,\ \ldots,\ x_s$ получаем $F(x_1) F^{-1} \ldots F^{-1} F(x_s) F^{-1} = F(p) F^{-1}$. Поэтому $\mathbf{a} F(p) F^{-1} \mathbf{b} = \varphi(p)$. Таким образом, построенный линейный автомат представляет словарную функцию $\varphi(p)$.. Заметим, что матрицы *F* и *F(x)* содержат значения функции $\varphi(p)$ на словах длины, не большей $2r$—1. Следовательно, возможно эффективное вычисление этих подматриц счетномерной матрицы $\mathrm{Han}\,(\varphi)$ конечного ранга r.

С другой стороны, допустим, что нам удалось построить другой линейный автомат размерности *r*, представляющий словарную функцию $\varphi'(p)$, совпадающую с $\varphi(p)$ на сегменте длины 2*r*—1. Ганкелева матрица словарной функции $\varphi'(p)$ должна иметь ранг не более *r*, поскольку существует линейный автомат размерности *r*, представляющий эту словарную функцию. Рассмотрим словарную функцию $\psi(p) = \varphi(p) - \varphi'(p)$. В соответствии с теоремой 2 все базисные строки и столбцы могут быть определены значениями словарной функции $\psi(p)$ на сегменте длины 2*r*—1. Поскольку на этом сегменте функция всюду равна нулю, то ранг матрицы $\mathrm{Han}\,(\psi)$ равен нулю и словарная функция $\psi(p)$ тождественно равна нулю. Продолжение словарной функции φ(р) определяется заданием на сегменте длины 2*r* — 1 единственным образом. Минимальность размерности автомата *L* как представляющего словарную функцию φ также ясна из соображений ранга — для любого ЛА размерности меньше *r* ранг ганкелевой матрицы оказался бы меньше *r*.
Подход к задаче идентификации словарной функции, изложенный в лемме 1 и теоремах 1 —4, определяет метод с широкой сферой применений. В частности, в основе результатов § 2 гл. 2, касающихся идентификации многотактных каналов, по существу лежит этот же метод.
Следующая задача хронологически является первой задачей идентификации, рассмотренной для конечных ВА. Речь пойдет об идентификации функций конечных однородных цепей Маркова. Цепи Маркова и функции цепей Маркова будут изучаться в р. 6.5 этой главы, посвященном проблемам представимости последовательностей случайных кодов ВА и ДА. Рассматриваемая далее задача идентификации функций конечных однородных цепей Маркова по результатам и методологии их получения тяготеет к уже доказанным теоремам по идентификации свойств ЛА и ВА. Следующее определение показывает, что задача идентификации последовательностей случайных кодов представляет собой задачу идентификации словарных функций из некоторого специального класса.
Определение 5. Пусть *X* — конечный алфавит. *Последовательностью случайных кодов* с множеством значепий *X* называется словарная функция $\varphi(p)\colon\ X^* \to [0,\ 1]$, удовлетворяющая условиям

1) $$\varphi(e) = 1;$$

2) $$\sum_{x \in X} \varphi(px) = \varphi(p). \quad (4)$$

Этим определением охватываются все конечнозначные случайные процессы с дискретным положительным временем t = 0,1,... Последовательность случайных кодов, как она определена в (4), есть, по существу, частный случай многотактного канала — последовательность случайных кодов может быть отождествлена с каналом, входной алфавит которого состоит из одной буквы, т. е. автономным последовательностным источником случайных кодов. Конечная однородная цепь Маркова является весьма частным, но наиболее важным и исследованным случаем последовательности случайных кодов. Дадим определение функции конечной однородной цепи Маркова. Рассматриваются только однородные конечные цепи Маркова, поэтому слова «однородный» и «конечный», как правило, впредь опускаются.

Пусть дана цепь Маркова с n состояниями

$$A = \langle \mathfrak{A},\ A,\ \mu \rangle, \quad (5)$$

где $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество состояний, $\mu(e) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — начальное распределение вероятностей состояний (или вектор состояний), $A = (p_{ij})$ — стохастическая матрица переходных вероятностей цепи. Пусть $\sum$ — некоторое разбиение множества $\mathfrak{A}$ на систему блоков $\pi_1, \ldots, \pi_k$, т. е.

$$\Sigma = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}, \quad \bigcup_i \pi_i = \mathfrak{A}, \quad \pi_i \cap \pi_j = \varnothing, \quad i \neq j.$$

Введем в рассмотрение словарную функцию $\mu(p)\colon\ \Sigma^* \to [0,\ 1]$, определенную на свободной полугруппе $\sum^*$ следующим образом. Если слово $p = \pi_1 \ldots \pi_s$, то положим

$$\mu(p) = \sum_{i_k \in \pi_k} \mu_{i_1} p_{i_1 i_2} \ldots p_{i_{s-1} i_s}, \quad (6)$$

где суммирование производится по всем таким траекториям цепи Маркова $a_{i_1} \ldots a_{i_s}$, для которых $i_k \in \pi_k,\ k = 1, \ldots, s.$

Определение 6. Последовательность случайных кодов с множеством значений $\Sigma = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$, являющаяся словарной функцией $\mu(p)$, определенной по цепи Маркова (5) в соответствии с формулой (6), называется *функцией цепи Маркова* (5). Для функции цепи Маркова (5), определенной разбиением $\sum$, применяется обозначение

$$\Phi = \langle \Sigma,\ \mathfrak{A},\ A,\ \mu \rangle.$$

Так как последовательность случайных кодов (6) однозначно задается совокупностью $\langle \Sigma,\ \mathfrak{A},\ A,\ \mu \rangle$, то этот список тоже будем называть *функцией цепи Маркова.* Для функции цепи Маркова можно предложить другое определение, независимое от определения цепи Маркова (см. в р.6. 5), но приведенное определение удобнее для нас при решении задачи идентификации.

Если B — $n\times n$-матрица, обозначим через $B_{\pi_i\pi_j}$ подматрицу, расположенную на пересечении всех строк с номерами из $\pi_i \subseteq \mathfrak{A}$ и всех столбцов с номерами из $\pi_j \subseteq \mathfrak{A}$. В частном случае вектор-строки или вектор-столбца будем применять аналогичные обозначения.

Лемма 2. *Пусть* $p = \pi_1 \ldots \pi_s$ $(p \in \Sigma^*)$, *тогда*

$$\mu(p) = \mu_{\pi_1} A_{\pi_1\pi_2} A_{\pi_2\pi_3} \ldots A_{\pi_{s-1}\pi_s} \mathbf{e}_{\pi_s}.$$

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения. Обозначим через E_{π_i} $n\times n$-матрицу, r, l-*й* элемент которой равен единице, если $r = l$ и $a_r \subset \pi_i$, и равен нулю в противном случае. Видно, что $\sum\limits_i E_{\pi_i} = E$ и, кроме того, E_{π_i}, $i = 1, \ldots, k$, — матрицы-идемпотенты. Обозначим через $\mathcal{J}_{\pi_i}$ матрицу размерности $|\pi_i| \times n$, получающуюся из E_{π_i} вычеркиванием всех нулевых строк, и через $\overline{\mathcal{J}}_{\pi_i}$ — матрицу размерности $n \times |\pi_i|$, получающуюся из E_{π_i} вычеркиванием нулевых столбцов. Тогда верны следующие утверждения:

1) $\overline{\mathcal{J}}_{\pi_i} = \mathcal{J}^T_{\pi_i}$, $\mathcal{J}^T_{\pi_i}\mathcal{J}_{\pi_i} = E_{\pi_i}$, $i = 1, \ldots, k$;

2) для любых $n\times n$-матрицы B, вектор-столбца **m** и вектор-строки **a** имеем

$$B_{\pi_i\pi_j} = \mathcal{J}_{\pi_i} B \mathcal{J}^T_{\pi_j},$$

$$\mathbf{a}_{\pi_i} = \mathbf{a}\mathcal{J}^T_{\pi_i}, \quad \mathbf{m}_{\pi_i} = \mathcal{J}_{\pi_i}\mathbf{m}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Используя введенные обозначения и лемму 2, получим следующее представление для словарной функции $\mu(p)$, определяющей функцию цепи Маркова:

$$\mu(p) = \mu\mathcal{J}^T_{\pi_1}\mathcal{J}_{\pi_1}A\mathcal{J}^T_{\pi_2}\mathcal{J}_{\pi_2}A\mathcal{J}^T_{\pi_3}\ldots\mathcal{J}_{\pi_{s-1}}A\mathcal{J}^T_{\pi_s}\mathcal{J}_{\pi_s}\mathbf{e} = \\ = \mu E_{\pi_1}AE_{\pi_2}A\ldots AE_{\pi_s}\mathbf{e}. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение систему $n\times n$ -матриц $\Phi(\pi/x) = AE_\pi$. Система $\Phi = \langle\{x\}, \mathfrak{A}, \Sigma, \Phi(\pi/x)\rangle$ определяет автономный ВА с n состояниями и выходным множеством $\sum$. Обозначим через $\mu_\pi(e)$ распределение вероятностей μE_π. В соответствии с формулой (7) видим, что для каждого слова $\pi p \in \Sigma^*$

$$\mu(\pi p) = \mu_\pi(e)\tau_\Phi(p/x^{|p|}). \quad (8)$$

Замечание 3. Для каждой функции цепи Маркова с n состояниями существует автономный ВА с n состояниями и выходным множеством, совпадающим с множеством значений функции цепи, такой, что многотактный канал, представляемый ВА, и словарная функция $\mu(p)$, определяющая цепь Маркова, связаны соотношением (8).

Мы пришли к интерпретации функции цепи Маркова как частного случая конечно-автоматного канала. Было бы неточно говорить, что функция цепи Маркова есть конечно-автоматный канал из-за временного несоответствия в функционировании: первая выходная буква автоматного канала есть реакция на первую входную букву, тогда как в случае функции цепи Маркова первое значение последовательности случайных кодов есть ее начальное значение. Тем не менее замечание 3 гарантирует возможность применения общей методологии решения задачи идентификации для рациональных словарных функций к задаче идентификации функций цепей Маркова.

Теорема 5. *Пусть* $\Phi = \langle \Sigma, \mathfrak{A}, A, \mu \rangle$ *— функция цепи Маркова с n состояниями. Существует ЛА размерности* $\mathrm{rg}\,\mu$, *определяющий словарную функцию* $\mu(p)$, *который строится по множеству значений словарной функции* $\mu(p)$, *на начальном сегменте длины* $2\,\mathrm{rg}\,\mu - 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Полученные результаты показывают, что если известны ранг словарной функции $\varphi(p)$ и множество ее значений на начальном сегменте длины не менее $2\,\mathrm{rg}\,\varphi - 1$, то по этим сведениям эффективно строится единственное продолжение этого сегмента, т. е. восстанавливается словарная функция $\varphi(p)$. Если же задан только некоторый начальный сегмент словарной функции, но ранг ее неизвестен, то идентификация словарной функции, вообще говоря, невозможна, т. е. невозможно указать единственное продолжение начального сегмента словарной функции произвольной фиксированной длины. В такой ситуации мы получаем семейство словарных функций, совпадающих на заданном начальном сегменте.

Рассмотрим следующую задачу: пусть словарная функция $f(p)$ задана на начальном сегменте длины *l*. Требуется так доопределить ее на всех словах свободной полугруппы *X**, чтобы полученная словарная функция имела бы заданные свойства. Эта задача имеет и автоматную интерпретацию — можно считать, что речь идет об идентификации поведения конечномерного ЛА, когда неизвестна его размерность. Методология позволяет дать параметрическое описание класса возможных продолжений словарной функции для наперед заданного ранга. Рассмотрим задачу продолжения словарной функции с минимальным возможным рангом.

Существует взаимно однозначное соответствие между словарными функциями $f(p)$ и обобщенными ганкелевыми матрицами: сопоставим функции $f(p)$ матрицу $\mathrm{Han}\, f$, в строке p и столбце p_2 которой стоит число $f(p_1p_2)$. Обратно, каждая обобщенная ганкелева матрица, строки и столбцы которой занумерованы словами свободной полугруппы X^*, задает единственную словарную функцию $f(p)$. Поэтому задачу минимального продолжения словарной функции можно формулировать и как задачу такого доопределения обобщенной ганкелевой матрицы, чтобы ранг получившейся матрицы был наименьшим. В такой постановке возможны и иные, чисто матричные, толкования задачи доопределения. Для нас такая постановка предпочтительнее, поскольку она теснее связана с методами решения. Если известные элементы матрицы принадлежат некоторому полю *К*, то удобно смотреть на неопределенные элементы как на многочлены над полем *К* от переменных из некоторого множества $\Lambda = \{\lambda_i,\ i \in \mathcal{I}\}$. Обозначим через $K(\Lambda)$ кольцо многочленов над полем *К*. Все дальнейшие результаты параграфа сформулируем для произвольного поля *К*, так что интерпретация их для словарных функций требует замены поля *К* на поле действительных чисел *R*. Пусть $A(\Lambda)$ — многочленная матрица над кольцом $K(\Lambda)$. Минор матрицы $A(\Lambda)$ называется *постоянным*, если его элементы не зависят от переменных $\lambda_i,\ i \in \mathcal{I}$.

Определение 7. *Рангом* $\mathrm{rg}\, A$ многочленной матрицы $A(\Lambda)$ называется максимальный среди порядков постоянных ненулевых миноров этой матрицы. Если в случае счетномерной матрицы $A(\Lambda)$ такого максимально числа нет, то полагаем $\mathrm{rg}\, A = \infty$.

В случае постоянной матрицы это понятие совпадает с обычным определением ранга матрицы. Для произвольного фиксированного набора значений переменных $\Lambda_0 = \{\lambda_i^0,\ i \in \mathcal{I}\}$ верно неравенство $\mathrm{rg}\, A(\Lambda_0) \geqslant \mathrm{rg}\, A(\Lambda)$, которое, в частности, может быть строгим неравенством для произвольных наборов Λ_0 или тождественным равенством.

Определение 8. Квадратная многочлепная матрица *А* над кольцом *К(Λ)* называется *унимодулярной*, если $\det A =$ $= \mathrm{const} \neq 0$.

Унимодулярная матрица имеет обратную, тоже унимодулярную, многочленную матрицу, вычисляемую по обычным правилам матричной алгебры. Можно сказать еще, что ранг многочленной матрицы равен максимальному среди порядков ее уиимодулярных подматриц.

Пусть теперь словарная функция $f(p)$ задана на начальном сегменте длины *l*. Доопределим $f(p)$ на словах p, $|p| > l$, положив $f(p) = \lambda_p$, где λ_p — переменная, и таким образом получим словарную функцию $f\colon X^* \to K(\Lambda_l) \subseteq K(\Lambda)$, где $\Lambda_l = \{\lambda_p\colon\ p \in X^*,\ |p| > l\}$, $\Lambda = \{\lambda_p\colon\ p \in X^*\}$. Можно говорить о ранге частично определенной словарной функции f, подразумевая под этим ранг соответствующей многочленной ганкелевой матрицы $\mathrm{Han}\, f$ над $K(\Lambda)$.

Теорема 6. *Пусть словарная функция f задана на начальном сегменте длины l, со значениями в поле K. Существует словарная функция* $g\colon X^* \to K(I)$, *где* $I \subseteq \{\lambda_p\colon\ l < |p| \leqslant 2l+1\}$, *которая при подстановке вместо* $\lambda_p \in I$ *произвольных чисел* λ_p^0 *обращается в словарную функцию* g^0 *такую, что*

1) $g^0(p) = f(p)$, $|p| \leqslant l$;
2) $\mathrm{rg}\, g^0 = \mathrm{rg}\, f$.

Любое продолжение f минимального ранга может быть получено подстановкой некоторых значений переменных из I в полином g(p).

Доказательство. Введем бинарное отношение $\succ\!-$ на $K(\Lambda)$: $a \succ\!- b$ тогда и только тогда, когда либо $a \not\equiv \mathrm{const}$, либо $a \equiv \mathrm{const}$ и $a = b$. Для вектор-строк (столбцов) **a, b** и матриц A, B будем писать $\mathbf{a} \succ\!- \mathbf{b}$, $A \succ\!- B$ для обозначения того, что $\succ\!-$ выполняется покомпонентно. Далее, скажем, что **a** есть *линейная* $\succ\!-$*-комбинация* векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_h$, если существуют $c_1, \ldots, c_h$ из $K(\Lambda)$, для которых

$$\mathbf{a} \succ\!- \sum_{i=1}^{h} c_i \mathbf{b}_i.$$

Будем просматривать строки $\mathrm{Han}\, f$ сверху вниз, и поступать так: если строка с номером p есть линейная $\succ\!-$-комбинация предыдущих строк матрицы $\mathrm{Han}\, f$, то отбрасываем ее, если пет — вносим в список. Так получим последовательность строк с возрастающими номерами

$$e = p_1 < \ldots < p_n \quad (9)$$

такую, что: а) ни одна из них не является $\succ\!-$-комбинацией предыдущих строк матрицы $\mathrm{Han}\, f$, б) любая строка p матрицы $\mathrm{Han}\, f$ есть $\succ\!-$-комбинация строк с номерами $p_i \leqslant p$.

Подобно тому, как это делалось со строками, составим последовательность столбцов $\mathrm{Han}\, f$ с номерами

$$e = q_1 < \ldots < q_m \quad (10)$$

такую, что: а) ни один из них не является $\succ\!-$—комбинацией столбцов, стоящих левее, б) любой столбец q может быть вычислен как $\succ\!-$—комбинация столбцов с номерами $q_i \leqslant q$.

В дальнейшем слова p и q с нижними индексами обозначают номера из последовательностей (9) и (10) соответственно. Для завершения доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть для некоторого слова p*

$$f(pq_j) \succ \sum_{p_i \leqslant p} a_{p_i} f(p_i q_j), \quad j = 1, \ldots, m. \quad (11)$$

Тогда для каждого слова q

$$f(pq) \succ \sum_{p_i \leqslant p} a_{p_i} f(p_i q).$$

Доказательство. Пусть $f(qp) = \mathrm{const}$. Тогда элементы $f(p_i q)$, $f(pq_j)$, $p_i \leqslant p$, $q_j \leqslant q$ — константы. Пусть g-столбец есть $\succ$— комбинация столбцов из (10) с коэффициентами $b_{q_1}, \ldots, b_{q_m}$.

Тогда, в частности,

$$f(pq) = \sum_{q_j \leqslant q} b_{q_j} f(pq_j).$$

Подставим в эту формулу выражения для $f(pq_j)$ из (11) и переменим порядок суммирования

$$f(pq) = \sum_{q_j \leqslant q} b_{q_j} \sum_{p_i \leqslant p} a_{p_i} f(p_i q_j) =$$

$$= \sum_{p_i \leqslant p} a_{p_i} \sum_{q_j \leqslant q} b_{q_j} f(p_i q_j) = \sum_{p_i \leqslant p} a_{p_i} f(p_i q).$$

Из леммы 3 следует, что $n \leqslant m$. Следующая лемма двойственна к предыдущей.

Лемма 4. *Пусть для некоторого слова q*

$$f(p_i q) \succ \sum_{q_j \leqslant q} b_{q_j} f(p_i q_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда для каждого слова p $f(pq) \succ \sum_{q_j \leqslant q} b_{q_j} f(pq_j)$.

Итак, $m \leqslant n$ и, следовательно, $m = n$.

На самом деле в $\succ$-комбинации для p-й строки условие $p_i \leqslant p$ можно опустить. Более точно, пусть p-я строка есть $\succ$—комбинация строк с номерами из (9) с коэффициентами $a_{p_1}, \ldots, a_{p_n}$, тогда если $p_s > p$, то $a_{p_s} \equiv 0$. Действительно, предположим обратное. Пусть p_s-наибольший такой номер, что $p_s > 0$ и $a_{p_s} \not\equiv 0$. Рассмотрим соотношения

$$f(pq_j) \succ \sum_{p_i \neq p_s} a_{p_i} f(p_i q_j) + a_{p_s} f(p_s q_j), \quad j = 1, \ldots, n,$$

для тех случаев, когда $f(p_s q_j) = \mathrm{const}$. Тогда $f(pq_j) = \mathrm{const}$, так как $p_s > p$, и эти соотношения являются равенствами. В эти равенства вместо многочленов a_{p_i} можно подставить такие их значения $a^0_{p_1}, \ldots, a^0_{p_s}$, что $a^0_{p_s} \neq 0$, и разрешить эти равенства относительно $f(p_s q_j)$. По лемме 3 получим, что p_s-я строка есть $\succ$-комбииация строк, лежащих выше ее в $\mathrm{Han}\, f$, что противоречит построению (9).

Доказанное утверждение пригодится нам в следующей специальной форме. Буквой F обозначим $n \times n$-матрицу $(f(p_i q_j))$, через $F(p)$ —

матрицу $(f(p_i p q_j))$. Пусть *p = rt,* тогда *F(p)* — подматрица матрицы Han *f,* расположенная на пересечении строк с номерами $p_1 r, \ldots, p_n r$ и столбцов с номерами $tq_1, \ldots, tq_n$. В левом верхнем углу *F(p)* находится элемент $f(p)$.

Лемма 5. *Если* $A(x) = (a_{p_i p_j}(x))$ *— такая матрица над* $K[\Lambda]$, *что* $F(x) \succ A(x)F$, *то для* $p_j > p_i x$ $a_{p_i p_j}(x) \equiv 0$, *т. е. A(x) имеет «близкий* к *левому треугольному» вид.*

Для доказательства достаточно применить доказанное выше утверждение к строкам с номерами $p_i x$, $i = 1, \ldots, n$.

Следствие 4. *В условиях леммы* 5 *для всех q*

$F(xq) \succ A(x)F(q)$. (12)

Доказательство непосредственно следует из леммы 3, если считать *F(q)* расположенной в строках с номерами $p_1, \ldots, p_n$ и столбцах с номерами $qq_1, \ldots, qq_n$, а $F(xq)$ — расположенной в строках с номерами $p_1 x, \ldots, p_n x$ и тех же столбцах.

Соотношение (12) означает, что всякий постоянный элемент $f(p_i x q q_j)$ матрицы $F(xq)$ можно вычислить, умножив *р*-юстроку *A(x)* на *q*-й столбец

$$F(q):\ f(p_i x q q_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{p_i p_k}(x)\, f(p_k q q_j).$$

Если при этом $f(p_k q q_j) \neq \mathrm{const}$, то необходимо $p_k > p_i x$, тогда по лемме 5 $a_{p_i p_k} \equiv 0$.

Отсюда получаем

Следствие 5. *В условиях леммы* 5, *если* $F(q) \succ G$, *то* $F(xq) \succ A(x)G$.

Лемма 6. *Пусть для каждого* $x \in X$ *найдена матрица A(x) такая, что* $F(x) \succ A(x)F$. *Тогда для произвольного слова* $p \in X^*$ *выполняется* $F(p) \succ A(p)F$.

Доказательство. Действительно, по следствию 5 если $F(p) \succ A(p)F$ для всех слов *р* длины *к,* то для произвольного $x \in$

$\in X$ $F(xp) \succ A(x)A(p)F = A(xp)F$.

Лемма 7. $\det F \equiv \mathrm{const} \neq 0$.

Доказательство. *р*-я строка в $\mathrm{Han}\, f$ тогда и только тогда является $\succ$-комбинацией строк с номерами $p_i \leqslant p$, когда вектор $(f(pq))_{q \in \omega}$ $(\omega = \{q:\ |pq| \leqslant l\})$ является линейной комбинацией векторов $(f(p_i q))_{q \in \omega}$, $p_i \leqslant p$. Линейная зависимость с коэффициентами из поля $K' \supseteq K$ векторов с координатами из *К* равносильна их линейной зависимости с коэффициентами из *К.* Поэтому, в случае, когда $\det F$ неприводим над *К,* получим в подходящем поле $K' \supset K$ противоречивое равенство $\det F' = 0$, $F \succ F'$. Следовательно,

$\det \bar{F} = \text{const} \neq 0$, так как по лемме 3 ни одна из строк F не является $\succ$—комбинацией других строк.
Теперь можно завершить доказательство теоремы 6.
Матрица $A(x) = F(x)F^{-1}$ удовлетворяет соотношению $F(x) \succ$
$\succ A(x)\bar{F}$. Утверждение леммы 6 для таких $A(x)$ приводит к формуле $F(p) \succ F(x_1)F^{-1} \ldots F^{-1}F(x_k) = F(p)$ для $p = x_1 \ldots x_k$ или, что равносильно $F(pq) \succ F(p)F^{-1}F(q)$ для всех p, q. Совокупность
$\mathbf{a} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ A(x) = F(x)F^{-1},\ x \in X,\quad \mathbf{b} = (f(p_1),\ \ldots,\ f(p_n))^T,$

где $\mathbf{b}$ — первый столбец F, определяет ЛА над $K[I]$, где I — множество переменных, входящих в F и $F(x)$. Этот автомат определяет отображение $g\colon\ X^* \to K[I],\ g(p) = \mathbf{a}A(p)\mathbf{b} = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0) \times$
$\times F(p)(1,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T (F(e) = F)$. Очевидно, $f(p) \succ g(p)$ для всех p.
Подставляя в F, $F(x)$ всевозможные значения вместо переменных множества I, получим некоторое семейство продолжений функции I над полем K ранга n. Или, говоря на матричном языке, получим семейство продолжений обобщенной ганкелевой матрицы наименьшего возможного ранга n. В каждом из таких продолжений строки с номерами $p_1,\ \ldots,\ p_n$ линейно независимы, а прочие — их линейные комбинации.
Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в том, что произвольное продолжение f функции f ранга n содержится в этом семействе. Соответствующие этому продолжению матрицы
$\mathrm{Han}\,\hat{f},\ \hat{F},\ \hat{F}(p)$ получены подстановкой соответствующих значений вместо переменных λ_p в матрицах $\mathrm{Han}\,f,\ F,\ F(p)$.
Покажем, что $\hat{F}(pq) = \hat{F}(p)\hat{F}^{-1}\hat{F}(q)$ для всех p, q. В самом деле, если для некоторых $p,\ q,\ i,\ j$

$$\hat{f}\,(p_i pqq_j) \neq (\hat{f}\,(p_i pq_1),\ \ldots,\ \hat{f}\,(p_i pq_n))\,\hat{F}^{-1}\begin{pmatrix} \hat{f}\,(p_1 qq_j) \\ \cdots \\ \hat{f}\,(p_n qq_j) \end{pmatrix},$$

то определитель порядка $n + 1$

$$\begin{vmatrix} & \hat{F} & & \hat{f}\,(p_1 qq_j) \\ & & & \cdots \\ & & & \hat{f}\,(p_n qq_j) \\ \hat{f}\,(p_i pq_1) & \ldots & \hat{f}\,(p_i pq_n) & \hat{f}\,(p_i pqq_j) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Этот определитель, однако, либо имеет две одинаковые строки, если $p_i p \in \{p_1,\ \ldots,\ p_n\}$, либо два одинаковых столбца, если $qq_j \in$
$\in \{q_1,\ \ldots,\ q_n\}$, либо является минором (n+1)-го порядка матрицы $\mathrm{Han}\,f$ раига n, т. е. в любом случае должен быть равен нулю.

Требуемое равенство доказано. Но из него следует, что автомат построенного выше вида с $\widehat{F}$, $\widehat{F}(x)$ и $\widehat{\mathbf{b}}=\mathbf{b}$ вместо F, $F(x)$ и $\mathbf{b}$ реализует $\widehat{f}$.

Из леммы 7 вытекает, что $\mathrm{rg}\,\mathrm{Han}\,f \geqslant n$. Теперь, когда доказано существование продолжения $\mathrm{Han}\,f$ над *К* ранга *n,* мы можем утверждать, что ранг мпогочленной матрицы $\mathrm{Han}\,f$ в смысле определения ранга, данного во введении, в точности равен *n* и, таким образом, *F* — максимальный постоянный непулевой минор $\mathrm{Han}\,f$.

Задача идентификации для ВА была поставлена Е. Дж. Гильбертом в форме проблемы идентификации функций конечных цепей Маркова. Работа Дж. Карлайла об идентификации многотактных каналов с конечной памятью использует развитие методов Е. Дж. Гильберта, Д. Блэкуэлла и Л. Купмана. Подход К. Дж. Гильберта к проблеме идентификации цепей Маркова основан на введенном понятии ранга функции цепи Маркова, отличном от понятия ранга словарной функции. Исторически, как уже упоминалось, оно возникло раньше и определило алгебраический подход к решению задачи идентификации вероятностных и линейных автоматов. Дадим здесь это определение.

Определение 9. Пусть $\langle \mu(p),\ p \in X^* \rangle$ — последовательность случайных кодов. *Рангом* $\mathrm{rg}\,x$ буквы $x \in X$ называется наибольшее *r* такое, что существует неособенная *r*×*r*-матрица

$$(\mu(p_i x q_j)) \qquad p_i, \quad q_j \in X^*, \quad i,\ j = 1,\ \ldots,\ r.$$

Рангом словарной функции $\mu(p)$ $\mathrm{rg}_G\,\mu$ (в отличие от ранга $\mathrm{rg}\,\mu$) называется число $\mathrm{rg}_G\mu = \sum\limits_{x \in X} \mathrm{rg}\,x$. Если $\mu(p)$— функция цепи Маркова с *n* состояниями, то $\mathrm{rg}_G\,\mu \leqslant n$.

Гильберт доказал следующее.

Теорема 7. *Функция цепи Маркова с п состояниями однозначно определяется заданием множества значений словарной функции* $\mu(p)$ *на начальном сегменте длины* $2(n-k+1)$, где $k = |\Sigma|$.

А. Паз уточнил теорему 7 за счет усложнения параметра. *Псевдоцепъю Маркова* называется система $\Phi = \langle \mathfrak{A},\ A,\ \mu,\ \mathbf{m} \rangle$, где данные определены как для цепи Маркова, но *А* и *μ* необязательно имеют неотрицательные элементы, а вечетор-столбец **m** таков, что $\mu\mathbf{m} = 1$.

Теорема 8. *Пусть последовательность случайных кодов* $\langle \mu(p),\ p \in X^* \rangle$ *имеет конечный ранг* $\mathrm{rg}_G\,\mu$. *Можно построить псевдоцепь Маркова с п состояниями такую, что* $\mu(p)$ *является функцией этой псевдоцепи в смысле определения* 5. *Для этого достаточно знать множество значений словарной функции* $\mu(p)$ *на начальном сегменте длины не более* $2(\mathrm{rg}_G\,\mu - |\Sigma| + 1)$.

Понятие псевдоцепи Маркова совпадает с понятием ЛА с небольшим отличием, обусловленным требованием $\mu m = 1$. Следовательно, всякая словарная функция конечного ранга $\mu(p)$ индуцируется некоторой конечной псевдоцепью Маркова. Но такие и только такие словарные функции идентифицируются и функциями цепей Маркова! Таким образом, понятие функции псевдоцеви Маркова, в отличие от понятия самой псевдоцепи, не расширяет класса индуцируемых словарных функций. Эти соображения показывают, что понятие ЛА более релевантно к задаче идентификации функций цепей Маркова.

Теоремы 5, 7 и 8 содержат ответ на вопрос: каково наименьшее *l*, при котором начальный сегмент длины *l* полностью идентифицирует словарную функцию μ, если априори о ней известна некоторая дополнительная информация. Эта информация различна в приведенных теоремах. Поскольку $\mathrm{rg}_G\,\mu \leqslant n$, то оценка длины сегмента в теореме 8 всегда не больше такой оценки в теореме 7.

Нижеследующий пример показывает, что оценки для *l* в теоремах 7—8 неточны. Пусть даны две цепи Маркова с *n* состояниями

$$A_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdots & E \\ 0 & \\ \hline 1 & 0 \ldots 0 \end{array}\right), \qquad A_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \\ \cdots & E \\ 0 & \\ \hline 1/2 & 1/2 \ldots 0 \end{array}\right)$$

и начальным распределением вероятностей $\mu = (1, 0, \ldots, 0)$, одинаковым для обеих цепей. Цепь Маркова может трактоваться как тривиальная функция цепи Маркова, когда $\mathfrak{A} = \Sigma$. Теорема 7 дает в этом случае оценку $|p| \leqslant 2$. В пашем примере для очевидным образом различающихся цепей Маркова значения словарных функций $\mu_1(p)$ и $\mu_2(p)$ совпадают на всех словах длины $|p| \leqslant n$. Вычислим $\mathrm{rg}_G\,\mu$ для обеих функций примера. Заметим, что $n \times n$-подматрицы $\mathrm{Han}\,\mu_1$ и $\mathrm{Han}\,\mu_2$, расположенные в строках с номерами $e,\ a_1,\ a_1a_2,\ \ldots,\ a_1a_2\ldots a_{n-1}$ и столбцах с номерами $a_1, \ldots, a_n$ — единичные. Так как $\mathrm{rg}\,\mu_1,\ \mathrm{rg}\,\mu_2 \leqslant n$, то получаем $\mathrm{rg}_G\,\mu_1 = \mathrm{rg}_G\,\mu_2 = n$. Поэтому в обоих случаях оценка длины начального сегмента будет равна $2n$ — 1.

Таким образом, вопрос об оценках «показателей дентифицируемости», зависящих от *n* и *k* или от $\mathrm{rg}_G\,\mu$, остается открытым. Впрочем, и теорема 5 оставляет открытым вопрос о понижении оценки *l*, заимствованной из общего результата, используя весьма специальный вид словарной функции, определяющей функцию конечной цепи Маркова.

Обобщенная ганкелева матрица фигурирует в работе Дж. Карлайла . Однако явное определение обобщенной ганкелевой матрицы принадлежит Ю. А. Альпину и Н. 3. Габбасову. Достаточно развитая теория ганкелевых матриц, в которой, в частности, решалась задача продолжения ганкелевых матриц, была построена в работе И. С. Иохвидова. Аппарат, развитый в этой работе, а также и основная теорема 6 принадлежат Ю. А. Альпину и Н. 3. Габбасову.

6.3. Проблема устойчивости

Задача устойчивости ВА, как и проблема редукции, возникает естественным образом, если задаться вопросом практического использования этой математической модели. Моделирование физической системы посредством конечного ВА связано с предварительным статистическим анализом поведения моделируемой системы и статистическими оценками элементов переходных матриц. Полученные статистические оценки задают значения вероятностей перехода в математической модели с некоторой погрешностью. В этих условиях закономерен вопрос: насколько чувствительно предельное поведепие математической модели к небольшим изменениям этих вероятностей перехода? Обладает ли ВА свойством «устойчивости» в том смысле, что малым флуктуациям элементов матриц перехода соответствуют небольшие изменения в предельном поведении математической модели? Оказывается ВА не всегда обладает свойством «устойчивости». Тем не менее могут быть описаны некоторые классы устойчивых ВА. Перейдем к строгой математической постановке задачи.

Пусть конечный ВА с начальным вектором состояний $\mu(e)$ и решающим поствектором $\mathbf{n}_F$ представляет язык $T(A, \lambda)$ изолированной точкой сечения $\lambda \in [0, 1)$.

Определение 1. Конечный ВА *A* называется *устойчивым,* если существует такое положительное ε, что для всякого конечного ВА *A',* удовлетворяющего условиям:

$$1)\ |\mu(e) - \mu'(e)| < \varepsilon, \qquad 2)\ |A(x) - A'(x)| < \varepsilon,$$

λ является изолированной точкой сечения и языки $T(A, \lambda)$ и $T(A', \lambda)$ совпадают.

Определение 2. Конечный ВА *A* называется *актуальным,* если все элементы матриц *A(x)* строго положительны.

Определение 3. Язык *S* называется *дефинитным,* если для некоторого целого *k* справедливо следующее: если $|p| \geqslant k$, то $p \in S$ тогда и только тогда, когдагде $p = p_1p_2$, где $|p_2| = k$, $p_2 \in S$.

Докажем теорему, представляющую как самостоятельный интерес, так и имеющую значение для решения проблемы устойчивости.

Теорема 1. *Если A — актуальный ВА и λ — изолированная точка сечения, то язык $T(A, \lambda)$ — дефинитный.*

Доказательство. Пусть $|\chi(p)-\lambda| \geqslant \delta > 0.$ Предположим, что все элементы матриц *A (x)* больше Δ > 0. Предположим, что ВА *A* имеет одно финальное состояние a_n и фиксировано начальное состояние a_1. (Доказательство в общем случав по существу остается тем же.)

Пусть число *k* таково, что $(1-2\Delta)^{k-1} < 2\delta.$ Для любого слова $p = x_1 \dots x_k$ матрица $A(p) = A(x_1)\dots A(x_k)$ и, таким образом, согласно следствию 1.3.1 удовлетворяет неравенству

$$\|A(p)\| \leqslant (1-2\Delta)^{k-1} < 2\delta.$$

Так как $\chi(p)$ есть в данном случае (1, *n)*-элемент матриды *A(p),* то согласно следствию 1.3.2

$$|\chi(qp)-\chi(p)| \leqslant |A(q)A(p)| \leqslant \|A(p)\|.$$

Таким образом, для слов $p,\ |p| = k,$ имеет место неравенство $|\chi(qp)-\chi(p)| < 2\delta.$ Следовательно, $qp \in T(A,\ \lambda)$ тогда и только тогда, когда $p \in T(A,\ \lambda),$ а это доказывает, что $T(A,\ \lambda)$ — дефинитный язык.

Классом ВА, обладающим свойством устойчивости, оказывается класс актуальных автоматов.

Теорема 2. *Пусть* $A = \langle A(x),\ x \in X\rangle$ *— актуальный автомат и λ — изолированная точка сечения. Существует* ε > 0 *такое, что для каждого ВА, удовлетворяющего условиям* 1) *и* 2) *определения* 1, *языки* $T(A, \lambda)$ *и* $T(A', \lambda)$ *совпадают.*

Доказательство. Пусть *A(x)* и *A'(x)* переходные матрицы автоматов *A* и *A'* соответственно, Δ и Δ' — соответственно наименьшие элементы матриц *A(x)* и *A'(x).* Покажем, что для любого $\delta_1 > 0$ можно найти такое ε > 0 , что из системы неравенств

$$|A(x)-A'(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

следует система неравенств для $p = x_1 \dots x_m$:

$$|A(p)-A'(p)| = |A(x_1)\dots A(x_m) - A'(x_1)\dots A'(x_m)| < \delta. \quad (2)$$

Последнее доказывает теорему в силу изолированности точки сечения *λ*.

Пусть число *k* таково, что $(1-2\Delta)^{k-1} < \delta_1/3.$ Мы можем выбрать достаточно малое ε>0 так, чтобы из (1) следовало:

а) $(1-2\Delta')^{k-1} < \delta_1/3;$ этого возможно добиться, поскольку |Δ| есть предельное значение Δ' при ε, стремящемся к нулю;

б) для всех слов p_2 таких, что $|p_2| \leqslant k,$ имеет место соотношение

$$|A(p_2)-A'(p_2)| < \delta_1/3.$$

Если $|p| \leqslant k,$ то соотношение (2) тривиально выполняется в силу б).

Если $|p| > k$, то $p = p_1p_2$, где $|p_2| = k$. Матрица $A(p_2)$ есть произведение *k* матриц типа *A (x),* поэтому ввиду следствия 1.3.1

$$\|A(p_2)\| \leqslant (1-2\Delta)^{k-1} < \delta_1/3.$$

Аналогично, применяя а), имеем $A'(p_2) < \delta_1/3$. Поэтому

$$|A(p) - A'(p)| \leqslant$$
$$\leqslant |A(p_1)A(p_2) - A(p_2)| + |A'(p_1)A'(p_2) - A'(p_2)| + |A(p_2) - A'(p_2)|.$$

Ввиду следствия 1.3.2 и условия б) каждое слагаемое в правой части неравенства меньше $\delta_1/3$.

Замечание 1. Теорема 1 неверна для произвольного конечного ВА с изолированной точкой сечения. Действительно, пусть *A* — ВА с золированной точкой сечения, представляющий недефинитный язык $T(A, \lambda)$. Автомат *A'* может быть актуальным и удовлетворять условиям 1) и 2) определения устойчивости. В этом случае либо λ, не является изолированной точкой сечения для *A'*, либо в силу теоремы1 язык $T(A', \lambda)$ является дефинитпым, следовательно,

$$T(A. \lambda) \neq T(A'. \lambda).$$

Тем не менее класс устойчивых ВА оказывается существенно шире класса актуальных автоматов.

Теорема 3. *Всякий конечный регулярный ВА с изолированной точкой сечения является устойчивым.*

Доказательство. Так как λ, является изолированной точкой сечения автомата *A,* то для всех *p* выполняется неравенство

$$|\chi(p) - \lambda| \geqslant \delta, \quad \delta > 0.$$

Поскольку*A* является регулярным ВА, то согласно теореме 1.3.1 существует натуральное *l* такое, что каждая матрица из системы матриц $\Xi = \{\bar{A}(p),\ |p| = l\}$ является стягивающей. Система матриц Ξ — конечная, содержит не более k^l элементов, где *k*— число элементов множества *X*. Обозначим через *c* минимальное *c(p)* по всем матрицам $A(p) \in \Xi$.. Тогда для каждого слова *p* $(|p| = N)$ верно соотношение $\|\bar{A}(p)\| \leqslant (1-c)^{[N/l]}$.

Пусть число *N* таково, что $(1-c)^{[N/l]} < \delta/3|F|$. При соответствующем выборе ε система матриц вероятностей переходов $\{A'(x),\ x \in X\}$ любого автомата *A',* удовлетворяющего условиям 1) и 2) определения устойчивости, будет подчиняться эргодическому принципу. Кроме того, можно выбрать достаточно малое ε > 0 так, чтобы

1) $$(1-c')^{[N/l]} < \delta/3\,|F|, \quad \text{где} \quad c' = \min_{|p|=l} c'(p) \qquad (3)$$

(это можно сделать, так как $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} c' = c$),

2) для всех p_{1i} таких, что $|p_1| \leqslant N$, имело место соотношение

$$|\mu(e)A(p_2) - \mu'(e)A'(p_2)| \leqslant \delta/3|F|.$$

Если для любого слова p

$$|\mu(e)A(p) - \mu'(e)A'(p)| < \delta/|F|, \quad (4)$$

то $|\chi(p) - \chi'(p)| < \delta,$ а это означает, что если $p \in T(A, \lambda),$ то $p \in T(A', \lambda),$ и наоборот, если $p \notin T(A, \lambda),$ то $p \notin T(A', \lambda).$ Покажем, что имеет место неравенство (4). Действительно, если $|p| \leqslant N,$ то (4) выполняется в силу 2), если $|p| > N,$ то $p = p_1p_2,$ где $|p_2| = N.$ Матрица $A(p_2)$ есть произведение N матриц $A(x)$. Очевидно, имеет место неравенство

$$|\mu A(p) - \mu' A'(p)| \leqslant |\mu A(p_1)A(p_2) - \mu A(p_2)| +$$
$$+ |\mu' A'(p_1)A'(p_2) - \mu' A'(p_2)| + |\mu A(p_2) - \mu' A'(p_2)|,$$
$$\mu = \mu(e), \quad \mu' = \mu'(e).$$

Каждое из слагаемых в правой части последнего неравенства меньше $\delta/3|F|.$ Таким образом, верно (4), и тем самым теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть ВА A с изолированной точкой сечения* λ $(|\chi(p) - \lambda| \geqslant \delta,\ \delta > 0)$ *и матрицы вероятностей переходов удовлетворяют условию* $\|A(p)\| < 2\delta/|F|$ *для всех слов* p $(|p| = m),$ *для некоторого натурального числа m. Тогда* $T(A, \lambda)$ *есть дефинитный язык.*

Доказательство. Для любых $p,\ |p| \geqslant m,\ p = p_1p_2, |p_2| = m$ выполняется неравенство

$$|\chi(p) - \chi(p_2)| \leqslant |F|\,|\mu A(p_1)A(p_2) - \mu A(p_2)|,$$

откуда получим

$$|\chi(p) - \chi(p_2)| \leqslant |F|\|A(p_2)\| < 2\delta. \quad (5)$$

Из (5) следует, что $p \in T(A, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $p_2 \in T(A, \lambda).$

Следствие 1. *Если ВА A с изолированной точкой сечения λ является эргодическим, то он с точкой сечения λ представляет дефинитный язык.*

Из рассмотрения теоремы 4 может возникнуть предположение, что свойство устойчивости ВА с изолированной точкой сечения является характеристикой дефинитного языка. Однако это не так. Покажем, что не всякий ВА, представляющий с изолированной точкой сечения *λ* дефинитный язык, является устойчивым.

Например, ВА *A* с матрицами переходов вида

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(x) & \beta(x) \\ 0 & \alpha(x) & \beta(x) \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha(x) < 1, \quad x \in X,$$

$$\mu(e) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3), \quad \mathbf{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

при $\mu_1 > \beta(\tilde{x})$ для некоторого $\tilde{x}$ с точкой сечения $\lambda = \beta(\tilde{x})$ представляет дефинитный язык X^*. Действительно, $\chi(px) = \mu_1 + \beta(x) \times \times (\mu_2 + \mu_3)$. В этом случае точка сечения $\beta(\tilde{x})$ автомата A является изолированной. Но та же самая точка сечения $\beta(\tilde{x})$ уже не является изолированной по отношению к автомату A', отличающемуся от автомата A лишь матрицей

$$A'(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon & 0 \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon > 0.$$

В самом деле, матрица $A'(\tilde{x})$ является регулярной стохастической, причем

$$\lim_{n\to\infty} (A'(\tilde{x}))^n = \begin{pmatrix} 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется k такое, что для всех слов $p = \tilde{x}\tilde{x}\ldots\tilde{x}$ $(|p| > k)$ имеет место неравенство $|\chi'(p) - \beta(\tilde{x})| < \varepsilon_1$.

Точка сечения $\beta(\tilde{x})$ не является изолированной относительно автомата A'. Более того, в этом случае $T(A,\ \beta(\tilde{x})) \neq T(A',\ \beta(\tilde{x}))$. Действительно, матрица $(A'(\tilde{x}))^k$, $k \geqslant 1$, имеет вид

$$(A'(\tilde{x}))^k = \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)^k & m(k) & \beta(\tilde{x}) - (1-\varepsilon)^{k-1}\beta(\tilde{x}) \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \\ 0 & \alpha(\tilde{x}) & \beta(\tilde{x}) \end{pmatrix},$$

где $m(k) = 1 - \beta(\tilde{x}) + (1-\varepsilon)^{k-1}\beta(\tilde{x}) - (1-\varepsilon)^k$. Для $x \neq \tilde{x}$ имеем

$$(A(\tilde{x}))^k A(x) = \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)^k & \alpha(x)\left[1-(1-\varepsilon)^k\right] & \beta(x)\left[1-(1-\varepsilon)^k\right] \\ 0 & \alpha(x) & \beta(x) \\ 0 & \alpha(x) & \beta(x) \end{pmatrix},$$

так что

$$\chi'(\underbrace{\tilde{x}\ldots\tilde{x}x}_{k+1}) = \mu_1(1-\varepsilon)^k + \mu_1\beta(x)\left[1-(1-\varepsilon)^k\right] + \beta(x)(\mu_2+\mu_3).$$

Если $\beta(x) < \beta(\tilde{x})$, то существует t такое, что для всех $k \geqslant t$ правая часть последнего соотношения меньше $\beta(\tilde{x})$, а это как раз доказывает, что $T(A,\ \beta(\tilde{x})) \neq T(A',\ \beta(\tilde{x}))$.

На практике чаще всего случается рассматривать реакции автомата не на всей полугруппе X^*, а только по отношению к определенному типу последовательностей входных сигналов. Это позволяет нам подойти к проблеме устойчивости с другой стороны, а именно, рассмотреть задачу частичной устойчивости ВА.

Определение 4. Точка сечения λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, называется *изолированной* точкой сечения ВА *А относительно языка S,* если существует $\delta > 0$ такое, что для любого слова $p \in S$ выполняется неравенство $|\chi(p) - \lambda| \geqslant \delta$.

Если λ — изолированная точка сечения ВА *А,* то она является изолированной точкой сечения и относительно любого языка *S.* Вообще, если λ — изолированная точка сечения ВА *А* относительно языка *S,* то она является изолированной точкой сечения относительно любого языка $S' \subseteq S$.

Определение 5. ВА *А* с изолированной относительно языка *S* точкой сечения *λ устойчив относительно языка S,* если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого автомата *А',* удовлетворяющего следующим условиям:

$$1)\ |\mu(e) - \mu'(e)| < \varepsilon; \qquad 2)\ |A(x) - A'(x)| < \varepsilon,$$

λ является изолированной точкой сечения относительно языка *S* и языки $T(A, \lambda) \cap S$ и $T(A', \lambda) \cap S$ совпадают.

Ясно, что если ВА *А* с изолированной относительно языка *S* точкой сечения λ устойчив относительно языка *S,* то он устойчив и относительно любого языка $S' \subseteq S$.

Теорема 5. *Если ВА А является эргодическим и* λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, *есть изолированная точка сечения относительно языка S, то автомат А устойчив относительно языка S.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Система матриц $\{A(x),\ x \in X\}$ вероятностей переходов ВА *А,* не являясь эргодической, может, однако, обладать тем свойством, что ее замыкание относительно операции умножения матриц содержит непустое множество регулярных стохастических языков. Например, матрицы типа

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

где звездочкой обозначены ненулевые элементы матриц, не являются регулярными. Однако их произведение

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

определяет регулярную матрицу. (См. определение 1.3.2.)

Теорема 6. *Пусть* $A = \langle A(x),\ x \in X\rangle$ — BA, *и* $R \subseteq X^*$ — язык *такой, что для всех слов* $p \in R$ *и только для них матрицы A(p) представляют собой регулярные стохастические матрицы. Тогда язык R является регулярным.*

Доказательство. Обозначим через $\{B(x),\ x \in X\}$ систему булевских матриц, соответствующих матрицам *A(x)* вероятностей переходов ВА *A*. Присоединив к системе $\{B(x),\ x \in X\}$ подходящую единичную матрицу *E,* которую для удобства обозначим через *B(Λ),* получим систему $B^{(1)} = \{B(x),\ x \in X \cup \Lambda\}$. Пусть $B^{(k)},\ k = 1,\ 2,\ \ldots$ есть система матриц $B^{(k)} = \{B(p),\ |p| = k, p \in \in \{X \cup \Lambda\}^*\}$. Имеет место вложение

$$B^{(1)} \subseteq \ldots \subseteq B^{(k)} \subseteq \ldots \quad (6)$$

Так как число булевских матриц фиксированного порядка конечно,то наступит такой момент, когда $B^{(l)} = B^{(l+1)}$. В этом случае $B^{(l)} = B^{(l+r)},\ r = 1,\ 2,\ \ldots$ Действительно, поскольку, очевидно, $B^{(k+1)} = B^{(1)}B^{(k)}$, то по индукции

$$B^{(l+r)} = B^{(1)}B^{(l+r-1)} = B^{(l+r-1)} = \ldots = B^{(l)}.$$

Таким образом, существует наименьшее число $l = l(B^{(1)})$ такое, что $B^{(k)} = B^{(l)}$ для всех *k > l,* тогда как $B^{(k)} \subset B^{(k+1)}$ для всех *k<l.* Пусть $B^{(l)}$ представляет собой систему булевских матриц

$$B^{(l)} = \{B_1,\ \ldots,\ B_m\}. \quad (7)$$

Система матриц $B^{(l)}$ содержит булевские шаблоны всех матриц *A(p).* Согласно (6) в систему (7), в частности, войдут все матрицы системы $\{B(x),\ x \in X \cup \Lambda\}$.

Рассмотрим инициальный конечный ДА *B,* состояниями которого являются матрицы системы (7), входными буквами — буквы алфавита *X* и начальным состоянием — матрица *B(Λ)*. Функцию переходов автомата *B* определим следующим образом: $\delta(B_i,\ x) = B_iB(x)$. Видно, что функция переходов однозначно определена для любой пары $(B_i,\ x)$. В качестве множества финальных состояний автомата *F* выберем совокупность всех регулярных булевских матриц системы $B^{(l)}$. ДА *B* множеством состояний *F* представляет регулярный язык *R.* Действительно, пусть $p \in R$, т. е. матрица *A(p)* является регулярной стохастической матрицей. После подачи слова *p* автомат *B* в соответствии с определением его функции переходов $\delta(B_i,\ x)$ перейдет из начального состояния *B(Λ)* в состояние *B(p).* Так как по условию *A(p)*—регулярная стохастическая матрица, то соответствующая ей булевская матрица *B(p)* будет регулярной булевской матрицей, иначе говоря, $p \in T(B)$.

Обратно, пусть $p \in T(B)$, т. е. $B(p) \in F$. Но *F* есть совокупность регулярных булевских матриц. Следовательно, *B(p)* есть регулярная булевская матрица. Отсюда стохастическая матрица *A(p),* которой соответствует булевская матрица *B(p),* является регулярной, т. е. $p \in R$.

Определение 6. Множество булевских матриц *C* будем называть *эргодическим,* если его замыкание *[C]* относительно умножения булевских матриц принадлежит множеству регулярных булевских матриц *B*.

Так как $B^{(l)}$ охватывает все типы матриц, которые содержатся в замыкании системы стохастических матриц $\{A(x),\ x \in X\}$, и *F* есть совокупность всех регулярных булевских матриц системы $B^{(l)}$, то для всякого эргодического подмножества $C \subseteq F$ замыкание *[C]* принадлежит множеству *F*.

Естественным образом определяются максимальные эргодические подмножества. Всякое *максимальное эргодическое подмножество* $D \subseteq F$ представляет собой множество, замкнутое относительно операции умножения булевских матриц. В случае, если ВА *A* является эргодическим, имеется максимальное эргодическое множество, совпадающее с множеством $B^{(l)} \setminus \{B(\Lambda)\}$.

Пусть *D* — произвольное максимальное эргодическое подмножество множества *F* автомата *B,* и M_D — язык, представленный инициальным ДА *B* множеством состояний *D*. Пусть, далее, N_D — произвольное конечное подмножество M_D. Для языка $(N_D)^k$ положим $l_k(N_D) = \max\limits_{p \in (N_D)^k} |p|$. Обозначим далее через $N_D(U,\ V,\ k)$ язык, определяемый выражением -

$$N_D(U,\ V,\ k) = U[(N_D)^k \cup (N_D)^{k+1} \cup \ldots] \cup V, \quad (8)$$

где *V* — некоторый конечный язык, а *U* — произвольный язык.

Теорема 7. *Пусть для некоторого натурального k точка сечения* λ ВА *A является изолированной точкой сечения относительно языка* $N_D(U,\ V,\ k)$. *Тогда существует такое натуральное* $m \geqslant k$, *что ВА A с точкой сечения λ устойчив относительно языка* $N_D(U,\ V,\ m)$.

Доказательство. По условию теоремы существует δ >0 такое, что для любого слова $p \in N_D(U,\ V,\ k)$ имеет место неравенство

$|\chi(p) - \lambda| \geqslant \delta$.

Поскольку для любого $t \geqslant k N_D(U,\ V,\ t) \subseteq N_D(U,\ V,\ k)$, то точка сечения *λ* ВА *A* будет изолированной относительно языка $N_D(U,\ V,\ t)$, причем $|\chi(p) - \lambda| \geqslant \delta$ для всех $p \in N_D(U,\ V,\ t)$.

Обозначим через $\Xi_{N_D} = \{A_1, \ldots, A_t\}$ систему стохастических матриц, соответствующих словам из N_D, т. е. $A(p) \in \Xi_{N_D}$, $p \in N_D$.

Система матриц Ξ_{N_D} является эргодической. Таким образом, для нее $\lim \| A_{i_1} \dots A_{i_N} \| = 0, \quad A_{i_j} \in \Xi_{N_D}, \quad j = 1, \dots, N.$
Пусть натуральное $m \geqslant k$ таково, что $ml(N_D) \geqslant l(N)$, $l(S) = \max |p|$ для $S \subseteq X^*$, S — конечный язык и $\| A_{i_1} \dots A_{i_m} \| < \delta/3|F|$, $A_{i_j} \in \Xi_{N_D}$, $j = 1, \dots, m.$

Можно выбрать достаточно малое ε > 0 так, чтобы для любого автомата *A'*, удовлетворяющего условиям 1), 2) определения относительной устойчивости, имели место неравенства

а) $\| A'_{i_1} \dots A'_{i_m} \| < \delta/3|F|$,

где A'_{i_j}, $j = 1, \dots, m$ — стохастические матрицы, принадлежащие системе матриц Ξ'_{N_D}, соответствующих словам из N_D для ВА A' (аналогично доказательству теоремы 3);

б) $|\mu A(p_2) - \mu' A(p_2)| < \delta/3|F|$

для всех *q* таких, что $|p_2| \leqslant ml(N_D)$. Если для любого $p \in N_D(U, V, m)$

$$|\mu A(p) - \mu' A(p)| < \delta/|F|, \tag{9}$$

то для тех же p $|\chi(p) - \chi'(p)| < \delta$, а это означает, что если $\chi(p) > \lambda$, то $\chi'(p) > \lambda$, и наоборот, если $\chi(p) < \lambda$, то $\chi'(p) < \lambda$.

Покажем, что имеет место неравенство (9). Если $p \in V$, то $|p| \leqslant l(V) \leqslant ml(N_D)$ и неравенство (9) следует из б). Если же $p \in U[(N_D)^m \cup (N_D)^{m+1} \cup \dots]$, то $p = p_1 p_2$, где $p_2 \in (N_D)^m$. Матрица $A(p_2)$ есть произведение *m* матриц из Ξ_{N_D}, и поэтому

$\|A(p_2)\| < \delta/3|F|$.

Далее, согласно а)

$\|A'(p_2)\| < \delta/3|F|$.

Но

$$|\mu A(p) - \mu' A'(p)| \leqslant |\mu A(p_1) A(p_2) - \mu A(p_2)| + \\ + |\mu' A'(p_1) A'(p_2) - \mu' A'(p_2)| + |\mu A(p_2) - \mu' A'(p_2)|.$$

Поэтому в силу следствия 1.3.3 и условия б), поскольку $|p_2| \leqslant ml(N_D)$, каждое слагаемое в правой части неравенства меньше $\delta/3|F|$. Таким образом, $|\mu A(p) - \mu' A'(p)| < \delta/|F|$.

Если ВА с изолированной относительно языков $W_1, \dots, W_h$ точкой сечения *λ* устойчив относительно каждого из них, то он, очевидно, устойчив и относительно языка $\bigcup_{i=1}^{h} W_i$.

Лемма 1. *Пусть ВА A с изолированной относительно языков* $N_{D_i}(U_i, V_i, k_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, *точкой сечения λ устойчив* *относительно каждого из них. Тогда существует такая система натуральных чисел* $m_i \geqslant k_i,\ i = 1, \ldots, k,$ *что ВА А с точкой сечения λ устойчив относительно языка*

$$\bigcup_{i=1}^{k} N_{D_i}(U_i, V_i, m_i).$$

Доказательство. Точка сечения λ будет изолированной относительно каждого языка $N_{D_i}(U_i, V_i, m_i)$. Согласно теореме 7 автомат *А* с точкой сечения λ устойчив относительно каждого из них, а, следовательно, он устойчив и относительно языка

$$\bigcup_{i=1}^{k} N_{D_i}(U_i, V_i, m_i).$$

6. 4. Представимость последовательностей пар случайных кодов

Перейдем к изучению зависимости между ВА и последовательностями случайных кодов. На вход ВА поступает последовательность случайных символов и на выходе получается также некоторая последовательность случайных символов. Две последовательности случайных кодов оказываются коррелированными вследствие того, что каждая пара выборочных траекторий этих последовательностей связана ВА. Таким ебразом, последовательности случайных кодов, которые мы будем изучать, принимают парные значения, отвечающие соответственно входному и выходному символам автомата. В соответствии с определением 5 *последовательностью пар случайных кодов* будем называть словарную функцию $\mu\colon\ (X \times Y)^* \to [0,\ 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $$\mu(e,\ e) = 1;$$

2) $$\sum_{x \in X, y \in Y} \mu(px, qy) = \mu(p, q).$$

Будем применять для последовательности пар случайных кодов также обозначение

$$J = \langle \mu(p,\ q),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle. \quad (1)$$

Пусть дана последовательность пар случайных кодов (1) над алфавитом $X \times Y$.

Определение 1. Последовательность случайных кодов J_x, задаваемая словарной функцией

$$\mu(p) = \sum_{|q|=|p|} \mu(p, q),$$

называется *левой последовательностью случайных кодов для J*. Аналогично определяется правая последовательность случайных кодов для *J*.

Определение 2. Язык $d^{\prime\prime}(J) = \{p\colon\ \mu(p) \neq 0\}$ называется *левым детерминатором* последовательности случайных кодов *J*. Аналогично определяется *правый детерминатор.*

Замечание 1. Детерминатор $d^{\prime\prime}(J)$, содержащий слово *p,* содержит и все начала этого слова. Множество несократимых справа слов *p'x* дополнения детерминатора $d^{\prime\prime}(J)$ определяется условием

$p'x \notin d^{\prime\prime}(J) \to p' \in d^{\prime\prime}(J).$

Детерминатор может быть конечным. Условимся, что детерминатор не может быть пустым: в том случае, если все вероятности $\mu(p)$ равны нулю, он все же содержит пустое слово, на котором $\mu(e) = 1.$ Однако для краткости будем называть *пустым* детерминатор, содержащий только пустое слово.

Определение 3. Многотактный канал

$\tau(J) = \langle \mu(q/p),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle,$

определенный условиями

$$\mu(q/p) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ |p| \neq |q|, \\ \mu(p,q)/\mu(p), & \text{если } \ p \in d^{\prime\prime}(J) \text{ и } |p| = |q|, \\ \text{произвольное условное} & \\ \text{вероятностное распределение,} & \text{если } \ p \notin d^{\prime\prime}(J), \end{cases}$$

называется *прямым многотактным каналом, ассоциированным с J*. Пусть дан ВА $A = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \mu(a',\ y/a,\ x)\rangle.$

Определение 4. Последовательность пар случайных кодов (1) *представлена в ВА А* (начальным вектором состояний $\mu(e)$),если на левом детерминаторе $d^{\prime\prime}(J)$ прямой многотактный канал $\tau(J)$ совпадает с автоматным каналом $\tau_A(q/p)$, представленным в ВА *А*.

Замечание 2. Из определений следует, что последовательность (1) с пустым левым детерминатором представима в любом ВА.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность пар случайных кодов* $J = \langle \mu(p,\ q),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$ *была представима в ВА, необходимо и достаточно, чтобы для любых пар слов (p, q) и (p', q') из* $(X \times Y)^*$, *таких, что* $p'p \in d^{\prime\prime}(J)$, *отношение* $\mu(q'q/p'p)/\mu^{*}(q'/p') = \mu_{p',q'}(q/p)$ *было условным вероятностным распределением при фиксированных значениях слов p' и q'*.

Доказательство. Необходимость доказывается так же, как в п. 3) в теореме 2.1.1. Докажем достаточность. Покажем, что для последовательности *J* можно построить многотактный канал, удовлетворяющий условиям теоремы. Положим

$$\tau(q/p) = \begin{cases} 0, & \text{если } |p| \neq |q|, \\ \mu(q/p), & \text{если } |p| = |q|, \quad p \in d^{lt}(J), \\ \widetilde{\mu}(q/p), & \text{если } |p| = |q|, \quad p \notin d^{lt}(J), \end{cases}$$

где $\widetilde{\mu}(q/p)$ — произвольное условное распределение вероятностей, удовлетворяющее условиям автоматности. Докажем, что многотактный канал, определяемый $\tau(q/p)$, автоматен. Условие 1) теоремы 2.1.1 выполнено по определению. Пусть $\tau(q/p) = 0$ при $|p| = |q|$. Если $\mu(p) = 0$, то из автоматности $\widetilde{\mu}(q/p)$ следует, что $\tau(qq_1/pp_1) = 0$. Пусть $\mu(p) \neq 0$. Тогда $\mu(q/p) = \mu(p, q)/\mu(p)$ и $\mu(p, q) = 0$. Но тогда для любых пар слов $|p_1| = |q_1|$ получаем $\mu(pp_1/qq_1) = 0$. Если $\mu(pp_1) \neq 0$, то $\tau(qq_1/pp_1) = \mu(pp_1/qq_1)/ /\mu(pp_1) = 0$. Если же $\mu(pp_1) = 0$, то $\tau(qq_1/pp_1) = \widetilde{\mu}(qq_1/pp_1)$. Из условия автоматности канала $\widetilde{\mu}(q/p)$ имеем $\widetilde{\mu}(q/p) = \mu(q/p) = 0$, следовательно, $\widetilde{\mu}(qq_1/pp_1) = 0$ или $\tau(qq_1/pp_1) = 0$. Наконец, пусть $\tau(q/p) \neq 0$ и $\mu(pp_1) \neq 0$. Тогда $\mu(p) \neq 0$ и $\tau(qq_1/pp_1)/\tau(q/p) = = \mu(qq_1/pp_1)/\mu(q/p)$ — условное вероятностное распределение в соответствии с условием теоремы 1. Аналогичное утверждение следует при $\mu(p) = 0$ из определения канала $\tau(J)$, а при $\mu(p) \neq 0$ и $\mu(pp_1) = 0$ — из определения канала $\widetilde{\mu}$ и условия теоремы 1. Если построить теперь ВА A в соответствии с алгоритмом синтеза теоремы 2.2.1, то он представляет последовательность пар случайных кодов J. Действительно, $\tau_A^{\mu(e)}(q/p) = \tau(q/p)$ для пар слов $|p| = |q|$. Для того чтобы $\mu(q/p)$ было определено, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\mu(p) \neq 0$. Но если это условие выполнено, то $\mu(q/p) = \tau(q/p) = \tau_A^{\mu(e)}(q/p)$ для всех пар слов $|p| = |q|$.

Следствие 1. *Для того чтобы последовательность пар случайных кодов* (1) *была представима в ВА, необходимо и достаточно, чтобы распределения вероятностей* $\mu(p, q)$ *удовлетворяли условию*

$$\sum_{|q'|=|p'|} \mu(qq'/pp') = \mu(q/p), \quad pp' \in d^{lt}(J).$$

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы 2.1.2. При получении условий представимости последовательностей пар случайных кодов в конечных ВА применим тот же метод, который использовался для решения аналогичной задачи представимости многотактных каналов и словарных функций. Введем в рассмотрение множество состояний автоматной последовательности случайных кодов.

Пусть $J = \langle \mu(p, q), (p, q) \in (X \times Y)^* \rangle$ — автоматная последовательность пар случайных кодов. Пусть для пары слов одинаковой длины $|p_1| = |q_1|$ $\mu(p_1, q_1) \neq 0$. Введем обозначение

$$\frac{\mu(p_1 p, q_1 q)}{\mu(p_1, q_1)} = \mu_{p_1, q_1}(p, q).$$

Определение 5. Последовательность пар случайных кодов $J_{p_1, q_1} = \langle \mu_{p_1, q_1}(p, q), \quad (p, q) \in (X \times Y)^* \rangle$ называется *существенным состоянием* последовательности J.

Множеством состояний автоматной последовательности случайных кодов J называется множество его существенных состояний.

Замечание 3. Существенные состояния автоматной последовательности случайных кодов J, левой последовательности случайных кодов J_x для J и прямого многотактного канала, ассоциированного с J, связаны между собой соотношением

$$\mu_{p_1, q_1}(p, q) = \mu_{p_1}(p) \cdot \tau_{p_1, q_1}(q/p). \quad \textbf{(2)}$$

Действительно, пусть $\mu(p_1, q_1) \neq 0$. Поскольку $\mu(p_1, q_1) = \mu(p_1)\tau(q_1/p_1)$, то $\mu(p_1) \neq 0$ и $\tau(q_1/p_1) \neq 0$. Поэтому $\frac{\mu(p_1 p, q_1 q)}{\mu(p_1, q_1)} = \frac{\mu(p_1 p)}{\mu(p_1)} \cdot \frac{\mu(q_1 q / p_1 p)}{\mu(q_1/p_1)}$, так что выполняется (2).

Если обозначить через $n(J)$, $n(J_x)$ и $n(\tau(J))$ соответственно мощности множеств состояний J, J_x и $\tau(J)$, то из формулы (2) вытекает неравенство $n(J) \leqslant n(J_x) n(\tau(J))$.

Из замечания 3 видно, что множество состояний J конечно тогда и только тогда, когда конечны множества состояний J_x и $\tau(J)$. Но из определения представимости 4 вытекает, что конечность множества состояний J не является необходимым условием представимости J в конечном ВА.

Замечание 4. Для того чтобы последовательность пар случайных кодов J была представима в конечном ВА, необходимо и достаточно, чтобы существовал прямой многотактный канал $\tau(J)$, ассоциированный с J, представимый в конечном ВА.

Выполнение условий замечания 4 означает, что существует такое доопределение прямого многотактного канала $\tau(J)$ на дополнении детерминатора $d^{u}(J)$, что для канала $\tau(J)$ удовлетворяются условия теоремы 2.2.1. Следуя замечанию 4 или непосредственно используя методологию доказательства конечно-автоматной представимости, можно получить критерий представимости последовательности пар случайных кодов в конечном ВА в форме теорем 2.2.1 и 2.4.3. Мы этого делать не будем.

Представляет интерес описание последовательности пар случайных кодов с конечным числом состояний в терминах корреляционных

зависимостей случайных кодов, образующих последовательность.
Пусть $J = \langle \mu(p,\ q),\ (p,\ q) \in (X \times Y)^* \rangle$ — последовательность пар случайных кодов.

Теорема 2. *Для того чтобы автоматная последовательность J имела конечное число состояний, необходимо и достаточно, чтобы имела конечное число состояний левая последовательность J_x для J и существовали:*

1) *конечная система условных вероятностных распределений* $\tau_a(y/x),\ a \in \mathcal{J} = \{1,\ \ldots,\ N\}$;

2) *конечнозначная целочисленная словарная функция* $a(p,\ q)$: $(X \times Y)^* \to \mathcal{J}$, *удовлетворяющая требованию*

$$a(p_1,\ q_1) = a(p_2,\ q_2) \to a(p_1x,\ q_1x) = a(p_2x,\ q_2y), \quad (3)$$

такие, что для произвольной пары слов одинаковой длины (p, q), $p \in d^{\mu}(J)$, *условная вероятность для пары* $(px,\ qy)$ *определяется формулой*

$$\mu(qy/px) = \mu(q/p)\tau_{a(p,\ q)}(y/x). \quad (4)$$

Доказательство. Ввиду замечания 3 доказательство сводится к рассмотрению прямого многотактного канала $\tau(q/p) = \mu(p,\ q)/\mu(p),\quad \mu(p) \neq 0$, ассоциированного с последовательностью *J* .

Необходимость., Поскольку многотактный канал $\tau(J)$ представим в конечном ВА, возможно доопределить его до конечно-автоматного канала на всей полугруппе *X**. Сохраним за доопределенным каналом то же обозначение $\tau(q/p)$. Канал τ имеет конечное число состояний, т. е. множество $\mathcal{L}_\tau = \{\tau_{p_1,q_1}(q/p),\ (p_1, q_1) \in (X \times Y)^*\}$ является конечным множеством. Следовательно, обозначая одним индексом из множества $\mathcal{J} = \{1,\ \ldots,\ N\}$ все каналы τ_{p_1,q_1} в множестве $\mathcal{L}_\tau$, совпадающие между собой, получим некоторую целочисленную конечнозначную словарную функцию $a(p,\ q)$: $(X \times Y)^* \to \mathcal{J}$ такую, что

$$\tau_{p_1,q_1}(q/p) = \tau_{a(p_1,q_1)}(q/p).$$

Пусть каналы τ_{p_1,q_1} и τ_{p_2,q_2} совпадают. Тогда по лемме 2.1.1 совпадают каналы τ_{p_1x,q_1y} и τ_{p_2x,q_2y}. Таким образом, для функции $a(p,\ q)$ выполнено требование (3). Из определения состояния канала $\tau_{p,\ q}$

$$\tau_{p,\ q}(y/x) = \tau(qy/px)/\tau(q/p),\ \tau(q/p) \neq 0,$$

получим соотношение

$$\tau(qy/px) = \tau(q/p)\tau_{p,\ q}(y/x),$$

которое верно и тогда, когда $\tau(q/p) = 0$. В этом случае канал

$\tau_{p,q}$ не определен. Доопределим его, положив равным одному из каналов множества $\mathcal{L}_\tau$ таким образом, чтобы сохранялось условие (3). Следовательно, соотношение (4) можно переписать в виде

$$\tau(qy/px) = \tau(q/p)\tau_{a(p,q)}(y/x),$$

где словарная функция $a(p, q)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Достаточность. Построим полудетерминированный конечный ВА *A* с множеством состояний $\mathcal{L}_A$ и условными вероятностями $\mu_A(a', y/a, x)$, определенными следующим образом:

$$\mu_A(a', y/a, x) = \delta(a', y/a, x)\tau_a(y/x).$$

Здесь $\delta(a', y/a, x)$— функция переходов полудетерминированного автомата такая, что если для пары слов (p, q) $a = a(p, q)$, $a_1 = a(px, qy)$, то

$$\delta(a', y/a, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a' = a_1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определение функции δ корректно, поскольку из-за свойства (3) значение $a_1 = a(px, qy)$ функции *a* не зависит от выбора конкретной пары *(p, q)*.

В качестве начального состояния ВА *A* рассмотрим состояние $a_0 = a(e, e)$, т. е. $\tau_{a_0} = \tau$. Покажем, что ВА *A* представляет многотактный канал τ. Действительно, если $p = x_1 \ldots x_s$, $q = y_1 \ldots y_s$,то

$$\tau_A(q/p) = \sum_{a_1,\ldots,a_s} \mu_A(a_1, y_1/a_0, x_1) \ldots \mu_A(a_s, y_s/a_{s-1}, x_s) =$$

$$= \tau(y_1/x_1)\tau_{x_1y_1}(y_2/x_2) \ldots \tau_{x_1\ldots x_{s-1}, y_1\ldots y_{s-1}}(y_s/x_s) = \tau(q/p).$$

Следствие 2. *Для того чтобы автоматная последовательность J имела конечное число состояний, необходимо и достаточно, чтобы конечное число состояний имела левая последовательность J_x для J и существовал полудетерминированный конечный автомат* $D = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \delta(a', y/a, x)\rangle$ *такой, что условная вероятность для любой пары слов одинаковой длины (p, q) имела вид*

$$\mu(y_1 \ldots y_s/x_1 \ldots x_s) = \tau_{a_0}(y_1/x_1) \ldots \tau_{a_{s-1}}(y_s/x_s),$$

где последовательность индексов $a_0, \ldots, a_{s-1}$ *есть последовательность состояний автомата D, соответствующая входно-выходной последовательности* $(x_1 \ldots x_s, y_1 \ldots y_s)$.

Доказательство следует из формулы 4 и свойств функции *a(,p, q)*.

Следствие 3. *Для того чтобы последовательность случайных кодов* $J = \langle \mu(p), p \in X^* \rangle$ *имела конечное число состояний, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный* ДА

$A = \langle X, \mathfrak{A}, \delta(a, x)\rangle$ *такой, чтобы вероятность любого начала p этой последовательности вычислялась в форме*

$$\mu(x_1 \ldots x_s) = \mu_{a_0}(x_1) \ldots \mu_{a_{s-1}}(x_s),$$

где последовательность индексов $a_0, \ldots, a_{s-1}$ *есть последовательность состояний автомата A для входного слова.*

Доказательство вытекает из того факта, что в данном случае полудетерминированный автомат из следствия 2, вырождается в обычный ДА.

Важным случаем представимости последовательностей пар случайных кодов в ВА является случай, когда представляющий автомат — детерминированный. Если последовательность *J* представлена в ДА *A*, то будем говорить, что автомат *A преобразует* левую «входную» последовательность случайных кодов J_X в правую «выходную» последовательность случайных кодов J_Y.

Для получения критерия детерминированно-автоматной преобразуемости одной последовательности случайных кодов в другую применим общую теорию, развитую в начале параграфа. Докажем предварительно лемму.

Лемма 1. *Для того чтобы многотактный канал* $\tau(q/p)$ *был представим в ДА, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид*

$$\tau(q/p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad q = \varphi(p), \\ 0 & \textit{в противном случае}, \end{cases}$$

где $\varphi\colon X^* \to Y^*$ *— некоторое автоматное отображение. При этом существует взаимно однозначное соответствие между множествами состояний автоматного канала* $\tau(q/p)$ *и автоматного отображения* $q = \varphi(p)$.

Для доказательства следует воспользоваться выражением условного вероятностного распределения для ДА *A* в форме

$$\mu_A(a', y/a, x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a' = \delta_A(a, x), \quad y = \lambda_A(a, x), \\ 0 & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

н определением многотактного канала $\tau_A(q/p)$, представленного в ДА *A* в форме

$$\tau_A(y_1 \ldots y_s/x_1 \ldots x_s) = \\ = \sum_{a_0, a_1, \ldots, a_{s-1}} \mu(a_0)\,\mu(a_1, y_1/a_0, x_1) \ldots \mu(a_s, y_s/a_{s-1}, x_s).$$

Пусть $J_1 = \langle \mu(p), \ p \in X^*\rangle$ и $J_2 = \langle \mu(q), \ q \in Y^*\rangle$ — последовательности случайных кодов.

Теорема 3. *Для того чтобы существовал ДА Мили, преобразующий последовательность случайных кодов* J_1 *в последователъность* *случайных кодов* J_2*, необходимо и достаточно, чтобы для любого слова* q *выполнялось соотношение*

$$\mu(q) = \sum_{q=\varphi(p)} \mu(p), \quad (5)$$

где φ: $X^* \to Y^*$*— некоторое автоматное отображение.*

Доказательство. Пусть A — ДА, преобразующий J_1 в J_2. Фиксируем длину слова I и рассмотрим случайный код J_1^i, принимающий значения p, $|p| = i$, с вероятностями $\mu(p)$. Случайный код J_1^i имплицирует случайный код J_2^i, принимающий значения q, $|q| = i$, с вероятностями $\mu(q)$, причем функцией импликации является автоматное отображение φ_A, производимое автоматом A. Поэтому в силу леммы 1.2.1 получаем (5) для всех слов q фиксированной длины i. Поскольку длина i фиксировалась произвольным образом, (5) верно на всей полугруппе Y*.

Обратно, пусть для последовательностей случайных кодов J_1 и J_2 выполнено соотношение (5), где φ — автоматное отображение. Построим ДА A, производящий автоматное отображение φ. Он преобразует входную последовательность J_1 в некоторую выходную последовательность случайных кодов J_2. Вероятности $\mu'(q)$ последовательности J_2 будут определяться соотношением

$\mu'(q) = \sum_{q=\varphi(p)} \mu(p)$, откуда следует по определению

последовательности случайных кодов, что J_2 и J'_2 совпадают.

Замечание 5. Из леммы 1 и теоремы 3 вытекает, что последовательность J_1 преобразуется в последовательность J_2 конечным ДА тогда и только тогда, когда автоматное отображение φ в соотношении (5) имеет конечное число состояний.

Определение 6. Последовательность случайных кодов J_1 *(конечно) автоматно имплицирует* последовательность случайных кодов J_2, если существует (конечный) ДА, преобразующий J_1 в J_2. Последовательности J_1 и J_2 *(конечно) автоматно-эквивалентны,* если каждая из них (конечно) автоматно имплицирует другую.

Определение 7. ДА $A = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \delta, \lambda \rangle$ называется *автоматом-перестановкой* над парой языков $S \subseteq X^*$ и $Q \subseteq Y^*$, если его автоматное отображение φ_A реализует взаимно однозначное отображение языка S на язык Q.

Теорема 4. *Для того чтобы последовательности случайных кодов* J_1 и J_2 *были (конечно) автоматно-эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал (конечный) автомат-перестановка над парой языков* $d(J_1)$ *и* $d(J_2)$*, преобразующий последовательность* J_1 *в последовательность* J_2*.*

Доказательство. Предположим, что последовательности J_1 и J_2 автоматно-эквивалентны. Тогда существуют автоматные отображения $\varphi\colon X^* \to Y^*$ и $\psi\colon Y^* \to X^*$, такие, что для пар слов *(p, q)* одинаковой длины

$$\mu(q) = \sum_{q=\varphi(p)} \mu(p) \text{ и } \mu(p) = \sum_{p=\psi(q)} \mu(q)\,\text{I}.$$

Из первого соотношения следует, что число слов длины $|p|$ в детерминаторе $d(J_2)$ не больше, чем число слов p той же длины в детерминаторе $d(J_1)$. Из второго соотношения следует обратное. Таким образом, детерминаторы $d(J_1)$ и $d(J_2)$ содержат по равному количеству слов одинаковой длины. Тогда отображения φ и ψ определяют взаимно однозначное соответствие слов одинаковой длины детерминаторов $d(J_1)$ и $d(J_2)$, причем для соответствующих в отображении слов p и q имеем $\mu(p) = \mu(q)$.

Предположим теперь обратное, что автомат-перестановка A преобразует последовательность J_1 в последовательность J_2. Покажем, что существует обратный автомат-перестановка A^{-1}, который преобразует J_2 в J_1. ДА A определяет отображение φ, удовлетворяющее условию

$$\varphi(pp_1) = \varphi(p)\varphi_p(p_1) = qq_1, \quad \textbf{(6)}$$

где $pp_1 \in d(J_1)$ и $qq_1 \in d(J_2)$. Так как соответствие, определяемое (6), взаимно однозначное, то существует отображение $\psi\colon d(J_2) \to d(J_1)$, такое, что

$$\psi(qq_1) = \psi(q)\psi_q(q_1) = pp_1. \quad \textbf{(7)}$$

Из свойств детерминаторов вытекает, что $p \in d(J_1)$ и $q \in d(J_2)$. Из (6) и (7) видно также, что $\psi(q) = p$, если $q = \varphi(p)$.

Таким образом, ψ — автоматное отображение $d(J_2)$ на $d(J_1)$. До-определим ψ некоторым образом до автоматного отображения на всей полугруппе Y^* и построим ДА A^{-1}, реализующий это полное отображение ψ. ДА A^{-1}* преобразует J_2 в J_1. Если автоматный канал $\tau_A(q/p)$ индуцирован ДА A, производящим автоматное отображение φ_A, то в соответствии с леммой 1 он определяется соотношением

$$\tau_A(q/p) = \begin{cases} 1, & \text{если } q = \varphi_A(p), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Используя (8), для каждого слова p из $d(J_1)$ имеем

$$\mu_{A^{-1}}(p) = \sum_{|q|=|p|} \mu(q)\,\tau_{A^{-1}}(p/q) = \sum_{p=\psi(q)} \mu(q) =$$

$$= \sum_{p\in\psi(q)} \sum_{|r|=|q|} \mu(r, q) = \sum_{p=\psi(q)} \sum_{|r|=|q|} \mu(r)\,\tau_A(q/r) =$$

$$= \sum_{p=\psi(q)} \sum_{q=\varphi(r)} \mu(r) = \sum_{p=\psi\varphi(r)} \mu(r) = \mu(p).$$

Из доказательства видно, что теорема верна и в случае конечно-автоматной эквивалентности, когда отображения φ и ψ— конечно-автоматны.

В качестве иллюстрации применения теоремы 3 рассмотрим некоторые свойства функций конечных однородных цепей Маркова.

Определение 8. Последовательность случайных кодов $J = \langle \mu(p),\ p \in X^* \rangle$ называется *стационарной с независимыми значениями,* если для любого слова $p = x_1 \ldots x_s$ выполнено условие

$\mu(x_1 \ldots x_s) = \mu(x_1) \ldots \mu(x_s)$. (9)

Теорема 5. *Для того чтобы последовательность случайных кодов* $J = \langle \mu(q),\ q \in Y^* \rangle$ *была функцией конечной однородной цепи Маркова, необходимо и достаточно, чтобы она была выходной последовательностью конечного ДА со стационарной входной последовательностью с независимыми значениями и случайным начальным состоянием.*

Доказательство. Пусть стационарная последовательность с независимыми значениями $J_1 = \langle \mu(p),\ p \in X^* \rangle$ есть входная последовательность для детерминированного конечного автомата $A = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \delta(a,\ x),\ \lambda(a,\ x) \rangle$ с распределением вероятностей начальных состояний $\mu(a)$. Последовательность состояний $a_0, \ldots, a_s$ автомата *A* будет иметь вероятность

$$\mu(a_0 \ldots a_s) = \mu(a_0) \sum_{\substack{a_1 = \delta(a_0, x_1) \\ \cdots\cdots \\ a_s = \delta(a_{s-1}, x_s)}} \mu(x_1 \ldots x_s) =$$

$$= \mu(a_0) \prod_{i=1}^{s} \sum_{a_i = \delta(a_{i-1}, x_i)} \mu(x_i),$$

следовательно, вероятность состояния a_s для входного слова длины *s* будет равна

$$\mu(a_s) = \sum_{a_0, \ldots, a_{s-1}} \mu(a_0) \prod_{i=1}^{s} \sum_{a_i = \delta(a_{i-1}, x_i)} \mu(x_i).$$

Введем обозначение $p_{aa'} = \sum_{a' = \delta(a, x)} \mu(x)$. Тогда получим

$$\mu(a_s) = \sum_{a_0, \ldots, a_{s-1}} \mu(a_0)\, p_{a_0 a_1} \ldots p_{a_{s-1} a_s}.$$

Таким образом, последовательность состояний автомата *A* образует конечную однородную цепь Маркова с матрицей переходов $\bar{A} = (p_{aa'})$ и начальным распределением $\mu(a)$. Рассмотрим цепь Маркова с множеством состояний $\{(a,\ x),\ a \in \mathfrak{A},\ x \in X\}$, начальным распределением $\mu(a)\mu(x)$ и вероятностями переходов

$$p_{(a,x)(a',\tilde{x})} = \begin{cases} p_{aa'}, & \text{если } \overline{x} = x, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выходная последовательность автомата *А* есть функция $\lambda(a, x)$ этой цепи Маркова.

Пусть, обратно, существует стохастическая матрица $A = (p_{aa'})$, начальное распределение $\mu(a)$ и функция $y = \lambda(a)$ такие, что последовательность *J* есть функция λ цепи Маркова с матрицей переходов *А* и начальным распределением $\mu(a)$.

Пусть случайный код с распределением вероятностей $\mu(x)$ имплицирует каждое распределение вероятностей $p_{aa'}$, $a \in \mathfrak{A}$ строки стохастической матрицы *А*. Если $y = \varphi_a(x)$, $a \in \mathfrak{A}$ — система функций импликации для каждой строки матрицы *А*, то положим $\delta(a, x) = \varphi_a(x)$. Положим также, что $\lambda(a, x) = \lambda(a)$.

Нетрудно видеть, что ДА $\langle X, Y, \mathfrak{A}, \delta(a, x), \lambda(a)\rangle$ с распределением вероятностей начальных состояний $\mu(a)$ и стационарной входной последовательностью с независимыми значениями, определенной в соответствии с (9) распределением вероятностей *μ(x)*, имеет последовательность *J* в качестве выходной.

Следствие 4. *Класс функций конечных однородных цепей Маркова замкнут относительно детерминированных конечно-автоматных преобразований.*

Доказательство следует из того, что последовательное соединение конечных ДА есть конечный ДА.

В заключение получим иным методом результат, который был уже установлен нами в 6.2 этой главы.

Следствие 3. *Для того чтобы последовательность случайных кодов была функцией конечной однородной цепи Маркова, необходимо и достаточно, чтобы она была выходной последовательностью конечного автономного ВА.*

Доказательство. Пусть $J = \langle \mu(q), \quad q \in Y^* \rangle$ — функция конечной однородной цепи Маркова. В соответствии с теоремой 5 существует начальное распределение $\mu(a)$ и система конечно-автоматпых отображений $\varphi_a(p)$, $a \in \mathfrak{A}$, таких, что для любого слова $q = y_1 \ldots y_s$ из *Y** имеем

$$\mu(y_1 \ldots y_s) = \sum_{a_0 \in \mathfrak{A}} \mu(a_0) \sum_{q = \varphi_{a_0}(p)} \mu(p),$$

где $\mu(p) = \mu(x_1) \ldots \mu(x_s)$. Введем обозначение

$$\sum_{\substack{y = \varphi_a(x) \\ b = ax}} \mu(x) = \mu_{ab}(y).$$

Получим

$$\mu(y_1\ldots y_s)=\sum_{a_0\in\mathfrak{A}}\mu(a_0)\sum_{y_1\ldots y_s=\varphi_{a_0}(x_1\ldots x_s)}\mu(x_1)\ldots\mu(x_s)=$$

$$=\sum_{a_0\in\mathfrak{A}}\mu(a_0)\sum_{y_1=\varphi_{a_0}(x_1)}\mu(x_1)\ldots\sum_{y_s=\varphi_{a_0x_1\ldots x_{s-1}}(x_s)}\mu(x_s)=$$

$$=\sum_{a_0\in\mathfrak{A}}\mu(a_0)\sum_{a_1\in\mathfrak{A}}\sum_{\substack{y_1=\varphi_{a_0}(x_1)\\ a_1=a_0x_1}}\mu(x_1)\ldots\sum_{a_s\in\mathfrak{A}}\sum_{\substack{y_s=\varphi_{a_0x_1\ldots x_{s-1}}(x_s)\\ a_s=a_0x_1\ldots x_{s-1}x_s}}\mu(x_s)=$$

$$=\sum_{a_0,a_1,\ldots,a_s}\mu(a_0)\mu_{a_0a_1}(y_1)\ldots\mu_{a_{s-1}a_s}(y_s).$$

Система матриц $A(y)=(\mu_{aa'}(y))$ определяет конечный автономный ВА, который при начальном распределении состояний $\mu(a)$ имеет последовательность J в качестве выходной.

Обратно, пусть для каждого слова $q=y_1\ldots y_s$ имеем представление

$$\mu(y_1\ldots y_s)=\sum_{a_0,\ldots,a_s}\mu(a_0)\mu_{a_0a_1}(y_1)\ldots\mu_{a_{s-1}a_s}(y_s), \quad (10)$$

где системы чисел $\mu_{aa'}(y)=\mu_a(a',y)$ для каждого значения $a\in\mathfrak{A}$ представляют собой вероятностные распределения. Пусть . случайный код с распределением вероятностей $\mu(x)$ имплицирует каждое из распределений вероятностей $\mu_a(a', y)$. Тогда существует функция импликации $(a', y)=\varphi_a(x)$, которую можно представить в виде $a'=\delta(a, x)$, $y=\lambda(a, x)$. Введем обозначения

$$\mu_{aa'}(y)=\sum_{\substack{y=\lambda(a,x)\\ a'=\delta(a,x)}}\mu(x).$$

Получим

$$\mu(y_1\ldots y_s)=\sum_{a_0,\ldots,a_s}\mu(a_0)\mu_{a_0a_1}(y_1)\ldots\mu_{a_{s-1}a_s}(y_s)=$$

$$=\sum_{a_0,\ldots,a_s}\mu(a_0)\sum_{\substack{y_1=\lambda(a_0,x_1)\\ a_1=\delta(a_0,x_1)}}\mu(x_1)\ldots\sum_{\substack{y_s=\lambda(a_{s-1},x_s)\\ a_s=\delta(a_{s-1},x_s)}}\mu(x_s)=$$

$$=\sum_{a_0}\mu(a_0)\sum_{y_1\ldots y_s=\varphi_{a_0}(x_1\ldots x_s)}\mu(x_1)\ldots\mu(x_s),$$

где $\varphi_{a_0}(p)$ есть конечно-автоматное отображение, определенное ДА с функцией переходов δ и функцией выходов λ. По теорема 5 последовательность J есть функция конечной однородной цепи Маркова.

Формула (10) определяет функцию цепи Маркова в рекуррентной форме как прямое обобщение цепи Маркова. Метод доказательства следствия 3 дает одновременно метод синтеза ДА и входной последовательности случайных кодов, которую полученный автомат преобразует в наперед заданную функцию конечной однородной цепи Маркова.

7. Структурная теория вероятностных автоматов

7.1. Беспетельная декомпозиция

В этом разделе мы будем, как правило, рассматривать модель ВА в форме автомата типа Мура с детерминированной функцией выходов. В соответствии с теоремой 1.2.2 такой подход не является существенным ограничением. В то же время результаты структурной теории в терминах ВА типа Мура с детерминированной функцией выходов выглядят более прозрачными и допускают наглядную интерпретацию. Беспетельная декомпозиция ВА означает такое его представление в виде соединения конечного числа подавтоматов, что ориентированный граф, получающийся из структурной схемы автомата после замены всех составляющих подавтоматов вершинами, не имеет замкнутых контуров. Дадим строгие определения.

Определение 1. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{kl})$—матрицы размерностей $m \times n$ и $p \times q$ соответственно. Матрица $C = A \otimes B$ размерности $mp \times nq$, где $C = (c_{ik,jl}) = (a_{ij}b_{kl})$, называется *кронекеровым* произведением матриц *A* и *B*.

Матрицу *C* можно записать в виде

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где aB есть результат умножения всех элементов матрицы *B* на элемент *a*.

Легко проверить, что

$$AB \otimes A'B' = (A \otimes A')(B \otimes B'). \quad (2)$$

Действительно, в соответствии с определением 1 получим

$$\left(\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sk}\right)\left(\sum_{r=1}^{p} a'_{jr}b'_{rl}\right) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{p} a_{is}b_{sk}a'_{jr}b'_{rl} = \sum_{s,r=1}^{m\ p} (a_{is}a'_{jr})(b_{sk}b'_{rl}).$$

Определение 2. Пусть $A = (a_{ij})$—матрица размерности $m \times n$ и $B(i) = (b_{kl}(i))$ — система *m* матриц $\{B(i),\ i = \overline{1,\ m}\}$ размерностей $p \times q$. Матрица C' размерности $mp \times nq$, где $C' = (c'_{ik,jl}) = (a_{ij}b_{kl}(i))$, называется *косым* произведением матрицы *A* и системы матриц $B(i)\ (i = \overline{1,\ m})$.

Матрицу C' можно записать в виде

$$C' = \begin{pmatrix} a_{11}B_1 & \dots & a_{1n}B_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B_m & \dots & a_{mn}B_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Косое произведение типа (3), где параметрической является вторая матрица произведения, будем обозначать $C' = [AB(i)]_i$.

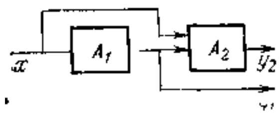
Определение 3. *Каскадным соединением* двух ВА $A_1 = \langle X_1, Y_1, \mathfrak{A}_1, \{A_1(x_1), x_1 \in X_1\}, \delta_1(a_1, x_1)\rangle$ и $A_2 = \langle X_2, Y_2, \mathfrak{A}_2, \{A_2(x_2), x_2 \in X_2\}, \delta_2(a_2, x_2)\rangle$ называется ВА

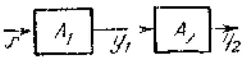
$C = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \{C(x), x \in X\}, \delta(a, x)\rangle$

такой, что $X_2 = X_1 \times Y_1$, $Y = Y_1 \times Y_2$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$, $C(x) = [A_1(x) \otimes A_2(x, \delta_1(a_1, x))]_{a1}$, $y = (y_1, y_2) = \delta((a_1, a_2), x) =$

$= (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, (x, \delta_1(a_1, x))))$.

Каскадное соединение можно изобразить графически в виде рис. 1.





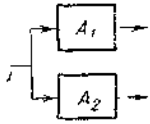


Рис. 1. Рис. 2. Рис.3.

Частным случаем каскадного соединения является *последовательное* соединение ВА. В этом случае, вероятностный автомат-соединение *C* задан в форме $C = \langle X_1, Y_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \{C(x_1), x_1 \in X_1\}, \delta(a, x_1)\rangle$, где $C(x) = [A_1(x) \otimes A_2(\delta_1(a_1, x))]_{a_1}$, $Y_2 = \delta((a_1, a_2), x) = \delta_2(a_2, \delta_1(a_1, x))$. Графически это показано на рис. 2.

Другим частным случаем каскадного соединения служит *параллельное* соединение ВА. В этом случае, соединение задано в форме

$C = \langle X, Y_1 \times Y_2, \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2, \{C(x), x \in X\}, \delta(a, x)\rangle$, где $C(x) = A_1(x) \otimes A_2(x)$, $y = (y_1, y_2) = \delta((a_1, a_2), x) = (\delta_1(a_1, x), \delta_2(a_2, x))$.

Графически параллельное соединение изображено па рис.3.

Рассмотрим ВА $A = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \mu_A(a', y/a, x)\rangle$.

Определение 4. ВА $A' = \langle X, Y, \mathfrak{A}', \mu_{A'}(a', y/a, x)\rangle$ называется *подавтоматом* ВА *A,* если

1) $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$,

2) на декартовом произведении $\mathfrak{A}' \times X$ $\mu_A(a', y/a, x) = \mu_{A'}(a', y/a, x)$,

3) для любого состояния $a \in \mathfrak{A}'$ каждое состояние, достижимое из *a,* принадлежит $\mathfrak{A}'$.

При решении задачи декомпозиции ВА нецелесообразно требовать, чтобы конструируемая композиция более простых автоматов была в точности изоморфна исходному ВА. Достаточно требовать изоморфности исходного ВА некоторому подавтомату построенной композиции. Действительно, в этом случае можно обеспечить поведение автомата-композиции, адекватное поведению исходного ВА за счет подходящего выбора начального вектора состояний автомата-композиции. Также естественно требовать, чтобы каждый из составляющих подавтоматов автомата-композиции имел меньшее число состояний, чем исходный декомпозируемый ВА.

Определение 5. ВА *декомпозируем* в каскадное, последовательное или параллельное соединение автоматов, если он изоморфен некоторому подавтомату каскадного, последовательного или соответственно параллельного соединения автоматов, имеющих меньшее число состояний, чем исходный автомат.

Разбиением π множества $\mathfrak{A}$ называется конечный или счетный класс его подмножеств $\pi = (R_i,\ i \in T)$ такой, что выполнены условия

1) $R_i \cap R_j = \varnothing,\ i \neq j,\ i, j \in T,$

2) $\bigcup\limits_{i \in T} R_i = \mathfrak{A}.$

Элементы разбиения обычно называются *блоками.* Таким образом, если $\pi = (R_1,\ R_2,\ \ldots)$есть разбиение множества состояний $\mathfrak{A}$, то для каждого состояния *a* найдется один и только один блок R_a разбиения π, которому оно принадлежит. Через 1 обозначается разбиение $\mathfrak{A}$, содержащее только один блок. Через 0 обозначается такое разбиение $\mathfrak{A}$, каждый блок которого содержиг один и только один элемент множества $\mathfrak{A}$.

Введем *частичный порядок* во множестве всех разбиений множества $\mathfrak{A}$, полагая, что $\pi \leqslant \tau,$ если каждый блок разбиения τ является суммой одного или нескольких блоков разбиения π. Таким образом, для произвольного разбиения π верны соотношения: $0 \leqslant \pi \leqslant 1.$

Пусть, далее, π и τ — разбиения множества $\mathfrak{A}$. Разбивание *ν* называется *произведением разбиений* $\pi,\ \ \tau$ и обозначается $\nu = \pi\tau,$ если это наименьшее разбиение $\mathfrak{A}$, не меньшее разбиений π и τ.

Важную роль в задачах структурной декомпозиции ВА играют следующие определения свойств подстановки и независимости разбиений множества состояний ВА.

Определение 6. Пусть $\{A(x),\ \ x \in X\}$—множество всех матриц переходов ВА *A.* Если для каждого блока Q_k разбиения π множества состояний $\mathfrak{A}$ $(a_i,\ a_j \in Q_k)$ и для каждого блока Q_r и входного символа *x* имеем

$$\sum_{a_t \in Q_r} a_{it}(x) = \sum_{a_t \in Q_r} a_{jt}(x), \quad (4)$$

то разбиение π обладает *свойством подстановки (относительно ВА А)*. Свойство подстановки разбиения тесно связано с таким свойством стохастической матрицы, которое называется свойством укрупнимости.

Определение 7. Стохастическая матрица *A* называется *укрупнимой* (*по разбиению* π), если существует разбиение π множества номеров ее строк (и столбцов), обладающее свойством подстановки относительно этой матрицы в соответствии с определением 6.

Полезно рассмотреть интерпретацию понятия укрупнимости матрицы в терминах гомоморфизма ВА. Наличие у матрицы свойства укрупнимости относительно нетривиального разбиения π эквивалентно существованию такой прямоугольной стохастической матрицы H_n с элементами из нулей и единиц и квадратной матрицы *B* с числом строк, равным числу элементов разбиения π, что выполняется матричное равенство

$$AH_n = H_\pi B. \quad (5)$$

Нетрудно увидеть в матричном равенстве (5) условие гомоморфизма (2.6.3) автономных ВА с матрицами перехода *A* и *B*. Своеобразие укрупнимости состоит в том, что матрица H_n определяет детерминированный гомоморфизм. Это замечание полезно тем, что оно выявляет сущность структурного разложения ВА — как мы увидим далее, выявление детерминированной структуры в ВА тесно связано с его гомоморфным преобразованием, однако гомоморфизм понимается в детерминированном смысле.

Пусть π и τ — разбиения множества состояний $\mathfrak{A}$ ВА *A*.

Определение 8. Разбиения π и τ называются *взаимно независимыми (относительно ВА А),* если для любой пары блоков Q_r и Q_k соответственно разбиений π и τ, любого состояния a_i и любого входного символа *x* выполняется условие

$$\sum_{a_j \in Q_r \cap Q_k} a_{ij}(x) = \sum_{a_j \in Q_r} a_{ij}(x) \sum_{a_j \in Q_k} a_{ij}(x). \quad (6)$$

Понятие взаимной независимости разбиений, сформулированное в определении 8, не является абсолютно необходимым для характеристики декомпозируемости ВА. Из анализа понятия укрупнимости в терминах гомоморфизма уже ясно, что при декомпозиции ВА элементы разбиений π и τ играют роль состояний автоматов, составляющих композицию. В этом случае распределения вероятностей типа $\left\{\sum_{a_j \in Q_k} a_{ij}(x),\ k = 1, \ldots, p\right\}$,

$$\left\{\sum_{a_j \in Q_r^*} a_{ij}(x),\ r = 1, \ldots, q\right\}$$

представляют собой распределения вероятностей элементов разбиений π и τ (условные распределения — для каждого номера строки матрицы *A(x)).* Таким образом, условие (6) представляет собой условие взаимной независимости этих распределений вероятностей. Поэтому если толковать блоки разбиений π и τ как состояния соответственно автоматов A_1 и A_2, составляющих автомат-композицию *A,* то условие (6) равносильно следующему требованию: множество состояний автомата-композиции есть декартово произведение множеств состояний $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ автоматов, составляющих композицию, и условные коды $a_1'(a_1, x)$ и $a_2'(a_2, x)$, определяющие последующие состояния этих автоматов, взаимно независимы. Такое условие при определении декомпозиции ВА представляется естественным, однако не единственно возможным.

Теорема 1. *ВА С допускает декомпозицию в нетривиальное каскадное соединение автоматов, если существуют такие разбиения множества его состояний* π *и* τ, *которые удовлетворяют условиям:*

1) π *обладает свойством подстановки и* $0 < \pi,\ \tau < 1$;
2) π *и* τ *взаимно независимы;*
3) $\pi\tau = 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть ВА $C = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \{C(x),\ x \in X\},\ \delta(a,\ x)\rangle$ декомпозируем в каскадное соединение ВА *А* и *В* в соответствии с определениями 3, 5 и рис. 1. Тогда множество состояний $\mathfrak{A}$ ВА *С* есть подмножество декартова произведения $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ множеств состояний ВА *А* и *В* и ВА *С* есть подавтомат каскадной композиции *A',* переходная матрица которого есть $C'(x) = [A(x) \otimes B(x,\ \delta_1(a,\ x))]_{a}$, или

$$c'_{a,b,a',b'}(x) = p^{(1)}_{a,a'}(x)\, p^{(2)}_{b,b'}(x, \delta_1(a, x)). \quad (7)$$

В качестве разбиений π' и τ' рассмотрим следующие разбиения множества состояний $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$: $\pi' = \{Q_a,\ a \in \mathfrak{A}_1\}$, где $Q_a = \{(a,\ b),\ b \in \mathfrak{A}_2\}$, $\tau' = \{R_b,\ b \in \mathfrak{A}_2\}$, где $R_b = \{(a,\ b),\ a \in \mathfrak{A}_1\}$.

Если каскадное соединение нетривиально, то число состояний ВА A_1 и A_2 должно быть не менее двух. Тогда разбиения π' и τ' являются нетривиальными и $0 < \pi',\ \tau' < 1$. Из системы равенств (6) вытекает, что

$$\sum_{b'} c'_{a,b,a',b'}(x) = p^{(1)}_{aa'}(x), \quad (8)$$

$$\sum_{a'} c'_{a,b,a',b'}(x) = p^{(2)}_{bb'}(x, \delta(a_1, x)), \quad (9)$$

Из условий (7) вытекает, что

$$\sum_{Q_{a'}} c'_{a,b,a',b'}(x) = \sum_{Q_{a'}} c'_{a,\bar{b},a',b'}(x), \quad (a, b) \in Q_a, \quad (a, \bar{b}) \in Q_a,$$

что означает укрупнимость матриц *C(x)* относительно разбиения π', или, что то же самое, что разбиение *π'* обладает свойством подстановки относительно ВА C′.

Из строения разбиений π' и τ' видно, что задание одного, блока разбиения *π'* и одного блока разбиения *τ'* определяет единственный элемент множества $\mathfrak{A}'$ и каждый элемент $\mathfrak{A}'$ определяется таким образом. Но это и означает, что произведение разбиений π' и τ' определяет разбиение 0. Следовательно, имеем $Q_{a'} \cap R_{b'} = \{(a', b')\}$.

Тогда из условий (7) и условий (8) и (9) мы получаем

$$\left(\sum_{Q_{a'}} c'_{a,b,a',b'}(x)\right)\left(\sum_{R_{b'}} c'_{a,b,a',b'}(x)\right) = c'_{a,b,a',b'}(x),$$

что означает независимость разбиепий π' и τ' относительно ВА C′.

По условию, ВА *C* является подавтоматом ВА C′. Отсюда следует, что матрицы *C(x)* ВА *C* являются подматрицами матриц *C′(x)* ВА *C′,* определенными теми их элементами, которые расположены на пересечении строк и столбцов с номерами из множества $\mathfrak{A}$. Отсюда следует также, что все элементы матриц *C′(x),* расположенные в строках с номерами из $\mathfrak{A}$ и столбцах с номерами из $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$, равны нулю. Действительно, все состояния ВА *C* п соответствии с определением подавтомата (4) должны быть достижимы из $\mathfrak{A}$, следовательно, если некоторая вероятность в строке с номерами из $\mathfrak{A}$ не равна нулю, то номер этого столбца должен входить в $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим теперь разбиения π и τ на множестве $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$ состояний ВА *C,* определенные следующим образом: $\pi = \{Q_a \cap \mathfrak{A}, a \in \mathfrak{A}_1'\}$, $\tau = \{R_b \cap \mathfrak{A}, b \in \mathfrak{A}_2'\}$, где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2'$ суть подмножества всех элементов соответственно множеств $\mathfrak{A}_1$ п $\mathfrak{A}_2$, встречающихся в парах элементов, входящих в множество $\mathfrak{A}$. Разбиения *π* и *τ* удовлетворяют условиям теоремы. Действительно, поскольку, как установлено, все вероятности в столбцах матриц *C′(x),* номера которых не входят в множество $\mathfrak{A}$, равны нулю, если соответствующие номера строк принадлежат $\mathfrak{A}$, то для любого номера $(a, b) \in \mathfrak{A}$.

$$\sum_{Q_{a'} \cap \mathfrak{A}} c_{a,b,a',b'}(x) = \sum_{Q_{a'} \cap \mathfrak{A}'} c'_{a,b,a',b'}(x) = \sum_{Q_{a'}} c'_{a,b,a',b'}(x),$$

$$\sum_{R_b \cap \mathfrak{A}} c_{a,b,a',b'}(x) = \sum_{R_b \cap \mathfrak{A}'} c'_{a,b,a',b'}(x) = \sum_{R_{b'}} c'_{a,b,a',b'}(x).$$

Поэтому разбиения π и τ множества $\mathfrak{A}$ удовлетворяют как условию укрупнимости (разбиения π), так и условию взаимной независимости относительно ВА *С*. Поскольку π и τ есть разбиения π' и τ' на подмножестве $\mathfrak{A}$ множества $\mathfrak{A}'$, то из $\pi'\tau' = 0$ следует $\pi\tau = 0$.

Достаточность. Пусть дан ВА *С* и для множества его состояний $\mathfrak{A}$ выполнены условия 1), 2) и 3). Построим ВА A_1 и A_2, каскадная композиция которых содержит подавтомат, изоморфный *С*.

Лемма 1. *Пусть разбиения* π *и* τ *множества строк (столбцов) стохастической матрицы С таковы, что выполнены условия* 1), 2), 3) *теоремы* 1. *Тогда матрица С равна некоторой подматрице косого произведения стохастических матриц А и* $B(i)$ $(i \in \pi)$, *множество строк матрицы А взаимно однозначно определено разбиением π, а множество строк матрицы B(i) — разбиением τ.*

Доказательство. Пусть Q_i суть блоки разбиения *π* и R_j — блоки разбиения τ. Ввиду условия 3) каждый элемент строки матрицы *С* определяется как пересечение некоторых двух блоков Q_i и R_j будем такой элемент обозначать как $P_{Q_i \cap R_j}$. Поскольку разбиение π обладает свойством подстановки относительно матрицы *С,* то суммы элементов матрицы в пределах одного произвольного блока Q_i разбиения π равны между собой для всех строк в пределах произвольного блока Q_j — разбиения *π*.

Фиксируем определенную строку. Дальнейшие рассуждения будут аналогичны для любой строки матрицы *С*. Обозначим через P_{Q_i} сумму элементов блока Q_i разбиения π в этой фиксированной строке. Каждый элемент с блока Q_i представлен одним из блоков разбиения τ в соответствии с условием $c = P_{Q_i \cap R_j}$. Поэтому фиксированная строка элементов матрицы может быть сгруппирована в виде

$$P_{Q_1}\left(\frac{P_{Q_1 \cap R_1}}{P_{Q_1}}, \ldots, \frac{P_{Q_1 \cap R_s}}{P_{Q_1}}\right), \ldots, P_{Q_k}\left(\frac{P_{Q_k \cap R_1}}{P_{Q_k}}, \ldots, \frac{P_{Q_k \cap P_s}}{P_{Q_k}}\right),$$

или

$$P_{Q_1}\left(P^1_{R_1}, \ldots, P^1_{R_s}\right), \ldots, P_{Q_k}\left(P^k_{R_1}, \ldots, P^k_{R_s}\right),$$

где все встречающиеся числа неотрицательны и как суммы элементов в каждой скобке, так и сумма, всех элементов P_{Q_i}, $i \in \pi$, равны единице. Покажем, что в каждой скобке мы имеем равные стохастические векторы. Действительно, из условия взаимной независимости разбиений π и τ получим, например, для элементов $P^1_{Q_j}$ и $P^2_{Q_j}$ при произвольном j $P_{Q_1 \cap R_j} = P_{Q_1} P_{R_j}$,

$P_{Q_2 \cap R_j} = P_{Q_2} P_{R_j}$, откуда видно, что $P^2_{R_j} = P_{R_j} = P^1_{R_j}$. Эти рассуждения верны для произвольной строки матрицы С, поэтому она может быть представлена в виде

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B(1) & \ldots & a_{1k}B(1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}B(k) & \ldots & a_{kk}B(k) \end{pmatrix}.$$

Вообще говоря, не каждое пересечение блоков Q_i и R_j разбиений π и τ может соответствовать какой-либо строке матрицы *С*. Пусть стохастическая матрица С′ имеет множеством строк (столбцов) декартово произведение разбиений $\pi \times \tau$, и элементы ее для фиксированной строки i $(\{i\} = Q_1 \cap R_1)$ определены условием $C'_{Q_1 \cap R_1, Q_2 \cap R_2} = P^{(i)}_{Q_2 \cap P_2}$. Из рассуждений, аналогичных приведенным, ясно, что матрица С′ имеет тот же вид, что и матрица *С,* однако определена полностью произведением разбиений $\pi \times \tau$, представляя, таким образом, косое произведение матриц вида $C' = [A \otimes B(i)]_{(1)}$, где

$$A = (a_{Q_iQ_j}), \quad a_{Q_iQ_j} = \sum_{l \in Q_j} a_{kl}, \quad k \in Q_i,$$

$$B(s_i) = (b_{R_iR_j}(s_i)) = \sum_{l \in R_j} a_{kl}, \quad k \in R_i, \quad k \in Q_i.$$

Матрица *С* есть подматрица матрицы *С′*.

Из леммы 1 следует, что система стохастических матриц *С(х)* ВА *С* может быть представлена в виде системы подматриц косого произведения стохастических матриц *А(х)* и *В(х, i)* соответственно порядков, равных числу элементов разбиений π и τ.

$\{A(x),\ x \in X\},\ \delta_A(Q,\ x)\rangle,\ B(i) = \langle X,\ Y,\ \tau,\ \{B(x;\ i),\ x \in X\},$

Рассмотрим каскадное соединение системы ВА $A = \langle X,\ \pi,\ \pi,$ $\delta_i(R,\ x)\rangle$, где $\delta_A(Q,\ x) = Q_i,\ \delta_i(R,\ x) = \delta(a,\ x),\ \{a\} = Q_i \cap R.$

В соответствии с определением 3 этот ВА *С′* имеет систему переходных матриц $C'(x) = [A(x) \otimes B(x,\ i)]_{(1)}$ или, иначе, $a'_{ij}(x) =$ $= a_{Q_1Q_2}(x)\, b_{R_1R_2}(x, Q_1)$, где $\{i\} = Q_1 \cap R_1,\quad \{j\} = Q_2 \cap R_2.$

Покажем, что существует подавтомат *С″* ВА С′, изоморфный ВА *С.* Пусть a_i, a_j— произвольная пара состояний ВА *С.* Тогда условная вероятность $a_{ij}(x)$ равна условной вероятности a_{ij}, где пары блоков Q_1, Q_2 R_1, R_2 определяют соответственно состояния *i* и j: $\{i\} =$ $= Q_1 \cap R_1,\ \{j\} = Q_2 \cap R_2.$ Отсюда следует, что для любой строки матрицы *С′(х),* соответствующей какой-либо строке матрицы *С(х),* имеем

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(x) = \sum_{Q_2, R_2} a_{Q_1Q_2}(x)\, b_{R_1R_2}(x, Q_1) = 1, \quad (10)$$

где вторая сумма берется по всем таким пересечениям блоков разбиений Q_2 и R_2, которые соответствуют номерам строк матриц *C(x).* Однако матрицы *C'(x)* являются стохастическими, поэтому все остальные элементы выбранной строки матрицы *C'(x)* равны нулю. Поскольку это верно для всех строк, соответствующих строкам матриц *C(x),* то отсюда следует, что подмножество состояний ВА C′, соответствующее множеству состояний $\mathfrak{A}$ВА *C,* определяет подавтомат *C″* ВА *C′*. Из условия (10) и определения функции выхода ВА *C* видно, что подавтомат C″ и ВА *C* изоморфны.

Следствие 1. *ВА С допускает нетривиальную параллельную декомпозицию тогда и только тогда, когда существуют такие нетривиальные разбиения множества его состояний π и τ, которые взаимно независимы, обладают свойством подстановки относительно автомата С и при этом* $\pi\tau = 0$.

Доказательство следует из теоремы 1, если учесть, что в параллельной композиции оба автомата, составляющих композицию, а следовательно, и оба разбиения *π* и *τ* равноправны.

Как уже было замечено выше, условие взаимной независимости разбиений *π* и *τ* не является обязательным требованием при определении декомпозиции ВА. Для того чтобы отказаться от этого условия, достаточно допустить, что в результате декомпозиции ВА распадается в такое каскадное соединение двух составляющих автоматов, что поведение второго из них зависит от последующего состояния первого из автоматов. Для того чтобы изобразить это графически, выделим в структуре автомата элемент задержки, реализующий функцию памяти (см. рис.4).

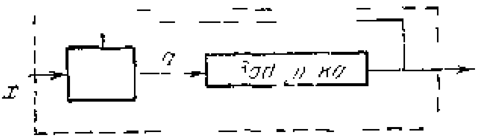


Рис.4

Определение 9. ВА *слабо декомпозируем* в каскадное, последовательное или параллельное соединение автоматов, если он эквивалентен связному подавтомату такого каскадного, последовательного или параллельного соединения двух автоматов, что состояния второго из них зависят от входа, текущего и последующего состояний первого.

На рис. 5 изображена слабая каскадная композиция двух автоматов.

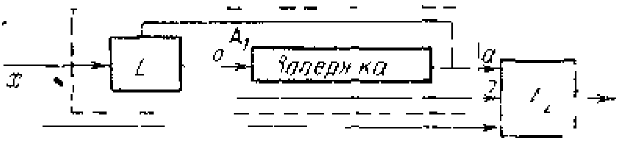


Рис.5.

Естественно ожидать, что в условиях слабой декомпозируемости ВА будет отсутствовать требование взаимной независимости разбиений π и τ. Действительно, верна

Теорема 2. *Для того чтобы ВА* $C = \langle X, \mathfrak{A}, \{A(x), x \in X\}\rangle$ *был слабо декомпозируем в каскадное соединение ВА*

$A_1 = \langle X, \pi, \{A_1(x), x \in X\}\rangle$, $A_2 = \langle \pi \times \pi \times X, \tau, \{A_2(y), y \in \pi \times \pi \times X\}\rangle$, *необходимо и достаточно, чтобы множество его состояний* $\mathfrak{A}$ *допускало такие разбиения* π *и* τ, *что*

1) π *обладает свойством подстановки и* $0 < \pi, \tau < 1$;

2) $\pi\tau = 0$.

При этом матрицы переходов ВА A, A_1 и A_2 связаны соотношением

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) A_2(y_{11}) & \dots & a_{k1}(x) A_2(y_{k1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1k}(x) A_2(y_{1k}) & \dots & a_{kk}(x) A_2(y_{kk}) \end{pmatrix},$$

где $y_{ij} = (Q_1, Q_2, x)$, *если* $i \in Q_1, j \in Q_2$.

Доказательство. Начнем с доказательства достаточности условий теоремы. Пусть a_i — состояние ВА *A*. Поскольку $\pi\tau = 0$, то существуют блоки $Q_1 \in \pi$ и $R_1 \in \tau$ такие, что $\{a_i\} = Q_1 \cap R_1$. Далее, из условия укрупнимости системы матриц $\{A(x), x \in X\}$ по разбиению π следует существование ВА A_1. Если состояние $a_i \in \mathfrak{A}$ равно $\{a_j\} = Q_2 \cap R_2$, где Q_2 и R_2 — блоки разбиений π и τ соответственно, то

$a_{ij}(x) = \mu(Q_2, R_2/Q_1, R_1, x)$. (11)

С другой стороны, можно записать

$$\mu(Q_2, R_2/Q_1, R_1, x) = \mu(Q_2/Q_1, R_1, x)\mu(R_2/Q_1, Q_2, R_1, x).$$

Из условия укрупнимости системы матриц $\{A(x), x \in X\}$ вытекает, что

$$\mu(Q_2/Q_1, R_1, x) = \mu(Q_2/Q_1, x) = a^1_{Q_1 Q_2}(x).$$

Поэтому соотношение (11) можно переписать в виде

$$a_{ij}(x) = \mu(R_2/Q_1, Q_2, R_1, x)\, a^1_{Q_1 Q_2}(x).$$

Система условных вероятностей $\mu(R_2/Q_1, Q_2, R_1, x)$ определяет такой ВА A_2, что его состояниями являются блоки разбиения τ, а входными символами — тройки Q_1, Q_2, x, где Q_1 и Q_2 — блоки разбиения π, а x — входной символ ВА A. Если ввести обозначение

$$a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q_2, x) = \mu(R_2/R_1, Q_1, Q_2, x),$$

то видно, что

$$a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q_2, x)\, a^1_{Q_1,Q_2}(x) = a_{ij}(x).$$

Рассмотрим отображение $f\colon \mathfrak{A} \to \pi\tau$, где каждое состояние ВА A отображается в то пересечение блоков Q и R разбиений π и τ, которое определяет данное состояние. Образ множества состояний $\mathfrak{A}$ в этом отображении определяет некоторое подмножество T множества $\pi \times \tau$ такое, что подавтомат, определенный системой переходных вероятностей

$$a_{R_1\cap Q_1, R_2\cap Q_2}(x) = a_{ij}(x)$$

на множестве состояний T, детерминированно-изоморфен ВА A, поскольку все соответствующие переходные вероятности совпадают.
Для доказательства необходимости рассмотрим каскадное соединение двух ВА A_1 и A_2, где π и τ суть разбиения множества состояний ВА A. Построим ВА A', для которого множеством состояний служит декартово произведение разбиений $\pi \times \tau$. Для каждой пары Q_1, R_2 и Q_2, R_2 определим переходные вероятности в виде

$$a_{ij}(x) = a^1_{Q_1Q_2}(x)\, a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q_2, x),$$

где $a^1_{Q_1Q_2}(x)$ и $a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q_2, x)$ суть переходные вероятности соответственно для ВА A_1 и A_2. В соответствии с построением ВА A изоморфен подавтомату каскадного соединения ВА A_1 и A_2. Для каждого состояния $\{a_i\} = Q_1 \cap R_1$ и любого $R_2 \in \tau$ имеем

$$\sum_{R_2\in\tau} a_{ij}(x) = a'_{Q_1Q_2}(x) = \sum_{R_2\in\tau} a_{kj}(x).$$

Поэтому система матриц $\{A(x),\ x \in X\}$ укрупнима по разбиению π. То, что произведение разбиений π и τ дает нулевое разбиение, очевидно из определения множества $\mathfrak{A}$.
Связь между свойствами декомпозируемости и слабой декомпозируемости ВА дает

Теорема 3. *Пусть Q — произвольный блок разбиения π, символы* y_1, y_2 *принадлежат множеству* $\pi \times \pi \times X$ *и условия* 1) *и* 2) *теоремы* 2 *выполнены для ВА С. Тогда для того чтобы разбиения π и τ были взаимно независимы, необходимо и достаточно, чтобы для каждого блока* $Q \in \pi$ *и любых* y_1, y_2 *вида* (Q_1, Q, x) *выполнялось условие*

$$A_2(y_1) = A_2(y_2).$$

Доказательство. Предположим, что разбиения π и τ взаимно независимы. Применяя те же обозначения, что и в теореме 2, мы должны иметь

$$a_{ij}(x) = a^1_{Q_1Q_2}(x) \sum_{j \in R_2} a_{ij}(x),$$

так что

$$a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q_2, x) = \sum_{j \in R_2} a_{ij}(x),$$

где $\{i\} = Q_1 \cap R_1$. Однако тогда, если $Q \in \pi$, то

$$a^2_{R_1R_2}(Q_1, Q, x) = \sum_{j \in R_2} a_{ij}(x),$$

так что $A_2(y_1) = A_2(y_2)$, и $A_2(y)$ не зависит от последующего состояния ВА A_1.

Обратно, допустим, что $A_2(y_1) = A_2(y_2)$ для всех блоков $Q \in \pi$ и y_1, $y_2 \in \pi \times \{Q\} \times x$. Тогда для каждого блока $Q \in \pi$ и $\{k\} = Q \cap R_2$ получим

$$\frac{a_{ij}(x)}{a^1_{Q_1Q_2}(x)} = \frac{a_{ik}(x)}{a^1_{Q_1Q}(x)}.$$

Однако

$$\sum_{j \in R_2} a_{ij}(x) = \sum_{Q \in \pi} a_{ik}(x) = \sum_{Q \in \pi} a_{ij} \frac{a^1_{Q_1Q}(x)}{a^1_{Q_1Q_2}(x)},$$

и поскольку матрица $A_1(x)$ — стохастическая, то

$$\sum_{j \in R_2} a_{ij}(x) = \frac{a_{ij}(x)}{a^1_{Q_1Q_2}(x)},$$

что равносильно условию взаимной независимости разбиений π и τ.

Заметим, что в случае слабой декомпозиции привлечение понятия второго разбиения τ в формулировке теоремы 2 является, вообще говоря, излишним.

Лемма 2. *Пусть дано конечное множество* $\mathfrak{A}$ *и разбиение π этого множества,* $0 < \pi < 1$. *Тогда всегда существует такое разбиение* τ, $0 < \tau < 1$, *этого множества* $\mathfrak{A}$, *что выполнено условие* $\pi\tau = 0$.

Доказательство. Упорядочим элементы в каждом блоке разбиения π и перенумеруем их. Алгоритм формирования разбиения τ состоит в следующем: в блок R_1 отнесем все первые элементы всех блоков разбиения π. В блок R_i разбиения τ отнесем i-е элементы всех блоков разбиения π, если соответствующий блок содержит элемент с номером i. Разбиение τ построено, когда исчерпаны все элементы в каждом блоке разбиения π. Поскольку алгоритм исчерпывает все элементы множества $\mathfrak{A}$, то получаем разбиение. С другой стороны, по построению разбиения τ, каждый элемент множества $\mathfrak{A}$ попадает в один и только один блок как разбиения π, так и разбиения τ, т. е. $\pi\tau = 0$.

Следствие 2. *Для того чтобы ВА* $C = \langle X, Y, \mathfrak{A}, \{A(x), x \in X\}, \delta(a, x)\rangle$ *был слабо декомпозируем, необходимо и достаточно, чтобы все его переходные матрицы были укрупнимы относительно одного и того же нетривиального разбиения π,* $0 < \pi < 1$.

7. 2. Декомпозиция с расщеплением состояний

Условия каскадной декомпозируемости ВА оказываются довольно жесткими и определяют узкий класс автоматов. Требование слабой декомпозируемости, сформулированное в определении 9, несколько ослабляет эти условия, однако не снимает их совсем. Между тем важно было бы исследовать возможности ВА произвольного вида по пх декомпозиции в некоторое соединение более простых ВА. Ослабление условий декомпозируемости возможно при рассмотрении других, менее ограничительных способов разложения ВА в соединение других вероятностных автоматов. Первая возможность состоит в отказе от требования беспетельности декомпозиции. Будем рассматривать такое структурное соединение ВА, когда поведение каждого из них может зависеть от текущего состояпия другого. Другая возможность состоит в следующем. Мы уже допустили ранее некоторое ослабление требования декомпозируемости тем, что требовали изоморфизма декомпозируемого автомата не самому автомату-композиции, а лишь его подавтомату. Новое ослабление требований будет состоять в том, что мы будем производить декомпозицию не самого данного ВА, а некоторого другого ВА, эквивалентного данному и имеющего большее число состояний. Переход к ВА с большим числом состояний допускает некоторый произвол в выборе значений параметров автомата, который может быть использован эффективно с точки зрения возможностей декомпозиции. Переход к ВА с большим числом состояний производится с помощью процедуры расщепления состояний, обратной процедуре склеивания состояний.

Определение 1. *Контурным соединением* двух ВА $A = \langle X \times \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \{A(x, b), x, b \in X \times \mathfrak{B}\}\rangle$, $B = \langle X \times \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \{B(x, a), x, a \in X \times \mathfrak{A}\}\rangle$ называется ВА $C = \langle X, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \{C(x), x \in X\}\rangle$ такой, что

$$p_{(a,b),(a',b')}(x) = p^1_{aa'}(x, b)\, p^2_{bb'}(x, a), \qquad (1)$$

где

$$A(x, b) = \left(p^1_{aa'}(x, b)\right),\ B(x, a) = \left(p^2_{bb'}(x, a)\right),\quad C(x) = \left(p_{ab,a'b'}(x)\right).$$

Таким образом, в контурном соединении вероятность последующего состояния каждого подавтомата зависит как от текущего состояния другого, так и от общего значения входа. Контурное соединение переходит в каскадное, если все переходные матрицы одного из подавтоматов или, возможно, обоих, соответствующие одному и тому же значению входа *x,* равны между собой. Естественно ожидать поэтому, что условия контурной декомпозируемости ВА существенно слабее условий каскадной декомпозируемости.

Определение 2. ВА *А* допускает *контурную декомпозицию (контурно-декомпозируем),* если он детерминированно-изоморфен подавтомату контурной композиции некоторых ВА A_1 и A_2, каждый из которых имеет меньшее число состояний, чем ВА *А.*

Приведем вначале условия контурной декомпозируемости ВА в том смысле, как это рассматривалось в предшествующем параграфе.

Теорема 1. *Для того чтобы конечный ВА А был контурно-декомпозируем, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие разбиения множества его состояний* π *и* τ*, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\pi\tau = 0$ *и* $0 < \pi,\ \tau < 1$;

2) *разбиения* π *и* τ *взаимно независимы относительно ВА А.*

Доказательство. Если такие разбиения существуют, то обозначим элемент $a_{ij}(x)$ матрицы *A(x),* где $\{a_i\} = Q_1 \cap R_1$ и $\{a_j\} = Q_2 \cap R_2$, через $p_{Q_1R_1,Q_2R_2}(x)$. Иначе говоря,

$$p_{Q_1R_1,Q_2R_2}(x) = \mu(Q_2, R_2/Q_1, R_1, x).$$

Но тогда в соответствии с условием взаимной независимости разбиений π и τ мы получим, что для каждой строки *i*, т. е. для каждой фиксированной пары блоков Q_1 и R_1 разбиений π и τ,

$$\sum_{Q_2,R_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = \sum_{R_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) \sum_{Q_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x). \qquad (2)$$

Введем обозначения

$$\sum_{R_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = p^1_{Q_1Q_2}(x, R_1),\quad \sum_{Q_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = p^2_{R_1R_2}(x, Q_1), \qquad (3)$$

где в общем случае суммы будут зависеть от номера строки, следовательно, в первом случае от R_1, а во втором случае от Q_1. поэтому из (2) и (3) получим

$$p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = p^1_{Q_1Q_2}(x, R_1)\, p^2_{R_1R_2}(x, Q_1). \quad (4)$$

Однако в соответствии с определением 1 это условие определяет некоторый ВА *С,* являющийся контурной композицией ВА A_1 и A_2 соответственно с системой переходных матриц

$$A_1(x, R) = \left(p^1_{Q_1Q_2}(x, R)\right), \quad A_2(x, Q) = \left(p^2_{R_1R_2}(x, Q)\right). \quad (5)$$

Неоднократно применявшимся приемом показываем, что ВА *А* изоморфен некоторому подавтомату *С.* Обратно, предположим, что ВА *А* изоморфен подавтомату контурной композиция автоматов A_1 и A_2 с системами переходных матриц (5). Определим разбиения π и τ на декартовом произведении множеств состояний ВА A_1 и A_2, как в теореме 1 р. 7.1. С одной стороны, условные вероятности, определяющие функционирование ВА — контурной композиции записываются в форме (4). С другой стороны, поскольку ВА *А* изоморфен подавтомату контурной композиции, мы получим для тех пар блоков *Q* и *R* разбиения π и τ, которые действительно определяют состояния ВА *А* (точнее, соответствуют этим состояниям в изоморфизме):

$$a_{ij}(x) = p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = p^1_{Q_1Q_2}(x, R_1)\, p^2_{R_1R_2}(x, Q_1) =$$
$$= \sum_{R_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) \sum_{Q_2} p_{Q_1R_1Q_2R_2}(x) = \sum_{a_j \in Q_2} a_{ij}(x) \sum_{a_j \in R_2} a_{ij}(x),$$

где $\{a_j\} = Q_2 \cap R_2$. Отсюда видно, что разбиения π и τ взаимно независимы относительно ВЛ *А*.

Доказанная теорема говорит, в частности, о том, что класс контурно-недекомпозируемых конечных ВА не пуст. Для того чтобы сформулировать принцип декомпозиции, который позволяет производить декомпозицию произвольного конечного ВА, приходится допустить расщепление состояний ВА в процессе его декомпозиции.

Теорема 2. *Для каждого ВА* $A = \langle A(x),\ x \in X \rangle$ *с n состояниями существуют ВА с двумя состояниями* $A_1 = \langle X \times \tau,\ \pi,\ \{A_1(x),\ x \in X\} \rangle$, *ВА с (n—* 1) *состоянием* $A_2 = \langle X \times \pi,\ \tau,\ \{A_2(x),\ x \in X\} \rangle$ *и разбиение* ρ *множества состояний* $\pi \times \tau$ *их контурной композиции* $C = \langle X,\ \pi \times \tau,\ \{C(x),\ x \in X\} \rangle$ *такие, что если все состояния каждого из блоков разбиения* ρ *склеить между собой, то эквивалентный ВА, получающийся в результате склеивания, изоморфен ВА А.*

Доказательство. Пусть множество состояний ВА *А* суть $\mathfrak{A} = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Расщепим состояние a_n в (*n* — 1) состояние $a_n^1, \ldots, a_n^{n-1}$ и рассмотрим новый ВА *А'* с множеством состояний $\mathfrak{A}' = \{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n^1, \ldots, a_n^{n-1}\}$. Определим два разбиения над множеством

$\mathfrak{A}'$: $\pi = (\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}, \{a_n^1, \ldots, a_n^{n-1}\})$, $\tau = (\{a_1, a_n^1\}, \ldots$ $\ldots, \{a_{n-1}, a_n^{n-1}\})$. Определим матрицы $A'(x) = (a'_{ij}(x))$ ВА A' таким образом, чтобы эти два разбиения позволили представить ВА A в виде контурной композиции ВА A_{1i} с двумя состояниями, которыми являются блоки разбиения π, и ВА A_2 с (n—1) состояниями, которыми являются блоки разбиения τ. В дополнение потребуем, чтобы разбиение $\rho = (\{a_1\}, \ldots, \{a_{n-1}\}, \{a_n^1, \ldots, a_n^{n-1}\})$ удовлетворяло условию укрупнимости относительно ВА A', чтобы в результате склеивания состояний полученный ВА был изоморфен ВА A. Чтобы удовлетворить всем этим условиям, потребуем

$$\sum_{a_j \in Q_k} a'_{ij}(x) \sum_{a_j \in R_l} a'_{ij}(x) = a'_{it}(x), \quad \{a_t\} = Q_k \cap R_l, \quad \textbf{(6)}$$

$$\sum_{j \geqslant n} a'_{ij}(x) = \begin{cases} a_{in}(x), & \text{если} \quad i \leqslant n, \\ a_{nn}(x), & \text{если} \quad i > n, \end{cases} \quad (7)$$

$$a'_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x), & \text{если} \quad i, j \leqslant n-1, \\ a_{nj}(x), & \text{если} \quad i \geqslant n,\ j \leqslant n-1. \end{cases} \quad (8)$$

Условия (7) и (8) являются необходимыми и достаточными для укрупнимости, тогда как (6) эквивалентно определению контурного соединения (1). Если обозначить переходные вероятности автомата-композиции с использованием блоков разбиения π и τ, полагая

$$a'_{ij}(x) = C_{Q_1 R_1, Q_2 R_2}(x), \qquad \begin{array}{l} \{a_i\} = Q_1 \cap R_1, \\ \{a_j\} = Q_2 \cap R_2, \end{array}$$

то матрицы переходов ВА A_1 и A_2 будут соответственно равны $A_1(x, R) = (p^1_{Q_1 Q_2}(x))$ и $A_2(x, Q) = (p^2_{R_1 R_2}(x, Q))$, где

$$p^1_{Q_1 Q_2}(x, R) = \sum_{R_1} C_{Q_1 Q_2 R_1 R_2}(x), \quad p^2_{R_1 R_2}(x, Q) = \sum_{Q_1} C_{Q_1 Q_2 R_1 R_2}(x),$$

поэтому условия (6) равносильны определению контурной композиции (1).

Условия (6) — (8) однозначно определяют систему матриц $A'(x)$ при данной системе матриц $A(x)$. Действительно, из (2.6) для $1 \leqslant k \leqslant n-1$ следует

$$\Big(\sum_{j \geqslant n} a'_{ij}(x)\Big)\big(a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x)\big) = a'_{i,k+n-1}(x). \quad \textbf{(9)}$$

Используя (7) — (9), получим

$$a_{in}(x)\big(a_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x)\big) = a'_{i,k+n-1}(x), \quad (10)$$

где известны все компоненты, кроме $a'_{i,k+n-1}(x)$, или

$$a_{in}(x)\, a_{ik}(x) = a'_{i,k+n-1}(x)\big(1 - a_{in}(x)\big). \quad (11)$$

Так как $1 - a_{in}(x) = \sum_{j<n} a_{ij}(x) \geqslant a_{ik}(x)$, то обе стороны равенства (11) неотрицательны. Если $a_{in}(x) = 0$, то $a'_{i,k+n-1}(x) = 0$, а если $a_{in}(x) = 1$, то $a'_{i,k+n-1}(x)$ можно выбрать произвольно так, чтобы $\sum_{k=1}^{n-1} a'_{i,k+n-1}(x) = 1$, а все слагаемые были бы неотрицательны. Следовательно, если значения $a'_{i,k+n-1}(x)$, $i \leqslant n$, $k \leqslant n-1$, выбраны в соответствии с (11), то условия (6)—(8) выполнены. Поскольку равенство (11) обратимо, то, применяя (9), получим

$$\Big(\sum_{j<n} a'_{ij}(x)\Big)\big(a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x)\big) =$$

$$= \Big(1 - \sum_{j\geqslant n} a'_{ij}(x)\Big)\big(a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x)\big) =$$

$$= a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x) - \Big(\sum_{j\geqslant n} a'_{ij}(x)\Big)\big(a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x)\big) =$$

$$= a'_{ik}(x) + a'_{i,k+n-1}(x) - a'_{i,k+n-1}(x) = a'_{ik}(x).$$

Для $i>n$ из (8) вытекает, что первые n — 1 элементов во всех таких строках должны быть равны соответствующим элементам в n-й строке. Поэтому, вследствие (11), это же должно быть верно для всех строк, так что, как это определено в (8), (11), n-я строка должна повторяться $(n$— 1) раз. В соответствии с построением видно, что ВА A' представим в виде контурной композиции ВА A_1 и В А A_2, которые имеют системы матриц перехода соответственно $A_1(x, R)$ и $A_2(x, Q)$, как это определено выше. С другой стороны, видно, что если разбиение $\rho = (\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n^1, \ldots, a_n^{n-1}\})$, то ВА, получающийся после склеивания состояний в блоках, изоморфен ВА A.

Следствие 1. *Для каждого ВА A с n состояниями существуют ВА A_i, $i = 1, \ldots, n-1$, с двумя состояниями, множествами состояний $\mathfrak{A}_i$ и разбиение* ρ *множества состояний $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_{n-1}$ их контурной композиции ВА С такие, что в результате склеивания всех состояний ВА С, принадлежащих каждому блоку разбиения* ρ, *получается ВА, изоморфный ВА А,*

Доказательство. Проводится по индукции. Пусть $\mathfrak{A}_i = \{a_1^i, a_2^i\}$. Тогда j-й блок разбиения ρ имеет вид

$$R_j = \{(a_1^1, \ldots, a_1^{j-1}, a_2^j, a_2^{j+1}, a_2^{n-1}), a_2^{j+1} \in \mathfrak{A}_{j+1}, \ldots, a_2^{n-1} \in \mathfrak{A}_{n-1}\}$$

для всех $j < n$ — 1, тогда как два последних блока определяются следующим образом: $R_{n-1} = \{(a_1^1, \ldots, a_1^{n-2}, a_2^{n-1})\}$, $R_n = \{(a_1^1, \ldots, a_1^{n-1})\}$. Детали доказательства опускаем.

Условие «расщепления» оказывается основным для получения результата в виде следствия 1. В самом деле, теорема 1 показывает, что класс ВА, не допускающих контурную декомпозицию без расщепления состояний, не пуст. Например, из условия 1 контурной декомпозируемости видно, что если в переходной матрице ВА, допускающего контурную декомпозицию, равен нулю элемент строки, определенной блоками *Q* и *R* разбиений π и τ, то либо равны нулю все элементы этой строки, принадлежащие блоку *Q*, либо равны нулю все элементы строки, принадлежащие блоку *R*. Таким образом, даже ВА с тремя состояниями, имеющий в качестве одной из переходных матриц матрицу вида $(*\ 0\ *)$, где на местах звездочек стоят ненулевые элементы, уже не допускает контурной композиции.

Рассмотрим возможности каскадной декомпозиции ВА с расщеплением состояний. Введем некоторые определения.

Определение 3. ВА $A = \langle X,\ \mathfrak{A},\ \{A(x),\ x \in X\}\rangle$ *накрывает* ВА $B = \langle X,\ \mathfrak{B},\ \{B(x),\ x \in X\}\rangle$, если последний детерминированно-гомоморфен некоторому подавтомату $C = \langle X,\ \mathfrak{C},\ \{C(x),\ x \in X\}\rangle$ ВА А.

Расшифруем это определение. Пусть $H = H_\varphi$— стохастическая матрица полного ранга из нулей и единиц, $\varphi\colon\ \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ —функция гомоморфизма. Пусть, далее, $\mathfrak{C} = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_m}\}$— подмножество множества $\mathfrak{A}$ и $E_\mathfrak{C} = (e_{ij})$ — проекция единичной матрицы порядка $|\mathfrak{A}|$ на множестве $\mathfrak{C}$:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i = j,\ a_i \in \mathfrak{C}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $H_\mathfrak{C}$ и $H_\mathfrak{C}^T$ матрицы из нулей и единиц полного ранга такпе, что $H_\mathfrak{C}$ имеет $|\mathfrak{C}|$ строк и по одной единице в i_k-м столбце строки с номером *k* так, что

$$H_\mathfrak{C} H_\mathfrak{C}^T = E, \quad H_\mathfrak{C}^T H_\mathfrak{C} = E_\mathfrak{C}. \quad (12)$$

Тогда определение (3) эквивалентно двум группам условий:

$$\begin{array}{ll} 1) & H_\mathfrak{C} A(x) H_\mathfrak{C}^T = C(x); \\ 2) & C(x) H_\varphi = H_\varphi B(x). \end{array} \quad (13)$$

Определение накрытия можно дать и в форме лишь одного условия типа условия гомоморфизма, которые мы сейчас получим. Введем обозначение

$$H = H_\mathfrak{C}^T H_\varphi. \quad (14)$$

Заметим, что

$$E_\mathfrak{C} H = H_\mathfrak{C}^T H_\mathfrak{C} H_\mathfrak{C}^T H_\varphi = H_\mathfrak{C}^T H_\varphi = H. \quad (15)$$

Тогда условия (14) —(15) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_\mathfrak{C} A(x) H_\mathfrak{C}^T H_\varphi &= H_\varphi B(x), \\ E_\mathfrak{C} A(x) H &= H B(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь матрица Н также полного ранга. Обратно, если имеется система условий (16), то матрица H_φ находится как $H_\varphi = H_{\mathfrak{C}} H$, так как значение $E_{\mathfrak{C}}$ определяет матрицы $H_{\mathfrak{C}}$ и $H_{\mathfrak{C}}^T$ однозначно. Введем в рассмотрение систему стохастических матриц *C(x)* условием (13) (первая строка). Тогда получим для каждого *x*

$$H_{\mathfrak{C}} E_{\mathfrak{C}} A(x) H = H_{\mathfrak{C}} H_{\mathfrak{C}}^T H_{\mathfrak{C}} A(x) E_{\mathfrak{C}} H = H_{\mathfrak{C}} A(x) H_{\mathfrak{C}}^T H_{\mathfrak{C}} H = \\ = C(x) H_\varphi = H_\varphi B(x),$$

т. е. определение 3 эквивалентно соотношениям 13.
Накрытие имеет следующий смысл: в множестве состояний $\mathfrak{A}$ выбирается некоторое подмножество $\mathfrak{C}$, которое разбивается на сумму непересекающихся блоков, определяющих разбиение π. Каждому блоку ставится в соответствие взаимно однозначно состояние ВА В. Каждая подматрица *C(x),* определенная на множестве $\mathfrak{C}$ для каждой матрицы *A(x),* должна быть укрупнима по разбиению π. Иначе говоря, ВА В изоморфен некоторому подавтомату ВА *A,* получающегося из ВА *A* посредством «склеивания» всех состоянии каждого блока разбиения π. Таким образом, понятие накрытия обобщает оба момента, примененных ранее при декомпозиции ВА — как «расщепление» состояний, так и изоморфизм декомпозируемого автомата подавтомату композиции автоматов.
Нижеследующие леммы раскрывают связь между понятием накрытия автомата и операциями композиции.
Определение 4. ВА называется *простым,* если не существует системы каскадно соединенных ВА, накрывающей его, кроме системы, один из автоматов которой накрывает исходный ВА.
Для ДА это определение имеет содержательный смысл, и произвольный конечный ДА накрывается некоторой каскадной композицией простых автоматов. Исследуем этот вопрос для ВА.
Лемма 1. *Пусть ВА А накрывает ВА В. Тогда существует такое представление ВА А и В в виде последовательного соединения управляемого источника G и ДА D, что источник* G_A *совпадает с источником* G_B*, а ДА* D_A *накрывает ДА* D_B*.*
Доказательство. Нам удобнее использовать определение накрытия в виде условий 1) и 2) (13) и доказать отдельно два следующих факта.
1. Лемма верна, когда ВА *C* — просто подавтомат ВА *A*.
2. Лемма верна, когда ВА *B* детерминированно-гомоморфен ВА *C.*
1. Условие 1) (13) означает, что подматрица матрицы *A* (*x*), расположенная на пересечении строк и столбцов с номерами из множества $\mathfrak{C}$, оовпадает с матрицей *C(x).* Пусть матрица *A(x)* разложена в выпуклую линейную комбинацию простых

.
матриц

$$A(x) = \sum_{u \in U} \alpha_u(x) P_u.$$

Заметим, что все элементы матрицы *A(x),* расположенные в строках с номерами из $\mathfrak{C}$ и столбцах с номерами из дополнения $\mathfrak{C}$, равны нулю, поскольку и *A(x),* и *C(x)* суть стохастические матрицы. Следовательно, то же самое имеет место и для каждой простой матрицы P_u, ибо среди коэффициентов $\alpha_u(x)$ нет нулевых. Если так, то подматрицы $\tilde{P}_u$ матриц P_u, расположенные на пересечении строк и столбцов с номерами из $\mathfrak{C}$, иначе говоря, подматрицы $\tilde{P}_u = H_{\mathfrak{C}} P_u H_{\mathfrak{C}}^T$, являются простыми матрицами. Следовательно,

$$C(x) = H_{\mathfrak{C}} A(x) H_{\mathfrak{C}}^T = H_{\mathfrak{C}} \left(\sum_{u \in U} \alpha_u(x) P_u \right) H_{\mathfrak{C}}^T = \sum_{u \in U} \alpha_u(x) \tilde{P}_u$$

есть разложение матрицы *C(x)* в выпуклую линейную комбинацию простых матриц. В соответствии с теоремрй 1.2.3 ДА P_A и D_B суть $D_A = \langle U, \mathfrak{A}, P(u) \rangle$ и $D_B = \langle U, \mathfrak{B}, \tilde{P}(u) \rangle$, причем D_B есть подавтомат D_A, и управляемый источник *G(x)* для обоих ВА — один и тот же.

2. Условие 2) (13) означает укрупнимость матриц *C(x)* в матрицу *B(x).* Поэтому в каждой подматрице $C_{\pi_i \pi_j}(x)$ матрицы C(x), расположенной на пересечении строк с номерами из блока разбиения π_i и столбцов с номерами из блока разбиения π_j, где разбиение $(\pi_1, \ldots, \pi|\mathfrak{C}|)$ определено гомоморфизмом H_φ, будут выполнены условия:

а) суммы элементов по строкам равны между собой;

б) эта сумма элементов равна элементу $b_{ij}(x)$ матрицы *B(x).*

Проведем доказательство п. 2 снача.ла для автономного ВА индукцией по суммарному количеству ненулевых элементов в матрицах *C* и *B.* Если это число минимально и равно $|\mathfrak{C}| + |\mathfrak{B}|$, то обе матрицы *C* и *B* простые, п. 2 леммы тривиально выполняется. Будем уменьшать число ненулевых элементов за счет выделения простых матриц. Пусть $\alpha = \min \left(\min_{c_{ks} \neq 0} c_{ks}, \min_{b_{ij} \neq 0} b_{ij} \right)$, тогда *α* строго меньше единицы, если мы не имеем тривиального случая.

Пусть элемент, на котором достигается значение α, принадлежит матрице *B* и равен b_{ij}. Вычтем из матрицы *B* матрицу $\alpha \tilde{P}$, где $\tilde{P}$ — простая матрица, имеющая единицу на *i, j*-м месте, а остальные единицы расположены так, что матрица $B - \alpha\tilde{P}$ неотрицательная. Поскольку *α* — минимальный элемент, это возможно. В силу условий а) и б) существует такая простая матрица P, что будет неотрицательной матрица $C — \alpha P$, причем

$$PH_\varphi = H_\varphi \tilde{P}.$$

Рассмотрим стохастические матрицы

$$C' = \frac{1}{1-\alpha}(C - \alpha P), \qquad B' = \frac{1}{1-\alpha}(B - \alpha\tilde{P}).$$

Для них имеем $C'H_\varphi = H_\varphi B'$ и, по индукции, существуют выпуклые линейные комбинации $B' = \sum_{u \in U} \alpha'_u \tilde{P}_u$, $C' = \sum_{u \in U} \alpha'_u P_u$, где все матрицы $\tilde{P}_u$, P_u, $u \in U$ — простые, причем

$$P_u H_\varphi = H_\varphi \tilde{P}_u \quad u \in U. \quad (17)$$

Тогда

$$B = \alpha\tilde{P} + (1-\alpha)\sum_{u \in U} \alpha'_u \tilde{P}_u,$$

$$C = \alpha P + (1-\alpha)\sum_{u \in U} \alpha'_u P_u,$$

где для простых матриц $\tilde{P}$ и P условие (17) также имеет место. Предположим, что минимальный элемент α расположен в матрице C на k, s-м месте (в подматрице $C_{\pi_i \pi_j}$). Тогда в качестве простой матрицы P выберем такую, которая имеет единицу на k, s-м месте и, кроме того, все единицы строк с номерами из π_i расположены в пределах столбцов с номерами из π_j . Это возможно в силу условия а). Остальные единицы расположим аналогично, в пределах одною фиксированного блока для каждой группы строк с номерами из одного блока π так, чтобы в итоге матрица $C - \alpha P$ была неотрицательной. Это возможно, поскольку α — минимальный элемент и выполняется условие а). Матрица P укрупнима по разбиению, определяемому гомоморфизмом H_φ и, следовательно, существует простая матрица $\tilde{P}$ такая, что $PH_\varphi = H_\varphi \tilde{P}$. Далее доказательство следует той же схеме, что и в первом случае.

Для ВА общего вида представим условие гомоморфизма в виде

$$\begin{pmatrix} C(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & C(x_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ \cdots \\ H \end{pmatrix} = (H \ldots H) \begin{pmatrix} B(x_1) & & \\ & \ddots & \\ & & B(x_s) \end{pmatrix}$$

и применим метод доказательства по индукции, использованный для автономного ВА.

Пусть автоматы-композиции A и B представляют собой соединение подавтоматов $\{A_1, \ldots, A_n\}$ и $\{B_1, \ldots, B_n\}$ соответственно.

Определение 5. Композиции A и B называются *структурно-изоморфными,* если существует такое взаимно однозначное соответствие между множествами подавтоматов $\{A_1, \ldots, A_n\}$ и

$\{B_1, \ldots, B_n\}$, множествами всех входов и множествами всех выходов этих подавтоматов, при котором входы и выходы соответствующих подавтоматов соответствуют друг другу.

Структурой автомата-композиции называется класс всех структурно-изоморфных автоматов-композиций.

Определение 6. Структура каскадной декомпозиции *ВА А* называется *детерминированпо-порожденной,* если существует представление ВА *А* в виде последовательного соединения управляемого источника *G* и ДА D, каскадная декомпозиция которого в соединение детерминированных подавтоматов структурно-изоморфна каскадной декомпозиции ВА А.

Теорема 3. *Структура всякой каскадной декомпозиции конечного ВА является детерминированно-порожденной.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по глубине каскадной декомпозиции.

Из теоремы 1.2.3 следует справедливость теоремы 3 в случае нулевой глубины каскадной декомпозиции. Пусть ВА *С* есть каскадная композиция ВА *А* и ВА *В*. Докажем, что эта композиция всегда детерминированно-порожденная. Будем опираться на следующую лемму.

Лемма 2. *Произвольный конечный ВА* $\langle A(x), \ x \in X \rangle$ *может быть представлен в виде последовательного соединения автономного источника случайных кодов* G *и ДА* $D(x, \ x_1)$ *с двумя входами и с тем же числом состояний, что и исходный вероятностный. Один вход автомата является выходом источника G, а другой служит входом композиции источника и ДА.*

Доказательство. Будем опираться на теорему 1.2.3. Система матриц перехода ВА *А,* $A(x) = (p_{aa'}(x))$, представима в виде

$$A(x) = \sum_{u \in U} \alpha_u(x) P_u,$$

где $P_u = (\sigma_{aa'}(u))$ — простые матрицы,что в поэлементной записи будет иметь вид

$$p_{aa'}(x) = \sum_{u \in U} \alpha_u(x) \sigma_{aa'}(u). \quad (18)$$

Рассмотрим систему стохастических векторов

$$\alpha_x = (\alpha_{u_1}(x) \ , \ldots, \alpha_{u_t}(x)). \quad (19)$$

В соответствии с леммой 1.2.2 найдется стохастический вектор $\alpha = (\alpha_{x_1}, \ldots, \alpha^x)$, имплицирующий каждый вектор сисаемы (19) и функция импликации $u = \varphi(x, \ x_1)$ такая, что для каждого $x \in X$

$$\alpha_u(x) = \sum_{u=\varphi(x,x_1)} \alpha(x_1).$$

Следовательно, соотношение (18) можно переписать в виде

$$p_{aa'}(x) = \sum_{u\in U} \sum_{u=\varphi(x,x_1)} \alpha(x_1)\,\sigma_{aa'}(u). \tag{20}$$

Положим

$$\sigma_{aa'}(x, x_1, u) = \begin{cases} \sigma_{aa'}(u), & \text{если } u = \varphi(x, x_1), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{21}$$

и введем обозначение

$$\sigma_{aa'}(x, x_1) = \sum_{u\in U} \sigma_{aa'}(x, x_1, u). \tag{22}$$

Тогда из (20) получим

$$p_{aa'}(x) = \sum_{u\in U} \sum_{u=\varphi(x,x_1)} \alpha(x_1)\,\sigma_{aa'}(u) =$$
$$= \sum_{u\in U} \sum_{x_1\in X_1} \alpha(x_1)\,\sigma_{aa'}(x, x_1, u) = \sum_{x_1\in X_1} \alpha(x_1)\,\sigma_{aa'}(x, x_1).$$

Здесь система коэффициентов $\sigma_{aa'}(x, x_1)$ определяет двухвходовый ДА с числом состояний $|\mathfrak{A}|$, а стохастический вектор $\alpha = (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_s))$ — автономный источник случайных входов, выход которого является одним входом ДА $D = \langle X \times X_1, (\sigma_{aa'}(x, x_1))\rangle$.

Итак, пусть ВА *A, B* и *C* связаны соотношением $C(x) = [A(x) \circ B(x, a)]|_a$, которое в поэлементной записи имеет вид

$$p^C_{ab,a'b'}(x) = p^A_{aa'}(x)\, p^B_{bb'}(x, a), \quad x \in X, \quad a, a' \in \mathfrak{A}, \quad b, b' \in \mathfrak{B}. \tag{23}$$

В соответствии с леммой 2 переходные матрицы ВА А и В представимы в виде

$$p^A_{aa'}(x) = \sum_{x_1\in X_1} \alpha(x_1)\,\sigma^A_{aa'}(x, x_1),$$

$$p^B_{bb'}(x, a) = \sum_{x_2\in X_2} \beta(x_2)\,\sigma^B_{bb'}(x, a, x_2).$$

Тогда для системы матриц перехода ВА *C* мы получим

$$p^C_{ab,a'b'}(x) = \sum_{x_1\in X_1} \sum_{x_2\in X_2} \alpha(x_1)\,\beta(x_2)\,\sigma^A_{aa'}(x, x_1)\,\sigma^B_{bb'}(x, a, x_2).$$

Для того чтобы увидеть в этой формуле необходимый нам результат, введем в рассмотрение переменную $w = (\bar{x}, x_1, x_2)$, $w \in W = X \times X' \times X''$, и положим

$$P^A(w) = \left(\sigma^A_{aa'}(\bar{x}, x_1)\right) = \left(\sigma^A_{aa'}(w)\right),$$

$$P^B(w, a) \doteq \left(\sigma^B_{bb'}(\bar{x}, a, x_2)\right) = \left(\sigma^B_{bb'}(w, a)\right),$$

$$\alpha(x, w) = \alpha(x_1)\,\beta(x_2)\,\delta_{x\bar{x}},$$

где $w = (\bar{x}, x_1, x_2)$ и $\delta_{x\bar{x}}$ — символ Кронекера. В новых обозначениях получим

$$p^C_{ab,a'b'}(x) = \sum_{w \in W} \alpha(x, w)\,\sigma^A_{aa'}(w)\,\sigma^B_{bb'}(w, a).$$

Таким образом, если $D_A = \langle(\sigma^A_{aa'}(w)),\ w \in W\rangle$, $D_B = \langle(\sigma^B_{bb'}(w, a)),$ $(w, a) \in W \times \mathfrak{A}\rangle$ — ДА, то мы получим, что ДА $D_C(w) = [D_A(w) \circ D_B(w,\ a)]_a$ есть каскадная композиция ДА *A* и ДА *B,* причем ВА *C* есть последовательное соединение управляемого источника *G(x),* определенного системой стохастических векторов-распределений вероятностей $\alpha(x) = (\alpha_{w_1}(x), \ldots, \alpha_{w_k}(x))$ и ДА С.
Пусть теперь ВА *C* представляет собой каскадную композицию ВА $A_1, \ldots, A_n$ $(n > 2)$. Если композиция распадается на параллельные подкомпозиции, то число подавтоматов в подкомпозициях будет меньше *n,* поэтому мы получим параллельную декомпозицию ВА *C* в подавтоматы $B_1, \ldots, B_m$ $(m < n)$, для каждого из которых теорема верна. Если *G,(x)* — управляемый источник ВА B_i $(i = 1, \ldots, m)$, то параллельная композиция всех источников $G_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ в один источник $G_c(x)$ дает результат теоремы для ВА *C,* поскольку параллельная композиция D_{B_i} $(i = 1, \ldots, m)$ задает требуемую порождающую каскадную композицию ДА для ВА *C.* Если композиция ВА $A_1, \ldots, A_n$ последовательная, то пусть $A_1 = A$— первый подавтомат со стороны входа ВА *C* и ВА *B* есть каскадная композиция остальных автоматов $A_2, A_3, \ldots, A_n$. Для каскадной композиции ВА *C,* как композиции автоматов А и *B,* теорема верна. Верна она по индукционному предположению и для ВА В. Если ДА D_c есть результат каскадной композиции ДА D_A и ДА D_B, где D_B есть порождающая каскадная композиция для ВА *B,* то ДА D_c есть порождающая каскадная композиция для ВА *C.*

Следствие 2. *Для того чтобы ВА A был простым, необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде последовательного соединения управляемого источника* $G_A(x)$ *и простого ДА* D_A.

Доказательство. Пусть ВА А представим в виде указанного последовательного соединения G_A и D_A. Допустим, что существует каскадное соединение ВА С, накрывающее ВА А. Тогда существует и такое каскадное соединение ВА С′, накрывающее ВА А, которое представляет собой последовательное соединение управляемого источника G_A и некоторой каскадной композиции ДА D'_c. Тогда по

лемме 1 последняя каскадная композиция D'_c накрывает ДА D_A, который по предположению является простым. Обратно, пусть ВА А является простым, но представимым в виде последовательного соединения управляемого источника и некоторой каскадной композиции ДА. В этом случае он представим в виде каскадной композиции ВА, порожденной каскадной композицией ДА.
Таким образом, каждый конечный ВА представим в виде каскадной композиции с расщеплением состояний простых ВА.

7.3. Декомпозиция с выделением случайности. Задача синтеза имплицирующего вектора

Рассматриваемый в этом параграфе подход к декомпозиции конечного ВА основан на локализации источника случайности и представлении ВА в виде последовательного соединения управляемого источника случайных кодов и подходящего конечного ДА. Теорема о возможности такой декомпозиции была доказана еще в гл. 1 (теорема 1.2.3). В этом параграфе мы более детально рассмотрим такую задачу, обратившись к проблеме синтеза имплицирующего вектора. Из доказательства теоремы 1.2.3 видно, что основным моментом, определяющим возможность и алгоритм синтеза КВА $A = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \mu(a',\ y/a,\ x)\rangle$ в виде последовательного соединения управляемого источника случайных кодов и ДА является существование случайного кода, имплицирующего каждый случайный код из конечного семейства случайных кодов
$\{\zeta_{a,x},\ a\in\mathfrak{A},\ x\in X\}$, (1)
где $p(\zeta_{a,x}=(a',\ y))=\mu(a',\ y/a,\ x),\ a\in\mathfrak{A},\ x\in X.$ Последняя же задача сводится к задаче синтеза имплицирующего вектора **q** для конечной системы стохастических векторов, определяющих распределения вероятностей каждого случайного кода семейства (1): $\Sigma_A=\{\mathbf{p}_{a,x},\ a\in\mathfrak{A},\ x\in X\}$, где

$$\mathbf{p}_{a,x}=(\mu(a_1,\ y_1/a,\ x),\ \mu(a_2,\ y_1/a,\ x),\ \ldots,\ \mu(a_k,\ y_m/a,\ x)) \quad \mathbf{(2)}$$

— условное распределение вероятностей $\mu(a',\ y/a,\ x)$, записанное в развернутом виде как стохастический вектор $\mathbf{p}_{a,x}$. Имплицирующий вектор для конечного семейства стохастических векторов с конечным числом ненулевых координат всегда существует, как это следует из леммы 1.2.2, причем он определяется не единственным способом. Действительно, если стохастический вектор **q** имплицирует семейство стохастических векторов ∑, то любой стохастический вектор **q**', имплицирующий вектор **q**, имплицирует и все семейсхво векторов ∑. Таким образом, задача построения для данного конечного семейства стохастических векторов $\sum$ имплицирующего вектора с заданными свойствами является содержательной. В частности, имеет смысл строить имплицирующий вектор с минимально возможным числом ненулевых компонент — *минимальный имплицирующий вектор* семейства стохастических векторов $\sum$.

Задача нахождения минимального имплицирующего вектора для конечного семейства стохастических векторов, несмотря на кажущуюся простоту, до настоящего времени не имеет точного решения. Существуют естественные алгоритмы, не содержащие перебора и, вообще говоря, не дающие минимального решения. Одним из таких способов является способ разложения стохастической матрицы в выпуклую линейную комбинацию простых матриц, описанный при доказательстве теоремы 1.2.4. В том, что этот алгоритм может не приводить к минимальному решению, убеждает следующий пример стохастической матрицы:

$$A = \frac{1}{10926}\begin{pmatrix} 8705 & 2057 & 129 & 35 \\ 8195 & 2081 & 513 & 137 \\ 8321 & 2049 & 545 & 11 \\ 8021 & 2051 & 641 & 33 \end{pmatrix}.$$

Упомянутый разностный алгоритм дает решение в виде стохастического вектора, содержащего девять ненулевых координат, тогда как стохастический вектор

$$\mathbf{q} = \frac{1}{10926}(8192{,}5\ \ 2048{,}5\ \ 512{,}5\ \ 128{,}5\ \ 32{,}5\ \ 8{,}5\ \ 2{,}5\ \ 0{,}5)$$

имплицирует каждую строчку стохастической матрицы A и имеет восемь ненулевых координат.

По-видимому, не существует алгоритма, который бы вычислял минимальный имплицирующий вектор для произвольного конечного семейства стохастических векторов и совершенно не содержал бы перебора. Тем не менее верна следующая

Теорема 1. *Задача вычисления минимального имплицирующего вектора для конечного семейства стохастических векторов с конечным числом ненулевых координат алгоритмически разрешима. Если семейство содержит n векторов соответственно с* $k_1, \ldots, k_n$ *ненулевыми координатами, то объем перебора не превышает* $C_k^{k_0} + C_k^{k_0+1} + \ldots + C_k^{k^0}$ *операций, где*

$$k = k_1 \cdot \ldots \cdot k_n,\ \ k_0 = \max_i k_i,\ \ k^0 = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Доказательство. Пусть система стохастических векторов задана в виде $\Sigma = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, где число ненулевых координат вектора $\mathbf{p}_i$ равно k_i. Минимальный имплицирующий вектор не зависит от нулевых координат имплицирующих векторов, поэтому без потери общности можно считать, что каждый вектор системы ∑ имеет только ненулевые координаты и, следовательно, имеет длину k_i. Обозначим искомый имплицирующий вектор как

$$\mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_m), \quad \max_i k_i \leqslant m \leqslant \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

По определению импликации для каждого вектора $\mathbf{p}_i$ должна существовать стохастическая матрица H_i размерности $n \times k_i$, состоящая из нулей и единиц такая, что

$$\mathbf{q}H_i = \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \ldots, n. \quad (3)$$

Составим вместе все векторы $\mathbf{p}_i$ и обозначим через $\mathbf{p}^*$ составной вектор $\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n)$. Одновременно составим вместе все матрицы H_i и составную матрицу обозначим через $H = (H_1 \ldots H_n)$. Теперь система условий (3) может быть записана в виде одного матричного условия

$$\mathbf{q}H = \mathbf{p}^*. \quad (4)$$

Лемма 1. *Если стохастический вектор* **q** *есть минимальный имплицирующий вектор системы ∑, то матрица H — матрица полного ранга.*

Доказательство. Так как

$$m \leqslant \sum_{1}^{n} k_i,$$

то матрица H имеет строк не более, чем столбцов. Если матрица H — матрица полного ранга, значит, все ее строки линейно независимы. Предположим противное. Пусть какая-либо строка, например, первая, линейно зависит от остальных ее строк. Заметим, что строки матрицы H — это векторы, определяющие некоторые вершины m-мерного единичного куба. Если какая-либо из вершин единичного куба зависит от других вершин, то это означает, что она совпадает с одной из этих вершин. Допустим, первая строка совпадает с i-й строкой. Однако в этом случае соответствующие координаты имплицирующего вектора **q** будут вместе входить в суммы, образующие координаты стохастических векторов для любого семейства ∑. Таким образом, первая строка матрицы Н может быть исключена, а i-я координата имплицирующего вектора заменена на сумму $q_1 + q_i$. В итоге получим имплицирующий вектор семейства ∑ с числом координат на единицу меньшим, чем у вектора **q.**

Для того чтобы при заданной матрице H система линейных уравнений (3) имела решение относительно вектора **q**, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\widetilde{H} = \begin{pmatrix} H \\ \mathbf{p}^* \end{pmatrix}$ имела тот же ранг, что и матрица H. Таким образом, решение задачи построения имплицирующего вектора сводится к следующему.

1. Обозначим через $\mathscr{K}$ множество таких вершин k^0-мерного единичного гиперкуба, $k^0 = \sum_1^n k_i$,которые описываются координатными векторами, содержащими росно n единиц. Если координаты векторов, соответствующих этим вершинам, перенумеровать при помощи двойной индексации:

$$\mathscr{K} \to \mathbf{t} = (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1k}, \ldots, \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{ik_i}, \ldots, \sigma_{nk_n}),$$

где первый индекс соответствует области координат i-го вектора $\mathbf{p}_i$ в векторе $\mathbf{p}^*$, то среди координат $\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \ldots, \sigma_{ik_i}$ имеется одна и в точности одна единичная координата для каждого номера $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, общее число таких различных векторов равно $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = k$.

2. В множестве вершин $\mathscr{K}$ необходимо выбрать такое наименьшее множество вершин $\mathscr{L}$, чтобы вектор $\mathbf{p}^*$, расположенный, вообще говоря, внутри k^0-мерного гиперкуба, принадлежал линейной оболочке, натянутой на множество $\mathscr{L}$.

3. Если такое наименьшее множество вершин $\mathscr{L}$ построено, то обозначим через H матрицу, составленную из перечня вершин множества $\mathscr{L}$. Для данной матрицы H система линейных уравнений (4) будет иметь решение $\mathbf{q}$, причем это решение есть минимальный имплицирующий вектор множества стохастических векторов $\sum$.

Объем переборных операций нетрудно оценить. Действительно, необходимо проверить условие 2 для каждой группы вершин из множества $\mathscr{K}$, начиная с k_0 вершин, где $k_0 = \max_i k_i$ и, в самом неблагоприятном случае, вплоть до k^0 вершин. Это число равно $C_K^{k_0} + \ldots + C_K^{k^0}$.

Возможен иной подход к задаче существования имплицирующего вектора, который позволяет рассматривать ее как проблему конечной порожденности некоторой алгебры, определенной специальным образом. Прежде чем ввести в рассмотрение такие алгебры, получим некоторые формулы детерминированного преобразования случайных кодов.

Пусть $\Sigma = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$— конечное семейство случайных кодов, каждый из которых принимает значения 0 или 1 соответственно с вероятностями p_i^0 и p_i^1, $i = 1, \ldots, n$,и

$$y = f(x_1, \ldots, x_n) \quad (5)$$

— произвольная функция алгебры логики P_2. Если предположить, что случайные коды ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, являются аргументами функции (5), то сама функция определит некоторый случайный код η, значения которого имеют вероятности, вычисляемые по формуле

$$\mathsf{P}(\eta = 1) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} \mathsf{P}(\xi_1 = \sigma_1, \ldots, \xi_n = \sigma_n)\, f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \quad (6)$$

Если случайные коды семейства ∑ взаимно независимы, то формула (6) приобретает вид

$$\mathsf{P}(\eta = 1) = \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} p_1^{\sigma_1} \ldots p_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n). \quad \textbf{(7)}$$

В последующем удобно использовать специальное обозначение для суммы (7)

$$\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n} p_1^{\sigma_1} \ldots p_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f^*(p_1, \ldots, p_n). \quad (8)$$

Пусть F — подмножество множества P_2 функций алгебры логики. Обозначим через $[F]$ алгебраическое замыкание F. Пусть ∑ — семейство случайных кодов, принимающих только два значения 0 или 1.

Определение 1. Семейство случайных кодов $[\Sigma]_F$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\Sigma \subseteq [\Sigma]_F$;

2) *если* $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$ *и* $\xi_i \in [\Sigma]_F$, $i = 1, \ldots, n$, *то* $f(\xi_1, \ldots \ldots, \xi_n) \in [\Sigma]_F$;

называется *алгебраическим замыканием* ∑ *(относительно сигнатуры F).*

Семейство $[\Sigma]_F$ вместе с сигнатурой F называется *алгеброй случайных кодов* и обозначается $\langle [\Sigma]_F, F\rangle$.

Положим $\mathscr{P}(\Sigma) = \{\mathsf{P}(\xi = 1), \xi \in \Sigma\}$. Введем на множестве $[\Sigma]_F$ отношение эквивалентности ρ, полагая, что $\xi_1 \rho \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}(\xi_1 = 1) = \mathsf{P}(\xi_2 = 1)$. Рассмотрим разбиение $[\Sigma]_F$ на классы эквивалентности Z_p, $p \in \mathscr{P}([\Sigma]_F)$ по отношению ρ. Будем исследовать задачу выделения таких конечных множеств $B \subseteq \mathscr{P}([\Sigma]_F)$, что множество случайных кодов $\left[\bigcup_{p\in B} z_p\right]_F$ содержит по меньшей мере по одному случайному коду из каждого класса Z_q, $q \in \mathscr{P}([\Sigma]_F)$. Содержательно это означает возможность синтеза источника случайных кодов с выходом η, $\mathsf{P}(\eta = 1) = q$ для любого $q \in \mathscr{P}([\Sigma]_F)$, при наличии запаса источников случайных кодов с выходами ξ, $\mathsf{P}(\xi = 1) \in B$, и множества детерминированных преобразователей, реализующих функции из [F].

Наложим следующие требования на семейство ∑.

A. Все случайные коды в $\sum$ взаимно независимы.
B. Если семейство $\sum$ содержит случайный код ξ, то возможно использование неограниченного числа копий этого случайного кода, взаимно независимых от данного случайного кода ξ и между собой.

Пусть $\mathscr{P}$ — подмножество интервала (0, 1) и F^* — семейство полилинейных функций типа (8), порожденных функциями алгебры логики из F.

Определение 2. Множество чисел $[\mathscr{P}]_{F^*} \subseteq (0, 1)$, удовлетворяющее условиям

1) $\mathscr{P} \subseteq [\mathscr{P}]_{F^*}$,

2) если $\breve{p}_i \in [\mathscr{P}]_{F^*}$, $i = 1, \ldots, n$, и $f^*(p_1, \ldots, p_n) \in F^*$, то $f^*(\breve{p}_1, \ldots, \breve{p}_n) \in [\mathscr{P}]_{F^*}$, где $f^*(p_1, \ldots, p_n)$ вычисляется по формуле (8), называется *функциональным замыканием* $\mathscr{P}$ *(относительно семейства F*).*

Множество чисел $[\mathscr{P}]_{F^*}$ вместе с определенной на нем системой полилинейных функций F^* обозначается $\langle[\mathscr{P}]_{F^*}, F^*\rangle$ и называется *алгеброй распределений с сигнатурой F*.*

Между алгебрами $\langle[\Sigma]_F, F\rangle$ и $\langle[\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F^*]}, [F]^*\rangle$ существует тесная связь, которую выражает

Теорема 2. *Для произвольного семейства случайных кодов, принимающих значения* 0, 1 *и удовлетворяющих условиям A и B, и произвольного семейства F функций алгебры логики верно равенство*

$$[\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F]^*} = \mathscr{P}([\Sigma]_F).$$

Доказательство. Пусть $\eta \in [\Sigma]_F$. Это означает, что или $\eta \in \Sigma$ и $\mathsf{P}(\eta = 1) \in [\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F]^*}$, или случайный код η реализуется формулой Ф от базисных функций $f \in F$ и случайных кодов $\xi_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$. Заменяя в формуле Ф случайные коды ξ_i на переменные $\varkappa_i$, получим формулу $Ф_1$, реализующую некоторую функцию $g \in [F]$. Легко видеть, что $g^*(\mathsf{P}(\xi_1 = 1), \ldots$ $\ldots, \mathsf{P}(\xi_n = 1)) = \mathsf{P}(\eta = 1)$. Ввиду произвольности выбора случайного кода η получаем $\mathscr{P}([\Sigma]_F) \subseteq [\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F]^*}$.

Обратно, пусть $q \in [\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F]^*}$. Тогда или $q \in \mathscr{P}(\Sigma)$ и существует случайный код $\eta \in [\Sigma]_F$, такой, что $\mathsf{P}(\eta = 1) = q$, или число q представимо в виде результата вычисления формулы $Ф_2$ из функций f^*, $f \in [F]$ и p_i из $\mathscr{P}(\Sigma)$, $i = 1, \ldots, m$. Заменим в формуле $Ф_2$ каждое вхождение терма f^* на f, а j-му вхождению переменной p_i поставим в соответствие переменную $\varkappa_{ji}$. Во вновь полученной формуле $Ф_3$, заменяя каждое вхождение переменной $\varkappa_{ji}$ на взаимно независимые случайные коды $\xi_{ji} \in \Sigma$,

$\mathsf{P}(\xi_{ji}=1)=p_i,\ j=1,\ \ldots,$ получим формулу, реализующую случайный код η, $\mathsf{P}(\eta=1)=q$. Поскольку функция *f* представима в виде суперпозиции функций из системы *F*, имеем $\eta\in[\Sigma]_F$.
Следовательно, $[\mathscr{P}(\Sigma)]_{[F]^*}\subseteq\mathscr{P}([\Sigma]_F)$.
Из теоремы 2 следует, что если семейство функций *F* замкнуто, то для любого числового множества $B\subset[0,\ 1]$, порождающего алгебру распределений $\langle G,\ F^*\rangle$, найдется множество случайных кодов ∑ такое, что $\mathscr{P}(\Sigma)=B$ и $\mathscr{P}([\Sigma]_F)=G$, и обратно, для любого множества случайных кодов ∑, порождающего алгебру случайных кодов $\langle\Xi,\ F\rangle$, множество $B=\mathscr{P}(\Sigma)$ будет порождающим множеством для алгебры распределений $\langle G,\ F^*\rangle$, где $G=\mathscr{P}(\Xi)$. В этом смысле можно говорить об эквивалентности решения задачи полноты в алгебрах $\langle[\Sigma]_F,\ F\rangle$ и $\langle[\mathscr{P}(\Sigma)]_{F^*},F^*\rangle$ при условии $F=[F]$. В случае, когда $F\neq[F]$, будет иметь место включение
$[\mathscr{P}(\Sigma)]_F\subseteq\mathscr{P}([\Sigma]_F)$.
Нас интересует проблема конечной порожденности алгебр распределений. Из мощностных соображений ясно, что если алгебра распределений $\langle G,\ F^*\rangle$, $F\subseteq P_2$, является конечно-порожденной, то множество *G* не более чем счетно. Таким образом, естественно ограничить класс рассматриваемых алгебр такими, где множества *G* являются подмножествами множества рациональных чисел из интервала (0, 1).
Обозначим через *B* множество всех рациональных точек интервала (0, 1).
Пусть $r_i,\ i=1,\ \ldots,\ t,$— простые числа, $1<r_1<\ldots<r_t$. Введем в рассмотрение следующие обозначения числовых множеств:

$$R(r)=\{j:\ 1\leqslant j<r,\ (j,\ r)=1\},\quad (9)$$

$$G(r_1,\ldots,r_t)=$$
$$=\left\{\frac{j}{r_1^{\varphi_1}\ldots r_t^{\varphi_t}}:j\in R\left(r_1^{\varphi_1}\ldots r_t^{\varphi_t}\right),\ \varphi_i\geqslant 0,\ i=1,\ldots,t,\ \sum_{i=1}^{t}\varphi_i\geqslant 1\right\},\quad (10)$$

$$G_1(r_1,\ \ldots,\ r_t)=G(r_1,\ \ldots,\ r_t)\cup\{0,\ 1\}.\quad (11)$$

Замечание 1. Если $\mathscr{P}$—система образующих для алгебры распределений $\langle G(r_1,\ldots,r_t),F^*\rangle$, то для любого i, $1\leqslant i\leqslant t$, она содержит рациональное число вида $k_i/(r_il_i)$, где k_i, l_i — целые. Доказательство непосредственно следует из анализа формулы (7).
Теорема 3. *Алгебры распределений* $\langle B,\ F^*\rangle$, $F\subseteq P_2$, *не имеют конечной системы образующих.*
Доказательство. Поскольку из условия $F_1\subseteq F_2$ следует

$$[\mathscr{P}]_{F_1^*} \subseteq [\mathscr{P}]_{F_2^*},$$

теорему достаточно доказать для случая $F = P_2$. Будем доказывать от противного. Пусть $Q = \{q_1, \ldots, q_s\}$ является конечной системой образующих для алгебры $\langle B, P_2^* \rangle$. Тогда для любого числа $q \in B$ должна найтись функция $f \in P_2$ такая, что

$q = f^*(p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \in Q$. Из замечания 1 видно, что для любого простого числа r в множестве Q должно найтись рациональное число вида k/rl, где k и l — целые. Однако это невозможно ввиду бесконечности множества всех простых чисел.

В качестве следующего шага, приближающего нас к описанию максимальной конечно-порожденной подалгебры распределений в алгебре рациональных распределений, рассмотрим алгебры типа $\langle G(r_1, \ldots, r_k), F\rangle$, $F \subseteq \bar{P}_2$. Исследуем этот вопрос вначале для случая алгебр вида $\langle G(r), F\rangle$, где r — простое число. Обозначим через $\Phi(n)$ класс всех бесповторных формул в монотонном базисе $F = \{\vee, \&\}$, зависящих от n переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция, реализуемая некоторой формулой из класса $\Phi(n)$.

Теорема 4. *Для любого двоично-рационального числа* π, *имеющего* n *значащих цифр в двоичном разложении, существует формула* $\Phi_1 \in \Phi(n)$ *такая, что для функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, *реализуемой этой формулой, выполняется равенство*

$$f^*(1/2, 1/2, \ldots, 1/2) = \pi, \quad (12)$$

и не существует формулы, зависящей от меньшего числа переменных, обладающей тем же свойством.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $\pi = t/2^n$, где $(t, 2) = 1$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n_1})$—функция от n_1 переменных $(n_1 < n)$, реализуемая в классе формул $\Phi(n_1)$. Из формулы 7 видно, что $f^*(1/2, 1/2, \ldots, 1/2) = s/2^{n_1}$, где s — целое, откуда следует справедливость второго утверждения теоремы. Если

$\pi = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $\alpha_n = 1$,

ТО ПОЛОЖИМ

$$\Phi_\pi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \odot \alpha_1(x_2 \odot \alpha_2(\ldots(x_{n-1} \odot \alpha_{n-1} x_n))\ldots), \quad (13)$$

где операция $\odot\alpha_i$ определена как

$$\odot\, \alpha_i \Rightarrow \begin{cases} \&, & \text{если } \alpha_i = 0, \\ \vee, & \text{если } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Покажем индукцией по n, что для функции $f_\pi(x_1, \ldots, x_n)$, реализуемой формулой (13), выполняется (12). Для n=1 утверждение очевидно. Пусть (12) верно для $\pi = 0, \alpha_1 \ldots \alpha_n$. Докажем его для $\pi' = 0, \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Из индукционного предположения следует, что существует функция $f_\pi(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$f_\pi^*(1/2, 1/2, \ldots, 1/2) = \pi$. Поскольку

$$\Phi_{\pi'}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \odot \alpha_0 \Phi_\pi(x_2, \ldots, x_n),$$

то

$$f_{\pi'}^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_\pi^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right), & \text{если } \alpha_0 = 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\left(1 - f_\pi^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)\right), & \text{если } \alpha_0 = 1. \end{cases}$$

Если $\alpha_0 = 0$, то $f_{\pi'}^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi = 0, 0\alpha_1 \ldots \alpha_n$.

Если $\alpha_0 = 1$, то

$$f_{\pi'}^*\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}(1 - \pi) = \frac{1}{2}(1 + \pi) =$$

$$= 0, 1\alpha_1, \ldots, \alpha_n.$$

Следствие 1. *Алгебра* $\langle G(2), F^*\rangle$, *где*

$F = \{\vee, \&\}$,

является конечно-порожденной.

Положим $\mathscr{P}(r) = \{1/r, 2/r, \ldots, (r-1)/r\}$.

Следствие 2.

$$[\mathscr{P}(r)]_{F^*} = G(2), \quad [\mathscr{P}(3)]_{F^*} = G(3).$$

Доказательства предлагаются в качестве упражнений.

В общем случае для простых чисел $r > 3$ соотношения типа следствия 2 уже не выполняются.

Вопрос о конечной порожденности алгебр $\langle G(r), F^*\rangle$ для монотонного базиса $F = \langle \vee, \&\rangle$ и простого числа $r \geqslant 5$ остается открытым. Однако в предельном случае, когда $F = P_2$, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть* $r \geqslant 2$ *— простре число. Тогда*

$$[\mathscr{P}(r)]_{P_2^*} = G_1(r).$$

Доказательство. Для r = 2, 3 теорема является следствием теоремы 3. Поэтому можно полагать, что $r \geqslant 5$. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, проведем некоторые вспомогательные построения. Рассмотрим формулу (7) при условии, что

$p_i = \mathsf{P}(\xi_i = 1) = s_i/r$, $s_i \in R(r)$, $i = 1, \ldots, n$.... Если

$f^*(p_1, \ldots, p_n) = s/r^n$, то разложение (7) эквивалентно разложению

$$s = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} s_1^{\alpha_1} \ldots s_n^{\alpha_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{14}$$

где положено

$$s_i^{\alpha_i} = \begin{cases} s_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ r - s_i, & \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Пусть имеется некоторое произвольное представление числа $s \in R(r^n)$ в форме

$$s = \sum_{i=1}^{M} j_{1i} \dots j_{ni}, \quad (15)$$

где $j_{mi} \in \mathcal{J}_m$, $\mathcal{J}_m \subseteq R(r)$, $m = 1, \dots, n$. Покажем, как, используя разложение (5) для некоторого целого $l \geqslant 1$, построить разложение числа sr^l в виде (14). Пусть для любого целого $d \leqslant [r/2]$ $N_i(d)$ обозначает количество чисел j_{ti}, равных *d* или $r - d$, $1 \leqslant t \leqslant n$, и пусть $N(d) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant M} N_i(d)$. Обозначим через *N* число

$$N = \sum_{d=1}^{[r/2]} N(d), \quad (16)$$

где через $[x]$ обозначается целая часть числа *x.* Теперь из чисел j_{mi}, $1 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant M$, и символа $\varnothing$ построим $M \times N$-матрицу *B(s)* следующим образом.

Первая строка матрицы *B(s)* имеет вид

$j_{11}, j_{21}, \dots, j_{n-1}, \varnothing, \varnothing, \dots, \varnothing.$

Предположим, что уже построепы *l* — 1 строк, $2 \leqslant l \leqslant M$. Рассмотрим *l-й* член в сумме (15). Пусть для некоторого t, $1 \leqslant t \leqslant n$, $j_{tl} \in \{d, r - d\}$. Тогда в строках с номерами от 1 до *l—1* будем искать первый по порядку столбец с номером z, в котором встречаются по меньшей мере одно число из множества $\{d, r - d\}$ и элемент $b_{l,z}$ не определен. Если такой столбец найдется, то полагаем $b_{l,z} = j_{tl}$, если же нет, то выбираем первый столбец с номером z_1 такой, что $b_{i,z_1} = \varnothing, 1 \leqslant i \leqslant l - 1$, и элемент $b_{l,z}$ не определен, и полагаем $b_{l,z} = j_{tl}$. В силу выбора числа *N* такой столбец обязательно найдется. После размещения всех чисел j_{tl}, $t = 1, 2, \dots, n$, все оставшиеся не определенными элементы *i*-й строки матрицы *B(s)* полагаем равными $\varnothing$. В результате перестановки элементов тех строк матрицы *B(s),* которые принадлежат одному множеству $\{d, r - d\}$, мы получаем класс матриц типа $B_1(s)$, который обозначим $\mathfrak{B}(s)$.

Лемма 2. *Пусть натуральное число s имеет разложение* (15)*. Для того чтобы число* sr^{N-r}, *где N равно* (16)*, было представило в виде разложения* (14)*, где* $f(x_1, \dots, x_n)$ *— некоторая функция алгебры логики, достаточно, чтобы в множестве* $\mathfrak{B}(s)$ *существовала такая*

матрица В, у которой для произвольной пары строк с номерами i_1 *и* i_2 *найдется столбец с номером j такой, что* $b_{i_1,j} = r - b_{i_2 j}$.
Доказательство. Пусть матрица *В* существует. Из условия леммы следует, что все ее строки различны. Если для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant M$, выполняется неравенство $N_i(\alpha) < N(\alpha)$, то в разложении (15) домножим слагаемое с номером *i* на произведение $\prod_{\alpha=1}^{[r/2]} (\alpha + (r-\alpha))^{N(\alpha)-N_i(\alpha)}$. В результате получим разложение

$$sr^{N-n} = \sum_{i=1}^{M} j_{1i} \ldots j_{ni} \prod_{\alpha=1}^{[r/2]} (\alpha + (r-\alpha))^{N(\alpha)-N_i(\alpha)}. \quad (17)$$

Разложение (17) содержит $M2^{N-n}$ слагаемых. Покажем, что переставляя должным образом сомножители в слагаемых разложения (17), можно получить разложение типа (14). С этой целью введем нумерацию сомножителей. Рассмотрим *l*-й член разложения (17)

$$j_{1l} \ldots j_{nl} \prod_{\alpha=1}^{[r/2]} (\alpha + (r-\alpha))^{N(\alpha)-N_l(\alpha)}. \quad (18)$$

Для каждого l, $1 \leqslant l \leqslant M$, зафиксируем за элементами j_{ml}, $m = 1, \ldots, n$, номера столбцов, которые они имеют в матрице *В.* Выполним следующую процедуру: если для некоторого *d* выполняется соотношение $N(d) > N_l(d)$, выберем в *l*-й строке матрицы *В* $N(\alpha) - N_l(\alpha)$ элементов $b_{l,t} = \varnothing$ таких, что в столбцах с номерами *t* встречаются лишь элементы из множества $\{d, r-d\}$. Обозначим множество таких номеров через *T(d).* Тогда элементы *d или r — d,* встречающиеся в разложении (18) и отличные от j_{ml}, $1 \leqslant m \leqslant n$, получают последовательно номера *t* из множества *T(d).* Проделывая вышеуказанную процедуру для каждого числа d, $1 \leqslant d \leqslant [r/2]$, получим полную нумерацию сомножителей в разложении (18).
Если расположить сомножители каждого слагаемого (18) в разложении (17) в порядке указанной нумерации, то получается разложение типа (14). В самом деле, пусть в новой нумерации *k*-й член разложения (17) имеет вид $z_1 \ldots z_N$. Построим двоичный набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, полагая

$$\alpha_i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad z_i \leqslant [r/2], \\ 1, & \text{если} \quad z_i > [r/2]. \end{cases}$$

Обозначим через *d* множество таких наборов $\tilde{\alpha}$, которые соответствуют разложению (18). Очевидно, что каждое множество C_l $(l = 1, \ldots, M)$ содержит 2^{N-n} различных наборов. Поскольку в матрице *В* для любой пары строк i_1 и i_2 найдется столбец *j* такой, что $b_{i_1 j} = r - b_{i_2 j}$, то $C_i \prod_{i \neq j} C_j = \varnothing$. Поэтому, если положить значения логической функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ равными единице на наборах множества $\bigcup_{j=1}^{M} C_j$ и только на них, то получим разложение

$$sr^{N-n} = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_N} z_1^{\alpha_1} \ldots z_N^{\alpha_N} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_N). \qquad (19)$$

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 5. Нам достаточно показать, что для любого номера $n > 1$ и $j \in R(r^n)$ существует функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq n$, такая, что

$$f^*(p_1, \ldots, p_m) = j/r^n \quad (20)$$

для $p_i \in \mathscr{P}(r)$. Поскольку функция $f(x) = \bar{x}$ принадлежит P_2, то достаточно показать это для $n > 1$ и $1 \leqslant j \leqslant [r^n/2]$. Положим $A(r) = \{0, 1, \ldots, r-2\}$. Построим разложение числа j, подобное (15), пользуясь следующими алгоритмами.

Алгоритм 1. Пусть $(r-1)^n > j$. Представляя число j в системе счисления с основанием (r— 1), получим

$$j = \sum_{i=1}^{n} (r-1)^{n-i} 1^i a_i,$$

где $a_i \in A(r)$, $i = 1, \ldots, n$. Составим матрицу $B(j)$ для слагаемых с $a_i > 0$. Очевидно, матрица $B(j)$ удовлетворяет условиям леммы1, поэтому существует функция алгебры логики $f(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что

$$jr^{N-n} = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} j_1^{\alpha_1} \ldots j_N^{\alpha_N} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \qquad (21)$$

где $j_i \in R(r)$. Поделив обе части соотношения (21) на r^N и полагая $p_i = j_i/r$, получим

$$j/r^n = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_N} p_1^{\alpha_1} \ldots p_N^{\alpha_N} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_N),$$

где

$$p_i^{\alpha_i} = \begin{cases} p_i, & \text{если } \alpha_i = 1, \\ 1 - p_i, & \text{если } \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Алгоритм 2. Пусть $(r-1)^n \leqslant j$. Тогда алгоритм развертывается так.
Шаг 0. Вычисляется $j_1 = j - (r-1)^n$. Переход к шагу 1.
Шаг t $(1 \leqslant t < n)$. Если $j_t \geqslant (r-1)^{n-t}$, то полагаем $z_t = [j_t/(r-1)^{n-t}]$. Если $z_t \geqslant C_n^t$, то полагаем $j_{t+1} = j_t - C_n^t (r-t)^{n-t}$, переход к шагу ($n$+1). Если $z_t < C_n^t$,

то полагаем $j_{t+1} = j_t - z_t(r-1)^{n-t}$, дереход к шагу ($n$+1). Если $j_t < (r-1)^{n-t}$, то переход к шагу (n + l).

Шаг n. Перейти к шагу (n+ 1).

Шаг n+1. К оставшемуся числу j_m применить алгоритм для случая 1.

Поскольку

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_n^j (r-1)^{n-j} > r^n/2,$$

то для любого числа $j < r^n/2$ алгоритм на некотором шаге m перейдет к шагу n + 1, где и завершит свою работу.

При условии, что алгоритм перешел к шагу (n+1) на такте m, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, получим разложение

$$j = \sum_{j=0}^{m-1} C_n^j (r-1)^{n-j} + z_m (r-1)^{n-m} + \sum_{j=m+1}^{n} (r-1)^{n-j} a_j, \qquad (22)$$

где $0 \leqslant z_m < l_n^m$, $0 \leqslant a_i < r-1$, $i = m+1, \; n$. При составлении матрицы $B(j)$ в этом случае необходимо следить за тем, чтобы ее строки удовлетворяли условию леммы 1. Например, n строк, соответствующих второму члену разложения (22), можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} r-1 & r-1 & \dots & r-1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ r-1 & r-1 & \dots & 1 & r-1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r-1 & 1 & \dots & r-1 & r-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & r-1 & \dots & r-1 & r-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

При таком построении все строки матрицы $B(j)$ будут удовлетворять условиям леммы 1, после применения которой мы получим искомое разложение.

Следствие 3. *Алгебры распределений* $\langle C_1(r), P_2^* \rangle$ *для любого простого числа* $r \geqslant 2$ *являются конечно-порожденными.*

Рассмотрим пример синтеза функции f.

Пусть $r = 7$, $n = 3$, $j = 157$. Применяя алгоритм 1, получим разложение

$$j = 157 = 6 \times 6 \times 4 \times 6 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1.$$

Имеем $M = 3$, $N_1(1) = N_2(1) = 2$, $N_3(1) = 3$, откуда N(1) = 3. Аналогично $N(2) = N(3)$ — 1. Следовательно, $N = 5$, и матрица B (157) имеет вид

$$B(157) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Домножая первый член разложения на (6+1) (2 + 5), второй на (6 + 1) (3 + 7) и третий —на (2 + 5) (3 + 4), получим

$$j7^2 = 6\times6\times4\times(2+5)\times(6+1)+6\times1\times(4+3)\times2\times(6+1)+ \\ +1\times1\times(3+4)\times(2+5)\times1.$$

Множество наборов, на которых функция $f(x_1, \ldots, x_5)$ принимает значение единица, будет выглядеть следующим образом:

$$C_1 = \{(11100), (11101), (11110), (11111)\},$$

$$C_2 = \{(100000), (10100), (10001), (10101)\},$$

$$C_3 = \{(00000), (00010), (00100), (00110)\}.$$

Обобщим следствие 3 на алгебру $\langle G_1(r_1, \ldots, r_t); P_2\rangle$, где *r*, — простые числа.

Следствие 4. *Пусть* $r \geqslant 2$ *— простое число,* r_i *— простые числа, отличные от* r, $i = 1, t$. *Тогда*

$$[T_r \cup G_1(r_1, \ldots, r_t)]_{P_2} = G_1(r, r_1, \ldots, r_t).$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $n \geqslant 1$, любых $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, t$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \geqslant 1$, и любого $j \in R\left(r^n, r_1^{\alpha_1}, \ldots, r_t^{\alpha_t}\right)$ существует функция $f(x_1, \ldots, x_m) \in P_2$ такая, что при $p_i \in T_r \cup G(r_1, \ldots, r_t)$ выполняется соотношение

$$f^*(p_1, \ldots, p_m) = \frac{j}{r^n r_1^{\alpha_1} \ldots r_t^{\alpha_t}}. \quad (23)$$

Поскольку функция $f(x) = \bar{x}$ лежит в P_2, то утверждение (23) достаточно доказать для $j \leqslant r^n r_1^{\alpha_1} \ldots r_t^{\alpha_t}/2$. Положим $A(r) = \{0, 1, \ldots, r-2\}$. Зафиксируем числа n, α_i, $i = 1, \ldots, t$, и j. Обозначим $r_1^{\alpha_1} \ldots r_t^{\alpha_t}$ через *m*. Пусть $(r-1)^n m > j$.

Алгоритм 3. Разлагая число $[j/m]$ в (*r*—1)-ичной системе счисления, будем иметь $[j/m] = \sum_{i=1}^{n} a_i (r-1)^{n-i}$, где $a_i \in A(r)$.

Обозначив через a_{n+1} число $j - m[j/m]$, получим

$$j = m \sum_{i=1}^{n} (r-1)^{n-1} a_i + a_{n+1}.$$

Поскольку $(j, m) = 1$, то $(a_{n+1}, m) = 1$. Представляя *m* в виде $m = a_{n+1} + m - a_{n+1}$, будем иметь

$$j = \sum_{i=1}^{n-1} (r-1)^{n-i} a_i a_{n+1} + (a_n + 1) a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (r-1)^{n-i} a_i (m - a_{n+1}).$$

Матрица *B(j),* построенная по данному разложению, удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому существует функция $f(x_1, \ldots, x_N) \in P_2,$ для которой справедливо разложение

$$jr^{N-n-1} = \sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N} j_1^{\alpha_1} \ldots j_N^{\alpha_N} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_N), \quad (24)$$

где $j_i \in R(r),\ \ i = 1,\ \ldots,\ N-1,\ \ j_N \in R(m).$ Поделив обе части (24) на $r^{N-1}m,$ получим требуемое разложение.

Если $(r-1)^r m \leqslant j,$ то для разложения числа *j* необходимо воспользоваться алгоритмом 4, который строится аналогично алгоритму 2 в доказательстве теоремы 5 с учетом особенностей разложения.

Следствие 5. *Алгебра* $\langle G_1(r_1, \ldots, r_l),\ P_2\rangle,$ *где* r_i *— простые числа, является конечно-порожденной.*

Доказательство. Согласно теореме 5 и следствию 4 в качестве системы образующих алгебры $\langle G_1(r_1, \ldots, r_l),\ P_2\rangle$ можно рассматривать систему $\bigcup\limits_{j=1}^{l} T_{rj}.$ *{)*

Дополнительные теоремы.

1. Упорядоченная пара разбиений $(\pi,\ \tau)$ множества состояний ВА *A* называется *парой разбиений,* если для любых блоков π_k и π_r соответственно разбиений π и τ соотношение

$$\sum_{a_j\in\tau_r} p_{ij}(x) = \sum_{a_j\in\tau_r} p_{kj}(x)$$

справедливо для любых состояний $a_i,\ a_k \in \pi_k$ и входного символа $x \in X.$

Тогда верно, что:

1) $(\pi,\ 1)$ и $(0,\ \tau)$ —пары разбиений;

2) если $(\pi,\ \tau)$— пара разбиений, то для $\tau \leqslant \eta\ \ (\pi,\ \eta)$— пара разбиений, а для $\eta \leqslant \pi\ \ (\eta,\ \tau)$—пара разбиений;

3) если $(\pi,\ \tau)$ — пара разбиений, то пары $(\pi,\ \tau + \eta)$ и $(\pi \cdot \eta,\ \tau)$ также образуют пары разбиений;

4) если $(\pi,\ \tau),\ \ (\pi',\ \tau')$— пары разбиений, то пара $(\pi + \pi',\ \tau + \tau')$ есть также пара разбиений.

2. ВА $A = \langle X,\ Y,\ \mathfrak{A},\ \{A(x),\ x \in X\},\ \delta(a,\ x)\rangle$ называется *строго периодическим,* если множество состояний распадается на прямую сумму подмножеств матриц перехода

$$\{A(x)\} = \{A_0(x)\} \cup \{A_1(x)\} \cup \ldots \cup \{A_{\tau-1}(x)\}$$

таким образом, что матрица $A_t(x)$ порядка $n_t \times n_{t+1 (\mathrm{mod}\, \tau)}$ определяет вероятности перехода из состояний множества $\mathfrak{A}_t$ в состояния множества $\mathfrak{A}_{t+1 (\mathrm{mod}\, \tau)}$, при этом детерминированная функция выходов также задается в форме $\delta \doteq \{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\tau-1}\}$, где

$\delta_t: X \times \mathfrak{A}_t \to Y$.

Строго периодический ВА декомпозируем в каскадное соединение детерминированного автономного автомата и ВА .

3. Пусть разбиения π и τ —множества состояний ВА A—удовлетворяют условиям:

1) (π, τ) и (τ, π) образуют пары разбиений;

2) $\pi\tau = 0$ и $0 < \pi, \tau < 1$;

3) π и τ взаимно независимы.

Тогда ВА A декомпозируем в каскадное соединение детерминированного автономного автомата периода 2 и параллельное соединение двух изоморфных ВА.

4. Пусть РВА $A(n, p, e)$ имеет n состояний, p входных букв и вероятности матриц перехода с общим знаменателем e. $E(n, p, e)$— среднее число нетривиальных разбиений множества СОСТОЯНИЙ ВА, обладающих свойством подстановки, а $\beta[A(n, p, e)]$—число нетривиальных разбиений, обладающих свойством подстановки, ВА $A(n, p, e)$.

1) Пусть — $p(n)$ и $e(n)$ целочисленные функции такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)\, e(n)}{\ln n} < 1$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} E(n, p(n), e(n)) = \infty,$$

и для любого целого значения

$k > 0 \quad \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}\{\beta[A(n, p(e), e(n))] \leqslant k\} = 1$;

2) если $p(n)$ и $e(n)$ таковы, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{p(n)\, e(n)} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} E(n, p(n), e(n)) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{P}\{\beta[A(n, p(n), e(n)] \leqslant k\} = 0$.

Содержательный смысл этих двух результатов состоит в том, что если выполнены условия 1), то асимптотически взятый наугад ВА из класса (n, p, e) декомпозируем в последовательно соединенные автоматы. Если выполнены условия 2), то асимптотически для каждого ВА из класса (n, p, e) такая декомпозиция невозможна.

5. Аналогичный результат можно получить для параллельной декомиозируемости:

1) пусть целочисленные функции $p(n)$ и $e(n)$ таковы, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)\,e(n)}{\ln n}=c,\quad 0<c<1,\qquad E(n,\ p(n),\ e(n))$$

— среднее число нетривиальных пар $(\pi_1,\ \pi_2)$ разбиений множества состояний ВА A (n, p, e), одновременно обладающих свойством подстановки, а $\beta[A(n,\ p,\ e)]$—число нетривиальных пар $(\pi_1,\ \pi_2)$ разбиений, имеющих свойство подстановки для выбранного наугад ВА $A(n, p, e)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}E(n, p(n), e(n))=\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\mathscr{P}\,[\beta\,[A(n, p(n), e(n)]\geqslant k]=1$$

2) если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{p(n)\,e(n)}=0$, то

$$\lim_{n\to\infty}E(n, p(n), e(n))=0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty}\mathscr{P}\,[\beta\,[A(n, p(n), e(n))]=0]=1$$

7.4. Алгоритм декомпозиции вероятностных конечных автоматов

Изложим алгоритм декомпозиции вероятностных конечных автоматов, предложенный Рудаковым И. В. и Шляпенко Д. А. *Алгоритм позволяет декомпозировать вероятностный конечный автомат в сеть вероятностных автоматов с меньшим числом состояний. В основе метода лежит общая теорема декомпозиции, модифицированная для применения к вероятностным автоматам. Указаны параметры, характеризующие однозначность разбиения, и предложена система оценки таких параметров.*

Введение

При анализе и проектировании структур сложных дискретных устройств, таких как микропроцессорные и робототехнические системы, системы управления технологическими процессами, комплексные автоматизированные системы, используется блочно-иерархический метод, который предусматривает декомпозицию процесса проектирования на ряд последовательных уровней и сведение задачи большей размерности к совокупности задач значительно меньшей размерности. При таком методе

происходит разбиение исследуемой системы на части, моделирование и проверка работы каждой компоненты.
Случайный характер процессов формирования, обработки и передачи данных в сложных дискретных системах обуславливает необходимость применения стохастических моделей, в качестве которых широко используются модели вероятностных автоматов. При этом встаёт проблема декомпозиции дискретных систем, формализованных подобными схемами. Определим задачу декомпозиции формально.

1. Существующие методы

Задачу структурной декомпозиции вероятностного автомата с детерминированной функцией выходов решил Бэкон. Следуя его методам можно получить последовательную (автоматы сети соединены строго последовательно) или параллельную (автоматы сети соединены строго последовательно) декомпозицию исходного автомата. При этом параллельная структура может быть как синхронной, так и асинхронной. Дальнейшее развитие этого метода описано Бухараевым. В его работе приведено описание декомпозиции вероятностных автоматов с выделением стандартного заданного вероятностного подавтомата. Методы, описанные в работах Бэкона и Бухараева, сводятся к решению системы матричных уравнений. В случае когда система уравнений не имеет решения, декомпозиция не может быть произведена. Это накладывает серьёзные ограничения на исходный вероятностный автомат. Таким образом, эти методы применимы лишь в частных случаях.
Описанный в данной работе метод является обобщением общего алгоритма декомпозиции обычного (не вероятностного) автомата и применим для любого вероятностного автомата. Однако в силу общности структура получаемой сети является более сложной (большее число соединений между компонентами сети), чем в частных случаях, описанных Бэконом и Бухараевым.

2. Постановка задачи

Абстрактный автомат S определяется как кортеж, или вектор, $S = (A,Z,W, \delta, \lambda)$, где:
1) $A = a_1, \dots, a_m, \dots, a_M$ — множество состояний (алфавит состояний);
2) $Z = z_1, \dots, z_f, \dots, z_F$ — множество входных сигналов (входной алфавит);

3) $W = w_1, \ldots, w_m, \ldots, w_M$ — множество выходных сигналов (выходной алфавит);
4) δ: $A \times Z \to A$ — функция переходов, реализующая отображение $D_\delta \subseteq A \times Z$ в A;
5) $\lambda : A \times Z \to W$ — функция выходов, реализующая отображение $D_\lambda \subseteq A \times Z$ в W;
Автомат (A,Z, δ), не имеющий выходов, будем называть полуавтоматом.
Автомат $S' = (A', Z', W', \delta', \lambda')$ называется подавтоматом автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$, если и только если $A' \subseteq A$, $Z' \subseteq Z$, $W' \subseteq W$, а также для любого $a_m \subseteq A'$ и любого $z_f \subseteq Z'$ справедливо
(1) $\delta'(a_m, z_f, p) = \delta(a^m, z^f, p)$
(2) $\delta'(a^m, z_f, p) = \delta(a_m, z_f, p)$
где $p \in [0; 1]$.
Другими словами, на области определения автомата S′ поведение обоих автоматов совпадает. Таким образом, автомат S делает столько же, сколько и S′ , и, быть может, несколько больше.
Автоматы S и S′ называются изоморфными, если существуют три взаимно-однозначных отображения
(3) $\psi_1 : A \to A'$, $\psi_2 : Z \to Z'$, $\psi_3 : W \to W'$,
таких, что

(4) $\psi_1(\delta(a_m, z_f, p)) = \delta'(\psi_1(a_m), \psi_2(z_f), p))$

и

(5) $\psi_3(\lambda(a_m, z_f, p)) = \lambda'(\psi_1(a_m), \psi_2(z_f), p))$

для любых $a_m \in A$ и $z_f \in Z$, где $p \in [0; 1]$.
Тройку отображений ψ_1, ψ_2 и ψ_3 называют изоморфизмом автоматов S и S′ . **Кратко понятие изоморфизма формулируется следующим образом: <u>образ функции равен функции образов</u>.** Иначе, **изоморфные автоматы идентичны с точностью до обозначений состояний, входных и выходных сигналов.**
Автомат S назовём реализацией автомата S′ (обозначение S = R(S′)), если у автомата S существует подавтомат, изоморфный S′ . Таким образом, если автомат S реализует автомат S′ , то поведение S с точностью до обозначений совпадает с поведением S″ на области определения S′ , так как у автомата S должен быть некоторый подавтомат S″ , изоморфный S′ .
В качестве модели, описывающей совместную работу совокупности автоматов, будем использовать понятие сети автоматов.

Сеть автоматов — это кортеж

(6) $N = (Z, \{S_i\}, W, \{f_i\}, \{\psi_i\}, g)$,

где:

1) Z — входной алфавит;

2) $\{S_i = (A_i, Z_i, \delta_i)\}$, $1 \le i \le n$ — множество компонентных автоматов (КА) сети. КА S_i — полуавтомат, A_i — его множество состояний, Z_i — его входной алфавит:

(7) $$Z_i = \begin{cases} Z'_i \times Z''_i & \text{\textit{для}} \quad Z'_i \ne \varnothing, \\ Z''_i & \text{\textit{для}} \quad Z'_i = \varnothing \end{cases}$$

δ_i — его функции переходов ($\delta_i : A_i \times Z_i \to A_i$);

3) W — выходной алфавит сети;

4) $\{f_i : (\times_j A_j) \to Z'_i\}$, $1 \le i, j \le n$ — множество функций соединения компонентных автоматов сети;

5) $\{\psi_i : Z \to Z'i\}$, $1 \le i \le n$ — множество входных функций;

6) $g : (\times_i Ai) \times Z \to W$ — выходная функция сети.

Результирующим автоматом сети

(8) $N = (Z, \{S_i\}, W, \{f_i\}, \{\psi_i\}, g)$

назовём автомат

(9) $N = (A_N, Z_N, W, \delta_N, \lambda_N)$,

у которого:

1) $A_N = \times_i Ai$, $i = 1, \ldots, n$;

2) $Z_N = Z$;

3) $W_N = W$;

4) Функция переходов $\delta_N : A_N \times Z_N \to A_N$, определяется следующим образом:

(10) $\delta_N(a_m, z_f) = \delta N((a_{m1}, \ldots, a_{mi}, \ldots, a_{mn}), z_f) =$
$= \times_i \delta_i(a_{mi}, (f_i(a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \psi_i(z_f)))$

Здесь $a_m \in A_N$, $z_f \in Z_N$, $a_{mi} \in A_i$, $a_m = (a_{mi}, \ldots, a_{mn})$;

5) Функция выходов $\lambda_N : A_N \times Z_N \to W_N$ (в модели Мили), определяется следующим образом:

(11) $\lambda_N(a_m, z_f) = g((a_{m1}, \ldots, a_{mn}), z_f)$

в модели Мура:

(12) $\lambda_N : A_N \to W_N$, $\lambda_N(a_m) = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$.

Под задачей декомпозиции автомата S будем понимать задачу построения сети N такой, что её результирующий автомат S_N реализует заданный автомат S, т.е. $S_N = R(S)$.

3. Разбиение множества

Разбиением множества называется множество $\pi = \{B_1, \dots, B_m\}$, элементы которого – подмножества А ($B_i \subseteq A$, $i = 1, \dots, m$), удовлетворяющие следующим условиям:

1) Для любых двух множеств B_i и $B_j (i \neq j)$ $B_i \cap Bj = \varnothing$.

2) $\bigcup^m{}_{i=1} B_i = A$.

3) $B_i \neq \varnothing$, $i = 1, \dots, m$.

Множества $B_i (i = 1, \dots, m)$ назовём блоками разбиения π.
Пусть $a_m = (a_{m1}, \dots, a_{mn})$, $ap = (a_{p1}, \dots, a_{pn})$; $a_m \in A_N$; a_{mj}, $a_{pj} \in A_j$; A_j — множество состояний компонентного автомата S_j, $j = 1, \dots, n$.
Определим разбиение $\pi_{i1i2\dots ir}$ на множестве A_N следующим образом: $a_m \equiv a_p(\pi_{i1i2\dots ir})$, если и только если $a_m = a_p$ для всех $j = i_1, i_2, \dots, i_r$.
Таким образом, два состояния a_m и a_p результирующего автомата попадают в один блок $\pi_{i1i2\dots ir}$, если и только если в их кодах соответственно равны компоненты $i_1, i_2, \dots, i_r$.
Каждый блок $\pi_{i1i2\dots ir}$ соответствует различным элементам во множестве $A_{i1} \times A_{i2} \times \dots \times A_{ir}$ (A_{ij} — множество состояний компонентного автомата S_{ij}, $j = 1, \dots, r$), т. е. в $\pi_{i1i2\dots ir}$ столько блоков, сколько различных внутренних состояний имеет система автоматов $S_{i1}, S_{i2}, \dots, S_{ir}$. Если в $\pi_{i1i2\dots ir}$ $r = 1$, то на A_N можно аналогичным образом задать разбиение π_i (иногда его называют примарным разбиением). Это разбиение, очевидно, определяется следующим образом: $a_m \equiv a_p(\pi_i)$, если и только если $a_{mi} = a_{pi}(a_m, a_p \in A_N; a_{mi}, a_{pi} \in A_i)$. Таким образом, в один блок разбиения π_i попадают те состояния результирующего автомата, которые имеют одинаковые i-е компоненты. Следовательно, число блоков разбиения π_i равно числу состояний компонентного автомата S_i и между блоками π_i и состояниями S_i имеется взаимнооднозначное соответствие. В связи с этим можно отождествлять состояния S_i с блоками разбиения π_i.

4. СП-разбиение

Разбиение π на множестве состояний автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$ обладает свойством подстановки (является СП-разбиением), если и только если из $a_m \equiv a_s(\pi)$ (a_m и a_s — в одном блоке π) следует, что $\delta(a_m, z_f) \equiv \delta(a_s, z_f)(\pi)$ для всех $z_f \in Z$.
Иначе, под действием любого входного сигнала автомат из состояний, находящихся в одном блоке π, переходит в состояния, также находящиеся в одном блоке, т.е. каждый входной сигнал

отображает блоки π в блоки π. Таким образом, для $z_f \in Z$ и $B \in \pi$ существует единственный блок $B' \in \pi$, такой, что $\delta(B, z_f) \in B'$.
Пусть π— СП-разбиение на множестве состояний автомата $S = (A,Z,W, \delta, \lambda)$. Тогда образом автомата S назовём полуавтомат $S_\pi = (B_\pi,Z, \delta_\pi),B_\pi \in \pi$, у которого $\delta_\pi(B_\pi, z_f) = B'_\pi$, если и только если $\delta(B_\pi, z_f) \subseteq B'_\pi$.
Если π_1 и π_2 — СП-разбиения, то $\pi_1\pi_2$ и $\pi_1 + \pi_2$ — тоже СП-разбиения.

5. Процедура нахождения всех СП-разбиений

Процедура нахождения всех СП-разбиений состоит из двух этапов:
1) Для каждой пары состояний (a_m, a_s) вычисляется наименьшее СП-разбиение $\pi(a_m, a_s)$, которое отождествляет a_m с a_s (первичные СП-разбиения).
2) Находятся всевозможные суммы полученных на первом шаге $\pi(a_m, a_s)$. Эти суммы образуют вторичные СП-разбиения.
Отождествим два состояния a_m и a_s ($a_m, a_s \in A$) в одном блоке искомого разбиения $\pi : a_m \equiv a_s(\pi)$. Тогда из определения разбиения с СП следует, что для любого $z_f \in Z$ состояния $\delta(a_m, z_f , p)$ и $\delta(a_s, z_f , p)$ также должны быть отождествлены $\delta(a_m, z_f , p) \equiv \delta(a_s, z_f , p)(\pi)$, где $p \in [0; 1]$. Ясно, что если состояние a_k отождествлено с a_i, а a_i с a_r, то состояния a_k и a_r также должны быть отождествлены, поскольку разбиение соответствует эквивалентности, а последняя транзитивна. Процесс повторяется для каждой пары состояний, вошедших в один блок, до тех пор, пока не перестанут отождествляться новые состояния. Построенное таким образом разбиение $\pi(a_m, a_s)$ имеет свойство подстановки и является минимальным разбиением, которое отождествляет состояния a_m и a_s в одном блоке. Чтобы получить другие разбиения, процесс повторяется для каждой пары состояний, т.е. $M(M - 1)/2$ раз, где M — число состояний автомата.

6. Пары разбиений

Два разбиения (π, π'), определённых на множестве состояний A автомата $S = (A,Z,W, \delta, \lambda)$, назовём парой разбиений, если и только если из $a_m \equiv a_s(\pi)$ следует $\delta(a_m, z_f , p) \equiv \delta(a_s, z_f , p)(\pi')$ для всех $z_f \in Z$; $a_m, a_s \in A$.
Т. е. при работе S блоки π переводятся в блоки π' под

действием любого входного сигнала, иначе говоря, для каждого $z_f \in Z$ и $B \in \pi$ существует единственный блок $B' \in \pi'$ такой, что $\delta(B, z_f, p) \subseteq B'$.

Если π – СП-разбиение, то (π, π) – пара разбиений. Также можно показать, что если (π, π') и (τ, τ') – две пары разбиений на множестве состояний А автомата S, то $(\pi\tau, \pi'\tau')$ и $(\pi+\tau, \pi'+\tau')$ – тоже пары разбиений на множестве А.

По аналогии с взаимнооднозначным соответствием между блоками τ_i и состояниями S_i, $\pi_{i1i2\ldots ir}$ определяет входы в f_i от других автоматов. Т. е. существует взаимнооднозначное соответствие между блоками $\pi_{i1i2\ldots ir}$ и состояниями системы автоматов $S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ir}$. Как и в любом автомате Мили, следующее состояние S_i (блок разбиения π_i) определяется его текущим состоянием и входным сигналом (входной сигнал здесь — состояние системы автоматов $S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ir}$ и буква внешнего входного алфавита $z_f \in Z''_i$). Таким образом, состояние S_i в любой момент времени определяется состоянием системы автоматов $S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ir}$, S_i и $z_f \in Z''_i$, т. е. блоком разбиения $\pi_{i1i2\ldots ir}$ и $z_f \in Z''_i$, поэтому $(\pi_{i1i2\ldots ir}, \pi_i)$ – пара разбиений, а δ_i реализует отображение $\pi_{i1i2\ldots ir} \times Z_i$ в π_i.

7. Общая теорема декомпозиции

Пусть π_i, $1 \le i \le n$ – некоторое множество разбиений на множестве А состояний декомпозируемого автомата $S = (A, Z, W, \delta, \lambda)$.

Теорема. Множеству разбиений π_i, $1 \le i \le n$ можно поставить в соответствие абстрактную сеть автоматов N так, чтобы $R(S) = S_N$, если и только если

$$\prod_{i=1}^{n} \pi_i = \pi(0). \tag{13}$$

При этом устанавливается взаимнооднозначное соответствие между разбиениями π_i и компонентными автоматами S_i. Множество разбиений, удовлетворяющих условию (1), будем называть ортогональным множеством разбиений. Таким образом, для декомпозиции автомата необходимо выбрать ортогональное множество разбиений. Способ выбора такого множества будет описан ниже в соответствующем параграфе.

Поставим в соответствие каждому разбиению π_i функцию $F_i : A \times Z \rightarrow \pi_i$, такую, что $F_i(a_m, z_f, p) = \pi_i(\delta(a_m, z_f, p))$, т. е. значение функции F_i на паре (a_m, z_f) равно блоку π_i, в котором

содержится состояние $a_s = \delta(a_m, z_f, p)$, $a_m, a_s \in A$,
$z_f \in Z$, $p \in [0; 1]$.
Образуем на множествах A и Z соответственно разбиения τ_i и η_i так, что:
1) a_m и a_s находятся в одном блоке разбиения τ_i ($a_m \equiv a_m(\tau_i)$), если и только если для любого $z_f \in Z$ справедливо $F_i(a_m, z_f, p) = F_i(a_s, z_f, p)$. Иначе
$\tau_i = a \in A : \forall z \in Z, p \in [0; 1], F_i(a, z, p) = r_i$.
2) z_f и z_t находятся в одном блоке разбиения η_i ($z_f \equiv z_t(\eta_i)$), если и только если для любого $a_m \in A$ справедливо $F_i(a_m, z_f, p) = F_i(a_m, zt, p)$. Иначе
$\eta_i = z \in Z : \forall a \in A, p \in [0; 1], F_i(a, z, p) = r_i$.
Полученные таким образом (τ_i, π_i) – пара разбиений, т. е. каждый блок τ_i отображается любым входным сигналом в некоторый блок π_i. При этом τ_i – максимальное разбиение, образующее пару (τ_i, π_i).
Построим сеть $N = (Z_N, S_i, W_N, f_i, \psi_i, g)$, для чего определим все компоненты кортежа N. Начнём с входного и выходного алфавитов сети.
1) Полагаем $Z_N = Z$.
2) Полагаем $W_N = W$.
3) Построим компонентные автоматы $S_i = (A_i, Z_i, \delta_i)$, $1 \le i \le n$, т. е. определим базис сети.
а) Полагаем $A_i = \pi_i$.
б) Для определения входного алфавита компонентного автомата Z_i воспользуемся построенными разбиениями τ_i и η_i. Необходимо учитывать, что

(14) $$Z_i = \begin{cases} Z'_i \times Z''_i & \text{для} \quad Z'_i \neq \varnothing, \\ Z''_i & \text{для} \quad Z'_i = \varnothing \end{cases}$$

Здесь Z'_i и Z''_i – соответственно внутренний и внешний входные алфавиты автомата S_i.
Если на вход функции fi поступают $\pi_{i1}, \pi_{i2}, \ldots, \pi_{ir}$ – выходы компонентных автоматов $S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ir}$, то $(\pi_{i1i2\ldots iri}, \pi_i)$ – пара разбиений, где $\pi_{i1i2\ldots iri} \le \tau_i$, так как τ_i – максимальное разбиение, образующее пару с π_i. Нетрудно также доказать, что $\pi_{i1i2\ldots iri} = \pi_{i1}\pi_{i2}\ldots\pi_{ir}\pi_i$. Таким образом, для нахождения автоматов, выходы которых присоединяются ко входу f_i, необходимо найти такое произведение

$\pi_{i1}\,\pi_{i2}\ldots\pi_{ir}\,\pi_i = \pi_i \prod_{j=1}^{i_r} \pi_i$, которое не превосходит τ_i, и тогда выходы

$S_{i1}, S_{i2}, \ldots, S_{ir}$ должны быть соединены со входом f_i.
Определим разбиение ε_i следующим образом:

(15) $$\varepsilon_i = \prod_{j=1}^{i_r} \pi_i, i \neq j,$$

т. е. π_i не входит в это произведение, так как ко входу f_i могут присоединяться выходы других, отличных от S_i, компонентных автоматов. В автомате S_i полагаем $Z'_i = \varepsilon_i, Z''_i = \eta_i$, а Z_i определяется согласно равенствам (7).

в) Определим функцию переходов компонентного автомата $\delta_i : \pi_i \times Z_i \times p \rightarrow \pi_i$.

Пусть α, β и γ соответственно блоки разбиений π_i , ε_i и η_i ($\alpha \in \pi_i$, $\beta \in \varepsilon_i$, $\gamma \in \eta_i$). Если $\varepsilon_i = Z'_i = \varnothing$?, т. е. $\pi_i \le \tau_i$ (π_i – СП-разбиение), то $\delta_i(\alpha, \gamma, p) = B_{\pi i}(\delta(\alpha, \gamma, p))$.

Таким образом, значение функции переходов δ_i равно блоку разбиения π_i , содержащему $\delta(\alpha, \gamma, p)$. Здесь δ– функция переходов декомпозируемого автомата $S = (A,Z,W, \delta, \lambda)$.

Если же $\varepsilon_i = Z'_i \neq \varnothing$, то

(16) $$\delta_i(\alpha,(\beta, \gamma, p) = \begin{cases} B_{\pi_i}\delta\,(\alpha \cap \beta, \gamma, \text{p})) & \alpha \cap \beta \neq \varnothing \\ \forall \pi_i \left(\text{не определена}\right) \alpha \cap \beta = \varnothing \end{cases}$$

4) Построим функции соединения компонентных автоматов $f_i : \times^{ir}_{j=i} A_i \rightarrow Z'_i$; иначе (в терминах разбиений) $f_i : \times^{ir}_{j=i} \pi_i \rightarrow \varepsilon_i$.

Пусть $\pi_{i1} \times \pi_{i2} \times \ldots \times \pi_{ir} = T_i$. Образуем множество

$T'_i \subseteq T_i$, $t_s \in T'_i$, $t_s = (t_{s1}, t_{s2}, \ldots, t_{sr})$, такое, что $\bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j} \neq \varnothing$.

Таким образом, в T'_i попадают только те векторы из T_i,у которых пересечение всех компонентов не пусто. Такое пересечение

$\bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j}$ имеет место, так как компоненты $t_{s1}, t_{s2}, \ldots, t_{sr}$ – блоки

разбиений, т. е. множества.

Функция f_i реализует отображение $T'_i \rightarrow \varepsilon_i$.

Значение f_i определим следующим образом:

(17) $f_i(t_{s1}, t_{s2}, \ldots, t_{sr}) = p_k \in \varepsilon_i$, если $\bigcap_{j=1}^{r} t_{s_j} \subset p_k$,

т. е. значение функции f_i равно тому блоку разбиения ε_i, в который входит пересечение компонентов $t_{s1}, t_{s2}, \ldots, t_{sr}$.
На множестве $T_i \setminus T'_i$ функция f_i не определена.
5) Определим множество входных функций следующим образом:
(18) $\psi_i(z_f) = B_{\eta i}(z_f)$, $i = 1, \ldots, n$,
т. е. значение функции ψ_i на $z_f \in Z$ равно блоку разбиения η_i, содержащему z_f . Отсюда ясно, что автомат S_i не различают тех букв входного алфавита Z, которые входят в один блок разбиения η_i.
6) Построим выходную функцию сети $g : (\times^n{}_{i=1}A_i)\times Z \to W$, иначе (в терминах разбиений) $g : (\times^n{}_{i=1}\pi_i) \times Z \to W$.
Пусть $\pi_1 \times \pi_2 \times \ldots \times \pi_n = H$. Образуем множество $H' \subseteq H$, $h_m \in H'$, $h_m = (h_{m1}, \ldots, h_{m2}, \ldots, h_{mn})$, такое,

что $\bigcap_{i=1}^{n} h_{m_i} \neq \varnothing$. Таким образом, в H′ попадают только те векторы из H, у которых пересечение всех компонентов не пусто.
Функция g реализует отображение $H' \times Z \to W$.
Значение g определим следующим образом:

(19) $g((h_{m1}, \ldots, h_{mi}, \ldots, h_{mn}), z_f, p) = \lambda \bigcap_{i=1}^{n} h_{m_i}$, z_f , p),

т. е. значение выходной функции сети совпадает со значением функции выхода λ декомпозируемого автомата S на паре (a_m, z_f), где a_m – состояние, попавшее в пересечение компонентов вектора $h_m \in H'0$. На множестве $H \setminus H'$ функция g не определена.
В литературе показано, что построенная таким образом сеть реализует исходный автомат S. Разбиения τ_i и η_i однозначно определяется разбиением π_i (с помощью функции F_i); τ_i показывает, какие автоматы воздействуют на автомат S_i, а η_i определяет классы неразличимых автоматом S_i букв входного алфавита Z.
Таким образом, (π_i, τ_i, η_i) – характеристическая тройка автомата S_i.
Стоит отметить, что τ_i и η_i являются наибольшими разбиениями, причем чем больше η_i , тем меньше выходов других автоматов воздействует на S_i. Чем больше η_i, тем проще зависимость δ_i от внешнего входа Z. Использование разбиений τ_i и η_i при построении S_i является, таким образом, необходимым условием для построения сети N наименьшей сложности.
На рис. 1 представлена общая схема алгоритма декомпозиции

вероятностного автомата.

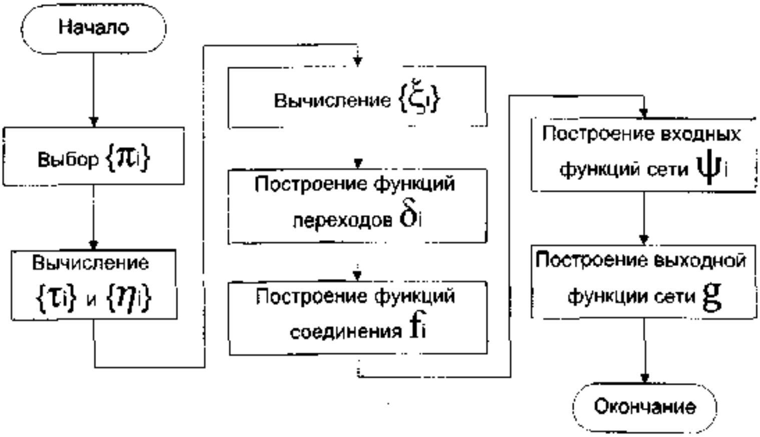


Рис. I. Алгоритм, декомпозиции вероятностного автомата

Выбор ортогонального множества разбиений

Из конструктивного способа построения сети *N* видно, что структура сети *N* определена в общем случае неоднозначно, поскольку неравенство $\pi_i \prod_{j=i}^{i_r} \pi_i \leqslant \tau_i$, которое определяет автоматы $S_{i_1}, S_{i_1}, \ldots, S_{i_r}$,влияющие на поведение S_i, может быть выполнено при различных совокупностях разбиений из π_i, $i = 1, \ldots, n$, где последнее является ортогональным множеством разбиений (т. е. $\prod_{i=1}^{n} \pi_i = \pi(0)$).

Как показано выше, от выбора ортогонального множества разбиений зависит структура и состав результирующей сети *N* .

Выбор данного множества должен быть осуществлён до начала декомпозиции автомата. Так как имеется однозначное соответствие между этим выбором и результирующей сетью, то в зависимости от целей декомпозиции можно ввести критерий выбора (оценки) конкретного множества, который позволит получить результат, наиболее полно удовлетворяющий этим целям.

Например, из всех возможных вариантов декомпозиции особый интерес представляют случаи, при которых распределение состояний по подавтоматам сети наиболее равномерно. Рассмотренный выше критерий даёт количественную оценку каждому множеству ортогональных разбиений (в процентах):

(20) $$p = \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{k} \left|b_j - \frac{N}{k}\right|}{\sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{k_i N - k_i^2 + k_i - N}{k_i}}\right) \cdot 100\%,$$

где n – число элементов во множестве ортогональных разбиений, N – число элементов во множестве состояний исходного автомата, b_j – количество элементов в j-ом блоке оцениваемого разбиения, k- количество блоков, оцениваемого разбиения, k_i – количество блоков i-ого разбиения. Данный критерий даёт тем большую оценку, чем больше разбиение соответствует ему.
В заключение отметим: установлено,что выбор ортогонального множества СП-разбиений однозначно задаёт структуру результирующей сети. Варьируя выбор данного множества, можно задавать некоторые параметры сети: количество элементов, пропорции распределения состояний по данным элементам. Данный метод может использоваться для исследования (анализа) и проверки правильности функционирования сложных дискретных систем, формализованных вероятностными автоматами.

8. Нечеткие грамматики и автоматы

8.1. Нечеткий язык и его свойства

Формальным языком $\mathscr{L}$ обычно пазывают множество символьных конструкций (например, слов, цепочек символов, включая нулевую λ_o в некотором алфавите V_T). Однако непосредственное перечисление элементов языка $\mathscr{L}$, который может быть и бесконечным, в большем числе случаев невозможно и поэтому язык определяют при помощи конечных описаний. Выделяют **три основных способа описания**.
Порождающие правила. В этом случае имеется множество правил, называемых **грамматикой**, которые порождают в точности те последовательности (слова) из множества всех конечных последовательностей в алфавите V_T, которые принадлежат языку $\mathscr{L}$.
Применение распознающего автомата. Рассматривается конечный автомат, в котором выделено начальное состояние и множество заключительных состояний. Автомат, начав работать, из начального состояния попадает в заключительное только в том случае, когда поступающая на вход конструкция (цепочка) принадлежит $\mathscr{L}$, т. е. автомат распознает (или допускает) только слова из $\mathscr{L}$.
Алгебраическое описание. Язык строится в результате применения к базисным множествам операций из заданного списка.

Нечеткое подмножество конечных последовательностей в некотором алфавите естественно называть нечетким языком (НЯ). Тогда по аналогии с обычным формальпым языком возможны, по крайней мере, три способа описания НЯ: нечеткие грамматики, нечеткие автоматы, нечеткие алгебраические выражения.

В этой главе основные определения и результаты теории формальных языков обобщаются на случай НЯ.

Определение 1. *Нечетким языком* $\mathscr{L}$ в конечном алфавите V_T называется нечеткое подмножество множества всех конечных цепочек $V_T^* = \{x\}$, полученных с помощью конкатенации элементов V_T:

$$\mu_{\mathscr{L}}\colon V_T^* \to [0,\ 1],$$

где $\mu_{\mathscr{L}}(x)$ является степенью принадлежности x языку $\mathscr{L}$ и может быть интерпретирована как степень правильности цепочки x или степень возможности ее использования.

Пусть $\{\mathscr{L}(V_T)\} = \mathscr{F}_L(V_T^*)$ множество всех НЯ в алфавите V_T; $x,\ u,\ v \in V_T^*$. Определим операции в $\mathscr{F}_L(V_T^*)$. Операции объединения $(\mathscr{L}_1 \cup \mathscr{L}_2)$ пересечения $(\mathscr{L}_1 \cap \mathscr{L}_2)$ и дополнения $(\overline{\mathscr{L}})$ над НЯ определяются аналогично соответствующим операциям над НМ.

Конкатенация $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ (если $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2$, то обозначаем $\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2 = \mathscr{L}_1^2$):

$$\mu_{\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2}(x) = \sup_{x=uv} \min\left(\mu_{\mathscr{L}_1}(u),\ \mu_{\mathscr{L}_2}(v)\right).$$

Замыкание Клини: ,

$$\hat{\mathscr{L}} = \Lambda \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{L}^2 \cup \ldots \cup \mathscr{L}^n \cup \ldots = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{L}^j,$$

где Λ — пустой язык с функцией принадлежности

$$\mu_\Lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = \lambda; \\ 0, & \text{если} \quad x \neq \lambda, \end{cases}$$

λ — пустое слово длины 0. Для любого $x \in V_T^*$, $x = a_1a_2\ldots a_k, a_i \in V_T$; $i = 1,\ \ldots,\ k$; k — длина слова, принадлежность замыканию Клини вычисляется следующим образом:

$$\mu_{\hat{\mathscr{L}}}(x) = \sup_{i=1,\ldots,k}\ \sup_{x=u_1u_2\ldots u_i}\ \min_{j=1,\ldots,i} \mu_{\mathscr{L}}(u_j), \quad u_j \in V_T^*; \quad j = 1,\ \ldots,\ i.$$

Говорят, что $\mathscr{L}$ замкнут, если $\mathscr{L} = \hat{\mathscr{L}}$. Доказано, что $\mathscr{L}$ замкнут тогда и только тогда, когда для любых $u,\ v \in V_T^*$

$$\mu_{\mathscr{L}}(\lambda) = 1 \quad \text{и} \quad \mu_{\mathscr{L}}(u,\ v) \geqslant \min\left(\mu_{\mathscr{L}}(u),\ \mu_{\mathscr{L}}(v)\right).$$

Пусть $\{\mathscr{L}_1(V_T)\} \subset \{\mathscr{L}(V_I)\}$ — некоторый класс языков. Говорят, что $\{\mathscr{L}_1(V_T)\}$ замкнут относительно операции *, если применение операции * не выводит из $\{\mathcal{L}_1(V_T)\}$.

Нечеткий язык с набором семантических правил. Большую часть теории формальных языков легко обобщить на нечеткое множество цепочек. Однако, полученные теории еще далеки от создания адекватной модели естественного языка. Это связано с тем, что возникают существенные трудности в установлении соответствия между множеством объектов или конструкций и их описываемыми цепочками слов. Чтобы явно рассмотреть эти соответствия, дадим следующее более широкое определение НЯ.

НЯ — это четверка $\mathcal{L} = \langle U, T, E, N\rangle$, в которой U — область рассуждений (например, множество объектов, действий, отношений, понятий); T — терм-множество (нечеткое множество термов: $T = \{(t, \mu_T(t)): t \in \widehat{T}$, $\widehat{T}$ — множество термов, $\mu_T(t)$ — степень правильности t), E—множество символов (и их комбинаций), из которых строятся наименования термов; N— отношение соответствия множества термов и значений из области рассуждений (отношенне наименования, $\mu_N(t, u)$ — степень, с которой терм t соответствует элементу $u \in U$).

Когда $\widehat{T}$ и U — множества с небольшим числом элементов, μ_N и μ_T легко явно определить, например с помощью таблицы. Однако в общем случае $\widehat{T}$ и U являются бесконечными множествами, и при определении $\widehat{T}$ и U требуется, чтобы они были наделены структурой, позволяющей вычисление μ_T и μ_N. Следовательно, необходимо понятие структурного нечеткого языка:

$$\mathcal{L} = \langle U, S_T, E, S_N\rangle,$$

где S_T — множество синтаксических правил $\mathcal{L}$, задающих алгоритм вычисления μ_T; S_N множество семантических правил, задающих алгоритм вычисления μ_N; U и E определены выше. Соотношение U, S_T, E, S_N изображено на рис. 1.

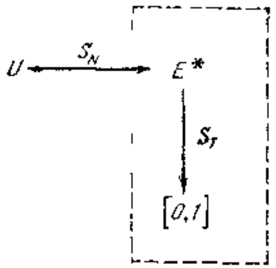


Рис. 1. Нечеткий язык с набором семантических правил

Очевидно, что формальный НЯ (на рис. 1 обведен пунктирной линией) является частным случаем НЯ, определенного выше, в котором рассматриваются только *T* и *E:* $\mu_{\mathcal{P}} = \mu_1$, $V_T = E$. Далее будем рассматривать НЯ из определения 1.

В последующих параграфах рассматриваются различные способы описания и получаемые на их основе свойства НЯ.

8.2. Нечеткие грамматики и их свойства

Определение 2. *Нечеткая грамматика* — это шестерка

$$G = \langle V_N,\ V_T,\ P,\ S,\ L,\ \varphi\rangle,$$

где V_N — множество нетерминальных символов; V_T — множество терминальных символов; S — начальный символ $S \in V_N$; P — конечное множество правил подстановки вида $u \underset{p}{\rightarrow} v$, $u,\ v \in (V_N \cup V_T)^*$, $p \in P$; L — множество весов (например, дистрибутивная решетка с 0 и 1); φ: $P \to L$, $\varphi(p)$—степень принадлежности выводу правила $p \in P$.

Далее множество всех терминальных и нетерминальных символов будем обозначать $V = V_T \cup V_N$.

Пусть задана грамматика *G;* $u,\ v \in V^*$. Говорят, что *u непосредственно порождает v* со степенью φ_1, если найдутся такие

$$u_1,\ u_2,\ x,\ y \in V^*,\quad p \in P\colon\ \varphi(p) = \varphi_1,$$

что $u = u_1 x u_2$, $v = u_1 y u_2$, $x \underset{p}{\rightarrow} y$. Это обозначаем как $u \xrightarrow[p]{\varphi_1} v$ или

$$u \xrightarrow[p]{\varphi(p)} v.$$

Пусть $u,\ v,\ z_0,\ \ldots,\ z_m \in V^*$. Последовательность $z_0,\ \ldots,\ z_m$ называется выводом *(цепочкой вывода) u* из *v*, а *v выводимой* из *u* в грамматике *G*, если существует последовательность подстановок из *P:*

$$u = z_0 \xrightarrow[p_1]{\varphi(p_1)} z_1 \rightarrow \ldots \rightarrow z_{m-1} \xrightarrow[p_m]{\varphi(p_m)} z_m = v.$$

Выводимость v из *u* в грамматике *G* обозначаем $u \Rightarrow v$. В общем случае может существовать более одной цепочки вывода.

Если $u = S$, $v = x$, $x \in V_T^*$, то говорят, что *S* порождает терминальную цепочку *v* посредством подстановок $p_1,\ \ldots,\ p_m$.

Наличие степени принадлежности выводу правил из *P* требует введения определенных способов вычисления степени принадлежности выводу цепочки правил подстановки и степени выводимости некоторой терминальной цепочки из S в грамматике G.

Учитывая это, нечеткие грамматики (НГ) могут быть классифицированы как по способу вычисления степени выводимости, так и по виду правил подстановки.

Множество правил вывода P и функция φ определяют нечеткое бинарное отношение $R\colon V^* \times V^* \to L$.

Следовательно, определение операции композиции отношений $R \circ R$ дает способ вычисления *степени выводимости.* Если

$$\mu_{R\circ R}(x, z) = \mathop{\tilde{\bigvee}}_{y} \left(\mu_R(x, y) * \mu_R(y, z)\right)$$

и операции $\tilde{\bigvee}$, $*$ обладают свойством дистрибутивности на L, то степень выводимости x из S вычисляется по следующей формуле:

$$\mu_G(x) = \mathop{\tilde{\bigvee}}_{y^*} (\varphi(p_1) * \varphi(p_2) * \ldots * \varphi(p_m)),$$

где $y^* = \{y_1, \ldots, y_n\}$— множество цепочек вывода. В литературе приводятся различные способы определения операций $\tilde{\bigvee}$, $*$.

Соответствующие операции и типы грамматик приведены в табл. 1.

Таблица 1

Нечеткая грамматика	Операции $\tilde{\bigvee}$	Операции $*$	Множество значений функции принадлежности
Пессимистическая	max	min	$L = [0, 1]$
Оптимистическая	min	max	$L = [0, 1]$
Взвешенная	Σ	$\cdot$	$L = \mathscr{R}^+$ — неотрицательные действительные числа
Максимально-взвешенная [24, 25]	max	$\cdot$	$L = \mathscr{R}^+$
Номеров подстановок	$\cup$	Конкатенации	$L = \{j : p_j \in P\}$, $\varphi(p_j) = j$
Вероятностная	Σ	$\cdot$	$L = [0, 1]$, $\forall u \in V_N^* \setminus \{\Lambda\}: \sum_{p \in P_u} \varphi(p) = 1$; P_u — множество всех подстановок из P, в левой части которых стоит u
Максимально-вероятностная	max	$\cdot$	То же

Определяется *смешанная* НГ

$$\mu_G(x) = \alpha\mu_{G_1}(x) + \beta\mu_{G_2}(x),$$

где $\alpha + \beta = 1$; G_1, G_2— пессимистическая и оптимистическая НГ. Далее, на протяжении всей главы, если не оговорено особо, под НГ будут подразумеваться пессимистические НГ. Наряду с грамматиками, приведенными в табл. 1, известны другие типы грамматик.

Исследована *дробная* НГ, у которой степень выводимости вычисляется по формуле:

$$\mu_G(x) = \sup_k \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_k} g(p_k^i)}{\sum\limits_{i=1}^{n_k} h(p_k^i)} \right],$$

где k — индекс цепочки подстановок, порождающей слово x; n_k — количество подстановок в цепочке вывода; $p_k^i \in P$;

$$h\colon P \to L; \quad g\colon P \to L; \quad h(p) > g(p).$$

Дробные НГ использовались при грамматическом разборе в процедуре распознавания образов. В литературе изучаются древовидные грамматики, в которых дополнительно используется отображение $r\colon V \to \mathbf{N}$, где N — множество натуральных чисел. Отображение r позволяет упорядочивать (нумеровать) символы из V_N и V_T. В этом случае левые и правые части подстановок и получаемые в результате вывода слова интерпретируются как деревья. В табл. 2 приводится классификация НГ по виду правил подстановки .

Таблица 2

Тип нечеткой грамматики	Разрешенные правила $p \in P$: $\varphi(p) > 0$
0. Нечеткая грамматика	$\alpha \underset{p}{\to} \beta, \quad \alpha, \beta \in V^*;$
1. Контекстно-зависимая (КЗ)	$\alpha A \beta \underset{p}{\to} \alpha\gamma\beta, \; A \in V_N; \; \alpha, \beta, \gamma \in V^*, \; \gamma \neq \lambda,$ λ — пустое слово, $\quad S \overset{1}{\underset{p}{\to}} \lambda;$
2. Контекстно-свободная (КС)	$A \underset{p}{\to} \beta, \; S \xrightarrow[p]{\varphi(p)=1} \lambda, \; A \in V_N, \; \beta \in V^*, \; \beta \neq \lambda;$
3. Регулярная (Р)	$A \underset{p}{\to} aB, \; A \underset{p}{\to} a, \; a \in V_T; \; A, B \in V_N, \; A \overset{1}{\underset{p}{\to}} \lambda$

При анализе грамматик существенную роль играют свойства рекурсивности и эквивалентности.

НГ называется *рекурсивной* тогда и только тогда, когда существует алгоритм вычисления $\mu_G(x)$. Доказана рекурсивность нечетких пессимистических КЗ-грамматик. В четком случае аналогичное свойство доказано для грамматик непосредственно составляющих, т. е. таких; грамматик, у которых правила подстановки $u \to v$ обладают свойством: $|u| \leqslant |v|, \; u, \; v \in V^*$. Под рекурсивностью здесь, естественно, понимается возможность построения алгоритма, позволяющего определить: выводима ли рассматриваемая цепочка в данной грамматике. Заметим, что нечеткие КС- и Р-грамматики тоже рекурсивны, так как они являются частными случаями нечеткой КЗ-грамматики. Две НГ G_1 и G_2 называются *эквивалентными* тогда и только тогда, когда для любого $x \in V_T^* \ \mu_{G_1}(x) = \mu_{G_2}(x)$.

Для нечетких КС-грамматик, как и для четкого случая, возможно построение канонических форм Грейбаха и Хомского.

Каноническая форма Хомского. Нечеткая пессимистическая КС-грамматика эквивалентна некоторой НГ G_c с правилами подстановки вида:

$$A \xrightarrow[p]{\varphi(p)} BC, \quad A \xrightarrow[p]{\varphi(p)} a, \quad \varphi(p) > 0; \quad A, B, C \in V_N; \quad a \in V_T.$$

Каноническую форму грамматики предлагается конструировать в три этапа. Во-первых, построение грамматики G_1 эквивалентной G_2, у которой нет правил вида $A \xrightarrow[p]{\varphi(p)} B;\ A,\ B \in$ $\in V_N$. Во-вторых, построение грамматики G_2, эквивалентной G_1, у которой нет правил подстановки вида:

$$A \xrightarrow[p]{\varphi(p)} B_1 B_2 \ldots B_m, \quad m > 0 \quad \text{и некоторые} \quad B_i \in V_T.$$

В-третьих, построение грамматики G_3, эквивалентной G_2, у которой все правила подстановки имеют канонический вид.

Пример 1. Рассмотрим нечеткую пессимистическую КС-грамматику с алфавитами $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{A, B, S\}$ и правилами подстановки, приведенными в табл. 3.

Таблица 3

G	G_1	G_2	$G_3 = G_c$
$S \xrightarrow{0,8} Ab$	$S \xrightarrow{0,8} Ab$	$S \xrightarrow{0,8} AC_1$	$S \xrightarrow{0,8} AC_1$
$A \xrightarrow{0,7} S$	$A \xrightarrow{0,7} Ab$	$C_1 \xrightarrow{1} b$	$C_1 \xrightarrow{1} b$
$S \xrightarrow{0,6} aB$	$A \xrightarrow{0,6} aB$	$A \xrightarrow{0,7} AC_1$	$A \xrightarrow{0,7} AC_1$
$A \xrightarrow{0,5} a$	$S \xrightarrow{0,6} aB$	$A \xrightarrow{0,6} C_2B$	$A \xrightarrow{0,6} C_2B$
$B \xrightarrow{0,4} b$	$A \xrightarrow{0,5} a$	$C_2 \xrightarrow{1} a$	$C_2 \xrightarrow{1} a$
$B \xrightarrow{0,3} aSb$	$B \xrightarrow{0,4} b$	$S \xrightarrow{0,6} C_2B$	$S \xrightarrow{0,6} C_2B$
	$B \xrightarrow{0,3} aSb$	$A \xrightarrow{0,5} a$	$A \xrightarrow{0,5} a$
		$B \xrightarrow{0,4} b$	$B \xrightarrow{0,4} b$
		$B \xrightarrow{0,3} C_2SC_1$	$B \xrightarrow{0,3} C_2D$
			$D \xrightarrow{1} SC_1$

Этапы построения канонической формы Хомского проиллюстрированы в табл. 3. При построении G_c добавлены нетерминальные символы C_1, C_2, D.

Каноническая форма Грейбаха. Нечеткая пессимистическая КС-грамматика эквивалентна некоторой НГ G_s с правилами подстановки вида:

$$A \xrightarrow[p]{q(p)} a\alpha, \quad a \in V_T, \quad \alpha \in V_N^*, \quad A \in V_N.$$

Конструирование канонической формы осуществляется следующим образом.

Во-первых, строится каноническая форма Хомского. Все нетерминальные символы в канонической форме Хомского перенумеровываются: $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m$.

Во-вторых, все правила подстановки приводятся к виду: $A_i \to A_j\gamma$, $\gamma \in V^*$, $j \geqslant i$. Это выполняется следующим образом. Пусть для k нетерминальных символов $(k \geqslant i)$ правила подстановки имеют вид: $A_i \to A_j\alpha$, $j \geqslant i$, тогда правило подстановки $A_{k+1} \to A_j\alpha$, в котором $j < k+1$, используя правило с левой частью A_j, приводится к виду $A_{k+1} \to A_l\alpha$, $l \geqslant k+1$. Если $l = k+1$, то вводится новый нетерминальный символ Z_{k+1} и правила подстановки приобретают вид:

$$A_k \to A_l\alpha, \quad l > k, \quad \alpha \in (V_N \cup \{Z_1, \ldots, Z_n\})^*;$$
$$A_k \to a\alpha, \quad a \in V_T;$$
$$A_k \to \alpha.$$

При преобразовании используется следующая лемма:
Если G — нечеткая пессимистическая КС-грамматика и $A \to \to A\alpha_i$, $A \to \beta_i$, $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, s$ — множества правил подстановки такие, что $A \in V_N$; α_i, $\beta_j \in V^*$, то грамматика, полученная заменой правил $A \to A_{\alpha_i}$ правилами

$$A \to \beta_j Z, \quad j = 1, \ldots, s;$$
$$Z \to \alpha_i, \quad Z \to \alpha_i Z; \quad i = 1, \ldots, r;$$

для которых

$$\mu(A \to \beta_j Z) = \mu(A \to \beta_j),$$
$$\mu(Z \to \alpha_i) = \mu(A \to A\alpha_i),$$
$$\mu(Z \to \alpha_i Z) = \mu(A \to A\alpha_i),$$

эквивалентна грамматике G.
В-третьих, правила подстановки преобразуются к такому видуг чтобы их левые части начинались с терминальпых символов.
Пример 2. Пусть дана нечеткая пессимистическая КС-грамматика G в канонической форме Хомского с алфавитами $V_T = \{a, b, c\}$, $V_N = \{S, A, B, C\}$. Этапы построения канонической формы Грейбаха проиллюстрированы в табл. 4.

Таблица 4

№	G_c	G_1	G_2	G_3	$G_4 = G_g$	G_4 из G_3 *)
1	$S \xrightarrow{1} CA$	$A_1 \xrightarrow{1} A_4A_2$	$A_1 \xrightarrow{1} A_4A_2$	$A_1 \xrightarrow{1} A_4A_2$	$A_1 \xrightarrow{1\wedge 0,5} cZA_2$	1, 7
2					$A_1 \xrightarrow{1\wedge 0,2} cA_2$	1, 16
3					$A_1 \xrightarrow{1\wedge 0,5} cA_2$	1, 19
4	$A \xrightarrow{0,8} CA$	$A_2 \xrightarrow{0,8} A_4A_2$	$A_2 \xrightarrow{0,8} A_4A_2$	$A_2 \xrightarrow{0,8} A_4A_2$	$A_2 \xrightarrow{0,8\wedge 0,5} cZA_2$	4, 7
5					$A_2 \xrightarrow{0,8\wedge 0,2} aA_3A_2$	4, 16
6					$A_2 \xrightarrow{0,8\wedge 0,5} cA_2$	4, 19
7	$C \xrightarrow{0,2} AB$	$A_4 \xrightarrow{0,2} A_2A_3$	$A_4 \xrightarrow{0,2} A_4A_2A_3$	$A_4 \xrightarrow{0,5} cZ$	$A_4 \xrightarrow{0,5} cZ$	
8				$Z \xrightarrow{0,2} A_2A_3$	$Z \xrightarrow{0,2} cZA_2A_3$	8, 4, 7
9					$Z \xrightarrow{0,2} aZ_3A_2A_3$	8, 4, 16
10					$Z \xrightarrow{0,2} cA_2A_3$	8, 4, 19
11					$Z \xrightarrow{0,2} aA_3$	8, 17
12				$Z \xrightarrow{0,2} A_2A_3Z$	$Z \xrightarrow{0,2} cZA_2A_3Z$	12, 4, 7
13					$Z \xrightarrow{0,2} aA_3A_2A_3Z$	12, 4, 16
14					$Z \xrightarrow{0,2} cA_2A_3Z$	12, 4, 19
15					$Z \xrightarrow{0,2} aA_3Z$	
16			$A_4 \xrightarrow{0,2\wedge 0,4} aA_3$	$A_4 \xrightarrow{0,2} aA_3$	$A_4 \xrightarrow{0,2} aA_3$	
17	$A \xrightarrow{0,4} a$	$A_2 \xrightarrow{0,4} a$	$A_2 \xrightarrow{0,4} a$	$A_2 \xrightarrow{0,4} a$	$A_2 \xrightarrow{0,4} a$	
18	$B \xrightarrow{0,6} b$	$A_3 \xrightarrow{0,6} b$	$A_3 \xrightarrow{0,6} b$	$A_3 \xrightarrow{0,6} b$	$A_3 \xrightarrow{0,6} b$	
19	$C \xrightarrow{0,5} c$	$A_4 \xrightarrow{0,5} c$	$A_4 \xrightarrow{0,5} c$	$A_4 \xrightarrow{0,5} c$	$A_4 \xrightarrow{0,5} c$	

*) Последовательность подстановок в цепочке вывода правила грамматики G_4 из правил грамматики G_3.

Часто бывает естественным конструирование грамматик, в которых степень правильности использования правила подстановки зависит от ранее использованных в цепочке вывода правил подстановки. Такой тип грамматик, названный *n*-кратными, рассматривается в литературе.

Определение 3. *Нечеткая n-кратная грамматика* — это шестерка

$$G_n = \langle V_N,\ V_T,\ P,\ S,\ L,\ \{\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_n\}\rangle,$$

где $V_N,\ V_T,\ P,\ S,\ L$ обозначают то же, что и в определении 2, а

$$\varphi_i\colon\ \underbrace{P\times\ldots\times P}_{i+1}\to L,\quad i=0,\ \ldots,\ n,$$

$\varphi_i=\varphi(p,\ p_1,\ \ldots,\ p_i)\overset{\triangle}{=}\varphi(p\mid p_1,\ \ldots,\ p_i)$ — степень использования правила *p* при условии, что перед *p* были использованы правила $p_1,\ \ldots,\ p_i$.

Если имеется цепочка вывода

$$S\xrightarrow[p_1]{}u_1\xrightarrow[p_2]{}u_2\xrightarrow[p_3]{}u_3\xrightarrow[p_4]{}\ldots\xrightarrow[p_k]{}u_k$$

и

$$\begin{aligned}\varphi_0(p_1)&=\mu_1,\\ \varphi_1(p_2|p_1)&=\mu_2,\\ \varphi_2(p_3|p_1p_2)&=\mu_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_{k-1}(p_k|p_1p_2\ldots p_{k-1})&=\mu_k,\end{aligned}$$

то цепочка вывода примет вид:

$$S\xrightarrow[p_1]{\mu_1}u_1\xrightarrow[p_2]{\mu_2}u_2\xrightarrow[p_3]{\mu_3}\ldots\xrightarrow[p_k]{\mu_k}u_k.$$

Если $k>n$ и $k=n+j$, тогда степень принадлежности вычисляется по формуле

$$\mu_k=\mu_{n+j}=\varphi_n(p_{n+j}|p_j\ldots p_{n+j-1}).$$

Пример 3. Приведем 1-кратную НГ G_1 .

Пусть $V_n=\{A,\ B,\ C,\ S\},\ V_T=\{a,\ b,\ c\},\ \varphi_0=\varphi_0(S\to ABC)=$ $=0{,}9.$ Правила подстановки грамматики и значения $\varphi_1(p_i|p_j)$ приведены в табл. 5. В пустых клетках таблицы предполагаются значения из интервала [0, 0,05].

Таблица 5

№	Подстановка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$S \to ABC$		0,7			0,8			0,9		
2	$A \to aA$			0,7							
3	$B \to bB$				0,7						
4	$C \to cC$		0,7						0,7		
5	$A \to aAa$						0,8				
6	$B \to bBb$							0,8			
7	$C \to cCc$					0,8			0,8		
8	$A \to a$									0,9	
9	$B \to b$										0,9
10	$C \to c$										

Приведем примеры вывода слова $a^3b^3c^3$:

$$\text{а)}\ S \xrightarrow[1]{0,9} ABC \xrightarrow[2]{0,7} aABC \xrightarrow[3]{0,7} aAbBC \xrightarrow[4]{0,7} aAbBcC \xrightarrow[2]{0,7}$$
$$\xrightarrow[2]{0,7} a^2AbBcC \xrightarrow[3]{0,7} a^2Ab^2BcC \xrightarrow[4]{0,7} a^2Ab^2bc^2C \xrightarrow[8]{0,7}$$
$$\xrightarrow[8]{0,7} a^3b^2Bc^2C \xrightarrow[9]{0,9} a^3b^3c^2C \xrightarrow[10]{0,9} a^3b^3c^3;$$

$$\text{б)}\ S \xrightarrow[1]{0,9} ABC \xrightarrow[5]{0,8} aAaBC \xrightarrow[6]{0,8} aAabBbC \xrightarrow[7]{0,8}$$
$$\xrightarrow[7]{0,8} aAabBbcCc \xrightarrow[8]{0,8} a^3bBbcCc \xrightarrow[9]{0,9} a^3b^3cCc \xrightarrow[10]{0,9} a^3b^3c^3;$$

В грамматике G_1 возможны и другие выводы этого слова. Степень принадлежности выводу последовательности подстановок а) равен 0,7, а последовательности подстановок б) 0,8. Можно проверить, что степень вывода $\mu_{G_1}(a^3b^3c^3) = 0,8.$

Из определений 2 п 3 следует, что 0-кратная НГ является обычно НГ. Доказаны следующие свойства n-кратных грамматик: для любой нечеткой n-кратной КС-грамматики существует эквивалентная ей нечеткая 0-кратная КЗ-грамматика; для заданной нечеткой регулярной n-кратной $(n \geqslant 1)$ грамматики всегда возможно построить $(n + 1)$-кратную и $(n - 1)$-кратную нечеткие регулярные грамматики, которые эквивалентны исходной НГ, в частности, 1-кратную нечеткую регулярную грамматику можно трансформировать в 0-кратную нечеткую регулярную грамматику и наоборот.

Поясним алгоритм построения для n-кратной нечеткой регулярной грамматики $G_n = \langle V_N,\ V_T,\ P,\ S,\ L,\ \{\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_n\}\rangle,\ n \geqslant 2,$ эквивалентной ей $(n - 1)$ -кратной нечеткой регулярной грамматики $G_{n-1} = \langle V'_N, V_T,\ P',\ S',\ L,\ \{h_0,\ \ldots,\ h_{n-1}\}\rangle$. Множество нетерминальных символов: $V'_n = \{i \mid p_i \in P\} \cup S'$, где S' — новый начальный символ.

Множество правил подстановки P' формируется следующим образом. Для всех правил $p_i \in P$ с начальным символом S в левой части: p_i: $S \to aA$ или p_i: $S \to a$, новое правило имеет вид: p_{0i}: $S' \to ai$ **или** p_{0i}: $S' \to a$. Для каждой пары правил из P: p_{i_1}: $A_{i_1} \to aA_{i_2}$, p_{i_2}: $A_{i_2} \to a'A$, у которых нетерминальный символ в правой части одного правила совпадает с нетерминальным символом в левой части другого правила, новое правило имеет вид $p_{i_1 i_2}$: $i_1 \to a' i_2$; и соответственно для правил из P: p_{i_1}: $A \to a_1 A'$, p_{i_2}: $A' \to a_2$, новое правило: $p_{i_1 i_2}$: $i_1 \to a_2$.

Функция степени принадлежности выводу определяется следующим образом:

$$h_0(p_{0i}) = \varphi_0(p_i),$$

$$h_i(p_{j_i j_{i+1}} | p_{0j_1} p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{i-1} j_i}) = \varphi_i(p_{j_{i+1}} | p_{j_1} \ldots p_{j_i}),$$

$$i = 1, \ldots, n-2,$$

$$h_{n-1}(p_{j_n j_{n+1}} | p_{j_1 j_2} \ldots p_{j_{n-1} j_n}) = \varphi_n(p_{j_{n+1}} | p_{j_1} \ldots p_{j_n}).$$

Пример 4. Для 2-кратной нечеткой регулярной грамматики с правилами подстановки

p_1: $S \to aA$ $\quad$ p_4: $C \to aA$

p_2: $A \to bB$ $\quad$ p_5: $B \to c$

p_3: $B \to cC$

и функцией степени принадлежности φ:

$\varphi_0(p_1) = 1$ $\quad$ $\varphi_2(p_4 | p_2 p_3) = 0{,}6$

$\varphi_1(p_2 | p_1) = 0{,}8$ $\quad$ $\varphi_2(p_2 | p_3 p_4) = 0{,}6$

$\varphi_2(p_3 | p_1 p_2) = 0{,}7$ $\quad$ $\varphi_2(p_5 | p_4 p_2) = 0{,}6$

$\varphi_2(p_5 | p_1 p_2) = 0{,}6$ $\quad$ $\varphi_2(p_3 | p_4 p_2) = 0{,}6.$

Эквивалентная ей 1-кратная нечеткая регулярная грамматика имеет правила подстановки *P'*:

p_{01}: $S' \to a1$ $\quad$ p_{34}: $3 \to a4$

p_{12}: $1 \to b2$ $\quad$ p_{42}: $4 \to b2$

p_{23}: $2 \to c3$ $\quad$ p_{25}: $2 \to c$

и фупкцню степени принадлежности *h:*

$$h_0(p_{01}) = \varphi_0(p_1) = 1,$$
$$h_1(p_{12}|p_{01}) = \varphi_1(p_2|p_1) = 0{,}8,$$
$$h_1(p_{25}|p_{12}) = \varphi_2(p_5|p_1p_2) = 0{,}7,$$
$$h_1(p_{23}|p_{12}) = \varphi_2(p_3|p_1p_2) = 0{,}6,$$
$$h_1(p_{34}|p_{23}) = \varphi_2(p_4|p_2p_3) = 0{,}6,$$
$$h_1(p_{42}|p_{34}) = \varphi_2(p_2|p_3p_4) = 0{,}6,$$
$$h_1(p_{25}|p_{42}) = \varphi_2(p_5|p_4p_2) = 0{,}6,$$
$$h_1(p_{23}|p_{42}) = \varphi_2(p_3|p_4p_2) = 0{,}6.$$

8.3. Порождение языков нечеткими грамматиками

Говорят, что нечеткий язык
$$\mathcal{L} = \{(u, \mu_{\mathcal{L}}(u)):\ u \in V_T^*, \mu_{\mathcal{L}}(u) > 0\},$$
является языком, *порождаемым грамматикой,* если существует нечеткая грамматика $G = \langle V_N, V_T, P, S, L, \varphi\rangle$ такая, что
$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(G) = \left\{(u, \mu_G(u)):\ S \underset{G}{\Rightarrow} u, \mu_G(u) = \mu_{\mathcal{L}}(u)\right\}.$$
Грамматика G называется грамматикой, *порождающей* нечеткий язык $\mathcal{L}$. Тип языка определяется типом порождающей грамматики. Исследован ряд вопросов соотношения нечетких языков и максимально-взвешенных грамматик, в частности, условия представления в канонических формах Хомского и Грейбаха.
Пусть $\mathcal{R}^+$ — совокупность всех конечных неотрицательных действительных чисел такая, что $\mathcal{R}_\infty = \mathcal{R}^+ \cup \{\infty\}$.
Тогда *финитарным нечетким языком* $\mathcal{L}$ назовем нечеткое подмножество V_T^* с функцией принадлежности
$$\mu_{\mathcal{L}}:\ V_T^* \to \mathcal{R}^+.$$

Утверждение 1. Если $\mathcal{L}$—нечеткий КС-язык на V_T, тогда $\mathcal{L}(V_T) = \mathcal{L}(G_r)$ для некоторой максимально-взвешенной КС-грамматики $G_r = \langle V_N, V_T, P, S, \mathcal{R}^+, \varphi\rangle$, удовлетворяющей следующим условиям:

а) начальный символ S не появляется в правой части правил подстановки $A \underset{p}{\xrightarrow{\varphi(p)}} \alpha \in P$;

б) для каждых $A \in V_N$, $\alpha \in V^*, A \xrightarrow{\varphi_1} \alpha \in P$, $A \xrightarrow{\varphi_2} \alpha \in P$ предполагается $\varphi_1 = \varphi_2 > 0$;

в) для каждого $A \in V_N$ существуют

$\mu, \nu \in V_T^*$

и последовательность правил подстановки

ω: $S \underset{\omega}{\Rightarrow} \mu A \nu, \quad \mu\left(S \underset{\omega}{\Rightarrow} \mu A \nu\right) > 0;$

г) для каждого $A \in V_N$ существует $\alpha \in V_T^*$ и последовательность правил подстановки

ω: $\mu\left(A \underset{\omega}{\Rightarrow} \alpha\right) > 0.$

Грамматика G_r называется *приведенной* максимально-взвешенной грамматикой.

Приведенная максимально-взвешенная (МВ) КС-грамматика называется *финитарной* МВ КС-грамматикой, если для каждого-$A \in V_N$ и последовательности правил подстановки ω $\mu\left(S \underset{\omega}{\Rightarrow} A\right) \leqslant 1.$

Каноническая форма Хомского. $\mathscr{L}$ является финитарным нечетким КС-языком тогда и только тогда, когда $\mu_{\mathscr{L}} = \mu_G$ для некоторой приведенной МВ КС-грамматики *G*, правила вывода которой имеют вид:

$$S \xrightarrow{1} \lambda, \quad A \underset{p}{\xrightarrow{\varphi(p)}} a, \quad A \underset{p}{\xrightarrow{\varphi(p)}} BC,$$

где $A, B, C \in V_N$, $a \in V_T$.

Каноническая форма Г р е й б а х а. $\mathscr{L}$ является финитарным нечетким КС-языком тогда и только тогда, когда $\mu_{\mathscr{L}} = \mu_G$ для некоторой приведенной максимально-взвешенной КС-грамматики *G*, правила вывода которой имеют вид:

$$S \xrightarrow{1} \lambda, \quad A \underset{p}{\xrightarrow{\varphi(p)}} a\gamma,$$

где $A \in V_N$, $a \in V_T$, $\gamma \in V_N^*$, длина слова γ не более двух символов.

Из приведенных выше утверждений следует, что любая максимально-взвешенная КС-грамматика может быть приведена к канонической форме, если порожденный ей НЯ является финитарным.

Пороговые языки. Каждому НЯ может быть поставлено в соответствие целое семейство пороговых языков.

Определение 4. *Пороговый язык* $\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \lambda, >)$ для нечеткого языка $\mathscr{L}_1$ на V_T и для $\lambda \in \mathscr{R}_\infty$ определяется следующим образом:

$$\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \lambda, >) = \{u: u \in V_T^*, \mu_{\mathscr{L}_1}(u) > \lambda\}.$$

Аналогично определяются языки:

$$\mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \lambda, =), \quad \mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \lambda, \geqslant); \quad \mathscr{L}(\mathscr{L}_1, \lambda_1, \lambda_2) = \\ = \{u: u \in V_T^*, \lambda_1 < \mu_{\mathscr{L}_1}(u) \leqslant \lambda_2\}.$$

Каждой нечеткой порождающей грамматике аналогично ставятся в соответствие пороговые языки.

Пример 5. Для 1-кратной нечеткой КС-грамматики, приведенной в табл. 5, пороговыми языками являются:

$$\mathscr{L}(G,\ 0{,}95,\ >) = \varnothing;$$
$$\mathscr{L}(G,\ 0{,}85,\ >) = \{a,\ b,\ c\};$$
$$\mathscr{L}(G,\ 0{,}75,\ >) = \{a^{2n-1}b^{2n-1}C^{2n-1} \mid n > 0,\quad n \in \mathbf{N}\};$$
$$\mathscr{L}(G,\ 0{,}65,\ >) = \{a^n b^n c^n \mid n > 0,\quad n \in \mathbf{N}\};$$
$$\mathscr{L}(G,\ 0,\ >) = \{a^p b^q c^r \mid p,\ q,\ r \in \mathbf{N} \setminus \{0\}\},$$

где N — множество натуральных чисел. Отметим, что язык $\mathscr{L}(G,\ 0{,}65,\ >)$ является КЗ-языком.

Для пессимистических грамматик число пороговых языков каждого из перечисленных типов конечно и зависит от числа различных оценок праинл подстановки.

Для любой нечеткой пессимистической грамматики *G,* номер типа которой *i* приведен в табл. 2, в литературе доказано следующее:

а) если *G* типа *i* (i = 0, 1, 2, 3), то для любых λ $\mathscr{L}(G,\ \lambda,\ >)$ типа *i;*

б) если *G* типа *i* (i = 0, 3), то $\mathscr{L}(G,\ \lambda,\ \geqslant)$ типа *i;*

в) если *G* типа *i* (i = 3), то $\mathscr{L}(G,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ и $\mathscr{L}(G,\ \lambda,\ =)$ типа *i;*

г) если *G* тина *i* (i = 0, 2), то $\mathscr{L}(G,\ \lambda_1,\ \lambda_2)$ и $\mathscr{L}(G,\ \lambda,\ =)$ могут не быть типа *i*.

В литературе доказано, что семейство пороговых языков, порожденных максимально-взвешенными КС-грамматиками, содержит в себе семейство КС-языков, но не является множеством всех КЗ-языков, так как существует КЗ-язык, который не содержится в указанном семействе.

Были исследованы максимально-взвешенные регулярные грамматики. Установлено, что они являются более общими, чем пессимистические грамматики в том смысле, что порождают нерегулярные языки.

8.4. Описание нечетких регулярных языков регулярными выражениями

Регулярные языки, порождаемые регулярными грамматиками, могут быть описаны регулярными алгебраическими выражениями. Для формулировки определения регулярного выражения введем следующие обозначения : если $a \in V_T^*$, то μ_a определяет язык в алфавите V_T :

$$\mu_a(\gamma) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \gamma = a, \\ 0, & \text{если} \quad \gamma \neq a; \end{cases}$$

если $\varnothing$— пустое множество, то $\mu_\varnothing$ определяет язык в алфавите V_T: $\mu_\varnothing(\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in V_T^*$.

Определение 5. Множество $\mathcal{R}_0$ *регулярных* L-выражений в конечном непустом алфавите V_T определяется индуктивно следующимобразом:

1) $\varnothing \in \mathcal{R}_0$;
2) $\Lambda \in \mathcal{R}_0$;
3) $a \in \mathcal{R}_0$ для всех $a \in V_T$;
4) $\alpha a \in \mathcal{R}_0$ для всех $a \in V_T$ и $\alpha \in L$;
5) $\alpha_1 \vee \alpha_2 \in \mathcal{R}_0$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_0$;
6) $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \in \mathcal{R}_0$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{R}_0$;
7) $\alpha^* \in \mathcal{R}_0$ для всех $\alpha \in \mathcal{R}_0$;
8) не существует других регулярных выражений кроме тех, которые определяются в пунктах 1)—7).

В определении 5 символы $\vee$, $\wedge$, $*$ обозначают операции объединения, конкатенации и замыкания.

Пусть α, α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{R}_0$, $a \in L$. Каждое регулярное L-выражение, $\alpha \in \mathcal{R}_0$, определяет *L-язык* $\mathcal{L}(\alpha)$ в алфавите V_T следующим образом:

1) если $\alpha \in V_T \cup \{\varnothing, \wedge\}$, то $\mathcal{L}(\alpha) = \{(\alpha, \mu_\alpha(\alpha))\}$;
2) если $\alpha = a\alpha_1$, то $\mathcal{L}(\alpha) = a \wedge \mathcal{L}_1(\alpha_1)$;
3) если $\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$, то $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}_1(\alpha_1) \cup \mathcal{L}_2(\alpha_2)$;
4) если $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$, то $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha_1)\mathcal{L}(\alpha_2)$;
5) если $\alpha = \alpha_1^*$, то $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}_1^*(\alpha_1)$.

Пример 6. Пусть имеется регулярное L-выражепие α = 0,7 $a \wedge b \vee c$. Соответствующий нечеткий язык следующий:

$$\mathcal{L}(0{,}7a \wedge b \vee c) = \mathcal{L}_1(0.7a \wedge b) \cup \mathcal{L}_2(c) =$$
$$= \mathcal{L}_3(0{,}7a)\mathcal{L}_4(b) \cup \mathcal{L}_2(c) = 0{,}7 \wedge \mathcal{L}_5(a)\mathcal{L}(b) \cup \mathcal{L}_2(c) =$$
$$= 0{,}7\{(a, 1)\}\{(b, 1)\} \cup \{(c, 1)\} = \{((a, b), 0{,}7)\} \cup \{(c, 1)\} =$$
$$= \{(ab, 0{,}7), (c, 1)\}.$$

8.5. Определение нечеткого автомата

Рассмотрим один из типов нечетких автоматов (НА), играющий важную роль в изучении НЯ. Будем считать, что автомат допускает слово некоторого НЯ, если при подаче на вход автомата последовательности сигналов, соответствующей анализируемому слову, НА генерирует выходной сигнал, указывающий на степень принадлежности данного слова нечеткому языку. Таким образом автомат может распознавать НЯ.

Определение 6 . *Нечетким конечным автоматом* называется упорядоченная шестерка

$A = \langle U,\ X,\ Y,\ s_0,\ \delta,\ \sigma\rangle,$

где $U = \{a_1, \ldots, a_m\}$ — конечное множество входов, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество состояний, $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$ — конечное множество выходов, $\delta\colon X \times U \times X \to L$ — функция переходов, $\sigma\colon X \times Y \to L$ — функция выходов, s_0 — нечеткое начальное состояние $s_0 \in \mathcal{F}_2(X) \quad (s_0 : X \to L)$.

В определении 6 функция δ порождает множество нечетких матриц переходов $(T_u)_{u \in U} = \{\delta_{x_i x_j}(u)\},\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n,$ функция *σ* порождает нечеткую матрицу выхода

$\sigma = (\sigma_{x_i y_j}),\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\quad 1 \leqslant j \leqslant p.$

Из определения НА следует ряд классических определений.

Например, если $\delta\colon X \times U \times X \to \{0,\ 1\}$ и из некоторых состояний $x_0 \in X$ возможен переход в несколько состояний $x_1, \ldots, x_r \in X$, то это автомат *недетерминированный.* Если для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существует единственное $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что

$$\delta_{x_i x_j}(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = j_i, \\ 0, & \text{если } j \neq j_i, \end{cases}$$

то это *детерминированный* автомат.

Пусть *U** — множество всевозможных входных последовательностей, тогда функция переходов $\delta\colon X \times U^* \times X \to L$ вычисляется следующим образом:

$$\delta_{xx'}(\lambda) = \delta(x, \lambda, x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x' = x; \\ 0, & \text{если } x' \neq x, \end{cases}$$

$$\delta_{xx'}(\theta) = \delta(x, \theta, x') = \bigvee_{x_1, \ldots, x_{k-1} \in X} (\delta(x, u_1, x_1) \wedge \delta(x_1, u_2, x_2) \wedge \ldots \wedge \delta(x_{k-1}, u_k, x')),$$

где $\theta = u_1, u_2 \ldots u_k \in U^k,\ \theta \neq \lambda.$

Аналогично определяется матрица переходов:

$$T_\Lambda = I,$$
$$T_\theta = T_{u_1} \circ T_{u_2} \circ \ldots \circ T_{u_k}.$$

Если на вход нечеткого автомата *A* подается последовательность θ, то выход автомата вычисляется следующим образом:

$$\mu_A(\theta) = s_0 \circ T_\theta \circ \sigma.$$

Рассмотрим специальный вид НА, у которого единственный выход $Y = \{y_0\}$. В этом случае нечеткий выход определяется вектором $\sigma_i = (\mu_1, \ldots, \mu_k)$, где μ_i указывает на степень получения в состоянии x_i выхода y_0.

Можно ввести еще более специальный тип НА, определяя множество финальных (заключительных) состояний $X_F \subseteq X$ и функцию выходов

$$\sigma = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \qquad \mu_i = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in X_F, \\ 0, & \text{если } x_i \notin X_F. \end{cases}$$

Если еще предположить, что начальное состояние четкое $x_0 \in X$, т. е.

$$\sigma_0 = (i_1, \ldots, i_n), \quad i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j = x_0, \\ 0, & \text{если } x_j \neq x_0, \end{cases}$$

то значения выхода (значение функции отклика) вычисляется следующим образом:

$$\mu_A(\theta) = \bigvee_{x_j \in X_F} \delta_{x_0 x_j}(\theta).$$

Различные типы автоматов могут быть определены в зависимости от множества оценок *L* и операций, используемых в формуле вычисления функции переходов (см. табл. 6).

Таблица 6

Тип нечеткого автомата	Используемые операции $\vee$	Используемые операции $\wedge$	Множество оценок L
Нечеткий автомат [32, 20, 18]	max	min	Полная дистрибутивная решетка [0, 1]
R-нечеткий автомат [30, 31]	+	·	Упорядоченное полукольцо R
Автомат с распределением возможностей [9]	Специально построенные операции		4-значная алгебра Поста
Максимально-взвешенный автомат [22, 26]	max	·	Множество неотрицательных действительных чисел
Нечетко-нечеткий автомат [13]	$\widetilde{\max}$	$\widetilde{\min}$	$\mathcal{F}_n$ ([0, 1]) — множество нормализованных выпуклых нечетких множеств

Если в качестве множества входов *U* рассматривать множество терминальных символов V_T, то функция отклика нечеткого автомата задает нечеткий язык $\mathcal{L}(V_T)$ в алфавите V_T. В этом случае говорят, что автомат *A* распознает язык $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A)$. Следующий пример иллюстрирует возможность построения НА, распознающего язык, порожденный регулярной грамматикой.

Пример 7. Рассмотрим регулярную НГ с алфавитами $V_T = \{a, b\}$, $V_N = \{S, A, B\}$ и правилами подстановки

$p_1: S \xrightarrow{1} aB,$

$p_2: B \xrightarrow{0,7} bA,$

$p_3: A \xrightarrow{0,6} aB,$

$p_4: B \xrightarrow{0,8} b.$

Грамматика G порождает НЯ $\mathcal{L}_{ab} = \{(ab,\ 0{,}8),\ ((ab)^n,\ 0{,}6), n = 2,\ 3,\ \ldots\}$.

Нечеткий автомат A, распознающий язык $\mathcal{L}_{ab}$, строится следующим образом:

$$U = V_{\text{т}} = \{a,\ b\},$$

$$Y = \{y\} \text{ — любое одноэлементное множество},$$

$$X = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\},$$

$$s_0 = \{0\},\quad \sigma_0 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$X_F = \{4\},\quad \sigma = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1);$$

$$T_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad T_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0 & 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Диаграмма переходов синтезируемого автомата приведена на рис. 2.

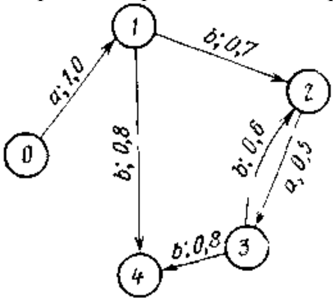


Рис. 2. Диаграмма переходов синтезируемого автомата

Если на вход автомата подать слово ab, то выход вычисляется следующим образом:

$$\mu_A(ab) = \sigma_0 \circ T_a \circ T_b \circ \sigma^{\text{т}} = 0{,}8.$$

Если па вход автомата подается слово $abab$, то

$$\mu_A(abab) = \sigma_0 \circ T_a \circ T_b \circ T_a \circ T_b \circ \sigma^T = \\ = 0{,}6.$$

Аналогично вход вычисляется для любого слова $(ab)^n, \quad n = 3,\ 4,\ \ldots$

Следовательно, построенный автомат распознает язык $\mathcal{L}_{ab}$.

Покажем, что слово *aba*, не принадлежащее языку $\mathcal{L}_{ab}$, автоматом не распознается:

$$\mu_A(aba) = \sigma_0 \circ T_a \circ T_b \circ T_a \circ \sigma^T = \sigma_0 \circ T_{ab} \circ T_a \circ \sigma^T =$$

$$= (1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0) \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \wedge 0{,}7 & 0 & 1 \wedge 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 \wedge 0{,}7 & 0 & 0{,}6 \wedge 0{,}8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ$$

$$\circ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0\quad 0\quad 0\quad 0{,}6\quad 0) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

8.6. Распознавание языков нечеткими автоматами

Приведем некоторые свойства распознавания нечетких языков нечеткими автоматами.

Замкнутость относительно операции объединения. Пусть A_1, A_2— нечеткие автоматы, тогда существует автомат $A = A_1 \cup A_2$ такой, что

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A_1) \cup \mathcal{L}(A_2).$$

Автомат A определяется следующим образом:

$$U = U_1 \bigcup U_2, \quad X = X_1 \bigcup X_2, \quad Y = Y_1 \bigcup Y_2,$$

$$\delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad s_0 = (s_{01}, s_{02}), \quad \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Замкнутость относительно операции пересечения. Пусть A_1 и A_2 — нечеткие автоматы, тогда существует НА $A = A_1 \otimes A_2$ такой, что

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{L}(A_2).$$

Автомат A определяется следующим образом:

$$U = U_1 \times U_2, \quad X = X_1 \times X_2, \quad Y = Y_1 \times Y_2,$$

$$\delta = \delta_1 \times \delta_2, \quad s_0 = s_{01} \times s_{02}, \quad \sigma = \sigma_1 \times \sigma_2.$$

Существование автомата $\bar{A}$. Для любого НА A существует автомат $\bar{A}$ такой, что $\mathscr{L}(\bar{A}) = \overline{\mathscr{L}(A)}$. Автомат $\bar{A}$ является минимаксным автоматом:

$$1 - \mu_A(\theta) = \overline{s_0 \circ T_\theta \circ \sigma} = \bar{s}_0 \,\bar{\circ}\, \bar{T}_\theta \,\bar{\circ}\, \bar{\sigma} = \mu_{\bar{A}}(\theta),$$

где $\bar{\circ}$ — min max— композиция вместо композиции max min.

Распознавание конкатенации языков. Если A_1 и A_2 нечеткие автоматы, то существует автомат $A = A_1 \circ A_2$, распознающий конкатенацию языков:

$$\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}(A_1)\mathscr{L}(A_2).$$

Распознавание замыкания Клини. Для любою НА A существует автомат $\hat{A}$, распознающий замыкание Клини:

$$\mathscr{L}(\hat{A}) = \hat{\mathscr{L}}(A).$$

В литературе определены достаточные условия для распознавания нечетким автоматом нечеткого языка, который является своим собственным замыканием Клини:

а) если для любого $a \in U$ и любого $x_i \in X$

$$\sigma(x_i,\ a,\ x_i) = 1;$$

б) $$s_0 \circ \sigma = 1,$$

тогда $\mathscr{L}(A)$ — замкнутый язык, т. е. $\hat{\mathscr{L}}(A) = \mathscr{L}(A)$. Из-за краткости доказательства приведем его полностью:

$$\mu_A(\Lambda) = s_0 \circ T_\Lambda \circ \sigma = s_0 \circ \sigma = 1.$$

Так как δ_a рефлексивна и T_θ также рефлексивна для каждого $\theta \in U^*$, то $T_{\theta\theta'} = T_\theta \circ T_{\theta'} \supseteq T_\theta$ и, следовательно,

$$\mu_A(\theta\theta') = s_0 \circ T_{\theta\theta'} \circ \sigma \geqslant s_0 \circ T_{\theta'} \circ \sigma = \mu_A(\theta') > \min\left(\mu_A(\theta), \mu_A(\theta')\right).$$

Распознавание пороговых языков. Пусть $\mathscr{L}(A, \alpha)$—пороговый язык нечеткого языка $\mathscr{L}(A)$, распознаваемого нечетким автоматом А:

$$\mathscr{L}(A,\ \alpha) = \{\theta \in U^*,\ \mu_A(\theta) > \alpha\},$$

тогда для любого $\alpha_0 \in [0,\ 1)$ существует НА A_0 такой, что

$$\mathscr{L}(A,\ \alpha) = \mathscr{L}(A_0,\ \alpha_0).$$

8.7. Нечеткие регулярные грамматики и автоматы

Приведем основные результаты о соотношении нечетких регулярных языков, нечетких автоматов и нечетких регулярных грамматик.

Рассмотрим нечеткий *ограниченный* автомат, у которого начальное состояние s_0 четкое, F — четкое множество финальных состояний и σ — функция из F в одноэлементное множество выходов

$\{y\}$: $\sigma(x_j, y) = 1$, если $x_j \in F$ и $\sigma(x_j, y) = 0$ иначе. Покажем, что нечеткий автомат *A,* определенный в 8.5, эквивалентен нечеткому ограниченному автомату A_0, т. е. распознаваемые ими языки совпадают: $\mathscr{L}(A) = \mathscr{L}(A_0)$.

Пусть $A = \langle U, X, Y, s_0, \delta, \sigma\rangle$; тогда эквивалентный ему ограниченный автомат — следующий:

$$A' = \langle U', X', Y', s_0', \delta', \sigma'\rangle,$$

где $U' = U$; $X' = X \cup \{s_0', y\}$, s_0'— новое начальное состояние, δ' — новая функция переходов, определяемая следующим образом:

$$\delta'(s_0', a, s) = \max_{s' \in Y} \min\left(\mu_{s_0}(s'), \delta(s', a, s)\right) \quad \forall s \in X,$$

$$\delta'(s, a, s') = \delta(s, a, s') \quad \forall s, s' \in X, \quad \forall a \in U,$$

$$\delta'(s, a, s_0') = 0 \quad \forall s \in X',$$

$$\delta'(s, a, y) = \max_{s' \in X} \min\left(\delta(s, a, s'), \sigma(s', y)\right) \quad \forall s \in X,$$

$$\delta'(y, a, s) = 0 \quad \forall s \in X \quad \text{или} \quad s = s_0',$$

$$\delta'(s_0', a, y) = \max_{s \in X}\left(\delta(s_0', a, s), \sigma(s, y)\right),$$

$$Y = \{y'\} \text{ — специально определенный выход,}$$

$$\sigma'(s, y') = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad s = y; \\ 0, & \text{если} \quad s \in X \cup \{s_0'\}. \end{cases}$$

Конечным состоянием автомата A_0 определяем *y.*

Если задана входная последовательность $\theta = u_1 u_2 \ldots u_k$, $u_i \in U$, то функция выхода автомата *A* совпадает с выходом автомата A_0 так, как

$$\mu_A(\theta) =$$

$$= \max_{s, s_1, \ldots, s_k \in X} \min\left(\mu_{s_0}(s), \delta(s, u_1, s_1), \ldots, \delta(s_{k-1}, u_k, s_k), \sigma(s_k, y)\right) =$$

$$= \max_{s, s_1, \ldots, s_k} \min\left(\delta'(s_0', u_1, s_1), \delta'(s_1, u_2, s_2), \ldots, \delta'(s_{k-1}, u_k, y)\right) =$$

$$= \mu_{A_0}(\theta).$$

В преобразованиях учитывалось то, что s'_0 — четкое состояние и $\sigma'(y, y') = 1$. При $\kappa - 1$ использовалось выражение для $\delta(s_0', a, y)$.

Утверждение 2 . Для заданной нечеткой регулярной грамматики *G* существует НА *A* такой, что

$$\mathscr{L}(G) = \mathscr{L}(A)$$

и наоборот.

Приведем доказательство.

а) Пусть $G = \langle V_T, V_N, S, P, L, \varphi\rangle$ — нечеткая регулярная грамматика, тогда соответствующий нечеткий автомат

$$A = \langle U, X, Y, s_0, \delta, F\rangle,$$

где $U = V_T$, $X = J \cup \{S\}$, J — множество номеров правил подстановки из P, $Y = \{y\}$ — любое одноэлементное множество, $s_0 = S$ — четкое начальное состояние,

$$F = \left\{l:\ l \in J,\ \left(A \xrightarrow[p_l]{\varphi(b)} a\right) \in P\right\}$$

— множество конечных состояний.

Для любых $x_i, x_j \in X$, $a \in U$ $\delta(x_i, a, x_j) = \varphi(p_j)$, если либо x_i — номер правила подстановки $A \xrightarrow[p_i]{} bB$ и x_j — номер правила подстановки $B \xrightarrow[p_j]{} a$ или $B \xrightarrow[p_j]{} aC$, либо $x_i = S$ и x_j — номер правила подстановки $s \to aA$; в противном случае $\delta(x_i, a, x_j) = 0$. Можно проверить, что любая последовательность переходов автомата из начального состояния в конечное состояние имеет ненулевое значение функции принадлежности $\mu_A(\theta) = s_0 \circ T_\theta \circ F$ тогда и только тогда, когда входное слово θ порождается грамматикой G.

б) Пусть $A_0 = \langle U, X, Y, s_0, \delta, F\rangle$ — нечеткий ограниченный автомат. Эквивалентная нечеткая грамматика определяется следующим образом: $V_T = U$, $V_N = X \setminus F$, $S = s_0$, P содержит правила подстановки вида $x_i \xrightarrow[p_j]{} a x_j$ тогда, когда $\delta(x_i, a, x_j) = \delta_i > 0$, и содержит правила подстановки вида $x_i \to a$ тогда, когда $\delta(x_i, a, x_j) = \delta_j > 0$ и $x_j \in F$ (x_i может совпадать с начальным состоянием s_0).

Так как доказано, что каждый регулярный язык, построенный на основе регулярных выражений, распознается некоторым НА и любой НА распознает только такой НЯ, который порождается некоторым регулярным выражением, то справедливо фундаментальное соотношение

$$\{\mathscr{L}(G_p)\} = \{\mathscr{L}(A)\} = \{\mathscr{L}(\mathscr{R}_0)\},$$

утверждающее, что множества языков, порождаемых нечеткими регулярными грамматиками, нечеткими регулярными L-выражениями и распознаваемых нечеткими автоматами, совпадают.

В ряде работ получены аналогичные результаты для нечетких регулярных грамматик и нечетких автоматов с операциями «сумма» и «произведение».

8.8. Реализация нечеткими автоматами временных соотношений

Рассмотрим возможность практического использования модели нечеткого автомата для описания функционирования дискретных управляющих устройств, в частности, для анализа реальных временных процессов, протекающих в таких устройствах. В теории автоматов и в теории логического синтеза дискретных управляющих устройств используются модели различного типа (классическая модель абстрактного конечного автомата, микропрограммный автомат, апериодический автомат, секвенциальный автомат и т. п.). Все эти модели обладают следующей особенностью. В них явно не описывается временная реализация алгоритма функционирования. Реальное время заменено в этих моделях набором возможных последовательностей смены внутренних состояний автомата и правилами выбора в данный такт работы того или иного перехода на той или иной последовательности. Сами такты работы не связаны с длительностью их реализации в физическом времени. Подобные допущения ограничивают возможности таких моделей. Удобные при структурном синтезе и анализе функционирования исследуемых устройств, они становятся явно неудобными при анализе процессов, протекающих в реальных устройствах во времени, и при синтезе этих устройств с учетом качества их функционирования во времени.

Для задания функционирования автомата в реальном времени необходимы распределения моментов смены сигналов и их значений, а также — вероятностные распределения для интервалов смены сигналов и значений сигналов. Однако на практике в подавляющем большинстве случаев нет априорной информации о необходимых вероятностных распределениях. Поэтому при решении задач, возникающих при анализе и синтезе логических устройств, представляется естественным вместо вероятностных распределений использовать нечеткие распределения.

Рассмотрим вначале простой пример, с помощью которого попытаемся объяснить суть предлагаемого подхода.

Пример 8. Пусть на каком-либо из этапов синтеза получена диаграмма переходов синтезируемого автомата, представленная на рис. 3.

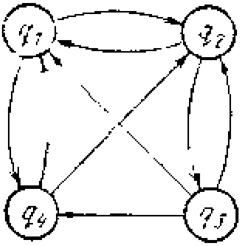


Рис. 3 Укрупненная диаграмма переходов синтезируемого автомата

На ней показаны только те переходы, которые необходимо реализовать технологически. Если для кодирования множества внутренних состояний синтезируемого автомата мы будем использовать двухпозиционный код, то, как это следует из диаграммы переходов, нам не удастся избавиться от состязаний. Однако пусть нам, например, известно, что из двух триггеров, которые будут использоваться для записи текущего состояния автомага в реальной схеме, переходный процесс протекает значительно быстрее, чем в другом. Слова «значительно быстрее», которые мы только что использовали, должны пониматься качественно. Пока мы не предполагаем никакой количественной оценки этих слов.
Будем для удобства считать, что «значительно быстрее» перекидывается триггер, используемый для кодирования первой позиции в коде состояния. Опишем теперь процедуру выбора кодов состояний. Если состояние q_3 закодировать кодом 11, то при переходе в состояние с кодом 00 в качестве промежуточного состояния возникнет код состояния 01. При переходе же от кода 00 к коду 11 — возникнет код промежуточного состояния 10. Учитывая это, а также особенности исходной диаграммы переходов, можно предложить следующее кодирование состояний q_1 — 00, q_2 — 01, q_4 —10 и q_3, — 11. На рис. 4 показана результирующая диаграмма переходов автомата.

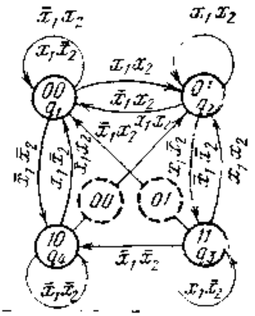


Рис. 4. Закодированная диаграмма переходов

Из этой диаграммы видно, что функция переходов автомата будет реализовываться всегда правильно за исключением перехода 11 →10 → 00. Однако из-за того, что первый триггер перекидывается «значительно быстрее» второго триггера, то автомат с подобным кодированием состоянии будет ра ботать «почти всегда правильно». Отметим, что инженер-практик, имеющий априорную информацию о скорости срабатывания триггеров, подобную вышеприведенной информации, выберет кодирование такого же типа.

8.8.1. Нечеткая логика времени.

Только что рассмотренный пример показывает, что целесообразно создать логику времени, *в* которой можно было бы пользоваться такими нечеткими понятиями, как «значительно быстрее», «ранее чем», «вскоре после этого» и т. п. Опишем элементы логики такого типа.

Через t_i будем обозначать некоторый временной интервал, отсчитываемый в абсолютном или относительном физическом времепи. Если нас будут интересовать границы интервала t_i, то этот же интервал будет записываться как (α_i, β_i). В отличие от обычного понимания событий, происходящих во времени, мы будем трактовать их как нечеткие события. Нечеткое событие на интервале t_i будет обозначаться как $\langle a, t_i, \mu_a(t_i)\rangle$. Здесь a — наименование события, t_i — временной интервал, а $\mu_a(t_i)$ — функция принадлежности события a временному интервалу t_i.

Вместо $\mu_a(t_i)$ будем использовать специальные нечеткие кванторы типа «в подавляющем большинстве случаев», «почти всегда», «часто», «примерно в половине случаев», «редко», «почти никогда», «в исключительных случаях». Эти кванторы (их список, конечно, можно продолжить, но мы для краткости не будем этого делать) будем обозначать как $\rtimes^{i}$ (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Таким образом, запись вида $\rtimes^{2} a\,(t_i)$ содержательно будет трактоваться так: событие *a* происходит в интервале t_i почти всегда. Кроме указанных размытых кванторов в нашей логике будут использоваться различные операторы типа: «ранее», «до», «после того как произошло *a*» и т. п. Будем рассматривать временную логику в специальной секвенциальной форме, удобной для приложений к теории автоматов.

8.8.2. Секвенциальные автоматы.

Приведем определение секвенциального автомата.

Секвенциальным автоматом называется совокупность секвенций следующего вида:

$$(X_i S_j \vdash S_h)_h, \quad (X_i S_j \vdash Y_l)_d.$$

Здесь $h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ d = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ X_i$ — слова из входного алфавита, Y_l — слова из выходпого алфавита, S_j, S_h — кодовые слова для кодирования внутренних состояний автомата. Запись $\varphi \vdash \psi$, где φ и ψ есть функции алгебры логики, называется секвенцией и обладает следующим смыслом: если на некотором наборе аргументов φ обращается в единицу, то ψ на этом наборе также обращается в единицу. Секвенциальный автомат реализуется с помощью специальной секвенциальной структуры. Для примера на рис. 5 показана подобная реализация для секвенциального автомата, заданного следующим секвенциальным описанием (у реализуемого автомата функция выхода совпадает с функцией перехода):

$$\begin{aligned} x_1\bar{x}_2 s_1 &\vdash \bar{s}_1 s_2; \\ x_1 x_2 s_2 &\vdash \bar{s}_2 s_3; \\ \bar{x}_1 s_2 &\vdash s_1 \bar{s}_2; \\ (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)\, s_3 &\vdash s_1 \bar{s}_3. \end{aligned}$$

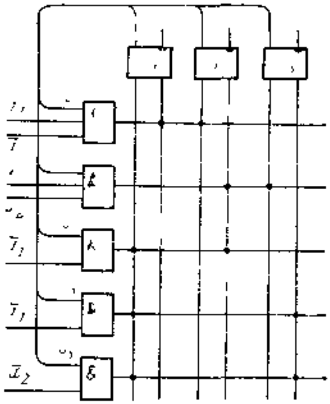


Рис. 5 Структурная реализация обычного секвевциального автомата.

8.8.3. Нечеткие секвенциальные автоматы.

Обобщим теперь понятие секвенциального автомата за счет вводепия в структуру секвенций нечетких временных кванторов, рассмотренных выше. Будем говорить, что нам задан секвенциальный автомат с нечетким входом, если секвенциальное задание автомата имеет вид:

$$\left(\text{Ӿ}_{b_h}^{W_h}(X_i)\,S_j \vdash S_h\right)_h;$$

$$\left(\text{Ӿ}_{b_d}^{W_d}(X_i)\,S_j \vdash Y_l\right)_d.$$

При этом секвенция вида $\text{Ӿ}_{b_v}^{W_v}\varphi \vdash \psi$ будет пониматься нами в следующем смысле: на интервале b_v со степенью достоверности, определяемой квантором Ӿ^{W_v}, функция φ принимает единичное значение, с этой же степенью достоверности на этом интервале *ψ* также принимает единичное значение. Вид квантора Ӿ^{W_v} может быть различным для различных строк задания секвенциального описания. Если ипдекс b_v у квантора отсутствует, то это означает, что принимает едипичное значение с достоверностью Ӿ^{W_n} в любой момент физического времени.

Аналогично будем говорить, что нам задан секвенциальный автомат, нечеткий по состояниям, если секвенциальное описание этого автомата имеет вид:

$$\left(X_i \text{Ӽ}_{b_h}^{W_h}(S_j) \vdash S_k\right)_h;$$

$$\left(X_i \text{Ӽ}_{b_d}^{W_d}(S_j) \vdash Y_l\right)_d.$$

Если ипдекс b_v у квантора отсутствует, то это означает, что в любой момент врсмепи автомат с достоверностью Ӽ^{W_h} будет находиться в состоянии S_j.

Наконец, будем говорить, что задан секвепцпальный автомат с нечеткими переходами, если его секвенциальное описание имеет следующий вид:

$$\left(X_i S_j \vdash \text{Ӽ}_{b_h}^{W_h}(S_{k_1}) \vee \ldots \vee \text{Ӽ}_{b_h}^{W_{h_r}}(S_{h_r})\right)_h;$$

$$(X_i S_j \vdash Y_k)_d.$$

Если указания на временные интервалы у кванторов отсутствуют, то это означает, что в любой момент времени автомат переходит в одно из указанных в правой части секвенций состояний с заданной достоверностью.

Возможны и более сложные модели секвенциальпых нечетких автоматов, когда исследуемый автомат может быть, например, одновременно нечеткий и по входам и по состояниям.

Автомат, нечеткий по входам, удобно использовать в тех случаях, когда производится анализ процессов, протекающих в сложных схемах, декомпозированных на определенные блоки. В этом случае, на основании логики работы схемы и физических особенностей работы ее элементов, удается оценить некоторую качественную априорную информацию о возможном появлении или непоявлении сигналов на входе того или иного блока. Временные интервалы в этом случае, как правило, отсчитываются не в абсолютном времепи, а в относительном событийном времени. Работа блоков предполагается детерминированной и функционирование каждого блока задается автоматной таблицей.

Автомат, нечеткий по состояниям, также является обычным детерминированным автоматом. Только в отличие от автомата, нечеткого по входам, в этом автомате отсутствует априорная точная информация о его начальном состоянии (текущем состоянии в момент анализа его работы). Наконец, автомат, нечеткий по переходам, но может быть задан обычной автоматной таблицей и является, по существу, подетерминировапным. Точное априорное знание о его текущем внутреннем состоянии и входном сигнале не дает в этом случае возможность однозпачпо определить новое состояние автомата. Такой случай возникает не только тогда, когда работа анализируемого устройства, по существу, недетерминирована, но и тогда, когда в детерминированном автомате возникают различные сбои: состязания с критическим исходом, гонки и т. п.

Отмстим, что при практических расчетах кванторы Ӂ^{i} оцениваются некоторыми числовыми оценками. Вид этих оценок существенно зависит от конкретного вида задачи. Однако , существует довольно устойчивое понимание этих оценок у человека. Это позволяет, не слишком огрубляя результаты, переходить от качественного описания работы нечеткого автомата к описанию его функционирования с использованием числовых оцепок кванторов. При этом в случае оценок нечетких кванторов конъюнкции и дизъюнкции событий соответствуют операции взятия минимума и максимума от этих оценок. В качестве примера проведем анализ временных процессов в автомате, представленном автоматным графом на рис. 6.

Пример 9. Рассмотрим автоматный граф на рис. 6.

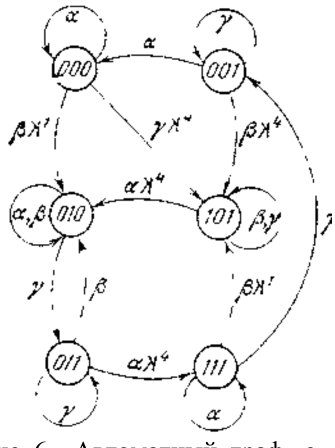


Рис. 6. Автоматный граф с нечеткпмн переходами

Работа этого автомата синхронизируется тактовыми импульсами, подаваемыми от внешнею генератора с интервалами *t*. Состояния автомата закодированы тремя переменными, каждая из которых соответствует одному элементу памяти. Значения функций принадлежности времени срабатывания элементов памяти интервалу *t* соответственно равны: $\mu_1(t)=0{,}5;\ \ \mu_2(t)=0{,}9;\ \ \mu_3(t)=1.$ Под временем срабатывания элемента памяти здесь подразумевается время перехода элемента из состояния 0 в состояние 1 или обратно. Предполагается, что эти времена одинаковы для одпого п того же элемента. Требуется провести анализ условий осуществимости всех переходов автомата и дать тем самым оценку его работоспособности.

Как видно из графа рис. 6, переходы автомата связаны с изменением состояний одного или двух элементов памяти. Для переходов, связанных с изменением состояний двух элементов памяти, необходимо выбрать минимум оценки функции принадлежности для этих элементов. Таким образом, в данттом автомате все переходы могут быть разделены на три группы: «выполнимые во всех случаях», «выполнимые в подавляющем, большинстве случаев» и «выполнимые примерно в половине случаев». Если работу автомата описывать на языке секвенций, то секвенции, описывающие переходы двух последних групп, должны содержать размытые кванторы Ж^{1} и Ж^{4} соответственно. На рис. 6 эти кванторы приписаны соответствующим дугам. На графе не указаны переходы, которые должны быть добавлены в связи с неодновременным переключением элементов памятп.

Пусть теперь дана следующая система секвенций, описывающая работу автомата, у которого имеются нечеткие переходы:

$$\begin{aligned}
\alpha\bar{s}_1 &\vdash \bar{s}_3,\\
\beta\bar{s}_1 \vee \gamma\bar{s}_1 s_3 &\vdash \bar{s}_2,\\
\gamma\bar{s}_2\bar{s}_3 &\vdash s_1,\\
\beta\bar{s}_2\bar{s}_3 &\vdash \bar{s}_1,\\
\gamma\bar{s}_1 s_2\bar{s}_3 &\vdash \text{Ж}^{1} s_3 \vee \text{Ж}^{7}\bar{s}_2 s_3;\\
\alpha s_1\bar{s}_2\bar{s}_3 &\vdash \text{Ж}^{1}\bar{s}_1 s_2 \vee \text{Ж}^{7}\bar{s}_1 s_3.
\end{aligned}$$

Пусть известно также, что наибольшим быстродействием обладает элемент памяти s_3, а наименьшим из всех трех — элемент памяти s_1. Требуется оценить правильность работы автомата.

На основании правил перехода от системы секвенций к графу, нетрудно получить граф автомата, представленный на рис. 7.

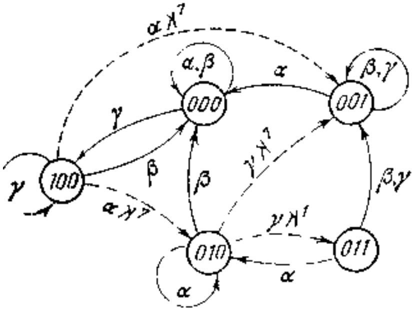


Рис. 7. Автоматный граф с учетом врсмени работы элементов памяти

Для этого необходимо иметь в виду, что каждая секвенция может описывать переходы из нескольких состояний. Причем для исходных состояний берутся коды, в составе которых имеются переменные, находящиеся в левых частях секвенций, а коды состояний, в которые направлены переходы, определяются как коды исходных состояний заменой кодовых переменных, находящихся в правых частях секвенций.

Из графа рис. 7 видно, что переходы, описываемые секвенциями левой части исходной системы (без кванторов), связаны с изменением состояния одного элемента памяти. В связи с чем работа автомата в этой части сомнений не вызывает. Рассмотрим пятую секвенцию исходной системы, описывающую нечеткие переходы. Эти переходы показаны на графе рис. 7 пунктиром.

Пусть появление входного слова γ на автомат, находящийся в состоянии с кодом 010, вызывает изменение состояний двух элементов памяти s_2 и s_3. Причем элемент s_2 должен изменить свое состояние с 1 на 0, а элемент s_3 — с 0 на 1. Поскольку элемент s_3 является более быстродействующим, в подавляющем большинстве случаев автомат перейдет в состояние с кодом 011. Этот переход справедливо взвешен квантором ꓘ^{1}. Переход в состояние с кодом 001, взвешенный квантором ꓘ^{7}, действительно будет иметь место лишь в редких случаях одновременного изменения состояний двух элементов памяти (случай переключения элемента памяти s_2 раньше элемента s_3 мы исключаем).

Рассмотрим последнюю секвенцию системы. Появление входного слова α на автомат, находящийся в состоянии с кодом 100, вызовет изменение состояний всех трех элемептов памяти. Причем элемент s_1 будет стремиться изменить свое состояние с 1 на 0, а элементы s_2 и s_s — с 0 на 1. По условиям быстродействия элементов памяти автомат в большинстве случаев перейдет в состояние с кодом 101. Отмоченные на графе рис. 7 переходы в состояния с кодами 001 и 010 будут выполняться довольно редко (предполагается, что на быстродействие элементов памяти внешние условия и процессы старения влияют различным образом) и поэтому должны быть взвешены квантором Ӽ^{7} (т. е. так, как указано на графе рис. 7, а не так, как в исходной системе секвенций).

8.9. Обучающийся нечеткий автомат

Рассмотрим автомат с четким входом $i(t)$ и зависимым от времени нечетким отношением перехода $\delta(t)$. Пусть $\tilde{s}(t)$ — нечеткое состояние автомата в момент времени t на конечном множестве состояний $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ и i_l — оценка значения $i(t)$. Состояние автомата в момент времени $(t+1)$ определяется $\min$-$\max$ композицией:

$$\mu_{\tilde{s}(t+1)}(s_k) = \sup_j \ \min\ (\mu_{\tilde{s}(t)}(s_j),\ \mu_{\delta(t)}(s_x, i_l, s_j)),$$

или аналогично ей. Обучение направлено на изменение нечеткой матрицы переходов:

$$\mu_{\delta(t)}(s_k, i_l, s_j) = \mu_{\delta(t-1)}(s_k, i_l, s_k), \qquad j \neq k,$$

$$\mu_{\delta(t)}(s_k, i_l, s_k) = \alpha_k \mu_{\delta(t-1)}(s_k, i_l, s_k) + (1-\alpha_k)\lambda_k(t),$$

где $0 < \alpha_k < 1,\ 0 < \lambda_k(t) \leqslant 1,\ k = 1, \ldots, n$.

Константа λ_k определяет скорость обучения. Начало работы автомата возможно без априорной информации $\mu_{\tilde{s}(0)}(s_k) = 0$ или 1, а также с априорной информацией $\mu_{\tilde{s}(0)}(s_k) = \lambda_k(0)$.

Величина $\lambda_k(t)$ зависит от оценки функционирования автомата. Доказано, что имеет место сходимость матрицы переходов, независимо от того, есть ли априорная информация, т.е. $\mu_{\tilde{s}(0)}(s_j)$ может быть любым значением из интервала $[0, 1]$.

Пример. На рис.1 изображена модель классификации образов.

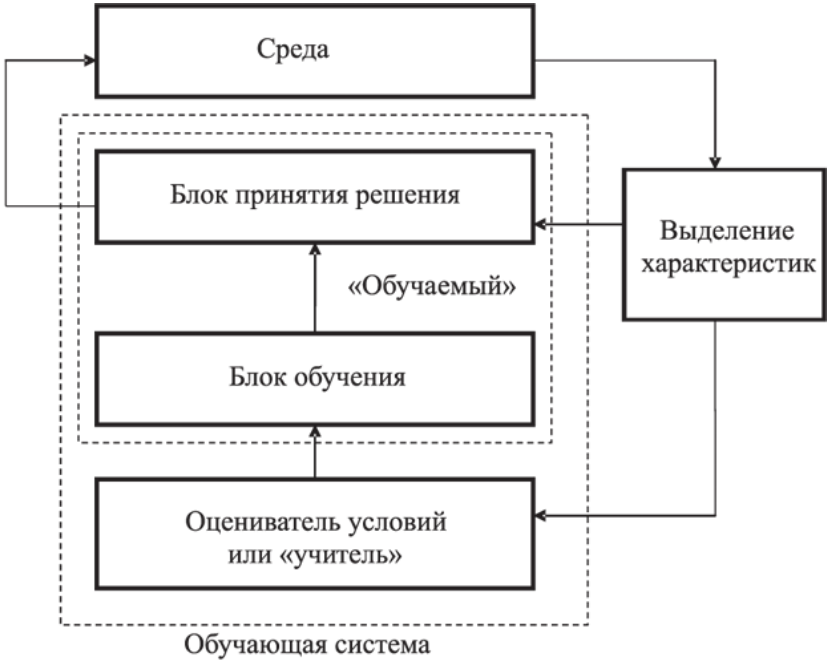


Рис.1

Роль входа и выхода можно кратко объяснить следующим образом. Во время каждого интервала времени классификатор образов получает новый образец x' из неизвестной внешней среды. Далее x' обрабатывается в рецепторе, из которого поступает как в блок "обучаемый", так и в блок "учитель" для оценки. Критерий оценки должен быть выбран так, чтобы его минимизация или максимизация отражала свойства классификации (классов образов). Поэтому, благодаря естественному распределению образов, критерий может быть включен в систему, чтобы служить в качестве учителя для классификатора. Модель обучения формируется следующим образом.

Предполагается, что классификатор имеет в распоряжении множество дискриминантных функций нескольких переменных. Система адаптируется к лучшему решению. Лучшее решение выделяет множество дискриминантных функций, которые дают минимум нераспознавания среди множества дискриминантных функций для данного множества образцов.

Моделируется поиск глобального экстремума функции следующим образом:

- область определения целевой функции делится на некоторое число подобластей (форма подобластей постоянно меняется) и описывается некоторым множеством точек;
- каждой точке приписывается состояние автомата, причем функция принадлежности в каждом состоянии указывает степень близости к оптимуму;
- выбирается состояние с максимальным значением функции принадлежности (эта точка называется кандидатом);
- формируется новая подобласть из точек, окружающих кандидата (размер подобласти растет, когда значение целевой функции в точке кандидата меньше, чем в других точках подобласти, и уменьшается в противоположном случае);
- когда подобласть пересекается с некоторой другой, или две точки-кандидаты находятся в одной подобласти, то подобласти разделяются, если степень разделения большая, или объединяются, если степень разделения малая;
- точки-кандидаты выбираются на этапе локального поиска в подобласти, затем во всей области среди точек-кандидатов ищется глобальная оптимальная точка;
- глобальный и локальный поиск осуществляется поочередно.

Алгоритм поиска глобального экстремума приведен на рис. 2.

Рис. 2.

Пусть S — множество состояний, V — выходной универсум, σ — функция выхода (функция принадлежности, указывающая степень оптимума в состоянии s), $I(t)$— текущее значение целевой функции, I_0— среднее значение $I(t)$.

Используется следующий алгоритм изменения функций перехода и выхода в случае глобального поиска:

если $I(t) > I_0$, то попытка успешна и

$$\mu_{\delta(t)}(s_k, s_j) = \alpha_k \mu_{\delta(t)}(s_k, s_j) + (1 - \alpha),$$

если $I(t) \leqslant I_0$, то попытка неудачна и

$$\mu_{\delta(t+1)}(u_i, s_j) = \alpha \mu_{\delta(t)}(u_i, s_j),$$

где $\alpha = 1 - |(I(t) - I_0)/I_0|$; $\alpha < 1$— гарантируемая сходимость.

В случае локального поиска:

если $I(t) > I_0$, то

$$\mu_{\delta(t+1)}(u_i, s_j) = \alpha\mu_{\delta(t)}(u_i, s_j) + (1 - \alpha),$$

если $I(t) \leqslant I_0$, то

$$\mu_{\delta(t+1)}(u_i, s_j) = \alpha\mu_{\delta(t)}(u_i, s_j).$$

Обучение на основе условной нечеткой меры

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество причин (входов) и $Y = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — множество результатов. Если h — функция из X в интервал $[0, 1]$, $h(x_1) \leqslant \ \ldots \ \leqslant h(x_n)$ и g_x — нечеткая мера на X , то

$$\int\limits_X h(x)g_x(\cdot) = \max_{i=1,\ldots,n} \min(h(x_i), g_X(H_i)),$$

где $H_i = \{x_i, \ldots, x_n\}$.

Задача состоит в оценке (уточнении) причин по нечеткой информации.

Пусть g_Y — нечеткая мера на Y, g_Y связана с g_X условной нечеткой мерой $\sigma_Y(\cdot|x)$:

$$g_Y = \int_X \sigma_Y(\cdot|x) g_X.$$

Предполагается следующая интерпретация вводимых мер: g_X оценивает степень нечеткости утверждения "один из элементов X был причиной", $\sigma_Y(A|x)$, $A \subset Y$ оценивает степень нечеткости утверждения "один из элементов A является результатом благодаря причине x "; $g_Y(\{y\})$ характеризует степень нечеткости утверждения: " y — действительный результат".

Пусть $\mu_A(y)$ описывает точность информации A , тогда по определению $g_Y(A) = \int_X \mu_A(y) g_X$.

Метод обучения должен соответствовать обязательному условию: при получении информации A нечеткая мера g_X меняется таким образом, чтобы $g_Y(A)$ возрастала. Предположим, что $g_X(\cdot)$ и $\sigma_Y(\cdot|x)$ удовлетворяют λ -правилу. Пусть $\sigma_Y(A|x_i)$ является убывающей, тогда

$$g_Y(A) = \bigvee_{i=1}^{n} \left[\sigma_Y(A|x_i) \wedge g_X(F_i)\right],$$

где $F_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$. При этих условиях существует l :

$$g_Y(A) = \sigma_Y(A|x_l) \wedge g_X(F_l),$$
$$\sigma_Y(A|x_l) \wedge g_X(F_l) \geqslant \sigma_Y(A|x_{l-1}) \wedge g_X(F_{l-1}),$$
$$\sigma_Y(A|x_l) \wedge g_X(F_l) > \sigma_Y(A|x_{l+1}) \wedge g_X(F_{l+1}).$$

Обучение может быть осуществлено увеличением тех значений g_i ($i = 1, \ldots, n$) нечеткой меры g_X , которые увеличивают $g_Y(A)$, и уменьшением тех значений g_i ($i = 1, \ldots, n$) меры g_X , которые не увеличивают $g_Y(A)$. Можно показать, что на величину $g_Y(A)$ влияют только такие g_i , что $1 \leqslant i \leqslant l$. Следовательно, нечеткий алгоритм обучения следующий:

$$g^i = \alpha g^i + (1 - \alpha)\sigma_Y(A|x_i); \qquad i = 1, \ldots, l;$$
$$g^i = \alpha g^i; \qquad i = l + 1, \ldots, n.$$

Параметр $\alpha \in [0, 1]$ регулирует скорость обучения, т.е. скорость сходимости g^i . Чем меньше α , тем сильнее изменяется g^i . В приведенном алгоритме нет необходимости увеличивать g^i больше, чем на $\sigma_Y(A|x_i)$, так как большое увеличение g^i не влияет на $g_Y(A)$. Приведем некоторые свойства модели обучения.

Свойство 1. Если повторно поступает одна и та же информация, то происходит следующее:

а. новое g^i больше старого g^i ($i = 1, \ldots, l$) и новое g^i меньше старого g^i ($i = l + 1, \ldots, n$), следовательно, новая мера $g_Y(A)$ не меньше старой меры $g_Y(A)$, и новая мера

$$g_Y(A) = \sigma_Y(A|x_k) \wedge g_X(F_k), \qquad k \leqslant l;$$

b. при предположении $\sigma_Y(A|x_1) > \sigma_Y(A|x_2)$, $k < l$, g^1 сходится к $\sigma_Y(A|x_1)$ и g^i сходится к 0 для $i = 2, \ldots, n$.

Свойство 2. Если поступает одна и та же информация повторно: $h_A(y) = c$ для всех y, то

$$\sigma_Y(A|x) = \int_X c\sigma_Y(\cdot|x) = c, \quad \sigma_Y(A) = c \wedge g_X(X).$$

Следовательно, $l = n$ и g^i сходится к c для всех i.

Свойство 3. Предельное значение g^i не зависит от начального значения тогда, когда на вход повторно поступает одна и та же информация.

Пример. Рассмотрим модель глобального поиска экстремума неизвестной функции с несколькими локальными экстремумами. Для поиска глобального экстремума формируются критерии в виде некоторых функций:

x_1 — оценивает число точек, проанализированных на предыдущих шагах;

x_2 — оценивает среднее значение функции по результатам предыдущих шагов;

x_3 — оценивает число точек, значение функции в которых принадлежит десятке лучших в своей области;

x_4 — оценивает максимум по прошлым попыткам;

x_5— оценивает градиент функции.

В описанном случае g_X показывает степень важности подмножеств критериев и $\sigma_Y(\{y_j\}|x_i)$ оценивает предположение о нахождении экстремума в блоке y_j в соответствии с критерием x_i . Например, $\sigma_Y(\{y_j\}|x_i)$ может зависеть от числа ранее проанализированных точек в блоке y_j . Пусть входная информация A определяется формулой

$$\mu_A(y_j) = \frac{p_j - \min\limits_k \ p_k}{\max\limits_k \ p_k - \min\limits_k \ p_k},$$

где p_k — максимум анализируемой функции, найденный к рассматриваемому моменту в блоке y_j . Очевидно, что A сходится к максимизирующему множеству функции. На каждой итерации осуществляется следующее: проверяется заданное число новых точек; число этих точек выбирается пропорционально $g_Y(\{y_j\})$; в~каждой точке y_j вычисляется и нормализуется мера $\sigma_Y(\cdot|x_i$); нормализуется g_X ; по σ_Y и σ_X вычисляется $g_Y(\{y_j\})$, а затем $g_Y(A)$; посредством правил подкрепления корректируется $g_Y(\{x_i\})$. Затем выполняется новая итерация, и так до тех пор, пока не сойдется g_Y. Адаптивный нечеткий логический регулятор

В настоящее время наиболее широкое применение при решении практических задач получили нечеткие логические регуляторы, которые позволяют на основании лингвистической информации, полученной от опытного оператора, управлять сложными, плохо формализованными процессами.

Структура нечеткого логического регулятора, в котором используются эвристические правила принятия решений, показана на рис. 3

Рис. 3.

Такие регуляторы применяются аналогично традиционным регуляторам с обратной связью. Определение управляющих воздействий состоит из четырех основных этапов:

1. Получение отклика;
2. Преобразование значения отклонения к нечеткому виду, такому, как "большой", "средний";
3. Оценка входного значения по заранее сформулированным правилам принятия решения с помощью композиционного правила вывода;
4. Вычисление детерминированного выхода, необходимого для регулирования процесса.

Опишем способ уточнения правил управления, используемых в адаптивном нечетком логическом регуляторе (АНЛР). Соответствующая схема регулятора приведена на рис. 4 АНЛР состоит из двух частей: нечеткого логического регулятора управляемого процесса (НЛРУП) и нечеткого логического регулятора управления (НЛРУ).

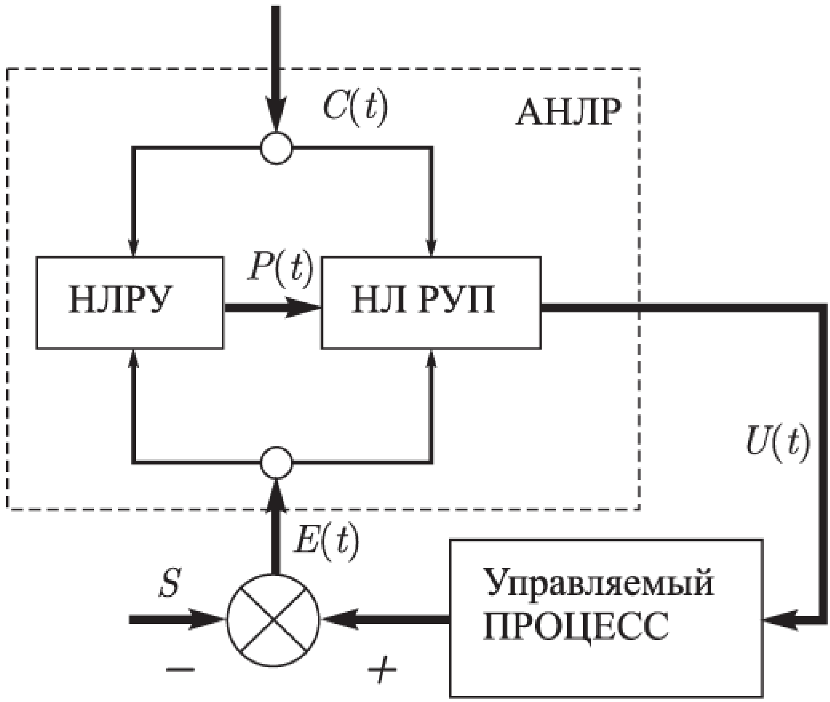


Рис. 4.

На рис. 4 используются следующие обозначения:

$U(t)$ — управление, генерируемое НЛРУП;

$E(t)$ — ошибка (отклонение от устанавливаемого выходного значения процесса S);

S — желаемое значение выхода управляемого процесса, $C(t) = E(t) - E(t-1)$;

$P(t)$ — модификация управления.

Правила НЛРУП имеют форму: if $E = E_i$ then if $C = C_i$ then $U = U_i$.

Правила НЛРУ имеют форму: if $E = E_j$ then if $C = C_j$ then $P = P_j$.

Здесь E_i, E_j, C_i, C_j, U_i, P_j — предварительно описанные нечеткие множества. Символ $P(t)$ используется для модификации стратегии управления следующим образом: в нечетком правиле i, которое ухудшает течение процесса, заменяется значение управления U на $U_i' = U_i \otimes p_i(t)$. Правило i в НЛРУП заменяется на правило if $E = E_i$ then if $C = C_i$ then $U = U_i'$.

Рассмотрим далее два нечетких алгоритма обучения при лингвистическом описании предпочтений: алгоритм формирования нечеткого отношения предпочтений на множестве альтернатив, описываемых наборами лингвистических значений признаков, и алгоритм уточнения лингвистических критериев.

Алгоритм формирования нечеткого отношения предпочтения

Пусть R — множество таких альтернатив, что каждое $S \in R$ характеризуется набором оценок по n признакам: $S = \{t_1, \ldots, t_n\}$, и пусть B — семейство всех непустых конечных подмножеств множества R. Для некоторого $R' \in B$ известно подмножество выбранных альтернатив $R'' \subset R'$, т.е. для любых $S'' \in R''$ и $S' \in R' \backslash R''$ имеет место доминирование $S'' \succ S'$. Предварительно, при анализе исходного множества альтернатив, сформирован эталонный набор нечетких оценок $A^0 = (t_1^0, \ldots, t_n^0)$. Значения функции принадлежности нечеткой оценки t_i^0 указывают на степень близости значений i -го признака к значениям, определяющим идеальную альтернативу. Используя множество предпочтений

$$E = \{(S'', S') : \quad S'' \in R'', \quad S' \in R' \backslash R''\},$$

требуется найти обобщенные правила предпочтения на множестве R.

Пример. Рассмотрим задачу выбора для рыболовецкого судна рационального района промысла с учетом следующих показателей: u_1— время перехода в район лова, u_2— прогноз вылова, u_3— стоимостная характеристика прогнозируемого объекта лова, u_4— гидрометеоусловия. Показатели, в сущности, играют роль лингвистических переменных.

Лицу, принимающему решение, предложены альтернативы S_1— S_6 (см.табл. 1). Пусть выбрана альтернатива S_1. Для обучения формируются две таблицы:

$$K_1 = \{(S_1, S_2), (S_1, S_3), (S_1, S_4), (S_1, S_5), (S_1, S_6)\},$$
$$K_2 = \{(S_2, S_1), (S_3, S_1), (S_4, S_1), (S_5, S_1), (S_6, S_1)\},$$

Таблица 1.

	U_1	U_2	U_3	U_4		U_1	U_2	U_3	U_4
S_1	хор.	хор.	хор.	уд.	S_1	плох.	хор.	плох.	уд.
S_2	оч. хор.	плох.	хор.	уд.	S_2	уд.	хор.	хор.	неуд.
S_3	оч. хор.	хор.	хор.	неуд.	S_3	плох.	хор.	хор.	уд.
S_4	уд.	хор.	хор.	уд.	S_4	уд.	хор.	норм.	уд.
S_5	оч. плох.	хор.	хор.	уд.	S_5	уд.	норм.	норм.	уд.
S_6	хор.	норм.	плох.	уд.	S_6				

Для каждой пары наборов (S_i, S_j) вычисляются оценки сравнения i -го элемента первого набора с i -м элементом второго набора:

$$\left.\begin{array}{l}(t'_1, ..., t'_n) \\ (t''_1, ..., t''_n)\end{array}\right\} \to (L^\alpha(t'_1, t''_1), ..., L^\alpha(t'_n, t''_n)),$$

где α определяет конкретный оператор, например, нечеткую меру сходства.

В результате получаются две таблицы наборов нечетких оценок поэлементного сравнения. На основе полученных таблиц, используя логические операторы и логические функции двух переменных, выделяются полезные признаки и минимальный базис. Содержательное значение утверждения, соответствующего минимальному базису, следующее:

$$\Phi(S_i, S_j) \succ \Phi(S_j, S_i) =$$
$$= (x_1^i \succ x_1^j)\&(x_2^i \succ x_2^j)\&(x_4^i \succ x_4^j) \succ (x_1^i \prec x_1^j)\&(x_2^i \prec x_2^j)\&(x_4^i \prec x_4^j),$$

где x_k^m — лингвистическое значение k -го показателя, Φ— логический признак. Физический смысл приведенного утверждения: район S_i предпочтительнее района S_j , если утверждение [(время перехода до S_i "меньше", чем до S_j), и (прогноз вылова в S_i "больше", чем в S_j), и (погодные условия в S_i "лучше", чем в S_j)] более истинно, чем обратное утверждение [(время перехода до S_i "больше", чем до S_j), и (прогноз вылова в S_i "меньше", чем в S_j), и (погодные условия в S_i "хуже", чем в S_j)].

Далее предположим, что среди неизвестных ситуаций S_7- S_{11} (табл. 1) необходимо выбрать лучшую альтернативу, используя минимальный базис. В табл. 2 изображена матрица предпочтений $M = (\mu^{ij}(K_1)|\mu^{ij}(K_2))$, элементы которой вычислялись посредством гарантированной оценки

$$\mu^{ij}(K_1) = \max_{v\in[0,1]} \mu_{H_1(S_i,S_j)}(v),$$

Таблица 2.

	S7	**S8**	**S9**	**S10**	**S11**
S7		0,88 0,38	1 0,38	0,88 0,38	0,88 0,38
S8	0,75 1		0,75 1	0,75 1	0,75 1
S9	1 0,38	0,88 0,38		0,88 0,38	0,88 0,38
S10	1 0,38	1 0,38	1 0,38		1 0,38
S11	0,88 0,38	0,88 0,38	0,88 0,38	0,88 0,38	

где $H_i(S_1, S_2) = \bigcap_j \left(C_j^i \cap C_j(S_1, S_2)\right)$, $C_j(S_1, S_2)$ — значение j -го признака на паре альтернатив (S_1, S_2), C_j^i — значение j -го признака на парах альтернатив i -го класса ($i = 1, 2$). Каждый элемент матрицы содержит два значения. Левое значение указывает степень, с которой S_i доминирует над S_j . Правое значение указывает степень, с которой S_j доминирует над S_i . Для построения нечеткого графа предпочтений альтернатив (рис. 5) используется следующее правило определения отношения доминирования D :

$$D(S_i, S_j) = \begin{cases} S_i \succ S_j, \text{ если } \mu_1 \geqslant \mu_2; \\ S_j \succ S_i \text{ если } \mu_1 \leqslant \mu_2; \end{cases}$$

где

$$\mu_1 = \mu^{ij}(k_1) \vee \mu^{ji}(k_2), \quad \mu_2 = \mu^{ij}(k_2) \vee \mu^{ji}(k_1).$$

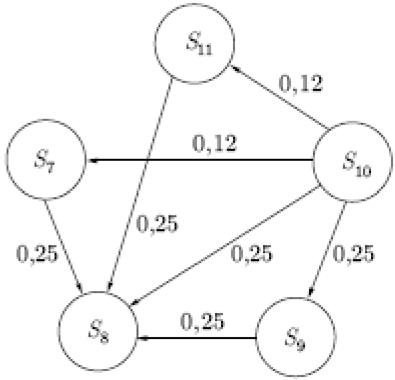


Рис. 5.

Согласно рис. 5, S_{10} является недоминируемой альтернативой, т.е. не существует альтернативы, которая с ненулевой степенью доминирует над S_{10}.

Алгоритм уточнения лингвистических критериев

Глобальные представления ЛПР о выборе альтернатив формулируются в виде глобального критерия, и решение многокритериальной задачи сводится к построению композиции $M_1 \circ M_2 = M$, где

$$M_1\colon \Im(U^n) \to \Im(Q^m), \quad U^n = U_1 \times \ldots \times U_n, \quad Q^m = Q_1 \times \ldots \times Q_m,$$
$$M_2\colon \Im(Q^m) \to \Im(Q),$$

Q_i, Q — множества значений признаков, локальных и глобального критериев, соответственно. M_1 и M_2 формируются на основе высказываний типа: "если значения признаков $u_1, \ldots, u_n$, характеризующие альтернативу u_i, оцениваются термами $t_{1i}, \ldots, t_{ni}$, то альтернатива удовлетворяет j -му критерию с оценкой $t_{n+j,i}$ ".

M_1 и M_2 описываются наборами

$$M_1 = \{(t_{1i}, \ldots, t_{ni}, t_{n+j,i}) | n+1 \leqslant j \leqslant n+k, \ i = 1, m_1\},$$
$$M_1 = \{(t_{n+1i}, \ldots, t_{n+k\,i}, t_{n+k+1,i}) | \ i = 1, \ldots, m_2\}.$$

Степень удовлетворения глобальному критерию для альтернативы $u^i \in U^n$ вычисляется следующим образом:

$$w(u^i) = \bigcup_{t^p \in M_2} \left(\bigcup_{t^e \in M_1} u^i \circ t^e \right) \circ t^p.$$

В процессе обучения уточняются оценки глобального и локальных критериев на основе сравнения выбранных ЛПР альтернатив R'' из множества предъявленных $R' \supset R''$. M заменяется некоторым $\tilde{M}$, подтверждающим соответствующий выбор:

$$\tilde{w}(u^i) \prec \tilde{w}(u^j) \quad \text{для} \quad u^i \in R', \ \ u^j \in R' \backslash R''.$$

Обучение осуществляется в два этапа: формирование обобщенных описаний предпочтения ЛПР; модификация М при несовпадении предпочтений ЛПР с порядком оценок $w(u)$. На втором этапе выполняется следующее: генерация допустимых наборов оценок показателей; определение отношения предпочтения на парах сгенерированных альтернатив; выделение из $M = M_1 \cup M_2$ наборов, не подлежащих корректировке; корректировка оценок по критериям.

8.10. Приведение конечного нечеткого автомата к нечеткой комбинационной схемы

Введенное Заде в 1965 г. понятие «нечеткого множества» позволило построить аппарат нечеткой логики и использовать его для тех приложений, где знания человека-эксперта плохо формализуются. В дальнейшем получили распространение «нечеткие автоматы с памятью» . В настоящее время теория нечетких автоматов активно развивается, для них построено несколько видов моделей, отличающихся от традиционных (четких) автоматов наличием нечетких состояний и нечетких переходов между состояниями . Однако при конкретной реализации таких автоматов встречаются некоторые трудности, препятствующие их широкому распространению. Дело в том, что «память» автомата задается неявно с помощью введения «состояний» автомата и переходов между ними. Поэтому при решении задач трудно сделать оптимальный выбор числа состояний, как это обсуждается в работах для четких автоматов и для нечетких автоматов. Другими словами, обращение к концепции состояний усложняет анализ предметной области и процедуру расчета выходного сигнала на каждом шаге работы автомата. Автоматы без памяти (комбинационные схемы) хотя и не имеют указанного недостатка, но без необходимой доработки не могут решить всего класса прикладных задач.

Цель данного раздела работы состоит в том, чтобы определить условия реализации нечеткого автомата с помощью *модифицированной нечеткой комбинационной схемы* (МНКС), которая анализирует содержимое *внешнего блока памяти* (ВБП). Оказывается, что таким путем можно сохранить функциональность *нечеткого автомата с конечной памятью* (НАКП) без обращения к понятию «состояния». МНКС, соответствующая автомату, в каждый момент времени t анализирует содержимое ВБП, хранящего несколько последовательных значений входных параметров $x(t)$, взятых в моменты времени $t - k\Delta t$, где k принимает значения $k = 0, 1, ..., p$. Такой подход оказывается эффективным при решении многих конкретных задач. Проблема выбора числа состояний сводится к выбору объема (или «глубины») памяти ВБП, равного $p + 1$. Также облегчается и подбор функций истинности, соответствующих знаниям экспертов предметной области, что позволяет более эффективно добиться соответствия нечеткой модели и описываемой с ее помощью предметной области. Кроме того, для МНКС проще формулируются нечеткие правила вывода, т. к. в этом случае возникает возможность использовать известные алгоритмы нечеткого управления, предложенные Мамдани, Такаги-Сугено и др.

В настоящем разделе кратко описывается схема работы четкого автомата. Показано, что переход обычного «четкого» автомата к «четкой» модифицированной комбинационной схеме возможен только для *автомата с конечной памятью* (АКП). Понятие об АКП введено в работе Брауэра.

Значение выходной переменной $y(t)$ АКП в текущий момент времени t может быть выражено в виде функции от значений входных сигналов за конечный промежуток времени. Показано, что и нечеткий автомат с конечной памятью может быть сведен к соответствующей модифицированной нечеткой комбинационной схеме.

Дается более удобная, чем обычно, формализация описания работы нечеткого автомата, работы нечеткой комбинационной схемы. С самого начала вводятся лингвистические переменные, которыми описываются входные и выходные переменные, а также состояния автомата, определяются «универсумы» (универсальные множества), на которых определены нечеткие множества, описывающие значения лингвистических переменных. Автоматные функции задаются на языке введенных лингвистических переменных, что позволяет формализовать процесс перехода от НАКП к МНКС и процесс нечеткого вывода выходных параметров.

Описывается методика преобразования нечеткого автомата с конечной памятью к модифицированной комбинационной схеме, анализирующей текущее содержание внешнего блока памяти. На конкретном примере нечеткого автомата, обеспечивающего регулирование температуры некоторого объекта, демонстрируются преимущества предлагаемого подхода.

Представление «четкого» автомата в виде модифицированной комбинационной схемы

Как известно, логические («четкие») автоматы с памятью описываются кортежем $\{x, y, s, F, G\}$, где

x – набор векторов входных переменных,

y – набор векторов выходных сигналов,

s – набор состояний автомата, F и G – функция переходов и функция выходов соответственно: $s_{t+\Delta t} = F(s_t , x_t), y_t = G(s_t , x_t)$.

Для конечных автоматов каждый из наборов векторов x и y, а также набор состояний s являются конечными.

В конкретных приложениях используются также *автоматы с конечной памятью* АКП (рис. 1 *а*). Работа таких автоматов оказывается эквивалентной отображению вида

$y_t=h(x_{t-p\Delta t},\ldots, x_{t-\Delta t} ,x_t, y_{t-q\Delta t},\ldots, y_{t-2\Delta t}, y_{t-\Delta t})$, (1)

где $x_{t-p\Delta t},\ldots, x_{t-\Delta t} ,x_t$ – значения векторов входной переменной; $y_{t-q\Delta t},\ldots, y_{t-2\Delta t}, y_{t-\Delta t}$ – значения векторов выходной переменной; p и q – конечные положительные целые числа, $q < p$.

Легко видеть, что отображение (1) для конечного автомата может быть реализовано с помощью комбинационной схемы (КС), анализирующей ВБП. В текущий момент времени t в ВБП хранится совокупность аргументов отображения (1)

$x_{t-p\Delta t},\ldots, x_{t-\Delta t} ,x_t, y_{t-q\Delta t},\ldots, y_{t-2\Delta t}, y_{t-\Delta t}$

а роль комбинационной схемы состоит в том, чтобы в зависимости от содержания ВБП определить значение выходной пере мен ной y, в соответствии с (1). Далее мы ограничиваемся более простым, но практически важным случаем, когда отображение (1) имеет вид

$y_t=h(x_{t-p\Delta t},\ldots, x_{t-\Delta t} ,x_t)$ (2)

Это значит, что для работы КС в блоке памяти достаточно сохранять значения только входных переменных в текущий момент времени /ив предшествующие моменты времени $t - \Delta t > \ldots > t - p\Delta t$. Далее, параметр p будем называть «глубиной» памяти входных переменных. Применение развиваемого подхода для более общего случая, соответствующего зависимости (1), не представляет особых затруднений.

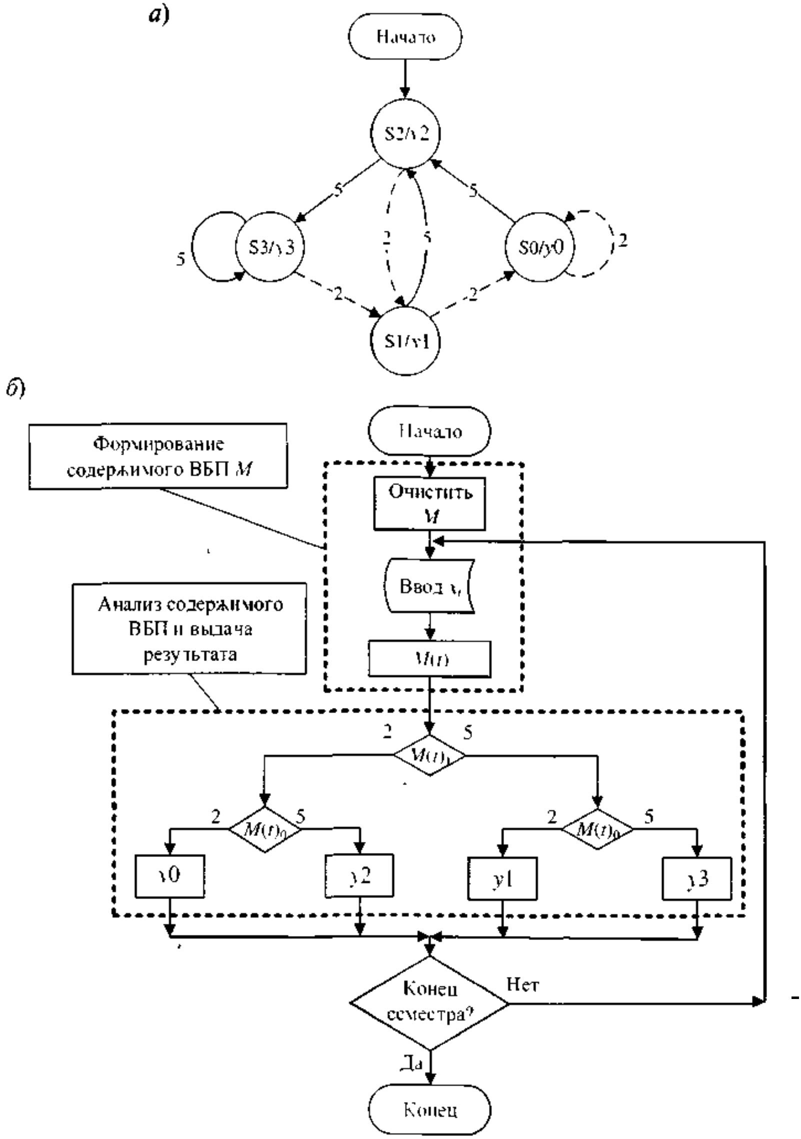


Рис. 1. Алгоритм работы автомата «умный отец» *(а)* и соответствующей комбинационной схемы, анализирующей внешний блок памяти (б)

Таким образом, предполагается, что содержанием *M* ВБП (рис. 1 *б)* является последовательность из *p* + 1 входных переменных $M(t) = \{x_{t-p\Delta t}, \ldots, x_{t-\Delta t}, x_t\}$. Содержание памяти *M* обновляется на каждом шаге по типу FIFO (first input, first output). Комбинационная схема анализирует набор значений входных переменных $x_{t-p\Delta t}, \ldots, x_{t-\Delta t}, x_t$, которые находятся в данный момент в ВБП. Каждому набору $x_{t-p\Delta t}, \ldots, x_{t-\Delta t}, x_t$ сопоставляется определенное значение выходной переменной *y,*.

Для иллюстрации рассмотрим в упрощенном виде автомат «умный отец» (рис. 1 *а),* предложенный в книге Ю.Г. Карпова. В зависимости от оценок сына *x,* принимающих значения 2 или 5, автомат выбирает одну из возможных реакций отца: *y0* — ругать сына, *y1* — успокаивать сына, *y2* — надеяться, *y3* — радоваться. Представление этого автомата в виде комбинационной схемы, анализирующей внешний БП, получено в работе Ю.Г. Карпова (рис. 1 *б).*

Для простоты в данном разделе рассматривается автомат Мура. Число реакций отца сокращено с 6 до 4.

Автомат «умный отец» можно также задать с помощью таблицы переходов между состояниями и выходных сигналов (табл. 1).

Таблица 1

Таблица переходов между состояниями и выходных сигналов «четкого» автомата «умный отец»

x	*S*			
	S0	*S1*	*S2*	*S3*
2	*S0*	*S0*	*S1*	*S1*
5	*S2*	*S2*	*S3*	*S3*
y	*y0*	*y1*	*y2*	*y3*

Как можно убедиться путем непосредственной проверки, этот автомат имеет конечную память. Действительно, оказывается, что в каком бы из состояний *S0, S1, S2, S3* ни находился автомат в момент времени $t - \Delta t$, при заданной последовательности из двух входных переменных $x_{t-\Delta t}, x_t$ автомат выдает одно и то же значение выходной переменной y_t. То есть в данном случае реализуется тображение $y_t = h(x_{t-\Delta t}, x_t)$, показанное в табл. 2.

Таблица 2
Зависимость реакции автомата «умный отец» от последовательности входных сигналов x_{k-1}, x_k

x_{k-1}, x_k	Реакция отца
2, 2	$y0$
5, 2	$y1$
2, 5	$y2$
5, 5	$y3$

Отсюда следует, что он может быть реализован в виде комбинационной схемы и внешнего блока памяти (рис. 1 *б),* который хранит две последние оценки $M(t) = \{x_{t-\Delta t}, x_t\}$. Схема «анализирует» содержимое ячеек блока памяти
$M_0(t) = x_{t-\Delta t}$, $M_1(t) = x_t$.

Нечеткий автомат

Модель нечеткого автомата используется в следующих случаях: когда предметная область описывается экспертом лингвистическими (словесными) правилами; трудно разработать достаточно простую математическую модель предметной области; необходима высокая гибкость в настройках системы управления; требуется расширить область значений входных параметров «четкого» автомата без введения дополнительных состояний и др.
Будем исходить из того, что в основе модели нечеткого автомата НАКП лежит некоторый четкий автомат с конечной памятью (АКП). Для описания этого АКП вводятся переменные *x, y, s* (см. обозначения, введенные ранее), принимающие значения на конечных множествах
A, B, C ($x \in A$, $y \in B$, $s \in C$).
Для АКП также считаются известными автоматные функции $s_{t+\Delta t} = F(s_t, x_t)$, $y_t = G(s_t, x_t)$, которые могут быть заданы табличным способом. Далее, при переходе к модели нечеткого автомата, множества *A, B, C* мы будем считать «универсальными» множествами, на которых будут задаваться нечеткие подмножества, описывающие лингвистические переменные.
Для описания НАКП введем «лингвистические» переменные: α, β, γ, где α, β — входная и выходная переменные, а γ —

переменная состояния. Каждая из величин α, β и γ принимает значения из наборов $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_u\}$, $\{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_v\}$, $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_w\}$ соответственно. Величины
$\alpha_i, i \in [0, u]$, $\beta_j, j \in [0, v]$, $\gamma_k, k \in [0, w]$
количественно описываются нечеткими подмножествами введенных выше универсумов *A, B, C* соответственно с помощью функций принадлежности $\mu_{\alpha i}(x)$, $\mu_{\beta j}(y)$ или $\mu_{\gamma k}(s)$. Далее мы будем отождествлять лингвистические переменные и описывающие их нечеткие множества.

Алгоритм работы нечеткого автомата формулируется на языке лингвистических переменных. Переходы между состояниями автомата и значение выходного сигнала выражаются нечеткими автоматными функциями:

$$\gamma_{t+\Delta t} = \Gamma(\alpha_t, \gamma_t), \; \beta_t = B(\alpha_t, \gamma_t). \quad \textbf{(3)}$$

Как и в случае четкого конечного автомата, функции Г и В могут быть заданы табличным методом (см., например, табл. 3). Эти таблицы совпадают с аналогичными таблицами автоматных функций четкого автомата, но с тем отличием, что как в заголовки таблиц, так и в их ячейки должны быть подставлены соответствующие лингвистические переменные. Автоматные функции НАКП могут быть заданы и с помощью более кратких индексных обозначений:

$$\sum_{all\ i,\ n} \varepsilon_{i,n,m}\, \alpha_i \wedge \gamma_n \to \gamma_m;$$
$$\sum_{all\ i,\ n} \delta_{i,n,j}\, \alpha_i \wedge \gamma_n \to \beta_j, \quad \textbf{(4)}$$

где введены матрицы переходов $\varepsilon_{i,n,m}$ и выходов $\delta_{i,n,j}$ автомата, компоненты которых принимают значения, равные нулю или единице, в соответствии с заданными конкретными правилами «если ..., то...». В таком же виде могут быть выражены автоматные функции и АКП. Логические связки $\wedge$, $\to$ между нечеткими множествами могут быть реализованы по известным правилам, введенным Заде. В случае автомата Мура выходной сигнал определяется только текущим состоянием автомата и правила (4) сводятся к следующему виду:

$$\sum_{all\ i,\ n} \varepsilon_{i,n,m}\, \alpha_i \wedge \gamma_n \to \gamma_m; \; \sum_{all\ n} \delta_{n,j}\, \gamma_n \to \beta_j. \quad \textbf{(5)}$$

Отметим, что состояния нечеткого автомата описываются с помощью лингвистической переменной γ. Значения этой переменной задаются нечеткими подмножествами универсального множества состояний С, включающего все состояния АКП, и описываются функциями принадлежности $\mu_{\gamma k}(s)$. Поэтому можно сказать, что у НАКП с разной

степенью активны сразу несколько состояний соответствующего ему АКП, причем степень активности определяется функцией $\mu_{\gamma k}(s)$.
Для численной реализации работы НКАП будем считать, что в текущий момент времени *t* известны параметры x_t, s_t. Практически входные и выходные параметры нечеткого автомата (как и у четкого), задаются некоторыми «четкими» числами. Например, на входе автомата — это показания датчиков, а на выходе — уровень сигнала управления. Отличие нечеткого автомата от «четкого» заключается в использовании другого алгоритма преобразования входного сигнала в выходной.
Вычислительная процедура строится следующим образом. Для заданных значений x_t, s_t с помощью функций $\mu_{\alpha t}(x_t)$, $\mu_{\gamma k}(s_t)$ определяем их степени принадлежности нечетким множествам α_i, γ_j, которые представляют собой некоторые наборы чисел, лежащих на отрезке [0, 1]. Для вычисления величин $y_{t+\Delta t}$, $s_{t+\Delta t}$ воспользуемся известным алгоритмом Мамдани и правилами Заде оперирования над нечеткими множествами. Здесь могут быть также применены алгоритмы и других авторов .
Введем вспомогательные функции $Q(s), R(y)$, позволяющие кратко представить алгоритм Мамдани:

$$Q(s) = \bigvee_{i,\,n,\,m} \varepsilon_{i,\,n,\,m} \min(\mu_{\alpha i}(x_t), \mu_{\gamma n}(s_t), \mu_{\gamma m}(s));$$

$$R(y) = \bigvee_{i,\,n,\,j} \delta_{i,\,n,\,j} \min(\mu_{\alpha i}(x_t), \mu_{\gamma n}(s_t), \mu_{\beta j}(y)).$$

С помощью этих функций найдем средние значения

$$\bar{s} = \frac{\int\limits_{all\,S} s\,Q(s)ds}{\int\limits_{all\,S} Q(s)ds}; \; \bar{y} = \frac{\int\limits_{all\,y} y\,R(y)dy}{\int\limits_{all\,y} R(y)dy}, \qquad \textbf{(7)}$$

которые (после округления до целого числа) мы отождествим со значениями параметров *s, y* в момент времени $t + \Delta t$:

$$s_{t+\Delta t} = round(\bar{s}); y_{t+\Delta t} = round(\bar{y}). \qquad \textbf{(8)}$$

На этом завершается обработка значения входного сигнала, и автомат ожидает поступление на вход следующего сигнала.

Модифицированная нечеткая комбинационная схема

Прежде чем перейти к решению основной задачи — построению МНКС, соответствующей заданному НАКП, в этом разделе рассмотрим принцип работы МНКС.
Алгоритм работы МНКС определяется набором правил, сформулированных экспертом на языке лингвистических переменных α и β, соответствующих входным и выходным параметрам (введение лингвистической переменной состояний здесь не требуется). Они имеют значения $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_u$, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_v$, которые количественно описываются функциями $\mu_{\alpha i}(x)$ и $\mu_{\beta_j}(y)$, (пример функций см. на рис. 4).
Входные и выходные параметры принимают значения на универсальных множествах *A*, *B*, так что $x \in A$, $y \in B$. В момент времени *t* на вход комбинационной схемы подается последовательность значений входного параметра
$\alpha_{t-p\Delta t}, \ldots, \alpha_{t-\Delta t}, \alpha_t$ за
некоторый промежуток времени $(p+1)\Delta t$. Значение выходного сигнала задается некоторой функцией $\beta_t = H(\alpha_{t-p\Delta t}, \ldots, \alpha_{t-\Delta t}, \alpha_t)$.
Эта функция может быть задана как таблица (см., например, табл. 7).
Для дальнейшего использования перепишем ее в виде индексной записи:

$$\beta_j = H(\alpha_{ip}, \ldots, \alpha_{i1}, \alpha_{i0}). \quad (9)$$

Функциональная зависимость H задается правилами вида «Если ..., то ...» и в терминах логических операций над нечеткими множествами может быть сформулирована в индексной записи следующим образом:

$$\sum_{all\ ip, \ldots, i1, i0} \delta_{ip, \ldots, i1, i0, j} \alpha_{ip} \wedge \ldots \\ \ldots \wedge \alpha_{i1} \wedge \alpha_{i0} \to \beta_j. \quad (10)$$

Значения компонент матрицы выходного сигнала $\delta_{ip, \ldots, i1, i0, j}$ определяются заданными правилами «Если ..., то ...».
Количественная реализация МНКС сводится к нахождению параметра y_t по заданной последовательности значений входного параметра $x_{t-p\Delta t}, \ldots, x_{t-\Delta t}, x_t$. По этим величинам входного параметра находим значения функций принадлежности для всех значений входной лингвистической переменной α $\mu_{\alpha ip}(x_{t-p\Delta t}), \ldots, \mu_{\alpha i0}(x_{t-\Delta t}), \mu_{\alpha i0}(x_t)$,

которые являются некоторыми числами из отрезка [0, 1]. Для вычисления y_t в соответствии с алгоритмом Мамдани строим вспомогательную функцию $V(y)$, имеющую следующий вид:

$$V(y) = \bigvee_{ip,\, \dots,\, i0,\, j} \delta_{ip,\, \dots,\, i0,\, j} \min(\mu_{\alpha ip}(x_{t-p\Delta t}) \wedge \dots \\ \dots \wedge \mu_{\alpha i0}(x_t) \wedge \mu_{\beta j}(y)). \qquad (11)$$

С помощью этой функции найдем среднее значение

$$\bar{y} = \frac{\int\limits_{all\ y} y V(y) dy}{\int\limits_{all\ y} V(y) dy}, \qquad (12)$$

которое (после округления до целого числа) мы отождествим со значениями параметра y в момент времени t:

$$y_t = round(\bar{y}). \quad (13)$$

На этом завершается обработка очередного значения входного сигнала, и МНКС ожидает поступление на вход следующего сигнала.

Построение МНКС по заданному НАКП

Для любого нечеткого автомата с конечной памятью можно построить эквивалентную нечеткую комбинационную схему, анализирующую содержимое внешнего блока памяти. Выходной сигнал МНКС, вообще говоря, не будет в точности совпадать с сигналом НАКП, но будет соответствовать ему с высокой точностью. Отметим, что для связи АКП и МКС выполняется полное соответствие выходных сигналов. Для построения МНКС необходимо найти функцию $\beta_j = H(\alpha_{ip}, \dots, \alpha_{i1}, \alpha_{i0})$ по заданным автоматным функции НАКП. Эта задача может быть решена следующим образом. Будем считать, что нам известна функция $y_t = h(x_{t-p\Delta t}, \dots, x_{t-\Delta t}, x_t)$, которая задает МКС для четкого автомата АКП, на основе которого построен НАКП. Поскольку таблицы переходов четкого и нечеткого автоматов совпадают, то будут совпадать и функции выходов соответствующих им комбинационных схем. Более конкретно это можно выразить следующим образом. Записывая функцию (9) в табличном виде (10), мы можем утверждать, что эта таблица в точности совпадает с соответствующей таблицей для четкой комбинационной схемы.

Решение задачи терморегулирования

Эффективность использования введенных понятий НАКП и МНКС и их сравнение между собой покажем на примере задачи управления температурным режимом в производственной установке, в которой необходимо поддержание постоянной температуры $T = T_0$ (т. н. «температура уставки»). В системе наблюдается отток тепла во внешнюю среду $Q = -k_Q(T - \tilde{T})$. Возможны случайные колебания температуры, вызванные внешними факторами $P(t)$. Требуется рассчитать мощности нагревателя $wh(t)$ и охладителя $wc(t)$, позволяющие в случае внешних случайных воздействий вернуть температуру объекта к значению уставки. Также при формировании выходного сигнала wc, wh требуется проанализировать историю изменения входной температуры Г, чтобы минимизировать время отклика и перерегулирование (т. н. «заброс»).

Общее уравнение теплового баланса выглядит следующим образом:

$$C\frac{dT}{dt} = -k_Q(T - \tilde{T}) + P(t) + \\ + k_h \cdot wh(t) - k_c \cdot w\,c(t), \qquad (16)$$

где k_l — коэффициент теплоотдачи нагревателя; k_c - коэффициент теплопоглощения охладителя; $\tilde{T}$ — температура окружающей среды. Ввиду того что в уравнении в общем виде есть нелинейный компонент *P(t)*, его решение численными методами потребует большого количества времени. С другой стороны, эта же система может быть легко описана с помощью лингвистических правил:

«если температура среды «слишком низкая», то нужно подать «высокую» мощность на нагреватель и «низкую» на охладитель»;

«если температура среды «слишком высокая», то нужно подать «низкую» мощность на нагреватель и «высокую» на охладитель»;

«если температура среды «близка к уставочному значению», то нужно подать «низкую» мощность на нагреватель и «низкую» на охладитель.

В связи с этим данную задачу предпочтительнее решать методами нечеткой логики.

Обозначим параметры, используемые при формировании управляющего воздействия следующим образом:

T — текущая температура среды в производственной установке, $T \in [T_{min}, T_{max}]$ С;

we — мощность охладителя, $wc \in [0, wc_{max}]$Вт;

wh — мощность нагревателя,
$wh \in [0, wh_{max}]$Вт.

В дальнейшем параметр *T* играет роль входа, а параметры *we и wh* — выходов системы.
Анализ правил позволяет выделить следующие значения лингвистических переменных:
α_0 = «температура среды низкая», α_1 = «температура среды близка к уставочному значению», α_2 = «температура среды высокая»;
βc_0 = «мощность охладителя низкая», βc_1 = «мощность охладителя высокая»;
βh_0 = «мощность нагревателя низкая», βh_1 = «мощность нагревателя высокая».
НАКП-терморегулятор. Построим четкий автомат Мура, который по определению формирует управляющий сигнал в зависимости от своего текущего состояния. В рассматриваемой системе возможны три управляющих воздействия: нагрев, охлаждение, стационарный режим.
С учетом этого введем лингвистическую переменную γ для описания состояния автомата со значениями γ_0 = «нагрев», γ_1 = «без изменений», γ_2 = «охлаждение».
Количественно она описывается множеством допустимых номеров состояний автомата $s \in S = [0, 2]$, на котором для каждого значения лингвистической переменной γ_k, $k \in \{0, 1, 2\}$ определены нечеткие подмножества, заданные функциями принадлежности, рис. 4 *г*.
Построим схему состояний автомата (рис. 2).

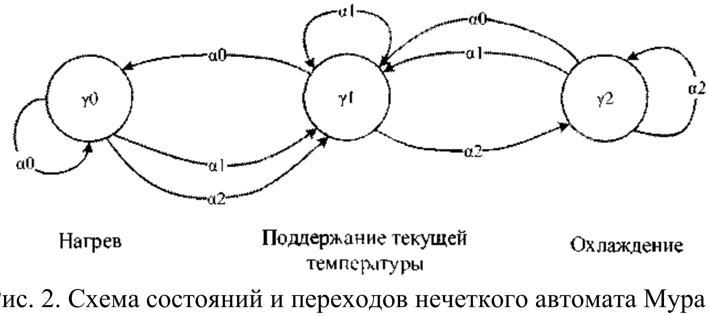


Рис. 2. Схема состояний и переходов нечеткого автомата Мура для управления температурой

К сожалению, такой автомат обладает бесконечной памятью, т. к. сколь угодно длинная последовательность входных сигналов $\alpha_0 - \alpha_2 - (\alpha_0 - \alpha_2)$ может перевести автомат в любое из его состояний. Внесем корректировку в схему состояний с учетом наличия постоянного оттока тепла из системы (рис. 3).

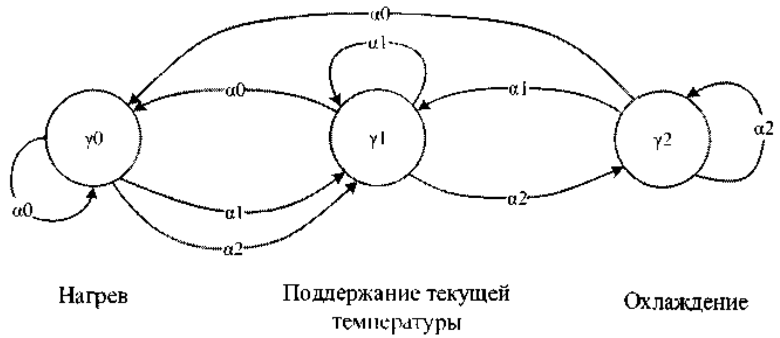
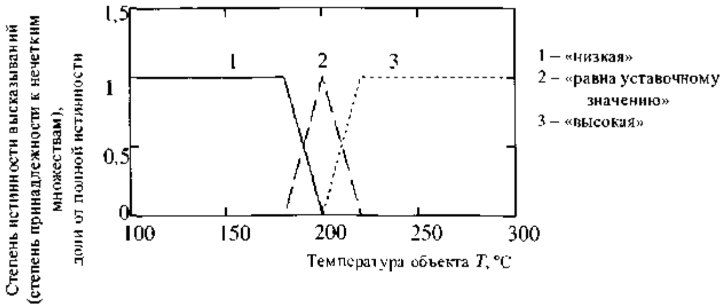


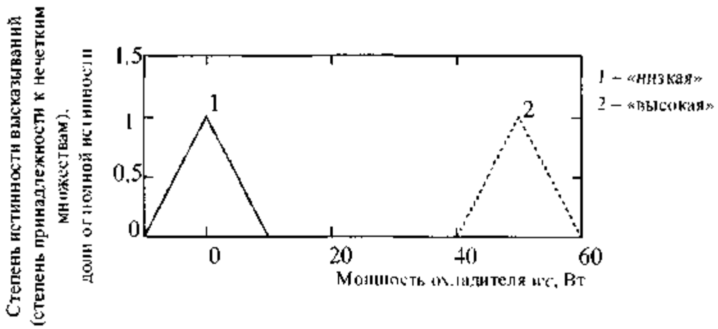
Рис. 3. Схема состояний и переходов нечеткого автомата Мура с конечной памятью для управления температурой

На языке введенных лингвистических переменных исходные правила формулируются следующим образом:
«Если в момент времени *t* состояние автомата $\gamma = \gamma_1$ («поддержание») и температура среды $\alpha = \alpha_1$ («близка к уставочному значению»), то в момент времени $t + \Delta t$ состояние автомата будет $\gamma' = \gamma_1$ (поддержание»), температура охладителя $\beta c = \beta c_0$ («низкая»), температура нагревателя $\beta h = \beta h_0$ («низкая»).
Все правила для описания переходов и выходов в автомате удобнее сформулировать в виде таблицы (табл. 3).
По табл. 3 сформируем матрицы переходов и выходов (табл. 4—6).
Количественное описание всех лингвистических переменных (при $T_0 = 200\ °C$) зададим функциями истинности $\mu_{\alpha i}(T)$, $\mu_{\beta cj}(wc)$, $\mu_{\beta hj}(wh)$ и $\mu_{\gamma m}(s)$, изображенными на рис. 4.

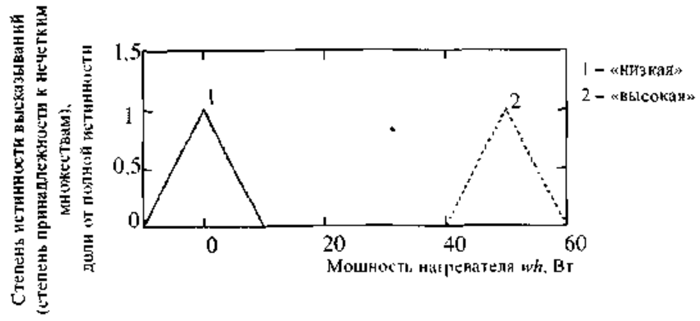
а)



б)



в)



г)

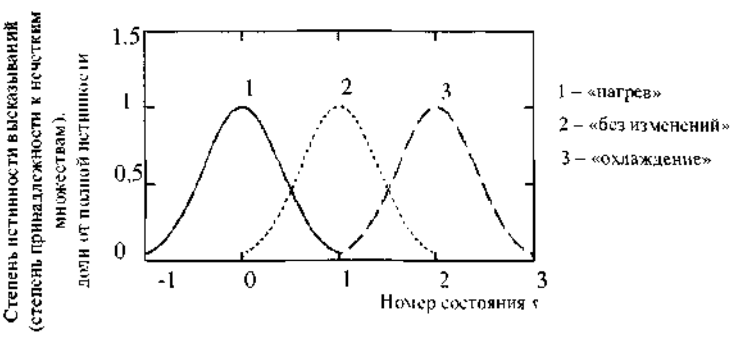


Рис. 4. Функции истинности термов лингвистических переменных: *а* — «температура среды»; *б* — «мощность охладителя»; *в* — «мощность нагревателя»; *г* - «состояние автомата»

Таблица 3
Таблица переходов и выходов нечеткого автомата «терморегулирование» на языке лингвистических переменных

α	γ		
	γ_0	γ_1	γ_2
α_0	γ'_0	γ'_0	γ'_0
α_1	γ'_1	γ'_1	γ'_1
α_2	γ'_1	γ'_2	γ'_2
βc	βc_0	βc_0	βc_1
βh	βh_1	βh_0	βh_0

Таблица 4
Матрица переходов $\varepsilon_{i,\,n,m}$ нечеткого автомата «терморегулирование»

i, n	m		
	0	1	2
0, 0	1	0	0
0, 1	1	0	0
0, 2	1	0	0
1, 0	0	1	0
1, 1	0	1	0
1, 2	0	1	0
2, 0	0	1	0
2, 1	0	0	1
2, 2	0	0	1

Таблица 5
Матрица выходного сигнала для охладителя $\delta c_{n,j}$ нечеткого автомата «терморегулирование»

j	n		
	0	1	2
0	1	1	0
1	0	0	1

Таблица 6
Матрица выходного сигнала для нагревателя $bh_{n,j}$ нечеткого автомата «терморегулирование»

j	*n*		
	0	1	2
0	0	1	1
1	1	0	0

Дальнейший расчет управляющего воздействия осуществляется по алгоритму, описанному выше.

МНКС-терморегулятор. Построим МНКС для управления температурным режимом в описанной выше установке на основе разработанного ранее НАКП.

Проанализируем последовательности значений входных параметров, которые обрабатывает автомат. Например, подстановкой в функцию $B(\alpha_0,\gamma_0)$ вместо состояния γ_0 различных функций переходов Γ в это состояние, получаем набор зависимостей выходного параметра от значений входных параметров на один шаг глубже (раньше) по времени:

$$\begin{aligned} \beta c_0 &= B(\alpha_0,\gamma_0) = B(\alpha_0,\Gamma(\alpha_0,\gamma_0)) = \\ &= B^{(1)}(\alpha_0,\alpha_0,\gamma_0); \\ \beta c_0 &= B(\alpha_0,\gamma_0) = B(\alpha_0,\Gamma(\alpha_0,\gamma_1)) = \\ &= B^{(1)}(\alpha_0,\alpha_0,\gamma_1); \\ \beta c_0 &= B(\alpha_0,\gamma_0) = B(\alpha_0,\Gamma(\alpha_0,\gamma_2)) = \\ &= B^{(1)}(\alpha_0,\alpha_0,\gamma_2). \end{aligned} \quad \textbf{(17)}$$

Из формул видно, что в каком бы состоянии γ_0, γ_1 или γ_2 не находился автомат в момент времени $t - \Delta t$, если последовательность значений температуры объекта характеризуется лингвистическими термами α_0 и α_0 («низкая» и снова «низкая»), тогда необходимо на охладитель подать напряжение βc_0 («низкое»). Другими словами, данный результат зависит от входных параметров и не зависит от состояния:

$$\beta c_0 = \tilde{B}(\alpha_0,\alpha_0). \quad \textbf{(18)}$$

В итоге мы получаем одно из лингвистических правил, которое описывает работу нечеткой комбинационной схемы. Аналогично находятся остальные правила. Запишем их коротко в табл. 7.

Таблица 7
Зависимость выходных сигналов МНКС «терморегулирование» от входных

α_{i1}, α_{i0}	βc_i	βh_i
$-, \alpha_0$	βc_0	βh_1
$-, \alpha_1$	βc_0	βh_0
α_0, α_2	βc_0	βh_0
α_1, α_2	βc_1	βh_0
α_2, α_2	βc_1	βh_0

Алгоритм выбора выходных сигналов МНКС также можно привести в виде блок-схемы (рис. 5).

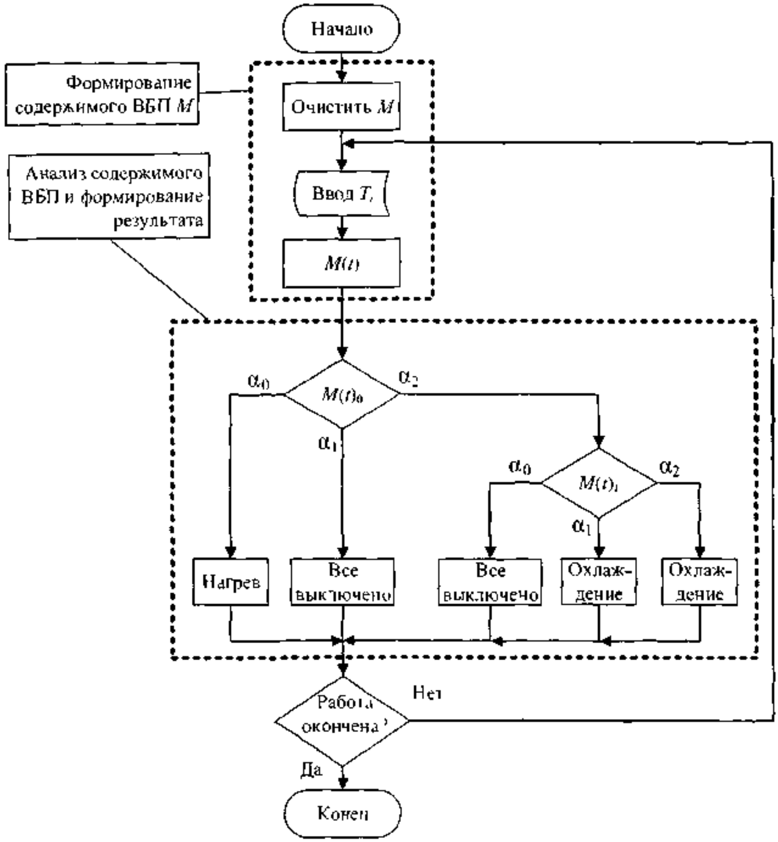


Рис. 5. Блок-схема алгоритма выбора управляющего воздействия в МНКС «терморегулирование»

По табл. 7 сформируем матрицы выходов (табл. 8, 9).

Таблица 8
Матрица для расчета мощности охладителя $\delta c_{i1,\, i0,\, j}$ МНКС «терморегулирование»

$i1$, $i0$	j	
	0	1
0, 0	1	0
0, 1	1	0
0, 2	1	0
1, 0	1	0
1, 1	1	0
1, 2	0	1
2, 0	1	0
2, 1	1	0
2, 2	0	1

Таблица 9
Матрица для расчета мощности нагревателя $\delta h_{i1,\, i0,\, j}$ МНКС «терморегулирование»

$i1$, $i0$	j	
	0	1
0, 0	0	1
0, 1	1	0
0, 2	1	0
1, 0	0	1
1, 1	1	0
1, 2	1	0
2, 0	0	1
2, 1	1	0
2, 2	1	0

Сравнение результатов работы НАКП, МНКС и ПИД-регулятора.

Сравним управляющие воздействия, полученные обоими алгоритмами с помощью численной модели объекта в среде MathCAD. Расчет температуры в модели осуществляется по закону (16). Коэффициенты в модели имеют значения $k_q=0{,}01$, $k_c=0{,}3$ $k_h=0{,}3$. Температура внешней среды T = 20 °С. Сформируем внешнее «случайное» воздействие на температуру объекта в момент времени *t=2*. Такое воздействие в реальной производственной установке может быть связано с добавлением в нее нового реагента, температура которого отличается от температуры уставки.

Рассчитаем изменение температуры под управлением НАКП, МНКС и, для демонстрации эффективности, ПИД-регулятора с коэффициентами $k_п=2$, $k_и=1,5$ $k_д=1,3$ (рис. 6).

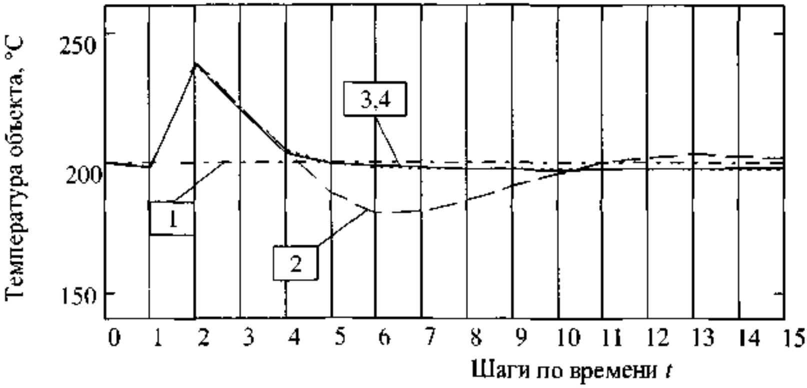


Рис. 6. Температура среды в производственной установке. Компенсирование возмущений с помошью НАКП, МНКС, ПИД-регулятора:

1 — температура уставки *T*= 200 °С; 2 — температура объекта под управлением ПИД-регулятора; 3 — температура объекта под управлением НАКП; 4 - температура объекта под управлением МНКС

Приведенные коэффициенты были подобраны эмпирически в ходе эксперимента так, чтобы минимизировать заброс и колебания.

Сравним быстродействие всех моделей. Для этого найдем суммарное время, потребовавшееся для расчета приведенных выше последовательностей температур (табл. 10).

Таблица 10

Полные времена расчетов изменения температуры в установке под управлением различных устройств

Управляющее устройство	Время расчета, с
НАКП	0,047
МНКС	0,015
ПИД-регулятор	0,016

По результатам моделирования можно сделать следующие выводы:

• МНКС формирует управляющий сигнал, аналогичный управляющему сигналу НАКП с высокой точностью;

• МНКС работает быстрее НАКП;

• нечеткие устройства по скорости формирования управляющего сигнала не уступают ПИД-регулятору;

• нечеткие устройства обладают большой гибкостью в настройках, в связи с чем их намного легче настроить для достижения эффективного управления, чем ПИД-регулятор;

• в случае нечетких устройств не составляет труда добиться отсутствия эффекта перерегулирования.

Показано, что работу нечеткого автомата с конечной памятью можно описать с помощью модифицированной нечеткой комбинационной схемы. Результирующие сигналы автомата и схемы в обоих случаях совпадают между собой с высокой точностью. Нечеткие комбинационные схемы, так же как и нечеткие автоматы, обладают гибкостью настройки и более широкой областью допустимых значений входных параметров по сравнению с «четкими» автоматами.

Однако нечеткие комбинационные схемы обладают большей простотой реализации по сравнению с нечеткими автоматами, т. к. при их построении можно напрямую применять широко известные алгоритмы нечеткого логического вывода. Быстродействие МНКС оказывается выше, чем быстродействие НАКП. Быстродействие нечетких устройств оказывается на уровне быстродействия ПИД-регулятора. Однако нечеткие устройства обладают большей простотой настройки по сравнению с ПИД-регулятором, что позволяет избавиться от эффекта перерегулирования.

Литература

1 *Rabin M. O.* Probabilistic automata // Information and Control, 1963. Vol. 6. No. 3. P. 230-245.
2 *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Дж.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. - М.: Вильяме, 2002. 528 с.
3 *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. - М.: Наука, 1970. 274 с.
4 *Carlyle J. W.* Reduced forms for stochastic sequential machines // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1963. Vol. 7. No. 2. P. 167-175.
5 *Бухараев Р. Г.* Некоторые эквивалентности в теории вероятностных автоматов // Учёные записки Казанского университета, 1964. Т. 124. № 2. С. 45-65.
6 *Starke P. H.* Theorie stochastischen Automaten // Elektronische Informations verarbeitung und Kybernetik, 1965. Vol. 1. No. 2. P. 5-32.
7 *Paz A.* Introduction to Probabilistic Automata. - New York: Academic Press, 1971. 228 p.
8 *Бухараев Р. Г.* Основы теории вероятностных автоматов. -М.: Наука, 1985. 288 с.
9 *Segala R., Lynch N. A.* Probabilistic simulations for probabilistic processes // Nordic Journal of Computing, 1995. Vol. 2. No. 2. P. 250-273.
10. **Марценюк М.А.** Матричное представление нечеткой логики // Нечеткие системы и мягкие вычисления. Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2007. Т. 2. № 3. С. 7–35.
11. **Zadeh L.A.** Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. Pp. 338–353.
12. **Mohammadian M., Sarker R.A., Yao X.** Computational intelligence in control. Idea Group Publishing, 2003.
13. **Пегат А.** Нечеткое моделирование и управление. Пер. с англ. М.: Бином, 2009. 798 с.
14. **Santos E.** Maximin automata // Information and Control. 1968. Vol. 13. Pp. 363–377.
15. **Topencharov V., Stoeva S.** Fuzzy-topological automata // Fuzzy Sets and Systems. 1985. Vol. 16. Iss. 1. Pp. 65–74.
16. **Reyneri L.M.** An Introduction to Fuzzy State Automata. Biological and Artificial Computation: From Neuroscience to Technology // Lecture Notes in Computer Science. 1997. Vol. 1240. Pp. 273–283.
17. **Malik D.S., Mordeson J.N., Sen M.K.** Minimization of fuzzy finite automata // Information Sciences. 1999. Vol. 113(3-4). Pp. 323–330.
18. **Mordeson J.N., Malik D.S.** Fuzzy automata and languages: theory and applications. Chapman &Hall/CRC, 2002.

19. **Belohlavek R., Krupka M.** Approximate minimization of fuzzy automata. Palacky University, 2007.

20. **Bartolomiej P.** A traffic model based on fuzzy cellular automata // J. of Cellular Automata, 2013. Vol. 8. No. 3-4. Pp. 261–282.
21. **Micic I., Jancic Z., Ignjatovic J, Ciric M.** Determinization of fuzzy automata by means of the degrees of language inclusion. [электронный ресурс] / URL: http://arxiv.org/abs/1410.6063 (дата обращения 09.12.2014).
22. **Брауэр В.** Введение в теорию конечных автоматов. Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1987.392 с.
23. **Карпов Ю.Г.** Теория автоматов. СПб.:Питер, 2003. 208 с.
24. **Марценюк М.А.** Операторно-логические схемы как средство изучения алгоритмов в учебных курсах по математике и информатике // Прикладная информатика. 2010. № 5(23). С. 43–54.
25. **Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.** Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: ИД «Вильямс», 2002. С. 528.
26. **Berstel J., Boasson L., Carton O., Fagnot I.** Minimization of Automata, Automata:from Mathematics to Applications, EuropeanMathematical Society [электронный ресурс] /URL: http://arxiv.org/abs/1010.5318 (дата обращения 09.12.2014).
27. **Campeanu C.** Simplifying Nondeterministic Finite Cover Automata // Electronic Proceedingsin Theoretical Computer Science. 2014. Vol. 151. Pp. 162–173.
28. **Anderson J.A.** Automata Theory with Modern Applications. Cambridge University Press, 2006.
29. **Lei H., Li Y.M.** Minimization of states in automata theory based on finite lattice-ordered monoids // Information Sciences. 2007. Vol. 177(6). Pp. 1413–1421.
30. **Mamdani E.H.** Application of fuzzy algorithms for the control of a simple dynamic plant // In Proc. IEEE. 1974. Pp. 121–159.
31. **Takagi T., Sugeno M.** Fuzzy identification of systems and applications to modelling and control // IEEE Trans. On SMC 15. 1985. Pp. 116–132.
32. **Марценюк М.А., Поляков В.Б., Селетков И.П.** Матричная реализация алгоритмов нечеткого вывода // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2012. № 6(162). С. 133–141.
33. А. Е. Кононюк. Дискретно-непрерывная математика. Кн.11 Автоматы, ч.1. Детерминированные автоматы (начало). Киев, Освита Украины. 2017, 658 с.
34. А. Е. Кононюк. Дискретно-непрерывная математика. Кн.11 Автоматы, ч.2. Детерминированные автоматы (Окончание). Киев, Освита Украины. 2017, 578 с.